[Versión 9 de julio de 2021]

Notas sobre cálculo de derivadas y derivadas parciales

(Para cualquier curso básico de física)

Alejandro Jiménez Cano[1]

Resumen

La idea de este texto es servir como referencia a estudiantes de primero de universidad de las herramientas necesarias para el cálculo de derivadas y derivadas parciales. Va especialmente dirigido a un lector que ya sabe hacer derivadas de funciones de una variable $f(x)$ (como las que se trabajan en bachillerato); aunque también las repasaremos pues, controlándolas bien, el cálculo de derivadas parciales es inmediato. No nos vamos a detener en el significado formal o en la definición de derivada (límite de la variación de f...) ni en los detalles de su interpretación gráfica (pendiente de la recta...), tan solo en su cálculo.

1. Cálculo de derivadas ordinarias

Notación

A la derivada de una función de una sola variable, $f(x)$, se la suele denotar, indistintamente,

$$f'(x) \qquad \text{o} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}. \tag{1.1}$$

Cabe insistir en que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ NO es una fracción, es otro símbolo para referirnos a "la derivada de f con respecto a x".

1.1. ¿Para qué sirve derivar?

No está de más recordar el significado de la derivada:

> "tasa de cambio de la función para un (infinitamente) pequeño incremento de su variable"

La velocidad, p. ej., es la tasa cambio de la posición con respecto al tiempo transcurrido, o sea:

$$v = x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.2}$$

Análogamente, la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad. Otro ejemplo es la segunda ley de Newton, que nos dice que la fuerza no es otra cosa que la tasa de cambio del momento lineal $p = mv$

$$F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.3}$$

De hecho, si la masa es constante, se recupera el conocido $F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv ma$.

Cuando analizamos el comportamiento de un sistema es imprescindible tener algún artefacto matemático que nos informe de lo rápido que tiende a cambiar una magnitud (para la posición tenemos la velocidad, para el momento tenemos la fuerza, etc.) y ese artefacto es la derivada.

Algunos de los principios más interesantes en física son las "leyes de conservación" y son tremendamente útiles para resolver problemas. Fijémonos qué ocurre cuando, por ejemplo, la fuerza total sobre un sistema es cero:

$$0 = F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad mv = \text{constante}\,. \tag{1.4}$$

¡El momento es constante! Si la derivada de algo es cero, es porque ese algo no cambia; o sea, permanece inalterable durante todo el proceso en cuestión.

[1] `alejandrojc@ugr.es` (Ruego comuníquense las erratas que se encuentren)

1.2. Reglas de derivación y derivadas de algunas funciones elementales

Reglas de derivación

Derivada de la suma de funciones	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$		(1.5)
Derivada de una constante por una función	$(af)'(x) = af'(x)$	$a \in \mathbb{R}$	(1.6)
Derivada del producto de funciones	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$		(1.7)
Derivada del cociente de funciones	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$		(1.8)
Regla de la cadena	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$		(1.9)

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones cualesquiera.

Derivadas de algunas funciones elementales

	$f(x)$	$f'(x)$		
Derivada de la constante	a	0	$a \in \mathbb{R}$	(1.10)
Derivada de la función potencial	x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R}$	(1.11)
Derivada de la función exponencial	a^x	$a^x \ln a$	$a \in (0, \infty)$	(1.12)
Derivada de la función logaritmo	$\lg_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$	(1.13)
Derivada de la función seno	$\sin x$	$\cos x$		(1.14)
Derivada de la función coseno	$\cos x$	$-\sin x$		(1.15)

Con todo esto en mente ya somos capaces de derivar multitud de funciones. Algunos ejemplos que merece la pena memorizar (¡salen mucho!) son:

	$f(x)$	$f'(x)$	¿Y cómo lo has derivado?
La función identidad	x	1	(1.11) con $a = 1$
La raíz cuadrada de x	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	(1.11) con $a = \frac{1}{2}$
Inversa de x	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	(1.11) con $a = -1$
Exponencial de x en base e	e^x	e^x	(1.12) con $a = \mathrm{e}$
Logaritmo de x en base e (neperiano)	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	(1.13) con $a = \mathrm{e}$

1.3. Ejemplos

Algunos ejemplos sin regla de la cadena

❏ Derivada de $f(x) = \frac{x^4}{x+1} + \frac{x}{3}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{x+1}\right)' + \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{\left(x^4\right)'(x+1) - x^4(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} = \frac{4x^3(x+1) - x^4}{(x+1)^2} + \frac{1}{3}$$

$$= \boxed{\frac{3x+4}{(x+1)^2}x^3 + \frac{1}{3}} \tag{1.16}$$

❏ Derivada de $g(v) = \frac{v^7}{8}\sqrt{v^5}$

$$g'(v) = \frac{1}{8}\left(v^7 v^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{1}{8}\left(v^{\frac{19}{2}}\right)' = \frac{19}{16}v^{\frac{19}{2}-1} = \frac{19}{16}\sqrt{v^{17}} = \boxed{\frac{19}{16}v^8\sqrt{v}} \tag{1.17}$$

❏ Derivada de $\alpha(f) = f^4 \cos f \sin f$

$$\begin{aligned}\alpha'(f) &= \left(f^4\right)' \cos f \sin f + f^4 \left(\cos f\right)' \sin f + f^4 \cos f \left(\sin f\right)' \\ &= \boxed{4f^3 \cos f \sin f - f^4 \sin^2 f + f^4 \cos^2 f}\end{aligned} \tag{1.18}$$

La *regla de la cadena* es una herramienta tremenda para derivar funciones. Lo que nos dice (obsérvese su expresión (1.9)) es que: si sabemos derivar $f(x)$, también sabemos derivar una función que sea esa misma pero cambiando x por una función arbitraria $g(x)$. Y la manera de hacerlo es derivar $f(g(x))$ como si $g(x)$ fuera simplemente x y, al acabar, multiplicamos por la derivada de $g(x)$. Aplicado a la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} && \longrightarrow && f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,, \\ f(x) &= \sqrt{g(x)} && \longrightarrow && f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)\,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

❏ Como ejemplo concreto, si tuviésemos que derivar $f(x) = \sqrt{\lg_3 x}$, usamos la regla de la cadena (!) del siguiente modo (compárese con (1.19)):

$$f'(x) \overset{!}{=} \frac{1}{2\sqrt{\lg_3 x}} \left[\lg_3 x\right]' = \frac{1}{2\sqrt{\lg_3 x}} \frac{1}{x \ln 3} = \boxed{\frac{1}{2\ln(3)\, x \sqrt{\lg_3 x}}} \tag{1.20}$$

❏ Podemos encadenar más funciones. Por ejemplo, consideremos $h(m) = \sqrt{\lg_3\left(m^2 - 8m\right)}$. Ahora hay que usar la regla de la cadena (!) dos veces:

$$\begin{aligned} h'(m) &\overset{!}{=} \frac{1}{2\sqrt{\lg_3\left(m^2-8m\right)}} \left[\lg_3\left(m^2-8m\right)\right]' \overset{!}{=} \frac{1}{2\sqrt{\lg_3\left(m^2-8m\right)}} \frac{1}{\left(m^2-8m\right)\ln 3} \left[m^2-8m\right]' \\ &= \boxed{\frac{m-4}{\ln 3 \left(m^2-8m\right) \sqrt{\lg_3\left(m^2-8m\right)}}} \end{aligned} \tag{1.21}$$

1.4. ¡Practica!

[Soluciones al final. Pág. 5]

Ejercicio 1. Calcular la derivada de las funciones siguientes (sin regla de la cadena):

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{4} + \mathrm{e}^x$ *b)* $g(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{4}x\right)\cos x$ *c)* $x(m) = 6\sin m + \dfrac{2^m}{m+4}$ *d)* $t(z) = \dfrac{\sqrt[3]{z}}{5z+2}$.

Ejercicio 2. Calcular la derivada de las funciones siguientes (con regla de la cadena):

a) $f(x) = \left[\ln\left(\dfrac{x^2}{3} - 3x + 5 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)\right]^{4/3}$ *b)* $R(z) = \mathrm{e}^{\sin^2 z}$ *c)* $K(n) = \sqrt{(n+1)\left(n + \dfrac{2}{n^2}\right)^5}$.

Para quien quiera un desafío ☺, ahí va un pasatiempo:

Ejercicio 3. Hallar la derivada de $f(x) = x^x$.
[Pista: f parece inocente pero, al menos de entrada, no es de ninguno de los tipos que hemos visto. Algo habrá que hacerle...][2]

[2] Si estás leyendo esto, mucho te tienen que gustar estas cosas. Venga, pregunta extra de regalo ☺☺:
$f(x) = x^x$ crece muy rápido pero, ¿lo hace más rápido que la exponencial de cualquier polinomio?
[Pista: compara $f(x)$ con $g(x) = \mathrm{e}^{x^n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$]

2. Cálculo de derivadas parciales

2.1. Un ejemplo de cálculo de derivadas parciales

Cuando observamos el mundo, es típico encontrar cantidades que dependen de varias magnitudes. Por ejemplo, la presión de un gas ideal en un recipiente depende de la temperatura, del volumen que ocupa y del número de moles de gas en cuestión (R es la constante de los gases):

$$P = \frac{nRT}{V}\,, \tag{2.1}$$

de modo que P es un función de tres variables $P(V,\,T,\,n)$.

Ahora no tiene sentido hablar de "derivada" (en el sentido ordinario), porque en general la pregunta "¿cuál es la tasa de cambio de P cuando V cambia?" no tiene una respuesta a priori, ya que no estamos teniendo en cuenta las modificaciones que podrían experimentar T y n (y que, para el mismo cambio de V, darían lugar a diferentes cambios de P). Lo que podemos hacer es fijar T y n (asumirlas constantes) y entonces hacernos la pregunta anterior. Esta es la idea intuitiva tras el concepto de *derivada parcial*.

Las derivadas parciales se denotan $\frac{\partial(\text{función})}{\partial(\text{variable})}$, y su cálculo es exactamente igual que el de las derivadas de funciones de una variable, solo que ahora tenemos varias y hemos de fijarnos respecto a cuál de ellas estamos derivando (la que aparece abajo en el símbolo de derivada parcial) y el resto deberán asumirse constantes durante el proceso de derivación. En nuestro ejemplo de la función $P(V,\,T,\,n)$ hay tres posibles parciales, una para cada variable:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial\left(\frac{nRT}{V}\right)}{\partial V} = nRT\frac{\partial\left(\frac{1}{V}\right)}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{nRT}{V}\right)}{\partial n} = \frac{RT}{V}\frac{\partial\,(n)}{\partial n} = \frac{RT}{V}\,, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial\left(\frac{nRT}{V}\right)}{\partial T} = \frac{nR}{V}\frac{\partial\,(T)}{\partial T} = \frac{nR}{V}\,. \tag{2.4}$$

En cada caso lo que aparece en tono claro es constante y sale de la derivada, del mismo modo que lo haría un 2.

2.2. ¡Practica!

[Soluciones al final. Pág. 5]

Ejercicio 4. La densidad superficial de una elipse depende de su masa M y de sus semiejes a y b mediante la expresión:

$$\rho = \frac{M}{\pi ab}\,. \tag{2.5}$$

Hallar todas las derivadas parciales de la función $\rho(M,\,a,\,b)$.

Ejercicio 5. La ley de Jurin afirma que la altura h que un líquido asciende por un capilar, depende de la tension superficial entre fases γ, el ángulo de contacto θ, la gravedad g (que asumimos constante), la densidad del líquido ρ y el radio del tubo r mediante:

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}\,. \tag{2.6}$$

Hallar todas las derivadas parciales de la función $h(\gamma,\,\theta,\,\rho,\,r)$.

Ejercicio 6. La ecuación de estado del gas de Van der Waals es

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT\,, \tag{2.7}$$

con P la presión, v el volumen específico, T la temperatura y a, b y R constantes. Despejar las funciones presión $P(v,\,T)$ y temperatura $T(v,\,P)$, y hallar todas sus derivadas parciales.

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 1.

a) $f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \mathrm{e}^x$

b) $g'(x) = \left(2x + \frac{1}{4}\right)\cos x - \left(x^2 + \frac{1}{4}x\right)\sin x$

c) $x'(m) = 6\cos m + 2^m\left(\frac{\ln 2(m+4)-1}{(m+4)^2}\right)$

d) $t'(z) = \frac{(5z+2)-15z}{3(5z+2)^2}z^{-2/3}$

Ejercicio 2.

a) $f'(x) = \frac{4}{3}\left[\ln\left(\frac{x^2}{3} - 3x + 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)\right]^{1/3}\left(\frac{x^2}{3} - 3x + 5 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)^{-1}\left(\frac{2}{3}x - 3 - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)$

b) $R'(z) = 2\mathrm{e}^{\sin^2 z}\sin z\cos z$

c) $K'(n) = \frac{1}{2}\left[(n+1)\left(n + \frac{2}{n^2}\right)\right]^{-1/2}\left[\left(n + \frac{2}{n^2}\right) + 5(n+1)\left(n + \frac{2}{n^2}\right)^4\left(1 - \frac{4}{n^3}\right)\right]$

Ejercicio 3.

$f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

(Pregunta extra:) No. De hecho, basta con tomar $n = 2$ para obtener una función que crece más rápido que $f(x)$:

$$\frac{g(x)|_{n=2}}{f(x)} = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^x} = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x\ln x}} = \mathrm{e}^{x(x-\ln x)} \xrightarrow{x\to\infty} \mathrm{e}^{\infty\cdot\infty} = \infty\,,$$

donde, para tomar el límite, hemos usado que x va a infinito mucho más rápido que su logaritmo.

Ejercicio 4.

$\frac{\partial\rho}{\partial M} = \frac{1}{\pi ab}$, $\quad \frac{\partial\rho}{\partial a} = -\frac{M}{\pi a^2 b}$, $\quad \frac{\partial\rho}{\partial b} = -\frac{M}{\pi a b^2}$

Ejercicio 5.

$\frac{\partial h}{\partial\gamma} = \frac{2\cos\theta}{\rho g r}$, $\quad \frac{\partial h}{\partial\theta} = -\frac{2\gamma\sin\theta}{\rho g r}$, $\quad \frac{\partial h}{\partial\rho} = -\frac{2\gamma\cos\theta}{\rho^2 g r}$, $\quad \frac{\partial h}{\partial r} = -\frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r^2}$

Ejercicio 6.

La temperatura despejada queda $T(v,\, P) = \frac{1}{R}\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b)$, cuyas parciales son:

$\frac{\partial T}{\partial v} = -\frac{2a}{Rv^3}(v-b) + \frac{1}{R}\left(P + \frac{a}{v^2}\right)$, $\quad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{1}{R}(v-b)$

La presión despejada queda $P(v,\, T) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$, cuyas parciales son:

$\frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}$, $\quad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{v-b}$