



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Proyecto: Conducción de calor**

PRESENTA

**Fuentes Rubio Natalia Denise - 415119296**  
**Hernández Sandoval Kelly Pamela - 312297473**  
**Reyes Romero Alejandro - 417083191**

PROFESOR

**Dr. Luis Miguel de la Cruz Salas**

ASIGNATURA

**Geofísica Matemática Computacional**

**16 de noviembre de 2020**

---

## 1. Modelo conceptual

La transferencia de calor se puede definir como energía térmica en tránsito debido a la diferencia espacial de temperatura, por lo tanto si existe diferencia de temperatura en un medio, la transferencia de calor ocurrirá (Bergman y Lavine, 2017).

Existen diferentes tipos de transferencias de calor:

- **Conducción:** se refiere a la transferencia de calor que ocurre por la diferencia de temperatura en un medio estacionario, ya sea un sólido o un fluido. Este calor irá de la región con mayor temperatura a la región con menor temperatura.
- **Convección:** se refiere a la transferencia de calor que ocurre entre una superficie y un fluido en movimiento, los cuales están a diferente temperatura.
- **Radiación térmica:** las superficies que tienen una temperatura determinada emiten energía en forma de ondas electromagnéticas, por lo que si no existe un medio entre dos superficies, existirá intercambio de calor entre estas.

Ahora bien, nos enfocaremos en la conducción de calor.

La teoría matemática de la conducción de calor fue desarrollado en el siglo XIX por Joseph Fourier.

Serth y Lestina (2014), explican que esta se basó en los resultados de un experimento de un sólido, en el cual uno de sus lados rectangulares se encuentra a una temperatura  $T_1$ , mientras que el lado opuesto a este se encuentra con una temperatura  $T_2$  y las otras caras restantes son aislantes, de este modo, el flujo de calor solo va en una dirección, la dirección  $x$ . Para un material dado, la tasa,  $q_x$ , a la cual el calor se transfiere del lado con mayor temperatura, al lado con menor temperatura es proporcional al área transversal,  $A$  en la que pasa el flujo de calor. Además, la diferencia de temperatura,  $T_1 - T_2$ , es inversamente proporcional al grosor del material, por lo tanto, se tiene la siguiente ecuación:

$$q_x \propto A \frac{(T_1 - T_2)}{B} \quad (1)$$

Para escribirla como igualdad, tenemos que:

$$q_k = kA \frac{(T_1 - T_2)}{B} \quad (2)$$

Donde  $k$  que es la constante de proporcional, que es la conductividad térmica. La ecuación 2, puede escribirse de una manera más general para un elemento con espesor diferencial, quedando de la siguiente manera:

$$q_x = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (3)$$

El límite de  $\Delta x$  se acerca a cero, por lo que

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (4)$$

Esta es la ecuación en una dimensión de la Ley de Fourier. El signo negativo es necesario debido al flujo de calor en la dirección positiva de  $x$  cuando la temperatura decrece en esa dirección. De este modo, con base en la convención de signos estándar, que  $q_x$  es positivo cuando el flujo de calor va en la dirección positiva de  $x$ ,  $q_x$  debe ser positivo cuando  $\frac{dT}{dx}$

Es conveniente dividir la ecuación anterior por el área, quedando lo siguiente:

$$q_x'' \equiv \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (5)$$

Donde  $q''$  es el flujo de calor. Este tiene unidades de  $J/s \cdot m^2 = W/m^2$ . Y las unidades de  $K$  son  $W/m \cdot K$ . Estas ecuaciones están restringidas a la situación en la que el calor fluye en dirección de  $x$  solamente.

Para entender mejor el tema se propuso conocer la distribución de temperatura al interior de la pared de un horno

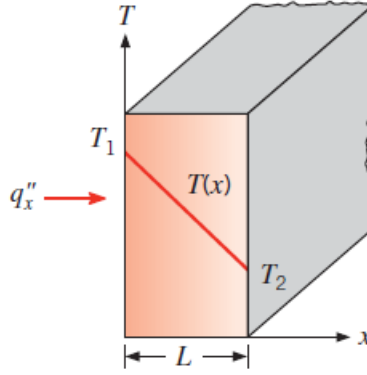


Figura 1: Pared de un horno. Tomado de Serth y Lestina (2014)

Se estudió la transferencia de calor en un dominio que va de una temperatura  $T_1$  ó  $T_A$  a una temperatura  $T_2$  o  $T_B$ , con una conductividad térmica de valor  $k$  y una longitud total  $L$ . Como se mencionó anteriormente se considera que en las caras horizontales, las paredes son adiabáticas, las temperaturas de los extremos son fijas, no se consideran fuentes ni sumideros, se quiere conocer la temperatura al interior del dominio y el dominio es adimensional.

## 2. Modelo matemático

A partir de la ecuación general de calor:

$$c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla T \right) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{q}_x'' = Q \quad (6)$$

Se multiplica por la densidad y como en este caso nos referimos a la transferencia de calor en un caso estacionario el problema no será dependiente del tiempo, y si utilizamos la ley de Fourier:

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = Q \quad (7)$$

Lo cual es la ecuación de conducción de calor en estado estacionario. Para un valor de  $\kappa = \text{const}$ :

$$-\kappa \nabla^2 T = Q \quad (8)$$

Donde  $Q = 0$  en el caso que no existan fuentes y sumideros de energía calorífica en el sistema.

$$-\kappa \nabla^2 T = 0 \quad (9)$$

## 3. Modelo numérico

Para comprender las ecuaciones descritas en el modelo matemático, se han desarrollado muchos métodos numéricos con los que es posible encontrar soluciones numéricas aproximadas, para este caso recurrimos a los métodos de diferencias finitas usando aproximaciones por series de Taylor.

Dicho método divide al modelo en una serie de nodos para los cuáles se obtiene una ecuación con la cual se calcula su temperatura.

El resultado final de su aplicación es un sistema con N-ecuaciones correspondientes a los N-nodos del sistema, que sustituyen a las ecuaciones en derivadas parciales y a las condiciones de frontera que se aplican.

Si la cantidad de nodos es pequeña, se opta por utilizar técnicas normales para la resolución de las ecuaciones; en cambio si este número aumenta se opta por aplicar métodos iterativos, e incluso si se llega a tener un número muy grande se puede considerar la opción de implementar programas computacionales.

$$\kappa_i \left( \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} \right) = Q_i \quad (10)$$

Esta ecuación representa la conducción de calor en el nodo  $i$ , y hace uso de sus vecinos  $(i+1)$  e  $(i-1)$ . La ecuación anterior se puede reescribir como:

$$r_i T_{i-1} - 2r_i T_i + r_i T_{i+1} = Q_i \quad (11)$$

Donde  $r_i$  se define como:

$$r_i = \frac{k_i}{h^2} \quad (12)$$

Entonces, para cada nodo se obtiene una ecuación lineal, con las cuales se construirá un sistema de ecuaciones que se resolverá mediante la siguiente matriz:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{N \times N}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}_N} = \frac{1}{r} \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \\ Q_N \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}_N} + \underbrace{\begin{bmatrix} -T_A \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -T_B \end{bmatrix}}$$

Se realizaron 3 calibraciones. Uno de estos es con condiciones de Tipo Dirichlet, solucionando el siguiente caso:

$$\frac{d^2(x)}{dx^2} = -f^2 u(x) \quad (13)$$

donde  $x \in [0, 1]$

$$u(0) = 1$$

$$u(1) = 1$$

Y su solución analítica es:

$$u(x) = \frac{1 - \cos(f)}{\sin(f)} \sin(fx) + b \cos fx \quad (14)$$

El sistema que resuelve esta calibración es similar a la anterior, la única diferencia es que la diagonal principal tiene valor de  $f^2 h^2 - 2$ . Donde  $f$  es una constante que puede variar, pero que tanto en la ecuación numérica como en la analítica, debe ser la misma, por último,  $b$  es otra constante que se desconoce, pero se considera como 1.

La calibración 2, Poisson en 1D con una condición de tipo Neumann IV

$$\frac{d^2(x)}{dx^2} = e^x \quad (15)$$

donde  $x \in [0, 1]$

$$\frac{du}{dn}(0) = 0$$

$$u(1) = 3$$

Y su solución analítica es:

$$u(x) = e^x - x - e + 4 \quad (16)$$

El sistema de ecuaciones que resuelve el problema es el siguiente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{(N+1) \times (N+1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \\ f_{N+1}/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -hB \end{bmatrix}$$

La calibración 3, Poisson 1D con conductividad no constante

$$\frac{1}{h^2} \left[ \kappa_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1} + \left( \kappa_{i+\frac{1}{2}} + \kappa_{i-\frac{1}{2}} \right) u_i \kappa_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1} \right] = f_1 \quad (17)$$

Además se calcula el error cuando se tiene una solución analítica con la cual comparar, esto se hace calculándolo mediante la norma Euclidiana:

$$\|E\|_2 = \left( h \sum_{i=1}^N |E_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

---

## Referencias

- Bergman, T. y Lavine, A. (2017). *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, Estados Unidos, 8va edición.
- Serth, R. W. y Lestina, T. G. (2014). *Process Heat Transfer Principles, Applications and Rules of Thumb*. Academic Press, Boston, second edition edición.