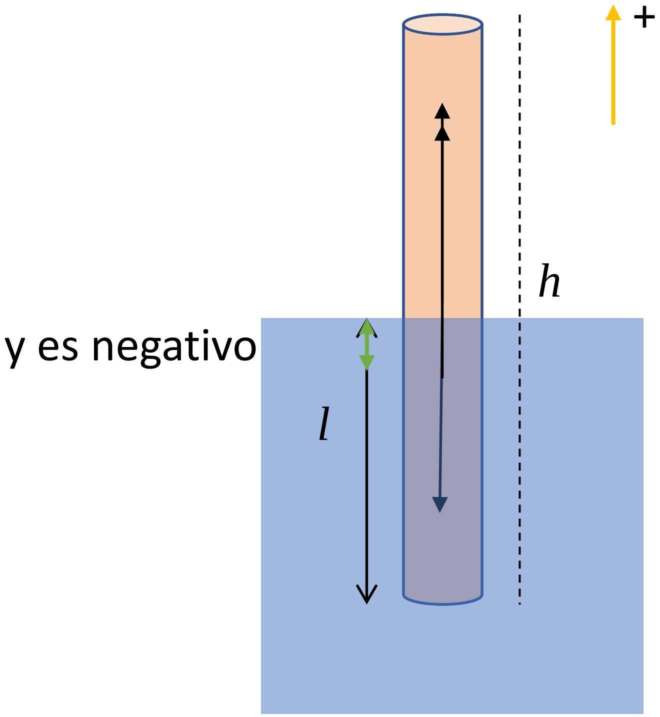
Física II
2. Pequeñas oscilaciones

Aplicaciones del MAS.
Resolución de problemas

Objeto oscilando en un líquido

Un objeto de altura h, masa M y área de sección transversal uniforme A flota erguido en un líquido con densidad ρ. a) Encuentre la ecuación de equilibrio b) Se le aplica una fuerza hacia abajo y se suelta ¿Cuál es su ecuación de movimiento? c) Calcule el periodo. Ignore el amortiguamiento debido a la fricción del fluido.



a)

$$\sum F_y = B - Mg = 0$$

$$g\rho A l - Mg = 0$$

b)

$$\sum F_y = B - Mg = Ma$$

$$\rho A(l - y)g - Mg = Ma$$

$$\cancel{g\rho A l} - \rho A y g - \cancel{Mg} = Ma$$

$$-\rho A y g = Ma$$

$$-\rho A g y = M\frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$M\frac{d^2 y}{dt^2} + \rho A g y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{\rho A g}{M}\right) y = 0$$

c)

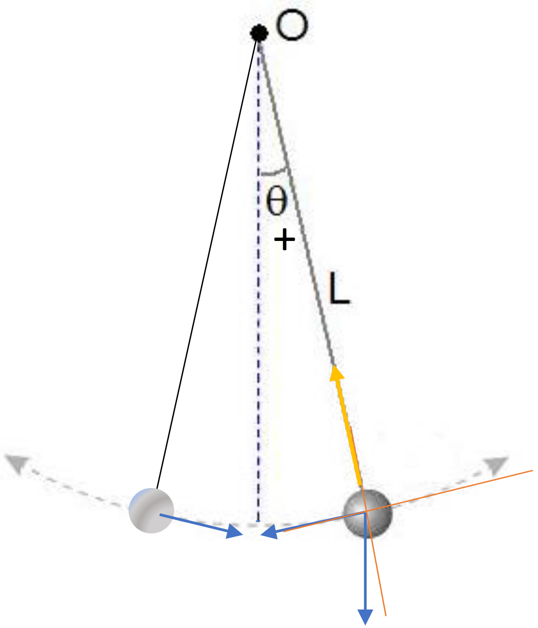
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\rho A g}{M}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\rho A g}}$$

Péndulo simple 1

Se tira de un péndulo simple de 0.240 m de longitud para moverlo 3.50° a un lado y luego se suelta. *a*) ¿Cuánto tarda la lenteja del péndulo en alcanzar su rapidez máxima? *b*) ¿Cuánto tarda si el ángulo es de 1.75° en vez de 3.50°?



$$F = -mg\sin\theta$$

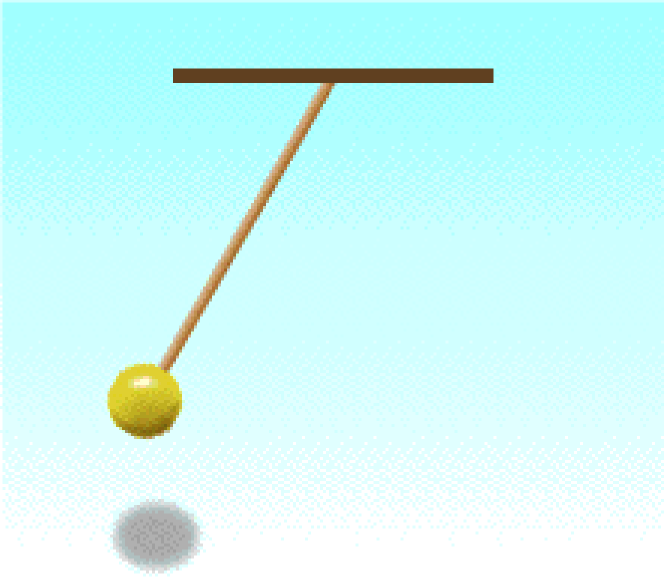
$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad s = L\theta$$

$$-g\sin\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \sin\theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$



a)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.240\ \text{m}}{9.80\ \text{m/s}^2}}$$

$$T = 0.983\ \text{s}$$

b) Es independiente de la amplitud

Péndulo simple 2

Un péndulo en Marte. En la Tierra cierto péndulo simple tiene un periodo de 1.60 s. ¿Qué periodo tendrá en Marte, donde $g = 3.71\ \text{m/s}^2$?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2}T^2 g_T$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2}(1.60\ \text{s})^2\left(9.80\ \text{m/s}^2\right)$$

$$L = 0.635\ \text{m}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_M}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.635\ \text{m}}{3.71\ \text{m/s}^2}}$$

$$T = 2.60\ \text{s}$$

$$T_M^2 = 4\pi^2\frac{L}{g_M}$$

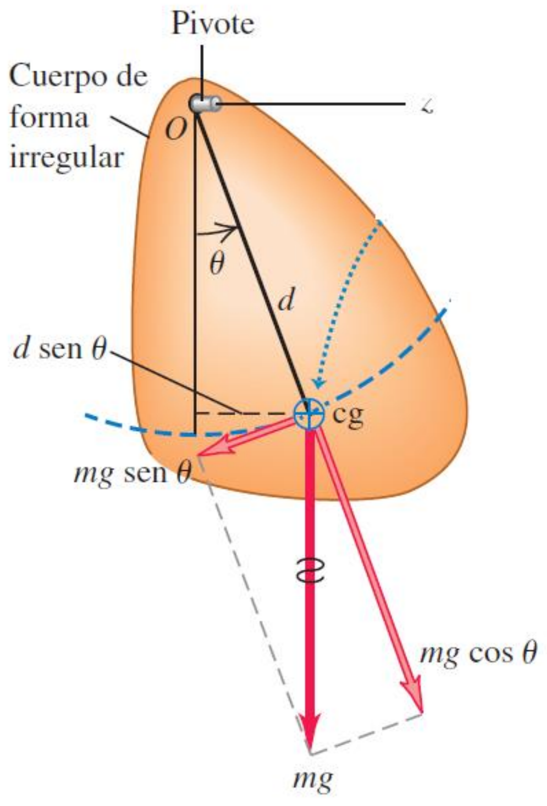
$$T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$$

$$\frac{T_M^2}{T^2} = \frac{g}{g_M}$$

$$T_M = \sqrt{\frac{g}{g_M}}T$$

Péndulo físico

Un péndulo físico es cualquier péndulo real que usa un cuerpo de tamaño finito, en contraste con el modelo idealizado de péndulo simple en el que toda la masa se concentra en un punto. Cuando el cuerpo se desplaza como se muestra en la figura encuentre a) la torca respecto al pivote b) la ecuación de movimiento utilizando la segunda ley para el caso rotacional c) para ángulos pequeños se cumple que sen $\theta \approx \theta$ ¿Es un oscilador armónico simple? ¿Cuál es su frecuencia angular y periodo?



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = rF \sin\theta$$

$$\tau_z = -(mg)(d \operatorname{sen}\theta)$$

$$I\alpha = -mgd \sin\theta$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -mgd\theta$$

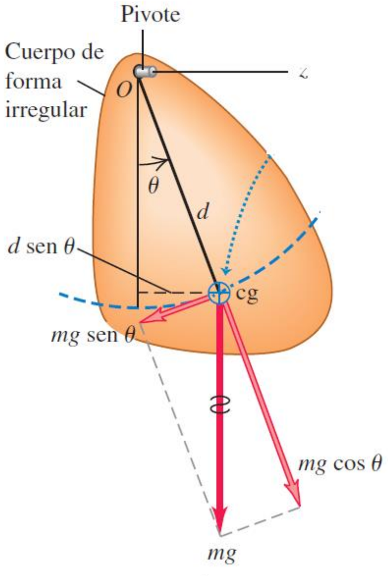
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Ejemplo del péndulo físico

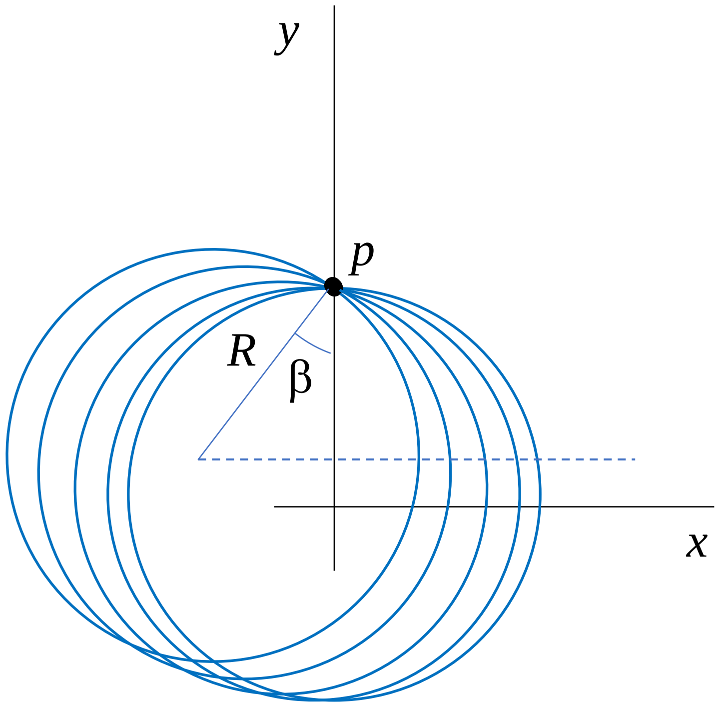
Queremos colgar un aro delgado de un clavo horizontal y hacer que tenga una oscilación completa con ángulo pequeño una vez cada 2.0 s. ¿Qué radio debe tener el aro?



$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgd}{I}\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$



$$I_p=I_{cm}+Md^2$$

$$I_p=MR^2+MR^2$$

$$I_p=2MR^2$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2\cancel{M}R^{\cancel{2}}}{\cancel{M}g\cancel{R}}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$T^2=4\pi^2\left(\frac{2R}{g}\right)$$

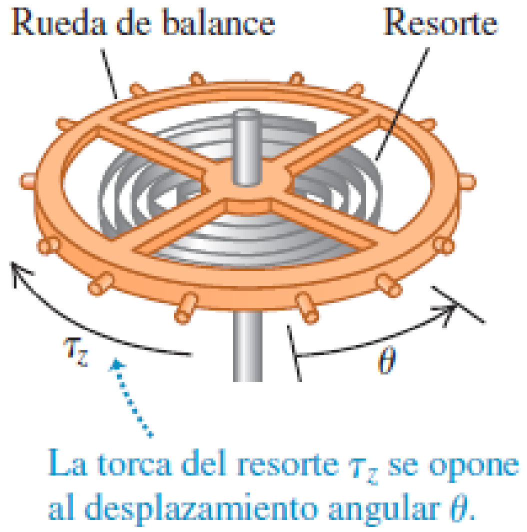
$$R=\frac{1}{8\pi^2}T^2g$$

$$R=\frac{1}{8\pi^2}(2.0\ \mathrm{s})^2(9.80\ \mathrm{m/s^2})$$

$$R=0.50\ \mathrm{m}$$

Péndulo de torsión

14.19 Rueda de balance de un reloj mecánico. El resorte ejerce una torca de restitución que es proporcional al desplazamiento angular θ; por lo tanto, el movimiento es MAS angular.



$$\tau_z = -\kappa\theta$$

$$\Sigma\tau_z = I\alpha_z = I\, d^2\theta/dt^2$$

$$-\kappa\theta = I\alpha$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

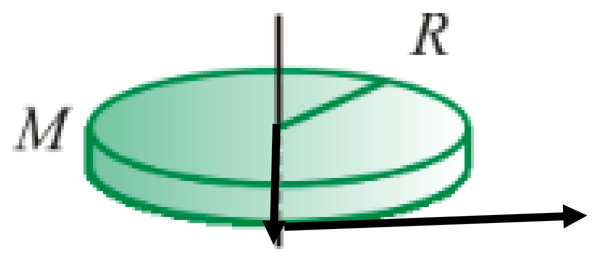
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{(MAS angular)}$$

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \phi)$$

Péndulo de torsión: Ejemplo

Un disco uniforme sólido de metal con masa de 6.50 kg y diámetro de 24.0 cm cuelga en un plano horizontal, apoyado en su centro con un alambre metálico vertical. Usted sabe que se requiere una fuerza horizontal de 4.23 N tangente al borde del disco para girarlo 3.34°, y así torcer el alambre. Ahora usted elimina esta fuerza y suelta el disco del reposo.

a) ¿Cuál es la constante de torsión para el alambre metálico? 0.0583 rad
b) ¿Cuáles son la frecuencia y el periodo de las oscilaciones de torsión del disco?
c) Escriba la ecuación del movimiento para θ(*t*) del disco.



$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \phi)$$

$t = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \Theta$ por lo tanto $\emptyset = 0$

Magnitud de la torca:

$$\tau_z = \kappa\theta$$

$$\tau_z = RF$$

$$\kappa\theta = RF$$

$$\kappa = \frac{RF}{\theta}$$

$$\kappa = \frac{(0.12\text{ m})(4.23\text{ N})}{0.0583\text{ rad}} = 8.71\text{ N m}$$

Frecuencia angular de oscilación

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad I = \frac{1}{2}(6.50\text{ kg})(0.12\text{ m})^2 = 0.0468\text{ kg m}^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{8.71\text{ N m}}{0.0468\text{ kg m}^2}}$$

$$\omega = 13.6\text{ s}^{-1}$$

$$\vec{\tau_z} = \vec{R} \times \vec{F}$$

$$\tau_z = \text{RF} \sin\alpha$$

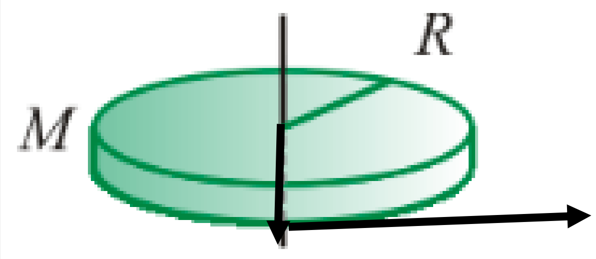
R es perpendicular a F

$$\alpha = 90°$$

Péndulo de torsión: Ejemplo

Un disco uniforme sólido de metal con masa de 6.50 kg y diámetro de 24.0 cm cuelga en un plano horizontal, apoyado en su centro con un alambre metálico vertical. Usted sabe que se requiere una fuerza horizontal de 4.23 N tangente al borde del disco para girarlo 3.34°, y así torcer el alambre. Ahora usted elimina esta fuerza y suelta el disco del reposo.

a) ¿Cuál es la constante de torsión para el alambre metálico?
b) ¿Cuáles son la frecuencia y el periodo de las oscilaciones de torsión del disco?
c) Escriba la ecuación del movimiento para θ(*t*) del disco.



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \phi)$$

$t = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \Theta$ por lo tanto $\emptyset = 0$

$\kappa = 8.71 \text{ N m} \qquad \omega = 13.6 \text{ s}^{-1}$

Frecuencia de oscilación

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{13.6\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi\text{ rad}} = 2.16\text{ Hz}$$

Período de oscilacióm

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2.16\text{ Hz}} = 0.46\text{ s}$$

$$\theta = 3.34°\cos[(13.6\text{ s}^{-1})t]$$

Ejercicio 1

Un bloque de 2.00 kg, que resbala sin fricción, se conecta a un resorte ideal con constante de fuerza de 300 N/m. En t = 0, el resorte no está estirado ni comprimido, y el bloque se mueve en la dirección negativa a 12.0 m/s.
Calcule *a*) la amplitud y *b*) el ángulo de fase.
c) Escriba una ecuación para la posición en función del tiempo.

¿Qué pasaría si…? en t = 0 el bloque tiene una velocidad de -4.00 m/s y un desplazamiento de +0.200 m.

Ejercicio 2

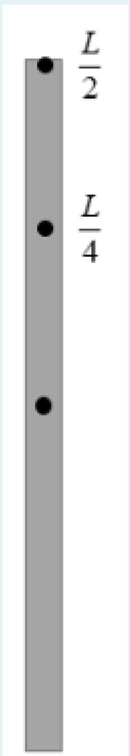
Si tenemos una barra de longitud L y masa M y primero la colgamos de uno de sus extremos y la ponemos a oscilar. Después la colgamos de un punto ubicado a la mitad entre el extremo y el centro de masa (I_{cm} = (1/12) ML^2) y nuevamente la ponemos a oscilar. Si el periodo de un péndulo simple es $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ entonces podemos afirmar que:

a. El periodo con el pivote a $L/4$ del centro de masa es 0.764T

b. El periodo con el pivote en el extremo es 0.816T

c. El periodo con el pivote en $L/4$ del centro de masa es 0.773T

d. El periodo con el pivote en el extremo es 0.889T



AHORA ES TU TURNO

GRACIAS