Física II
Ondas mecánicas y sonido

Ondas transversales en una cuerda

Potencia e intensidad. Interferencia, condiciones de frontera y superposición. Principio de superposición.

EJEMPLO 1

¿Cuál de las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda, ecuación ? *a*) $y(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$; *b*) $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t)$; *c*) $y(x,t) = A(\cos kx + \cos \omega t)$. *d*) Para la onda del inciso *b*), escriba las ecuaciones para la velocidad y la aceleración transversales de una partícula en el punto *x*.

(a) $y(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin(kx + \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx + \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\sin(kx + \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx + \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$-k^2 A\cos(kx + \omega t) = \frac{1}{v^2}\left(-\omega^2 A\cos(kx + \omega t)\right)$$

$$k^2 = \frac{1}{v^2}\omega^2$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

(b) $y(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$

$$\underline{\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A\cos(kx + \omega t)}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx + \omega t)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = kA\cos(kx + \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx + \omega t)$$

$$-k^2 A\sin(kx + \omega t) = \frac{1}{v^2}\left(-\omega^2 A\sin(kx + \omega t)\right)$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

(c) $y(x,t) = A(\cos kx + \cos \omega t)$

$$y(x,t) = f(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t)$$

(d)

EJEMPLO 2

Una onda de agua que viaja en línea recta en un lago queda descrita por la ecuación

$$y(x, t) = (3.75\ \text{cm})\cos(0.450\ \text{cm}^{-1}\,x + 5.40\ \text{s}^{-1}\,t)$$

donde y es el desplazamiento perpendicular a la superficie tranquila del lago. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda un patrón de onda completo en pasar por un pescador en un bote anclado, y qué distancia horizontal viaja la cresta de la onda en ese tiempo? *b*) ¿Cuál es el número de onda y el número de ondas por segundo que pasan por el pescador? *c*) ¿Qué tan rápido pasa una cresta de onda por el pescador y cuál es la rapidez máxima de su flotador de corcho cuando la onda provoca que éste oscile verticalmente?

(a)

$$T = \frac{2\pi\ \text{rad}}{\omega}$$

$$= \frac{2\pi\ \text{rad}}{5.40\ \text{rad/s}}$$

$$= 1.16\ \text{s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\ \text{rad}}{k}$$

$$= \frac{2\pi\ \text{rad}}{0.450\ \text{rad/cm}} = 0.140\ \text{m}$$

(b) $k = 0.450\ \text{rad/cm}$

$$f = 1/T = 0.862\ \text{Hz}$$

(c)

$$v = f\lambda$$

$$= (0.862\ \text{Hz})(0.140\ \text{m})$$

$$= 0.121\ \text{m/s}$$

$$v_{\max} = \omega A$$

$$= (5.40\ \text{rad/s})(3.75\ \text{cm})$$

$$= 0.202\ \text{m/s}$$

EJEMPLO 3

Por una barra de metal se propagan ondas transversales, las cuales se rigen por la ecuación diferencial siguiente:

$$G\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Donde *y* es la deformación transversal de la barra, *x* es la distancia medida a lo largo del eje de la barra, *t* es el tiempo, ρ es la densidad del material y *G* es el módulo de rigidez del material. Si por una barra de acero ($\rho = 7.850\times10^3$ kg/m^3 y $G = 85.00\times10^9$ N/m^2) se propaga una onda transversal armónica con una amplitud de 2.00×10^3 m y una frecuencia de 524 Hz, a)¿Cuál es la velocidad de propagación de estas ondas? b) Si la onda es senoidal que se desplaza a la derecha ¿Cómo es la ecuación de *y*(*x*, *t*)?

(a)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\rho}{G}$$

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$v = \sqrt{\frac{85.00\times10^9\ \text{N/m}^2}{7.850\times10^3\ \text{kg/m}^3}}$$

$$v = 3.29\times10^3\ \text{m/s}$$

(b)

$$y(x,t) = A\cos\left(kx - \omega t\right)$$

$$\omega = 2\pi\left(524\ \text{Hz}\right) = 3.29\times10^3\ \text{s}^{-1}$$

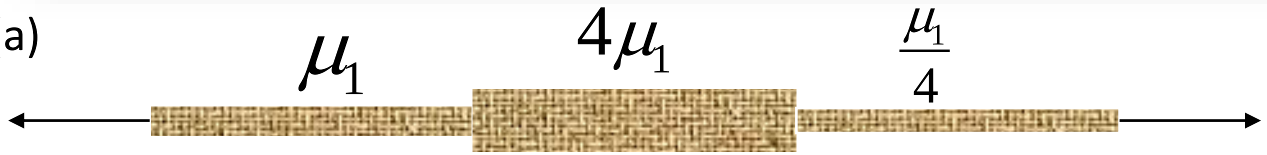
$$k = \frac{\omega}{v} = 1.00\ \text{m}^{-1}$$

$$y(x,t) = \left(2.00\times10^3\ \text{m}\right)\cos\left(1.00\ \text{m}^{-1}x - 3.29\times10^3\ \text{s}^{-1}t\right)$$

EJEMPLO 4

Tres trozos de cuerda, todos con longitud L, se atan extremo con extremo para formar una cuerda combinada de longitud $3L$. La masa por unidad de longitud de los tres trozos es, respectivamente, μ_1, $\mu_2 = 4\mu_1$ y $\mu_3 = \mu_1/4$. *a*) Si la cuerda combinada está sometido a una tensión F, ¿cuánto tiempo tarda una onda transversal en recorrer la longitud total $3L$? Dé su respuesta en términos de L, F y μ_1. *b*) ¿Su respuesta al inciso *a*) depende del orden en que se unieron los tres trozos? Explique su respuesta.

(a)



$$v_1 = \sqrt{\frac{F}{\mu_1}} \qquad v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\mu_1}} \qquad v_3 = 2\sqrt{\frac{F}{\mu_1}}$$

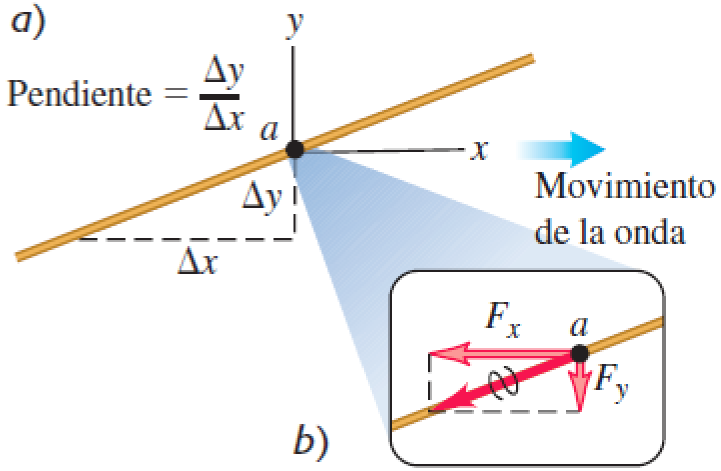
$$t_1 = L\sqrt{\frac{\mu_1}{F}} \qquad t_2 = 2L\sqrt{\frac{\mu_1}{F}} \qquad t_3 = \frac{1}{2}L\sqrt{\frac{\mu_1}{F}}$$

$$L = vt \qquad t = \frac{L}{v} \qquad t = \frac{7}{2}L\sqrt{\frac{\mu_1}{F}}$$

(b) No

Energía del movimiento ondulatorio

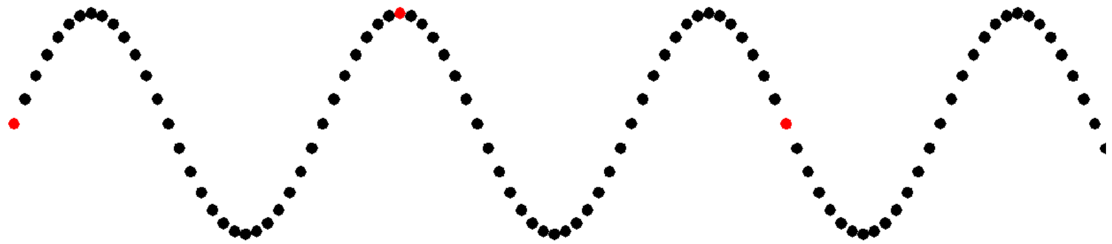
¿Cómo se transfiere energía de una parte de la cuerda a otra?



$$F_y(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

¿Cómo es la potencia correspondiente en el punto a?

$$P(x,t) = F_y(x,t)v_y(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$



¿Hay transferencia de energía si la pendiente de la cuerda es cero?

¿Hay transferencia de energía si la velocidad transversal de la cuerda es cero?

Energía del movimiento ondulatorio

Razón *instantánea* con que se transfiere energía a lo largo de la cuerda

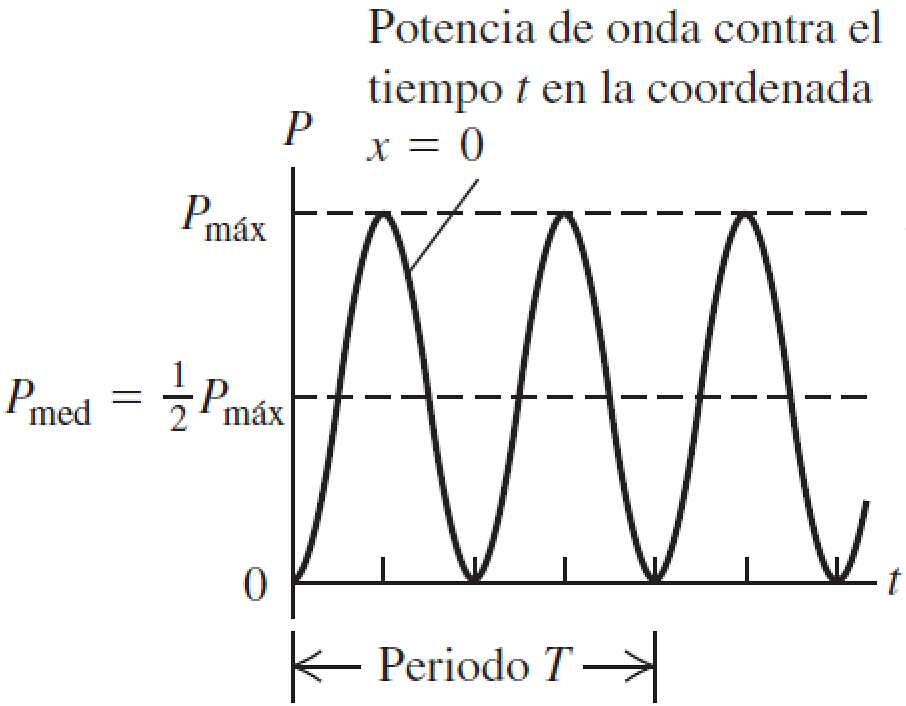
$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -kA\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

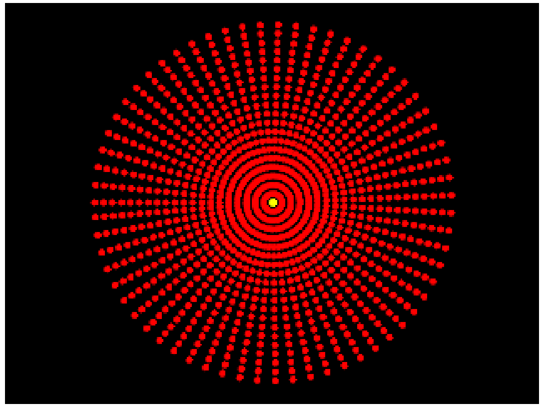
$$\boxed{P(x, t) = Fk\omega A^2\,\text{sen}^2(kx - \omega t)}$$



$$P_{\text{máx}} = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2$$

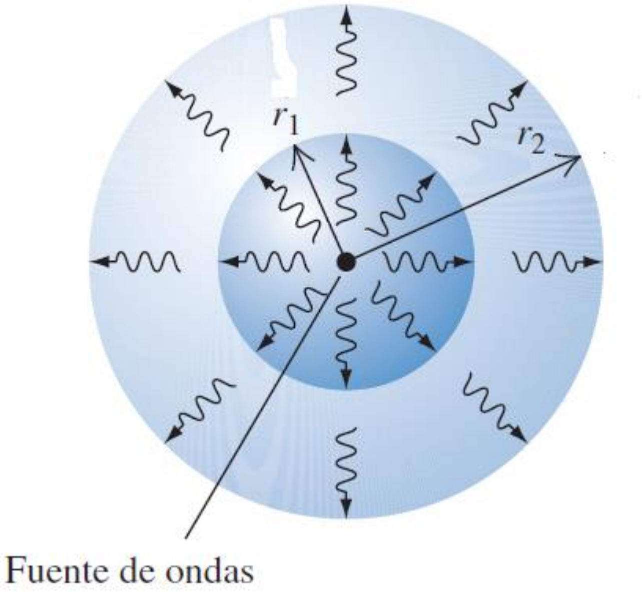
$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2$$

Intensidad de las ondas



Rapidez media con que la onda transporta energía, por unidad de área, a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación:

Potencia media por unidad de área



$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad \text{(ley del cuadrado inverso de la intensidad)}$$

EJEMPLO 5

Una onda tensa para la que μ = 0.05 kg/m esta bajo una tensión de 80.0 N. ¿Cuanta potencia se debe suministrar a la cuerda para generar ondas sinusoidales a una frecuencia de 60.0 Hz y una amplitud de 6.00 cm?

$$P_{\text{máx}} = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2$$

$$P_{\text{med}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2$$

$$\omega = 2\pi(60.0\ \text{Hz})$$
$$= 376.99\,\frac{rad}{s}$$

$$P_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(0.05\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)(80.0\ \text{N})}\left(376.99\,\frac{rad}{s}\right)^2 (0.06\ \text{m})^2$$

$$P_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{4\,\frac{\text{kg}^2}{\text{s}^2}}\left(142\,122\,\frac{1}{\text{s}^2}\right)(0.0036\ \text{m}^2)$$

$$P_{med} = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}\left(511.6\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right)$$

$$= 512\ \text{W}$$

EJEMPLO 6 y 7

Encuentre la intensidad de las ondas sonoras a 3.00 m de una fuente puntual que las emite con una salida de potencia promedio de 80.0 W.

Hallar la distancia a la cual la intensidad del sonido es $1.00 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} = \frac{80.0\ \mathrm{W}}{4\pi(3.00\ \mathrm{m})^2} = 0.707\ \mathrm{W/m^2}$$

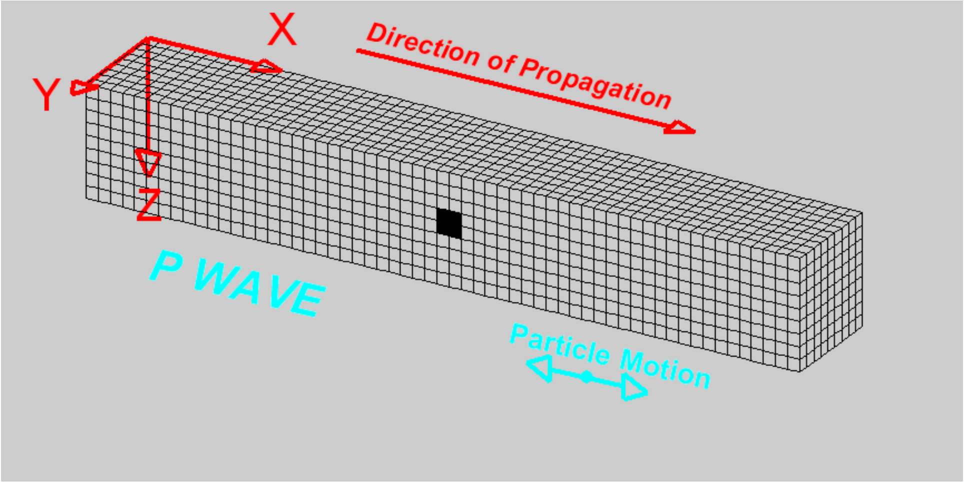
$$r_2^2 = \frac{I_1}{I_2} r_1^2 = \frac{0.707\ \mathrm{W/m^2}}{1.00 \times 10^{-7}\mathrm{W/m^2}}(3.00\ \mathrm{m})^2$$

$$r_2 = 8.00\ \mathrm{km}$$

Intensidad sísmica. La intensidad de una onda sísmica P que viaja a través de la Tierra y se detecta a 100 km de la fuente es de $1.0 \times 10^6\ \mathrm{W/m^2}$. ¿Cuál es la intensidad de esa onda si se detecta a 400 km de la fuente?

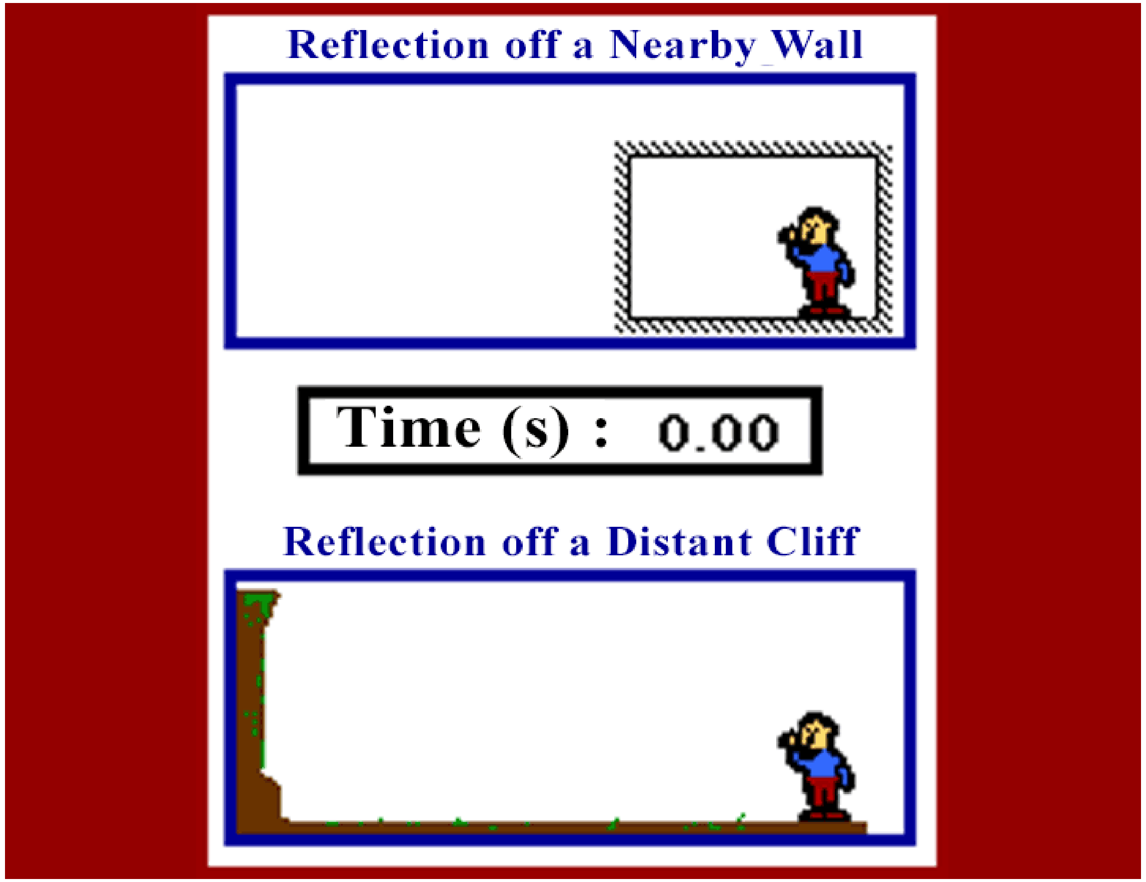
$$I_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 I_1$$

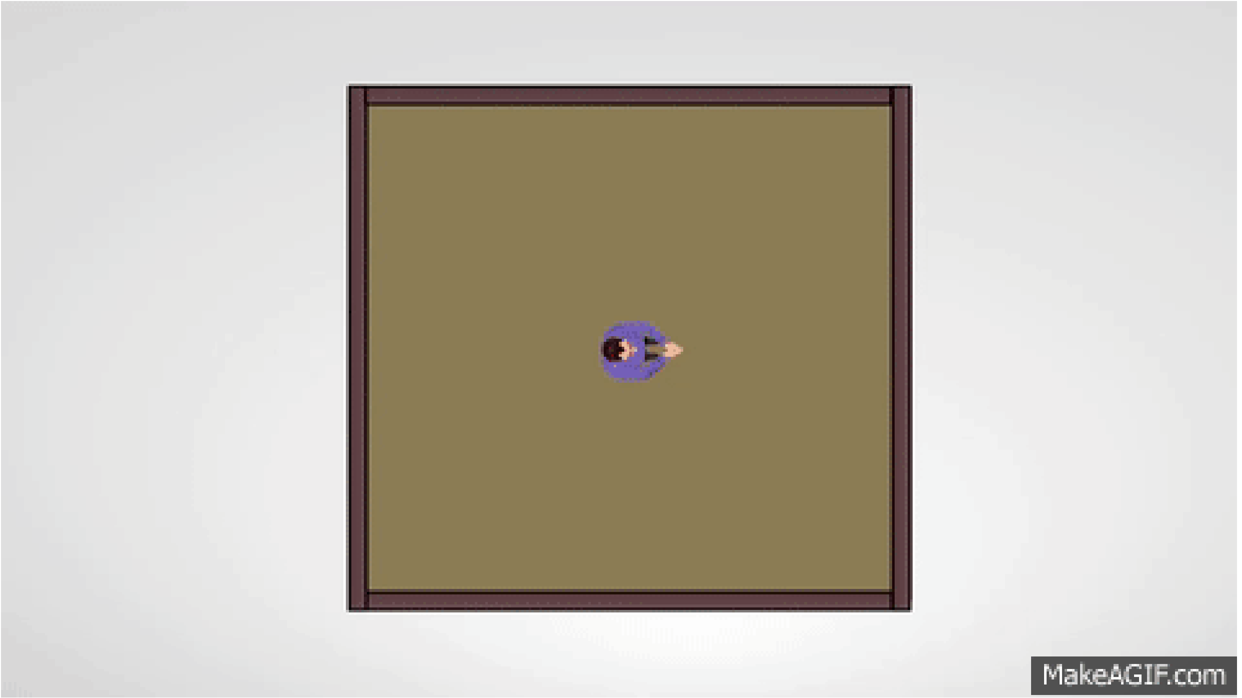
$$I_2 = \frac{1}{16} I_1 \qquad I_2 = 6.3 \times 10^4\ \mathrm{W/m^2}$$



Condiciones de frontera

Reflexión



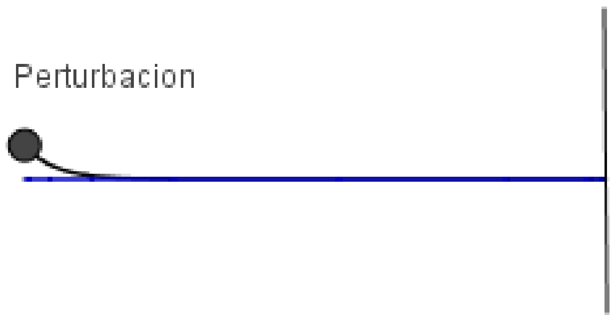


Cámara reverberante vs cámara anecoica: https://youtu.be/DXmUQfohYHg

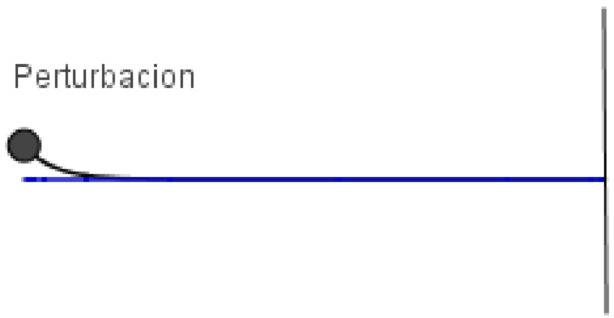
Condiciones de frontera

Reflexión en una cuerda:

Extremo fijo



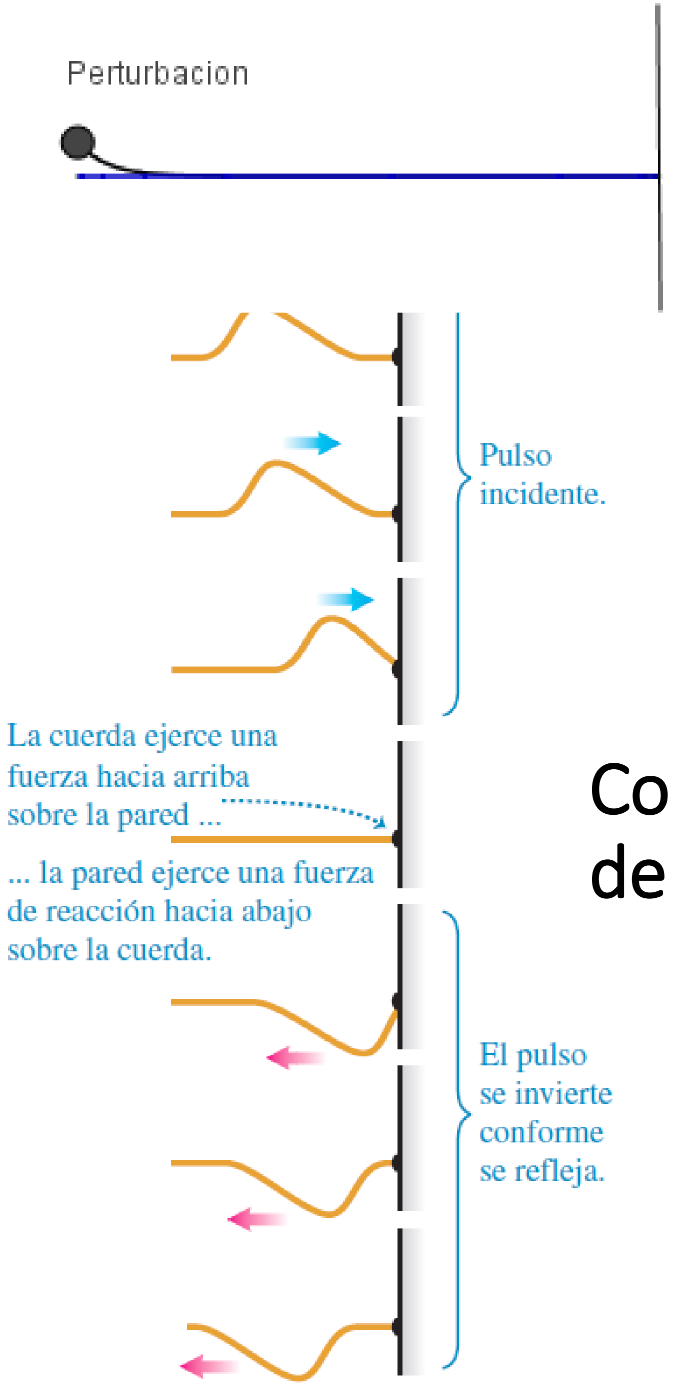
Extremo libre



Interferencia: la onda inicial y la reflejada se superponen en la misma región del medio

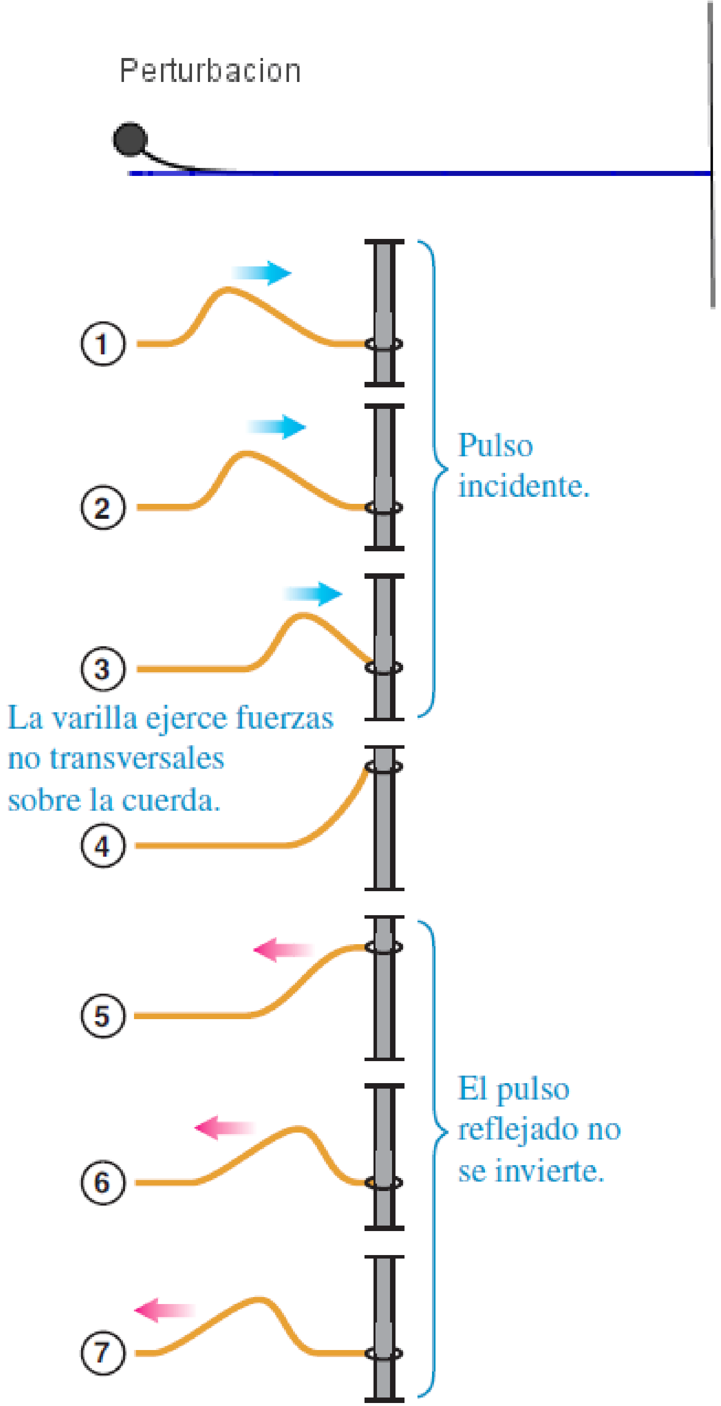
¿Qué sucede cuando un pulso de onda o una onda sinusoidal llegan al *extremo* de la cuerda?

Extremo fijo



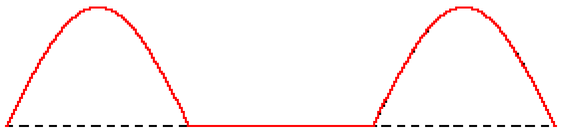
Condiciones de frontera

Extremo libre

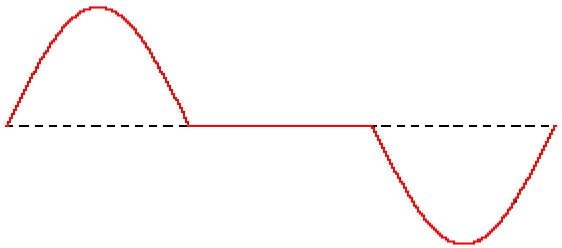


Superposición de dos pulsos que viajan en direcciones opuestas:

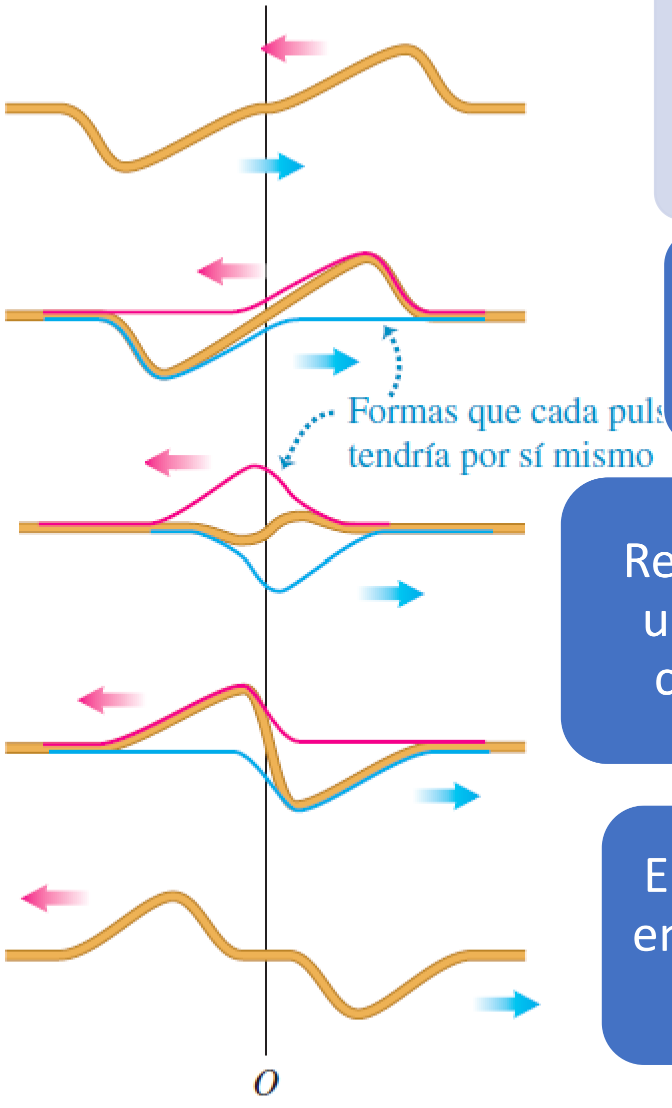
Misma dirección del desplazamiento del pulso



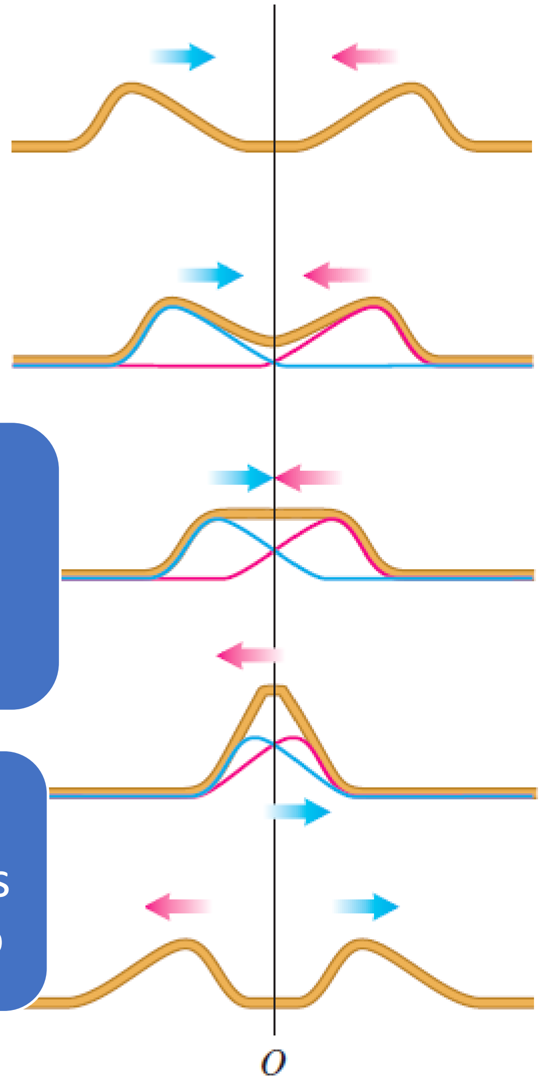
Dirección del desplazamiento invertida del pulso



Al superponerse los pulsos y pasarse mutuamente, el desplazamiento total de la cuerda es la *suma algebraica* de los desplazamientos en ese punto de los pulsos individuales



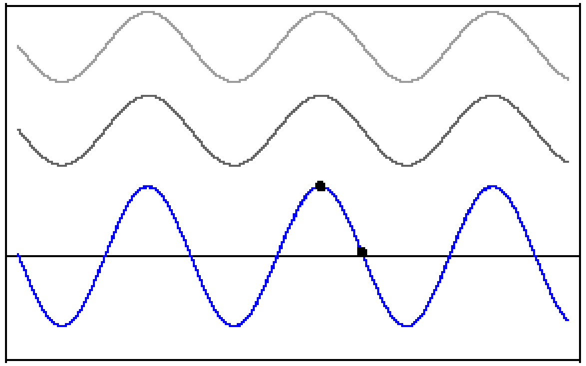
Desplazamiento invertido	Desplazamiento no invertido
Se invierte el pulso reflejado.	No se invierte el pulso reflejado.
Reflexión de un pulso en un extremo fijo de una cuerda en el punto O.	Reflexión de un pulso en un extremo libre de una cuerda en el punto O.
El desplazamiento total en el punto O es cero en todo momento	La pendiente de la cuerda en el punto O es cero en todo momento



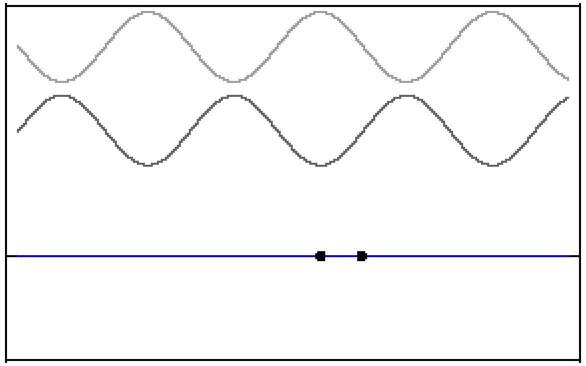
Principio de superposición

Cuando dos ondas se superponen, el desplazamiento real de cualquier punto de la cuerda en cualquier instante se obtiene sumando el desplazamiento que tendría el punto si tan solo estuviera presente la primera onda, con el desplazamiento que tendría si únicamente estuviera presente la segunda

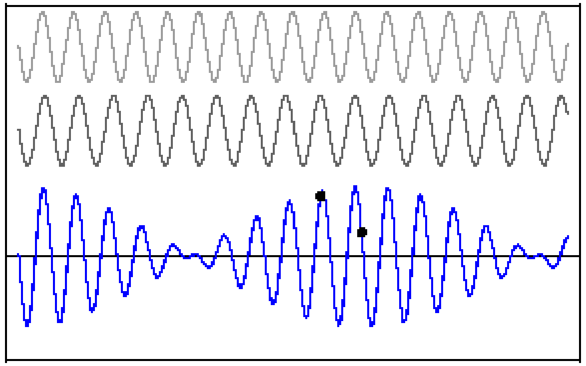
$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \qquad \text{(principio de superposición)}$$



Ondas idénticas que se encuentran desfasadas en un punto del medio

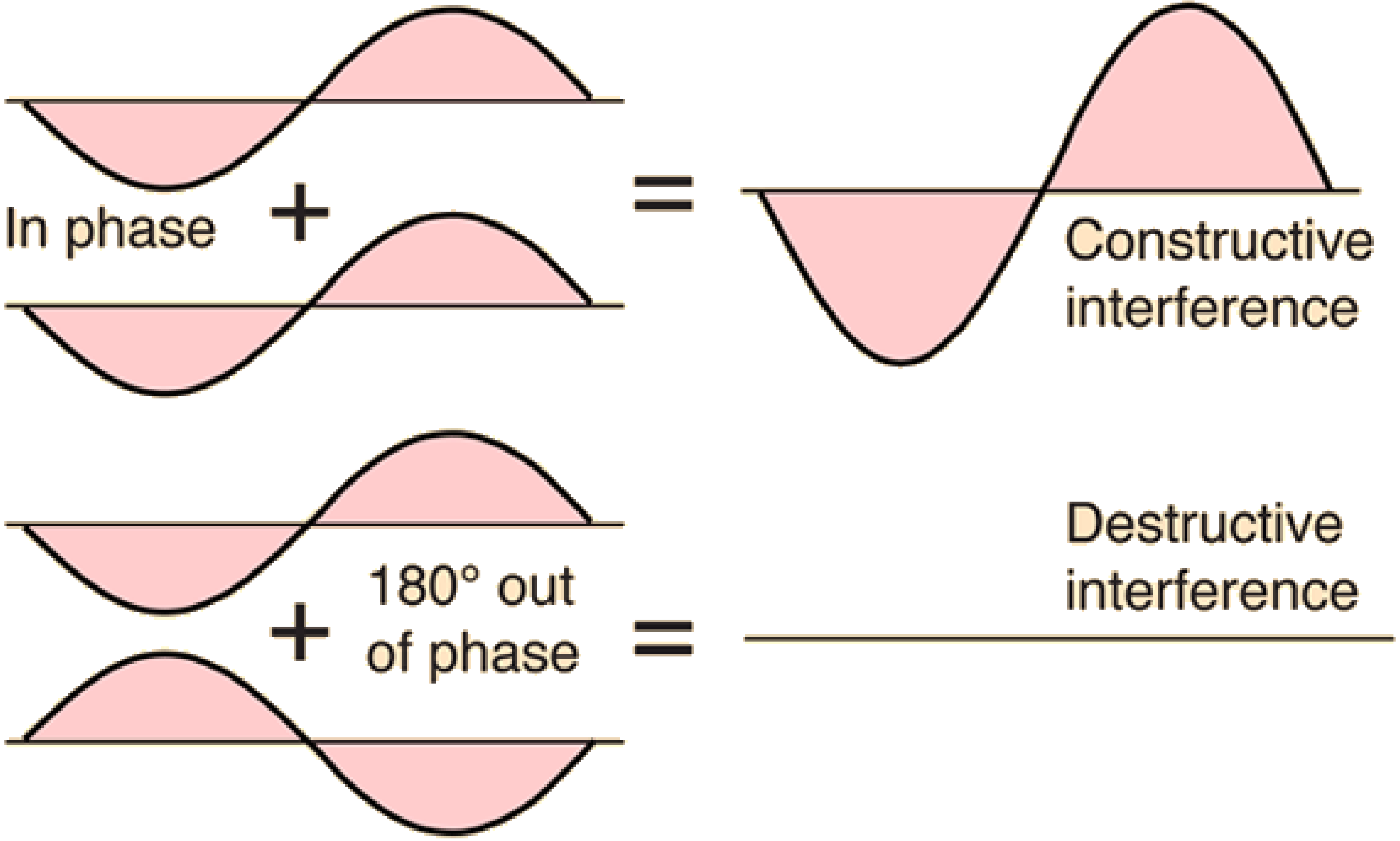


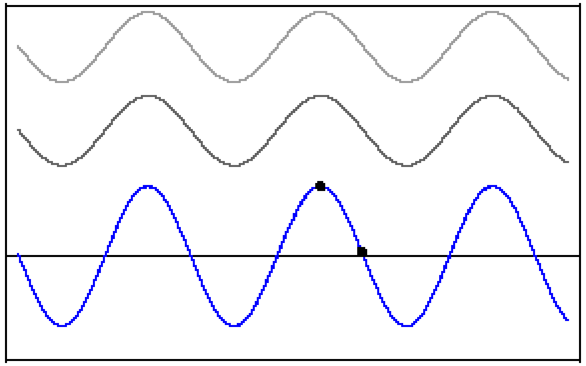
Ondas idénticas que viajan en sentido contrario

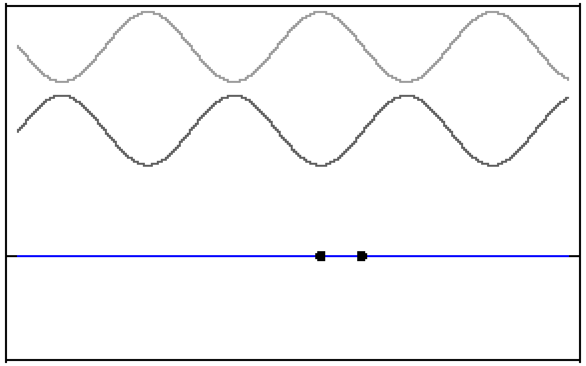


Ondas de distinta frecuencia que dan lugar a batidos

Principio de superposición







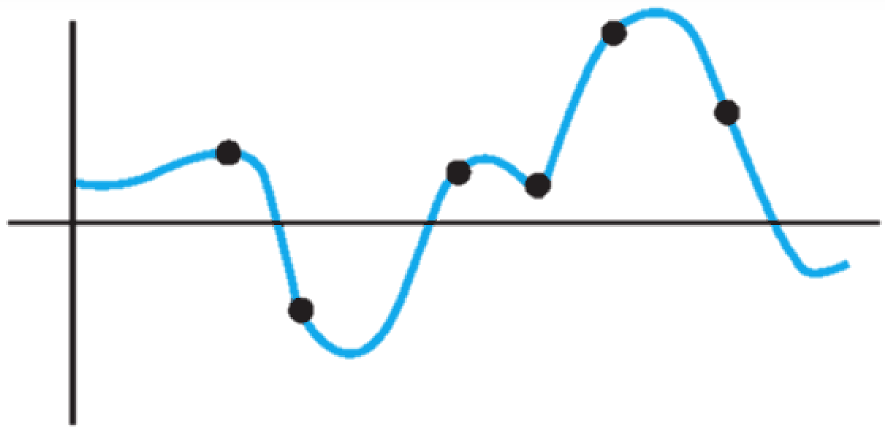
Ejercicios para practicar

Luz visible. La luz es una onda, pero no una onda mecánica. Las cantidades que oscilan son campos eléctricos y magnéticos. La luz que es visible para los seres humanos tiene longitudes de onda de entre 400 nm (violeta) y 700 nm (rojo), en tanto que toda la luz viaja en el vacío a una rapidez $c = 3.00 \times 10^8$ m/s. *a*) ¿Cuáles son los límites de la frecuencia y el periodo de la luz visible? *b*) ¿Usando un cronómetro podría usted medir el tiempo que dura una sola vibración de luz?

¡Tsunami! El 26 de diciembre de 2004 ocurrió un intenso terremoto en las costas de Sumatra, y desencadenó olas inmensas (un tsunami) que provocaron la muerte de 200,000 personas. Gracias a los satélites que observaron esas olas desde el espacio, se pudo establecer que había 800 km de la cresta de una ola a la siguiente, y que el periodo entre una y otra fue de 1.0 hora. ¿Cuál fue la rapidez de esas olas en m/s y en km/h? ¿Su respuesta le ayudaría a comprender por qué las olas causaron tal devastación?

Ejercicios para practicar

En la figura , se muestra la forma de una onda en una cuerda en un instante específico. La onda se propaga a la derecha, en la dirección $+x$. *a*) Determine la dirección de la *velocidad* transversal de cada uno de los seis puntos numerados en la cuerda. Si la velocidad es cero, indíquelo. Explique su razonamiento. *b*) Determine la dirección de la *aceleración* transversal de cada uno de los seis puntos numerados en la cuerda. Explique su razonamiento. *c*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas si la onda se propagara hacia la izquierda, en la dirección $-x$?



Ejercicios para practicar

Ondas de forma arbitraria. *a*) Explique por qué *cualquier* onda descrita por una función de la forma $y(x, t) = f(x - vt)$ se mueve en la dirección $+x$ con rapidez v. *b*) Demuestre que $y(x, t) = f(x - vt)$ satisface la ecuación de onda, sea cual fuere la forma funcional de f. Para hacerlo, escriba $y(x, t) = f(u)$, donde $u = x - vt$. Luego, para derivar parcialmente $y(x, t)$, use la regla de la cadena:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}(-v)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}$$

c) Una pulsación de onda está descrita por $y(x, t) = De^{-(Bx - Ct)^2}$, donde B, C y D son constantes positivas. Calcule la rapidez de esta onda.

GRACIAS