[Versión 9 de julio de 2021]

Ejemplo: Informe de laboratorio resuelto

(Para cualquier curso básico de física)

Alejandro Jiménez Cano[1]

Notas previas para alumnos:

- Los criterios empleados para calificar este informe de "Sobresaliente" son personales. Otro profesor podría tener otros criterios.
- La idea es hacer uso de este documento como referencia de cómo debería quedar un buen informe. No debe usarse como una plantilla o modelo rígido, pues hay información que podría moverse de un apartado a otro, y las variantes que resultan son igualmente buenas.
- En verde aparecen algunos comentarios para el lector que NO forman parte del informe.

[1] alejandrojc@ugr.es (Ruego comuníquense las erratas que se encuentren)

NOTA SOLO PARA ESTUDIANTES INTERESADOS

Recomiendo leer esto después de haberle echado un vistazo al informe.

Esta anotación es para que le explote la cabeza a más de uno. Pero no me puedo resistir. Me niego a engañar. La práctica así hecha estaría perfecta (en el sentido de que se habría demostrado gran manejo de todo lo que hemos visto en clase).
Pero sí querría indicar que el cálculo de los errores $\Delta\eta$ y ΔR no es estrictamente correcto. La fórmula de propagación cuadrática de errores,

$$\Delta F(x, y, ...) = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y},...}\Delta x\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y},...}\Delta y\right)^2 + ...},$$

es solamente válida si las magnitudes x, y,... son independientes la una de la otra. Por ejemplo, para calcular el error de la viscosidad hemos usado que η tenía la dependencia:

$$\eta(D,\ \delta,\ \rho,\ g,\ v_{\mathrm{lim}})$$

y hemos tratado todas las magnitudes del paréntesis como independientes. ¡Pero, nótese que v_{lim} se ha calculado usando D! Luego esas dos NO son independientes.
La manera correcta de hacerlo sería "abriendo" v_{lim} dejando al descubierto todas las D que ocultaba más otras magnitudes:

$$\eta = \frac{D^2(\delta-\rho)g}{18v_{\mathrm{lim}}} = \frac{D^2(\delta-\rho)g}{18v_{\mathrm{m}}}\left(1 + 2{,}4\frac{D}{\phi}\right)^{-1}$$

Si el lector observa detenidamente comprobará que ahora SÍ son independientes todas las magnitudes que aparecen, y el error de η habría que calcularlo usando la función:

$$\eta(D,\ \delta,\ \rho,\ g,\ v_{\mathrm{m}},\ \phi) = \frac{D^2(\delta-\rho)g}{18v_{\mathrm{m}}}\left(1 + 2{,}4\frac{D}{\phi}\right)^{-1}$$

¡Se complican las parciales! Pero qué le vamos a hacer.
Algo parecido le ocurre al número de Reynolds $R(\rho,\ D,\ \eta,\ v_{\mathrm{m}})$, en el que estamos olvidando que "dentro" de η también hay D's.

29/02/2019

Ley de Stokes

Spike Spiegel

Grado en Física. Grupo A2

Estructura general y presentación	✓✓
Redondeo	✓✓
Unidades	✓✓
Método y teoría de errores	✓✓
Gráfica	✓✓
Ajuste	✓✓
Redacción	✓✓
Discusión y conclusiones	✓✓
Calificación final	10

Resumen

En esta práctica se pretende estudiar el movimiento de cuerpos dentro de un fluido. En concreto, se analizán las fuerzas de arrastre sobre unas bolas metálicas mediante la ley de Stokes, con el objetivo final de determinar la densidad de éstas. Determinaremos para ello la velocidad límite y la viscosidad del fluido teniendo en cuenta la aproximación de Ladenburg.

1. Introducción teórica

Cuando un cuerpo se desplaza dentro de un fluido, éste experimentará una fuerza (llamada de arrastre) que se opone a su movimiento, debido a la viscosidad del medio. Llamando ρ a la densidad del fluido y η su viscosidad, se define el número de Reynolds asociado al flujo alrededor del cuerpo como la magnitud adimensional

$$R = \frac{\rho v D}{\eta}\,, \tag{1.1}$$

donde v es la velocidad relativa del cuerpo en el fluido y D es la longitud característica del cuerpo (en el caso de la esfera, el diámetro). Trabajaremos en un régimen laminar, i.e. para $R < 2000$.

Para valores pequeños del número de Reynolds ($R < 1$), la fuerza de arrastre sobre una esfera lisa que se mueve en el seno de un fluido que se extiende infinitamente viene dada por:

$$F_D = 3\pi\eta D v \qquad \text{(Ley de Stokes)}\,. \tag{1.2}$$

Si δ es la densidad de la esfera, una vez equilibrado el arrastre F_D con el peso y el empuje, la bola alcanzará la velocidad límite, v_{lim}, y aplicando (1.2):

$$v_{\text{lim}} = \frac{D^2(\delta-\rho)g}{18\eta} \qquad (R < 1)\,, \tag{1.3}$$

Debido a que haremos el experimento dejando caer las bolas por un tubo, v_{lim} no coincidirá con la medida experimentalmente (v_{m}). Estas difieren en un factor debido al tamaño finito del tubo (de diámetro ϕ) :

$$v_{\text{lim}} = \left(1 + 2{,}4\frac{D}{\phi}\right) v_{\text{m}} \qquad \text{(Corrección de Ladenburg)}\,. \tag{1.4}$$

Se nos informó de que la constante que aparece multiplicando a D/ϕ en la última expresión se considera sin error.

2. Metodología

2.1. Datos y medidas preliminares

Se nos proporcionaron como dato la densidad del aceite empleado, la aceleración de la gravedad, el diámetro de las esferas y su masa, respectivamente:

$$\rho = (8913 \pm 1)\cdot 10^{-4}\,\text{g/cm}^3\,, \qquad g = (981 \pm 1)\,\text{cm/s}^2\,, \tag{2.1}$$

$$D = (0{,}275 \pm 0{,}001)\,\text{cm}\,, \qquad m = (138{,}5 \pm 0{,}1)\cdot 10^3\,\text{g}\,. \tag{2.2}$$

Utilizando un calibre de sensibilidad $0{,}005$ cm medimos el diámetro interno del tubo:

$$\phi = (3{,}568 \pm 0{,}005)\,\text{cm}; \tag{2.3}$$

utilizando m y D determinamos la densidad de las bolas obteniendo

$$\delta = (12{,}7 \pm 0{,}1)\,\text{g/cm}^3\,; \tag{2.4}$$

y la distancia entre las dos marcas de referencia del tubo se midió con una regla graduada resultando:

$$l = (36{,}5 \pm 0{,}1)\,\text{cm}\,. \tag{2.5}$$

2.2. Determinación de la velocidad límite

Inicialmente el termómetro registra una temperatura del aceite de (20 ± 1) °C.

Dejamos caer las bolas de modo que recorran una trayectoria lo más próxima posible al eje del tubo, para evitar contacto con las paredes. Medimos el tiempo que tarda la bola en recorrer la distancia l señalada con un cronómetro de sensibilidad de $0{,}01$ s. Fue necesario hacer seis medidas debido a la dispersión.

La idea es, con ese tiempo y el valor de l, hallar v_m y, aplicando (1.4), obtener al valor real de la velocidad límite en dicho medio v_lim.

2.3. Coeficiente de viscosidad

Simplemente emplearemos la expresión (1.3) y despejamos el coeficiente de viscosidad η. Obsérvese que al trabajar en el sistema c.g.s. obtenemos el resultado en Poises. También calcularemos R (utilizando v_m como velocidad relativa) para comprobar si estamos bajo las condiciones de validez de la ley de Stokes, es decir, $R < 1$.

2.4. Determinación del material de un juego de balines

Nos proporcionan la siguiente tabla de velocidades límite reales v_lim en función del diámetro de diferentes balines esféricos (todos del mismo material) para el mismo aceite de los apartados anteriores:

v_lim (cm/s)	D (cm)
$2{,}0 \pm 0{,}1$	$0{,}126 \pm 0{,}001$
$7{,}5 \pm 0{,}1$	$0{,}243 \pm 0{,}001$
$14{,}3 \pm 0{,}2$	$0{,}333 \pm 0{,}001$

El objetivo es discernir si los balines son de hierro o aluminio. La idea será ajustar $v_\mathrm{lim}(= y)$ como función de $D^2(= x)$ en la expresión (1.4) con un recta $y = ax+b$, y de la pendiente obtener la densidad de cada bola λ,

$$a = \frac{(\lambda-\rho)g}{18\eta} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 18\frac{a\eta}{g} + \rho\,, \tag{2.6}$$

que nos permitirá averiguar el material.

3. Resultados

3.1. Determinación de la velocidad límite

El tiempo que tarda la bola en recorrer la distancia entre las marcas es

$$t = (5{,}57 \pm 0{,}06)\,\mathrm{s}\,. \tag{3.1}$$

Observación: anotamos que la temperatura del aceite había aumentado 1ºC aproximadamente durante el proceso de medida.

NOTA PARA ESTUDIANTES. Esta pequeña variación de temperatura no va a afectar en nada a los resultados, pero anotarlo refleja un buen espíritu científico, ¿y si resulta que SÍ es importante? No hay que tener miedo de anotar o de preguntarme este tipo de cosas en el laboratorio, ¡hasta puede que yo aprenda cosas que no sabía!

La velocidad límite observada es pues:

$$v_\mathrm{m} = (6{,}55 \pm 0{,}07)\,\mathrm{cm/s} \tag{3.2}$$

y, aplicando la corrección de Ladenburg, se obtiene la velocidad límite real:

$$\boxed{v_\mathrm{lim} = (7{,}76 \pm 0{,}08)\,\mathrm{cm/s}}\,. \tag{3.3}$$

3.2. Coeficiente de viscosidad

El coeficiente de viscosidad del aceite calculado con (3.3) es:

$$\boxed{\eta = (6{,}3 \pm 0{,}1)\,\mathrm{P}}\,, \tag{3.4}$$

que nos permite determinar un valor del número de Reynolds que está por debajo de la unidad:

$$R = 0{,}255 \pm 0{,}005\,. \tag{3.5}$$

3.3. Determinación del material de un juego de bolas

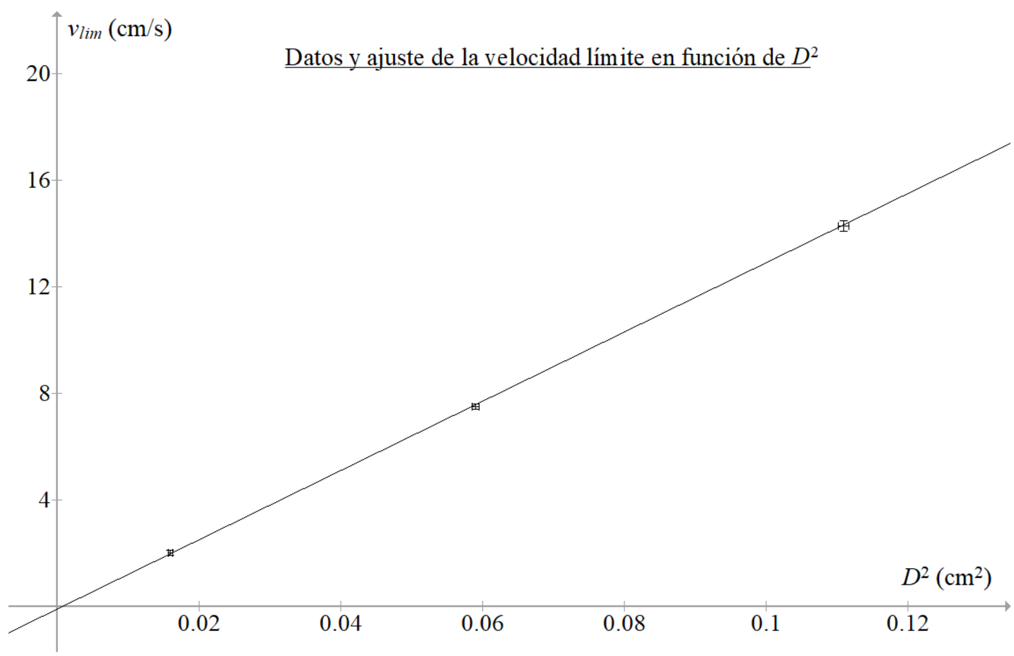
En primer lugar hallamos los D^2, resultando la tabla siguiente:

v_{lim} (cm/s)	D^2 (cm^2)
$2{,}0 \pm 0{,}1$	$0{,}0159 \pm 0{,}0003$
$7{,}5 \pm 0{,}1$	$0{,}0590 \pm 0{,}0005$
$14{,}3 \pm 0{,}2$	$0{,}1109 \pm 0{,}0007$

El ajuste por mínimos cuadrados viene dado por los parámetros:

$$a = (130 \pm 1)\,\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{s}^{-1}\,, \qquad b = (-0{,}09 \pm 0{,}07)\,\mathrm{cm/s}\,, \qquad r = 0{,}999972\,. \tag{3.6}$$

La gráfica resultante es:



De la pendiente obtenemos finalmente el siguiente valor de la densidad de las bolas:

$$\lambda = (7{,}8 \pm 0{,}2)\,\mathrm{g/cm}^3\,, \tag{3.7}$$

que, comparando con la bibliografía [1] (pág. 457), nos permite concluir que el juego de bolas seleccionado era el de hierro.

NOTA PARA ESTUDIANTES. En el caso de que os hayan pedido los profesores hacer las gráficas a mano, aquí basta con añadir una referencia tipo "Véase la gráfica adjunta al informe" y, por ejemplo, al final con los Apéndices pondríais la gráfica en su hoja de papel milimetrado.
Y otra cosa: si hubiéseis tenido que hacer esta gráfica a mano, dado que los rectángulos de error son muy pequeños en comparación con la escala, los podéis omitir, explicando por qué lo habéis hecho en la propia hoja milimetrada bajo la gráfica.

4. Discusión y conclusiones

Para concluir, merece la pena recalcar algunos puntos de nuestro estudio:

- Uno de los puntos clave de esta práctica ha sido la corrección de Ladenburg a la velocidad límite, que nos llevó de

$$v_{\mathrm{m}} = (6{,}55 \pm 0{,}07)\,\mathrm{cm/s} \qquad \text{a} \qquad v_{\mathrm{lim}} = (7{,}76 \pm 0{,}08)\,\mathrm{cm/s}\,, \tag{4.1}$$

  habiendo un error relativo entre ambos de:

$$\varepsilon = \frac{|v_{\mathrm{m}} - v_{\mathrm{lim}}|}{v_{\mathrm{lim}}} \cdot 100 = 15{,}6\,\%\,, \tag{4.2}$$

  donde vemos que la influencia de los bordes del tubo no es despreciable, aunque parece razonable dado que la diferencia entre el diámetro del tubo y de las bolas es de apenas un orden de magnitud:

$$\phi \simeq 3{,}6\,\mathrm{cm} > 0{,}3\,\mathrm{cm} \simeq D$$

  y dado que el aceite es de gran viscosidad, los efectos del borde pueden tener grandes influencias en el eje central por el que cae la bola.
  NOTA PARA ESTUDIANTES. Estos razonamientos no tienen por qué ser 100 % ciertos, puede haber muchas sutilezas. Pero se valora muy positivamente relacionar conceptos de manera lógica y tratar de darle explicación a lo que se observa con fundamento (aunque estas sutilezas se pasen por alto).

- El número de Reynolds calculado refleja que hemos trabajado dentro de las condiciones de validez de la ley de Stokes.

- Hemos utilizado un método para determinar la densidad de unos balines en el que no hemos necesitado disponer de una báscula de precisión. Basta con tener un aceite de viscosidad conocida y medir v_{lim} para bolas de diferentes diámetros del mismo material. En nuestro caso pudimos discernir, con un muy buen ajuste ($r \simeq 1$) que el juego de bolas era de hierro, obteniéndose el valor teórico dentro del margen de error.
  NOTA PARA ESTUDIANTES. Obsérvese que el método visto es una forma muy complicada de medir densidades (apoyarse en una báscula es mucho mejor) pues, por ejemplo, se requeriría de un juego de bolas de diferentes diámetros. Pero es una buena observación que poner aquí; estás recalcando que NO necesitas saber la masa de un objeto para hallar su densidad, y que hay métodos alternativos aprovechando otra fenomenología. ¡Hay mucha física aquí!

5. Referencias

[1] F.W. Sears, M.W. Zemansky, H.D. Young, R.A. Freedman. *Física Universitaria. Vol 1* (12ª edición).

A. Apéndices

A.1. Datos y medidas preliminares

A los datos proporcionados

$$\rho = 0{,}8913\,\mathrm{g/cm^3}\,, \qquad D = 0{,}275\,\mathrm{cm}\,, \qquad m = 138{,}5\,\mathrm{mg}\,, \tag{A.1}$$

se les asoció un error de 1 unidad en la última cifra especificada.

Densidad de las bolas

Se obtiene a partir de los valores m y D mediante la expresión:

$$\delta = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}} \qquad \Rightarrow \qquad \delta(m,\,D) = \frac{6m}{\pi D^3}\,, \tag{A.2}$$

Hallamos el valor más probable de la densidad y el correspondiente error:

$$\bar{\delta} = \delta(\bar{m},\,\bar{D}) = \frac{6\bar{m}}{\pi\bar{D}^3} = \frac{6(0{,}1385\,\mathrm{g})}{\pi\,(0{,}275\,\mathrm{cm})^3} = 12{,}719003...\,\mathrm{g/cm^3}\,, \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\delta &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial\delta}{\partial m}\right|_{\bar{m},\,\bar{D}}\Delta m\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial\delta}{\partial D}\right|_{\bar{m},\,\bar{D}}\Delta D\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{6}{\pi\bar{D}^3}\Delta m\right)^2 + \left(-3\frac{6\bar{m}}{\pi\bar{D}^4}\Delta D\right)^2} \\
&= \left(\frac{6\bar{m}}{\pi\bar{D}^3}\right)\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(3\frac{\Delta D}{\bar{D}}\right)^2} \\
&= \left(12{,}719003...\,\mathrm{g/cm^3}\right)\sqrt{\left(\frac{0{,}1\,\mathrm{mg}}{138{,}5\,\mathrm{mg}}\right)^2 + \left(3\frac{0{,}001\,\mathrm{cm}}{0{,}275\,\mathrm{cm}}\right)^2} = 0{,}13906...\,\mathrm{g/cm^3}\,.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

NOTA PARA ESTUDIANTES. Aquí ↑ no haría falta especificar todos los pasos (aquí cinco), basta con un par de ellos y el resultado final.
Resultando $\delta = (12{,}7 \pm 0{,}1)\,\mathrm{g/cm^3}$.

Diámetro interno del tubo

Con un calibre de sensibilidad $0{,}05$ mm tomamos tres medidas del diámetro interno del tubo:

Medida 1	Medida 2	Medida 3	Media	Dispersión
35,65 mm	35,70 mm	35,70 mm	35,68333... mm	0,05 mm

Dado que la dispersión coincide con la sensibilidad, el valor final será: $\phi = (3{,}568 \pm 0{,}005)$ cm (lo expresamos en centímetros porque el resto de cantidades como las densidades están expresadas en esta unidad).

Distancia entre las marcas

Utilizamos una regla graduada con sensibilidad de 1 mm. No se requieren en este caso tres medidas, resultando $l = (36{,}5 \pm 0{,}1)$ cm.

A.2. Velocidad límite

Tiempo de caída entre marcas

Utilizamos un cronómetro con sensibilidad de $s = 0{,}01\,\mathrm{s}$, obteniendo las medidas:

Medida 1	Medida 2	Medida 3	Media	Dispersión
5,54 s	5,61 s	5,49 s	5,54666... s	0,12 s

Como la dispersión es mayor que s, hallamos el porcentaje de dispersión que es de $2{,}16...\,\%$. Dado que está entre el 2 y el 8 % es necesario hacer tres medidas más:

Medida 4	Medida 5	Medida 6	Media (de las 6 medidas)	Dispersión (de las 6 medidas)
5,46 s	5,63 s	5,69 s	5,57 s	0,23 s

El valor final es la media y el error la dispersión entre 4, que resultan, debidamente redondeados,

$$t = (5{,}57 \pm 0{,}06)\,\mathrm{s}\,. \tag{A.5}$$

Cálculo de la velocidad límite (a partir del tiempo y del espacio)

La velocidad límite a partir del tiempo de caída entre marcas viene dada por:

$$v_{\mathrm{m}}(l,\,t) = \frac{l}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{v}_{\mathrm{m}} = v_{\mathrm{m}}(\bar{l},\,\bar{t}) = \frac{\bar{l}}{\bar{t}} = \frac{36{,}5\,\mathrm{cm}}{5{,}57\,\mathrm{s}} = 6{,}55296...\,\mathrm{cm/s}\,,$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{\mathrm{m}} &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial v_{\mathrm{m}}}{\partial l}\right|_{\bar{l},\,\bar{t}} \Delta l\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial v_{\mathrm{m}}}{\partial D}\right|_{\bar{l},\,\bar{t}} \Delta t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}}\Delta l\right)^2 + \left(-\frac{\bar{l}}{\bar{t}^2}\Delta t\right)^2} \qquad = \left(\frac{\bar{l}}{\bar{t}}\right)\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right)^2} \\ &= (6{,}55296...\,\mathrm{cm/s})\sqrt{\left(\frac{0{,}1\,\mathrm{cm}}{36{,}5\,\mathrm{cm}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}06\,\mathrm{s}}{5{,}57\,\mathrm{s}}\right)^2} = 0{,}0728...\,\mathrm{cm/s}\,. \end{aligned}$$

Resulta así $v_{\mathrm{m}} = (6{,}55 \pm 0{,}07)\,\mathrm{cm/s}$.

Corrección de Ladenburg

A partir de la velocidad de caída entre marcas, la velocidad límite real viene dada, aplicando la corrección de Ladenburg, por:

$$v_{\mathrm{lim}}(D,\,\phi,\,v_{\mathrm{m}}) = \left(1 + 2{,}4\frac{D}{\phi}\right) v_{\mathrm{m}}\,. \tag{A.6}$$

Calculamos su valor y su error:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\mathrm{lim}} = v_{\mathrm{lim}}(\bar{D},\,\bar{\phi},\,\bar{v}_{\mathrm{m}}) &= \left(1 + 2{,}4\frac{\bar{D}}{\bar{\phi}}\right)\bar{v}_{\mathrm{m}} \\ &= \left(1 + 2{,}4\frac{0{,}275\,\mathrm{cm}}{3{,}568\,\mathrm{cm}}\right)(6{,}55\,\mathrm{cm/s}) = 7{,}76160...\,\mathrm{cm/s}\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta v_{\text{lim}})^2 &= \left(\left.\frac{\partial v_{\text{lim}}}{\partial D}\right|_{\bar{D},\,\bar{\phi},\,\bar{v}_{\text{m}}} \Delta D \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial v_{\text{lim}}}{\partial \phi}\right|_{\bar{D},\,\bar{\phi},\,\bar{v}_{\text{m}}} \Delta \phi \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial v_{\text{lim}}}{\partial v_{\text{m}}}\right|_{\bar{D},\,\bar{\phi},\,\bar{v}_{\text{m}}} \Delta v_{\text{m}} \right)^2 \\
&= \left(\left(2{,}4\,\frac{1}{\bar{\phi}}\bar{v}_{\text{m}} \right) \Delta D \right)^2 + \left(\left(-2{,}4\,\frac{\bar{D}}{\bar{\phi}^2}\bar{v}_{\text{m}} \right) \Delta \phi \right)^2 + \left(\left(1 + 2{,}4\frac{\bar{D}}{\bar{\phi}} \right) \Delta v_{\text{m}} \right)^2 \\
&= \left(\frac{2{,}4\,(6{,}55\,\text{cm/s})}{3{,}568\,\text{cm}} 0{,}001\,\text{cm} \right)^2 + \left(\frac{2{,}4\,(0{,}275\,\text{cm})\,(6{,}55\,\text{cm/s})}{(3{,}568\,\text{cm})^2} 0{,}005\,\text{cm} \right)^2 \\
&\quad + \left(\left(1 + 2{,}4\frac{0{,}275\,\text{cm}}{3{,}568\,\text{cm}} \right) 0{,}07\,\text{cm/s} \right)^2 \\
&= 0{,}00690278...\ (\text{cm/s})^2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta v_{\text{lim}} = 0{,}0831...\,\text{cm/s}\,,
\end{aligned}
$$

Resultando $v_{\text{lim}} = (7{,}76 \pm 0{,}08)\,\text{cm/s}$.

A.3. Coeficiente de viscosidad y número de Reynolds

Coeficiente de viscosidad

Para la viscosidad tenemos la expresión

$$
v_{\text{lim}} = \frac{D^2(\delta - \rho)g}{18\eta} \qquad \Rightarrow \qquad \eta(D,\ \delta,\ \rho,\ g,\ v_{\text{lim}}) = \frac{D^2(\delta - \rho)g}{18 v_{\text{lim}}}\,. \tag{A.7}
$$

Calculamos su valor esperado y su error:

$$
\begin{aligned}
\bar{\eta} &= \eta(\bar{D},\ \bar{\delta},\ \bar{\rho},\ \bar{g},\ \bar{v}_{\text{lim}}) = \frac{\bar{D}^2(\bar{\delta}-\bar{\rho})\bar{g}}{18\bar{v}_{\text{lim}}} \\
&= \frac{(0{,}275\,\text{cm})^2((12{,}7 - 0{,}8913)\,\text{g/cm}^3)(981\,\text{cm/s}^2)}{18\,(7{,}76\,\text{cm/s})} = 6{,}271945...\,\text{P}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta\eta)^2 &= \left(\left.\frac{\partial \eta}{\partial D}\right|_{\bar{D},\dots} \Delta D \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \eta}{\partial \delta}\right|_{\bar{D},\dots} \Delta \delta \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \eta}{\partial \rho}\right|_{\bar{D},\dots} \Delta \rho \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \eta}{\partial g}\right|_{\bar{D},\dots} \Delta g \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \eta}{\partial v_{\text{lim}}}\right|_{\bar{D},\dots} \Delta v_{\text{lim}} \right)^2 \\
&= \left(\frac{2\bar{D}(\bar{\delta}-\bar{\rho})\bar{g}}{18\bar{v}_{\text{lim}}} \Delta D \right)^2 + \left(\frac{\bar{D}^2\bar{g}}{18\bar{v}_{\text{lim}}} \Delta\delta \right)^2 + \left(-\frac{\bar{D}^2\bar{g}}{18\bar{v}_{\text{lim}}} \Delta\rho \right)^2 + \left(\frac{\bar{D}^2(\bar{\delta}-\bar{\rho})}{18\bar{v}_{\text{lim}}} \Delta g \right)^2 + \left(-\frac{\bar{D}^2(\bar{\delta}-\bar{\rho})\bar{g}}{18\bar{v}_{\text{lim}}^2} \Delta v_{\text{lim}} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\bar{D}^2(\bar{\delta}-\bar{\rho})\bar{g}}{18\bar{v}_{\text{lim}}^2} \right)^2 \left[\left(2\frac{\Delta D}{\bar{D}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\delta}{\bar{\delta}-\bar{\rho}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho}{\bar{\delta}-\bar{\rho}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{\bar{g}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{\text{lim}}}{\bar{v}_{\text{lim}}} \right)^2 \right] \\
&= \left(\frac{\bar{D}^2(\bar{\delta}-\bar{\rho})\bar{g}}{18\bar{v}_{\text{lim}}^2} \right)^2 \left[\left(2\frac{\Delta D}{\bar{D}} \right)^2 + \frac{(\Delta\delta)^2 + (\Delta\rho)^2}{(\bar{\delta}-\bar{\rho})^2} + \left(\frac{\Delta g}{\bar{g}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{\text{lim}}}{\bar{v}_{\text{lim}}} \right)^2 \right]\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\eta &= (6{,}271945...\,\text{P}) \sqrt{ \left(2\,\frac{0{,}001\,\text{cm}}{0{,}275\,\text{cm}} \right)^2 + \frac{(0{,}1\,\text{g/cm}^3)^2 + (0{,}0001\,\text{g/cm}^3)^2}{(12{,}7\,\text{g/cm}^3 - 0{,}8913\,\text{g/cm}^3)^2} + \left(\frac{1\,\text{cm/s}^2}{981\,\text{cm/s}^2} \right)^2 + \left(\frac{0{,}08\,\text{cm/s}}{7{,}76\,\text{cm/s}} \right)^2 } \\
&= 0{,}09552...\,\text{P}\,.
\end{aligned}
$$

Resultando $\eta = (6{,}3 \pm 0{,}1)\,\text{P}$.

Número de Reynolds

Su expresión es

$$R(\rho,\ D,\ \eta,\ v_{\mathrm{m}}) = \frac{\rho v_{\mathrm{m}} D}{\eta}\,. \tag{A.8}$$

Calculamos su valor esperado y su error:

$$\begin{aligned}
\bar{R} &= R(\bar{\rho},\ \bar{D},\ \bar{\eta},\ \bar{v}_m) = \frac{\bar{\rho}\bar{v}_m\bar{D}}{\bar{\eta}} \\
&= \frac{(0{,}8913\,\mathrm{g/cm^3})(6{,}55\,\mathrm{cm/s})(0{,}275\,\mathrm{cm})}{6{,}3\,\mathrm{P}} = 0{,}254834\ldots\,, \\
\Delta R &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial R}{\partial \rho}\right|_{\bar{\rho},\,\bar{D},\ldots}\Delta\rho\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial D}\right|_{\bar{\rho},\,\bar{D},\ldots}\Delta D\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial \eta}\right|_{\bar{\rho},\,\bar{D},\ldots}\Delta\eta\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial R}{\partial v_{\mathrm{m}}}\right|_{\bar{\rho},\,\bar{D},\ldots}\Delta v_{\mathrm{m}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\bar{v}_{\mathrm{m}}\bar{D}}{\bar{\eta}}\Delta\rho\right)^2 + \left(\frac{\bar{\rho}\bar{v}_{\mathrm{m}}}{\bar{\eta}}\Delta D\right)^2 + \left(-\frac{\bar{\rho}\bar{v}_{\mathrm{m}}\bar{D}}{\bar{\eta}^2}\Delta\eta\right)^2 + \left(\frac{\bar{\rho}\bar{D}}{\bar{\eta}}\Delta v_{\mathrm{m}}\right)^2} \\
&= \left(\frac{\bar{\rho}\bar{v}_{\mathrm{m}}\bar{D}}{\bar{\eta}}\right)\sqrt{\left(\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{\bar{D}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta}{\bar{\eta}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{\mathrm{m}}}{\bar{v}_{\mathrm{m}}}\right)^2} \\
&= (0{,}254834\ldots)\sqrt{\left(\frac{0{,}0001\,\mathrm{g/cm^3}}{0{,}8913\,\mathrm{g/cm^3}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}001\,\mathrm{cm}}{0{,}275\,\mathrm{cm}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1\,\mathrm{P}}{6{,}3\,\mathrm{P}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}07\,\mathrm{cm/s}}{6{,}55\,\mathrm{cm/s}}\right)^2} \\
&= 0{,}00496\ldots
\end{aligned}$$

Resultando $R = 0{,}255 \pm 0{,}005$.

A.4. Determinación de la densidad de una bola

Valores de D^2

Hallamos los valores de D^2 para los datos. El error viene dado por

$$\Delta\left(D^2\right) = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial(D^2)}{\partial D}\right|_{\bar{D}}\Delta D\right)^2} = 2\bar{D}\Delta D\,.$$

Llegamos así a:

D (cm)	D^2 (cm^2)
$0{,}126 \pm 0{,}001$	$0{,}0159 \pm 0{,}0003$
$0{,}243 \pm 0{,}001$	$0{,}0590 \pm 0{,}0005$
$0{,}333 \pm 0{,}001$	$0{,}1109 \pm 0{,}0007$

Ajuste

Tenemos que ajustar

v_{lim} (cm/s)	D^2 (cm^2)
$2{,}0 \pm 0{,}1$	$0{,}0159 \pm 0{,}0003$
$7{,}5 \pm 0{,}1$	$0{,}0590 \pm 0{,}0005$
$14{,}3 \pm 0{,}2$	$0{,}1109 \pm 0{,}0007$

Hallamos todo lo que necesitamos:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0{,}1858\,\text{cm}^2\,, & \sum y_i &= 23{,}8\,\text{cm/s}\,, & \sum x_i y_i &= 2{,}06017\,\text{cm}^3/\text{s}\,, \\ \left(\sum x_i\right)^2 &= 0{,}03452164\,\text{cm}^4\,, & \left(\sum y_i\right)^2 &= 566{,}44\,\text{cm}^2/\text{s}^2\,, \\ \sum (x_i)^2 &= 0{,}0160326\,\text{cm}^4\,, & \sum (y_i)^2 &= 264{,}74\,\text{cm}^2/\text{s}^2\,, \\ \bar{x} &= 0{,}0619333...\,\text{cm}^2\,, & \bar{y} &= 7{,}9333...\,\text{cm/s}\,. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Ya podemos hallar la pendiente y la ordenada en el origen:

$$a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{N\sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{3 \times 2{,}06017 - 0{,}1858 \times 23{,}8}{3 \times 0{,}0160326 - 0{,}03452164}\,\text{cm}^{-1}\text{s}^{-1} = 129{,}5257...\,\text{cm}^{-1}\text{s}^{-1}\,, \tag{A.10}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = (7{,}9333...\,\text{cm/s}) - \left(129{,}5257...\,(\text{cm/s})^{-1}\right)\left(0{,}0619333...\,\text{cm}^2\right) = 0{,}08863...\,\text{cm/s}\,. \tag{A.11}$$

Seguimos con algunos cálculos auxiliares

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0{,}004525407\,\text{cm}^4\,, \qquad \sum \left(y_i - ax_i - b\right)^2 = 0{,}004288152\,\text{cm}^2/\text{s}^2\,, \tag{A.12}$$

que nos permiten rápidamente calcular los errores,

$$\begin{aligned} \Delta a &= \sqrt{\frac{\sum \left(y_i - ax_i - b\right)^2}{(N-2)\sum (x_i - \bar{x})^2}} \\ &= \sqrt{\frac{0{,}004288152\,\text{cm}^2/\text{s}^2}{0{,}004525407\,\text{cm}^4}} = 0{,}9734...\,\text{cm}^{-1}\text{s}^{-1}\,, \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned} \Delta b &= \Delta a \sqrt{\frac{1}{N}\sum (x_i)^2} \\ &= \left(0{,}9734...\,(\text{cm/s})^{-1}\right)\sqrt{\frac{1}{3} \times (0{,}0160326\,\text{cm}^4)} = 0{,}0712...\,\text{cm/s}\,, \end{aligned} \tag{A.14}$$

concluyendo así pues:

$$a = (130 \pm 1)\,\text{cm}^{-1}\text{s}^{-1}\,, \qquad b = (-0{,}09 \pm 0{,}07)\,\text{cm/s}\,. \tag{A.15}$$

Por último, el coeficiente de correlación es:

$$\begin{aligned} r &= \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_j}{\sqrt{N\sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2}\sqrt{N\sum (y_j)^2 - \left(\sum y_j\right)^2}} \\ &= \frac{3 \times (2{,}06017\,\text{cm}^3/\text{s}) - \left(0{,}1858\,\text{cm}^2\right)(23{,}8\,\text{cm/s})}{\sqrt{3 \times (0{,}0160326\,\text{cm}^4) - (0{,}03452164\,\text{cm}^4)}\sqrt{3 \times (264{,}74\,\text{cm}^2/\text{s}^2) - (566{,}44\,\text{cm}^2/\text{s}^2)}} \\ &= 0{,}999972 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Determinación del material de un juego de bolas

La expresión a utilizar es:

$$\lambda(a,\, \eta,\, g,\, \rho) = 18\frac{a\eta}{g} + \rho\,. \tag{A.17}$$

donde a es la pendiente de la recta de ajuste v_{lim} como función de D^2. Hallamos ahora el valor final y su error:

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= R(\bar{a},\, \bar{\eta},\, \bar{g},\, \bar{\rho}) = 18\frac{\bar{a}\bar{\eta}}{\bar{g}} + \bar{\rho} \\
&= 18 \times \frac{(130\,\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{s}^{-1})(2{,}90\,\mathrm{P})}{(981\,\mathrm{cm/s}^2)} + 0{,}8913\,\mathrm{g/cm}^3 = 7{,}80873...\,\mathrm{g/cm}^3\,, \\
\Delta\lambda &= \sqrt{\left(\left.\frac{\partial\lambda}{\partial a}\right|_{\bar{a},\,\bar{\eta},\ldots}\Delta a\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial\lambda}{\partial \eta}\right|_{\bar{a},\,\bar{\eta},\ldots}\Delta \eta\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial\lambda}{\partial g}\right|_{\bar{a},\,\bar{\eta},\ldots}\Delta g\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial\lambda}{\partial \rho}\right|_{\bar{a},\,\bar{\eta},\ldots}\Delta \rho\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(18\,\frac{\bar{\eta}}{\bar{g}}\Delta a\right)^2 + \left(18\,\frac{\bar{a}}{\bar{g}}\Delta \eta\right)^2 + \left(-18\,\frac{\bar{a}\bar{\eta}}{\bar{g}^2}\Delta g\right)^2 + (\Delta\rho)^2} \\
&= \sqrt{\left(18\,\frac{\bar{a}\bar{\eta}}{\bar{g}}\right)^2\left[\left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \eta}{\bar{\eta}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{\bar{g}}\right)^2\right] + (\Delta\rho)^2} \\
&= \sqrt{\left(6{,}917431...\,\mathrm{g/cm}^3\right)^2\left[\left(\frac{1\,\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{s}^{-1}}{130\,\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{s}^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}08\,\mathrm{P}}{2{,}90\,\mathrm{P}}\right)^2 + \left(\frac{1\ \mathrm{cm/s}^2}{981\ \mathrm{cm/s}^2}\right)^2\right] + \left(10^{-4}\,\mathrm{g/cm}^3\right)^2} \\
&= 0{,}198...\,\mathrm{g/cm}^3\,.
\end{aligned}$$

Resultando $\lambda = (7{,}8 \pm 0{,}2)\,\mathrm{g/cm}^3$.