Análisis Numérico

Nombres: Arcos Hernández Raúl
Gómez Luna Alejandro
Numero de lista: 3, 11
Grupo: 11
Trabajo: 3
Fecha: 8/05/2020

Instrucciones: Es importante que su respuesta sea lo más clara posible.

1. Por medio de la interpolación de Newton calcule, para la siguiente función tabulada:

x	Y=f(x)
-3	-51
-1	-11
1	-11
3	-3
5	61

a) El valor de y para x=0.5
b) El valor de y para x=4
c) El valor de y para x=-3.4
d) El polinomio al cual corresponde la función tabular

Desarrollo

x	f(x)	PD	SD	TD
		264		48
-5	-179		-136	
-3.4		128		48
-3	-51		-88	
		40		48
-1	-11		-40	
0.5		0		48
1	-11		8	
		8		48
3	-3		56	
4		64		48
5	61		104	
		168		48
			152	
		320		48

a) x = 0.5

Ecuación interpolante

$$y_k = y_o + k\Delta y_o + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta {y_o}^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta {y_o}^3$$

$$k = \frac{x_k - x_0}{h}$$

Sustituyendo valores obtenidos a partir de la tabla de diferencias de Excel

$$k = \frac{0.5 - (-1)}{2} = 0.75$$

$$y_{0.5} = -11 + (0.75) * 0 + \frac{0.75(0.75 - 1)}{2!} 8 + \frac{0.75(0.75 - 1)(0.75 - 2)}{3!} 48 = -9.875$$

0.5	
x_k	0.5
x_0	-1
h	2
k	0.75
y_0	-11
PD	0
SD	8
TD	48
y_k	-9.875

Conclusión inciso a

El valor de y para x = 0.5, es y = -9.875

b) x = 4

Ecuación interpolante

$$y_k = y_o + k\Delta y_o + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta {y_o}^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta {y_o}^3$$
$$k = \frac{x_k - x_0}{h}$$

Sustituyendo valores obtenidos a partir de la tabla de diferencias de Excel

$$k = \frac{4 - 3}{2} = 0.5$$
$$y_{0.5} = -3 + (0.5) * 64 + \frac{0.5(0.5 - 1)}{2!} 104 + \frac{0.5(0.5 - 1)(0.5 - 2)}{3!} 48 = 19$$

4	
x_k	4
x_0	3
h	2
k	0.5
y_0	-3
PD	64
SD	104
TD	48
y_k	19

Conclusión inciso b

El valor de y para x = 4, es y = 19

c) **x = -3.4**

Ya que en la función tabular no hay un valor registrado antes de -3, se tiene que *extrapolar* un valor de un espaciamiento anterior a -3 a partir de las primeras, segundas y terceras diferencias. A partir de esto se obtiene un nuevo valor para la función tabular de x = -5 y f(x) = -179

$$y_k = y_o + k\Delta y_o + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta {y_o}^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta {y_o}^3$$

$$k = \frac{x_k - x_0}{h}$$

Sustituyendo valores obtenidos a partir de la tabla de diferencias de Excel

$$k = \frac{-3.4-(-5)}{2} = 0.8$$

$$y_{0.5} = -179 + (0.8) * 128 + \frac{0.8(0.8-1)}{2!}104 + \frac{0.8(0.8-1)(0.8-2)}{3!}48$$

$$= -68.024$$

Conclusión inciso c

El valor de y para x = -3.4, es y = -68.024

d) **Polinomio**

Desarrollo

$$k = \frac{x-(-1)}{2} = \frac{x+1}{2}$$

$$y = -11 + \left(\frac{x+1}{2}\right)(0) + \frac{\frac{x+1}{2}\left(\frac{x+1}{2} - 1\right)}{2!}(8) + \frac{\frac{x+1}{2}\left(\frac{x+1}{2} - 1\right)\left(\frac{x+1}{2} - 2\right)}{3!}48$$

Simplificando

$$y = x^3 - 2x^2 - x - 9$$

Conclusión inciso d

El polinomio interpolante es $y = x^3 - 2x^2 - x - 9$

2. En un laboratorio se hicieron mediciones de las coordenadas (x,y) de la posición de un proyectil que describió una trayectoria parabólica.

x (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
y(m)	0	8.1	15.1	21.1	25.9	29.7	32.3	34.4	33.7	33.7	32.1	29.9	25.4	20.5	14.4	7.3	-0.95	-10.3

Obtener:

a) La ordenada "Y" del proyectil cuando x=42.3m
b) El máximo alcance horizontal "X" (ocurre cuando Y=0)

Desarrollo

a) X = 42.3

	X	Y
0	0	0
1	5	8.1
2	10	15.1
3	15	21.1
4	20	25.9
5	25	29.7
6	30	32.3
7	35	33.9
8	40	34.4
9	45	33.7
10	50	32.1
11	55	29.9
12	60	25.4
13	65	20.5
14	70	14.4
15	75	7.3
16	80	-0.96
17	85	-10.3

$$y_k = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} y_0$$

0			
Numerador		Denominador	
x	42.3	x_0	0
x_1	5	x_1	5
x_2	10	x_2	10
x_3	15	x_3	15
x_4	20	x_4	20
x_5	25	x_5	25
x_6	30	x_6	30
x_7	35	x_7	35
x_8	40	x_8	40
x_9	45	x_9	45
x_10	50	x_10	50
x_11	55	x_11	55
x_12	60	x_12	60
x_13	65	x_13	65
x_14	70	x_14	70
x_15	75	x_15	75
x_16	80	x_16	80
x_17	85	x_17	85
Res	-4.05E+20	Res	-2.71E+26
0			

1			
Numerador		Denominador	
x	42.3	x_0	5
x_1	0	x_1	0
x_2	10	x_2	10
x_3	15	x_3	15
x_4	20	x_4	20
x_5	25	x_5	25
x_6	30	x_6	30
x_7	35	x_7	35
x_8	40	x_8	40
x_9	45	x_9	45
x_10	50	x_10	50
x_11	55	x_11	55
x_12	60	x_12	60
x_13	65	x_13	65
x_14	70	x_14	70
x_15	75	x_15	75
x_16	80	x_16	80
x_17	85	x_17	85
Res	-4.6E+20	Res	1.6E+25
-0.000233261			

16			
Numerador		Denominador	
x	42.3	x_0	80
x_1	0	x_1	0
x_2	5	x_2	5
x_3	10	x_3	10
x_4	15	x_4	15
x_5	20	x_5	20
x_6	25	x_6	25
x_7	30	x_7	30
x_8	35	x_8	35
x_9	40	x_9	40
x_10	45	x_10	45
x_11	50	x_11	50
x_12	55	x_12	55
x_13	60	x_13	60
x_14	65	x_14	65
x_15	70	x_15	70
x_16	75	x_16	75
x_17	85	x_17	85
Res	4.55E+20	Res	-1.6E+25
2.73524E-05			

17			
Numerador		Denominador	
x	42.3	x_0	85
x_1	0	x_1	0
x_2	5	x_2	5
x_3	10	x_3	10
x_4	15	x_4	15
x_5	20	x_5	20
x_6	25	x_6	25
x_7	30	x_7	30
x_8	35	x_8	35
x_9	40	x_9	40
x_10	45	x_10	45
x_11	50	x_11	50
x_12	55	x_12	55
x_13	60	x_13	60
x_14	65	x_14	65
x_15	70	x_15	70
x_16	75	x_16	75
x_17	80	x_17	80
Res	4.02E+20	Res	2.71E+26
-1.52414E-05			

Y_k =	34.239372

Conclusión inciso a

Para x = 42.3, y es igual a 34.23937201

b) Y = 0

	y	x
0	20.5	65
1	14.4	70
2	7.3	75
3	-0.96	80
4	-10.3	85

0				1				4			
Numerador		Denominador		Numerador		Denominador		Numerador		Denominador	
y	0	y_0	20.5	y	0	y_0	14.4	y	0	y_0	-10.3
y_1	14.4	y_1	14.4	y_1	20.5	y_1	20.5	y_1	20.5	y_1	20.5
y_2	7.3	y_2	7.3	y_2	7.3	y_2	7.3	y_2	14.4	y_2	14.4
y_3	-0.96	y_3	-0.96	y_3	-0.96	y_3	-0.96	y_3	7.3	y_3	7.3
y_4	-10.3	y_4	-10.3	y_4	-10.3	y_4	-10.3	y_4	-0.96	y_4	-0.96
Res	1039.42656	Res	53221.14336	Res	1479.7392	Res	-16431.468	Res	-2068.7616	Res	125056.772
1.269471532				-6.303864452				-1.406119264			

Y_k =	79.45368603

Conclusión inciso b

Para y = 0, x tiene valor de 79.45368603

3. Dada la función tabular:

x	0	0.24	0.9	1.3	1.75	2.02	2.54
f(x)	-2	-1.3950	-0.3886	3.3468	25.8479	63.8365	261.2527

Desarrollo

a) X = 0.5

Usando método de Lagrange

$$y_k = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}y_0$$

	x	Y
0	0	-2
1	0.24	-1.395
2	0.9	-0.3886
3	1.3	3.3468
4	1.75	25.8479
5	2.02	63.8365
6	2.54	261.2527

0				1				6			
Numerador		Denominador		Numerador		Denominador		Numerador		Denominador	
x	0.5	x_0	0	x	0.5	x_0	0.24	x	0.5	x_0	2.54
x_1	0.24	x_1	0.24	x_1	0	x_1	0	x_1	0	x_1	0
x_2	0.9	x_2	0.9	x_2	0.9	x_2	0.9	x_2	0.24	x_2	0.24
x_3	1.3	x_3	1.3	x_3	1.3	x_3	1.3	x_3	0.9	x_3	0.9
x_4	1.75	x_4	1.75	x_4	1.75	x_4	1.75	x_4	1.3	x_4	1.3
x_5	2.02	x_5	2.02	x_5	2.02	x_5	2.02	x_5	1.75	x_5	1.75
x_6	2.54	x_6	2.54	x_6	2.54	x_6	2.54	x_6	2.02	x_6	2.02
Res	-0.3224832	Res	2.52127512	Res	-0.62016	Res	-1.03797245	Res	0.07904	Res	4.88042362
0.255809608				-0.833474142				4.231069881			

Y_k =	-0.98440844

Conclusión inciso a

El valor de f(x) para x = 0.5, es -0.9844

b) X = 1.5

Usando método de Lagrange

$$y_k = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}y_0$$

	x	Y
0	0	-2
1	0.24	-1.395
2	0.9	-0.3886
3	1.3	3.3468
4	1.75	25.8479
5	2.02	63.8365
6	2.54	261.2527

0			
Numerador		Denominador	
x	1.5	x_0	0
x_1	0.24	x_1	0.24
x_2	0.9	x_2	0.9
x_3	1.3	x_3	1.3
x_4	1.75	x_4	1.75
x_5	2.02	x_5	2.02
x_6	2.54	x_6	2.54
Res	-0.02044224	Res	2.52127512
0.016215795			

1			
Numerador		Denominador	
x	1.5	x_0	0.24
x_1	0	x_1	0
x_2	0.9	x_2	0.9
x_3	1.3	x_3	1.3
x_4	1.75	x_4	1.75
x_5	2.02	x_5	2.02
x_6	2.54	x_6	2.54
Res	-0.024336	Res	-1.03797245
-0.032706764			

6			
Numerador		Denominador	
x	1.5	x_0	2.54
x_1	0	x_1	0
x_2	0.24	x_2	0.24
x_3	0.9	x_3	0.9
x_4	1.3	x_4	1.3
x_5	1.75	x_5	1.75
x_6	2.02	x_6	2.02
Res	0.029484	Res	4.88042362
1.57830041			

Y_k =	9.39062311

Conclusión inciso b

El valor de f(x) para x = 0.5, es 9.3906

c) X = 2

Usando método de Lagrange

$$y_k = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}y_0$$

	x	Y
0	0	-2
1	0.24	-1.395
2	0.9	-0.3886
3	1.3	3.3468
4	1.75	25.8479
5	2.02	63.8365
6	2.54	261.2527

0			
Numerador		Denominador	
x	2	x_0	0
x_1	0.24	x_1	0.24
x_2	0.9	x_2	0.9
x_3	1.3	x_3	1.3
x_4	1.75	x_4	1.75
x_5	2.02	x_5	2.02
x_6	2.54	x_6	2.54
Res	0.00365904	Res	2.52127512
-0.002902531			

1			
Numerador		Denominador	
x	2	x_0	0.24
x_1	0	x_1	0
x_2	0.9	x_2	0.9
x_3	1.3	x_3	1.3
x_4	1.75	x_4	1.75
x_5	2.02	x_5	2.02
x_6	2.54	x_6	2.54
Res	0.004158	Res	-1.0379725
0.005588212			

5			
Numerador		Denominador	
x	2	x_0	2.02
x_1	0	x_1	0
x_2	0.24	x_2	0.24
x_3	0.9	x_3	0.9
x_4	1.3	x_4	1.3
x_5	1.75	x_5	1.75
x_6	2.54	x_6	2.54
Res	-0.365904	Res	-0.4070887
57.37824046			

6			
Numerador		Denominador	
x	2	x_0	2.54
x_1	0	x_1	0
x_2	0.24	x_2	0.24
x_3	0.9	x_3	0.9
x_4	1.3	x_4	1.3
x_5	1.75	x_5	1.75
x_6	2.02	x_6	2.02
Res	-0.013552	Res	4.88042362
-0.725448621			

Y_k =	60.0000088

Conclusión inciso c

El valor de f(x) para x = 0.5, es 60.00000882

d) Polinomio

$$\begin{aligned}
y_k &= \left(\frac{[(x-0.24)(x-0.9)(x-1.3)(x-1.75)(x-2.02)(x-2.54)]}{[(0-0.24)(0-0.9)(0-1.3)(0-1.75)(0-2.02)(0-2.54)]}\right)(-2) \\
&+ \left(\frac{[(x-0)(x-0.9)(x-1.3)(x-1.75)(x-2.02)(x-2.54)]}{[(0.24-0)(0.24-0.9)(0.24-1.3)(0.24-1.75)(0.24-2.02)(0.24-2.54)]}\right)(-1.395) \\
&+ \left(\frac{[(x-0)(x-0.24)(x-1.3)(x-1.75)(x-2.02)(x-2.54)]}{[(0.9-0)(0.9-0.24)(0.9-1.3)(0.9-1.75)(0.9-2.02)(0.9-2.54)]}\right)(-0.3886) \\
&+ \left(\frac{[(x-0)(x-0.24)(x-0.9)(x-1.75)(x-2.02)(x-2.54)]}{[(1.3-0)(1.3-0.24)(1.3-0.9)(1.3-1.75)(1.3-2.02)(1.3-2.54)]}\right)(3.3468) \\
&+ \left(\frac{[(x-0)(x-0.24)(x-0.9)(x-1.3)(x-2.02)(x-2.54)]}{[(1.75-0)(1.75-0.24)(1.75-0.9)(1.75-1.3)(1.75-2.02)(1.75-2.54)]}\right)(25.8479) \\
&+ \left(\frac{[(x-0)(x-0.24)(x-0.9)(x-1.3)(x-1.75)(x-2.54)]}{[(2.02-0)(2.02-0.24)(2.02-0.9)(2.02-1.3)(2.02-1.75)(2.02-2.54)]}\right)(63.8365) \\
&+ \left(\frac{[(x-0)(x-0.24)(x-0.9)(x-1.3)(x-1.75)(x-2.02)]}{[(2.54-0)(2.54-0.24)(2.54-0.9)(2.54-1.3)(2.54-1.75)(2.54-2.02)]}\right)(261.2527)
\end{aligned}$$

$$y_k = x^6 - 0.0007x^5 - 0.0024x^4 + 0.0031x^3 - 2.002x^2 + 3.0002x - 2$$

Conclusión inciso d

El polinomio interpolante es $y_k = x^6 - 0.0007x^5 - 0.0024x^4 + 0.0031x^3 - 2.002x^2 + 3.0002x - 2$

4. Dada la siguiente función tabular

x	0	1	2	3	4
f(x)	-3	-1.28172	3.38906	16.08554	50.59815

Calcular el valor x, cuando el valor de f(x)= 15

Desarrollo

Usando método de Lagrange

$$y_k = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} y_0$$

			0				4			
	Y	x	Numerador		Denominador		Numerador		Denominador	
0	-3	0	y	15	y_0	-3	y	15	y_0	50.59815
1	-1.28172	1	y_1	-1.28172	y_1	-1.28172	y_1	-3	y_1	-3
2	3.38906	2	y_2	3.38906	y_2	3.38906	y_2	-1.28172	y_2	-1.28172
3	16.08554	3	y_3	16.08554	y_3	16.08554	y_3	3.38906	y_3	3.38906
4	50.59815	4	y_4	50.59815	y_4	50.59815	y_4	16.08554	y_4	16.08554
			Res	7305.34823	Res	11230.1396	Res	-3693.90735	Res	4530562.35
			0				-0.003261323			
			Y_k=	2.64821516						

Conclusión

El valor para f(x) = 15 es x = 2.64821516

5. Para la función definida por la siguiente tabla:

X	Y=f(x)
0.2	0.938
0.4	0.864
0.6	0.832
0.8	0.867
1.0	1.000
1.2	1.300

a. Calcular la primera derivada en el punto x=0.2, utilizando fórmulas de derivación limitadas a primeras, segundas y terceras derivadas.
b. Calcular la segunda derivada en el punto x=0.6, utilizando fórmulas de derivación limitadas a terceras diferencias.
c. Compare los resultados obtenidos en los incisos anteriores al derivar directamente la función.

$$f(x) = x^{x^2}$$

```
Out[4]= -0.0108086
```

Desarrollo

x	y				
0.2	0.938		a)	Y' = 1/6h [-11, 18, -9, 2]	
0.4	0.864			y' =	-0.4333333
0.6	0.832				
0.8	0.867		b)	Y' = 1/6h [-2, -3, 6 , -1]	
1	1				
1.2	1.3			y' =	-0.0183333
h =	0.2				

Conclusión inciso a

La derivada en x = 0.2 es y’ = -0.4333

Conclusión inciso b

La derivada en x = 0.6 es y’ = -0.0183

Conclusión inciso c

Como se observa, la diferencia entre la derivada real y la derivada obtenida, es pequeña.

```
In[2]:= f[x_] = x^(x^2)
```

Out[2]= x^{x^2}

```
In[3]:= f'[0.2]
Out[3]= -0.416106

In[4]:= f'[0.6]
Out[4]= -0.0108086
```

6. En la siguiente tabla se muestran los valores de la velocidad de un tren que frena al llegar a una estación. Calcule la aceleración para los tiempos t=15 y t=20 segundos.

X[s]	Y=v(t) [m/s]
5	6.6328
10	4.7590
15	3.6741
20	2.9164
25	2.3412
30	1.8842

Desarrollo

Partiendo de un polinomio interpolante de grado tres y un h = 3, que es el espaciamiento, tenemos que para t=15 segundos:

x[s]	y=v(t) [m/s]
5	6.6328
10	4.759
15	3.6741
20	2.9164
25	2.3412
30	1.8842

Y' = 1/6h [-11, 18, -9, 2]
Y' = 1/6h [-2, -3, 6 , -1]
Y' = 1/6h [1, -6, 3, 2]
Y' = 1/6h [-2, 9, -18, 11]

Tercer Orden

$$y' = \frac{1}{6*5}\left((-2)*(4.759)+(-3)*(3.6741)+(6)*(2.9146)+(-1)*(2.3412)\right)$$
$$= -0.1794367$$

Para t=20 segundos:

x[s]	y=v(t) [m/s]
5	6.6328
10	4.759
15	3.6741
20	2.9164
25	2.3412
30	1.8842

Y' = 1/6h [-11, 18, -9, 2]
Y' = 1/6h [-2, -3, 6 , -1]
Y' = 1/6h [1, -6, 3, 2]
Y' = 1/6h [-2, 9, -18, 11]

Tercer Orden

$$y' = \frac{1}{6*5}\left((1)*(4.759)+(-6)*(3.6741)+(3)*(2.9146)+(2)*(2.3412)\right)$$
$$= -0.1284667$$

Conclusión

Para t = 15 segundos, el valor de la aceleración es de $-0.1794367\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$ y, para un t = 20 segundos, el valor de la aceleración es de $-0.1284667\left[\frac{m}{s^2}\right]$

7. Valúe las siguientes integrales utilizando la fórmula de integración trapecial.

   a. $\int_3^7 x^2 \log(x)\,dx$

Desarrollo

- Calculando el valor del espaciamiento h, con b = 7, a = 3 y n = 8

$$h = \frac{b-a}{n} \rightarrow h = \frac{7-3}{8} = 0.5$$

n	x	f(x)	
0	3	4.29409129	y0
1	3.5	6.66483354	y1
2	4	9.63295986	y2
3	4.5	13.2275534	y3
4	5	17.4742501	y4
5	5.5	22.3959714	y5
6	6	28.013445	y6
7	6.5	34.3455893	y7
8	7	41.409804	y8

- Ahora, utilizaremos la fórmula de integración trapecial.

$$A_T = h/2\ [\ Y_0 + Y_n + 2\sum \text{resto de ordenadas}]$$

$$\int_3^7 x^2 \log(x)\,dx$$
$$= \frac{0.5}{2}[4.29409129 + 41.409804 + 2(9.63295986 + 17.4742501 + 28.013445 + 6.66483354 + 13.2275534 + 22.3959714 + 34.3455893)] = 77.3032751$$

Conclusión

El valor de la integral, de 3 a 7 con la fórmula de integración trapecial y un espaciamiento de 0.5 es de 77.3032751

$$\text{b.} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$$

Desarrollo

- Calculando el valor del espaciamiento h, con b = $\frac{3\pi}{2}$, a = $\frac{\pi}{2}$ y n = 8

$$h = \frac{b-a}{n} \rightarrow h = \frac{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{8} = \frac{\pi}{8}$$

n	x	f(x)	
0	1.57079633	0.63661977	y0
1	1.96349541	0.47052798	y1
2	2.35619449	0.30010544	y2
3	2.74889357	0.13921362	y3
4	3.14159265	3.8998E-17	y4
5	3.53429174	-0.1082773	y5
6	3.92699082	-0.1800633	y6
7	4.3196899	-0.2138764	y7
8	4.71238898	-0.2122066	y8

- Ahora, utilizaremos la fórmula de integración trapecial.

$$\mathbf{A_T = h/2\ [\ Y_0 + Y_n + 2\sum \text{resto de ordenadas}]}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{sen(x)}{x} dx$$

$$= \frac{\pi}{16}[0.63661977 - 0.2122066$$
$$+ 2(0.47052798 + 0.30010544 + 0.13921362 + 3.8998\text{E}^{-17}$$
$$- 0.1082773 - 0.1800633 - 0.2138764)] = 0.24340932$$

Conclusión

El valor de la integral, de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$ con la fórmula de integración trapecial y un espaciamiento de $\frac{\pi}{8}$ es de 0.24340932

8. Valúe la integral de probabilidad

$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5x^2} dx$$

Desarrollo

- Calculando el valor del espaciamiento h, con b = 3, a = -3 y n = 8

$$h = \frac{b-a}{n} \rightarrow h = \frac{3-(-3)}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

n	x	f(x)	
0	-3	0.00443185	y0
1	-2.25	0.03173965	y1
2	-1.5	0.1295176	y2
3	-0.75	0.30113743	y3
4	0	0.39894228	y4
5	0.75	0.30113743	y5
6	1.5	0.1295176	y6
7	2.25	0.03173965	y7
8	3	0.00443185	y8

- Ahora, utilizaremos la fórmula de integración Simpson 1/3, ya que el valor de n es par. Cabe aclarar que también se puede utilizar la fórmula de integración trapecial.

$A_{1/3}$ = h/ 3 [Y_0 + Y_n + 2 $\sum$ ordenadas de orden par + 4 $\sum$ ordenadas de orden impar]

$$\int_{-3}^{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5x^2}$$

$$= \frac{0.75}{3}[0.00443185 + 0.00443185 + 2(0.1295176 + 0.39894228 + 0.1295176) + 4(0.03173965 + 0.30113743 + 0.30113743 + 0.03173965)] = 0.996958828$$

Conclusión

El valor de la integral, de -3 a 3 con la fórmula de integración Simpson 1/3 y un espaciamiento de 0.75 es de 0.996958828

9. Evalúe las integrales siguientes utilizando las formulas de cuadratura gaussiana de dos términos.

a) $\int_{1}^{5}\frac{2xe^{x}}{6x^{3}-4}dx$

Desarrollo

El método de cuadratura de Gauss menciona que es válido siempre y cuando los límites de integración sean de -1 a 1.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1)$$

En el caso de nuestra integral original vemos que los límites no van de -1 a 1. Por lo tanto, tendremos que realizar un cambio de variable.

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x_d$$

$$dx = \frac{b-a}{2}dx_d$$

$$\int_{1}^{5}\frac{2xe^{x}}{6x^{3}-4}dx$$

$$x = \frac{5+1}{2} + \frac{5-1}{2}x_d = 3 + 2x_d$$

$$dx = \frac{5-1}{2}dx_d = 2dx_d$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2(3+2x_d)e^{(3+2x_d)}}{6(3+2x_d)^3-4} * 2dx_d = C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1)$$

$$f(x) = \frac{2\left(3+2x_d\right)e^{(3+2x_d)}}{6(3+2x_d)^3-4} * 2$$

Datos

$$C_0 = C_1 = 1$$
$$x_0 = -0.577350269$$
$$x_1 = 0.577350269$$

Evaluando f(x)

$$f(-0.577350269) = \frac{2\left(3+2(-0.577350269)\right)e^{\left(3+2(-0.577350269)\right)}}{6\left(3+2(-0.577350269)\right)^3-4} * 2 = 1.386400198$$

$$f(0.577350269) = \frac{2\left(3+2(0.577350269)\right)e^{\left(3+2(0.577350269)\right)}}{6\left(3+2(0.577350269)\right)^3-4} * 2 = 2.484556219$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2(3+2x_d)e^{(3+2x_d)}}{6(3+2x_d)^3-4} * 2dx_d = 6.596513451 + 1223137.8 = 3.870956417$$

Conclusión

$$\int_{1}^{5} \frac{2xe^{x}}{6x^3-4} dx = 3.870956417$$

$$\boxed{\text{b) } \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx}$$

Desarrollo

El método de cuadratura de Gauss menciona que es válido siempre y cuando los límites de integración sean de -1 a 1.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1)$$

En el caso de nuestra integral original vemos que los límites no van de -1 a 1. Por lo tanto, tendremos que realizar un cambio de variable.

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_d$$
$$dx = \frac{b-a}{2} dx_d$$
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{2} x_d = \sqrt{3}x_d$$
$$dx = \frac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{2} dx_d = \sqrt{3}dx_d$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{4(\sqrt{3}x_d)}{\sqrt{(\sqrt{3}x_d)^2+1}} * \sqrt{3}dx_d = C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1)$$

Datos

$$C_0 = C_1 = 1$$
$$x_0 = -0.577350269$$
$$x_1 = 0.577350269$$

Evaluando f(x)

$$f(-0.577350269) = \frac{4(\sqrt{3}(-0.577350269))}{\sqrt{(\sqrt{3}(-0.577350269))^2+1}} * \sqrt{3} = -6.92820323$$

$$f(0.577350269) = \frac{4(\sqrt{3}(0.577350269))}{\sqrt{(\sqrt{3}(0.577350269))^2+1}} * \sqrt{3} = 6.92820323$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{4(\sqrt{3}x_d)}{\sqrt{(\sqrt{3}x_d)^2+1}} * \sqrt{3}dx_d = -6.92820323 + 6.92820323 = 0$$

Conclusión

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 0$$

$$c)\int_{-1}^{1} \cos(x+\pi)\,dx$$

Desarrollo

El método de cuadratura de Gauss menciona que es válido siempre y cuando los límites de integración sean de -1 a 1.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1)$$

En nuestro caso, la integral ya tiene los límites de integración de -1 a 1, por lo tanto no es necesario realizar algún cambio de variable.

$$\int_{-1}^{1} \cos\,(x+\pi)dx = C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1)$$

Datos

$$C_0 = C_1 = 1$$
$$x_0 = -0.577350269$$
$$x_1 = \ 0.577350269$$

Evaluando f(x)

$$f(-0.577350269) = \cos((-0.577350269) + \pi) = \ -0.837911828$$

$$f(0.577350269) = \cos((0.577350269) + \pi) = \ -0.837911828$$

$$\int_{-1}^{1} \cos\,(x+\pi)dx = -0.837911828\ -0.837911828 = \ -1.675823656$$

Conclusión

$$\int_{-1}^{1} \cos\,(x+\pi)dx = -1.675823656$$