Física II
2. Pequeñas oscilaciones

Semana 05

Oscilaciones amortiguadas y forzadas

EVALUACIÓN FORMATIVA

Semana 1	Semana 2	Autoev. Hidrostática	Autoev. Hidrodinámica	Semana 4
31 (44.3%)	14 (20.0%)	10 (14.3%)	5 (7.1%)	5 (7.1%)

EVALUACIÓN SUMATIVA

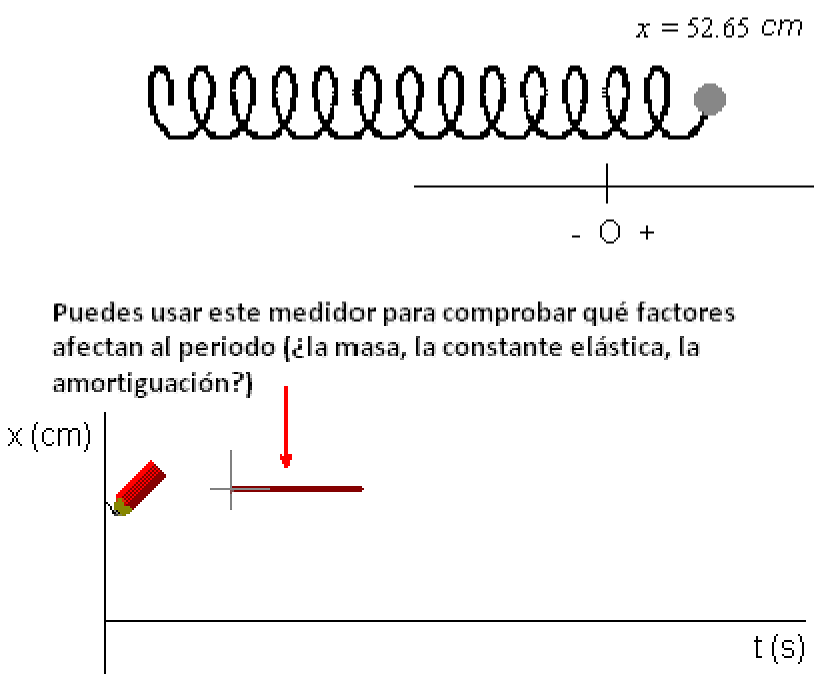
EXÁMENES ESCRITOS

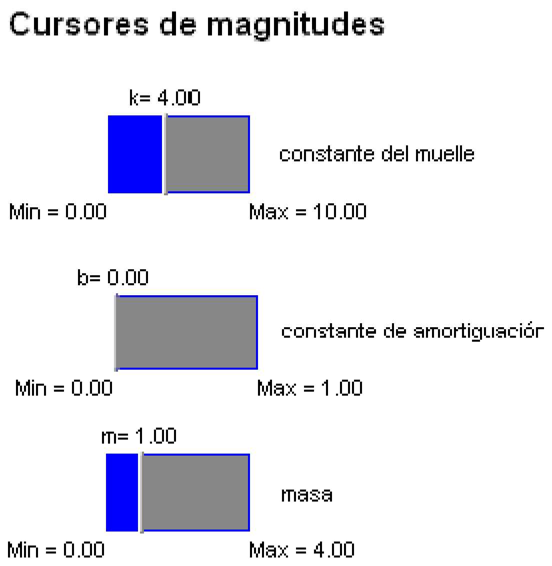
Corto 01: En la semana 6, del 17 al 21 de abril

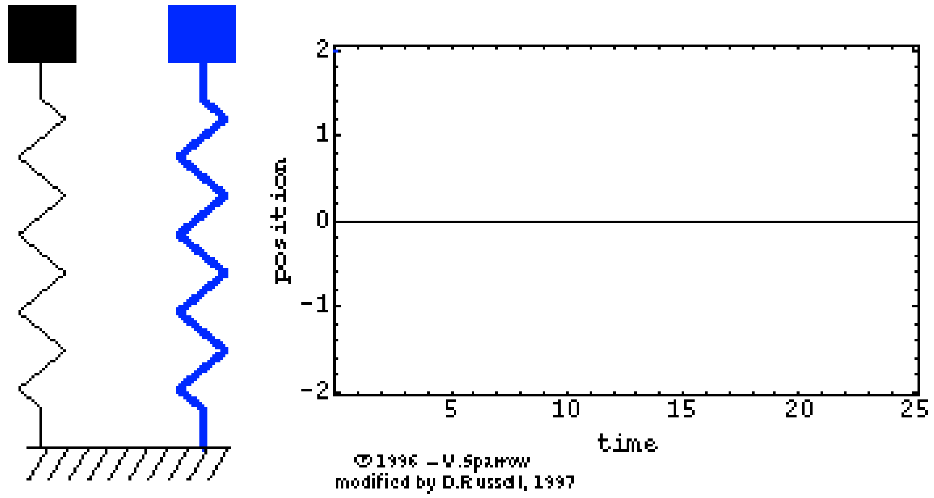
Parcial 01: Sábado 22 de abril

Movimiento armónico amortiguado.

OSCILACIONES AMORTIGUADAS







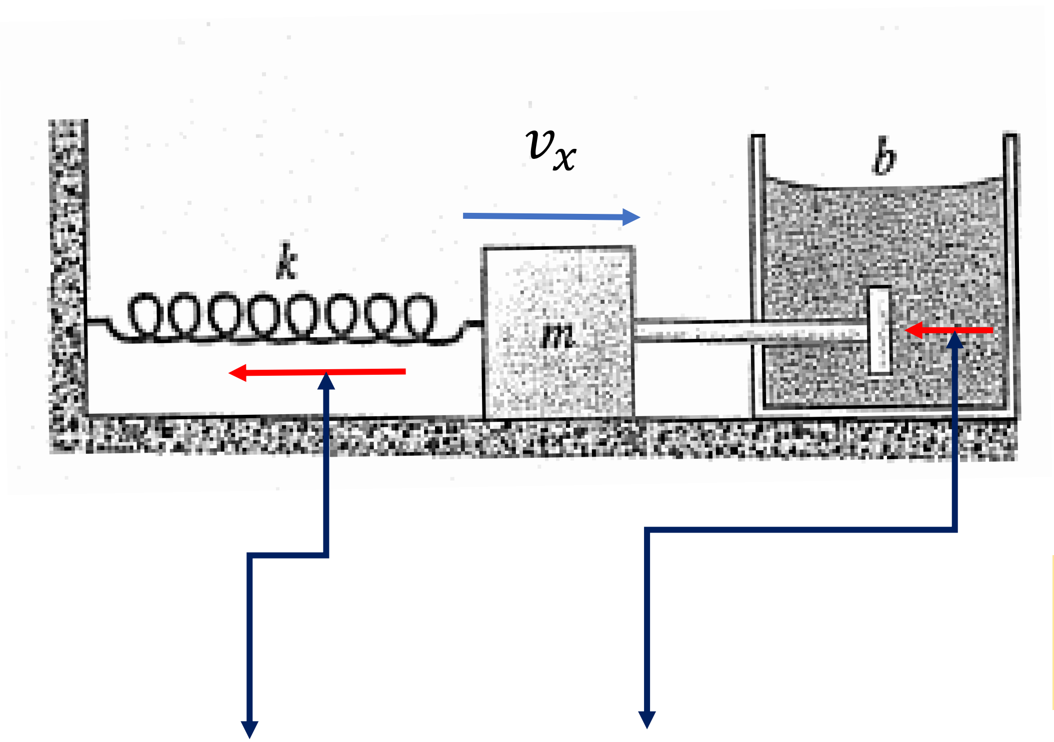
La disminución de la amplitud es causada por **fuerzas disipativas**

Una **fuerza de amortiguamiento por fricción** directamente proporcional a la *velocidad* del cuerpo oscilante.

- Fricción por flujo de fluidos viscosos: amortiguadores de los automóviles
- Deslizamiento entre superficies lubricadas con aceite

Movimiento armónico amortiguado.

La reducción de la amplitud causa un cambio insignificante en el periodo del oscilador. Esta perdida de amplitud recibe el nombre de amortiguamiento. Y al movimiento se le llama: movimiento amortiguado.



$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_x = -kx - bv_x$$

$$-kx - bv_x = ma_x$$

$$ma_x + bv_x + kx = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{bt}{2m}\right)}cos(\omega' t + \phi)$$

Movimiento armónico amortiguado.

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{bt}{2m}\right)}cos(\omega' t + \phi)$$

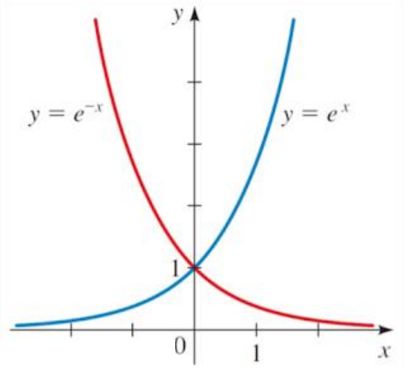
$Ae^{-\left(\frac{bt}{2m}\right)}$, es la amplitud de del movimiento armónico amortiguado.

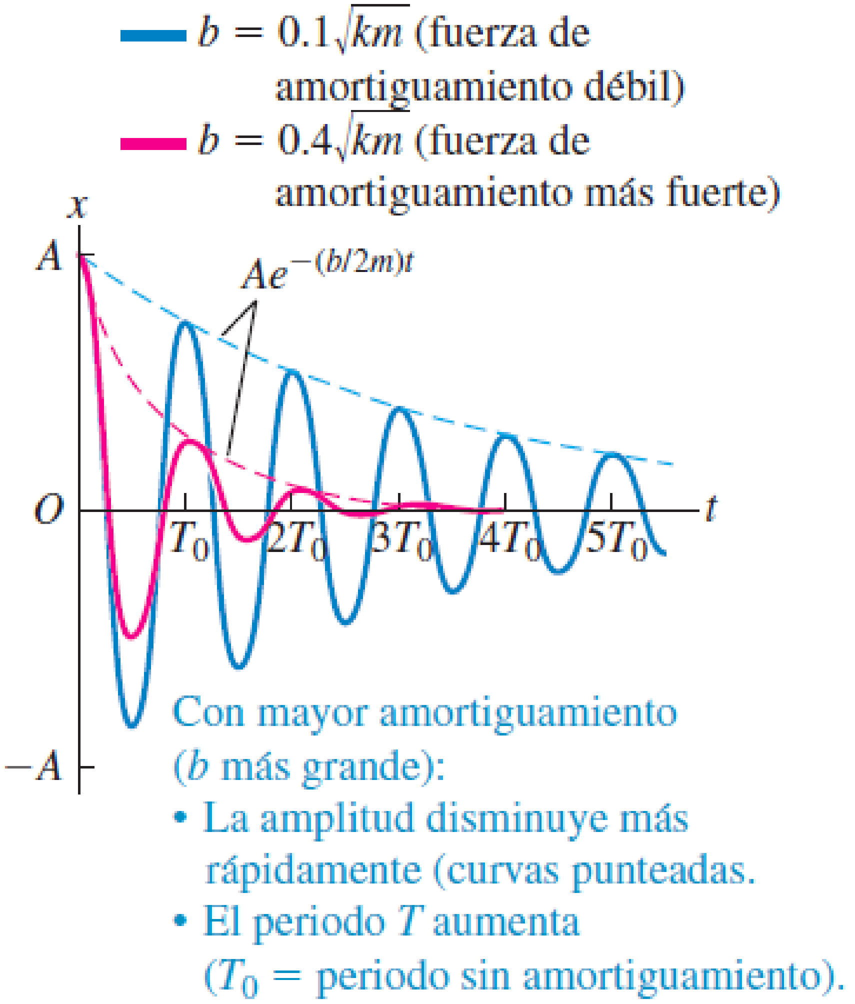
$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$, frecuencia del movimiento armónico amortiguado.

$\frac{2m}{b} = \tau$, constante de tiempo de amortiguamiento o vida media de la oscilación.

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}cos(\omega' t + \phi)$$

$\frac{2m}{b} = \tau$, se define como el tiempo necesario para que la amplitud descienda a 1/e de su valor inicial.
“m” en kg y “b” (viscosidad) en kg/s.





$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} cos(\omega' t + \phi)$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \rightarrow$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \rightarrow$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega' = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \phi)$$

Movimiento armónico amortiguado.

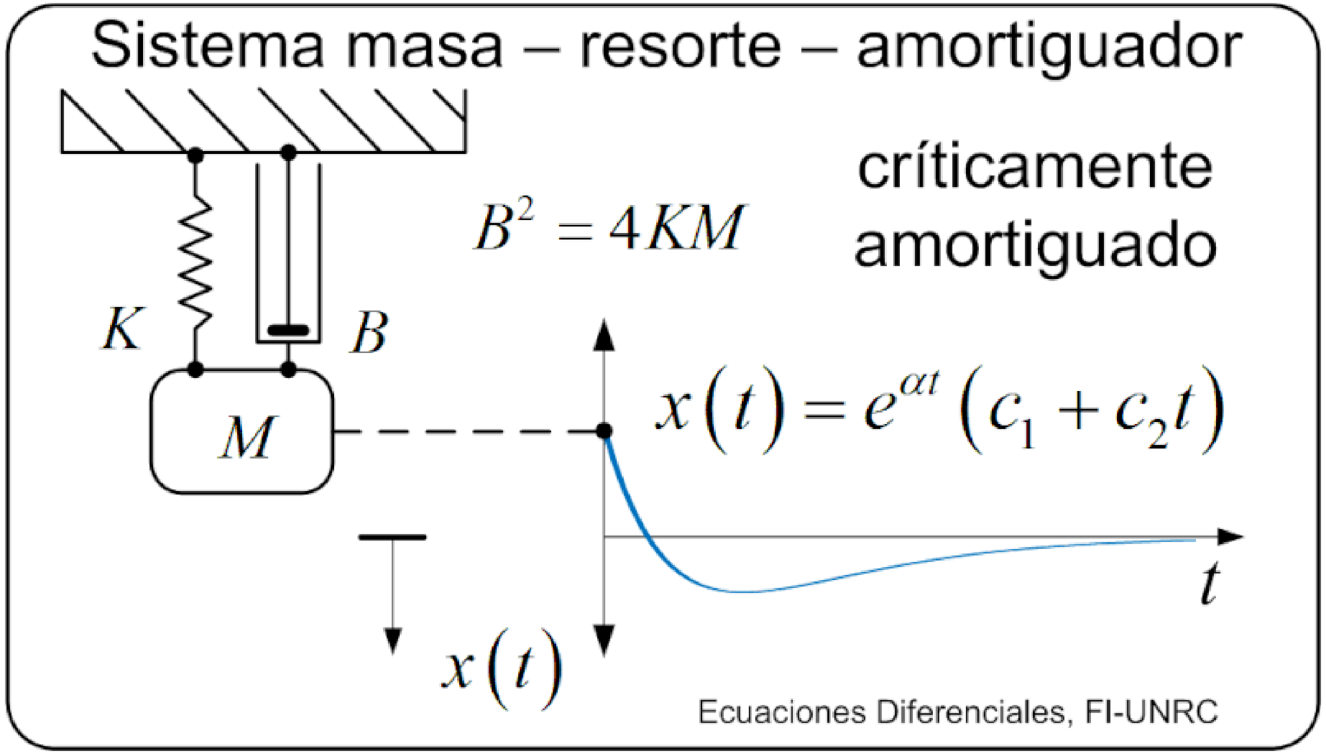
Movimiento armónico amortiguado. $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi)$ $\gamma = \dfrac{b}{2m}$ $\omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}$

$$\omega' = 0 \;\rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = 0 \;\rightarrow \frac{k}{m} = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 \;\rightarrow b = 2\sqrt{km}$$

Movimiento críticamente amortiguado (Crítico).
Es este caso el sistema realmente no oscila, si se desplaza del equilibrio inmediatamente retorna a esta posición.

$$b = 2\sqrt{km}$$

$\gamma = \omega_0$ existe una solución real doble.

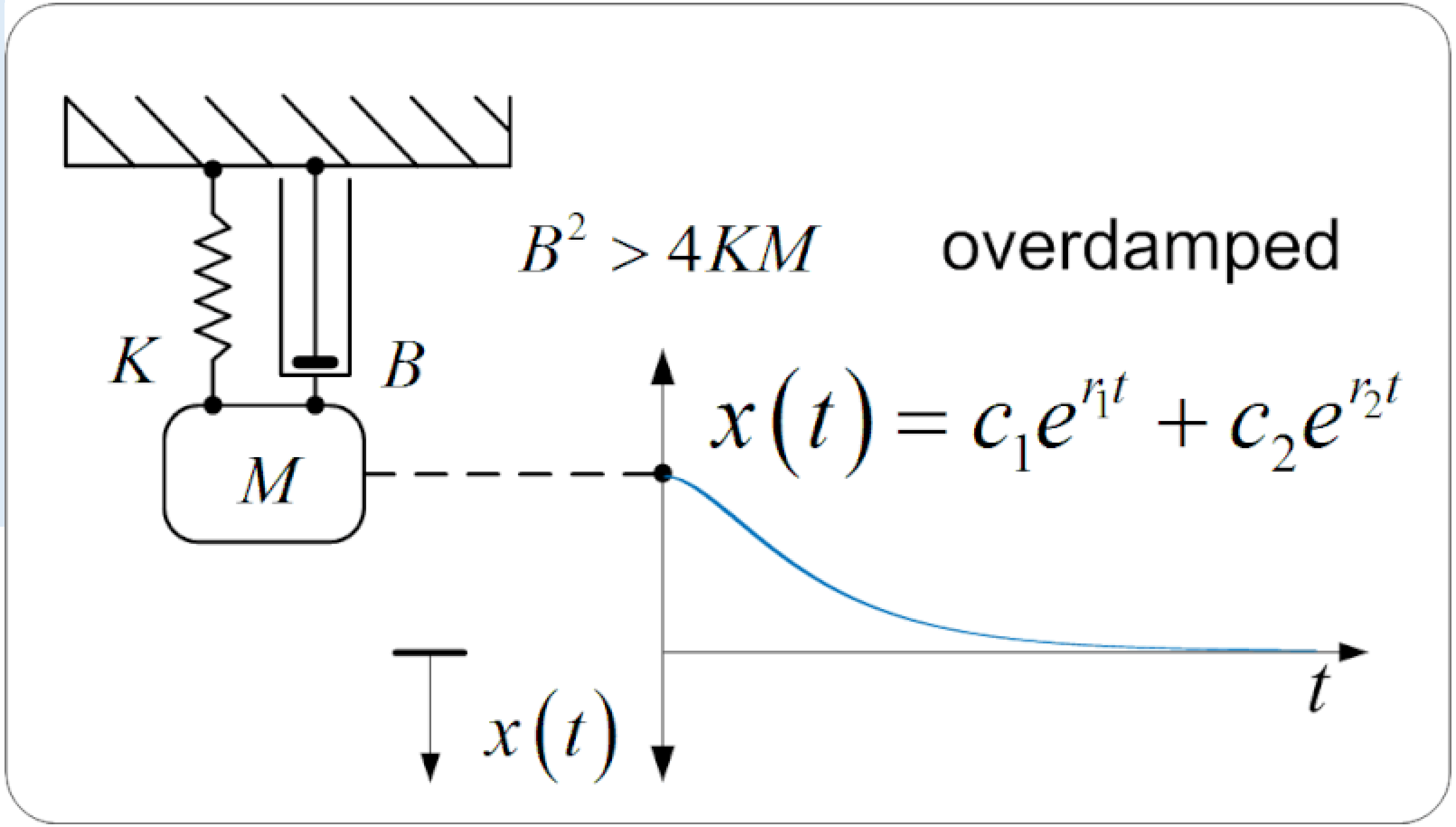


Ejemplo: amortiguadores de los vehículos.

Movimiento armónico amortiguado. $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi)$ $\gamma = \frac{b}{2m}$ $\omega' = \sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2}$

Movimiento sobre-amortiguado.

Aquí tampoco hay oscilación, pero el sistema regresa al equilibrio más lentamente que con amortiguamiento crítico.



$$b > 2\sqrt{km}$$

Si $\gamma > \omega_0$ las dos soluciones son reales y diferentes

Ejemplo: Puertas de oficinas con amortiguador.

Movimiento armónico amortiguado. $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi)$ $\gamma = \dfrac{b}{2m}$ $\omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}$

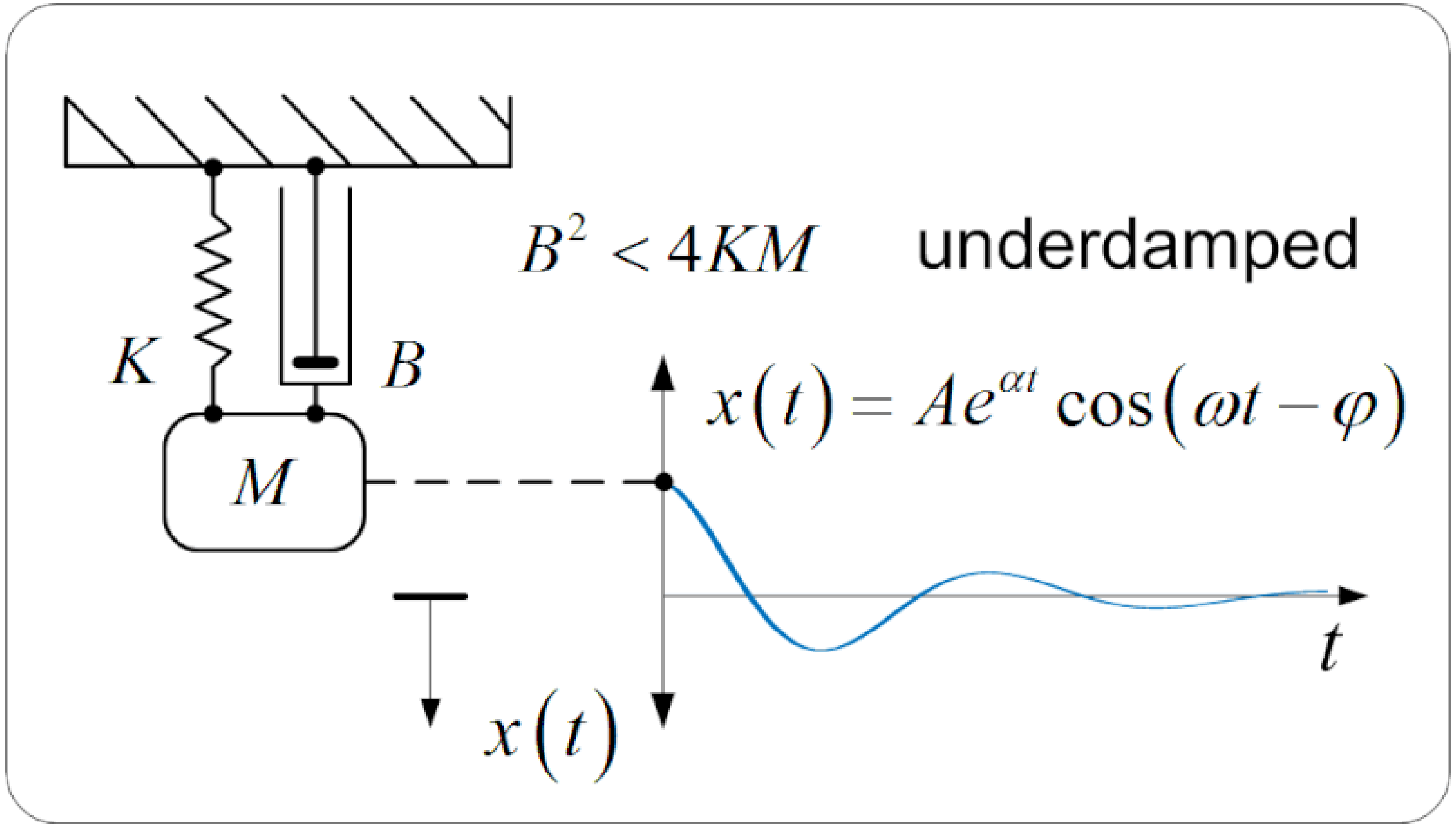
Movimiento sub-amortiguado.

(Débil)

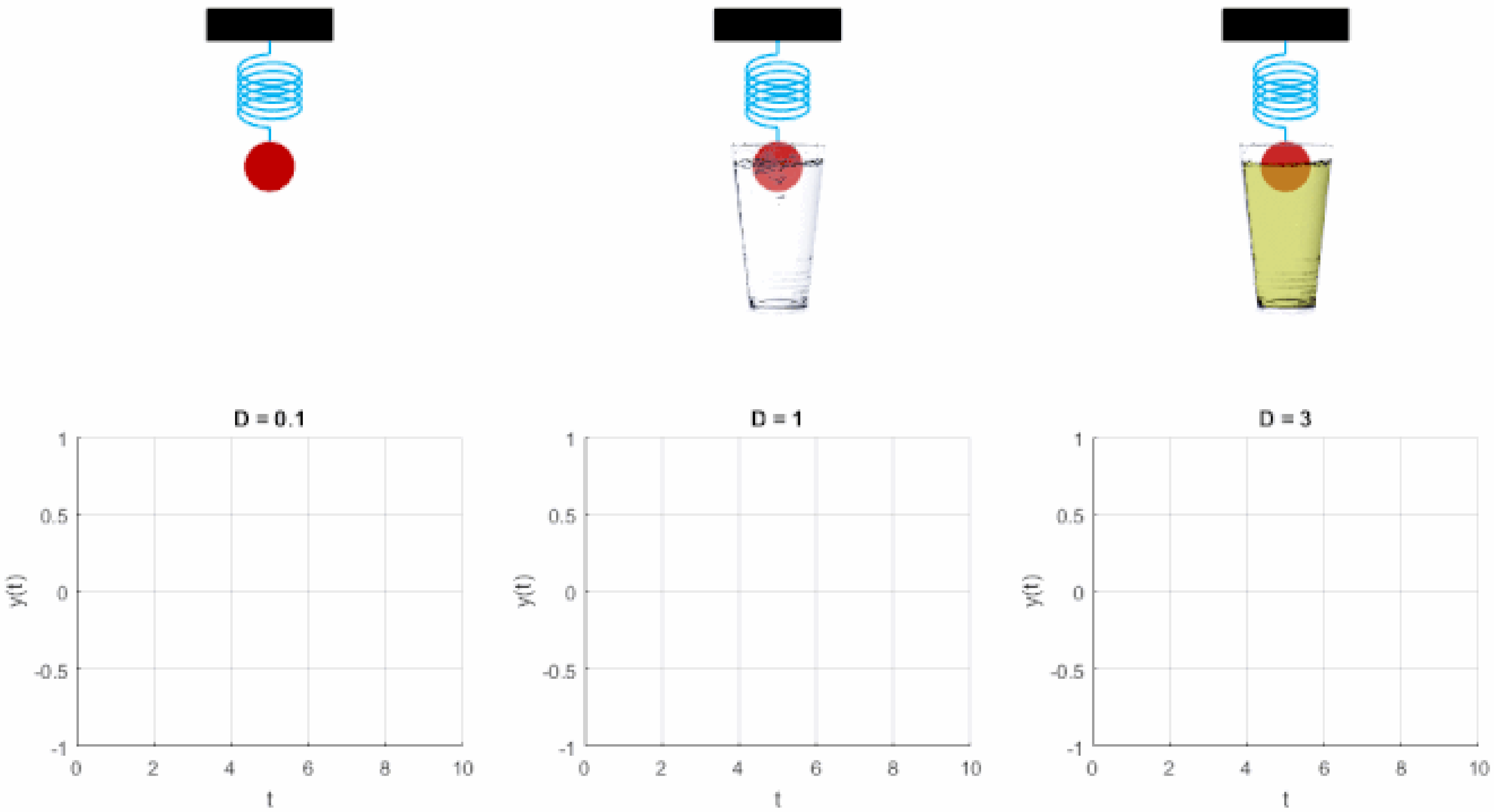
El sistema oscila con amplitud constantemente decreciente

$$b < 2\sqrt{km}$$

Si $\gamma < \omega_0$ las dos soluciones son complejas conjugadas



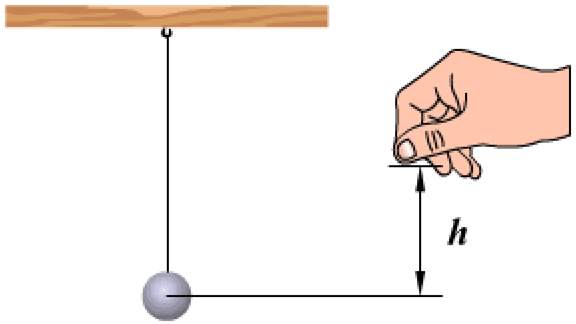
Ejemplo: columpios, cuerdas de guitarra.


D = 0.1
D = 1
D = 3
y(t)
t
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10

Oscilaciones forzadas y resonancia.

Fuerza impulsora: Fuerza periódica $F_m \cos(\omega_F t)$

Si aplicamos una fuerza impulsora que varíe periódicamente con frecuencia angular "ω_F" a un oscilador armónico amortiguado, el movimiento resultante se llama: **Oscilación forzada.**



Ejemplo: un columpio aplicando una fuerza continua en el tiempo para mantenerlo oscilando.

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_x = -kx - bv_x + F_m \cos(\omega_F t)$$

$$-kx - bv_x + F_m \cos(\omega_F t) = ma_x$$

$$ma_x + bv_x + kx - F_m \cos(\omega_F t) = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx - F_m \cos(\omega_F t) = 0$$

$$x(t) = \frac{F_m}{G}\cos(\omega_F t - \beta)$$

$$G = \sqrt{\left(k - m{\omega_F}^2\right)^2 + b^2{\omega_F}^2} \quad \beta = cos^{-1}\frac{b\omega_F}{G}$$

Oscilaciones forzadas y resonancia.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx - F_m\cos(\omega_F t) = 0$$

$$x(t) = \frac{F_m}{G}\cos(\omega_F t - \beta)$$

$$G = \sqrt{\left(k - m{\omega_F}^2\right)^2 + b^2{\omega_F}^2}$$

$$F(t) = F_m\cos(\omega_F t)\,, fuerza\ impulsora$$

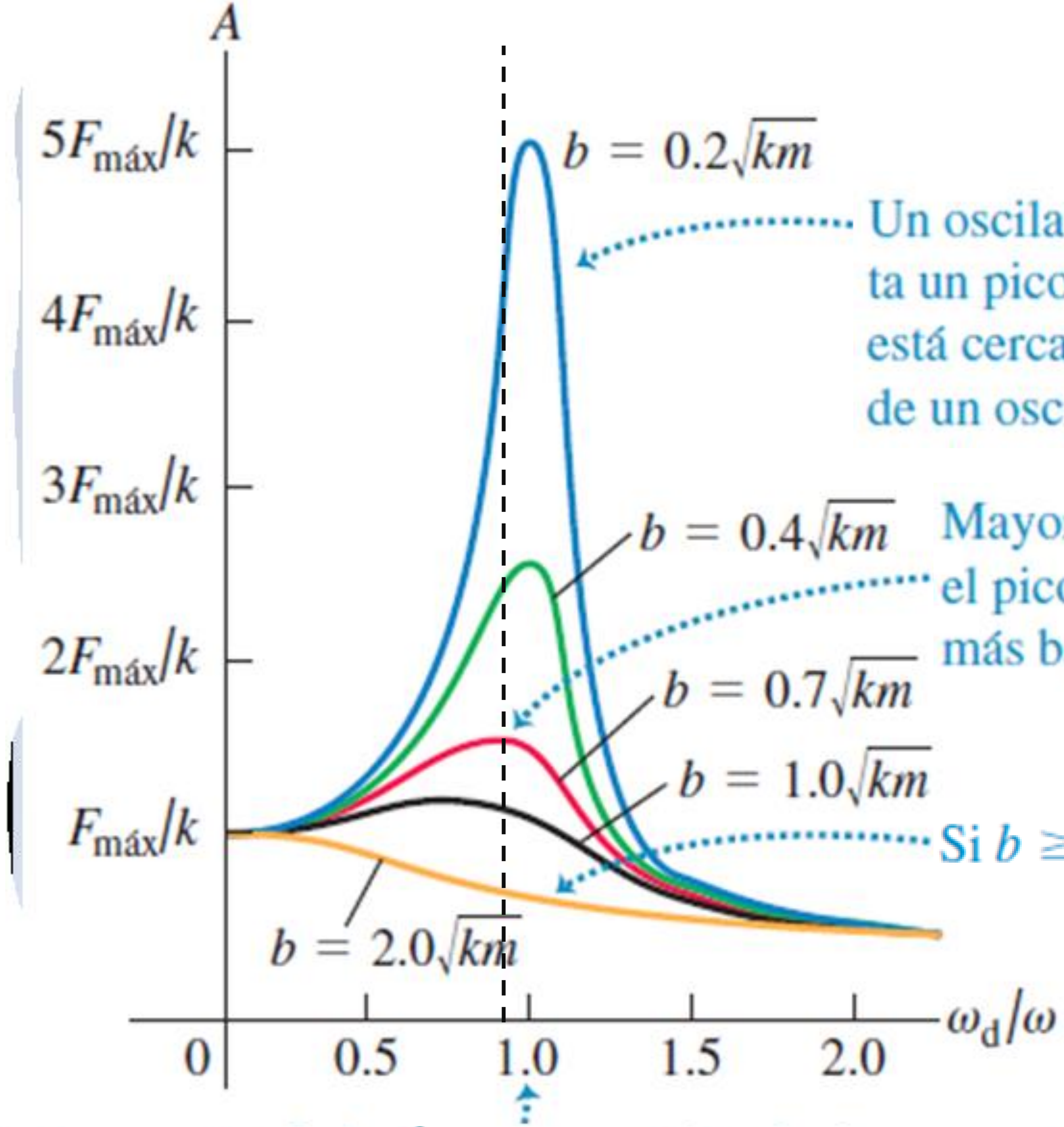
$$\omega_F, frecuencia\ angular\ de\ la\ fuerza\ impulsora$$

$$\frac{F_m}{G}, amplitud\ del\ oscilador\ forzado$$

Resonancia.

Si la frecuencia de la fuerza externa, la fuerza impulsora, es cercana a la frecuencia natural. A este estado se le conoce como resonancia.

$$\omega_F \approx \omega_0$$



Un oscilador ligeramente amortiguado presenta un pico de resonancia puntiagudo, cuando ω_d está cerca de ω (la frecuencia angular natural de un oscilador no amortiguado).

Mayor amortiguamiento reduce y ensancha el pico, desplazándolo hacia frecuencias más bajas.

Si $b \geq \sqrt{2km}$, el pico desaparece por completo.

La frecuencia impulsora ω_d es igual a la frecuencia angular natural ω de un oscilador no amortiguado.

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}}$$

$$F = F_m \cos(\omega_F t)$$

$$\omega_F = 0$$

$$\rightarrow A = \frac{F_m}{k}$$

$$k - m\omega_F^2 = 0$$

$$\omega_F^2 = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} = \omega_0^2$$

$$\rightarrow A = \frac{F_m}{b\omega_0}$$

$$b = 0$$

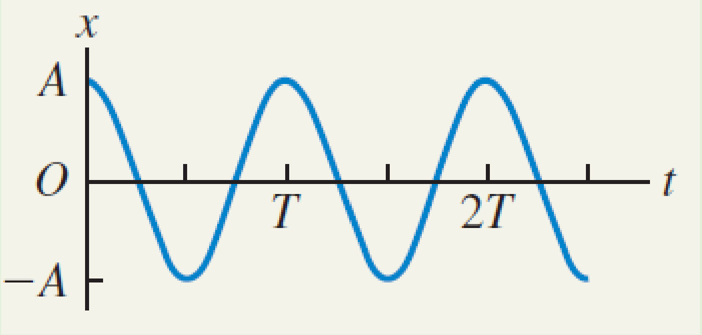
$$\rightarrow A = \frac{F_m}{\sqrt{\left(k - m\omega_F^2\right)^2}}$$

Oscilaciones no amortiguadas $m\ddot{x} + kx = 0$

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^{\,2} + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 = \text{constante}$$



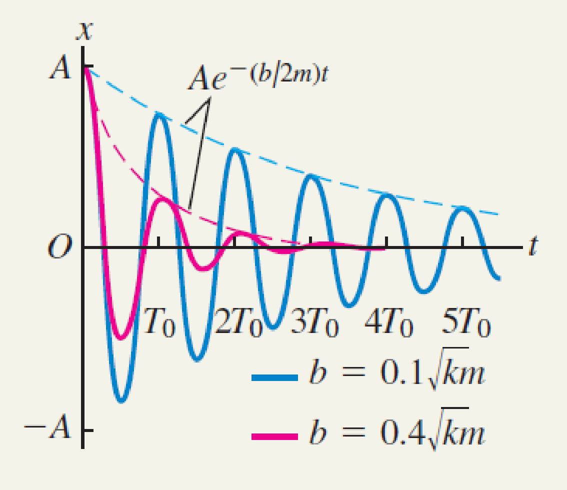
Oscilaciones amortiguadas $m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = 0$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi)$$

$$b = 2\sqrt{km}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

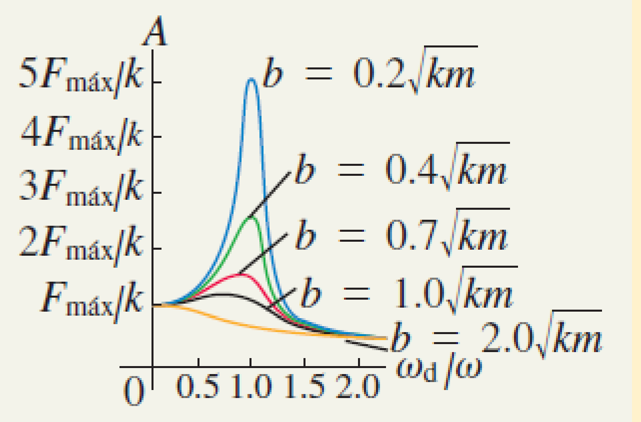
$$\omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2} \qquad \gamma = \frac{b}{2m}$$

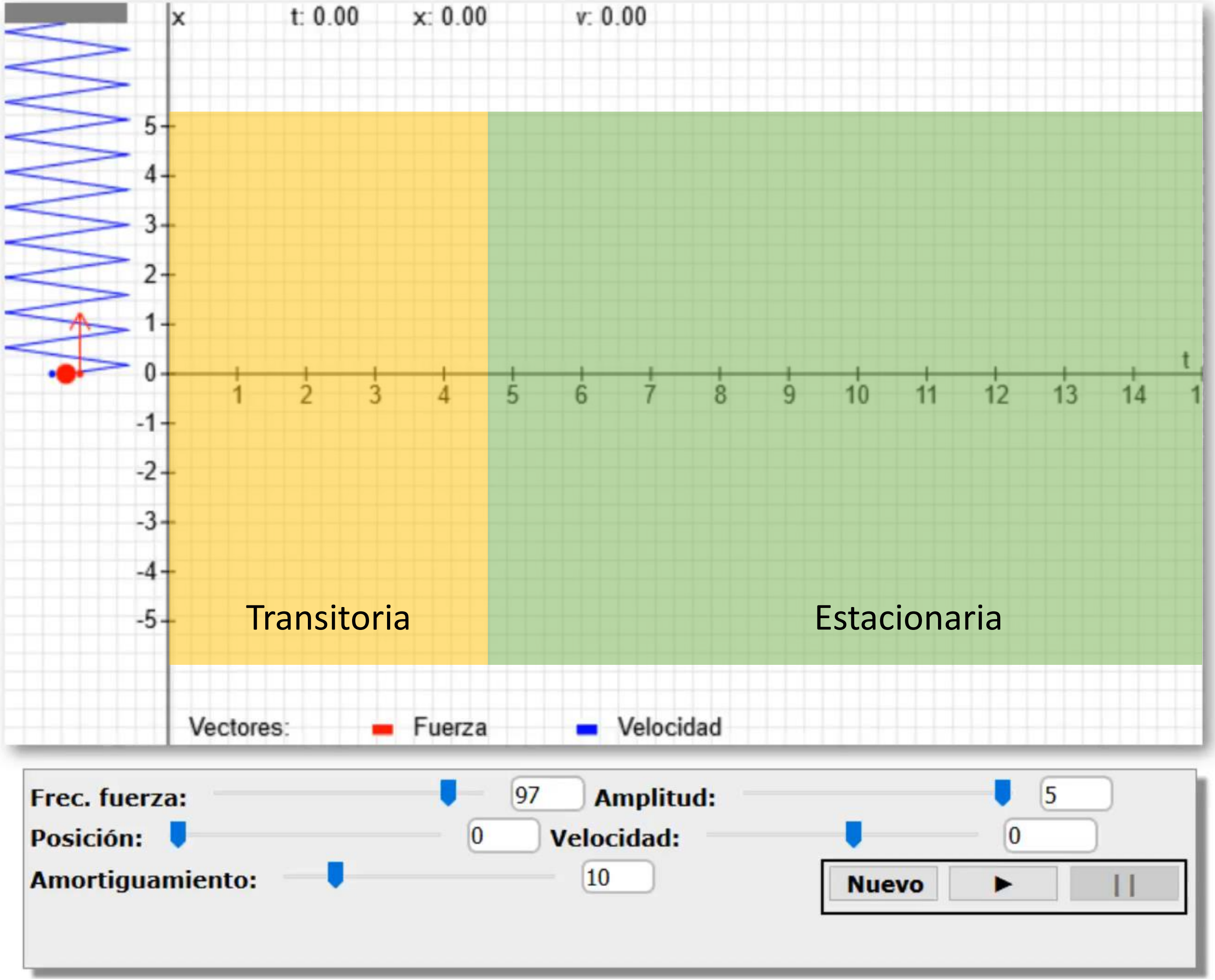


Oscilaciones forzadas $m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = F_0 \cos \omega_F t$

$$A = \frac{F_{\text{máx}}}{\sqrt{(k - m\omega_d^{\,2})^2 + b^2\omega_d^{\,2}}}$$

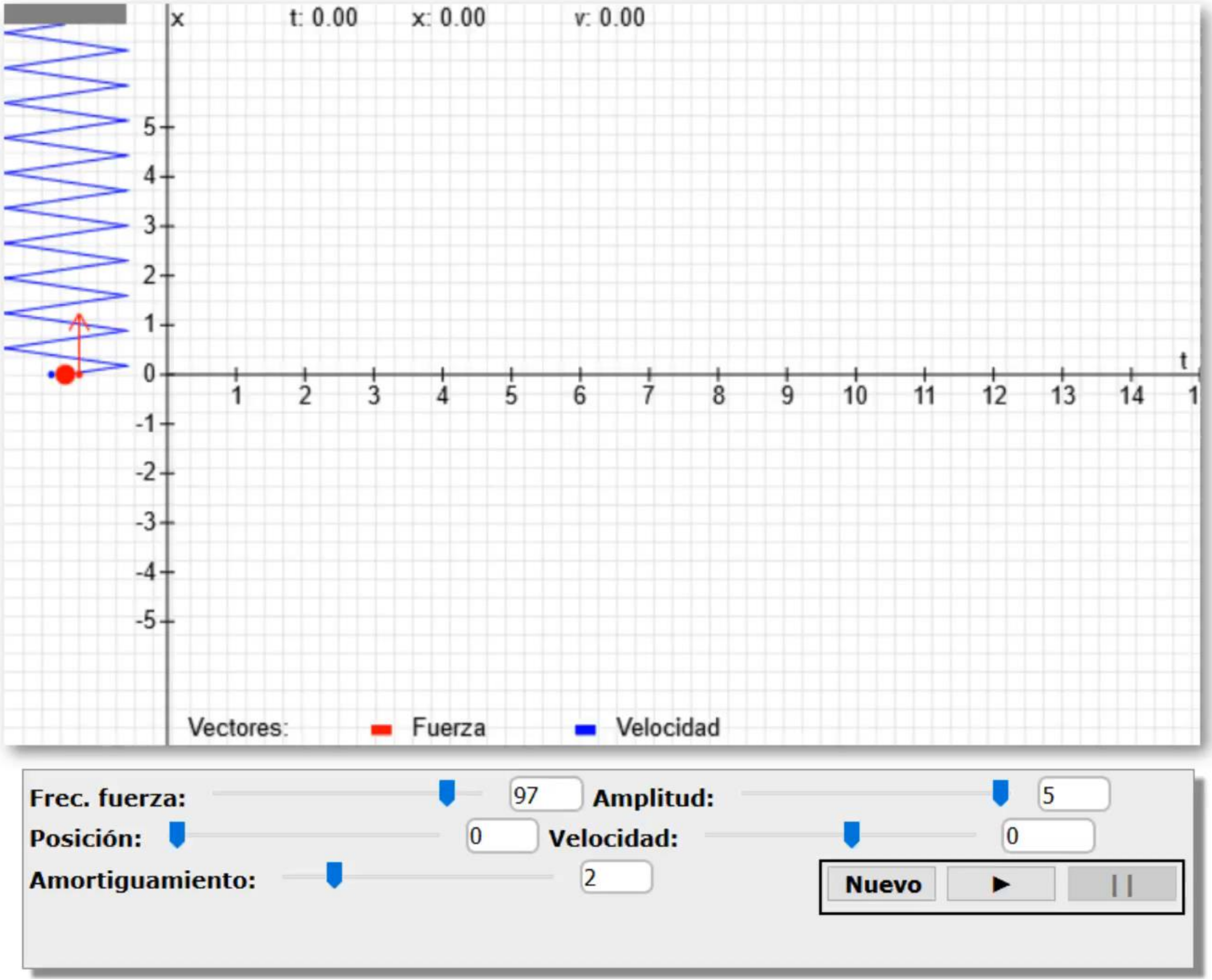
$$A_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \omega_F^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_F^2}}$$




x
t: 0.00
x: 0.00
v: 0.00
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
t
Transitoria
Estacionaria
Vectores:
Fuerza
Velocidad
Frec. fuerza:
97
Amplitud:
5
Posición:
0
Velocidad:
0
Amortiguamiento:
10
Nuevo

La resonancia bien entendida: el puente de Tacoma Narrows

https://naukas.com/2012/03/26/la-resonancia-bien-entendida-el-puente-de-tacoma-narrows/



x
t: 0.00
x: 0.00
v: 0.00
t
Vectores:
Fuerza
Velocidad
Frec. fuerza:
97
Amplitud:
5
Posición:
0
Velocidad:
0
Amortiguamiento:
2
Nuevo

EJEMPLOS

EJEMPLO 1: Oscilación amortiguada

Un ratón de 0.300 kg, no muy contento con la situación, se mueve en el extremo de un resorte con constante de fuerza k = 2.50 N/m, sometido a la acción de una fuerza amortiguadora $F_x = -bv_x$. a) Si la constante b = 0.900 kg/s, ¿qué frecuencia de oscilación tiene el ratón? b) ¿Con qué valor de b el amortiguamiento será crítico?

a) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2.50\ \text{N/m}}{0.300\ \text{kg}}}$$

$$\omega_0 = 2.89\ \text{s}^{-1}$$

constante de amortiguamiento

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\gamma = \frac{0.900\ \text{kg/s}}{2(0.300\ \text{kg})}$$

$$\gamma = 1.50\ \text{s}^{-1}$$

$\gamma < \omega_0$ caso *subamortiguado*

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}$$

$$\omega' = \sqrt{\left(2.89\ \text{s}^{-1}\right)^2 - \left(1.50\ \text{s}^{-1}\right)^2}$$

$$\omega' = 2.47\ \text{s}^{-1}$$

b) $\gamma = \omega_0$

$$b = 2\sqrt{km}$$

$$b = 2\sqrt{(2.50\ \text{N/m})(0.300\ \text{kg})}$$

$$b = 1.73\ \text{kg/s}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

EJEMPLO 2: Oscilación forzada

Una fuerza impulsora que varía sinusoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado con constante de fuerza k y masa m. Si la constante de amortiguamiento tiene el valor b_1, la amplitud es A_1 cuando la frecuencia angular impulsora es $\sqrt{\frac{k}{m}}$. En términos de A_1, ¿cuánto vale la amplitud con la misma frecuencia impulsora y la misma amplitud de la fuerza impulsora $F_{\text{máx}}$, si la constante de amortiguamiento es a) $3b_1$ y b) $b_1/2$?

$$A_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_F^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_F^2}}$$

$$\omega_0 = \omega_F$$

$$A_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\gamma^2\omega_F^2}} = \frac{F_0/m}{2\gamma\omega_F}$$

$$A_p = \frac{F_0/m}{2\left(\frac{b}{2m}\right)\omega_F} = \frac{F_0}{b\omega_F}$$

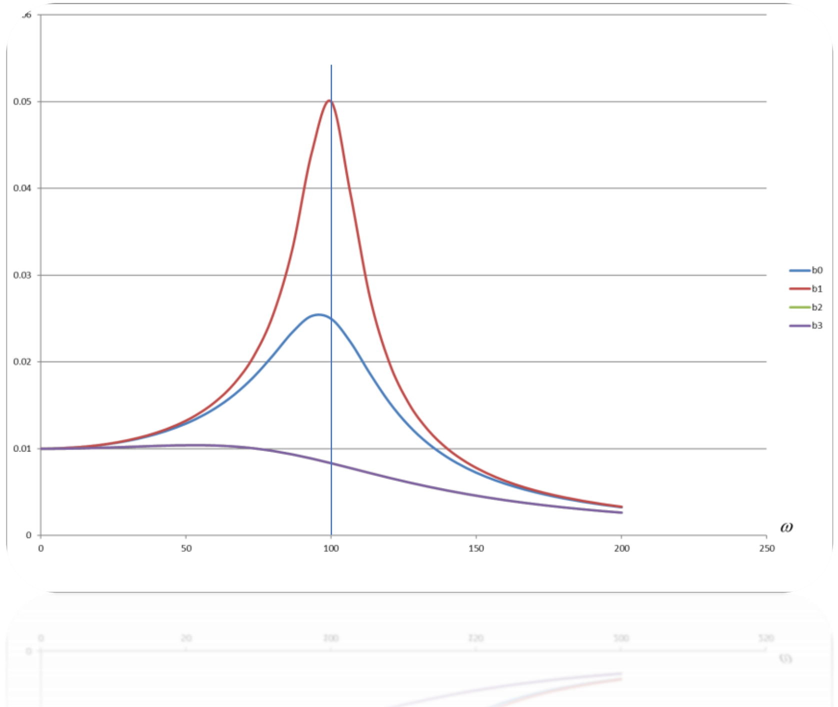
$$A_1 = \frac{F_0}{b_1\omega_0}$$

a)

$$A_2 = \frac{F_0}{3b_1\omega_0} = \frac{1}{3}\frac{F_0}{b_1\omega_0} = \frac{1}{3}A_1$$

b)

$$A_2 = \frac{F_0}{\frac{1}{2}b_1\omega_0} = 2\frac{F_0}{b_1\omega_0} = 2A_1$$



GRACIAS