[Versión 9 de julio de 2021]

Problemas resueltos de la relación 4 (Campo magnético)

Constantes: $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\mathrm{N/A^2}$.

Problema 1. Un protón ($m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme $\vec{B}$ a una velocidad $\vec{v} = (10^7\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{k}}$ y experimenta una aceleración de $2{,}00 \times 10^{13}\ \mathrm{m/s^2}$ en la dirección positiva del eje X. Determina la magnitud y dirección del campo magnético.

Solución

Primero introducimos

$$\vec{a} = a\hat{\boldsymbol{\imath}}\,, \qquad \text{donde} \qquad a = 2{,}00 \times 10^{13}\ \mathrm{m/s^2}\,, \tag{1}$$

$$\vec{v} = v\hat{\boldsymbol{k}}\,, \qquad \text{donde} \qquad v = 10^7\ \mathrm{m/s}\,. \tag{2}$$

La aceleración estará relacionada con la fuerza total aplicada sobre el protón mediante la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m_p\vec{a}\,. \tag{3}$$

La única fuerza que actúa sobre él es la fuerza electromagnética, por lo que la ley de fuerzas de Lorentz nos asegura que

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})\,. \tag{4}$$

Como no hay campo eléctrico solo hay contribución magnética y la ecuación a resolver es

$$q(\vec{v} \times \vec{B}) = m_p\vec{a}\,. \tag{5}$$

El campo magnético nos dicen que es uniforme, por lo que sus componentes serán constantes. Como todo está expresado en coordenadas cartesianas lo natural es expresar $\vec{B}$ en dicha base:

$$\vec{B} = B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}\,, \tag{6}$$

donde B_x, B_y y B_z son constantes. Pero también nos dicen que es perpendicular a la velocidad, por lo que $B_z = 0$.

Sustituimos en la ley de fuerzas de Lorentz:

$$q\left[v\hat{\boldsymbol{k}} \times (B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}})\right] = m_p a\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{7}$$

$$B_x\hat{\boldsymbol{\jmath}} - B_y\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{m_p a}{qv}\hat{\boldsymbol{\imath}}\,. \tag{8}$$

Y dos vectores son iguales si y solo si sus componentes son iguales,

$$B_x = 0\,, \qquad B_y = -\frac{m_p a}{qv} \simeq -20{,}875\ \mathrm{mT}\,. \tag{9}$$

Concluimos pues que el campo magnético viene dado por $\vec{B} = -20{,}875\ \mathrm{mT}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, por lo que la respuesta al problema es

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Módulo:} & |\vec{B}| & = 20{,}875\ \mathrm{mT} \\ \text{Dirección (y sentido):} & \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} & = -\hat{\boldsymbol{\jmath}} \end{array}}\,. \tag{10}$$

Problema 2. Un segmento de alambre de $10\ \mathrm{cm}$ de longitud transporta una corriente de $2\ \mathrm{A}$ en la dirección positiva del eje X. Debido a la presencia de un campo magnético $\vec{B}$, sobre el cable actúa una fuerza $\vec{F} = (3\hat{\boldsymbol{\jmath}}+2\hat{\boldsymbol{k}})\ \mathrm{N}$. Si el alambre se gira, de modo que la corriente fluya en la dirección positiva del eje Y, la fuerza sobre el alambre es $\vec{F} = (-3\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{k}})\ \mathrm{N}$. Determina el campo magnético $\vec{B}$.

Solución

Aunque no se nos dice explícitamente el campo magnético se supone que es constante. La fuerza magnética sobre una corriente filiforme viene dada por la integral

$$\vec{F} = \int_C I\,\mathrm{d}\vec{r} \times \vec{B}\,. \tag{11}$$

donde I es la intensidad de corriente que circula por el hilo y C es la curva descrita por la corriente y recorrida en el sentido de ésta. Como I es constante y el campo magnético también:

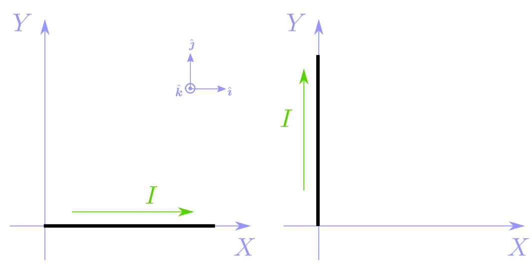
$$\vec{F} = I\left(\int_C \mathrm{d}\vec{r}\right) \times \vec{B} = I\vec{\ell} \times \vec{B}\,, \tag{12}$$

donde $\vec{\ell}$ es el vector que va del punto inicial del hilo al final en el sentido de la corriente.

Dado que todos vectores se nos dan en cartesianas, lo razonable es expresarlo en dicha base:

$$\vec{B} = B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}\,, \tag{13}$$

donde B_x, B_y y B_z son constantes.



Corriente sobre el eje X

En este caso $\vec{\ell} = L\hat{\boldsymbol{\imath}}$, con L la longitud de nuestro hilo recto, como puede comprobarse haciendo la integral,

$$\vec{\ell} = \int_C \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^L \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{\imath}} = L\hat{\boldsymbol{\imath}}\,. \tag{14}$$

Nos dicen que $\vec{F} = (3\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}})\ \mathrm{N}$, por lo que

$$(3\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}})\ \mathrm{N} = I(L\hat{\boldsymbol{\imath}}) \times (B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{15}$$

$$= IL(0 + B_y\hat{\boldsymbol{k}} - B_z\hat{\boldsymbol{\jmath}})\,. \tag{16}$$

de donde deducimos, igualando componentes,

$$B_y = \frac{2\ \mathrm{N}}{IL}\,, \qquad B_z = -\frac{3\ \mathrm{N}}{IL}\,. \tag{17}$$

Corriente sobre el eje Y

En este caso, razonando igual que en el caso anterior llegamos a $\vec{\ell} = L\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Usamos el dato que nos dan de fuerza magnética:

$$(-3\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{k}})\ \mathrm{N} = I(L\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \times (B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{18}$$

$$= IL(-B_x\hat{\boldsymbol{k}} + 0 + B_z\hat{\boldsymbol{\imath}}) \tag{19}$$

de donde deducimos, igualando componentes,

$$B_x = \frac{2\ \mathrm{N}}{IL}\,, \qquad B_z = -\frac{3\ \mathrm{N}}{IL}\,. \tag{20}$$

Últimos pasos

En resumen, hemos obtenido

$$B_x = \frac{3\ \mathrm{N}}{IL}\,, \qquad B_y = \frac{3\ \mathrm{N}}{IL}\,, \qquad B_z = -\frac{2\ \mathrm{N}}{IL}\,. \tag{21}$$

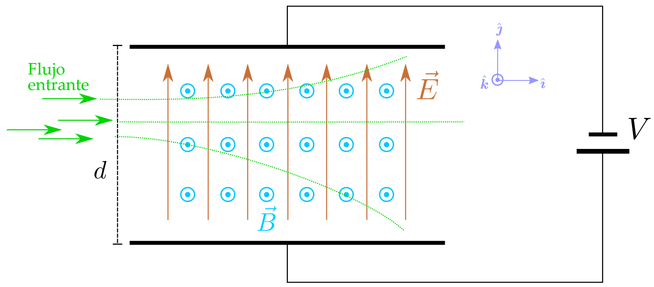
Sustituyendo $I = 2\ \mathrm{A}$ y $L = 10\ \mathrm{cm}$ llegamos a:

$$\boxed{\vec{B} = (10\hat{\boldsymbol{\imath}} + 10\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 15\hat{\boldsymbol{k}})\ \mathrm{T}}\,. \tag{22}$$

Problema 3. Un espectrómetro de masas se encuentra precedido por un selector de velocidad constituido por placas paralelas separadas entre sí 2 mm y entre las que hay una diferencia de potencial de 160 V. El campo magnético entre las placas es de 0,42 T. El campo magnético en el espectrómetro de masas es de 1,2 T. Calcula la velocidad con la que entran los iones en el espectrómetro, y la diferencia en los diámetros de las órbitas del ^{238}U y ^{235}U simplemente ionizados.

Solución

Selector de velocidades



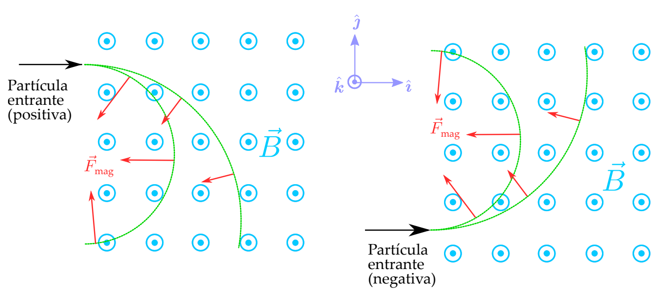
Como se ve en la figura, solo pasan aquellas partículas sobre las que la fuerza transversal se anula (en el dibujo, aquella en la dirección $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$).

$$0 = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q(E\hat{\boldsymbol{\jmath}}) + q(v\hat{\boldsymbol{\imath}}) \times (B\hat{\boldsymbol{k}}) = qE\hat{\boldsymbol{\jmath}} - qvB\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{E}{B}\,. \tag{23}$$

Y dado que el campo eléctrico en el selector de velocidades es el producido por dos placas plano paralelas cargadas a una diferencia de potencial V, $E = V/d$ donde d es la distancia entre placas. Finalmente,

$$v = \frac{V}{Bd} = \frac{160\ \mathrm{V}}{(0{,}42\ \mathrm{T})(0{,}002\mathrm{m})} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = 190{,}5\ \mathrm{km/s}}\,. \tag{24}$$

Espectrómetro de masas



La fuerza magnética es perpendicular al movimiento de las cargas, por lo que siempre actuará como una fuerza centrípeta. Usando la segunda ley de Newton (tomando módulos en los dos miembros):

$$|\vec{F}_{\text{mag}}| = m|\vec{a}_{\text{centrip}}| \qquad \Rightarrow \qquad qvB = m\frac{v^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{mv}{qB}\,, \tag{25}$$

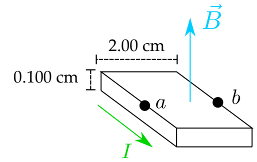
donde R es el radio de la trayectoria circular descrita por la partícula. Nos piden la diferencia de los diámetros de las trayectorias descritas por dos isótopos (distinta masa), que vendrá dada por

$$\Delta D = 2R(^{238}\mathrm{U}) - 2R(^{235}\mathrm{U}) = \frac{2v}{qB}(m_{^{238}\mathrm{U}} - m_{^{235}\mathrm{U}}) = \frac{2v}{qB}(3m_n)\,, \tag{26}$$

con m_n la masa del neutrón, pues dado que son isótopos, tienen el mismo número de protones (son el mismo elemento) y la diferencia entre los números másicos se debe únicamente a neutrones. Finalmente

$$\Delta D = \frac{6vm_n}{qB} = \frac{6(190{,}5\ \mathrm{km/s})(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})}{(1{,}6{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{C})(1{,}2\ \mathrm{T})} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta D = 9{,}94\ \mathrm{mm}}\,. \tag{27}$$

Problema 4. Una cinta de cobre de 2 cm de ancho y $0{,}1$ cm de espesor, lleva una corriente de 10 A y está situada en el interior de un campo magnético de 2 T, como se ve en la figura. Si la densidad de electrones libres en el cobre es de $8{,}47\times10^{22}$ electrones/cm^3, calcula: la velocidad de desplazamiento de los electrones en la cinta, y el voltaje de Hall. ¿Cuál de los dos puntos, a o b, se encuentra a mayor potencial?

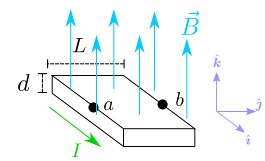


Solución

Velocidad

El módulo de la densidad de corriente viene dada por

$$J = \rho v = env\,, \tag{28}$$

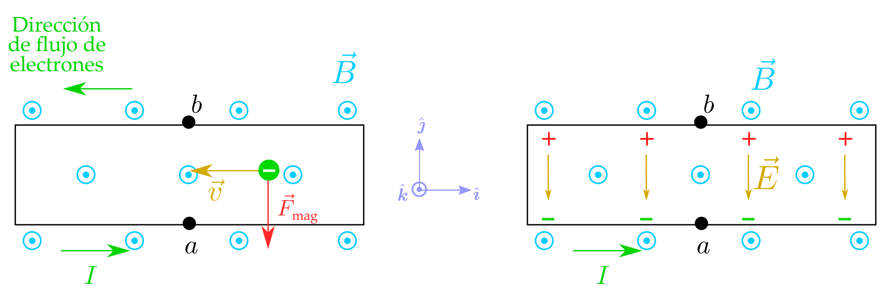


donde ρ es la densidad de carga, v la velocidad, e la carga elemental y n el número de portadores por unidad de volumen. Pero por otra parte sabemos que $I = JS$ con S la sección transversal atravesada por la densidad de corriente. Igualando:

$$env = \frac{I}{S} \quad\Rightarrow\quad v = \frac{I}{enS} = \frac{10\text{ A}}{(1{,}6\cdot10^{-19}\text{ C})(8{,}47\times10^{22}\text{ cm}^{-3})(0{,}1\text{ cm})(2\text{ cm})} \tag{29}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{v = \frac{25}{6776}\text{ cm/s} \qquad (\simeq 3{,}69\cdot10^{-5}\text{ m/s})} \tag{30}$$

Voltaje Hall y potenciales



Los portadores de carga involucrados aquí son negativos y se mueven (ver la figura) de derecha a izquierda, de modo que debido a la fuerza magnética que es vertical y hacia arriba, obtenemos

$$\boxed{V_b > V_a}\,. \tag{31}$$

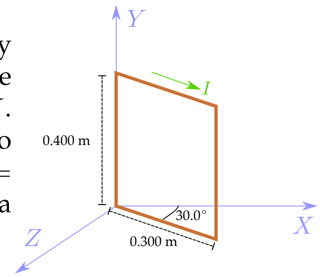
Una vez se ha alcanzado el equilibrio las dos fuerzas (eléctrica y magnética) se equilibran. Igualando módulos,

$$|\vec{F}_{\text{elec}}| = |\vec{F}_{\text{mag}}| \quad\Leftrightarrow\quad q\frac{V_{\text{Hall}}}{L} = qvB\,, \tag{32}$$

y despejando el voltaje Hall

$$V_{\text{Hall}} = vBL \quad\Rightarrow\quad \boxed{V_{\text{Hall}} \simeq 1{,}476\cdot10^{-6}\text{ V}}\,. \tag{33}$$

Problema 5. Una bobina rectangular está constituida por $N = 100$ vueltas muy apretadas y tiene como dimensiones $a = 0{,}40$ m y $b = 0{,}30$ m. La bobina se articula a lo largo del eje Y, y su plano forma un ángulo $\theta = 30{,}0°$ con el eje X. ¿Cuál es el momento del par ejercido sobre la bobina por un campo magnético uniforme $B = 0{,}80$ T dirigido a lo largo del eje X, cuando la corriente es $I = 1{,}20$ A en la dirección que se muestra en la figura? ¿Cuál es la dirección esperada de rotación de la bobina?



Solución

Recordatorio de teoría: par sobre una corriente filiforme cerrada en un campo magnético constante

El momento de par generado por un campo magnético constante sobre una corriente filiforme cerrada (formando una curva C, recorrida en el sentido de la corriente) es

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}\,, \tag{34}$$

donde $\vec{m}$ es el momento dipolar magnético de la distribución de corriente que viene dado por

$$\vec{m} = I \oint_C \frac{1}{2}\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{r}\,. \tag{35}$$

Pero en nuestro caso, por ser un circuito **plano**, la integral da justamente el vector superficie (perpendicular al plano de la corriente, con módulo la superficie interior del circuito y en el sentido del pulgar aplicando la regla de la mano derecha a la corriente),

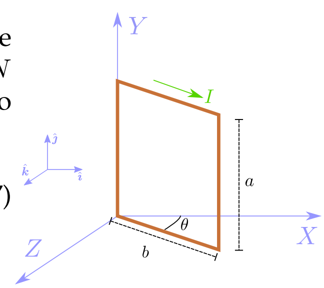
$$\vec{m} = I\vec{S}\,. \tag{36}$$

Volvemos al problema

En nuestro caso, no tenemos un circuito cerrado sino muchos (aproximadamente cerrados) comprimidos en una distancia muy pequeña. Asumimos que las N vueltas de la bobina están esencialmente superpuestas en el espacio, de modo que el momento del par es

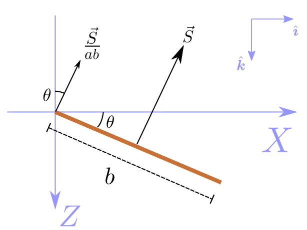
$$\vec{\tau} = N\vec{m} \times \vec{B} = NI\vec{S} \times \vec{B}\,. \tag{37}$$

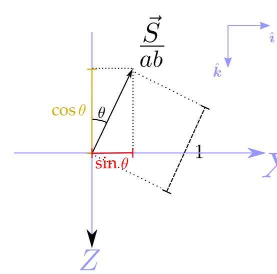
donde $\vec{m}$ se refiere al momento dipolar magnético de una sola vuelta.



No es difícil averiguar (ver figura) que

$$\vec{S} = \underbrace{ab}_{|\vec{S}|} \underbrace{(\sin\theta\hat{\boldsymbol{\imath}} - \cos\theta\hat{\boldsymbol{k}})}_{\text{versor con la dirección y sentido de } \vec{S}}\,. \tag{38}$$





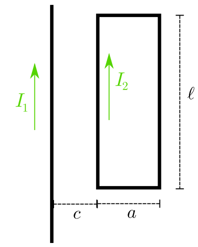
De modo que,

$$\vec{\tau} = NIab(\sin\theta\hat{\boldsymbol{\imath}} - \cos\theta\hat{\boldsymbol{k}}) \times (B\hat{\boldsymbol{\imath}}) = -NIabB\cos\theta\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,, \tag{39}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \left(-\frac{144\sqrt{3}}{25}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)\ \mathrm{N\,m} \qquad (\simeq (-9{,}98\hat{\boldsymbol{\jmath}})\ \mathrm{N\,m})}\,. \tag{40}$$

Dado que apunta en la dirección negativa del eje Y, la tendencia de la bobina debido a este momento será la de aumentar el ángulo θ.

Problema 6. La corriente que circula por el alambre largo y recto de la figura es $I_1 = 5$ A, y el alambre está colocado en el plano de la espira rectangular que transporta una corriente $I_2 = 10$ A. Las dimensiones son $c = 0{,}10$ m, $a = 0{,}15$ m y $\ell = 0{,}45$ m. Determina la magnitud y la dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético producido por el alambre.



Solución

El primer paso es calcular el el campo magnético producido por el alambre que asumiremos infinito.

Campo magnético de una corriente filiforme rectilínea infinita. Método 1 (ley de Biot-Savart)

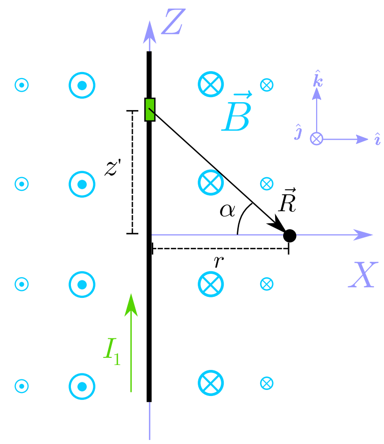
En general la ley de Biot-Savart es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3} . \tag{41}$$

que para una corriente filiforme siguiendo una curva C y con intensidad I_1 se reduce a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_C \frac{\mathrm{d}\vec{r} \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3} . \tag{42}$$

En nuestro caso la corriente es rectilínea, así que tomamos el eje Z sobre la corriente de modo que ésta se dirija hacia las z positivas.



Por la simetría cilíndrica del problema sabemos que el campo magnético debe ser de la forma

$$\vec{B} = B_\varphi(\rho) \hat{\boldsymbol{\varphi}} . \tag{43}$$

Elegimos pues sin pérdida de generalidad el punto test de coordenadas $(x, y, z) = (r, 0, 0)$ o, en cilíndricas $(\rho, \varphi, z) = (r, 0, 0)$. Al habernos restringido al semiplano XZ con $x > 0$, la base cilíndrica coincide con la base cartesiana como sigue,

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} , \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (\text{en } y = 0 \text{ y } x > 0) . \tag{44}$$

La ley de Biot-Savart nos da el campo magnético siguiente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z' \hat{\boldsymbol{k}} \times (r\hat{\boldsymbol{\imath}} - z'\hat{\boldsymbol{k}})}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 r \hat{\boldsymbol{\jmath}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \overset{!}{=} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\jmath}} , \tag{45}$$

donde en ! hemos usado

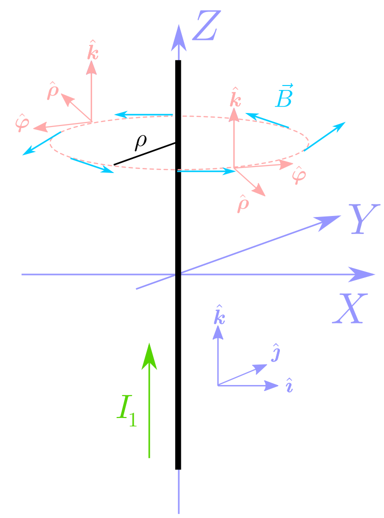
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{rl} z' & = r \tan\alpha \\ \mathrm{d}z' & = \frac{r}{\cos^2\alpha} \mathrm{d}\alpha \end{array} \right\} \tag{46}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\frac{r}{\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha}{(r^2 + r^2\tan^2\alpha)^{3/2}} = \frac{1}{r^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha (1 + \tan^2\alpha)^{3/2}} = \frac{1}{r^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\alpha \mathrm{d}\alpha = \frac{2}{r^2} . \tag{47}$$

En general (para cualquier punto del espacio) tendremos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} . \tag{48}$$

Campo magnético de una corriente filiforme rectilínea infinita. Método 2 (ley de Ampère)



Dada la simetría cilíndrica del problema sabemos que $\vec{B} = B_\varphi(\rho)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. La ley de Ampère nos dice que

$$\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_{\text{total}}\,. \tag{49}$$

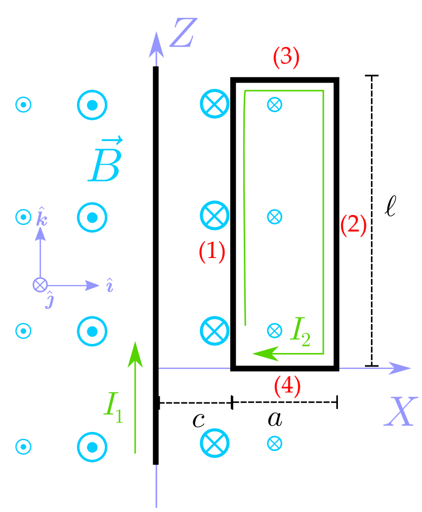
donde C es cualquier camino cerrado e I_{total} es la intensidad total que atraviesa C en el sentido dado por la regla de la mano derecha. Eligiendo un camino circular de radio ρ alrededor del hilo obtenemos:

$$\oint_C \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} (B_\varphi(\rho)\hat{\boldsymbol{\varphi}})\cdot(\rho \mathrm{d}\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \rho B_\varphi(\rho)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi\rho B_\varphi(\rho)\,, \tag{50}$$

por otro lado sabemos que $I_{\text{total}} = I_1$, luego

$$B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{51}$$

Fuerza sobre la espira



Como ya conocemos el campo magnético del hilo, ya podemos olvidarnos de él y reducir el problema al cálculo de la fuerza sobre una espira que se halla inmersa en un campo magnético. Consideremos que la espira está en el plano XZ dispuesta como en la figura. El campo magnético restringido a esa región es (donde sustituimos I por el dato I_1)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,. \tag{52}$$

La fuerza total sobre la espira será la suma de las fuerzas sobre cada uno de sus lados.

- Sobre los lados izquierdo (1) y derecho (2), para los que elegimos como parámetros z y $\tau = -z$ respectivamente, obtenemos

$$\vec{F}_{(1)} = I_2\int_0^\ell (\mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{k}})\times\vec{B} = I_2\int_0^\ell \mathrm{d}z(-\hat{\boldsymbol{\imath}})\frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi c}\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{53}$$

$$\vec{F}_{(2)} = I_2\int_{-\ell}^0 (-\mathrm{d}\tau\hat{\boldsymbol{k}})\times\vec{B} = I_2\int_{-\ell}^0 \mathrm{d}\tau\hat{\boldsymbol{\imath}}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(c+a)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi(c+a)}\hat{\boldsymbol{\imath}} \tag{54}$$

- La fuerza en el lado de arriba se va a cancelar con la fuerza en el lado de abajo por simetría, como puede comprobarse haciendo el cálculo (usamos como parámetros x y $\tau = -x$ respectivamente):

$$\vec{F}_{(3)} = I_2\int_c^{c+a}(\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{\imath}})\times\vec{B}(x) = I_2\int_c^{c+a}\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{k}}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{c+a}{c}\hat{\boldsymbol{k}}\,, \tag{55}$$

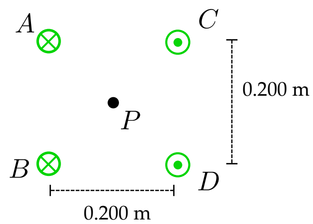
$$\vec{F}_{(4)} = I_2\int_{-(c+a)}^{-c}(-\mathrm{d}\tau\hat{\boldsymbol{\imath}})\times\vec{B}(x(\tau)) \overset{!}{=} I_2\int_{c+a}^{c}\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{k}}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} = -\vec{F}_{(3)}\,, \tag{56}$$

  donde en ! hemos vuelto a la variable x.

La fuerza neta es:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_{(i)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi}\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{c}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{\ell a}{c(c+a)}\hat{\boldsymbol{\imath}} \qquad = (-2{,}7{\cdot}10^{-5}\hat{\boldsymbol{\imath}})\ \mathrm{N}}\,. \tag{57}$$

Problema 7. Cuatro conductores largos y paralelos transportan corrientes iguales de $I = 5{,}00$ A. La figura muestra un extremo de los conductores y los sentidos de las corrientes. a) Calcula la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P, localizado en el centro del cuadrado de $0{,}20$ m de lado. b) Determina la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre uno de los conductores.



Solución

a) Sea L el lado del cuadrado. Fijamos una base cartesiana y empezamos utilizando la fórmula del campo magnético de una corriente filiforme rectilínea infinita

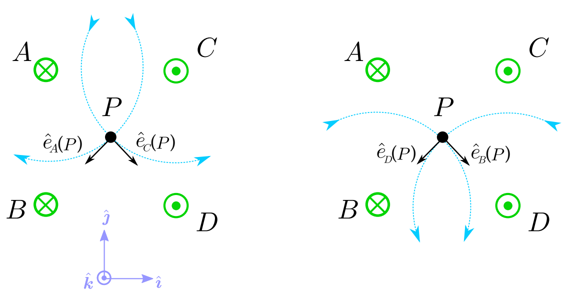
$$\vec{B}(a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{e}}(a)\,. \tag{58}$$

donde r es la distancia del punto test a al hilo y $\hat{\mathbf{e}}(a)$ es el versor angular (en el punto a) alrededor de la corriente de forma que ésta verifique la regla de la mano derecha. Para nuestro punto $a = P$ tenemos $r = \frac{\sqrt{2}}{2}L$ para todas las corrientes. Lo único que varía de unas a otras es el versor $\hat{\mathbf{e}}$. El campo magnético en P tendrá la forma, sumando los de todas las corrientes (que son iguales y de valor I):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\frac{\sqrt{2}}{2}L}(\hat{\boldsymbol{e}}_A(P) + \hat{\boldsymbol{e}}_B(P) + \hat{\boldsymbol{e}}_C(P) + \hat{\boldsymbol{e}}_D(P)), \tag{59}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi L}(\hat{\boldsymbol{e}}_A(P) + \hat{\boldsymbol{e}}_B(P) + \hat{\boldsymbol{e}}_C(P) + \hat{\boldsymbol{e}}_D(P)) \tag{60}$$

Solo nos queda hallar los versores.



Como se ve en la figura la regla de la mano derecha fija las direcciones (todos forman 45º con los ejes coordenados), y usando el seno y el coseno de 45º, se comprueba que:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_A(P) = \hat{\boldsymbol{e}}_D(P) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}})\ , \tag{61}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_C(P) = \hat{\boldsymbol{e}}_B(P) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}})\ , \tag{62}$$

Luego

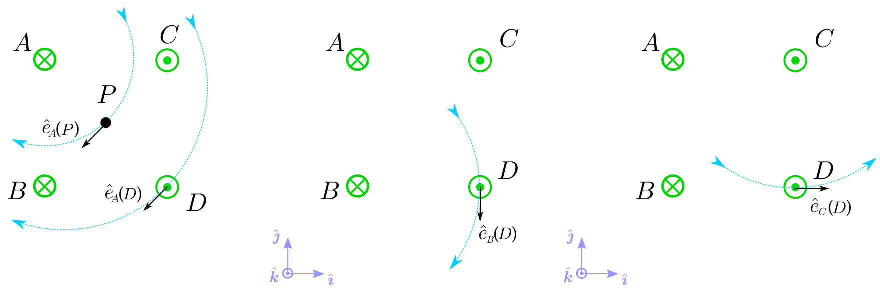
$$\vec{B}(P) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi L}[-\sqrt{2}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}) + \sqrt{2}(\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}})] = -\frac{2\mu_0 I}{\pi L}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,, \tag{63}$$

por lo que la respuesta al problema es

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Módulo:} & |\vec{B}| & = \frac{2\mu_0 I}{\pi L} = 0{,}02\ \mathrm{mT} \\ \text{Dirección (y sentido):} & \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} & = -\hat{\boldsymbol{\jmath}} \end{array}}\,. \tag{64}$$

b) Lo primero es conocer el campo magnético sobre el hilo considerado. Vamos a elegir el hilo D (llamaremos D al punto correspondiente). Observa que ahora la distancia a los otros tres hilos es distinta en cada caso. El campo total creado ellos en D es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{2}L}\hat{\boldsymbol{e}}_A(D) + \frac{1}{L}\hat{\boldsymbol{e}}_B(D) + \frac{1}{L}\hat{\boldsymbol{e}}_C(D)\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi L}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_A(D) + \hat{\boldsymbol{e}}_B(D) + \hat{\boldsymbol{e}}_C(D)\right]. \tag{65}$$



De nuevo, no es difícil comprobar que

$$\hat{\boldsymbol{e}}_A(D) = \hat{\boldsymbol{e}}_A(P) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}), \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_C(D) = \hat{\boldsymbol{\imath}}, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_B(D) = -\hat{\boldsymbol{\jmath}}. \tag{66}$$

Entonces el campo magnético sobre el hilo D (en cualquiera de sus puntos) es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L}\left[-\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}) + \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}(\hat{\boldsymbol{\imath}} - 3\hat{\boldsymbol{\jmath}}). \tag{67}$$

La fuerza sobre un segmento del hilo D de longitud ℓ será

$$\vec{F} = I\int_0^\ell \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{k}} \times \vec{B} = I\int_0^\ell \mathrm{d}z\frac{\mu_0 I}{4\pi L}(\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{\imath}}) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi L}(\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{\imath}})\int_0^\ell \mathrm{d}z = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi L}(\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{\imath}}). \tag{68}$$

Aquí hemos usado que la corriente en D va en el sentido de $\hat{\boldsymbol{k}}$. Si fuese al revés tendríamos que integrar $\int_{-\ell}^0$ en la variable $\tau = -z$ y nos saldría lo mismo pero con un menos. De modo que la fuerza por unidad de longitud será:

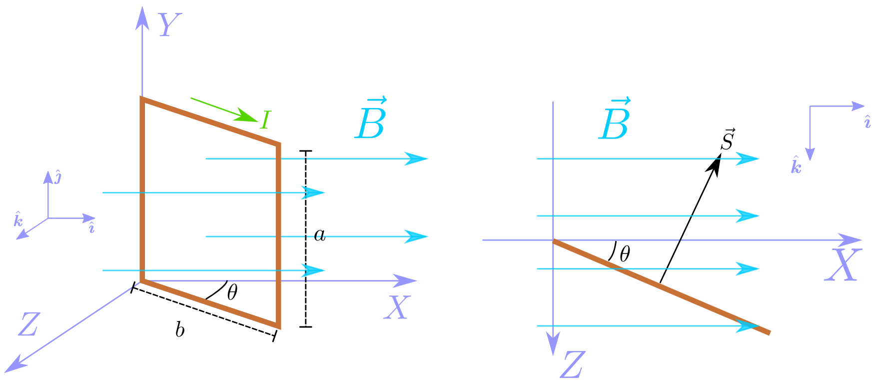
$$\boxed{\frac{\vec{F}}{\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi L}(\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{\imath}})}, \tag{69}$$

y sustituyendo los datos:

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{\ell} = \left(\frac{1}{8}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{3}{8}\hat{\boldsymbol{\imath}}\right)\cdot 10^{-4}\ \mathrm{N/m} \quad \simeq (1{,}25\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3{,}75\hat{\boldsymbol{\imath}})\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N/m}}. \tag{70}$$

Problema 8. Calcula el flujo de campo magnético a través de la bobina rectangular del problema 5 si el ángulo que forma el plano de la bobina con el eje X es de $0°$, $90°$ o los $30°$ de la figura.

Solución



Lo mejor aquí es calcular la fórmula general, en función del ángulo, y luego sustituir. Para un ángulo θ arbitrario, ya vimos en el problema que el vector superficie es[1]

$$\vec{S} = ab(\sin\theta\hat{\boldsymbol{\imath}} - \cos\theta\hat{\boldsymbol{k}})\,. \tag{71}$$

El flujo del campo magnético $\vec{B} = B\hat{\boldsymbol{\imath}}$ (con $B = 0{,}8\ \mathrm{T}$) es

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\,. \tag{72}$$

Pero como $\vec{B}$ es un campo constante sale de la integral

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \vec{B}\cdot\int_S \mathrm{d}\vec{S} = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\left[ab(\sin\theta\hat{\boldsymbol{\imath}} - \cos\theta\hat{\boldsymbol{k}})\right]\,, \tag{73}$$

y la fórmula final del flujo es

$$\Phi_{\mathrm{m}}(\theta) = Bab\sin\theta\,. \tag{74}$$

Luego

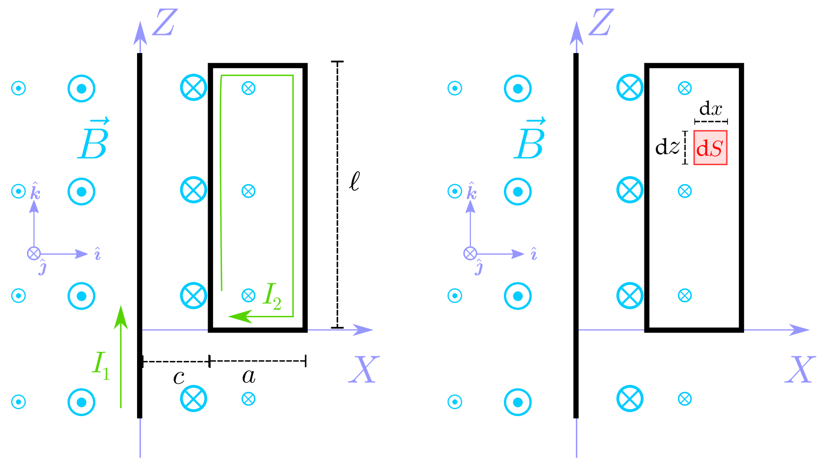
$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{m}}(0) &= 0 \\ \Phi_{\mathrm{m}}(\pi/6) &= \tfrac{1}{2}Bab &&= \tfrac{6}{125}\ \mathrm{T\,m^2} = 0{,}048\ \mathrm{T\,m^2} \\ \Phi_{\mathrm{m}}(\pi/2) &= Bab &&= \tfrac{12}{125}\ \mathrm{T\,m^2} = 0{,}096\ \mathrm{T\,m^2} \end{aligned}}\,. \tag{75}$$

El signo del flujo hubiera cambiado con la otra elección de $\vec{S}$. El $\vec{S}$ elegido para el rango $0°$ - $90°$ tiene componente x apuntando hacia las x positivas, hacia donde apunta el campo magnético de ahí que los flujos sean positivos. Cuando el ángulo es $0°$, el campo magnético es tangente a la superficie (o sea perpendicular al vector $\vec{S}$) y por tanto no hay líneas de $\vec{B}$ atravesando la superficie, dando así flujo nulo.

[1]Para este problema podría haberse elegido también $-\vec{S}$ como vector superficie, da igual, mientras se sepa interpretar el resultado. En el otro problema esto no era posible porque lo que necesitábamos era el $\vec{S}$ que aparece en la fórmula del momento dipolar que ese SIEMPRE se elige según la dirección de movimiento de la corriente en la espira.

Problema 9. Calcula el flujo de campo magnético producido por el alambre del problema 6, a través de la espira rectangular próxima al alambre.

Solución



La expresión del campo magnético es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,, \tag{76}$$

y el diferencial de superficie (si lo elegimos en el sentido de $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$) será

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \mathrm{d}z\mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,. \tag{77}$$

Con todo ello ya podemos calcular el flujo:

$$\Phi_\mathrm{m} = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_S \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\cdot\mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{\jmath}} \tag{78}$$

$$= \int_0^\ell \mathrm{d}z\int_c^{c+a}\mathrm{d}x\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \tag{79}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_0^\ell \mathrm{d}z\int_c^{c+a}\mathrm{d}x\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Phi_\mathrm{m} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\ell\ln\frac{c+a}{c}}\,. \tag{80}$$

Sustituyendo los datos:

$$\boxed{\Phi_\mathrm{m} \simeq 4{,}12\times 10^{-7}\ \mathrm{T\,m^2}}\,. \tag{81}$$