Inciso (a)

Determinar coeficientes de One Sided D_{+2}

$u_i' = Au_{i+2} + Bu_{i+1} + Cu_i$

Donde por Series de Taylor:

$$u_{i+2} = u_i + u_i'(2h) + \frac{(2h)^2}{2!}u_i'' + \frac{(2h)^3}{3!}u_i''' + O(h^4)$$

$$u_{i+1} = u_i + u_i'(h) + \frac{(h)^2}{2!}u_i'' + \frac{(h)^3}{3!}u_i''' + O(h^4)$$

$$u_i = u_i$$

Para obtener $u_i' = Au_{i+2} + Bu_{i+1} + Cu_i$, sustituimos:

$$u_i' = A\left(u_i + u_i'(2h) + \frac{4h^2}{2}u_i'' + \frac{8h^3}{6}u_i''' + O(h^4)\right) + B\left(u_i + u_i'(h) + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u_i''' + O(h^4)\right)$$
$$+ C(u_i).$$

Los términos de h^3 en este caso no son necesarios, por lo que tenemos un sistema de orden dos $O(h^2)$ al tener como máximo h a $\underline{h^2}$

Agrupando:

$$u_i' = (A+B+C)u_i + (2A+B)hu_i' + (2A + B/2)h^2u_i''$$

Solucionando el sistema:

① $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 2A & B & 0 \\ 2A & B/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 2A & B & 0 \\ 4A & 2B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0 & -B & -2C \\ 0 & -3B & -4C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \end{bmatrix}$

④ $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0 & B & 2C \\ 0 & 3B & 4C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/h \\ 0 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0 & B & 2C \\ 0 & 0 & -2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1/h \\ 3/h \end{bmatrix}$

Por lo que:

$$C = -\frac{3}{2h}$$

$$B = -\frac{1}{h} + \frac{3}{h} = \frac{2}{h}$$

$$A = -\frac{2}{h} + \frac{3}{2h} = -\frac{4}{2h} + \frac{3}{2h} = -\frac{1}{2h}$$

$$\therefore \ u_i' = \frac{-u_{i+2} + 4u_{i+1} - 3u_i}{2h}$$

Inciso (b)

Para one sided D_{3-} : $u_i' = A u_{i+2} + B u_{i+1} + C u_i + D u_{i-1}$

Por Series de Taylor:

$$u_{i+2} = u_i + (2h)u_i' + \frac{(2h)^2}{2!}u_i'' + \frac{(2h)^3}{3!}u_i''' + O(h^4)$$

$$u_{i+1} = u_i + (h)u_i' + \frac{h^2}{2!}u_i'' + \frac{h^3}{3!}u_i''' + O(h^4)$$

$$u_i = u_i$$

$$u_{i-1} = u_i + (-h)u_i' + \frac{(-h)^2}{2!}u_i'' + \frac{(-h)^3}{3!}u_i''' + O(h^4)$$

Sustituyendo en D_{3-}:

$$u_i' = A\left(u_i + 2hu_i' + \frac{4h^2}{2}u_i'' + \frac{8h^3}{6}u_i''' + O(h^3)\right) + B\left(u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u_i''' + O(h^4)\right) +$$
$$C(u_i) + D\left(u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u_i''' + O(h^4)\right)$$

Agrupando:

$$u_i' = (A+B+C+D)u_i + (2A+B-D)hu_i' + \left(2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2}\right)h^2u_i''$$
$$+ \left(\frac{8}{6}A + \frac{1}{6}B - \frac{1}{6}D\right)h^3u_i'''$$

Dado que la mayor h es h^3 es de orden 3: $\underline{O(h^3)}$

Solucionando para A, B, C y D por Gauss - Jordan:

$$\text{I}\begin{bmatrix} A+B+C+D \\ 2A+B+0-D \\ 4A+B+0+D \\ 8A+B+0-D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{III}\begin{bmatrix} A+B+C+D \\ 0+B+2C+3D \\ 0+0+2C+6D \\ 0+0+6C+12D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/h \\ -3/h \\ -7/h \end{bmatrix}$$

$$\text{II}\begin{bmatrix} A+B+C+D \\ 0+B+2C+3D \\ 0+3B+4C+3D \\ 0+7B+8C+9D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{IV}\begin{bmatrix} A+B+C+D \\ 0+B+2C+3D \\ 0+0+2C+6D \\ 0+0+0-6D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/h \\ -3/h \\ 2/h \end{bmatrix}$$

Por lo que:

$$\underline{D = -\frac{1}{3h}}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{h} - 6\left(-\frac{1}{3h}\right)\right)$$

$$\underline{C = -\frac{1}{2h}}$$

$$B = \left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h}\right)$$

$$\underline{B = \frac{1}{h}}$$

$$A = -\frac{1}{h} + \frac{1}{2h} + \frac{1}{3h}$$

$$\underline{A = -\frac{1}{6h}}$$

Por lo que:

$$u_i' = Au_{i+2} + Bu_{i+1} + Cu_i + Du_{i-1}$$

$$u_i' = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6h}$$

Inciso (c)

Para obtener Centered - D_0^2:

Por Series de Taylor:

$$u_{i+1} = u_i + u_i'(h) + u_i'' \frac{h^2}{2!} + u_i''' \frac{h^3}{3!} + \dots + O(h^4) \dots [1]$$

$$u_{i-1} = u_i - u_i'(h) + u_i'' \frac{h^2}{2!} - u_i''' \frac{h^3}{3!} + \dots + O(h^4) \dots [2]$$

Al sumar [1] y [2]:

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + 2u_i'' \frac{h^2}{2}$$

Despejando u_i''

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

La cual es una aproximación de orden 2. $O(h^2)$