



Optimización matemática unidimensional aplicada a la ecuación de radiación espectral de cuerpo negro de Planck en estrellas a partir de su temperatura superficial

Miguel A. Lopez-Olvera¹, Susana Pineda-Solis¹ y José Antonio Rivera-García¹

¹ ENES Juriquilla, Universidad Nacional Autónoma de México, Querétaro, Querétaro, México

INTRODUCCIÓN

Optimización matemática

Los métodos de optimización univariable ayudan a encontrar los máximos y mínimos de una función $f(x)$, este tipo de optimización ayuda a encontrar máximos o mínimos locales o globales, siendo estos casos multimodales. En muchos problemas nos interesa encontrar el valor absoluto más alto o más bajo de una función, por lo tanto, debemos tener cuidado de no confundir un resultado local con el óptimo global. Distinguir un punto global de un local puede ser un problema muy difícil para el caso general. Hay tres formas habituales de abordar este problema. En primer lugar, a veces se puede obtener información gráfica sobre el comportamiento de las funciones que dependen de una sola variable. En segundo lugar, encontrar óptimos basados en conjeturas iniciales muy variables y quizás generadas al azar, y luego seleccionar la más grande de ellas como global. Finalmente, perturbar el punto de partida asociado con un óptimo local y ver si la optimización generada devuelve un mejor punto o siempre vuelve al mismo punto. Aunque todos estos enfoques pueden tener utilidad, el hecho es que en algunos problemas, es posible que no exista una forma práctica de asegurarse de haber localizado un óptimo global, por lo que se debe estar conciente que la mayoría de los problemas que se enfrentan a la optimización se encuentran en un riesgo considerable de encontrar un máximo o mínimo que no sea el global. Una imagen que se suele ofrecer respecto al funcionamiento de este tipo de métodos (que analizan funciones univariadas) es la de una montaña rusa, pues en ésta se observa que existen puntos máximos y mínimos, entre los cuales se encuentran los puntos de optimización globales. Al igual que en la ubicación de la raíz, la optimización en una dimensión se puede dividir en métodos abiertos y de *bracketing* [1].

El método utilizado para éste documento es:

- *Método de sección aurea* es necesario identificar el intervalo de búsqueda, se necesitan cuatro puntos en la búsqueda del máximo. A partir de los cuatro valores de la función se monitorea la relación entre ellos para acotar el intervalo de búsqueda durante el proceso. Si el intervalo que contiene el máximo, la elección de los dos puntos interiores requeridos podría ser arbitraria. Sin embargo, puede establecerse una regla que permita hacer más eficiente el proceso de búsqueda [2].

RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

La radiación del cuerpo negro es la radiación electromagnética térmica dentro o alrededor de un cuerpo en equilibrio termodinámico con su entorno, o emitida por un cuerpo negro (un cuerpo opaco y no reflectante). Tiene un espectro y una intensidad específicos que dependen solo de la temperatura del cuerpo, que se asumen para simplificar los cálculos y la teoría como uniformes y constantes [3].

Un cuerpo negro a temperatura ambiente aparece negro, ya que la mayor parte de la energía que irradia es infrarroja y no puede ser percibida por el ojo humano. Debido a que el ojo humano no puede percibir ondas de luz a frecuencias más bajas, un cuerpo negro, visto en la oscuridad a la temperatura más baja y apenas visible, aparece subjetivamente gris, aunque su pico de espectro físico objetivo está en el rango infrarrojo. Cuando se pone un poco más caliente, aparece rojo apagado. A medida que aumenta su temperatura, se vuelve amarillo, blanco y, finalmente, azul-blanco [3].

Aunque los planetas y las estrellas no están en equilibrio térmico con sus alrededores ni los cuerpos negros perfectos, la radiación del cuerpo negro se usa como primera aproximación de la energía que emiten [3].

Las ecuaciones que describen la radiación de un cuerpo negro fueron descubiertas por Max Planck a comienzos del siglo XX y, por ello, a menudo se llama radiación de Planck

a la radiación del cuerpo negro; la ley de Plank está definida por [3, 5]:

$$E = \frac{2hv^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1} \quad (1)$$

Donde:

E: Luminosidad espectral

v: Densidad de frecuencia

T: Temperatura absoluta del cuerpo

λ : Longitud de onda

h : Constante de Plank

c : Velocidad de la luz

k : Constante de Boltzmann

Radiación de una estrella

La emisión del espectro continuo consiste en cualquier proceso físico que emite fotones en un amplio abanico de diferentes longitudes de onda. Como ejemplo podemos imaginarnos la banda de luz que se ve al observar la luz del día a través de un prisma: se ven varias bandas de colores (rojo, naranja, amarillo, azul, añil y violeta). Todos estos colores están siempre presentes a la vez en la luz del Sol, pero no se aprecian por separado, sencillamente el Sol se ve blanco [5].

Hay algunos conceptos relativos a la radiación de un cuerpo negro que son muy útiles en la astrofísica estelar. En primer lugar, la ley de Wien consiste en una ecuación simple que nos da la longitud de onda a la que la estrella emite más luz (esto es, el máximo del espectro del cuerpo negro) [5].

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

donde λ es la longitud de onda, T es la temperatura del cuerpo negro y b es una constante, llamada constante de desplazamiento de Wien [5].

Se puede deducir a partir de la ecuación del cuerpo negro determinando dónde está el máximo de la curva: se calcula la temperatura y la longitud de onda en las que la derivada es cero. Esta es una ecuación muy útil, ya que nos permite estimar aproximadamente la temperatura de cualquier objeto parecido a un cuerpo negro sencillamente midiendo dónde está el máximo en su espectro. Muchas estrellas se comportan de modo tan parecido a un cuerpo negro que esta medición es muy simple; sin embargo falla en estrellas que muestran una absorción atómica o molecular tan intensa que sus espectros apenas coinciden con el de un cuerpo negro. Esto sucede a menudo con las estrellas enanas cuyos espectros de todos modos tienen el máximo en el infrarrojo cercano [5].

Por lo que entendiendo esto, sabemos que la ecuación de Planck puede ser utilizada para el cálculo de la longitud de onda máxima radiada por la estrella que se desee analizar.

OBJETIVOS

Objetivo general

Optimizar la ecuación de radiación espectral, por medio de la aplicación de un método de optimización unidimensional desarrollado en la clase de Computación III correspondiente a V semestre de la Licenciatura en Tecnología, para comprobar la funcionalidad e importancia de los métodos de optimización.

Objetivos particulares

1. Optimizar la función de radiación espectral de un cuerpo negro para las estrellas Aldebaran, Capellana, Canopus y el Sol, para conocer la longitud de onda máxima en la que se encuentra radiando cada una de ellas, por medio de la aplicación del método de sección aurea.
2. Asociar la temperatura con la longitud de onda máxima encontrada para cada una de las estrellas, para conocer en que parte del espectro de luz visible se encuentran.

Planteamiento del problema

Los conceptos de programación y la programación misma, son fundamentales para la elaboración de trabajos prácticos con equipos reales, que ayudan a la solución de problemas físicos, biológicos, sociales, etc., por lo que es importante que el alumno sea conciente de los problemas que puede solucionar con este tipo de herramientas, por lo que debe interpretar y aplicar los diversos contenidos establecidos en los programas de la asignatura de Computación III, dando sentido a una serie de formulismos matemáticos que parecieran carecer de significado físico. Al respecto, la experimentación interactiva con fenómenos del mundo real, actúa como complemento a la enseñanza de programación, fomentando el interés de los estudiantes, y desarrollando aptitudes en ellos para resolver problemas físicos que por lo general, son tratados con muchas restricciones y alejados de los problemas reales. Por lo que es importante asociar el método de optimización unidimensional de la sección aurea como herramienta para la solución algún problema físico de la vida real, permitiéndole al alumno identificar problemas que puede solucionar con ayuda de los conocimientos adquiridos en clase.

Hipótesis

El método de optimización de la sección aurea nos ayudará a conocer la longitud de onda máxima radiada por las estrellas Aldebaran, Capellana, Canopus y el Sol, para poder asociar ésta longitud de onda a un valor de espectro electromagnético visible.

PROCESO EXPERIMENTAL

Método de la sección aurea

El método de la sección aurea se puede aplicar para encontrar puntos máximos o mínimos de una función unidimensional, se ejecuta mediante reducciones sucesivas de un rango de valores en los cuales se conoce, o asume, que se encuentra un punto extremo, sea máximo o mínimo.



El método se divide en dos partes, la primera busca los puntos mínimos de una función, mientras que la segunda busca los puntos máximos, en este proyecto el método de la sección aurea se utiliza para encontrar puntos máximos. El código fuente se realiza en python 3; de la función analizada los puntos máximos corresponden a los valores de longitud de onda en donde la radianza espectral de un cuerpo negro es máxima, que dependerá únicamente de la temperatura del cuerpo analizado.

Para corroborar los puntos máximos arrojados por el método de la sección aurea se utilizó la librería de matplotlib para graficar cada una de las funciones de radiación de los cuerpos negros que se seleccionaron, y los cuales serán descritos en la siguiente sección.

Las estrellas y su temperatura

Para llevar a cabo la optimización unidimensional se decide trabajar con un total de 4 estrellas, de las cuales se tiene conocimiento la temperatura promedio de su superficie, por lo que está será nuestra variable a tomar en el método de optimización. A continuación se muestra una tabla con las estrellas seleccionadas y su temperatura asociada.

Estrella	Temperatura (K)
Aldebarán	4000
Sol	5770
Capella	6000
Canopus	7300

TABLA 1: TEMPERATURA DE ESTRELLAS

La temperatura de las estrellas se usa como la variable de la evaluación de cada una de las funciones para que de esta forma quedaran funciones dependientes de una única variable, que en éste caso es la longitud de onda. De esta forma se obtiene un total de 4 funciones diferentes, se introducen al método de la sección aurea para encontrar los valores de longitud de onda en los cuales la radianza espectral es máxima, en otras palabras, se encontraron los puntos máximos para cada una de las funciones, y consecutivamente se asocian con su espectro electromagnético.

RESULTADOS

1. *Puntos de radianza espectral máxima.* Los valores máximos para cada una de las funciones se obtuvieron con ayuda del método de la sección aurea y para interpretar cada valor obtenido en los ejes de las abscisas y ordenadas se establecieron las unidades usadas. En la TABLA 2 se encuentran los valores máximos de radianza espectral (ordenadas) y de longitud de onda (abscisas).

Estrella	T [K]	$\lambda_{max}[um]$	Radianza [$\frac{kW}{sr \cdot m^2 \cdot um}$]
Aldebarán	4000	0.725	4.175
Sol	5770	0.502	26.079
Capella	6000	0.483	31.708
Canopus	7300	0.397	84.534

TABLA 2: COMPARACIÓN DE LAS TEMPERATURAS Y LOS PUNTOS MÁXIMOS ENCONTRADOS

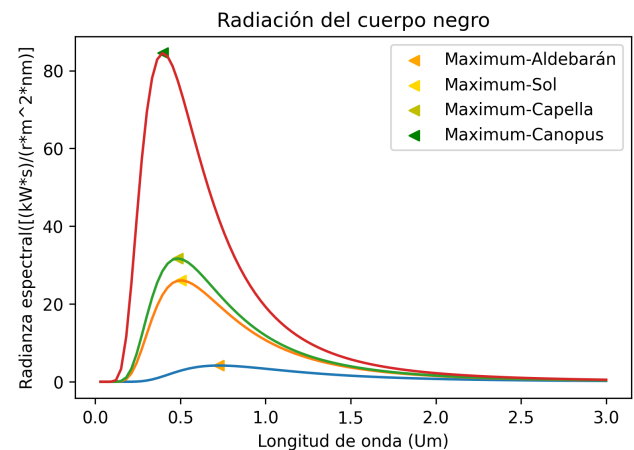


Fig. 1: Funciones que describen la radiación del cuerpo negro a diferentes temperaturas. En las abscisas se describe el incremento en la longitud de onda y en las ordenadas se encuentra la radiación espectral o intensidad de la radiación del cuerpo negro.

2. *La longitud de onda de radiancia espectral máxima depende de la temperatura de cada cuerpo.* Como se observa en el gráfico de los tipos espectrales, las estrellas van del rojo al amarillo, pasando por una zona de color blanco y luego se hacen cada vez más azules con la temperatura. Por tanto, la causa de que no existan estrellas verdes es que el verde está justo en la mitad del rango de longitudes de onda del visible, así que la emisión de la estrella es bastante simétrica en todo ese rango, y lo que vemos es una estrella que emite prácticamente la misma intensidad en todas las longitudes de onda, es decir, el blanco.

Los resultados mostrados en la TABLA 2 muestran que la temperatura de las estrellas está directamente relacionada con el valor en el que la longitud de onda arroja un valor de intensidad máxima, lo cual a su vez se relaciona con el color de las estrellas, mostrándose en la siguiente tabla:

Estrella	Color	$\lambda_{max}[um]$
Aldebarán	Naranja	0.725
Sol	Naranja-Amarillo	0.502
Capella	Amarillo	0.483
Canopus	Blanca	0.397

TABLA 3: COMPARACIÓN DE LAS TEMPERATURAS Y LOS PUNTOS MÁXIMOS ENCONTRADOS

Las estrellas moradas son algo que el ojo humano no verá fácilmente porque nuestros ojos son más sensibles a la luz azul, puesto que una estrella que emite luz morada también envía luz azul y los dos colores están uno al lado del otro en el espectro de luz visible, provocando que el ojo humano capte la luz azul.

CONCLUSIONES

El método de optimización unidimensional de la sección aurea, ayudó a cumplir con la hipótesis de este trabajo, arrojando los puntos máximos de la función analizada, por lo que se logró conocer las longitudes de onda máximas en las que radía cada una de las estrellas seleccionadas, asociando éstas a su espectro de luz visible.

REFERENCIAS

- [1] Chapra, C. S. (2015). Numerical Methods For Engineers (7.a ed.). MCGRAW HILL EDDUCATION.
- [2] Gutierrez, O. L. (2016). MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER ECUACIONES Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN NO LINEALES. ptolomeo.unam.mx. <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/jspui/bitstream/132.248.52.100/10589/1/tesis.pdf>
- [3] Colaboradores de Wikipedia. (2020, 12 octubre). Radiación de cuerpo negro. Wikipedia, la enciclopedia libre. http://es.wikipedia.org/wiki/Radiaci%C3%B3n_de_cuerpo_negro#:~:text=Un%20objeto%20que%20absorbe%20toda,llama%20radiaci%C3%B3n%20de%20cuerpo%20negro.
- [4] Apéndice B: Por qué y cómo emiten radiación las estrellas. (s. f.). aavso.org. https://www.aavso.org/sites/default/files/publications_files/ccd_photometry_guide/CCDPhotometryGuideSpanish/SpanishPhotometryGuide-AppendixB.pdf
- [5] Instituto de Astrofísica Andalucía. (2007). El color de las estrellas. 2020, de A través del Universo <http://universo.iaa.es/php/190-el-color-de-las-estrellas.htm>