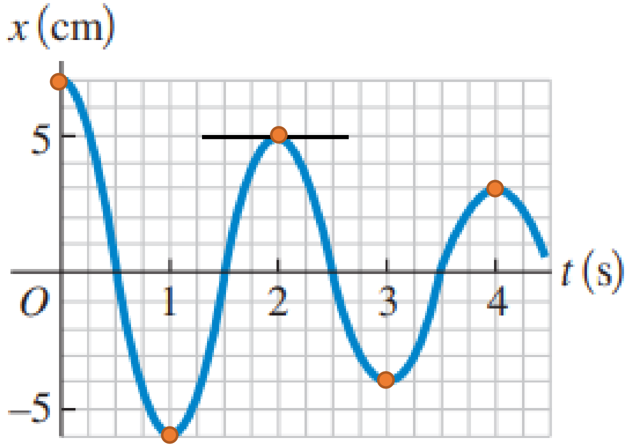
Física II
2. Pequeñas oscilaciones

Oscilaciones amortiguadas y forzadas: Ejemplos

EJEMPLO 3

Una cuerpo está vibrando en el extremo de un resorte de constante de fuerza 225 N/m. La figura muestra una gráfica de la posición x como una función del tiempo t. a) ¿En qué momentos no se mueve el cuerpo? b))¿Cuál es la potencia instantánea con la que pierde energía el sistema? c) ¿Cuánta energía mecánica tenía este sistema originalmente? d) ¿Cuánta energía pierde el sistema entre t = 1.0 s y t = 4.0 s? ¿A dónde se fue esta energía?

a)



b)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = P = vF$$

$$ma + kx = -bv$$

$$\frac{dE}{dt} = v(-bv) = -bv^2$$

c)

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E = \frac{1}{2}(225 \text{ N/m})(0.0700 \text{ m})^2$$

$$E = 0.55 \text{ J}$$

d)

$$\Delta E = \frac{1}{2}k\left(A_f^2 - A_i^2\right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}(225 \text{ N/m})\left[(0.030 \text{ m})^2 - (0.060 \text{ m})^2\right]$$

$$\Delta E = -0.30 \text{ J}$$

EJEMPLO 4

Un objeto de 10.6 kg oscila en el extremo de un resorte vertical que tiene una constante de resorte de 2.05×10^4 N/m. El efecto de la resistencia del aire se representa mediante el coeficiente de amortiguamiento $b = 3.00$ N · s/m. a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada. b) ¿En qué porcentaje disminuye la amplitud de la oscilación en cada ciclo? c) Encuentre el intervalo de tiempo que transcurre mientras la energía del sistema cae a 5.00% de su valor inicial.

a)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2.05\times10^4 \text{ N/m}}{10.6 \text{ kg}}}$$

$$\omega_0 = 44.0 \text{ s}^{-1}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\gamma = \frac{3.00 \text{ kg/s}}{2(10.6 \text{ kg})}$$

$$\gamma = 0.141 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0{}^2 - \gamma^2}$$

$$\omega' = \sqrt{(44.0 \text{ s}^{-1})^2 - (0.141 \text{ s}^{-1})^2}$$

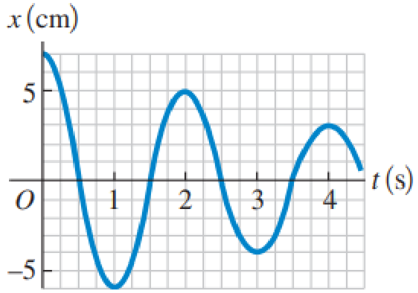
$$\omega' = 44.0 \text{ s}^{-1}$$

b)

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} \qquad T = \frac{2\pi}{43.98 \text{ s}^{-1}}$$

$$T = 0.143 \text{ s}$$



$$x(t) = Ae^{-\gamma T}$$

$$A_1 = A_0 e^{-\gamma T}$$

$$\frac{A_1}{A_0} = e^{-\gamma T}$$

$$\frac{A_1}{A_0} = e^{-(0.141 \text{ s}^{-1})(0.143 \text{ s})}$$

$$\frac{A_1}{A_0} = 0.98 \qquad 2\%$$

c)

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{A_n}{A_0} = e^{-\gamma t_n} \qquad \left(\frac{A_n}{A_0}\right)^2 = e^{-2\gamma t_n}$$

$$e^{-2\gamma t_n} = 0.05$$

$$t_n = -\frac{\ln(0.05)}{2(0.141 \text{ s}^{-1})}$$

$$t_n = 10.6 \text{ s}$$

EJEMPLO 5

Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve **sin fricción** y es impulsado por una fuerza externa dada por:

$$F = (3.00\ \mathrm{N})\sin(2\pi t)$$

La constante de fuerza del resorte es de 20.0 N/m. Determine a) el periodo b) la amplitud de movimiento.

$$F_{ext} = F_0 \sin(\omega_F t + \varphi)$$

a)

$$\omega_F = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_F} = 1.0\ \mathrm{s}$$

b)

$$A_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_F^2\right)^2 + \cancel{4\gamma^2\omega_F^2}}}$$

$$A_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_F^2\right)^2}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{20.0\ \mathrm{N/m}}{2.00\ \mathrm{kg}} = 10.0\ \mathrm{s}^{-2}$$

$$A_p = \frac{3.00\ \mathrm{N}/2.00\ \mathrm{kg}}{\sqrt{\left(10 - 4\pi^2\right)^2}}$$

$$A_p = 0.0509\ \mathrm{m}$$

$$A_p = 5.09\ \mathrm{cm}$$

Hay un desfase entre la frecuencia de la fuerza externa y la natural del sistema. eso hace poco eficiente la transferencia de energía

EJEMPLO 6

Un bloque que pesa 40.0 N está suspendido de un resorte que tiene una constante de fuerza de 200 N/m. El sistema no está amortiguado y está sujeto a una fuerza impulsora armónica de 10.0 Hz de frecuencia, lo que resulta en una amplitud de movimiento forzado de 2.00 cm. Determine el valor máximo de la fuerza impulsora.

$$\omega_0^{\;2} = \frac{200\text{ N/m}}{4.08\text{ kg}} = 49.0\text{ s}^{-2}$$

$$A_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^{\;2} - \omega_F^2\right)^2}}$$

$$\omega_F = 2\pi\left(10.0\text{ Hz}\right)$$

$$= 62.8\text{ s}^{-1}$$

$$F_0 = mA_p\sqrt{\left(\omega_0^{\;2} - \omega_F^2\right)^2}$$

$$F_0 = \left(4.08\text{ kg}\right)\left(0.0200\text{ m}\right)\left(3894\text{ s}^{-2}\right)$$

$$F_0 = 318\text{ N}$$

$$F_{ext} = F_0\cos(\omega_F t + \varphi)$$

RESUMEN DE FORMULAS: Unidad 02

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$x = Acos(\omega t + \phi)$$

$$v = -A\omega sen(\omega t + \phi)$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi) \qquad \gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\mathrm{a} = -A\omega^2 cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad \gamma = \omega_0 \ \ \text{(crítico)}$$

$$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{T}$$

$$F = F_0\cos(\omega_F t)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + 4\gamma^2\omega_F^2}}$$

GRACIAS
(Practica con la autoevaluación de pequeñas oscilaciones)