[Versión 9 de julio de 2021]

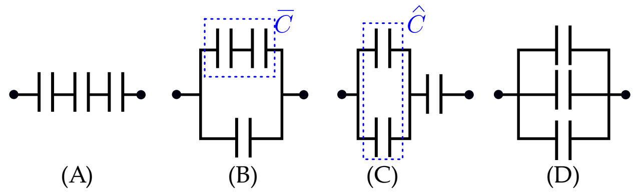
Problemas resueltos de la relación 2 (Capacidad)

En todos los problemas tomamos $K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9{\cdot}10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$

Problema 1. Tres condensadores idénticos se conectan de modo que su capacidad equivalente máxima es $15\ \mu\mathrm{F}$. a) Describe cómo se han combinado los condensadores. b) Existen otras tres formas de combinar los condensadores en un circuito. ¿Cuáles son las capacidades equivalentes en cada una de esas tres combinaciones?

Solución

Tres condensadores idénticos de capacidad C pueden conectarse solo de cuatro formas distintas:



En cada caso la capacidad equivalente es:

$$C_{\text{eq. (A)}} = \frac{1}{\frac{1}{C}+\frac{1}{C}+\frac{1}{C}} = \frac{1}{\frac{3}{C}} \qquad \Rightarrow \qquad C_{\text{eq. (A)}} = \frac{1}{3}C \tag{1}$$

$$C_{\text{eq. (B)}} = C + \bar{C} = C + \frac{1}{\frac{1}{C}+\frac{1}{C}} = C + \frac{1}{2}C \qquad \Rightarrow \qquad C_{\text{eq. (B)}} = \frac{3}{2}C \tag{2}$$

$$C_{\text{eq. (C)}} = \frac{1}{\frac{1}{C}+\frac{1}{\hat{C}}} = \frac{1}{\frac{1}{C}+\frac{1}{C+C}} = \frac{1}{\frac{3}{2}\frac{1}{C}} \qquad \Rightarrow \qquad C_{\text{eq. (C)}} = \frac{2}{3}C \tag{3}$$

$$C_{\text{eq. (D)}} = C + C + C \qquad \Rightarrow \qquad C_{\text{eq. (D)}} = 3C \tag{4}$$

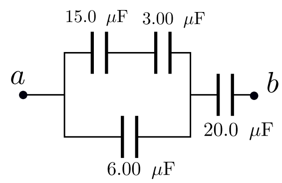
a) Si se han combinado para dar la máxima capacidad es que se ha empleado la configuración (D).
b) Si $C_{\text{eq. (D)}} = 15\ \mu\mathrm{F}$, podemos despejar la capacidad de cada uno de los condensadores empleados:

$$3C = 15\ \mu\mathrm{F} \quad \Rightarrow \quad C = 5\ \mu\mathrm{F}\,. \tag{5}$$

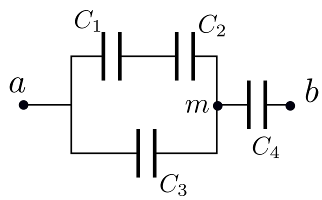
Y si sustituimos en el resto:

$$\boxed{C_{\text{eq. (A)}} = \frac{5}{3}\ \mu\mathrm{F}\,, \qquad C_{\text{eq. (B)}} = \frac{15}{2}\ \mu\mathrm{F}\,, \qquad C_{\text{eq. (C)}} = \frac{10}{3}\ \mu\mathrm{F}}\,. \tag{6}$$

Problema 2. Cuatro condensadores están conectados como se muestra en la Figura. a) Encuentra la capacidad equivalente entre los puntos a y b. b) Calcula la carga de cada uno de los condensadores si $\Delta V_{ab} = 15$ V. c) Calcula la energía total almacenada.



Solución



Comenzamos poniendo nombre a los condensadores de modo que $C_1 = 15\ \mu$F, $C_2 = 3\ \mu$F, $C_3 = 6\ \mu$F, $C_4 = 20\ \mu$F. También introducimos el punto auxiliar m.
a) Comenzamos a asociar capacidades.
Primero C_1 con C_2 que están en serie:

$$C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{15\ \mu\text{F}} + \frac{5}{15\ \mu\text{F}}} = \frac{5}{2}\ \mu\text{F} \qquad (= 2{,}5\ \mu\text{F}) \tag{7}$$

Ahora C_{12} y C_3 están en paralelo, luego

$$C_{123} = C_{12} + C_3 = \frac{5}{2}\ \mu\text{F} + 6\ \mu\text{F} = \frac{17}{2}\ \mu\text{F} \qquad (\simeq 8{,}5\ \mu\text{F}) \tag{8}$$

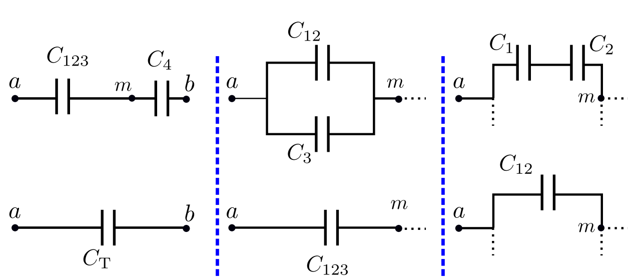
Por último, C_{123} y C_4 están en serie, de nuevo usamos la fórmula de las inversas

$$C_\text{T} = \frac{1}{\frac{1}{C_{123}} + \frac{1}{C_4}} = \frac{1}{\frac{2}{17\ \mu\text{F}} + \frac{1}{20\ \mu\text{F}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C_\text{T} = \frac{340}{57}\ \mu\text{F} \qquad (\simeq 5{,}96\ \mu\text{F})}. \tag{9}$$

b) Vamos a usar las siguientes propiedades de las asociaciones de condensadores:

- ❏ Cuando dos condensadores están conectados en serie: la diferencia de potencial total es la suma de las correspondientes a cada condensador y la carga almacenada en ambos coincide.
- ❏ Cuando están en paralelo ocurre lo contrario: la suma de las cargas da la carga de la capacidad equivalente y las diferencias de potencial en ambos coinciden.

Para hallar las cargas vamos desandando el camino.



(1) (2) (3)

❏ Cálculo de Q_4 (Figura (1))
Entre C_{123} y C_4 hay una asociación en serie por lo que:

$$\Delta V_{ab} = \Delta V_{am} + \Delta V_{mb} = \Delta V_{123} + \Delta V_4 \,, \tag{10}$$
$$Q_{\mathrm{T}} = Q_{123} = Q_4 \,. \tag{11}$$

De aquí podemos deducir

$$Q_4 = Q_{\mathrm{T}} = C_{\mathrm{T}} \Delta V_{ab} = \left(\frac{340}{57}\ \mu\mathrm{F}\right)(15\ \mathrm{V}) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q_4 = \frac{1700}{19}\ \mu\mathrm{C} \qquad (\simeq 89{,}5\ \mu\mathrm{C})} \,. \tag{12}$$

❏ Cálculo de Q_3 (Figura (2))
Entre C_{12} y C_3 hay una asociación en paralelo por lo que:

$$\Delta V_{am} = \Delta V_{12} = \Delta V_3 \,, \tag{13}$$
$$Q_{123} = Q_{12} + Q_3 \,. \tag{14}$$

Lo que queremos calcular se expresa gracias a esto:

$$Q_3 = Q_{123} - Q_{12} = Q_{123} - C_{12} \Delta V_{12} \,, \tag{15}$$

pero de antes sabemos que

$$Q_{123} = Q_4 \,, \tag{16}$$
$$\Delta V_{12} = \Delta V_{am} = \Delta V_{123} = \frac{Q_{123}}{C_{123}} = \frac{Q_4}{C_{123}} \,, \tag{17}$$

por lo que

$$Q_3 = Q_4 \left(1 - \frac{C_{12}}{C_{123}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q_3 = \frac{1200}{19}\ \mu\mathrm{C} \qquad (\simeq 63{,}16\ \mu\mathrm{C})} \,. \tag{18}$$

❏ Cálculo de Q_1 y Q_2 (Figura (3))
Entre C_1 y C_2 hay una asociación en serie por lo que:

$$\Delta V_{am} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \,, \tag{19}$$
$$Q_{12} = Q_1 = Q_2 \,. \tag{20}$$

Vemos pues que basta con calcular Q_1, pues Q_2 va a ser igual.

$$Q_1 = Q_{12} = C_{12} \Delta V_{12} \,. \tag{21}$$

Y ahora usamos de nuevo (17),

$$Q_1 = Q_{12} = Q_4 \frac{C_{12}}{C_{123}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q_1 = Q_2 = \frac{500}{19}\ \mu\mathrm{C} \qquad (\simeq 26{,}32\ \mu\mathrm{C})} \,. \tag{22}$$

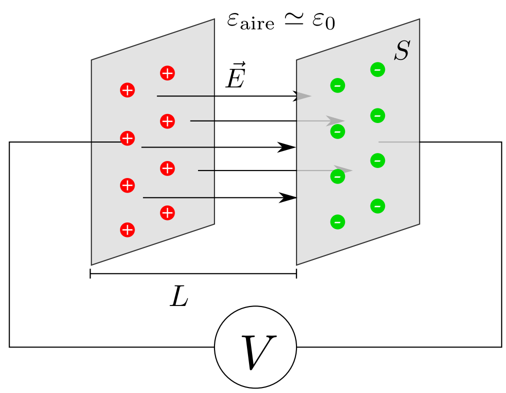
b) La energía puede calcularse para cada condensador por separado y luego sumar, o aprovecharnos de la asociación: todo el circuito es equivalente a un solo condensador entre a y b con capacidad C_{T}. Por lo que:

$$E = \frac{1}{2} C_{\mathrm{T}} (\Delta V_{ab})^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{340}{57}\ \mu\mathrm{F}\right)(15\ \mathrm{V})^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E = \frac{12750}{19}\ \mu\mathrm{J} \qquad (\simeq 671{,}05\ \mu\mathrm{J})} \tag{23}$$

Problema 3. Un condensador de placas paralelas separadas por aire tiene una capacidad de $0{,}14\ \mu\mathrm{F}$. Las placas están separadas entre sí $0{,}5\ \mathrm{mm}$. a) ¿Cuál es el área de cada placa? b)¿Cuál es la diferencia de potencial si el condensador se carga con $3{,}2\ \mu\mathrm{C}$? c) ¿Cuánta energía hay almacenada? d) Si el campo eléctrico alcanza el valor de $3 \times 10^6\ \mathrm{V/m}$ el aire se ioniza y se convierte en conductor. ¿Qué cantidad de carga se puede acumular en el condensador antes de que se produzca la ruptura del mismo?

Solución

La situación es la que se refleja en la figura:



Algunas expresiones útiles a tener en cuenta, siendo σ la densidad superficial de las placas, Q la carga almacenada (sin signo), S la superficie de las placas y L la distancia entre ellas:

$$|\vec{E}| = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,, \tag{24}$$

$$\Delta V = |\vec{E}|L = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}L \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 S}{L} = \frac{1}{4\pi K_0}\frac{S}{L}\,. \tag{25}$$

Y nos dicen que $C = 0{,}14\ \mu\mathrm{F}$ y $L = 0{,}5\ \mathrm{mm}$.

a) Para hallar la superficie despejamos de la fórmula de la capacidad:

$$S = 4\pi K_0 LC \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{S \simeq 7{,}91\ \mathrm{m}^2}\,. \tag{26}$$

b) Conocida la carga y la capacidad, la diferencia de potencial es trivial de calcular:

$$\Delta V = \frac{3{,}2\ \mu\mathrm{C}}{0{,}14\ \mu\mathrm{F}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta V = \frac{160}{7}\ \mathrm{V} \simeq 22{,}86\ \mathrm{V}}\,. \tag{27}$$

c) La energía almacenada viene dada por:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{U = \frac{256}{7}\ \mu\mathrm{J} \simeq 36{,}57\ \mu\mathrm{J}}\,. \tag{28}$$

d) El campo eléctrico máximo se alcanzará cuando las placas almacenen la máxima carga (o equivalentemente, cuando la diferencia de potencial sea máxima).

$$|\vec{E}_{\max}| = \frac{Q_{\max}}{\varepsilon_0 S} = 4\pi K_0 \frac{Q_{\max}}{S} \qquad \Rightarrow \qquad Q_{\max} = \frac{|\vec{E}_{\max}|S}{4\pi K_0}\,, \tag{29}$$

y sustituyendo los datos obtenemos

$$\boxed{Q_{\max} \simeq 2{,}1{\cdot}10^{-4}\ \mathrm{C} = 210\ \mu\mathrm{C}} \tag{30}$$

Problema 4. Cierto dieléctrico de constante $\kappa = 24$ puede resistir un campo eléctrico de 4×10^7 V/m. Con este dieléctrico se quiere construir un condensador de placas paralelas de $0{,}1$ μF de capacidad que pueda resistir una diferencia de potencial de 2000 V. a) ¿Cuál es la separación mínima de las placas? b) ¿Cuál debe ser el área de las placas? c) ¿Cuánto vale la densidad de carga inducida en cada cara del dieléctrico?

Solución

a) La diferencia de potencial en un condensador de placas paralelas viene dada por

$$\Delta V = |\vec{E}| L \,, \tag{31}$$

donde L es la distancia entre las placas. Evaluando en el campo eléctrico de ruptura la separación entre placas necesaria para que se resista la diferencia de potencial dada es:

$$L = \frac{|\vec{E}_{\text{max}}|}{\Delta V_{\text{max}}} = \frac{4 \cdot 10^7 \text{ V/m}}{2000 \text{ V}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{L = 0{,}05 \text{ mm}} \,. \tag{32}$$

b) La capacidad viene dada por (ojo que el campo eléctrico no está en el vacío)

$$C = \frac{\varepsilon S}{L} = \frac{\kappa \varepsilon_0 S}{L} = \frac{\kappa}{4\pi K_0} \frac{S}{L} \,. \tag{33}$$

De aquí despejamos la superficie

$$S = \frac{4\pi K_0 L C}{\kappa} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{S = \frac{899\pi}{12} \text{ cm}^2 \simeq 235{,}36 \text{ cm}^2} \,. \tag{34}$$

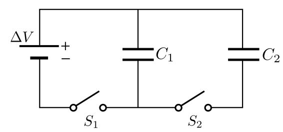
c) En el momento en que se alcanza la ruptura:

$$C = \frac{Q_{\text{max}}}{\Delta V_{\text{max}}} \qquad \Rightarrow \qquad Q_{\text{max}} = 200 \; \mu\text{C} \,, \tag{35}$$

y esto, junto con el resultado del apartado anterior nos permite hallar la densidad superficial de carga:

$$|\sigma| = \frac{Q_{\text{max}}}{S} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{|\sigma| \simeq 0{,}85 \; \mu\text{C/cm}^2 = 8{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^2} \,. \tag{36}$$

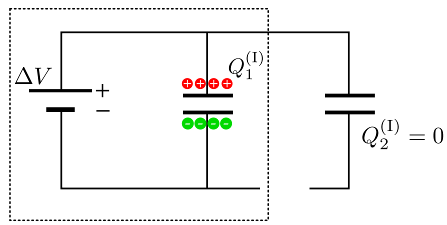
Problema 5. Considere el circuito que se muestra en la Figura, donde $C_1 = 6{,}00\ \mu\text{F}$, $C_2 = 3{,}00\ \mu\text{F}$ y $\Delta V = 20{,}0\ \text{V}$. Primero se carga el condensador C_1, cerrando el interruptor S_1. Después se abre este interruptor, y el condensador cargado se conecta al otro descargado cerrando S_2. Calcule la carga inicial adquirida por C_1, así como la carga final en cada uno de los condensadores.



Solución

El problema se divide en dos etapas.

❏ Etapa (I). Se cierra S_1



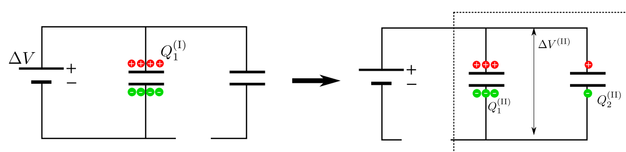
El condensador C_2 no interviene, por lo que se mantiene descargado,

$$\boxed{Q_2^{(\mathrm{I})} = 0\ \mathrm{C}}\,. \tag{37}$$

En el primero, una vez cargado, la diferencia de potencial coincide con el de la fuente, por lo que

$$Q_1^{(\mathrm{I})} = C_1 \Delta V \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q_1^{(\mathrm{I})} = 120\ \mu\mathrm{C}}\,. \tag{38}$$

❏ Etapa (II). Se abre S_1 y se cierra S_2.



La fuente ahora no juega ningún papel. Tenemos dos condensadores conectados en paralelo, por lo que, una vez que la carga se equilibre tenemos

$$Q_{\text{total}} = Q_1^{(\mathrm{II})} + Q_2^{(\mathrm{II})}\,, \tag{39}$$

$$\Delta V^{(\mathrm{II})} = \frac{Q_1^{(\mathrm{II})}}{C_1} = \frac{Q_2^{(\mathrm{II})}}{C_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = Q_1^{(\mathrm{II})} - \frac{C_1}{C_2} Q_2^{(\mathrm{II})} = Q_1^{(\mathrm{II})} - 2Q_2^{(\mathrm{II})}\,, \tag{40}$$

donde $\Delta V^{(\mathrm{II})}$ es la diferencia de potencial entre el lado superior e inferior del circuito en el equilibrio, y Q_{total} es la carga total disponible inicialmente (en cualquiera de los dos lados del circuito) y que ha debido repartirse por ambos condensadores. Dicha carga debe coincidir con la que tenía almacenada C_1 inicialmente o sea

$$Q_{\text{total}} = Q_1^{(\mathrm{I})} = 120\ \mu\mathrm{C}\,. \tag{41}$$

Tenemos pues un sistema de ecuaciones:

$$Q_1^{(\mathrm{II})} + Q_2^{(\mathrm{II})} = 120\ \mu\mathrm{C}\,, \tag{42}$$

$$Q_1^{(\mathrm{II})} - 2Q_2^{(\mathrm{II})} = 0\,, \tag{43}$$

que resolviendo nos da

$$\boxed{Q_1^{(\mathrm{II})} = 80\ \mu\mathrm{C}\,, \qquad Q_2^{(\mathrm{II})} = 40\ \mu\mathrm{C}}\,. \tag{44}$$

Problema 6. Dos condensadores idénticos de placas paralelas y capacidad $4\ \mu\text{F}$ cada uno, se conectan en serie a través de una batería de $24\ \text{V}$.
a) Calcula la carga y la energía almacenada en cada uno de los los condensadores.
Un dieléctrico de constante $\kappa = 4{,}2$ se inserta entre las placas de uno cualquiera de ellos sin desconectarlos de la batería.
b) Calcula la carga y la diferencia de potencial sobre cada condensador.
c) Calcula cómo cambia la energía total almacenada en los condensadores.

Solución

a) Sea ΔV la diferencia de potencial suministrada por la batería ($24\ \text{V}$).
Vamos a referirnos a los condensadores con una etiqueta, uno va a ser el condensador 1 y el otro el condensador 2. Inicialmente son identicos, así que $C_1 = C_2 \equiv C$. Al estar en serie, se cumple:

$$Q_{\text{eq}} = Q_1 = Q_2\,, \tag{45}$$

$$\Delta V = \Delta V_{\text{eq}} = \Delta V_1 + \Delta V_2\,, \tag{46}$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C}} = \frac{1}{2}C\,. \tag{47}$$

Como las cargas en ambos son iguales nos centramos en una de ellas:

$$Q_1 = Q_{\text{eq}} = C_{\text{eq}}\Delta V_{\text{eq}} = \frac{1}{2}C\Delta V \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q_1 = Q_2 = 48\ \mu\text{C}}\,. \tag{48}$$

Dado que ambos tienen igual capacidad y carga, las energías almacenadas serán iguales:

$$U_2 = U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{U_1 = U_2 = 288\ \mu\text{J}}\,. \tag{49}$$

b) Repetimos el problema solo que ahora las capacidades son distintas. Supongamos que C_1 continúa igual, con capacidad C, y sobre C_2 introducimos el dieléctrico, de modo que tendrá una capacidad $\bar{C}$.
Como son condensadores de placas plano paralelas, la capacidad es proporcional a ε, por lo que si lo modificamos con un factor κ, la capacidad se modifica con ese factor, de modo que debe ocurrir:

$$\bar{C} = \kappa C\,. \tag{50}$$

Ahora tenemos:

$$Q_{\text{eq}} = Q_1 = Q_2\,, \tag{51}$$

$$\Delta V = \Delta V_{\text{eq}} = \Delta V_1 + \Delta V_2\,, \tag{52}$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{\bar{C}}} = \frac{C\bar{C}}{C + \bar{C}} = \frac{\kappa C^2}{(1+\kappa)C} = \frac{\kappa}{1+\kappa}C\,. \tag{53}$$

Las cargas en ambos son iguales de nuevo así que:

$$Q_1 = Q_{\text{eq}} = C_{\text{eq}}\Delta V_{\text{eq}} = \frac{\kappa}{1+\kappa}C\Delta V \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q_1 = Q_2 = 77{,}54\ \mu\text{C}}\,. \tag{54}$$

Para las diferencias usamos la capacidad:

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1}{C} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta V_1 = 19{,}38\ \text{V}}\,, \tag{55}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{\bar{C}} = \frac{Q_2}{\kappa C} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta V_2 = 4{,}62\ \text{V}}\,. \tag{56}$$

c) El cambio de energía es

$$\Delta U = U_{\text{f}} - U_i \tag{57}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{\bar{C}}\right) - 2\times(288\ \mu\text{J}) \tag{58}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(77{,}54\ \mu\text{C})^2}{4\ \mu\text{F}}\left(1 + \frac{1}{4{,}2}\right) - 2\times(288\ \mu\text{J}) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta U = 354{,}5\ \mu\text{J}} \tag{59}$$