

Definición $O(F(n))$: orden de (de orden). Si $F(n)$ es una función de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{0\}$, se define $O(F(n))$ como el conjunto de todas las funciones $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tales que $t(n) \leq CF(n)$ para todo $n > n_o$ siendo C una constante real positiva y un entero $n_o > 0$.

$$O(F(n)) = \{t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid \exists C \in \mathbb{R}^+, \exists n_o, \forall n \geq n_o, t(n) \leq Cf(n)\}$$

Corolario: Cuando $t(n)$ y $F(n)$ son funciones positivas \mathbb{R}^+ $t(n)$ es $O(F(n))$ si existe $C \geq 0$ tal que $t(n) < CF(n) \forall n > 0$ (es decir, no siempre es cero)

Álgebra de $O(F(n))$: si t_1 es $O(F(n))$ y t_2 es $O(G(n))$, entonces:

a) $t_1(n) + t_2(n)$ es de $O(\max\{F(n), G(n)\})$

b) $t_1(n) * t_2(n)$ es de $O(F(n) * G(n))$

Regla del límite:

1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L \in \mathbb{R}^+$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$

2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ pero $g(n) \notin O(f(n))$

3) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \rightarrow \infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n))$ pero $g(n) \in O(f(n))$

Propiedades de $O(f(n))$:

1) $F(n)$ es $O(F(n))$

2) Si $t(n)$ es $O(F(n))$ y $F(n)$ es $O(G(n))$, entonces $t(n)$ es $O(G(n))$

Definición $\Omega(F(n))$: Cota inferior. Si $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $t(n)$ está en $\Omega(F(n))$ si $t(n)$ está acotada inferiormente por un múltiplo real positivo de $F(n)$ para todo n suficientemente grande. Es decir, si existe $d \in \mathbb{R}^+$ y un entero n_o tal que $t(n) \geq dF(n)$ para todo $n \geq n_o$

$$\Omega(F(n)) = \{t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid \exists d \in \mathbb{R}^+, \exists n_o \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, t(n) \geq dF(n), \text{ siendo } n \geq n_o\}$$

Propiedad 3: Si $F(n) \in \Omega(G(n))$, entonces $G(n)$ es $O(F(n))$

Notación theta. $\Theta(F(n))$. Definición: Si $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $t(n)$ es $\Theta(F(n))$ (está en el orden exacto de $F(n)$) si $t(n)$ es $O(F(n))$ y $t(n)$ es $\Omega(F(n))$.

Se puede expresar como: $\Theta(F(n)) = O(F(n)) \cap \Omega(F(n))$

$$\Theta(F(n)) = \{t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mid \exists c, d \in \mathbb{R}^+, \exists n_o \in \mathbb{N}, dF(n) \leq t(n) \leq cF(n), \forall n \geq n_o\}$$

Propiedad de límite para $\Theta(F(n))$: Si $F(n)$ y $G(n)$ son funciones $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{G(n)} = L \in \mathbb{R}^+$ entonces $F(n)$ es $\Theta(G(n))$

2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{G(n)} = 0$ entonces $F(n)$ es $O(G(n))$ pero $F(n)$ no es $\Theta(G(n))$

3) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{G(n)} \rightarrow \infty$ entonces $F(n) \notin \Theta(G(n))$ pero $G(n) \in O(F(n))$

