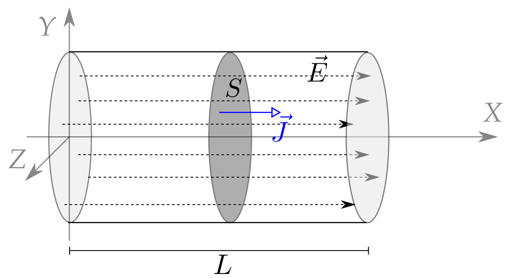
[Versión 9 de julio de 2021]

Problemas resueltos de la relación 3 (Corriente y resistencia)

Problema 1. Un conductor eléctrico diseñado para transportar corrientes grandes tiene $14\ \mathrm{m}$ de longitud y una sección transversal circular de $2{,}5\ \mathrm{mm}$ de diámetro. La resistencia entre sus extremos es de $0{,}104\ \Omega$. Si el campo eléctrico en el conductor es de $1{,}28\ \mathrm{V/m}$, calcula la densidad de corriente.

Solución

Consideramos que el conductor tiene forma de cilindro recto y lo alineamos con el eje X de forma que la carga positiva fluya hacia la derecha como en la figura, es decir, desde el origen hasta el punto a $x = L$ ($= 14\ \mathrm{m}$).



De este modo, la densidad de corriente será un vector de la forma

$$\vec{J} = J\hat{\boldsymbol{\imath}}\,, \tag{1}$$

donde J es una constante en todo el cilindro.
Por cómo hemos dispuesto el sistema, el diferencial de superficie sobre la sección transversal S será $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y la intensidad de corriente es pues

$$I = \int_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = J\int_S \mathrm{d}S = JS \qquad \Rightarrow \qquad J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2}\,. \tag{2}$$

Por último usamos la ley de Ohm para relacionar la intensidad con la resistencia y la caída de potencial (!), así como la expresión de la diferencia de potencial en función del campo eléctrico (!!):

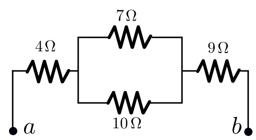
$$J = \frac{4I}{\pi D^2} \overset{!}{=} \frac{4}{\pi D^2 R}\Delta V \tag{3}$$

$$\overset{!!}{=} \frac{4}{\pi D^2 R}\left|-\int_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right| = \frac{4}{\pi D^2 R}\left|-\int_0^L E\mathrm{d}x\right| = \frac{4EL}{\pi D^2 R}\,, \tag{4}$$

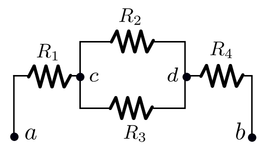
donde C es un segmento recto paralelo al eje X conectando las dos superficies a los extremos del tubo de corriente. Sustituyendo los datos:

$$\boxed{\vec{J} = \frac{4EL}{\pi D^2 R}\hat{\boldsymbol{\imath}} \simeq 35{,}10\hat{\imath}\ \mathrm{A/mm^2}}\,. \tag{5}$$

Problema 2. a) Determina la resistencia equivalente entre los puntos a y b de la figura. b) Si entre los puntos a y b se aplica una diferencia de potencial de 34 V, calcula la corriente en cada resistencia.



Solución



Comenzamos poniendo nombre a las resistencias de modo que $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 7\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $R_4 = 9\,\Omega$. También introducimos los puntos auxiliares c y d.

a) Comenzamos a asociar resistencias.

Primero R_2 con R_3 que están en paralelo:

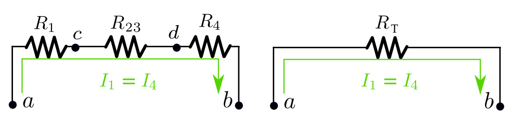
$$R_{23} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{7\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega}} = \frac{70}{17}\,\Omega \qquad (\simeq 4{,}12\,\Omega)\,. \tag{6}$$

Ahora R_1 con R_{23} y R_4 que están en serie,

$$R_\mathrm{T} = R_1 + R_{23} + R_4 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R_\mathrm{T} = \frac{291}{17}\,\Omega \qquad (\simeq 17{,}12\,\Omega)}\,. \tag{7}$$

b) Para hallar las cargas vamos desandando el camino.

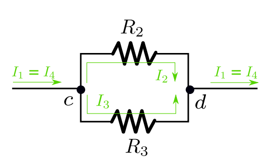
❑ Cálculo de I_1 e I_4 (Figura (1))



La corriente a lo largo de este circuito equivalente será, por la ley de Ohm:

$$I_1 = I_4 = \frac{\Delta V_{ab}}{R_\mathrm{T}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{I_1 = I_4 = \frac{578}{291}\,\mathrm{A} \qquad (\simeq 1{,}99\ \mathrm{A})}\,. \tag{8}$$

❑ Cálculo de I_2 e I_3 (Figura (2))



Por la ley de Ohm,

$$I_2 = \frac{\Delta V_{cd}}{R_2}\,, \qquad I_3 = \frac{\Delta V_{cd}}{R_3}\,. \tag{9}$$

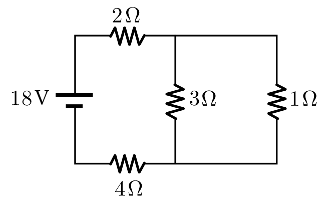
Nos falta la caída de potencial entre c y d, que debe ser el total menos lo que cae en R_1 y R_4,

$$\Delta V_{cd} = \Delta V_{ab} - \Delta V_1 - \Delta V_4 = \Delta V_{ab} - I_1 R_1 - I_4 R_4 = \frac{2380}{291}\,\mathrm{V} \qquad (\simeq 8{,}18\ \mathrm{V})\,, \tag{10}$$

Y concluimos así,

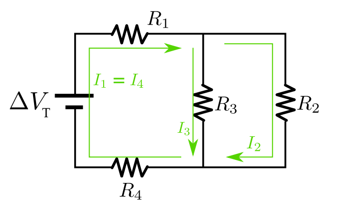
$$\boxed{I_2 = \frac{340}{291}\,\mathrm{A} \quad (\simeq 1{,}17\ \mathrm{A})\,, \qquad I_3 = \frac{238}{291}\,\mathrm{A} \quad (\simeq 0{,}82\ \mathrm{A})}\,. \tag{11}$$

Problema 3. Calcula la potencia disipada en cada una de las resistencias del siguiente circuito.



Solución

La potencia (energía por unidad de tiempo) disipada en una resistencia R viene dada por $P = RI^2$ donde I es la corriente que la atraviesa. En conclusión, para hallar las potencias P lo que debemos hacer es hallar las corrientes que pasan por cada una de las resistencias del circuito.



Si se observa con detenimiento es exactamente el mismo ejercicio que el anterior (con distintos datos), de hecho nos vamos a referir con los mismos nombres a cada resistencia. Así que comenzamos igual. Asociamos las resistencias

$$R_T = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} + R_4 = 6{,}75\ \Omega\,. \tag{12}$$

De modo que la intensidad por R_1 y por R_4 no es más que

$$I_1 = I_4 = I_T = \frac{\Delta V_T}{R_T} = \frac{8}{3}\ \mathrm{A} \qquad (\simeq 2{,}67\ \mathrm{A})\,. \tag{13}$$

Para las otras dos tenemos $I_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2}$ y $I_3 = \frac{\Delta V_3}{R_3}$, donde ahora,

$$\Delta V_2 = \Delta V_3 = \Delta V_T - \Delta V_1 - \Delta V_4 = \Delta V_T - I_1 R_1 - I_4 R_4 = 2\ \mathrm{V}\,, \tag{14}$$

luego $I_2 = 2$ A e $I_3 = \frac{2}{3}$ A $\simeq 0{,}67$ A. Ya tenemos todas las corrientes, así que la respuesta al problema es:

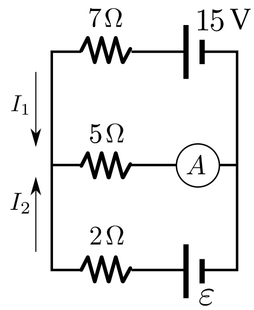
$$\begin{array}{ll} P_1 & = R_1 I_1^2 \\ P_2 & = R_2 I_2^2 \\ P_3 & = R_3 I_3^2 \\ P_4 & = R_4 I_4^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{lll} P_1 & = \frac{128}{9}\ \mathrm{W} & (\simeq 14{,}22\ \mathrm{W}) \\ P_2 & = 4\ \mathrm{W} & \\ P_3 & = \frac{4}{3}\ \mathrm{W} & (\simeq 1{,}33\ \mathrm{W}) \\ P_4 & = \frac{256}{9}\ \mathrm{W} & (\simeq 28{,}44\ \mathrm{W}) \end{array}}\,. \tag{15}$$

Observa cómo la suma de estas potencias, que es de 48 W, coincide con la suministrada por la fuente.

$$P_{\text{fuente}} = \Delta V_T I_1 = (18\ \mathrm{V})\left(\frac{8}{3}\ \mathrm{A}\right) = 48\ \mathrm{W}\,. \tag{16}$$

Lo cual es lógico: dado que no se está acumulando energía en ningún punto del circuito, toda la energía inyectada por unidad de tiempo debe coincidir con las pérdidas en las resistencias.

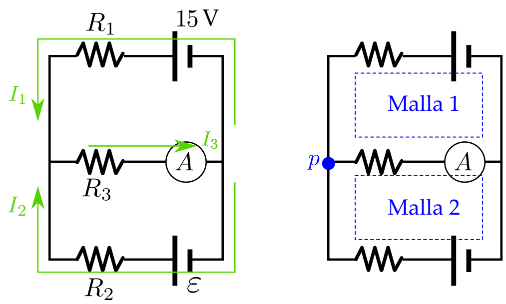
Problema 4. El amperímetro que se muestra en la siguiente figura da una lectura de 2 A. Determina I_1, I_2 y ε.



Solución

Se nos da la dirección de dos corrientes (ver al final del problema el cuadro de ampliación donde muestro todas las posibilidades y demuestro que esta es la única permitida físicamente).

Como consecuencia de la ley de Kirchoff de los nudos, la corriente en la rama central ($I_3 = 2$ A) debe ir hacia la derecha. Aprovechamos para ponerle nombre a las resistencias y las corrientes:



- Aplicamos la ley de las mallas en la malla 1

$$0 = 15\text{ V} - I_1R_1 - I_3R_3 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{15\text{ V} - I_3R_3}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = \frac{5}{7}\text{ A} \qquad (\simeq 0{,}71\text{ A})\,.} \tag{17}$$

- Aplicamos la ley de los nudos en p

$$\underbrace{I_1 + I_2}_{I_{\text{entrante}}} = \underbrace{I_3}_{I_{\text{saliente}}} \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_3 - I_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_2 = \frac{9}{7}\text{ A} \qquad (\simeq 1{,}29\text{ A})}\,. \tag{18}$$

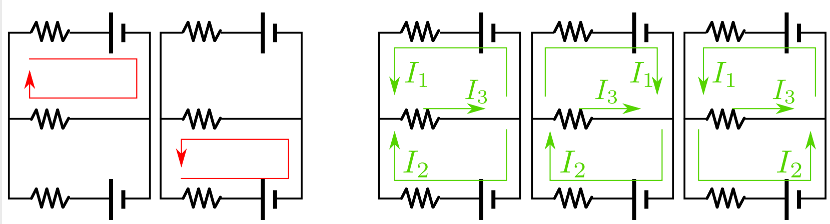
- Finalmente aplicamos la ley de las mallas en la malla 2

$$0 = \varepsilon - I_2R_2 - I_3R_3 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = I_2R_2 + I_3R_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \frac{88}{7}\text{ V} \qquad (\simeq 12{,}57\text{ V})}\,. \tag{19}$$

(Análisis de configuraciones)
Antes de nada vamos a convencernos de que sea cual sea la configuración que adopten las corrientes, nunca podrá haber una malla en un circuito en la que haya una sola fuente de voltaje de valor V (y resistencias R_i), tal que la corriente recorre completamente la malla en contra de la fuente. Pues eso implicaría:

$$0 = -V - R_1 I_1 - R_2 I_3 - \ldots \qquad \Rightarrow \qquad V = -R_1 I_1 - R_2 I_3 - \ldots < 0$$

lo cual no está permitido pues V es siempre positivo.



(a) (b1) (b2) (b3)

De este modo, todas las configuraciones posibles en las que la corriente haga lo que se muestra en cualquiera de los dos circuitos de la figura (a) no está permitida.

No es difícil comprobar (hacedlo como ejercicio) que las únicas posibles configuraciones que quedan son las tres de la derecha. (b1) es justamente la que hemos empleado para resolver el problema. Vamos a ver que cualquiera de las otras dos también nos acaba devolviendo al casi (b1), por lo que es la única posibilidad.

❏ Configuración (b2). Aplicamos, la ley de las mallas arriba,

$$0 = -15\ \mathrm{V} - I_1 R_1 + I_3 R_3 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{I_3 R_3 - 15\ \mathrm{V}}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = -\frac{5}{7}\ \mathrm{A} \qquad (\simeq -0{,}71\ \mathrm{A})\,.} \tag{20}$$

Lo cual nos forzaría a que I_1 fuese al revés y por tanto nos saldríamos del caso (b2), cayendo en el (b1).

❏ Configuración (b3).

- Aplicamos la ley de las mallas arriba y sale lo mismo que en el problema (b1)

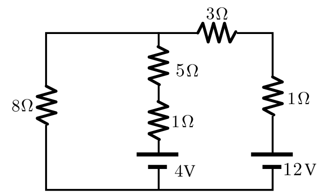
$$0 = 15\ \mathrm{V} - I_1 R_1 - I_3 R_3 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{15\ \mathrm{V} - I_3 R_3}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = \frac{5}{7}\ \mathrm{A} \qquad (\simeq 0{,}71\ \mathrm{A})\,.} \tag{21}$$

- Aplicamos la ley de los nudos en p (ojo la cosa cambia porque I_2 va al revés.

$$\underbrace{I_1}_{I_{\text{entrante}}} = \underbrace{I_3 + I_2}_{I_{\text{saliente}}} \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_1 - I_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_2 = -\frac{9}{7}\ \mathrm{A} \qquad (\simeq -1{,}29\ \mathrm{A})}\,. \tag{22}$$

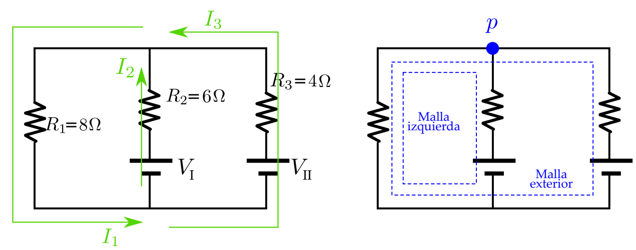
que nos forzaría a que I_2 fuese al revés y caeríamos de nuevo en el caso (b1).

Problema 5. Determina la corriente en cada una de las ramas del circuito que se muestra en la figura.



Solución

Como lo que nos interesa son las corrientes en cada rama, comenzamos por combinar las resistencias que están en serie en ellas, ya que por la resistencia equivalente va a circular la misma corriente. Aprovechamos para ponerle nombre a las resistencias y las diferencias de potencial suministradas por las fuentes, y seleccionamos arbitrariamente direcciones para las corrientes:



- Aplicamos la ley de las mallas en la malla izquierda, en la malla exterior y la ley de los nudos en p. Respectivamente se obtiene:

$$0 = V_I - I_2R_2 - I_1R_1\,, \tag{23}$$
$$0 = V_{II} - I_3R_3 - I_1R_1\,, \tag{24}$$
$$I_1 = I_2 + I_3\,. \tag{25}$$

Usando la última en las otras dos:

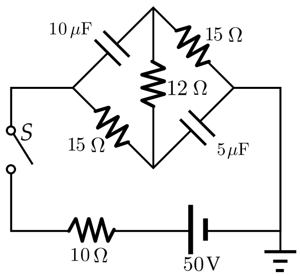
$$\begin{aligned} V_I &= I_2(R_2+R_1) + I_3R_1 \\ V_{II} &= I_2R_1 + I_3(R_3+R_1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4\text{ V} &= (14\ \Omega)I_2 + (8\ \Omega)I_3\,, \\ 12\text{ V} &= (8\ \Omega)I_2 + (12\ \Omega)I_3\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Resolviendo el sistema se obtiene I_2 y I_3, y con la tercera ecuación del sistema de partida I_1. El resultado es:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{11}{13}\text{ A} && (\simeq 0{,}85\text{ A}) \\ I_2 &= -\tfrac{6}{13}\text{ A} && (\simeq -0{,}46\text{ A}) \\ I_3 &= \tfrac{17}{13}\text{ A} && (\simeq 1{,}31\text{ A}) \end{aligned}}\,. \tag{27}$$

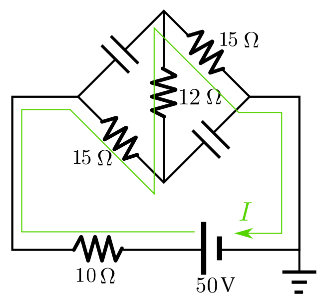
El signo negativo indica que el sentido dibujado es el contrario al que sigue la corriente.

Problema 6. En el circuito de la figura, se cierra el interruptor S. a) ¿cuál es la intensidad de corriente después de un tiempo muy largo? b) ¿Cuáles son las cargas finales en los condensadores?



Solución

a) Tras un tiempo lo suficientemente largo (régimen transitorio), las capacidades estarán cargadas y dejará de moverse carga hacia ellas. Es decir, en esas ramas no circula corriente, y podemos ignorarlas (la corriente sigue el camino señalado en la figura:

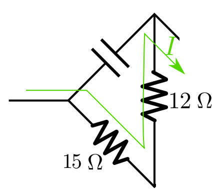


El resultado es un circuito con tres resistencias en serie y la corriente que las atraviesa por la ley de Ohm es:

$$I = \frac{V_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}} = \frac{50\ \mathrm{V}}{(10+15+12+15)\ \Omega} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{I = \frac{25}{26}\ \mathrm{A} \qquad (\simeq 0{,}96\ \mathrm{A})}\,. \tag{28}$$

b) La carga de un condensador viene dada por $Q = C\Delta V$. Como nos dan las capacidades solo tenemos que calcular la diferencia de potencial entre los extremos de cada condensador.

- Condensador de 10 μF. La situación es la que se muestra en la figura



De modo que:

$$\Delta V_{10} = R_\mathrm{eq} I = (15\ \Omega + 12\ \Omega) I = \frac{675}{26}\ \mathrm{V} \qquad (\simeq 25{,}96\ \mathrm{V})\,. \tag{29}$$

Y la carga es simplemente:

$$Q_{10} = (10\ \mu\mathrm{F})\left(\frac{675}{26}\ \mathrm{V}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q_{10} = \frac{3375}{13}\ \mu\mathrm{C} \qquad (\simeq 259{,}62\ \mu\mathrm{C})}\,. \tag{30}$$

- Condensador de 5 μF. La situación es exactamente la misma que en el otro caso: una corriente de la misma intensidad atravesando dos resistencias, una de 15 y otra de 12 ohmios. De modo que directamente $\Delta V_5 = \Delta V_{10}$, y como la capacidad es la mitad que en el caso anterior la carga será la mitad también:

$$\boxed{Q_5 = \frac{3375}{26}\ \mu\mathrm{C} \qquad (\simeq 129{,}81\ \mu\mathrm{C})}\,. \tag{31}$$