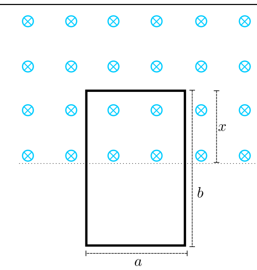
[Versión 9 de julio de 2021]

Problemas resueltos de la relación 5 (Inducción y ondas)

Constantes: $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\mathrm{N}/\mathrm{A}^2$.
Notación: N para el número de espiras y n para el número de espiras por unidad de longitud.

Problema 1. Una bobina rectangular de 80 vueltas, 20 cm de anchura y 30 cm de longitud está situada en un campo magnético $B = 0{,}8$ T dirigido hacia dentro de la página. Como indica la figura, sólo parte de la bobina se encuentra en la región del campo magnético. La resistencia de la bobina es de 30 Ω. Determina la magnitud y dirección de la corriente inducida al desplazar la bobina con una velocidad de 2 $\mathrm{m/s}$ hacia la derecha, hacia arriba, o hacia abajo.



Solución

Vamos a utilizar sobre nuestra bobina la ley de Faraday-Lenz que nos relaciona la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ inducida en ella con el cambio de flujo magnético que la atraviesa:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,,$$

donde Φ_T es el flujo magnético total, Φ el flujo magnético sobre una de las espiras que componen la bobina y N el número de espiras de la bobina. Por otra parte, usando la ley de Ohm aplicada a la bobina $\mathcal{E} = RI$, llegamos a

$$I = -\frac{N}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1}$$

donde el signo obtenido para la I es el que se ajusta a la regla de la mano derecha con respecto al sentido elegido para el vector superficie en el cálculo del flujo.

El flujo magnético (eligiendo el vector superficie apuntando en el mismo sentido que $\vec{B}$) viene dado por

$$\Phi = BA\,, \tag{2}$$

donde B es el módulo del campo magnético y A el área de la bobina atravesada por campo magnético.

(Demostración rigurosa de esto último)

Si llamamos Σ a la superficie de la bobina, el flujo es:

$$\Phi = \int_\Sigma \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,. \tag{3}$$

La integral puede dividirse en dos trozos, uno que barra la parte de Σ en la que el campo es cero (y, por tanto, no da ningún flujo) que denotaremos Σ_0 y otro que barra el otro trozo al que vamos a llamar $\hat{\Sigma}$ donde el modulo del campo magnético es fijo y de valor B (el dato del enunciado). Entonces el flujo queda:

$$\Phi = \int_{\hat{\Sigma}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \underbrace{\int_{\Sigma_0} \vec{0}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}_{=0} = \int_{\hat{\Sigma}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,. \tag{4}$$

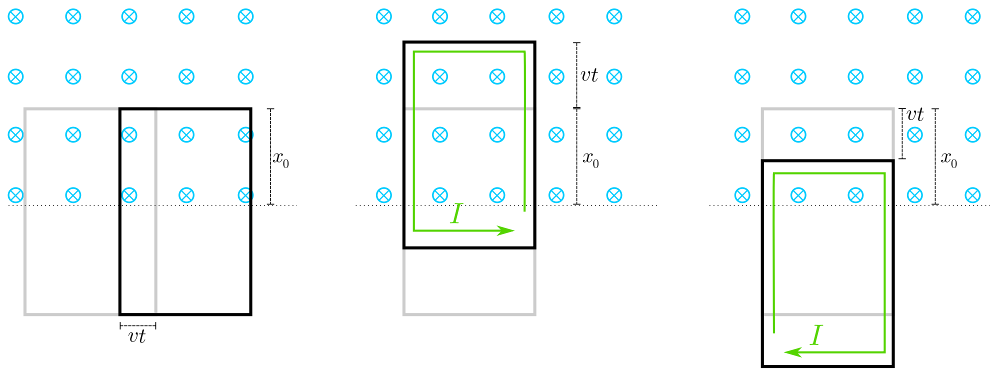
Si elegimos el $\mathrm{d}\vec{S}$ en el mismo sentido que el campo magnético, entonces queda solo el producto de los módulos y como B es constante sale fuera:

$$\Phi = \int_{\hat{\Sigma}} B\mathrm{d}S = B\int_{\hat{\Sigma}}\mathrm{d}S = B\times\underbrace{\text{Área}(\hat{\Sigma})}_{\equiv A}\,. \tag{5}$$

Finalmente, como B no depende del tiempo, tenemos

$$I = -\frac{N}{R}\frac{\mathrm{d}(BA)}{\mathrm{d}t} = -\frac{NB}{R}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6}$$

Como vemos, lo único que tenemos que conocer es el valor del área interior de la bobina en la que hay campo magnético (como función del tiempo) y el resto son datos.



❏ Movimiento hacia la derecha. Como vemos, el área ocupada por el campo magnético será constante en el tiempo

$$A_{\rightarrow}(t) = ax_0\,, \tag{7}$$

con x_0 el valor de x de partida. Su derivada por tanto se anulará, por lo que

$$\boxed{I_{\rightarrow} = 0}\,. \tag{8}$$

❏ Movimiento hacia arriba. El área ocupada por el campo magnético aumentará con el tiempo y tendrá el valor[1]

$$A_{\uparrow}(t) = ax(t) = a(x_0 + vt) = ax_0 + avt\,, \tag{9}$$

de modo que

$$I_{\uparrow} = -\frac{NB}{R}\frac{\mathrm{d}A_{\uparrow}}{\mathrm{d}t} = -\frac{NB}{R}av = -\frac{64}{75}\ \mathrm{A}\,, \tag{10}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Magnitud:} & |I_{\uparrow}| & = \frac{64}{75}\ \mathrm{A} \qquad (\simeq 0{,}85\ \mathrm{A}) \\ \text{Dirección:} & \mathrm{sgn}(I_{\uparrow}) & = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{sentido antihorario en la figura} \end{array}}\,. \tag{11}$$

❏ Movimiento hacia abajo. El área ocupada por el campo magnético disminuirá con el tiempo y tendrá el valor[2]

$$A_{\downarrow}(t) = ax(t) = a(x_0 - vt) = ax_0 - avt\,, \tag{12}$$

de modo que va a ocurrir justo lo opuesto al caso anterior,

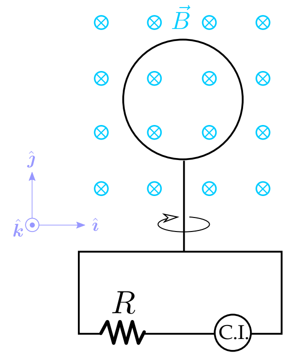
$$I_{\downarrow} = -\frac{NB}{R}\frac{\mathrm{d}A_{\downarrow}}{\mathrm{d}t} = \frac{NB}{R}av = \frac{64}{75}\ \mathrm{A}\,, \tag{13}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Magnitud:} & |I_{\downarrow}| & = \frac{64}{75}\ \mathrm{A} \qquad (\simeq 0{,}85\ \mathrm{A}) \\ \text{Dirección:} & \mathrm{sgn}(I_{\downarrow}) & = +1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{sentido horario en la figura} \end{array}}\,. \tag{14}$$

[1] Esto no ocurrirá indefinidamente, cuando toda la bobina esté cubierta por el campo magnético, el área A llegará a su valor máximo $A_{\uparrow\text{máx}} = ab$ y dejará de aumentar el flujo, deteniéndose la corriente inducida.

[2] De nuevo, esto no ocurrirá indefinidamente, cuando deje de pasar campo magnético por la bobina, el área A llegará a su valor mínimo $A_{\downarrow\text{mín}} = 0$ y dejará de disminuir el flujo, deteniéndose la corriente inducida.

Problema 2. Una bobina circular de 300 vueltas y un radio de 5 cm se conecta a un integrador de corriente (aparato destinado a medir la carga total que pasa a través de la bobina). La resistencia total del circuito es 20 Ω. El plano de la bobina se orienta inicialmente de modo que sea perpendicular al campo magnético terrestre en un punto determinado. Cuando la bobina gira $90°$, se mide la carga que pasa a través del integrador y resulta ser igual a $9{,}4$ μC. Calcula el valor del campo magnético terrestre en dicho punto.



Solución

La idea es justamente la misma que en el ejercicio anterior. En un instante dado, a campo magnético uniforme, éste sale de la integral y el flujo vendrá dado por

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S}\,. \tag{15}$$

Nótese que como la bobina va a girar, $\vec{S}$ no es un vector fijo, va a ir cambiando en el tiempo. Combinando la ley de Faraday-Lenz y la ley de Ohm llegamos a:

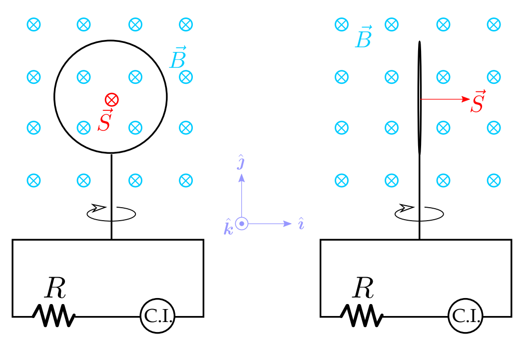
$$\left.\begin{matrix} \mathcal{E} = -N\frac{\mathrm{d}(\vec{B}\cdot\vec{S})}{\mathrm{d}t} = -N\vec{B}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} \\ \mathcal{E} = RI \end{matrix}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad I = -\frac{N}{R}\vec{B}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{16}$$

Si recordamos la definición de intensidad $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ e integramos en el tiempo ambos miembros entre el instante inicial y el final (sacando las constantes de la integral):

$$\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{N}{R}\vec{B}\cdot\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\,. \tag{17}$$

Y usando que la integral de la derivada es la derivada en los extremos de integración:

$$\underbrace{Q(t_\mathrm{f}) - Q(t_\mathrm{i})}_{\substack{\text{Carga que pasa} \\ \text{por el integrador} \\ \text{en ese tiempo.} \\ \equiv q}} = -\frac{N}{R}\vec{B}\cdot\left[\vec{S}(t_\mathrm{f}) - \vec{S}(t_\mathrm{i})\right]\,. \tag{18}$$



Sobre los vectores superficie:

- Eligiendo inicialmente $\vec{S}$ apuntando hacia adentro del papel,

$$\vec{B}\cdot\vec{S}(t_\mathrm{i}) = B\,S(t_\mathrm{i}) = B\pi a^2\,, \tag{19}$$

  donde a es el radio de la bobina.

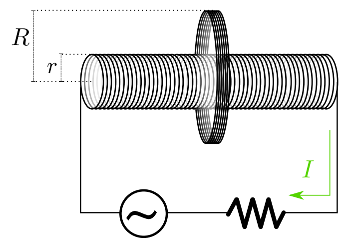
- Tras girar $90°$, $\vec{B}$ queda paralelo a la superficie (perpendicular a $\vec{S}$) por lo que

$$\vec{B}\cdot\vec{S}(t_\mathrm{f}) = 0. \tag{20}$$

Con todo ello, concluimos:

$$q = \frac{N}{R}B\pi a^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{B = \frac{Rq}{N\pi a^2} \simeq 79{,}79\ \mu\mathrm{T}}\,. \tag{21}$$

Problema 3. Una bobina de 15 vueltas y radio 10 cm rodea un largo solenoide de 2 cm de radio y 1000 vueltas/m. Si la corriente en el solenoide cambia según $I = 5 \text{ A } \sin(120 \text{ s}^{-1}\, t)$, calcula la fuerza electromotriz inducida en la bobina.



Solución

La ley de Faraday-Lenz aplicada a una bobina de N_{ext} espiras apretadas nos dice que la fuerza electromotriz inducida es

$$\mathcal{E} = -N_{\text{ext}} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \,,$$

con Φ el flujo que atraviesa una sola de las espiras. El campo magnético creado por la corriente en el solenoide interior (suponiendo que es suficientemente largo) está confinado dentro de él, de modo que el flujo a través de una espira de la bobina exterior será

$$\Phi = \int_{S_{\text{int}}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \,, \tag{22}$$

donde S_{int} es la sección interior del solenoide.

Elegimos el eje X a lo largo del eje del solenoide interior. Como este es un solenoide infinito (o muy largo), $\vec{B}$ es uniforme en su interior, y tendrá una expresión de la forma

$$\vec{B} = B(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} \,, \tag{23}$$

y sale de la integral y obteniéndose

$$\Phi = B(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \vec{S}_{\text{int}} \,. \tag{24}$$

Elegimos el sentido para el $\vec{S}_{\text{int}}$ hacia las x positivas, de modo que

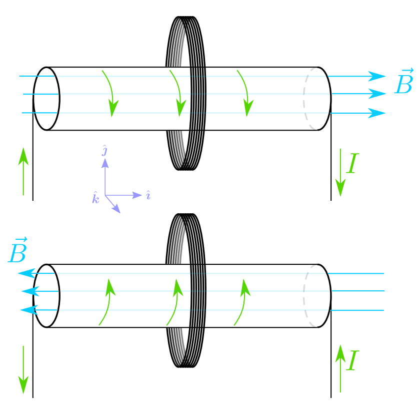
$$\Phi = B(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\pi r^2 \hat{\boldsymbol{\imath}}) = \pi r^2 B(t) \,, \tag{25}$$

y la ley de Faraday-Lenz queda

$$\mathcal{E} = -N_{\text{ext}} \pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \,. \tag{26}$$

Solo nos falta conocer el valor de la componente x del campo magnético en el interior del solenoide largo, B. De teoría sabemos que el campo magnético en un solenoide es $B = \mu_0 n I$ (donde n es el número de espiras por unidad de longitud), por lo que en nuestro caso:

$$\mathcal{E} = -N_{\text{ext}} \pi r^2 \frac{\mathrm{d}(\mu_0 n_{\text{int}} I(t))}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 n_{\text{int}} N_{\text{ext}} \pi r^2 \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \,. \tag{27}$$



En el enunciado nos proporcionan la función intensidad,

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) \,, \qquad (I_0 = 5 \text{ A} \,, \quad \omega = 120 \text{ s}^{-1}) \,, \tag{28}$$

por lo que, finalmente llegamos a

$$\boxed{\mathcal{E} = -\mu_0 n_{\text{int}} N_{\text{ext}} \pi r^2 I_0 \omega \cos(\omega t) \qquad \simeq -0{,}71 \cos\left[(120 \text{ s}^{-1})t\right] \text{ V}} \,. \tag{29}$$

Obsérvese que el radio de la bobina exterior no es relevante (si se piensa con cuidado es bastante lógico).

Problema 4. Una onda armónica transversal que se desplaza por una cuerda tiene un periodo de $25\ \mathrm{ms}$ y viaja en la dirección negativa del eje X a una velocidad de $30\ \mathrm{m/s}$. En el instante $t = 0$, una partícula de la cuerda situada en $x = 0$ tiene un desplazamiento de $2\ \mathrm{cm}$ y se mueve hacia arriba a una velocidad de $2\ \mathrm{m/s}$. Calcula: (a) la amplitud de la onda, (b) el ángulo de fase inicial, y (c) la expresión analítica completa de la función de onda.

Solución

La función de elongación de una onda armónica (transversal) general moviéndose hacia las x negativas tiene la forma:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t + kx + \phi)\,. \tag{30}$$

Nos piden esencialmente los valores de todos los parámetros de esta función: A, ω, k y ϕ.

- Del período podemos deducir la frecuencia y con ella la frecuencia angular:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{25}\ \mathrm{ms}^{-1} = 80\pi\ \mathrm{rad/s}\,. \tag{31}$$

- Con ω y la velocidad de propagación obtenemos el número de onde:

$$\omega = kv \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{\omega}{v} = \frac{8\pi}{3}\ \mathrm{m}^{-1}\,. \tag{32}$$

- Nos dan también la elongación del punto $x = 0$ en el instante inicial $t = 0$,

$$y(0,0) = A\sin(\phi) \qquad (= 0{,}02\ \mathrm{m})\,; \tag{33}$$

  y la velocidad transversal, o sea,

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = A\omega\cos(\omega t + kx + \phi)\,, \tag{34}$$

  de ese punto en ese mismo instante

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = A\omega\cos(\phi) \qquad (= 2\ \mathrm{m/s})\,. \tag{35}$$

  Tenemos pues un sistema de ecuaciones (33) y (35). Dividiendo estas ecuaciones

$$\frac{1}{\omega}\tan(\phi) = \frac{0{,}02\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{m/s}} \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \arctan(0{,}8\pi)\,. \tag{36}$$

  Y con ello, de (33) obtenemos

$$A = \frac{0{,}02\ \mathrm{m}}{\sin(\arctan(0{,}8\pi))}\,. \tag{37}$$

Respondiendo al problema:

(a)

$$\boxed{A = \frac{0{,}02\ \mathrm{m}}{\sin(\arctan(0{,}8\pi))} \simeq 2{,}15\ \mathrm{cm}}\,. \tag{38}$$

(b)

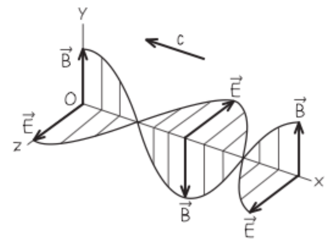
$$\boxed{\phi = \arctan(0{,}8\pi) \simeq 1{,}19\ \mathrm{rad}}\,. \tag{39}$$

(c)

$$\boxed{y(x,t) = A\sin\left[\left(80\pi\ \mathrm{s}^{-1}\right)t + \left(\frac{8\pi}{3}\ \mathrm{m}^{-1}\right)x + \phi\right]}\,, \tag{40}$$

con A y ϕ dadas por los apartados anteriores.

Problema 5. La figura muestra una onda electromagnética armónica propagándose en el vacío en la dirección negativa del eje X. Suponiendo que la longitud de onda es de 50 m, y que el campo E oscila con una amplitud de 22 V/m, determina la frecuencia de la onda y escribe las expresiones vectoriales para $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en función del tiempo.



Solución

Para calcular la frecuencia de la onda utilizamos que conocemos la longitud de onda y la velocidad de propagación c que es la velocidad de la luz en el vacío[3]

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kc}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} = \frac{299\,792\,458 \text{ m/s}}{50 \text{ m}} = 5{,}996 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = 5{,}996 \text{ MHz}}$$

Para las expresiones vectoriales empecemos por el campo eléctrico.

- Como se propaga hacia las x negativas tendremos dentro de la función trigonométrica correspondiente la combinación $\omega t + kx$.

- Como no se hace alusión a tiempo, elegimos $t = 0$ sin pérdida de generalidad como el instante representado en la figura. En ese momento los campos tienen un máximo en $x = 0$ por lo que es conveniente usar un coseno para ahorrarnos poner un $\pi/2$ extra en la fase. De modo que:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t + kx)\,. \tag{41}$$

- Usamos que $\omega = kc$ y que el número de onda se relaciona con la longitud de onda según $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, resultando:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(ct + x)\right]\,. \tag{42}$$

- El máximo de la amplitud en $(t,x) = (0,0)$ apunta hacia las z crecientes, de modo que

$$\vec{E}_0 = |\vec{E}_0|\hat{\boldsymbol{k}}\,. \tag{43}$$

- El resultado final es:

$$\vec{E}(x,t) = |\vec{E}_0|\hat{\boldsymbol{k}} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(ct + x)\right]\,, \tag{44}$$

  donde todo son datos. Sustituimos:

$$\boxed{\vec{E}(x,t) = (22 \text{ V/m}) \cos\left[\left(\frac{\pi}{25} \text{ m}^{-1}\right)(ct + x)\right] \hat{\boldsymbol{k}}}\,. \tag{45}$$

Análogamente podemos razonar para el campo magnético. Todo es exactamente igual solo que su máximo (y su dirección de vibración a lo largo de todo el recorrido) es $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Luego:

$$\vec{B}(x,t) = |\vec{B}_0| \cos\left[\left(\frac{\pi}{25} \text{ m}^{-1}\right)(ct + x)\right] \hat{\boldsymbol{\jmath}}\,. \tag{46}$$

Solo nos queda conocer $|\vec{B}_0|$. Aquí hemos de utilizar un resultado de teoría satisfecho por las ondas electromagnéticas y es que en cualquier instante de tiempo y para cualquier punto de la onda se cumple $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$. En particular, para el punto $(t,x) = (0,0)$:

$$|\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0|\,. \tag{47}$$

Concluimos pues que

$$\boxed{\vec{B}(x,t) = \frac{22 \text{ V/m}}{c} \cos\left[\left(\frac{\pi}{25} \text{ m}^{-1}\right)(ct + x)\right] \hat{\boldsymbol{\jmath}}}\,. \tag{48}$$

[3] Su valor se define como $c = 299\,792\,458$ m/s (sin decimales).

Problema 6. Una onda transversal de frecuencia 40 Hz se propaga por una cuerda. Dos puntos separados entre sí 5 cm están desfasados $\pi/6$. Calcula:
a) La longitud de onda
b) La diferencia de fase entre los desplazamientos en un punto determinado para instantes separados 5 ms entre sí.
c) La velocidad de la onda.

Solución

Como no nos dicen nada de la dirección de propagación, la elegimos apuntado a las x positivas. El desplazamiento transversal vendrá dado por:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \phi)\,. \tag{49}$$

Nos dan la frecuencia de donde obtenemos la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 40 \text{ Hz} = 80\pi \text{ rad/s}\,. \tag{50}$$

La fase de un punto x en un cierto instante t es

$$\delta = \omega t - kx + \phi\,. \tag{51}$$

La diferencia de fase (o desfase) entre un punto x_1 en el instante t_1 y otro punto x_2 en t_2 es:

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = \omega(t_1 - t_2) - k(x_1 - x_2)\,.$$

Para dos puntos en el mismo instante el desfase en valor absoluto es

$$|\Delta\delta| = k|x_1 - x_2| \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{|\Delta\delta|}{|x_1 - x_2|} = \frac{\pi/6}{5 \text{ cm}} = \frac{10\pi}{3} \text{ m}^{-1}\,. \tag{52}$$

Respondemos al problema:

(a)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\pi/3}\text{m} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lambda = \frac{3}{5}\text{m} = 0{,}6 \text{ m}}\,. \tag{53}$$

(b) Para el mismo punto (x fija), tenemos

$$|\Delta\delta| = \omega|\Delta t|\,. \tag{54}$$

Luego,

$$|\Delta\delta| = (80\pi \text{ rad/s})(0{,}005 \text{ s}) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{|\Delta\delta| = \frac{2\pi}{5} \text{ rad} = 1{,}26 \text{ rad}}\,. \tag{55}$$

(c) La velocidad de la onda viene dada por

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{80\pi \text{ rad/s}}{\frac{10\pi}{3} \text{ m}^{-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = 24 \text{ m/s}}\,. \tag{56}$$

Problema 7. Una cuerda de piano de acero tiene $0{,}7$ m de longitud y una masa de 5 g. Si se tensa mediante una fuerza de 500 N, ¿cuál sería la velocidad de las ondas transversales en la cuerda? Para reducir la velocidad de la onda en un factor 2 sin modificar la tensión, ¿Qué masa de alambre de cobre habría que enrollar alrededor de la cuerda de acero?

Solución

Para ondas propagándose por una cuerda se cumple

$$v = \sqrt{\frac{F_{\text{ten}}}{\mu}}\,, \tag{57}$$

donde F_{ten} es la tensión de la cuerda y μ su densidad lineal, que en nuestro caso es

$$\mu = \frac{m_{\text{acero}}}{L} = \frac{5\ \text{g}}{0{,}7\ \text{m}} = \frac{1}{140}\text{kg/m}\,. \tag{58}$$

De modo que ya podemos responder a la primera pregunta:

$$v = \sqrt{\frac{500\ \text{N}}{\frac{1}{140}\ \text{kg/m}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = 100\sqrt{7}\ \text{m/s} \simeq 264{,}58\ \text{m/s}}\,. \tag{59}$$

Queremos ahora que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{F_{\text{ten}}}{\bar{\mu}}} \qquad \text{con} \qquad \bar{v} = \frac{v}{2}\,, \tag{60}$$

y siendo F_{ten} y v las previamente utilizadas. Usando (57):

$$\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{\frac{F_{\text{ten}}}{\mu}}}_{v} = \sqrt{\frac{F_{\text{ten}}}{\bar{\mu}}} \qquad \Rightarrow \qquad 4\mu = \bar{\mu}\,. \tag{61}$$

Abrimos $\bar{\mu}$ y μ

$$4\frac{m_{\text{acero}}}{L} = \frac{m_{\text{acero}} + m_{\text{cobre}}}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{m_{\text{cobre}} = 3m_{\text{acero}} = 15\ \text{g}}\,. \tag{62}$$

Problema 8. Dos ondas sinusoidales idénticas con longitudes de onda de $3\ \mathrm{m}$, se desplazan en la misma dirección a una velocidad de $2\ \mathrm{m/s}$. La segunda onda se origina en el mismo punto que la primera pero en un instante posterior. Determina el intervalo de tiempo mínimo que debe haber entre el comienzo de las dos ondas para que la amplitud de la onda resultante sea igual que la de cada una de las ondas iniciales.

Solución

Como no nos dicen nada de la dirección de propagación, la elegimos apuntado a las x positivas para las dos ondas. Nos dicen que son idénticas y que tienen la misma longitud de onda (y por ende el mismo k) y la misma velocidad (por tanto, la misma ω). La única diferencia es que una comienza antes que la otra, o sea,

$$y_1(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \delta)\,, \tag{63}$$
$$y_2(x,t) = A\sin(\omega(t+\Delta t) - kx + \delta)\,. \tag{64}$$

donde Δt es la diferencia entre los instantes en que se originaron las ondas (y lo elegimos positivo sin pérdida de generalidad).

La onda resultante, será la suma de ambas. Por sencillez, vamos a usar la abreviación $\alpha \equiv \omega t - kx + \delta$.

$$y_{\mathrm{T}}(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\left[\sin(\alpha) + \sin(\alpha + \omega\Delta t)\right]\,. \tag{65}$$

Ahora usamos la identidad trigonométrica

$$\sin(A) + \sin(B) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\,, \tag{66}$$

resultando entonces:

$$y_{\mathrm{T}}(x,t) = 2A\sin\left(\frac{2\alpha+\omega\Delta t}{2}\right)\cos\left(\frac{-\omega\Delta t}{2}\right) \tag{67}$$
$$= 2A\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\omega\Delta t}{2}\right)\,. \tag{68}$$

Abriendo todo, vemos que hemos llegado a la onda siguiente

$$y_{\mathrm{T}}(x,t) = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}_{\text{amplitud}}\sin\left(\omega t - kx + \delta + \frac{\omega\Delta t}{2}\right)\,. \tag{69}$$

Nos piden cuál debe ser Δt para que la amplitud de esta onda resultante sea la misma que la de partida, o sea A. Tenemos pues la ecuación:

$$2A\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = A \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\omega\Delta t}{2} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{2\pi}{3\omega}\,, \tag{70}$$

del arcocoseno nos hemos quedado con la solución positiva menor de todas, la cual nos proporciona el Δt menor, de acuerdo al enunciado. En función de los datos que nos dan (la longitud de onda λ y la velocidad v):

$$\omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda}v \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta t = \frac{\lambda}{3v} = 0{,}5\ \mathrm{s}}\,. \tag{71}$$