Física II
2. Pequeñas oscilaciones

MAS: Retroalimentación

Consideraciones energéticas.

Ejemplos del MAS

La ecuación del oscilador armónico simple y su solución.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Ecuación general del MAS

$(\omega t + \phi), fase\ del\ movimiento$

$\phi, constante\ de\ fase$

$\boldsymbol{x = A\cos(\omega t + \phi)}$

$A, amplitud\ del\ movimiento$

$\boldsymbol{v = -A\omega sen(\omega t + \phi)}$

$\boldsymbol{A\omega}$, amplitud de la velocidad

$\mathbf{a} = \boldsymbol{-A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)}$

$\boldsymbol{A\omega^2}$, amplitud de la aceleración

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, frecuencia angular

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(movimiento armónico simple)} \qquad (14.11)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(movimiento armónico simple)} \qquad (14.12)$$

Condiciones iniciales $t = 0$

$$x_0 = A\cos(\phi)$$

$$v_0 = -A\omega\sin(\phi)$$

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{\omega^2}}$$

$$\boxed{x_0 = 0}$$

$$0 = A\cos(\phi) \qquad \boxed{\phi = \pm\frac{\pi}{2}}$$

$+v_0$

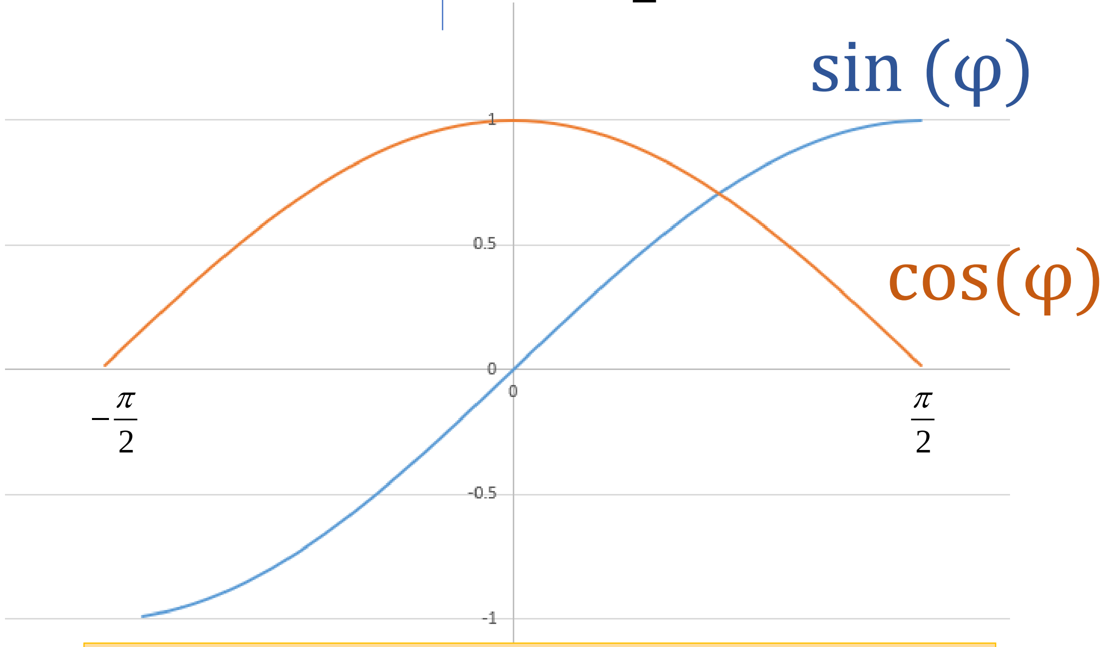
$$v_0 = -A\omega\sin(\phi)$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

$-v_0$

$$-v_0 = -A\omega\sin(\phi)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$



Se toma el signo contrario de la velocidad

Ejemplo 1

Un objeto experimenta un MAS con periodo de 1.200 s y amplitud de 0.600 m. En t = 0 el objeto está en x = 0 y se mueve en la dirección negativa x. ¿Qué tan lejos se encuentra el objeto con respecto a la posición de equilibrio cuando t = 0.480 s?

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

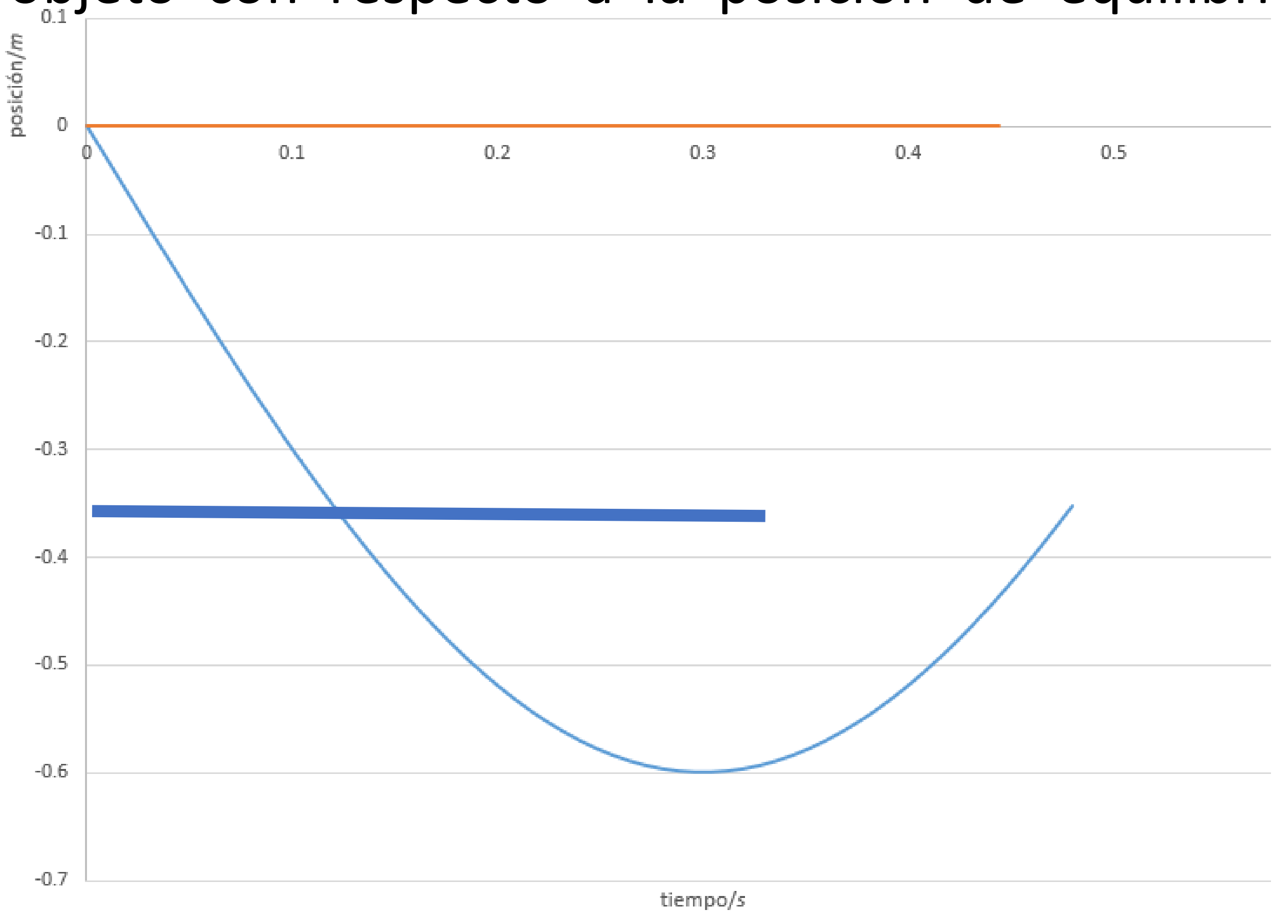
$$\omega = \frac{2\pi}{1.200\ \text{s}}$$

$$\omega = 5.236\ \text{s}^{-1}$$

$$x(0) = A\cos(\omega(0) + \phi)$$

$$0 = \cos(\pm\frac{\pi}{2})$$

$$x(t) = (0.600\ \text{m})\cos(5.236\ \text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{2})$$



$$x = (0.600\ \text{m})\cos(5.236\ \text{s}^{-1}(0.480\ \text{s}) + \frac{\pi}{2})$$

$$x = -0.353\ \text{m}$$

Ejemplo 2

Un objeto experimenta un MAS con periodo de 0.300 s y una amplitud de 6.00 cm. En t = 0 el objeto se encuentra instantáneamente en reposo en x = 6.00 cm. Calcule el tiempo que tarda el objeto en pasar de x = 6.00 cm a x = -1.50 cm.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{0.300\text{ s}}$$

$$\omega = 20.9\text{ s}^{-1}$$

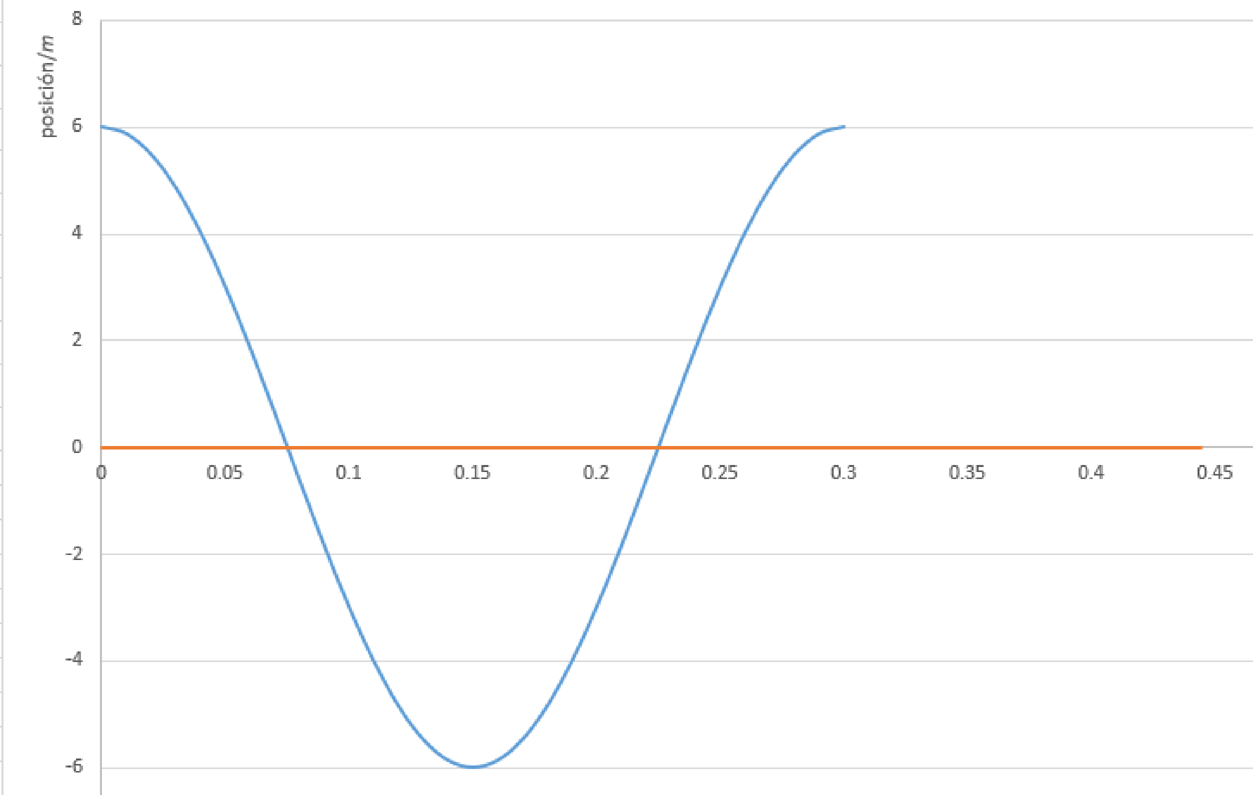
$$\phi = 0$$

$$x(t) = (6.00\text{ cm})\cos(20.9\text{ s}^{-1}t)$$

$$t = \frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)$$

$$t = \frac{1}{20.9\text{ s}^{-1}}\cos^{-1}\left(\frac{-1.50\text{ cm}}{6.00\text{ cm}}\right)$$

$$t = 0.0872\text{ s}$$



Constante de fase

x_0 positivo

$+x_0 = A\cos(\phi)$

$+v_0$

$+v_0 = -A\omega\sin(\phi)$

$-v_0$

$-v_0 = -A\omega\sin(\phi)$

$+x_0$ uso la ecuación de la velocidad

x_0 negativo

$-x_0 = A\cos(\phi)$

$+v_0$ $\quad +v_0 = -A\omega\sin(\phi)$

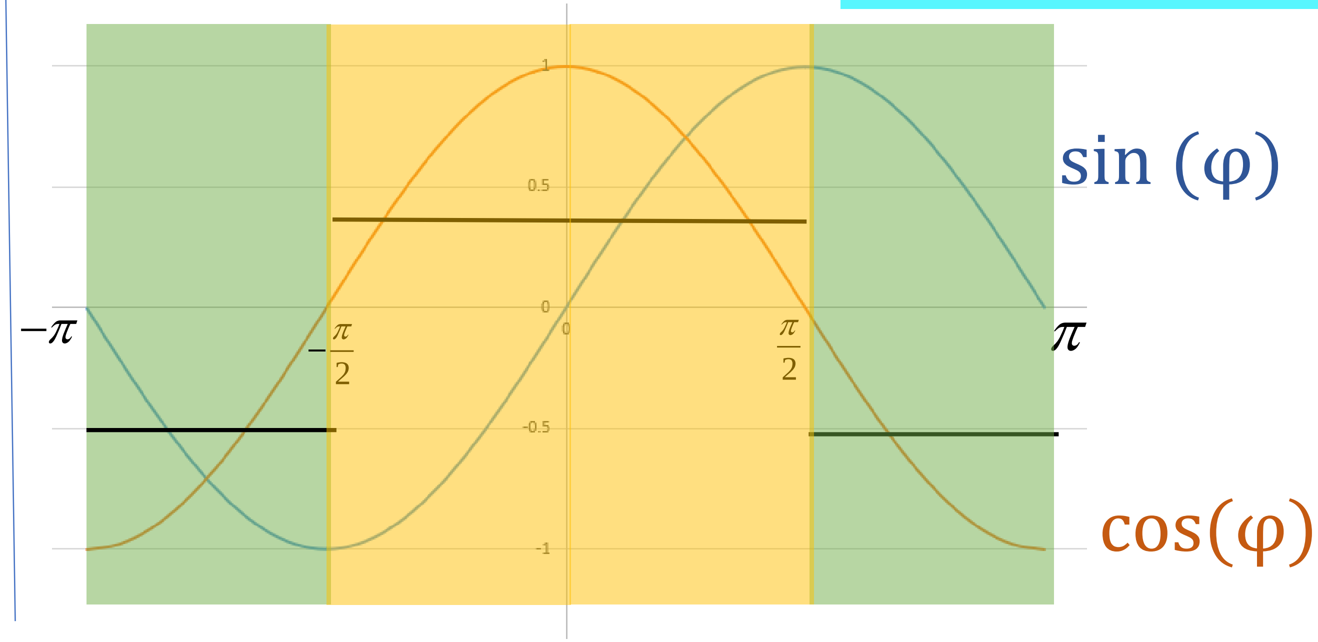
Negativo

$-x_0 = A\cos(\phi)$

$-v_0$ $\quad -v_0 = -A\omega\sin(\phi)$

Positivo

$-x_0$ uso la ecuación de posición y tomo el signo contrario de v



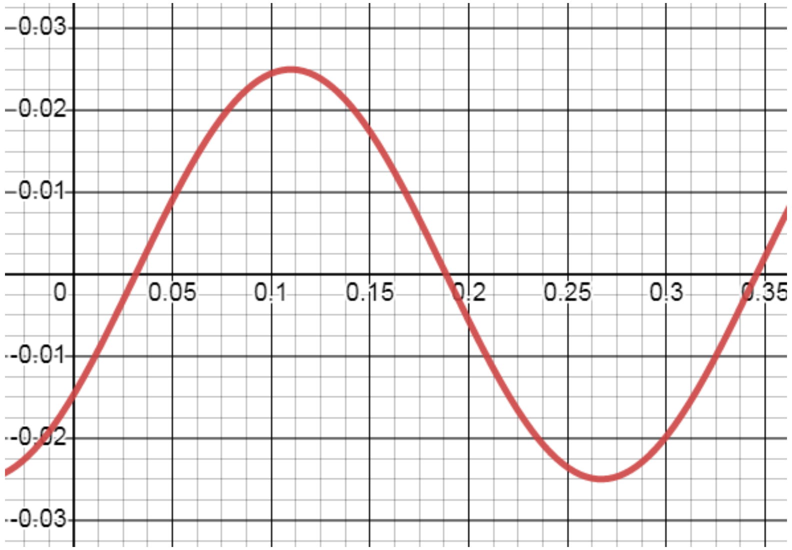
Ejemplo 3: Determinar $\emptyset$ si $x_0 < 0$ y $v_0 > 0$

Regla: $x_0 < 0 \rightarrow$ ec. de x_0 y $\emptyset$ tiene el signo opuesto de v_0

ec. de x_0

ec. de v_0

$$\emptyset = -2.2\, rad$$



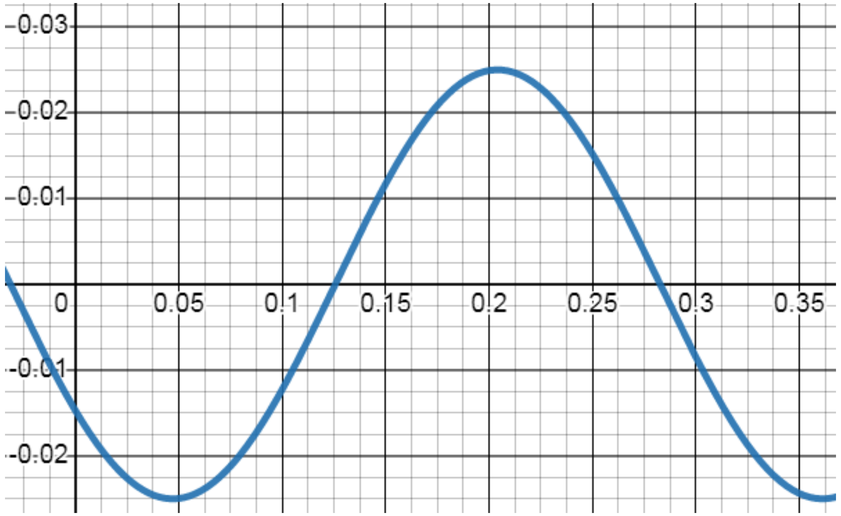
$$0.025 \cos(20x - 2.2)$$

$$x_0 = -0.015\, m$$

v_0 es (+)

CORRECTO

$$\emptyset = +2.2\, rad$$

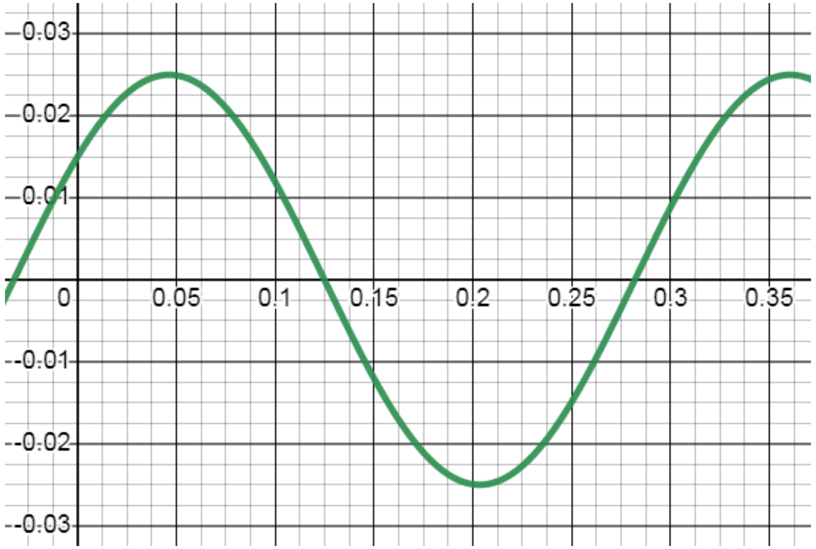


$$0.025 \cos(20x + 2.2)$$

$$x_0 = -0.015\, m$$

v_0 es (-)

$$\emptyset = -0.93\, rad$$



$$0.025 \cos(20x - 0.93)$$

$$x_0 = 0.015\, m$$

v_0 es (+)

I N C O R R E C T O

Ejemplo 4

A un sistema cuerpo-resorte de constante elástica de 200 N/m y 0.50 kg le impartiremos un desplazamiento inicial x_0 = -0.015 m y una velocidad inicial v_0 = +0.40 m/s. Determine la frecuencia angular, la amplitud, el ángulo de fase del movimiento y la ecuación de la posición.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = 20\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{v_0{}^2}{\omega^2}}$$

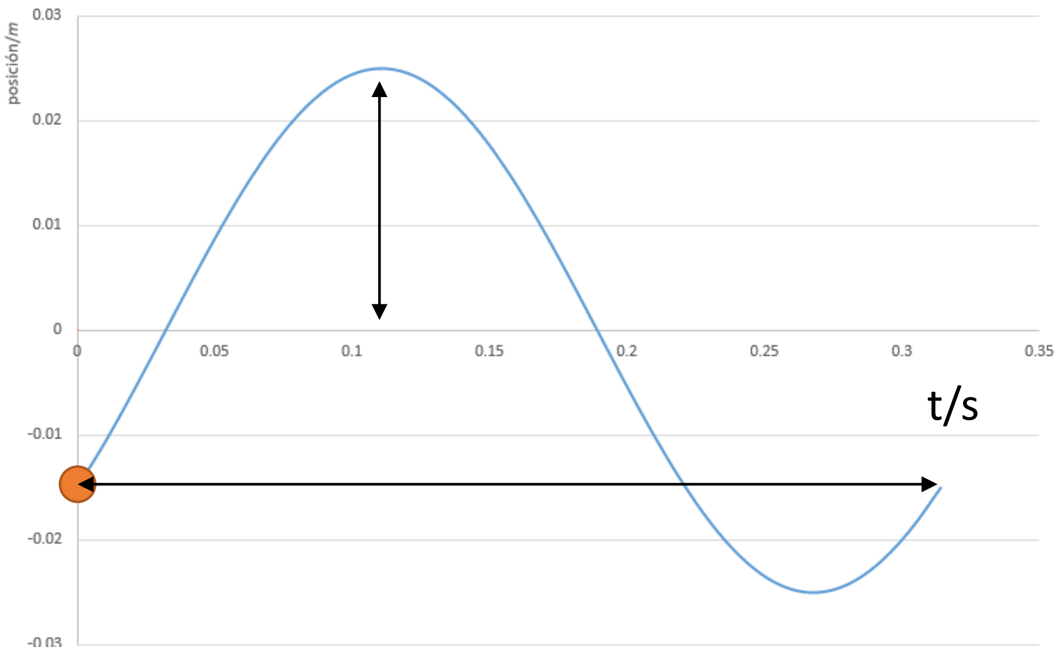
$$A = 0.025\ \mathrm{m}$$

$$x_0 = A\cos(\phi)$$

$$\phi = \mp\cos^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right) \text{ para } \pm v_0 \qquad \phi = -2.2\ \mathrm{rad}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = (0.025\ \mathrm{m})\cos\left[\left(20\ \mathrm{s}^{-1}\right)t - 2.2\ \mathrm{rad}\right]$$

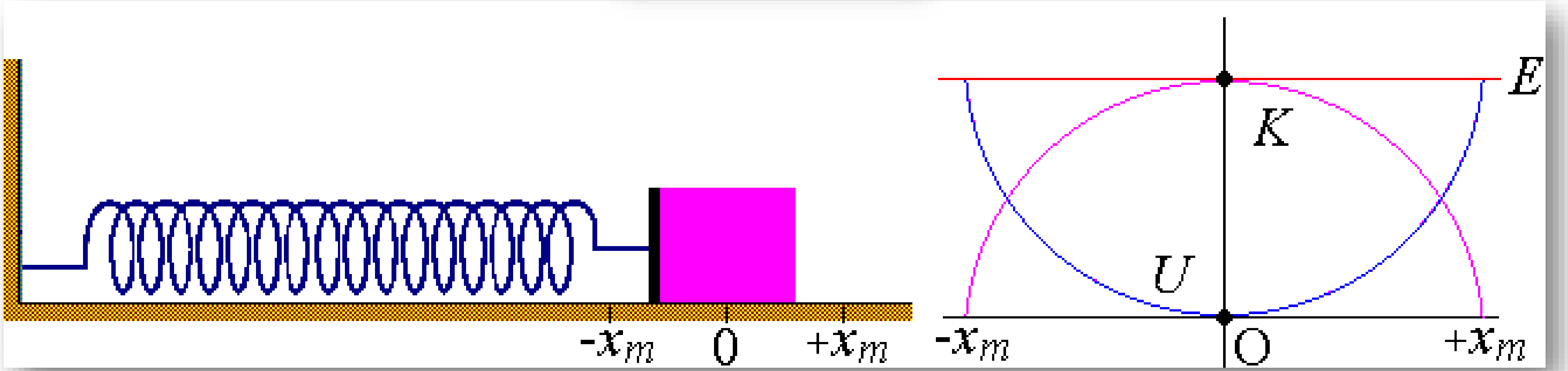


Movimiento armónico simple

$$F_x = -kx$$

Fuerza de restitución

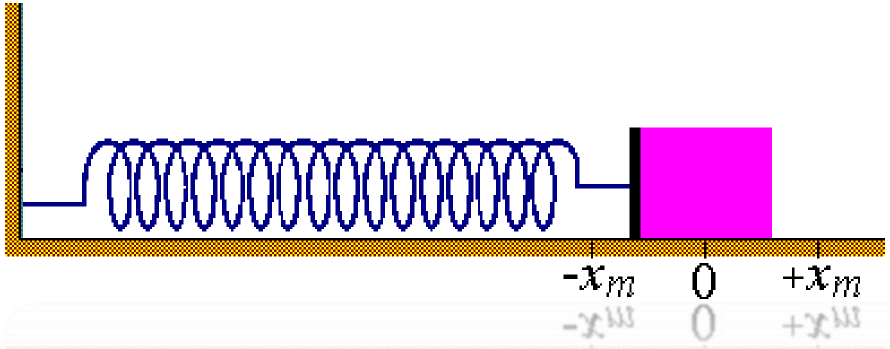
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

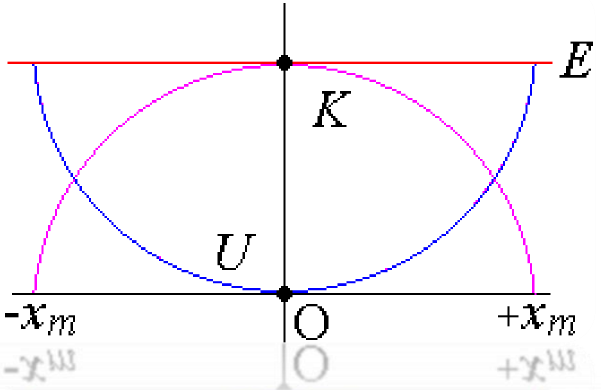


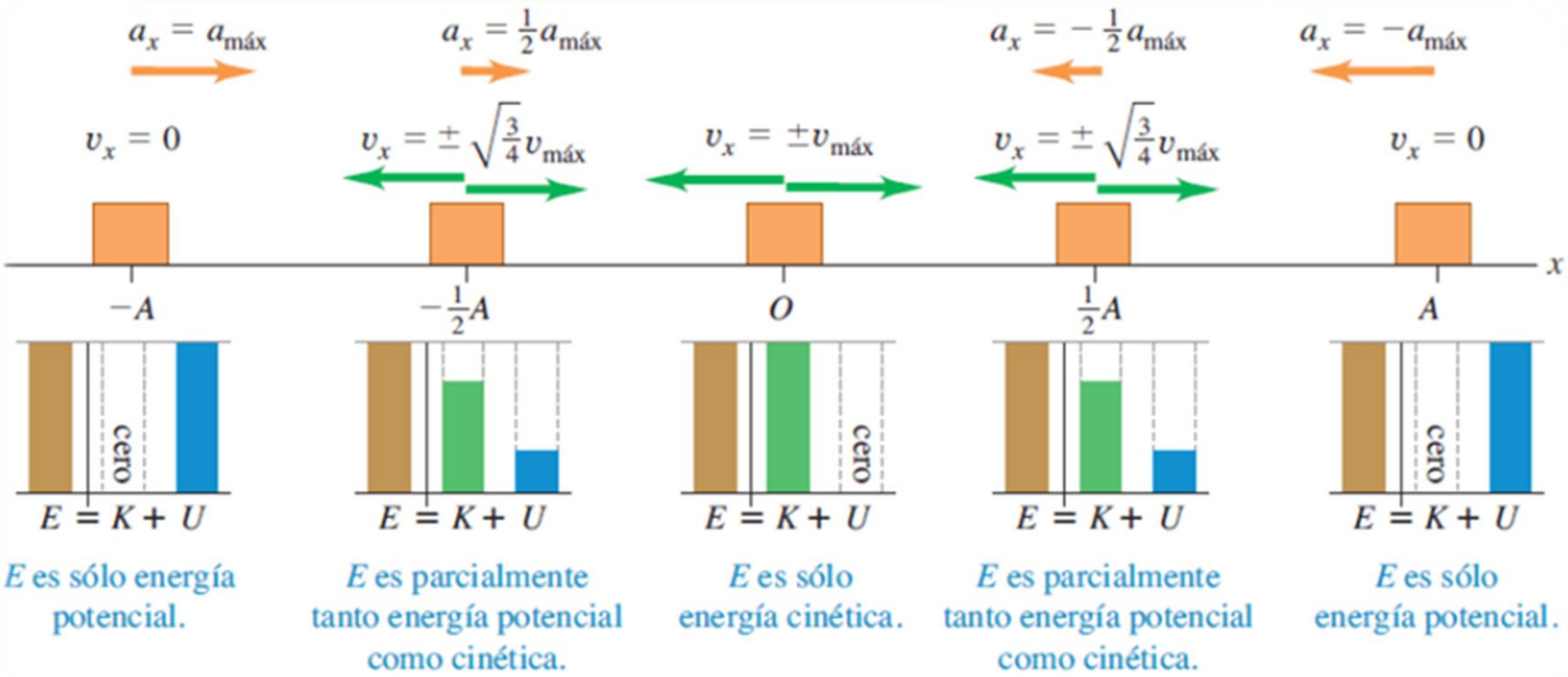
M.A.S: Consideraciones energéticas.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \qquad v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A$$

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$$ (energía mecánica total en un MAS)







Pregunta 3

a) Para duplicar la energía total de un sistema masa-resorte oscilando con MAS, ¿en qué factor se debe aumentar la amplitud?

i. 4; ii. 2; iii. $\sqrt{2} = 1.414$ iv. $\sqrt[4]{2} = 1.189$ v. no cambia.

SOLUCIÓN:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}kA_2^2}{\frac{1}{2}kA_1^2} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = 2$$

$$E_2 = 2E_1 \quad A_2 = (???)A_1$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \sqrt{2} \qquad A_2 = \sqrt{2}A_1$$

b) ¿En qué factor cambiará la frecuencia como resultado de tal incremento de amplitud?

i. 4; ii. 2; iii. $\sqrt{2} = 1.414$ iv. $\sqrt[4]{2} = 1.189$ v. no cambia.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ejemplo 5

A un objeto con masa 0.200 kg se le aplica una fuerza de restitución elástica con constante de fuerza de 10.0 N/m.

a) Trace la gráfica de la energía potencial elástica *U* en función del desplazamiento *x* en un intervalo de *x* que va de -0.300 m a +0.300 m.

El objeto se pone en oscilación con una energía potencial inicial de 0.140 J y una energía cinética inicial de 0.060 J. En relación con la gráfica:

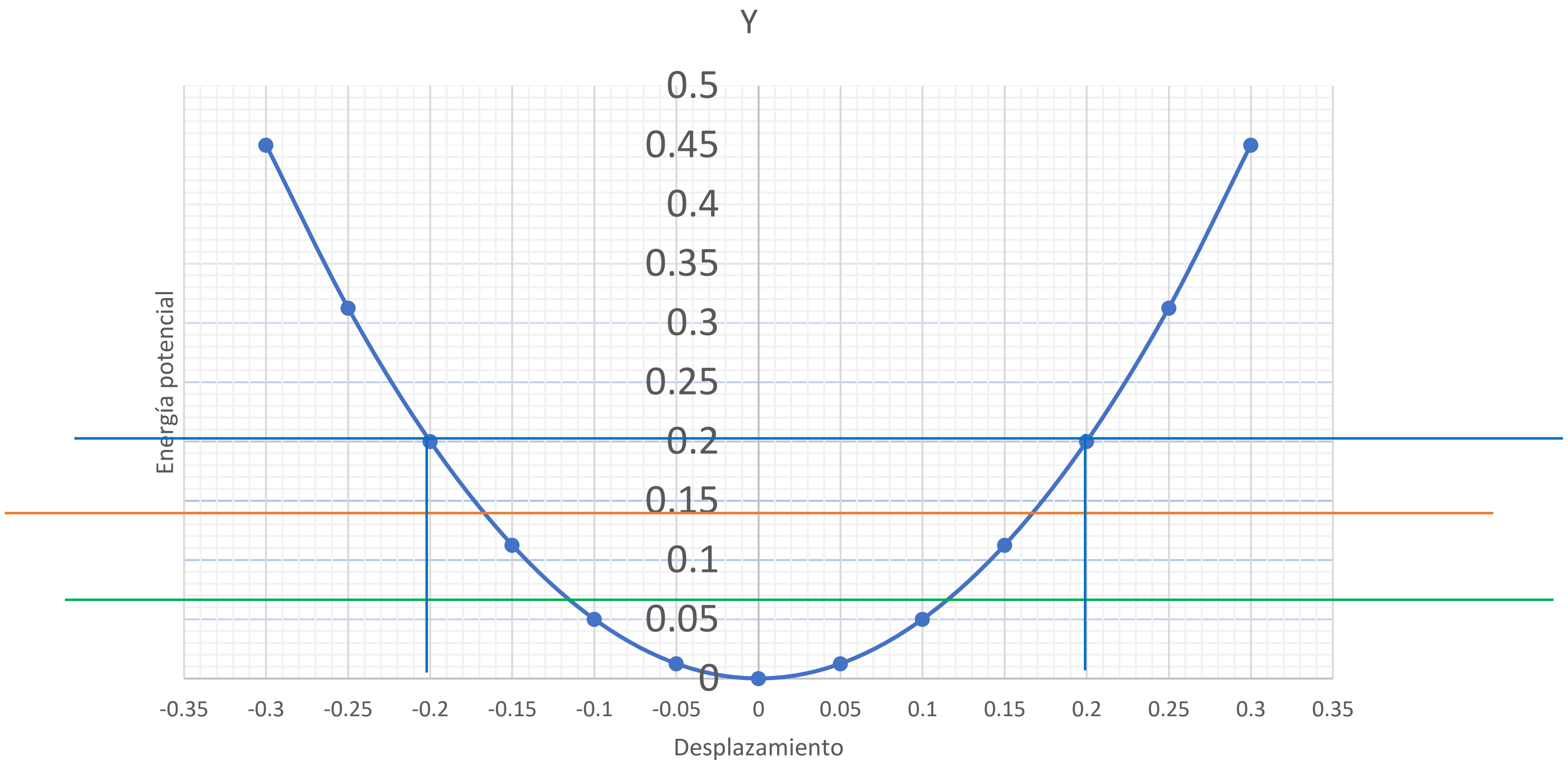
b) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

c) ¿Cuál es la energía potencial cuando el desplazamiento es la mitad de la amplitud?

d) ¿En qué desplazamiento son iguales las energías cinética y potencial?

e) ¿Cuál es el valor del ángulo de fase si la velocidad inicial es positiva y el desplazamiento inicial es negativo?

Ejemplo 5



El objeto se pone en oscilación con una energía potencial inicial de 0.140 J y una energía cinética inicial de 0.060 J. En relación con la gráfica:

k =10 N/m

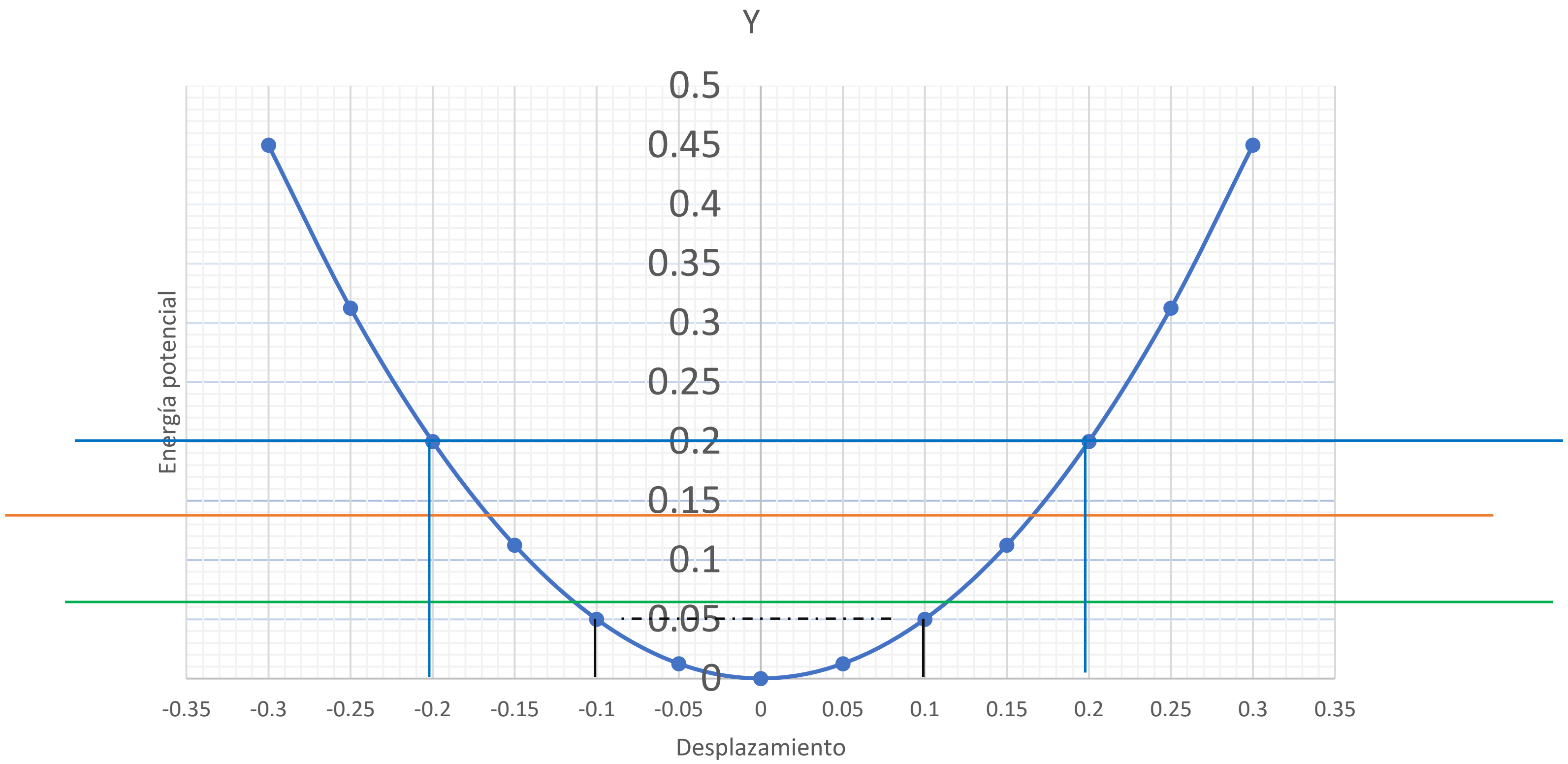
b) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(0.2\ \mathrm{J})}{10\ \mathrm{N/m}}}$$

$$E = 0.060\ \mathrm{J} + 0.140\ \mathrm{J} = 0.2\ \mathrm{J}$$

$$A = 0.2\ \mathrm{m}$$

Ejemplo 5



El objeto se pone en oscilación con una energía potencial inicial de 0.140 J y una energía cinética inicial de 0.060 J. En relación con la gráfica:

k =10 N/m

$A = 0.2\ \mathrm{m}$

c) ¿Cuál es la energía potencial cuando el desplazamiento es la mitad de la amplitud?

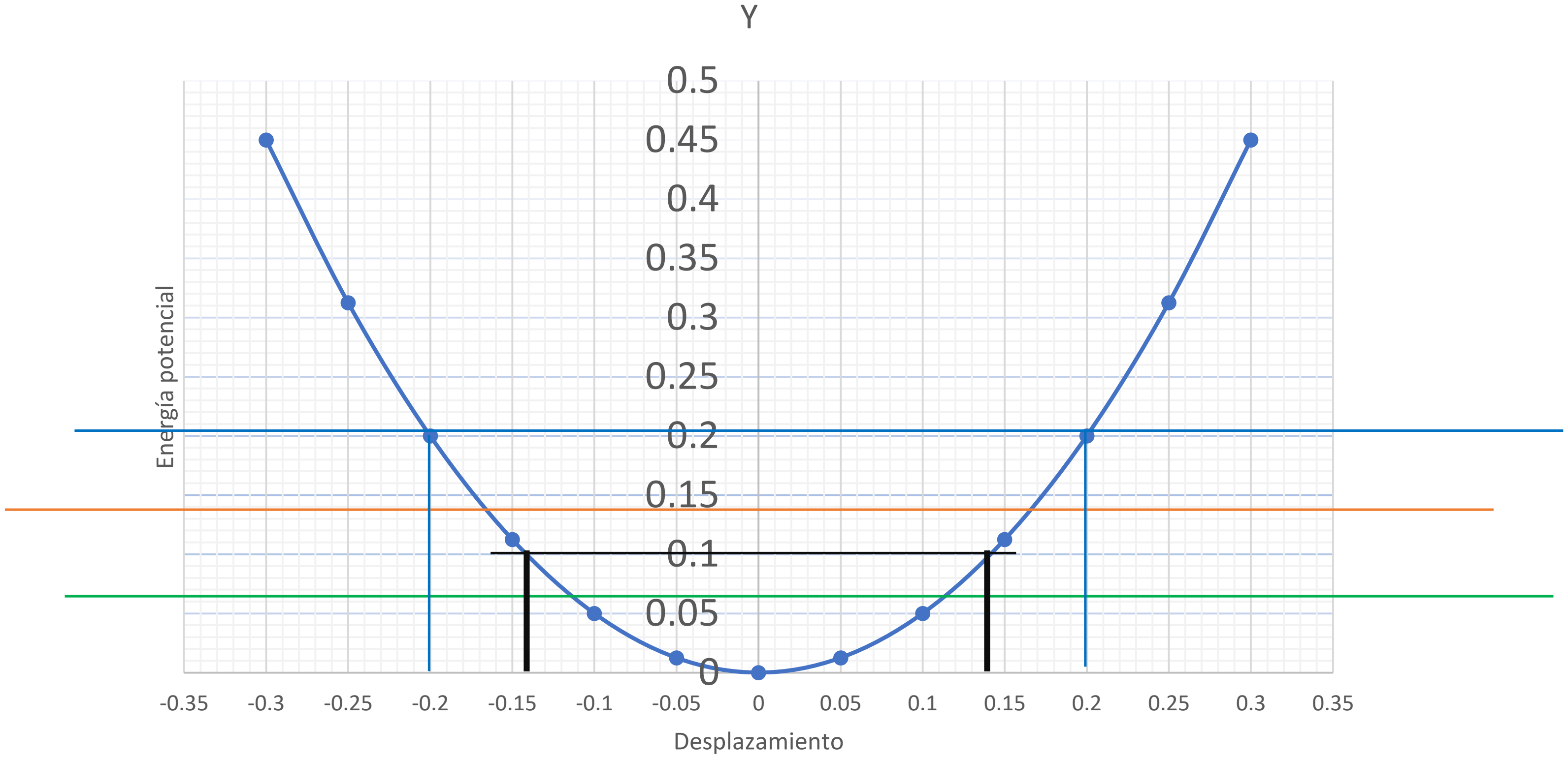
$$x = \frac{A}{2} \quad \rightarrow U = ?$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{kA^2}{8}$$

$$U = \frac{(10\ \mathrm{N/m})(0.2\ \mathrm{m})^2}{8}$$

$$U = 0.05\ \mathrm{J}$$

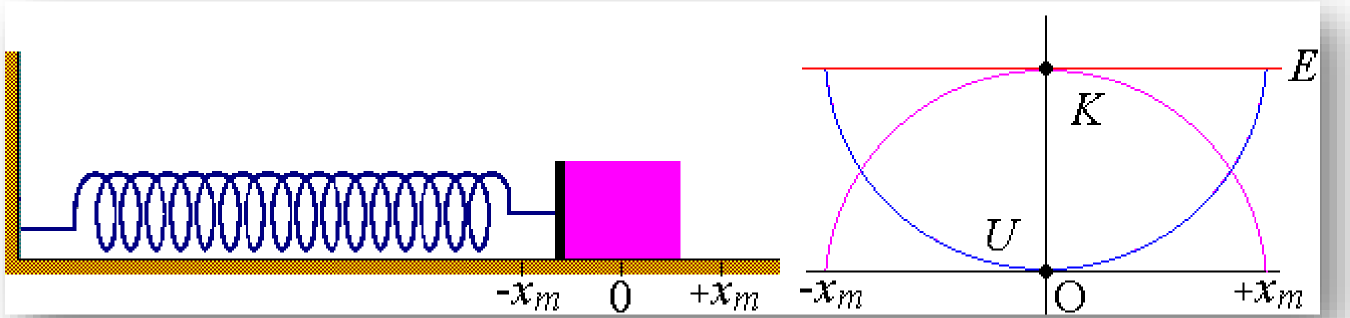
Ejemplo 5



El objeto se pone en oscilación con una energía potencial inicial de 0.140 J y una energía cinética inicial de 0.060 J. En relación con la gráfica:

d) ¿En qué desplazamiento son iguales las energías cinética y potencial?

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$
$$= \frac{(10\ \mathrm{N/m})(0.14\ \mathrm{m})^2}{2}$$
$$= 0.098\ \mathrm{m}$$
$$\approx 0.1\ \mathrm{m}$$



$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0.2\ \mathrm{m}}{\sqrt{2}}$$

$$x = 0.14\ \mathrm{m}$$

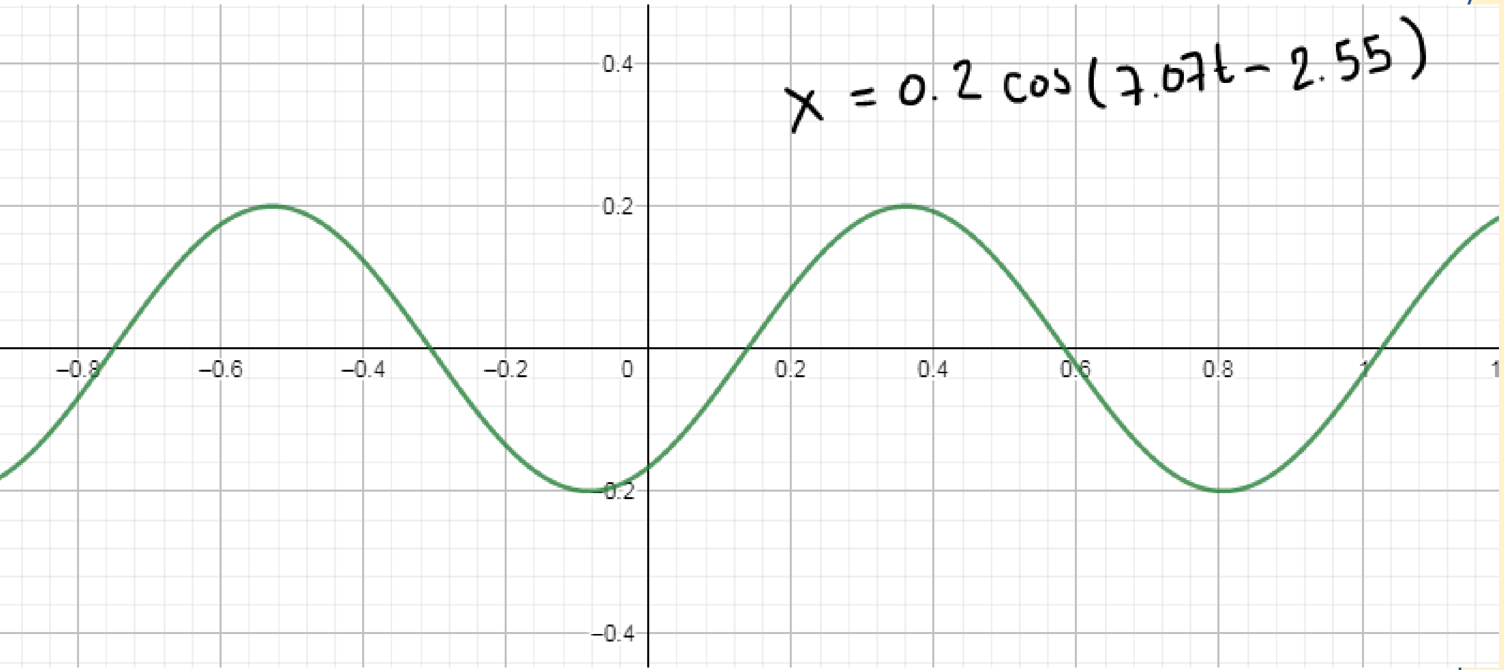
Ejemplo 5

$k = 10\ \text{N/m}$

El objeto se pone en oscilación con una energía potencial inicial de 0.140 J y una energía cinética inicial de 0.060 J. En relación con la gráfica:

$A = 0.2\ \text{m}$

e) ¿Cuál es el valor del ángulo de fase si la velocidad inicial es positiva y el desplazamiento inicial es negativo?



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$
$$-x_0 = A\cos(\varphi)$$
$$U_0 = \frac{1}{2}k{x_0}^2 \rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{k}}$$
$$\rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2(0.140\ \text{J})}{10\ \text{N/m}}} = 0.167\ \text{m}$$

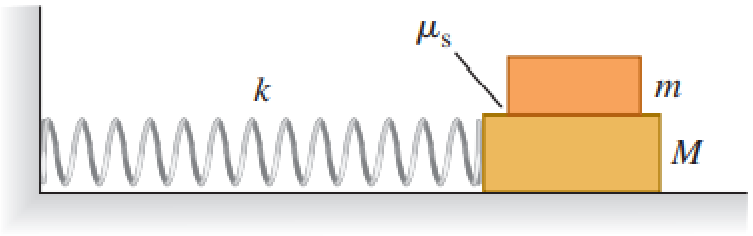
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10\ \text{N/m}}{0.200\ \text{kg}}} = 7.07\ \text{rad/s}$$

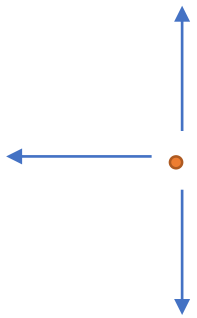
$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{-x_0}{A}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-0.167}{0.2}\right)$$
$$= 2.56\ rad$$

$$\varphi = -2.56\ rad$$

Ejemplo 6

Un bloque de masa M descansa en una superficie sin fricción y está conectado a un resorte horizontal con constante de fuerza k. El otro extremo del resorte está fijo a una pared (figura). Un segundo bloque de masa m está sobre el primero. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es μ_s. Determine la amplitud de oscilación máxima que no permite que el bloque superior resbale.





$$\sum F_x = f_s = ma$$

$$\mu_s \cancel{m} g = \cancel{m} a$$

$$a_{\max} = \mu_s g$$

$$a_{\max} = \mu_s g$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a_{\max} = \omega^2 A$$

$$\mu_s g = \omega^2 A$$

$$A = \frac{\mu_s g}{\omega^2}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{k}{m+M}$$

$$A = \frac{\mu_s g}{\dfrac{k}{m+M}}$$

$$A = \frac{\mu_s g(m+M)}{k}$$

GRACIAS