Ejercicios - Teoría de errores y ajustes

Ejercicio 1. Se muestran a continuación una serie de magnitudes con sus correspondientes errores. ¿Cuáles no están correctamente expresados? ¿Por qué? ¿Cuáles sí pero podrían mejorarse? ¿Cómo los mejorarías? Expresar todas ellas de la manera apropiada.

a) $(0{,}000025 \pm 0{,}000003)$ C
b) $(1{,}25 \pm 0{,}03)$ m
c) $(0{,}000015 \pm 0{,}0032)$ F
d) (100000 ± 1000) g
e) $(8{,}22 \pm 0{,}036)$ m^3
f) $(120{,}1 \pm 5{,}0)$ rad
g) $(101{,}8 \pm 0{,}2)$ seg
h) $(702{,}0 \pm 1)$ kg
i) (10005 ± 10) t

Solución

a) Mejorable. El error y el redondeo son correctos, pero la cantidad de ceros es innecesaria y hace difícil a la vista ver cuan pequeña es la cantidad en cuestión. En estos casos lo mejor es usar notación científica o usar múltiplos/submúltiplos de las unidades:

$$(25 \pm 3) \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \qquad \text{o} \qquad (25 \pm 3)\ \mu\mathrm{C}$$

b) Es correcto.

c) Mal. El error no está correctamente redondeado $0{,}0032 \to 0{,}003$ (una sola cifra significativa). A continuación se redondearía la media a las milésimas que daría 0. Así que lo correcto sería:

$$(0{,}000 \pm 0{,}003)\ \mathrm{F}$$

o, mejor aún,

$$(0 \pm 3) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{F} \qquad \text{o} \qquad (0 \pm 3)\ \mathrm{mF}\,.$$

d) Mejorable. La misma razón que el caso a). Quedaría:

$$(100 \pm 1) \cdot 10^{3}\ \mathrm{g} \qquad \text{o} \qquad (100 \pm 1)\ \mathrm{kg}\,.$$

e) Mal. El error solo ha de tener una cifra significativa. Quedaría:

$$(8{,}22 \pm 0{,}04)\ \mathrm{m}^3\,.$$

f) Mal. El error está correctamente redondeado, pero la media no. Debería quedar

$$(120 \pm 5)\ \mathrm{rad}\,.$$

g) Mal. La expresión de las cantidades es correcta pero el símbolo de segundo es “s”, no “seg”.

h) Mal. La media no puede presentar más precisión que la indicada por el error. Quedaría:

$$(702 \pm 1)\ \mathrm{kg}\,.$$

i) Mal. La media no puede presentar más precisión que la indicada por el error. Si éste apunta a las decenas, la media ha de redondearse a las decenas. Quedaría:

$$(10010 \pm 10)\ \mathrm{t}\,.$$

Ejercicio 2. En el laboratorio, unos estudiantes de primero reciben un cubo de hierro con el objetivo de determinar su densidad y compararla con la teórica. Para ello efectúan tres mediciones de su masa utilizando una balanza y tres mediciones de su arista con una regla común, obteniéndose los valores

$$\begin{array}{lllll} \text{Masa:} & 944{,}5 \text{ g}, & 944{,}2 \text{ g} & \text{y} & 944{,}3 \text{ g}; \\ \text{Arista:} & 4{,}9 \text{ cm}, & 5{,}0 \text{ cm} & \text{y} & 5{,}0 \text{ cm}. \end{array}$$

Sabiendo que la sensibilidad de la balanza es de 0.1 g y la de la regla de 1 mm, determinar:

a) el valor final de la masa y de la arista del cubo;
b) la densidad del cubo;
c) el error relativo con respecto al teórico ($7{,}874 \text{ g/cm}^3$), razonando la bondad del resultado.

Solución

a) Masa y arista

En este primer apartado tenemos que lidiar con el cálculo del error de medidas directas.

	Media de las medidas	Sensibilidad	Dispersión	% Dispersión	Valor Final
Masa	944.3333... g	0.1 g	0.3 g	$0{,}03\,\%$ ($< 2\,\%$)	$(944{,}3 \pm 0{,}3)$ g
Arista	4.9666... cm	0.1 cm	0.1 cm	-	$(5{,}0 \pm 0{,}1)$ cm

Para la arista, como la dispersión coincide con la sensibilidad, es este valor común el que juega el papel de error. Con la masa como la dispersión es mayor hay que comprobar que el porcentaje de dispersión no sea mayor que el $2\,\%$ (en cuyo caso habría que hacer más medidas, pues tres no serían suficientes); como no es el caso, es la dispersión la que pasa a ser el error.

b) Densidad

Esto es un cálculo de error de una medida indirecta (i.e. calculada a partir de otras). En este caso, nos piden la densidad del cubo,

$$\rho(m,\, a) = \frac{m}{a^3}$$

que es una función de dos datos: la masa m y la arista a. Necesitamos pues, $(\bar{\rho} + \Delta\rho)$, o sea dos cosas: el valor medio $\bar{\rho}$ y el error $\Delta\rho$.

- El valor medio de la densidad se halla evaluando la fórmula en los valores medios:

$$\bar{\rho} = \rho(\bar{m},\, \bar{a}) = \frac{944{,}3 \text{ g}}{(5{,}0 \text{ cm})^3} = 7{,}5544 \text{ g/cm}^3$$

- Para el error usamos propagación cuadrática de errores,

$$(\Delta\rho)^2 = \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)_{\bar{m},\bar{a}}\right]^2 (\Delta m)^2 + \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial a}\right)_{\bar{m},\bar{a}}\right]^2 (\Delta a)^2$$

o sea,

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \sqrt{\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)_{\bar{m},\bar{a}}\right]^2 (\Delta m)^2 + \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial a}\right)_{\bar{m},\bar{a}}\right]^2 (\Delta a)^2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{\bar{a}^3}\Delta m\right]^2 + \left[\frac{-3\bar{m}}{\bar{a}^4}\Delta a\right]^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{(5\ \text{cm})^3}(0{,}3\ \text{g})\right]^2 + \left[\frac{-3(944{,}3\ \text{g})}{(5\ \text{cm})^4}(0{,}1\ \text{cm})\right]^2} = 0{,}453...\ \text{g/cm}^3$$

Finalmente ponemos el error junto con la media redondeando todo correctamente:

$$\rho = (7{,}6 \pm 0{,}5)\ \text{g/cm}^3\,.$$

c) Bondad del resultado y error relativo

$$\varepsilon_0 = \frac{|\bar{\rho} - \rho_{\text{teór}}|}{\rho_{\text{teór}}} \times 100 = \frac{|7{,}6 - 7{,}874|}{7{,}874} \times 100 = 3{,}5\,\%\,.$$

Se trata de un error relativo aceptable (lo es típicamente si es menor al 10). Nótese además que el valor teórico se encuentra dentro del margen de error.

Ejercicio 3. En una práctica de electromagnetismo unos estudiantes de primero analizan la caída de potencial en un resistor para diferentes intensidades, obteniendo la tabla siguiente:

V (V)	I (mA)
10 ± 2	40 ± 2
8 ± 1	30 ± 2
5 ± 1	20 ± 2
$2{,}5 \pm 0{,}5$	10 ± 2

a) Calcular la resistencia R, habiendo previamente determinado la recta de ajuste por mínimos cuadrados que mejor ajusta los datos. Datos: la ley de Ohm es $V = RI$.

b) Determinar el coeficiente de correlación y comentar el resultado.

c) Representar gráficamente los datos y la recta de ajuste.

Solución

a) Ajuste

Comparando la ley de Ohm con la ecuación de la recta

$$V = RI \qquad \text{vs} \qquad y = ax + b$$

vemos que si representamos V (juega el papel de las y's) frente a I (serían las x's), la resistencia sería justamente la pendiente a. Vemos además que, idealmente, la ordenada en el origen b debería ser cero.

Como de todos modos nos piden hacer el ajuste completo, nos ponemos manos a la obra y hallamos todo lo que necesitamos:

$$\sum x_i = 100\ \text{mA} \qquad \left(\sum x_i\right)^2 = 10000\ \text{mA}^2 \qquad \sum (x_i)^2 = 3000\ \text{mA}^2$$

$$\sum y_i = 25{,}5\ \text{V} \qquad \left(\sum y_i\right)^2 = 650{,}25\ \text{V}^2 \qquad \sum (y_i)^2 = 195{,}25\ \text{V}^2$$

$$\sum x_i y_i = 765\ \text{mA V} \qquad \bar{x} = 25\ \text{mA} \qquad \bar{y} = 6{,}375\ \text{V}$$

Ya podemos hallar los valores centrales de la pendiente y la ordenada en el origen:

$$\bar{a} = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{N\sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{4\cdot(765\ \text{mA V}) - (100\ \text{mA})(25{,}5\ \text{V})}{4\cdot(3000\ \text{mA}^2) - (10000\ \text{mA}^2)} = 0{,}255\,\text{k}\Omega = 255\,\Omega$$

$$\bar{b} = \bar{y} - a\bar{x} = (6{,}375\ \mathrm{V}) - (0{,}255\ \mathrm{k\Omega})(25\ \mathrm{mA}) = 0\,\mathrm{V}$$

Seguimos con algunos cálculos auxiliares

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 500\ \mathrm{mA}^2\,, \qquad \sum (y_i - a x_i - b)^2 = 0{,}175\,\mathrm{V}^2\,.$$

que nos permiten rápidamente calcular los errores,

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum (y_i - a x_i - b)^2}{(N-2)\sum (x_i - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{(0{,}175\,\mathrm{V}^2)}{2\cdot(500\ \mathrm{mA}^2)}} = 0{,}0132\ldots\,\mathrm{k\Omega} = 13{,}2\ldots\,\Omega\,,$$

$$\Delta b = \Delta a \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2} = (0{,}0132\ldots\,\mathrm{k\Omega})\sqrt{\frac{(3000\ \mathrm{mA}^2)}{4}} = 0{,}362\ldots\ \mathrm{V}\,.$$

La recta de ajuste es, por tanto, aquella dada por los parámetros

$$a = (260 \pm 10)\,\Omega\,, \qquad b = (0{,}0 \pm 0{,}4)\,\mathrm{V}\,.$$

Dado que la resistencia es justamente la pendiente, concluimos que

$$\boxed{R = (260 \pm 10)\,\Omega}\,.$$

b) Coeficiente de correlación

$$r = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{\sqrt{N\sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2}\sqrt{N\sum (y_j)^2 - \left(\sum y_j\right)^2}}$$

$$= \frac{4\times(765\ \mathrm{mA\,V}) - (100\ \mathrm{mA})(25{,}5\ \mathrm{V})}{\sqrt{4\times(3000\ \mathrm{mA}^2) - (10000\ \mathrm{mA}^2)}\sqrt{4\times(195{,}25\ \mathrm{V}^2) - (650{,}25\ \mathrm{V}^2)}} = 0{,}9973$$

Dado que $r \simeq 1$, concluimos que la recta ajusta bien a los datos.

c) Gráfica