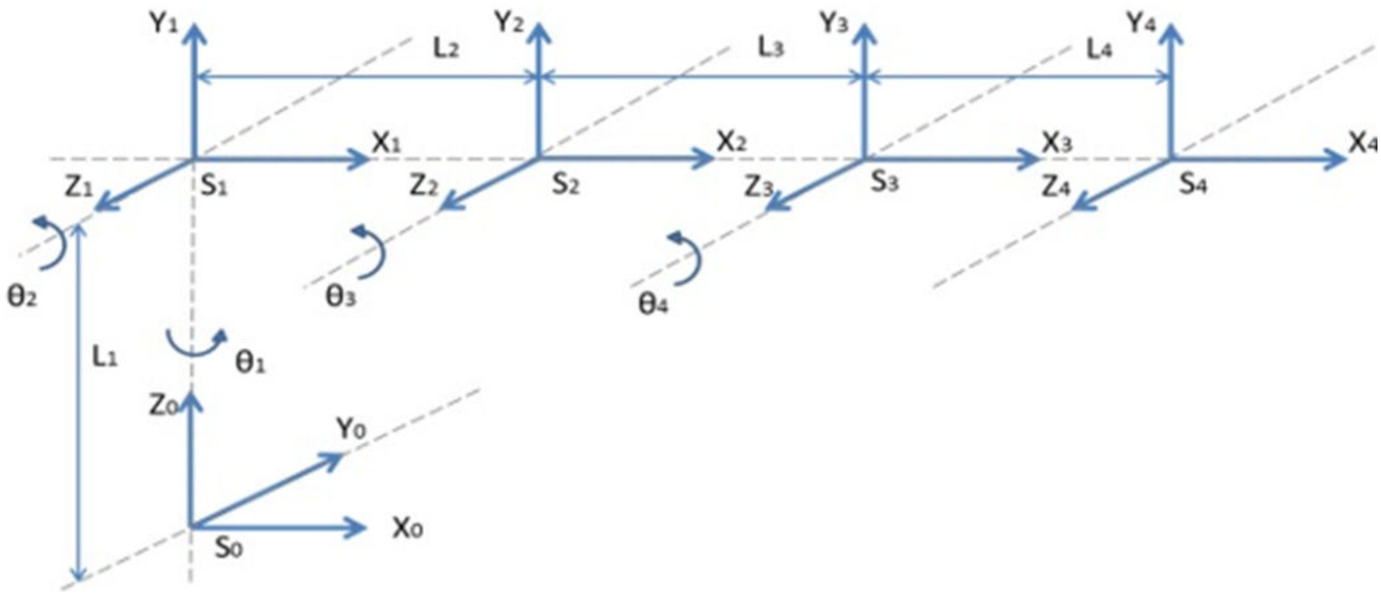
PRESENTACIÓN FINAL (Cinemática Diferencial de Piernas)

Jesús Alejandro Gómez Bautista | A01736171

PARTE I

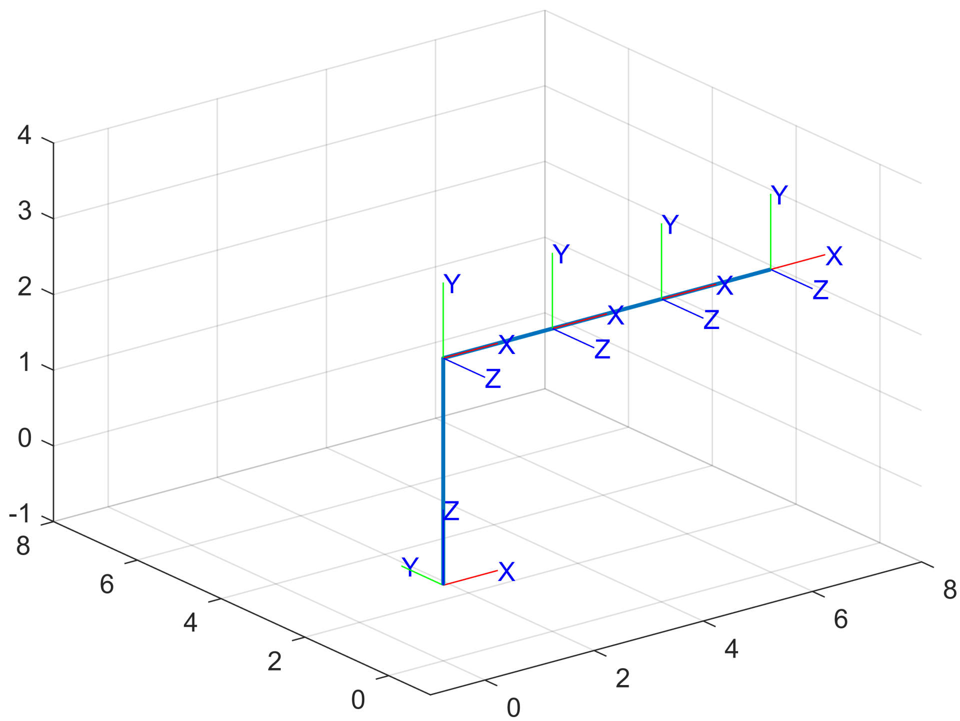
EJERCICIO 1 --------------------------

Obtener la matriz de transformación **homogénea global T, empleando variables simbólicas** de los siguientes sistemas la cual relacione la posición y orientación del extremo del robot respecto a su sistema de referencia fijo (la base). Simulando cada una de las transformaciones desde la trama absoluta hasta la trama final.




```
%Limpieza de pantalla
clear all
close all
clc

%Calculamos las matrices de transformación homogénea
H0=SE3;
H1=SE3(rotx(pi/2), [0 0 3]);
H2=SE3([2 0 0]);
H3=SE3([2 0 0]);
H4=SE3([2 0 0]);

H20= H1*H2;
H30= H20*H3; %Matriz de transformación homogenea global de 3 a 0
H40= H30*H4;  %Matriz de transformación homogenea global de 4 a 0

%Coordenadas de la estructura de translación y rotación
x=[0 0 6];
y=[0 0 0];
z=[0 3 3];
```

```
plot3(x, y, z,'LineWidth', 1.5); axis([-1 8 -1 8 -1 4]); grid on;
hold on;

 %Graficamos la trama absoluta o global
 trplot(H0,'rgb','axis', [-1 8 -1 8 -1 4])
% %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H0, H1,'rgb','axis', [-1 8 -1 8 -1 4])
% %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H1, H20,'rgb','axis', [-1 8 -1 8 -1 4])
% % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H20, H30,'rgb','axis', [-1 8 -1 8 -1 4])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H30, H40,'rgb','axis', [-1 8 -1 8 -1 4])
```




```

```

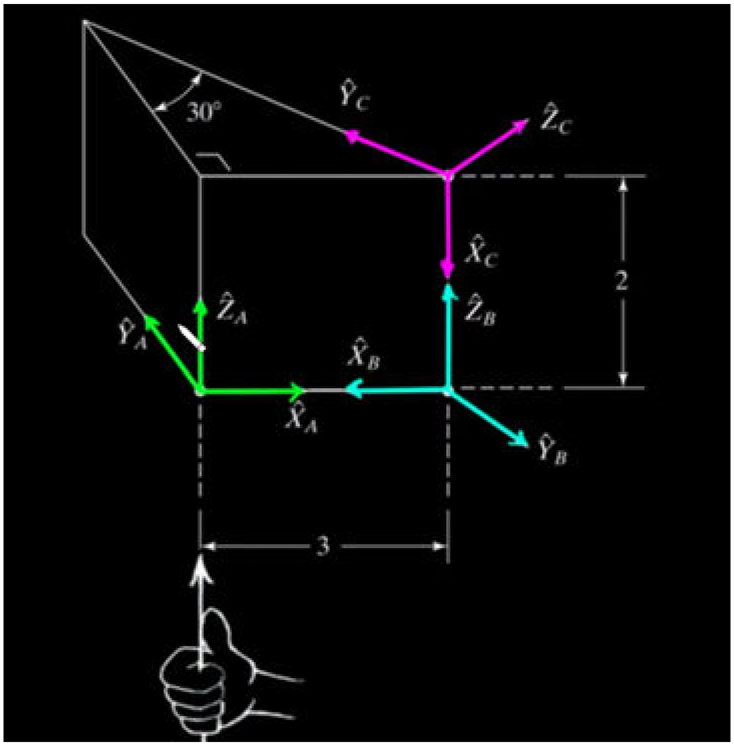
Matriz de transformación global T

```
disp(H40)
```

```
     1     0     0     6
     0     0    -1     0
```

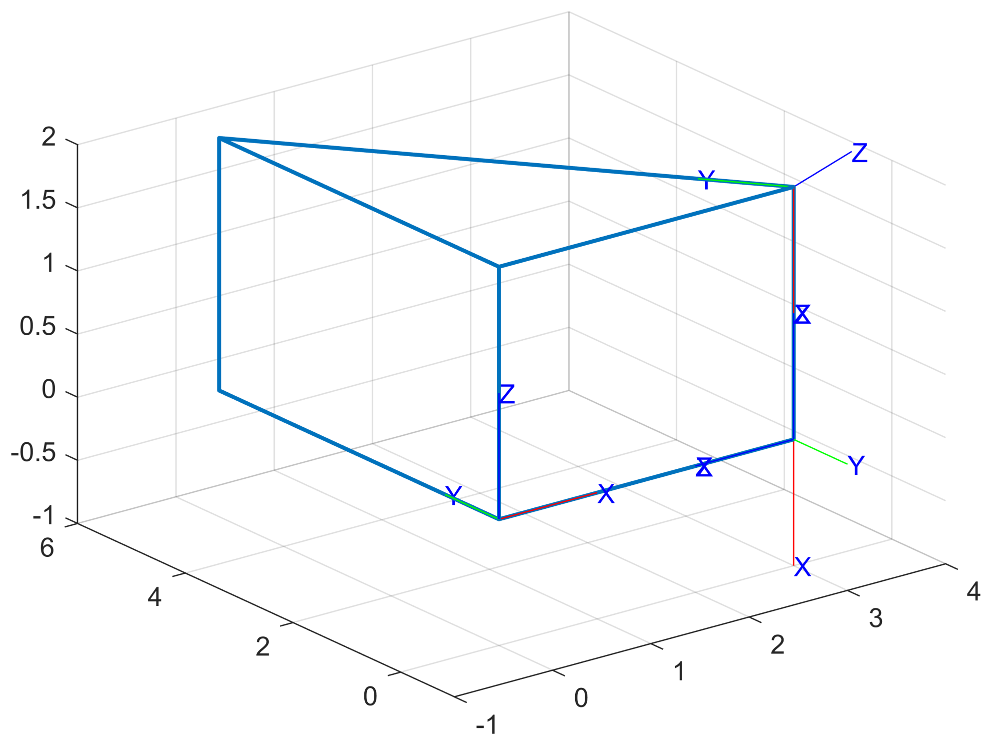
```
    0         1         0         3
    0         0         0         1
```

EJERCICIO 2 --------------------------




```
%Limpieza de pantalla
clear all
close all
clc

%Calculamos las matrices de transformación homogénea
H0=SE3;
H1=SE3(rotz(pi), [3 0 0]);
H2=SE3(roty(pi/2), [0 0 0]);
H3=SE3(rotx(150*pi/180), [-2 0 0]);

H20= H1*H2;
H30= H20*H3; %Matriz de transformación homogenea global de 3 a 0

%Coordenadas de la estructura de translación y rotación
x=[0 3 3 0 0 0     0     0 0     3];
y=[0 0 0 0 0 5.196 5.196 0 5.196 0];
z=[0 0 2 2 0 0     2     2 2     2];

plot3(x, y, z,'LineWidth', 1.5); axis([-1 4 -1 6 -1 2]); grid on;
hold on;
```

```
%Graficamos la trama absoluta o global
trplot(H0,'rgb','axis', [-1 4 -1 6 -1 2])
%
% %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
  tranimate(H0, H1,'rgb','axis', [-1 4 -1 6 -1 2])
% %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H1, H20,'rgb','axis', [-1 4 -1 6 -1 2])
% % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H20, H30,'rgb','axis', [-1 4 -1 6 -1 2])
```

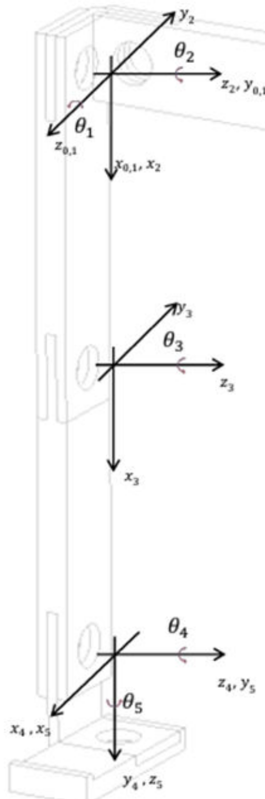


Matriz de transformación global T

```
disp(H30)
```

```
     0      -0.5     0.866         3
     0     0.866       0.5         0
    -1         0         0         2
     0         0         0         1
```

EJERCICIO 3 ---------------------------




```
 %Limpieza de pantalla
clear all
close all
clc

%Calculamos las matrices de transformación homogénea
H0=SE3;
H1=SE3(rotz(2*pi),[0 0 0]);
H2=SE3(rotx(-pi/2), [0 0 0]);
H3=SE3(rotz(2*pi),[3 0 0]);
H4=SE3(rotz(-pi/2), [3 0 0]);
H5=SE3(rotx(-pi/2), [0 0 0]);
H6=SE3(rotz(2*pi), [0 0 0]);


H20= H1*H2;
H30= H20*H3; %Matriz de transformación homogenea global de 3 a 0
H40= H30*H4; %Matriz de transformación homogenea global de 4 a 0
H50= H40*H5; %Matriz de transformación homogenea global de 5 a 0
H60= H50*H6; %Matriz de transformación homogenea global de 6 a 0


%Coordenadas de la estructura de translación y rotación
x=[0  6];
y=[0  0];
z=[0  0];
```

```
plot3(x, y, z,'LineWidth', 1.5); axis([-1 8 -3 3 -1 5]); grid on;
hold on;

 %Graficamos la trama absoluta o global
 trplot(H0,'rgb','axis', [-1 8 -3 3 -1 5])
% %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H0, H1,'rgb','axis', [-1 8 -3 3 -1 5])
% %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H1, H20,'rgb','axis', [-1 8 -3 3 -1 5])
% % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H20, H30,'rgb','axis', [-1 8 -3 3 -1 5])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H30, H40,'rgb','axis', [-1 8 -3 3 -1 5])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H40, H50,'rgb','axis', [-1 8 -3 3 -1 5])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H50, H60,'rgb','axis', [-1 8 -3 3 -1 5])
```

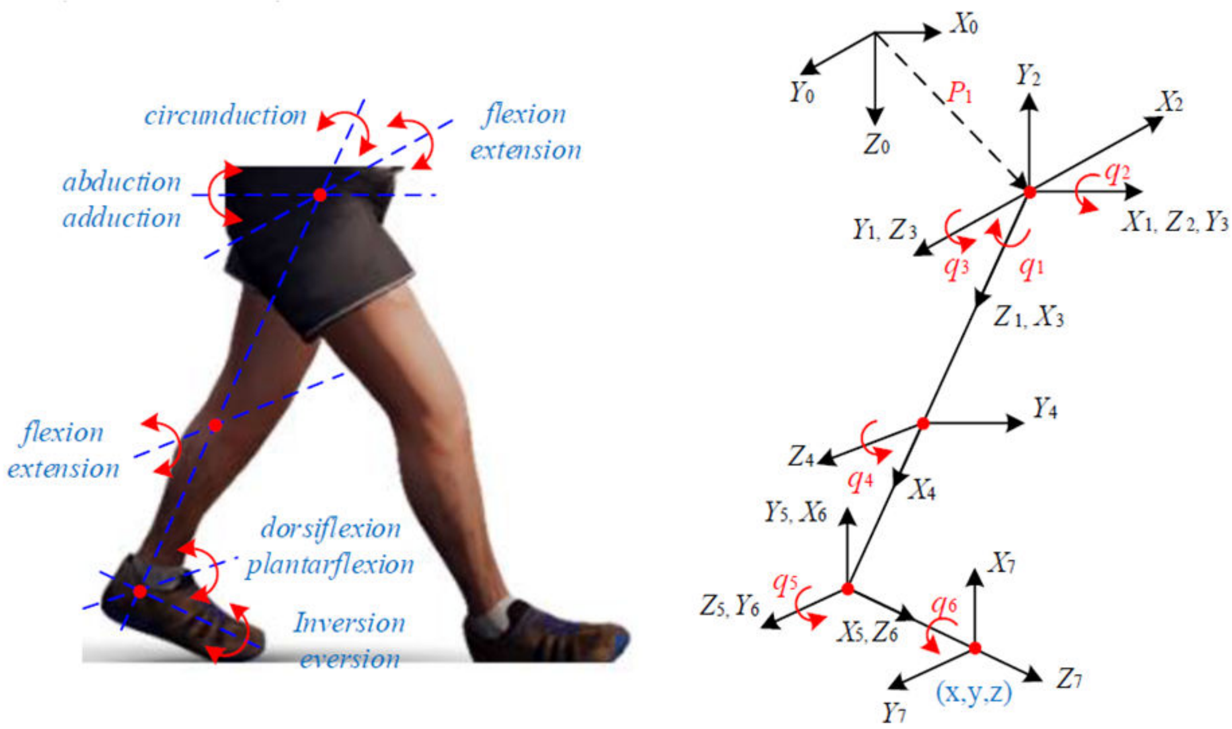
```

```

Matriz de transformación global T

```
disp(H60)
```

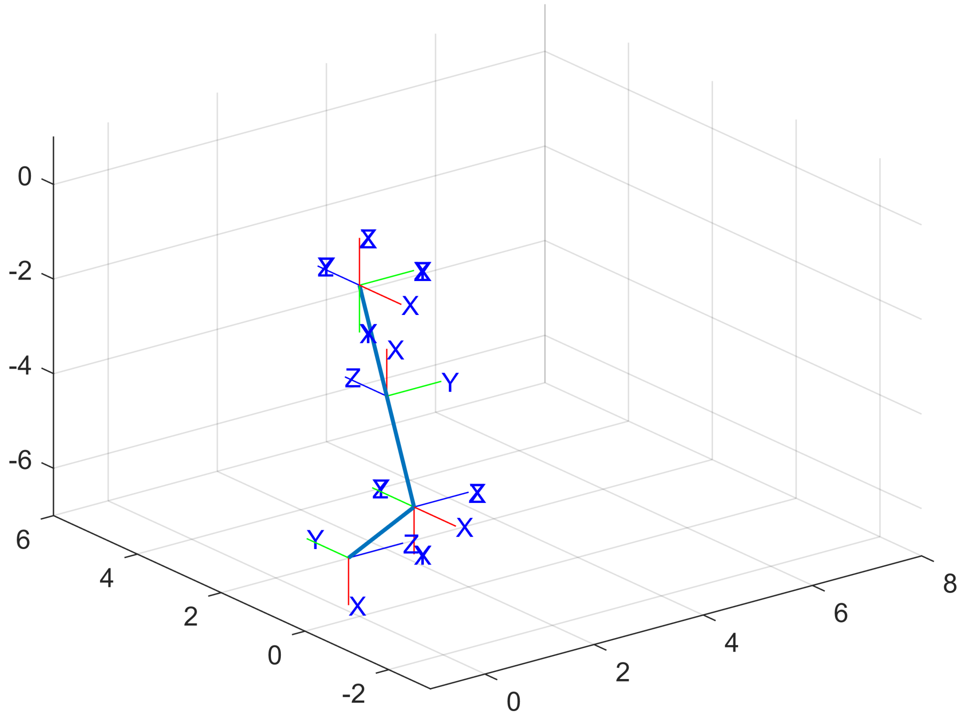
```
 -2.449e-16-2.449e-16         1         6
  2.449e-16        -1-2.449e-16 -1.47e-15
          1 2.449e-16 2.449e-16 7.348e-16
          0         0         0         1
```

EJERCICIO 4. (Modelo de la pierna) --------------------------




```
%Limpieza de pantalla
clear all
close all
clc

%Calculamos las matrices de transformación homogénea
H0=SE3;
%%% Del marco 1 al 2
H1=SE3(roty(pi/2),[0 0 0]);
H2=SE3(rotz(-pi/2), [0 0 0]);

%%% Del marco 2 al 3
H3=SE3(roty(-pi/2),[0 0 0]);
H4=SE3(rotz(-pi/2), [0 0 0]);

%%% Del marco 4 al 5
H5=SE3([-2.5 0.5 0]);

%%% Del marco 5 al 6
H6=SE3(rotz(pi/2), [-2.5 0.5 0]);

%%% Del marco 5 al 6
H7=SE3(roty(pi/2), [0 0 0]);
H8=SE3(rotz(pi/2), [0 0 0]);

%%% Del marco 6 al 7
H9=SE3([.7 0 -1.2]);
```

```
H20= H1*H2;
H30= H20*H3; %Matriz de transformación homogenea global de 3 a 0
H40= H30*H4; %Matriz de transformación homogenea global de 4 a 0
H50= H40*H5; %Matriz de transformación homogenea global de 5 a 0
H60= H50*H6; %Matriz de transformación homogenea global de 6 a 0
H70= H60*H7;
H80= H70*H8;
H90= H80*H9;


%Coordenadas de la estructura de translación y rotación
x=[0   1   -.2];
y=[0   0    0];
z=[0  -5   -5.7];

plot3(x, y, z,'LineWidth', 1.5); axis([-1 8 -3 6 -7 1]); grid on;
hold on;

 %Graficamos la trama absoluta o global
 trplot(H0,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
% %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H0, H1,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
% %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H1, H20,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
% % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H20, H30,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H30, H40,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H40, H50,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H50, H60,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H60, H70,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H70, H80,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
 % % %Realizamos una animación para la siguiente trama
 pause;
 tranimate(H80, H90,'rgb','axis', [-1 8 -3 6 -7 1])
```



Matriz de transformación global T

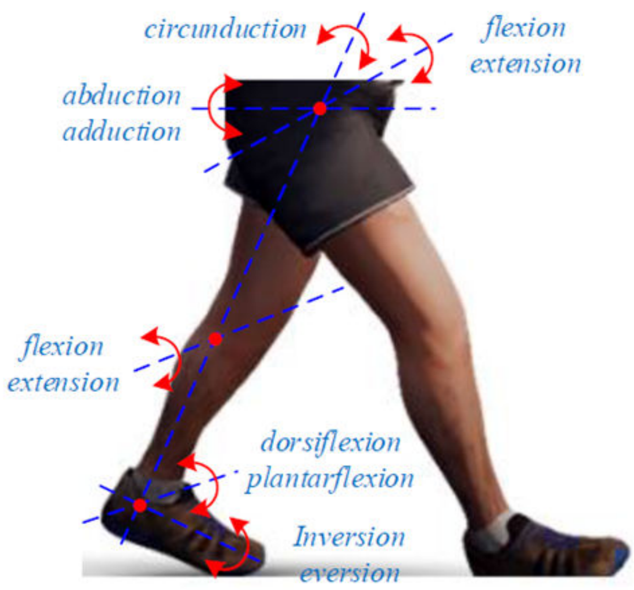
```
disp(H90)
```

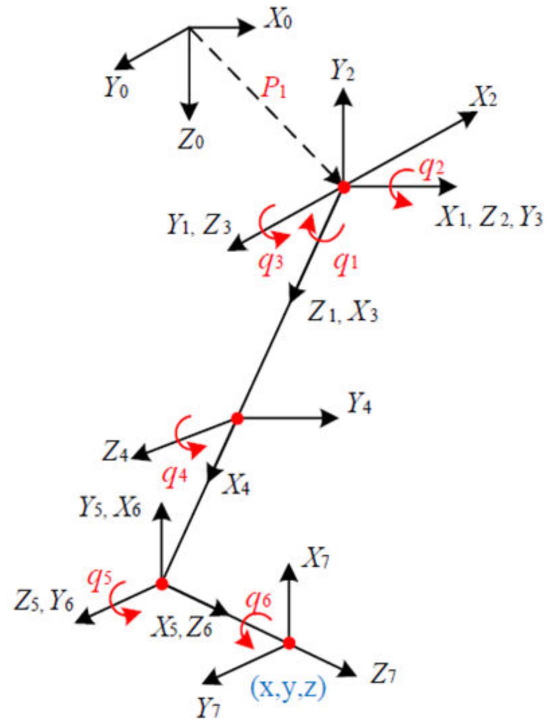
```
     0         0         1      -0.2
     0         1         0         0
    -1         0         0      -5.7
     0         0         0         1
```

PARTE II.

CINEMÁTICA DIFERENCIAL SIMBÓLICA (Pierna)

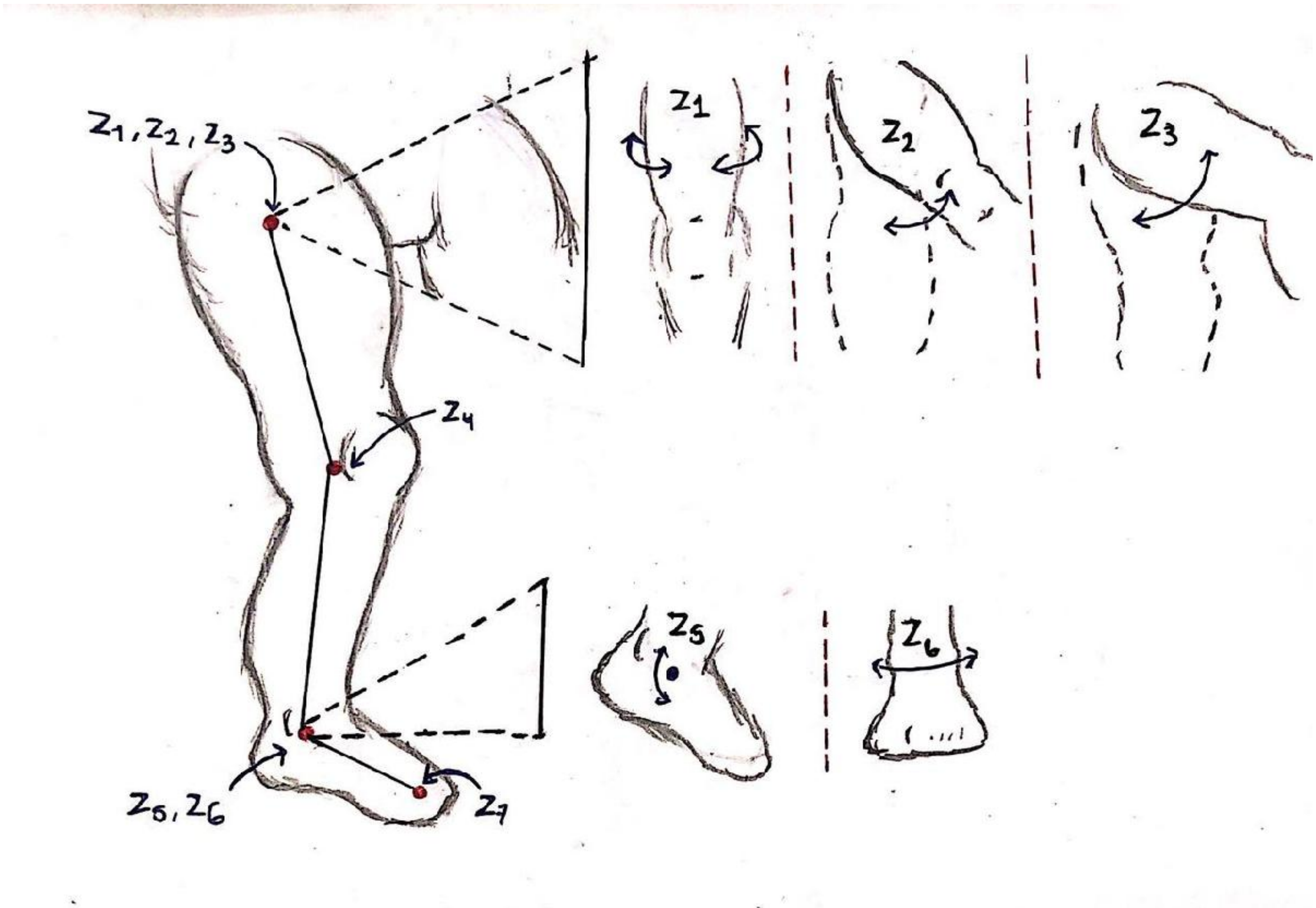
1. **Desarrollar** el modelo de **cinemática diferencial simbólica** para cada uno de los sistemas descritos anteriormente y obtener los vectores de la **velocidad angular y velocidad lineal** aplicando variables simbólicas para su análisis en cada caso.
2. **mplementar** el código requerido para generar el cálculo de las matrices **homogéneas simbólicas (H1, H2, H3, etc.),** la matriz de **transformación simbólica (T)** y los vectores de **velocidades simbólicas (v, w)** de cada sistema.






```
 % Limpieza de pantalla
clear all
close all
clc

%% DECLARACIÓN DE VARIABLES SIMBÓLICAS %%
% Donde l1 es igual a la longitud de la pierna
% Donde l2 es igual a la longitud de la pantorrilla
% Donde l3 es igual a la longitud del pie

syms th1(t) th2(t) th3(t) th4(t) th5(t) th6(t) th7(t) t l1 l2 l3

% Configuración del robot, 0 para junta rotacional, 1 para junta prismática
RP = [0 0 0 0 0 0 0];

% Creamos el vector de coordenadas articulares
Q = [-th1, th2, th3, th4, th5, th6, th7];
% disp('Coordenadas generalizadas');
% pretty(Q);

% Creamos el vector de velocidades generalizadas
Qp = diff(Q, t);
% disp('Velocidades generalizadas');
% pretty(Qp);

% Número de grado de libertad del robot
GDL = size(RP, 2);
GDL_str = num2str(GDL);
```

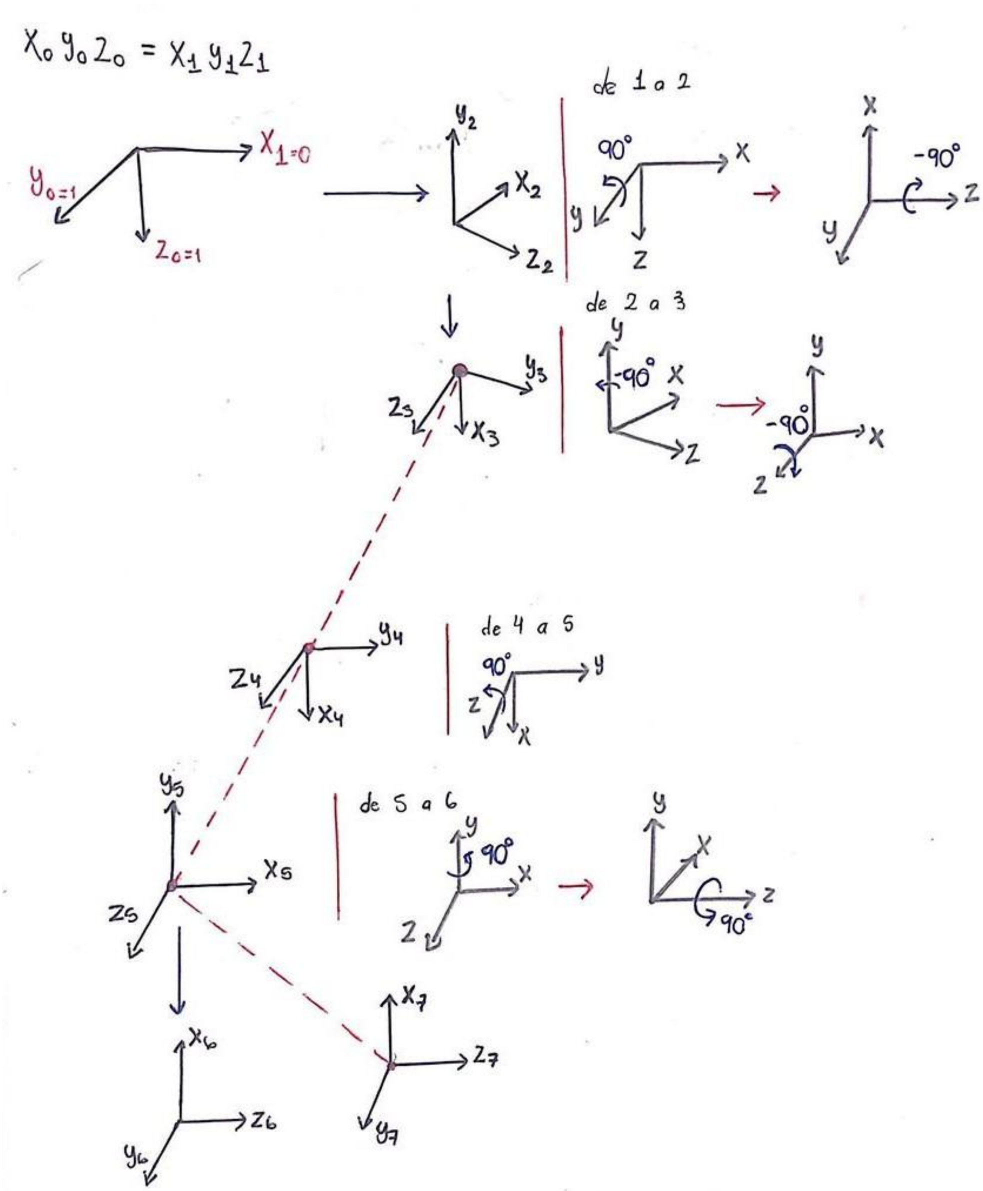
Rotaciones de las articulaciones de las piernas




```
% Rotaciones en el eje Z de cada articulación de la pierna

articulacion_Z1 = [cos(-th1) -sin(-th1)  0;
                   sin(-th1)  cos(-th1)  0;
                   0          0          1];

articulacion_Z2 = [cos(th2) -sin(th2)  0;
                   sin(th2)  cos(th2)  0;
                   0         0         1];

articulacion_Z3 = [cos(th3) -sin(th3)  0;
                   sin(th3)  cos(th3)  0;
                   0         0         1];

articulacion_Z4 = [cos(th4) -sin(th4)  0;
                   sin(th4)  cos(th4)  0;
                   0         0         1];

articulacion_Z5 = [cos(th5) -sin(th5)  0;
                   sin(th5)  cos(th5)  0;
                   0         0         1];
```

```
articulacionZ6 = [cos(th6) -sin(th6)  0;
                   sin(th6)  cos(th6)  0;
                   0         0         1];

articulacion_Z7 = [cos(th7) -sin(th7)  0;
                   sin(th7)  cos(th7)  0;
                   0         0         1];
```

Rotaciones adicionales (Pasos de marco en marco)




```
% La mayoría de ellas con valores iguales a 90° o -90°
% Según las necesidades de cada marco para trasladar la posición
% de nuestro z en el eje correspondiente.

roty90 = [0 0 1;
          0 1 0;
```

```
        -1 0 0];

rotym90 = [0 0 -1;
           0 1  0;
           1 0  0];

rotz90 = [0 -1 0;
          1  0 0;
          0  0 1];

rotzm90 = [0 1 0;
          -1 0 0;
           0 0 1];
```

Posición de las articulaciones

```
% Inicialización de matrices de rotación y posiciones de cada articulación
P = sym(zeros(3, 1, GDL));
R = sym(zeros(3, 3, GDL));

% Articulación 1
% Posición de la articulación 1 respecto a 0
P(:,:,1) = [0; 0; 0];
% Matriz de rotación de la junta 1 respecto a 0
R(:,:,1) = articulacion_Z1;

% Articulación 2
% Posición de la articulación 2 respecto a 1
P(:,:,2) = [0; 0; 0];
% Matriz de rotación de la junta 2 respecto a 1
R(:,:,2) = roty90*rotzm90*articulacion_Z2;

% Articulación 3
% Posición de la articulación 3 respecto a 2
P(:,:,3) = [0; 0; 0];
% Matriz de rotación de la junta 3 respecto a 2
R(:,:,3) = rotym90*rotzm90*articulacion_Z3;

% Articulación 4
% Posición de la articulación 4 respecto a 3
P(:,:,4) = [l1; 0; 0];
% Matriz de rotación de la junta 4 respecto a 3
R(:,:,4) = articulacion_Z4;

% Articulación 5
% Posición de la articulación 5 respecto a 4
P(:,:,5) = [l2; 0; 0];
% Posición de la articulación 5 respecto a 4
R(:,:,5) = roty90*articulacion_Z5;
```

```
% Articulación 6
% Posición de la articulación 6 respecto a 5
P(:,:,6) = [0; 0; 0];
% Posición de la articulación 6 respecto a 5
R(:,:,6) = roty90*rotz90*articulacionZ6;

% Articulación 7
% Posición de la articulación 7 respecto a 6
P(:,:,7) = [l3; 0; 0];
% Posición de la articulación 7 respecto a 6
R(:,:,7) = articulacion_Z7;

% Creamos un vector de ceros
Vector_Zeros = zeros(1, 3);
```

Matrices de transformación locales y globales

```
% Inicializamos las matrices de transformación Homogénea locales
A(:,:,GDL) = simplify([R(:,:,GDL) P(:,:,GDL); Vector_Zeros 1]);
% Inicializamos las matrices de transformación Homogénea globales
T(:,:,GDL) = simplify([R(:,:,GDL) P(:,:,GDL); Vector_Zeros 1]);
% Inicializamos las posiciones vistas desde el marco de referencia inercial
PO(:,:,GDL) = P(:,:,GDL);
% Inicializamos las matrices de rotación vistas desde el marco de referencia inercial
RO(:,:,GDL) = R(:,:,GDL);

for i = 1:GDL
    i_str = num2str(i);
    % disp(strcat('Matriz de Transformación local A', i_str));
    A(:,:,i) = simplify([R(:,:,i) P(:,:,i); Vector_Zeros 1]);
    % pretty(A(:,:,i));

    % Globales
    try
       T(:,:,i) = T(:,:,i-1) * A(:,:,i);
    catch
       T(:,:,i) = A(:,:,i);
    end
    disp(strcat('Matriz de Transformación global T', i_str));
    T(:,:,i) = simplify(T(:,:,i));
    pretty(T(:,:,i))

    RO(:,:,i) = T(1:3, 1:3, i);
    PO(:,:,i) = T(1:3, 4, i);
    % pretty(RO(:,:,i));
    % pretty(PO(:,:,i));
end
```

```
Matriz de Transformación global T1
```

```
/  cos(th1(t)), sin(th1(t)), 0, 0 \
|                                  |
| -sin(th1(t)), cos(th1(t)), 0, 0 |
|                                  |
|      0,           0,      1, 0 |
|                                  |
\      0,           0,      0, 1 /
Matriz de Transformación global T2
/ -cos(th2(t)) sin(th1(t)), sin(th1(t)) sin(th2(t)),  cos(th1(t)), 0 \
|                                                                    |
| -cos(th1(t)) cos(th2(t)), cos(th1(t)) sin(th2(t)), -sin(th1(t)), 0 |
|                                                                    |
|      -sin(th2(t)),            -cos(th2(t)),           0,      0 |
|                                                                    |
\            0,                        0,                0,      1 /
Matriz de Transformación global T3
[[cos(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)), cos(th1(t)) cos(th3(t)) + sin(th1(t)) sin(th2(t)) s

  cos(th2(t)) sin(th1(t)), 0],

  [- sin(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t)), cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t

  cos(th1(t)) cos(th2(t)), 0], [cos(th2(t)) cos(th3(t)), -cos(th2(t)) sin(th3(t)), sin(th2(t)), 0],

  [0, 0, 0, 1]]
Matriz de Transformación global T4
/  cos(th4(t)) #1 + sin(th4(t)) #4,  cos(th4(t)) #4 - sin(th4(t)) #1, cos(th2(t)) sin(th1(t)),           l1 #1
|
| - cos(th4(t)) #2 - sin(th4(t)) #3, sin(th4(t)) #2 - cos(th4(t)) #3, cos(th1(t)) cos(th2(t)),          -l1 #2
|
|        cos(th2(t)) cos(#5),              -cos(th2(t)) sin(#5),            sin(th2(t)),       l1 cos(th2(t)) cos(th
|
\                 0,                                0,                            0,                         1

where

   #1 == cos(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

   #2 == sin(th1(t)) sin(th3(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t))

   #3 == cos(th3(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

   #4 == cos(th1(t)) cos(th3(t)) + sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

   #5 == th3(t) + th4(t)
Matriz de Transformación global T5
[[sin(th5(t)) #3 - cos(th2(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t)), cos(th5(t)) #3 + cos(th2(t)) sin(th1(t)) sin(th5(t)), #4, l2

  [- sin(th5(t)) #2 - cos(th1(t)) cos(th2(t)) cos(th5(t)), cos(th1(t)) cos(th2(t)) sin(th5(t)) - cos(th5(t)) #2, - #

  [- cos(th5(t)) sin(th2(t)) - cos(th2(t)) sin(th5(t)) sin(#1), sin(th2(t)) sin(th5(t)) - cos(th2(t)) cos(th5(t)) si

  cos(th2(t)) (l1 cos(th3(t)) + l2 cos(#1))],

  [0, 0, 0, 1]]

where

   #1 == th3(t) + th4(t)

   #2 == cos(th4(t)) #9 - sin(th4(t)) #10

   #3 == cos(th4(t)) #8 - sin(th4(t)) #7
```

```
   #4 == cos(th4(t)) #7 + sin(th4(t)) #8

   #5 == sin(th4(t)) #9

   #6 == cos(th4(t)) #10

   #7 == cos(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

   #8 == cos(th1(t)) cos(th3(t)) + sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

   #9 == cos(th3(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

   #10 == sin(th1(t)) sin(th3(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t))
Matriz de Transformación global T6
[[sin(th6(t)) #1 + cos(th6(t)) #3, cos(th6(t)) #1 - sin(th6(t)) #3, sin(th5(t)) #6 - cos(th2(t)) cos(th5(t)) sin(th1

  [- sin(th6(t)) #2 - cos(th6(t)) #4, sin(th6(t)) #4 - cos(th6(t)) #2, - sin(th5(t)) #7 - cos(th1(t)) cos(th2(t)) co

  [cos(th6(t)) #5 + cos(th2(t)) sin(th6(t)) cos(#8), cos(th2(t)) cos(th6(t)) cos(#8) - sin(th6(t)) #5,

  - cos(th5(t)) sin(th2(t)) - cos(th2(t)) sin(th5(t)) sin(#8), cos(th2(t)) (l1 cos(th3(t)) + l2 cos(#8))],

  [0, 0, 0, 1]]

where

   #1 == cos(th4(t)) #9 + sin(th4(t)) #10

   #2 == cos(th4(t)) #11 + sin(th4(t)) #12

   #3 == cos(th5(t)) #6 + cos(th2(t)) sin(th1(t)) sin(th5(t))

   #4 == cos(th5(t)) #7 - cos(th1(t)) cos(th2(t)) sin(th5(t))

   #5 == sin(th2(t)) sin(th5(t)) - cos(th2(t)) cos(th5(t)) sin(#8)

   #6 == cos(th4(t)) #10 - sin(th4(t)) #9

   #7 == cos(th4(t)) #12 - sin(th4(t)) #11

   #8 == th3(t) + th4(t)

   #9 == cos(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

   #10 == cos(th1(t)) cos(th3(t)) + sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

   #11 == sin(th1(t)) sin(th3(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t))

   #12 == cos(th3(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))
Matriz de Transformación global T7
[[cos(th7(t)) #1 + sin(th7(t)) #3, cos(th7(t)) #3 - sin(th7(t)) #1, sin(th5(t)) #12 - cos(th2(t)) cos(th5(t)) sin(th

  [- cos(th7(t)) #2 - sin(th7(t)) #4, sin(th7(t)) #2 - cos(th7(t)) #4, - sin(th5(t)) #13 - cos(th1(t)) cos(th2(t)) c

  - l2 #9 - l1 #17 - l3 #2],

  [cos(th7(t)) #5 - sin(th7(t)) #6, - cos(th7(t)) #6 - sin(th7(t)) #5, - cos(th5(t)) sin(th2(t)) - cos(th2(t)) sin(t

  cos(th2(t)) (l1 cos(th3(t)) + l2 cos(#14)) + l3 #5],

  [0, 0, 0, 1]]

where
```

```
#1 == sin(th6(t)) #7 + cos(th6(t)) #8

#2 == sin(th6(t)) #9 + cos(th6(t)) #10

#3 == cos(th6(t)) #7 - sin(th6(t)) #8

#4 == cos(th6(t)) #9 - sin(th6(t)) #10

#5 == cos(th6(t)) #11 + cos(th2(t)) sin(th6(t)) cos(#14)

#6 == sin(th6(t)) #11 - cos(th2(t)) cos(th6(t)) cos(#14)

#7 == cos(th4(t)) #15 + sin(th4(t)) #16

#8 == cos(th5(t)) #12 + cos(th2(t)) sin(th1(t)) sin(th5(t))

#9 == cos(th4(t)) #17 + sin(th4(t)) #18

#10 == cos(th5(t)) #13 - cos(th1(t)) cos(th2(t)) sin(th5(t))

#11 == sin(th2(t)) sin(th5(t)) - cos(th2(t)) cos(th5(t)) sin(#14)

#12 == cos(th4(t)) #16 - sin(th4(t)) #15

#13 == cos(th4(t)) #18 - sin(th4(t)) #17

#14 == th3(t) + th4(t)

#15 == cos(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

#16 == cos(th1(t)) cos(th3(t)) + sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

#17 == sin(th1(t)) sin(th3(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t))

#18 == cos(th3(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))
```

Velocidad lineal y ángular mediante el Jacobiano

```
% Calculamos el jacobiano lineal de forma analítica
Jv_a = sym(zeros(3, GDL));
Jw_a = sym(zeros(3, GDL));

for k = 1:GDL
    if RP(k) == 0
        % Para las juntas de revolución
        try
            Jv_a(:,k) = cross(RO(:,3,k-1), PO(:,:,GDL) - PO(:,:,k-1));
            Jw_a(:,k) = RO(:,3,k-1);
        catch
            Jv_a(:,k) = cross([0, 0, 1], PO(:,:,GDL)); % Matriz de rotación de 0 con respecto a
            Jw_a(:,k) = [0, 0, 1]; % Si no hay matriz de rotación previa se obtiene la Matriz i
        end
    else
        % Para las juntas prismáticas
        try
            Jv_a(:,k) = RO(:,3,k-1);
        catch
```

```
            Jv_a(:,k) = [0, 0, 1];
        end
        Jw_a(:,k) = [0, 0, 0];
    end
end

Jv_a = simplify(Jv_a);
Jw_a = simplify(Jw_a);
disp('Jacobiano lineal obtenido de forma analítica');
```

```
Jacobiano lineal obtenido de forma analítica
```

```
pretty(Jv_a);
```

```
[[#32, #32, -sin(th1(t)) #33, l1 cos(th1(t)) cos(th3(t)) + #24 - #28 + l1 sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) + #21

   + #5 + #3 - #1, #24 - #28 + #21 + #16 + #15 - #14 - #12 - #11 + #6 + #5 + #3 - #1,

  -l3 cos(th6(t)) (cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th5(t)) - cos(th2(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t

  sin(th5(t)) + cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) sin(th5(t)) + cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) si

  l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th6(t)) sin(th4(t)) + l3 cos(th1(t)) cos(th4(t)) cos(th6(t)) sin(th3(t)) - l3

   cos(th2(t)) sin(th1(t)) sin(th5(t)) sin(th6(t)) - l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) sin(th6(t))

   cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) + l3 cos(th1(t)) cos(th5(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

   cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) - l3 cos(th3(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

   cos(th4(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))],

  [#31, #31, -cos(th1(t)) #33, l1 cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) - #23 - l1 cos(th3(t)) sin(th1(t)) + #25 + #20

   + #7 + #4 - #2, #25 - #23 + #20 + #19 - #18 + #13 + #10 + #9 + #8 + #7 + #4 - #2,

  -l3 cos(th6(t)) (sin(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th5(t)) - cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th5(t)

  cos(th5(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) sin(th5(t)) + cos(th1(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) si

  l3 cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t)) sin(th6(t)) - l3 cos(th3(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th4(t

   cos(th4(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th3(t)) - l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t))

   cos(th1(t)) cos(th2(t)) sin(th5(t)) sin(th6(t)) + l3 cos(th1(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

   cos(th5(t)) sin(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t)) - l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th5(t)) sin(th2(t))

   cos(th1(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))],

  [0, 0, l3 cos(th2(t)) cos(th6(t)) sin(th5(t)) - l2 cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) - l1 cos(th3(t)) sin(th2(t

   sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) - l3 cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) sin(th6(t)) + l3 sin(th2(t)) sin(th3

   cos(th3(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) + l3 cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t))

  -cos(th2(t)) (l1 sin(th3(t)) + #30 + #29 + #27 + #26 - #17 + #22), -cos(th2(t)) (#30 + #29 + #27 + #26 - #17 + #22

  l3 cos(th6(t)) (cos(th5(t)) sin(th2(t)) + cos(th2(t)) cos(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th5(t)) + cos(th2(t)) cos(th4(t

  l3 (cos(th2(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th6(t)) - sin(th2(t)) sin(th5(t)) sin(th6(t)) - cos(th2(t)) cos(th6(t
```

```
  sin(th4(t)) + cos(th2(t)) cos(th3(t)) cos(th5(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t)) + cos(th2(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) s

where

   #1 == l3 cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

   #2 == l3 cos(th1(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

   #3 == l3 cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

   #4 == l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t))

   #5 == l3 cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))

   #6 == l3 cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))

   #7 == l3 cos(th1(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))

   #8 == l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))

   #9 == l3 cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th3(t))

   #10 == l3 cos(th3(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th4(t))

   #11 == l3 cos(th1(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th3(t))

   #12 == l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th4(t))

   #13 == l3 sin(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))

   #14 == l3 cos(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))

   #15 == l2 cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

   #16 == l2 cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t))

   #17 == l3 cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

   #18 == l3 cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th6(t))

   #19 == l2 cos(th1(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

   #20 == l2 cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t))

   #21 == l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th6(t))

   #22 == l3 cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t))

   #23 == l2 cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th1(t))

   #24 == l2 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t))

   #25 == l2 sin(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

   #26 == l3 cos(th4(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))

   #27 == l3 cos(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))

   #28 == l2 cos(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

   #29 == l2 cos(th4(t)) sin(th3(t))

   #30 == l2 cos(th3(t)) sin(th4(t))
```

```
  #31 == l2 #34 + l1 #37 + l3 (sin(th6(t)) #34 + cos(th6(t)) (cos(th5(t)) (cos(th4(t)) #38 - sin(th4(t)) #37) + cos

  #32 == l2 #35 + l1 #39 + l3 (sin(th6(t)) #35 + cos(th6(t)) (cos(th5(t)) (cos(th4(t)) #40 - sin(th4(t)) #39) - cos

  #33 == cos(th2(t)) (l1 cos(th3(t)) + l2 cos(#36)) + l3 (cos(th6(t)) (sin(th2(t)) sin(th5(t)) - cos(th2(t)) cos(th

     + cos(th2(t)) sin(th6(t)) cos(#36))

  #34 == cos(th4(t)) #37 + sin(th4(t)) #38

  #35 == cos(th4(t)) #39 + sin(th4(t)) #40

  #36 == th3(t) + th4(t)

  #37 == cos(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

  #38 == cos(th1(t)) cos(th3(t)) + sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

  #39 == sin(th1(t)) sin(th3(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t))

  #40 == cos(th3(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))
```

```
disp('Jacobiano ángular obtenido de forma analítica');
```

```
Jacobiano ángular obtenido de forma analítica
```

```
pretty(Jw_a);
```

```
[[0, 0, cos(th1(t)), #5, #5, cos(th4(t)) #2 + sin(th4(t)) #3, sin(th5(t)) (cos(th4(t)) #3 - sin(th4(t)) #2) - cos(th

  [0, 0, -sin(th1(t)), #6, #6, - cos(th4(t)) #4 - sin(th4(t)) #1, - sin(th5(t)) (cos(th4(t)) #1 - sin(th4(t)) #4)

   - cos(th1(t)) cos(th2(t)) cos(th5(t))],

  [1, 1, 0, sin(th2(t)), sin(th2(t)), cos(th2(t)) cos(#7), - cos(th5(t)) sin(th2(t)) - cos(th2(t)) sin(th5(t)) sin(#

where

  #1 == cos(th3(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

  #2 == cos(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

  #3 == cos(th1(t)) cos(th3(t)) + sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

  #4 == sin(th1(t)) sin(th3(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t))

  #5 == cos(th2(t)) sin(th1(t))

  #6 == cos(th1(t)) cos(th2(t))

  #7 == th3(t) + th4(t)
```

```

disp('Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal');
```

```
Velocidad lineal obtenida mediante el Jacobiano lineal
```

```
V = simplify(Jv_a * Qp');
pretty(V);
```

```
[[#33 (#24 - #28 + #21 + #16 + #15 - #14 - #12 - #11 + #6 + #5 + #3 - #1) - #37 #39 + #36 #39 + #34 (l1 cos(th1(t))
   + l1 sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) + #21 + #16 + #15 - #14 - #12 - #11 + #6 + #5 + #3 - #1)
   - #31 (l3 cos(th2(t)) sin(th1(t)) sin(th5(t)) sin(th6(t)) - l3 cos(th1(t)) cos(th4(t)) cos(th6(t)) sin(th3(t)) -
   cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th6(t)) sin(th4(t)) + l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) sin(th6(t))
   cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) - l3 cos(th1(t)) cos(th5(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))
   cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) + l3 cos(th3(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))
   cos(th4(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))) - #35 sin(th1(t)) #40 - l3 #32
   cos(th6(t)) (cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th5(t)) - cos(th2(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t))
  sin(th5(t)) + cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) sin(th5(t)) + cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) si
  [#33 (#25 - #23 + #20 + #19 - #18 + #13 + #10 + #9 + #8 + #7 + #4 - #2) - #37 #38 + #36 #38 + #34 (l1 cos(th1(t))
   - l1 cos(th3(t)) sin(th1(t)) + #25 + #20 + #19 - #18 + #13 + #10 + #9 + #8 + #7 + #4 - #2)
   - #31 (l3 cos(th1(t)) cos(th2(t)) sin(th5(t)) sin(th6(t)) + l3 cos(th3(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th4(t)) +
   cos(th4(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th3(t)) + l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t))
   cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t)) sin(th6(t)) - l3 cos(th1(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))
   cos(th5(t)) sin(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t)) + l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th5(t)) sin(th2(t))
   cos(th1(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))) - #35 cos(th1(t)) #40 - l3 #32
   cos(th6(t)) (sin(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th5(t)) - cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th5(t)) -
  cos(th5(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) sin(th5(t)) + cos(th1(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) si
  [#35 (l3 cos(th2(t)) cos(th6(t)) sin(th5(t)) - l2 cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) - l1 cos(th3(t)) sin(th2(t))
   sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) - l3 cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) sin(th6(t)) + l3 sin(th2(t)) sin(th3
   cos(th3(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) + l3 cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t))
   - #33 cos(th2(t)) (#30 + #29 + #27 + #26 - #17 + #22) - #34 cos(th2(t)) (l1 sin(th3(t)) + #30 + #29 + #27 + #26 -
   + l3 #31 (cos(th2(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th6(t)) - sin(th2(t)) sin(th5(t)) sin(th6(t)) - cos(th2(t)) cos
  sin(th4(t)) + cos(th2(t)) cos(th3(t)) cos(th5(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t)) + cos(th2(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) si
   + l3 #32 cos(th6(t)) (cos(th5(t)) sin(th2(t)) + cos(th2(t)) cos(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th5(t)) + cos(th2(t)) cos
where
   #1 == l3 cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))
   #2 == l3 cos(th1(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))
   #3 == l3 cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))
   #4 == l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th2(t))
   #5 == l3 cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))
   #6 == l3 cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))
```

```
#7 == l3 cos(th1(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))

#8 == l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))

#9 == l3 cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th3(t))

#10 == l3 cos(th3(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th1(t)) sin(th4(t))

#11 == l3 cos(th1(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th3(t))

#12 == l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th4(t))

#13 == l3 sin(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))

#14 == l3 cos(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))

#15 == l2 cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

#16 == l2 cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t))

#17 == l3 cos(th5(t)) cos(th6(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

#18 == l3 cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th1(t)) sin(th6(t))

#19 == l2 cos(th1(t)) cos(th4(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

#20 == l2 cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t)) sin(th4(t))

#21 == l3 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th6(t))

#22 == l3 cos(th3(t)) cos(th4(t)) cos(th5(t)) cos(th6(t))

#23 == l2 cos(th3(t)) cos(th4(t)) sin(th1(t))

#24 == l2 cos(th1(t)) cos(th3(t)) cos(th4(t))

#25 == l2 sin(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

#26 == l3 cos(th4(t)) sin(th3(t)) sin(th6(t))

#27 == l3 cos(th3(t)) sin(th4(t)) sin(th6(t))

#28 == l2 cos(th1(t)) sin(th3(t)) sin(th4(t))

#29 == l2 cos(th4(t)) sin(th3(t))

#30 == l2 cos(th3(t)) sin(th4(t))

       _________
        d
#31 == -- th7(t)
       dt

       _________
        d
#32 == -- th6(t)
       dt

       _________
        d
#33 == -- th5(t)
       dt

       _________
```

```
         d
#34 == -- th4(t)
       dt

       _________
         d
#35 == -- th3(t)
       dt

       _________
         d
#36 == -- th2(t)
       dt

       _________
         d
#37 == -- th1(t)
       dt

#38 == l2 #41 + l1 #44 + l3 (sin(th6(t)) #41 + cos(th6(t)) (cos(th5(t)) (cos(th4(t)) #45 - sin(th4(t)) #44) + cos

#39 == l2 #42 + l1 #46 + l3 (sin(th6(t)) #42 + cos(th6(t)) (cos(th5(t)) (cos(th4(t)) #47 - sin(th4(t)) #46) - cos

#40 == cos(th2(t)) (l1 cos(th3(t)) + l2 cos(#43)) + l3 (cos(th6(t)) (sin(th2(t)) sin(th5(t)) - cos(th2(t)) cos(th

   + cos(th2(t)) sin(th6(t)) cos(#43))

#41 == cos(th4(t)) #44 + sin(th4(t)) #45

#42 == cos(th4(t)) #46 + sin(th4(t)) #47

#43 == th3(t) + th4(t)

#44 == cos(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

#45 == cos(th1(t)) cos(th3(t)) + sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

#46 == sin(th1(t)) sin(th3(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t))

#47 == cos(th3(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))
```

```
disp('Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular');
```

```
Velocidad angular obtenida mediante el Jacobiano angular
```

```
W = simplify(Jw_a * Qp');
pretty(W);
```

```
--
|
|  [#5 (sin(th5(t)) (cos(th4(t)) #3 - sin(th4(t)) #2) - cos(th2(t)) cos(th5(t)) sin(th1(t))) + #10 cos(th1(t)) + #6
--

   + #8 cos(th2(t)) sin(th1(t)) + #7 cos(th2(t)) sin(th1(t))],

  [#8 cos(th1(t)) cos(th2(t)) - #6 (cos(th4(t)) #4 + sin(th4(t)) #1) - #10 sin(th1(t)) - #5 (sin(th5(t)) (cos(th4(t

   + cos(th1(t)) cos(th2(t)) cos(th5(t))) + #7 cos(th1(t)) cos(th2(t))],

  -- _________   _________
  |   d           d
  |  -- th2(t) - -- th1(t) - #5 (cos(th5(t)) sin(th2(t)) + cos(th2(t)) sin(th5(t)) sin(#9)) + #8 sin(th2(t)) + #7 s
  -- dt          dt
```

```
                     -- --
                      |  |
   cos(th2(t)) cos(#9)  |  |
                     -- --

where

   #1 == cos(th3(t)) sin(th1(t)) - cos(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

   #2 == cos(th1(t)) sin(th3(t)) - cos(th3(t)) sin(th1(t)) sin(th2(t))

   #3 == cos(th1(t)) cos(th3(t)) + sin(th1(t)) sin(th2(t)) sin(th3(t))

   #4 == sin(th1(t)) sin(th3(t)) + cos(th1(t)) cos(th3(t)) sin(th2(t))

         _________
          d
   #5 == -- th7(t)
         dt

         _________
          d
   #6 == -- th6(t)
         dt

         _________
          d
   #7 == -- th5(t)
         dt

         _________
          d
   #8 == -- th4(t)
         dt

   #9 == th3(t) + th4(t)

          _________
           d
   #10 == -- th3(t)
          dt
```