[Versión 9 de julio de 2021]

Problemas resueltos de la relación 1 (Campo eléctrostático)

En todos los problemas tomamos $K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9{\cdot}10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$

Problema 6. Una carga lineal infinita y de densidad lineal uniforme $\lambda = -1{,}5\ \mu\mathrm{C/m}$ es paralela al eje Y en $x = -2$ m. Una carga puntual de $-1{,}3\ \mu$C está localizada en $x = 1$ m, $y = 2$ m. Determina el campo eléctrico en $x = 2$ m, $y = 1{,}5$ m.

Solución

Nos piden el campo eléctrico creado por una distribución de cargas compuesta por una carga puntual $q = -1{,}3\ \mu$C y una línea de carga de densidad λ. Si llamamos $p \equiv \left(2,\ \frac{3}{2}\right)$ m a nuestro punto test, por el principio de superposición:

$$\vec{E}(p) = \vec{E}_q(p) + \vec{E}_{\text{lin}}(p)\,. \tag{1}$$

- Campo de la carga puntual. Usamos la ley de Coulomb teniendo en cuenta que el vector que va de q al punto test p es

$$\vec{R}_q = \left(2\hat{\boldsymbol{\imath}} + \tfrac{3}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)\ \mathrm{m} - \left(\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)\ \mathrm{m} = \left(\hat{\boldsymbol{\imath}} - \tfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)\ \mathrm{m} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \qquad |\vec{R}_q| = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{\sqrt{5}}{2}\ \mathrm{m} \tag{3}$$

o sea

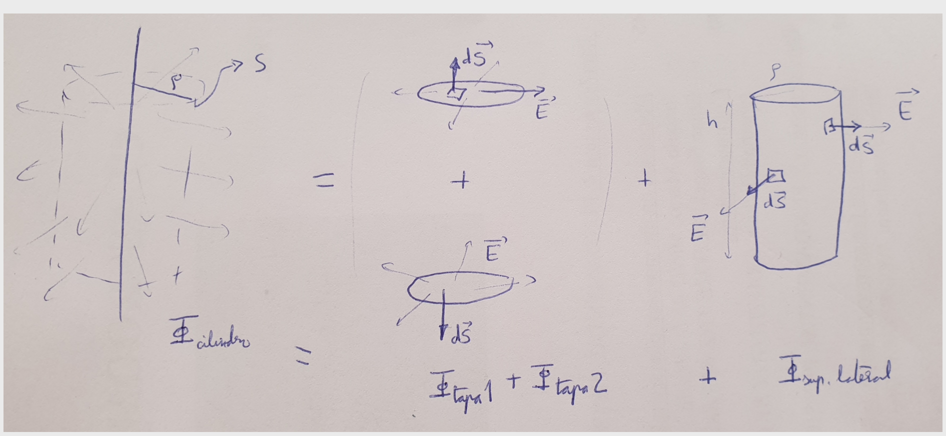
$$\vec{E}_q(p) = K_0 \frac{q}{|\vec{R}_q|^3}\vec{R}_q \simeq \frac{8}{5\sqrt{5}}(9\cdot 10^9)(-1{,}3\cdot 10^{-6})\left(\hat{\boldsymbol{\imath}} - \tfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)\ \mathrm{N/C} \quad \simeq \quad 8371{,}8\left(-\hat{\boldsymbol{\imath}} + \tfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)\ \mathrm{N/C}\,. \tag{4}$$

- Campo de la línea de carga.

(Cuentas Aparte)
En tres dimensiones, la línea de carga es una distribución con simetría cilíndrica, por lo que que el campo eléctrico debe ser radial (dirección de $\hat{\boldsymbol{\rho}}$) (!) y solo puede depender de la distancia a la línea de carga (ρ) (!!):

$$\vec{E}_{\text{lin}} = E_\rho(\rho,\varphi,z)\hat{\boldsymbol{\rho}} + E_\varphi(\rho,\varphi,z)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + E_z(\rho,\varphi,z)\hat{\boldsymbol{k}} \quad \stackrel{!}{=} \quad E_\rho(\rho,\varphi,z)\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \stackrel{!!}{=} \quad E_\rho(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}\,. \tag{5}$$

Aprovechamos la simetría para aplicar la ley de Gauss pues los flujos son casi triviales de calcular cuando la simetría es elevada. Envolvemos parte de la distribución con una superficie adecuada, que será un cilindro con eje el eje de la línea de carga, radio ρ y altura h. Aplicamos la ley de Gauss:



$$\Phi_{\text{cilindro}} = \oint_{\text{cilindro}} \vec{E}_{\text{lin}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Phi_{\text{tapa1}} + \Phi_{\text{tapa2}} + \Phi_{\text{sup.lateral}} \,. \tag{6}$$

- Como el campo eléctrico es perpendicular al vector superficie en las tapas el flujo es cero:

$$\Phi_{\text{tapa1}} = \int_{\text{tapa1}} \underbrace{\vec{E}_{\text{lin}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{0} = 0 \,, \qquad \Phi_{\text{tapa2}} = \int_{\text{tapa2}} \underbrace{\vec{E}_{\text{lin}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}_{0} = 0 \,. \tag{7}$$

- En la superficie lateral, el campo eléctrico tiene la misma dirección que el vector superficie elemental $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$,

$$\Phi_{\text{sup.lateral}} = \int_{\text{sup.lateral}} \vec{E}_{\text{lin}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\text{sup.lateral}} E_\rho(\rho)\mathrm{d}S \underbrace{\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}}_{|\hat{\boldsymbol{\rho}}|^2=1} = \int_{\text{sup.lateral}} E_\rho(\rho)\mathrm{d}S \,. \tag{8}$$

  Ahora usamos que la componente radial del campo E_ρ es constante en toda la superficie lateral y sale de la integral

$$\Phi_{\text{sup.lateral}} = E_\rho(\rho) \int_{\text{sup.lateral}} \mathrm{d}S = E_\rho(\rho) \times (\text{Area de la sup. lateral}) = E_\rho(\rho) \times 2\pi\rho h \,. \tag{9}$$

Ya solo queda aplicar la ley de Gauss,

$$\boxed{\Phi_S = \frac{\text{Carga total encerrada por } S}{\varepsilon_0}} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_{\text{cilindro}} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \,. \tag{10}$$

Sustituyendo el flujo despejamos el campo eléctrico en todo el espacio tridimensional:

$$2\pi\rho h E_\rho(\rho) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} = K_0 \frac{2\lambda}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}_{\text{lin}} = K_0 \frac{2\lambda}{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} \,. \tag{11}$$

En nuestro caso, como estamos confinados en el plano XY y nuestro punto de interés está a la derecha del hilo de carga, $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ no es otra cosa que el versor $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y el ρ de nuestro punto p es la distancia de él al hilo cargado que es 4 m. De modo que:

$$\vec{E}_{\text{lin}}(p) \simeq (9 \cdot 10^9) \frac{2(-1{,}5 \cdot 10^{-6})}{4} \hat{\boldsymbol{\imath}} \text{ N/C} = -6750 \hat{\boldsymbol{\imath}} \text{ N/C} \,. \tag{12}$$

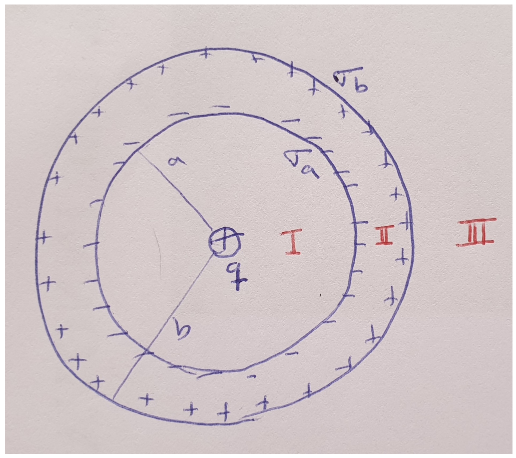
La solución al problema es la suma de ambos campos:

$$\vec{E}(p) = \vec{E}_q(p) + \vec{E}_{\text{lin}}(p) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E}(p) \simeq (-15121{,}8\hat{\boldsymbol{\imath}} + 4185{,}9\hat{\boldsymbol{\jmath}}) \text{ N/C}} \,. \tag{13}$$

Problema 7. Una carga puntual positiva de $2{,}5\ \mu\mathrm{C}$ se encuentra en el centro de una corteza conductora esférica descargada, de radio interior $60\ \mathrm{cm}$ y de radio exterior $90\ \mathrm{cm}$.
a) Determina el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.
b) Determina las densidades de carga sobre las superficies interior y exterior de la corteza.
c) Repetir el problema para el caso en que una carga neta de $+3{,}5\ \mu\mathrm{C}$ se sitúe sobre la corteza.

Solución

Como siempre empezamos poniendo nombre a todo lo que nos dan. Llamamos $q = 2{,}5\ \mu\mathrm{C}$ a la carga situada en el centro de la esfera (donde ubicaremos el origen de coordenadas) y a y b respectivamente a sus radios interior y exterior.



Análisis previo. Los conductores (perfectos) tienen la propiedad de que instantáneamente anulan en campo en su interior redistribuyendo sus cargas libres (electrones). De modo que en la situación del problema, la carga que está en el centro de la cavidad esférica va a llenar todo el espacio con su campo y, en respuesta, en la superficie interior de la corteza conductora se va a inducir una carga superficial uniforme σ_a (de signo contrario a q) que va a anular el campo en el seno de la corteza conductora. Como consecuencia en su superficie exterior quedarán al descubierto los núcleos correspondientes dando lugar a otra densidad superficial (uniforme) de carga, σ_b, (de signo contrario a la anterior).

a) Por la simetría esférica del problema, el campo eléctrico debe ser radial y depender solo de la distancia al origen:

$$\vec{E} = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}\,. \tag{14}$$

El espacio está divido en tres regiones por la corteza conductora, por lo que tendremos que estudiar cada una por separado.

- Región I. $r < a$. Dentro de la cavidad, las cargas superficiales σ_a y σ_b inducidas en el conductor al ser uniformes no producen campo por la ley de Gauss. Solo hay que tener en cuenta la carga puntual, por lo que:

$$\vec{E}_{\mathrm{I}} = K_0\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \simeq (22{,}5{\cdot}10^3\ \mathrm{N\,m^2/C})\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\,. \tag{15}$$

- Región II. $a < r < b$. Se trata del interior del conductor por lo que

$$\vec{E}_{\mathrm{II}} = 0\,. \tag{16}$$

- Región III. $r > b$. El problema tiene simetría esférica y usamos que, por la ley de Gauss, el campo en el exterior de una superficie esférica cargada es igual al campo que crearía si estuviese toda ella concentrada en su centro. Dado que la carga total distribuida en σ_a debe cancelar la de σ_b (pues el conductor inicialmente estaba descargado), solamente q contribuirá al campo, de modo que:

$$\vec{E}_{\mathrm{III}} = K_0\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \simeq (22{,}5{\cdot}10^3\ \mathrm{N\,m^2/C})\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\,. \tag{17}$$

El resultado es pues

$$\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} (22{,}5{\cdot}10^3\ \mathrm{N\,m^2/C})\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} & \text{si } r < a \text{ o } r > b \\ 0 & \text{si } a < r < b \end{cases}} \tag{18}$$

b)

- Para determinar la densidad en la superficie interior σ_a sabemos que debe ser tal que anule el efecto de q en la región II. Consideremos un r cualquiera entre a y b. El campo en ese punto por la ley de Gauss es

$$\vec{E}_{\mathrm{II}}(r) = \vec{E}_q(r) + \vec{E}_{\sigma_a}(r) = K_0 \frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} + K_0 \frac{Q_a}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\,. \tag{19}$$

donde $Q_a = \sigma_a 4\pi a^2$ es toda la carga acumulada en la superficie interior. Imponiendo que $\vec{E}_{\mathrm{II}}(r) = 0$, tenemos

$$0 = K_0 \frac{q}{r^2} + K_0 \frac{\sigma_a 4\pi a^2}{r^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2} \simeq -5{,}5{\cdot}10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}}\,. \tag{20}$$

- Para determinar la densidad en la superficie exterior σ_b usamos que la carga total en ambas superficies debe cancelar porque el conductor inicialmente estaba descargado:

$$0 = \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma_b = -\sigma_a \frac{a^2}{b^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\sigma_b = \frac{q}{4\pi b^2} \simeq 2{,}46{\cdot}10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}} \tag{21}$$

c)

- Campo eléctrico. Razonamos exactamente igual que en el apartado a). La ley de Gauss y las propiedades de los conductores nos llevan a lo mismo en las regiones I y II:

$$\vec{E}_{\mathrm{I}} = K_0 \frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \simeq (22{,}5{\cdot}10^3\ \mathrm{N\,m^2/C})\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\,, \qquad \vec{E}_{\mathrm{II}} = 0\,. \tag{22}$$

En cambio, en la región III ahora no podemos ignorar la influencia de la corteza conductora ya que su carga total no cancela debido a que se ha inyectado una carga $\bar{q} = 3{,}5\ \mu\mathrm{C}$ y no es, por tanto, globalmente neutra. Por la ley de Gauss, llevamos toda la carga al centro de la esfera y obtenemos:

$$\vec{E}_{\mathrm{III}} = K_0 \frac{q + \bar{q}}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \simeq (54{\cdot}10^3\ \mathrm{N\,m^2/C})\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\,. \tag{23}$$

Concluimos entonces que el campo en todo el espacio es:

$$\boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} (22{,}5{\cdot}10^3\ \mathrm{N\,m^2/C})\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} & \text{si } r < a \\ 0 & \text{si } a < r < b \\ (54{\cdot}10^3\ \mathrm{N\,m^2/C})\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} & \text{si } r > b \end{cases}} \tag{24}$$

- Para la densidad de carga en la superficie interior ocurre exactamente lo mismo que en el apartado b) y se llega al mismo resultado:

$$\boxed{\sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2} \simeq -5{,}5{\cdot}10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}}\,. \tag{25}$$

- Pero ahora al calcular la de la superficie exterior usamos que la carga total en ambas superficies no cancela sino que da $\bar{q}$:

$$\bar{q} = \sigma_a 4\pi a^2 + \sigma_b 4\pi b^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma_b = \frac{\bar{q}}{4\pi b^2} - \sigma_a \frac{a^2}{b^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\sigma_b = \frac{\bar{q} + q}{4\pi b^2} \simeq 5{,}89 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}} \tag{26}$$

Problema 8. Calcula el potencial eléctrico en los dos puntos $x = 1$ m, $y = 0$ y $x = -1$ m, $y = 0$, de los apartados (a) y (b) del problema 3.

Solución

Le ponemos nombre a los puntos test $A = (1,\, 0)$ m y $B = (-1,\, 0)$ m. En el problema 3 estábamos en el plano XY con dos cargas $q_1 = -5\ \mu$C y $q_2 = 12\ \mu$C situadas respectivamente en $(4,\, -2)$ m y $(1,\, 2)$ m.

El potencial en un punto cualquiera es la suma de los potenciales creados por cada carga (consecuencia del principio de superposición).

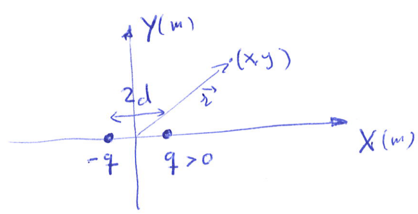
$$V(p) = K_0 \left[\frac{q_1}{R_1(p)} + \frac{q_1}{R_2(p)} \right] + c\,, \tag{27}$$

donde $R_i(p)$ (con $i = 1, 2$) es la distancia de q_i a p, y donde c es una constante arbitraria que representa el potencial en el infinito. Si, como es usual en este tipo de situaciones, se elige $c = 0$, obtenemos:

$$V(A) = K_0 \left[\frac{q_1}{R_1(A)} + \frac{q_1}{R_2(A)} \right] = K_0 \left[\frac{-5\ \mu\text{C}}{\sqrt{3^2 + 2^2}\ \text{m}} + \frac{12\ \mu\text{C}}{2\ \text{m}} \right] \Rightarrow \boxed{V(A) \simeq 4{,}15{\cdot}10^3\ \text{V}} \tag{28}$$

$$V(B) = K_0 \left[\frac{q_1}{R_1(B)} + \frac{q_1}{R_2(B)} \right] = K_0 \left[\frac{-5\ \mu\text{C}}{\sqrt{5^2 + 2^2}\ \text{m}} + \frac{12\ \mu\text{C}}{\sqrt{2^2 + 2^2}\ \text{m}} \right] \Rightarrow \boxed{V(B) \simeq 2{,}98{\cdot}10^3\ \text{V}} \tag{29}$$

Problema 9. Un dipolo eléctrico se encuentra alineado con el eje X. a) Calcula el potencial eléctrico creado por el dipolo en cualquier punto del plano XY. b) A partir de ese resultado, encuentra la expresión del campo eléctrico creado por el dipolo en cualquier punto del plano. c) ¿Cuánto vale el campo eléctrico a una distancia y del centro del dipolo?



Solución

a) Ubicamos la carga positiva del dipolo q en el punto $(d,\, 0)$ del plano y a la negativa de valor $-q$ en el $(-d,\, 0)$. Si referimos los potenciales al infinito, por el principio de superposición tendremos el siguiente potencial para un punto arbitrario $\vec{r} = (x,\, y)$:

$$V(\vec{r}) = K_0 \left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} \right] = K_0 \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2xd}} + \frac{-q}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2xd}} \right], \tag{30}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia a la que está el punto test del centro del dipolo (el origen de coordenadas en nuestro caso).

En el dipolo se asume que d es muy pequeño en comparación con la distancia r, por lo que podemos despreciar d^2 en el denominador (!):

$$V(\vec{r}) \overset{!}{\simeq} K_0 q \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2xd}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2xd}} \right] = \frac{K_0 q}{r} \left[\left(1 - \frac{2xd}{r^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{2xd}{r^2}\right)^{-1/2} \right] \tag{31}$$

$$\overset{!!}{\simeq} \frac{K_0 q}{r} \left[1 + \frac{xd}{r^2} - 1 + \frac{xd}{r^2} \right]. \tag{32}$$

Mientras que en !! hemos usado que al ser $s \equiv \frac{2xd}{r^2}$ próximo a cero, podemos aprovechar el desarrollo de

Taylor[1] alrededor de $s=0$ de la función $(1-s)^a$ y quedarnos a primer orden en s (es decir, despreciamos los términos $\sim s^2$ o superiores)

$$(1-s)^a \simeq 1-as \qquad \text{(aproximación válida para } s \ll 1). \tag{34}$$

Finalmente llegamos a

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{2dK_0qx}{r^3}}. \tag{35}$$

Otra forma de calcularlo es usando el momento y el potencial dipolar. Para nuestro dipolo el momento dipolar vale

$$\vec{p} = q\vec{L} = 2dq\hat{\boldsymbol{\imath}}\,. \tag{36}$$

Y ahora usamos que el potencial dipolar de un dipolo en el origen de coordenadas en una posición $\vec{r}=(x,y)$, viene dado por

$$V(\vec{r}) = K_0\frac{\vec{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\,, \tag{37}$$

que, si sustituimos nuestro momento dipolar, nos da

$$V(\vec{r}) = 2dK_0q\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = 2dK_0q\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\vec{r}}{r^3} = 2dK_0q\frac{x}{r^3}\,. \tag{38}$$

b) El campo electrostático es menos el gradiente del potencial:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right) = -2dK_0q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} + x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right] \tag{39}$$

$$= 2dK_0q\left[-\left(\frac{1}{r^3} - 3x\frac{1}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} - x\left(-3\frac{1}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right] \tag{40}$$

$$= 2dK_0q\left[-\left(\frac{1}{r^3} - 3x\frac{1}{r^4}\frac{x}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} - x\left(-3\frac{1}{r^4}\frac{y}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right] \tag{41}$$

$$= 2dK_0q\left[-\frac{1}{r^3}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{3x}{r^4}\left(\frac{x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{r}\right)\right] \tag{42}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2dK_0q}{r^3}\left[\frac{3x}{r}\hat{\boldsymbol{r}} - \hat{\boldsymbol{\imath}}\right]}. \tag{43}$$

Otra forma sería si nos sabemos la fórmula del campo eléctrico de un dipolo con momento dipolar $\vec{p}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K_0}{r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \vec{p}\right]\,, \tag{44}$$

que en nuestro caso da

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2dK_0q}{r^3}\left[3(\hat{\boldsymbol{\imath}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - \hat{\boldsymbol{\imath}}\right] = \frac{2dK_0q}{r^3}\left[\frac{3x}{r}\hat{\boldsymbol{r}} - \hat{\boldsymbol{\imath}}\right]\,. \tag{45}$$

c) Evaluamos en el eje Y:

$$\boxed{\vec{E}(0,y) = -\frac{2dK_0q}{|y|^3}\hat{\boldsymbol{\imath}}}. \tag{46}$$

[1] La fórmula general del desarrollo de Taylor para una función $f(x)$ cualquiera alrededor de un punto $x=a$ es (allá donde la serie esté bien definida)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots \tag{33}$$

donde $f^{(0)}=f$ y $f^{(n)}$ con $n>0$ es la derivada n-ésima de f.

Problema 10. Una carga lineal infinita de densidad lineal $\lambda = 1,5\ \mu\mathrm{C/m}$ se encuentra sobre el eje X. Suponiendo que $V = 0$ a $2{,}5\ \mathrm{m}$, determina el potencial a $4\ \mathrm{m}$ de la línea.

Solución
Dada la simetría cilíndrica del problema:

- todos los puntos del cilindro de radio $4\ \mathrm{m}$ alrededor de la línea de carga son equivalentes (tienen el mismo potencial);
- todos los puntos del cilindro de radio $2{,}5\ \mathrm{m}$ alrededor de la línea de carga son equivalentes, están a potencial 0.

Por todo ello, vamos a restringirnos al plano XY y, concretamente al semiplano con $y > 0$. Elegimos como punto test $p = (0,\ 4\ \mathrm{m})$ y como referencia de potenciales $O \equiv (0,\ 2{,}5\ \mathrm{m})$.

El potencial en un punto es la diferencia de potencial entre ese punto y un punto a potencial cero, por lo que

$$V(p) = V(p) - V(O)\,. \tag{47}$$

Y ahora usamos que el cambio de potencial al ir de un punto a a un punto b es, salvo un signo, la circulación del campo eléctrico,

$$V(b) - V(a) = -\int_{a,\,\gamma}^{b} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,, \tag{48}$$

donde γ es la curva continua seguida para conectar a con b y $\mathrm{d}\vec{r}$ es la diferencial del vector posición general.[2] Gracias a que el campo electrostático es conservativo, esta diferencia de potencial no depende de la curva elegida. En nuestro caso tenemos:

$$V(p) = V(p) - V(O) = -\int_{O,\,\gamma}^{p} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,, \tag{49}$$

Como tenemos libertad para escoger la curva γ, vamos a elegir la más sencilla posible, que es un segmento (sobre el eje Y) que conecta O con p y elegimos y para parametrizar la curva, de modo que

$$V(p) = -\int_{2{,}5}^{4} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}\mathrm{d}y\,. \tag{50}$$

Solo nos falta la expresión del campo eléctrico en función de y. Ya calculamos en el Problema 6 que el campo de una línea infinita de carga de densidad lineal λ a una distancia ρ de la misma es radial y tiene la forma

$$\vec{E} = K_0 \frac{2\lambda}{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}}\,. \tag{51}$$

Si nos restringimos al semiplano XY con $y > 0$, ρ no es otra cosa que la coordenada y y $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ es $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. De modo que:

$$V(p) = -\int_{2{,}5}^{4} K_0 \frac{2\lambda}{y} \underbrace{\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}}_{|\hat{\boldsymbol{\jmath}}|^2=1} \mathrm{d}y = -2K_0\lambda \int_{2{,}5}^{4} \frac{\mathrm{d}y}{y} = -2K_0\lambda(\ln 4 - \ln 2{,}5) \tag{52}$$

que vale

$$\boxed{V(p) \simeq -1{,}27 \cdot 10^4\ \mathrm{V}}\,. \tag{53}$$

[2] Por ejemplo, en coordenadas cartesianas $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{k}}$.

Problema 11. Tres cargas puntuales $q_1 = +1\ \mu\text{C}$, $q_2 = -2\ \mu\text{C}$ y $q_3 = +3\ \mu\text{C}$ se encuentran en tres vértices de un cuadrado de $4\ \text{m}$ de lado. a) Determina la energía potencial electrostática de esta distribución. b) Calcula el trabajo necesario para llevar una carga negativa $q = -5\ \mu\text{C}$ desde el cuarto vértice al centro del cuadrado.

Solución

Hay cierta ambigüedad sobre cómo se disponen las cargas. Las colocamos por ejemplo:

q_1

q_2 $\qquad$ q_3

a) La energía potencial electrostática puede calcularse de dos formas equivalentes. Una es hallando la energía potencial total de cada carga de la distribución (sumando o integrando según el caso) y dividir entre 2. En nuestro caso:

$$U_{\text{total}} = \frac{1}{2}\left[U_1 + U_2 + U_3\right] \tag{54}$$

donde U_i es la energía potencial de la carga q_i debido a las otras dos. Otra forma es simplemente viendo la energía potencial como una caracterísica de la interacción de cada par de partículas, entonces:

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{23} + U_{31} \tag{55}$$

donde $U_{ij} = K_0 \frac{q_i q_j}{r_{ij}} + c$, con r_{ij} la distancia de q_i a q_j y c una cantidad arbitraria (que vale 0 si referimos los potenciales al infinito).
Usamos por ejemplo esta última

$$U_{\text{total}} = K_0\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}}\right] = \frac{K_0}{L}\left[q_1 q_2 + q_2 q_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} q_3 q_1\right] \tag{56}$$

siendo L el lado del cuadrado. Obtenemos así

$$\boxed{U_{\text{total}} \simeq -1{,}32 \cdot 10^{-2}\ \text{J}}\,. \tag{57}$$

b) Calculamos el cambio que experimenta en su energía potencial.

$$\begin{aligned} U_{\text{inicial}} &= K_0 q\left[\frac{q_1}{L} + \frac{q_2}{\sqrt{2}L} + \frac{q_3}{L}\right] = \frac{K_0 q}{L}\left[q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} q_2 + q_3\right] \\ U_{\text{final}} &= K_0 q\left[\frac{q_1}{\frac{\sqrt{2}}{2}L} + \frac{q_2}{\frac{\sqrt{2}}{2}L} + \frac{q_3}{\frac{\sqrt{2}}{2}L}\right] = \frac{K_0 q\sqrt{2}}{L}(q_1 + q_2 + q_3) \end{aligned}$$

por lo que

$$W = \Delta U = U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}} = \frac{K_0 q}{L}\left[\left(\sqrt{2} - 1\right) q_1 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) q_2 + \left(\sqrt{2} - 1\right) q_3\right]\,, \tag{58}$$

sustituyendo:

$$\boxed{W = -2{,}73\ \text{mJ}}\,. \tag{59}$$

Como vemos se trata de un cambio negativo de energía potencial (una disminución), por lo que el proceso se lleva a cabo a favor del campo; o sea, el campo tendería a mover la carga q del punto inicial al final y no al revés.