UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

SpyHeat

PRESENTA

Esteves Fragoso Octavio Samuel - 313147890
Flores Abraham
Fuentes Rubio Natalia Denise - 415119296
García Barragán José Andrés - 304136401
Hernández Teran Oscar - 417038005
Reyes Romero Alejandro - 417083191
Rodríguez Mendoza Alban Alexis - 313277762

PROFESOR

Dr. Luis Miguel de la Cruz Salas

ASIGNATURA

Geofísica Matemática Computacional

5 de enero de 2021

1. Modelo Conceptual

En un sistema donde existan diferencias de temperatura en diferentes zonas espaciales va a haber un transporte de la energía térmica. Este transporte de energía se conoce como transferencia de calor y se puede llevar a cabo por distintos mecanismos.

Conducción: Es la transferencia de calor dentro de un solo medio estacionario, ya sea sólido o fluido, que ocurre por la diferencia de temperatura en dos secciones del medio. La transferencia siempre se lleva a cabo de la región con mayor temperatura a la región con menor temperatura.

Convección: Es la transferencia de calor mediante el movimiento de un fluido que esta en contacto con una superficie a diferente temperatura. El fluido al calentarse se mueve alejándose de la superficie llevándose con el parte de la energía térmica de la superficie.

Radiación: Cuando una superficie se encuentra aislada, esta emite onda electromagnéticas que liberan y transportan la energía térmica de la superficie.

1.1. Conducción

En 1822 Joseph Fourier publicó una teoría muy completa acerca de la conducción del calor. Primeramente empezó afirmando la ley empírica que terminaría llevando su nombre. La ley de Fourier afirma que el flujo de calor, $(q(\frac{W}{m^2}))$, resultante de la conducción térmica es proporcional a la magnitud del gradiente de temperatura y con signo opuesto. Si consideramos una constante de proporcionalidad, k, entonces podemos definir:

$$q = -k\frac{dT}{dx} \tag{1}$$

Donde k es la constante de conductividad térmica y tiene unidades de $\frac{W}{m \cdot k}$ o equivalentes y es una propiedad de cada material que representa la facilidad de conducir energía térmica. De esta manera, si deseamos cuantificar el proceso de transferencia de calor a través de la ecuación de Fourier necesitamos conocer las medidas y las temperaturas de la superficie. En la figura 1 podemos observar una representación de un material con T_1 en un extremo y T_2 en el otro. Considerando el material como un caso estacionario y considerando la transferencia de calor únicamente en una dimensión (x), el gradiente de temperaturas se puede escribir como:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{(T_2 - T_1)}{L} \tag{2}$$

por lo tanto,

$$q = -k\frac{(T_2 - T_1)}{L} = -k\frac{\triangle T}{L} \tag{3}$$

Es importante notar que la transferencia de calor por conducción a través de la pared plana y no únicamente en un dimensión es proporcional al área (A) de la superficie, por ende, $q^{''} = A \cdot q$. A continuación es necesario encontrar no solo el gradiente de temperatura del área sino que es necesario conocer la distribución de temperaturas a lo largo del material. Para ello debemos plantear varias hipótesis y obtener un modelo matemático para $T(x)$ y la solución de ese modelo, ya sea analítica y/o numérica, nos dará la distribución de temperaturas a lo largo del material.

1.2. Convección

A diferencia de la transferencia de calor por conducción, en convección hay movimiento de masa de un fluido generado por el gradiente de temperatura y este movimiento es lo que genera la transferencia de calor. El movimiento de convección puede ser llevado a cabo por el gradiente de temperatura de manera natural o el movimiento puede ser forzado para facilitar el transporte de energía.

2. Modelo Matemático

2.1. Conducción de calor estacionario

Para poder definir un modelo matemático es necesario definir un dominio sobre el que calcular. En este caso consideramos un dominio unidimensional donde los extremos tienen temperaturas fijas T_A y T_B y tiene paredes adiabáticas. Conocemos la ecuación general para transporte de calor por conducción:

$$C_P((\frac{\partial T}{\partial t}) + v \cdot \nabla T) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot q^{''} = Q \tag{4}$$

Como estamos considerando un estado estacionario, significa que el sistema no depende del tiempo, por lo que:

$$-\nabla \cdot q^{''} = Q \tag{5}$$

Sustituimos por la ecuación para el flujo de calor:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = Q \tag{6}$$

Como k es constante:

$$k \nabla^2 T = Q \tag{7}$$

2.2. Convección de calor estacionario

Para el caso del modelo matemático para el transporte de calor con convección, la ecuación general se define como:

$$C_P \rho \frac{\partial T}{\partial t} + C_P \rho \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j T) - \frac{\partial}{\partial x_j}(k \frac{\partial T}{\partial x_j}) = S \tag{8}$$

Donde:

Como el modelo es estacionario no depende del tiempo, por ende:

$$C_P \rho \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j T) - \frac{\partial}{\partial x_j}(k \frac{\partial T}{\partial x_j}) = S \tag{9}$$

2.3. Conducción de calor no estacionario

Cuando a un cuerpo sólido se le somete a un cambio en la temperatura del ambiente que lo envuelve, la temperatura de cada punto del cuerpo va a buscar un nuevo estado estacionario, el periodo durante el cual dicha temperatura varía con el tiempo se conoce como régimen transitorio.Para calcular la distribución de temperaturas durante el proceso transitorio, se puede utilizar tanto soluciones analíticas como soluciones numéricas. Cuando un sistema conduce energía en estado no-estacionario aparece una nueva variable independiente: el tiempo.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (k \nabla T) = Q \tag{10}$$

Cuando k = constante

$$\frac{\partial T}{\partial t} + k \nabla^2 T = Q \tag{11}$$

2.4. Convección de calor no estacionario

Partimos de la misma ecuación general para el transporte de calor por convección, con la diferencia de que en este caso si hay dependencia del tiempo, por lo tanto:

$$C_P \rho \frac{\partial T}{\partial t} + C_P \rho \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j T) - \frac{\partial}{\partial x_j}(k \frac{\partial T}{\partial x_j}) = S \tag{12}$$

3. Modelo Numérico

3.1. Conducción de calor estacionario

La primera parte para resolver de manera numérica una ecuación es la discretización. El objetivo es encontrar las contra partes discretas de un modelo continuo para posteriormente ser evaluadas de manera numérica mediante algoritmos computacionales.

El primer paso para discretizar es dividir el dominio en un numero conocido de subdominios. Una vez decidido el numero de subdominios es necesario conocer los lugares de estos subdominios donde se va a calcular la temperatura. Es importante saber que los subdominios de los extremos seran donde se apliquen las condiciones de frontera.Si se desea dividir el dominio en N subdominios, se obtendran N+2 nodos, donde el nodo 0 y el nodo N+1 son los extremos y tendremos N dominios interiores, en estos subdominios interiores es donde se va a calcular la temperatura y se dice que el dominio tiene N grados de libertad. Esta discretización del domino genera lo que se conoce como malla del dominio, la cual contiene las coordenadas de los nodos.

Usando la ecuación de conducción térmica:

$$k\nabla^2 T = Q \tag{13}$$

Como estamos en un caso unidimensional:

$$k\frac{d^2T}{dx^2} = Q \tag{14}$$

Además, las variables (T) se encuentran en las fronteras, por lo que se dice que tenemos condiciones tipo Dirichlet. Podemos obtener estas aproximaciones de la ecuación usando expansiones en series de Taylor.

Si consideramos un nodo interior i junto a los nodos i-1 y i+1 se puede obtener la siguiente aproximación para la segunda derivada en el nodo i:

$$\frac{d^2T}{dx^2}|_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \tag{15}$$

Para este caso, todos los nodos están separados por una distancia h.

Sustituimos esta serie de Taylor en la ecuación de conducción:

$$k(\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2}) = Q \tag{16}$$

Factorizamos:

$$r_i(T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}) = Q \tag{17}$$

Donde: $r_i = \frac{k}{h^2}$ Esta ecuación calcula el valor de la conducción de calor en el nodo i usando de referencia a sus vecinos.

Si nuestro modelo lo dividimos en N=4 subdominios podemos escribir una ecuación para cada uno de estos subdominios:

$$\begin{aligned} r_1(T_0 - 2T_1 + T_2) &= Q_1 \\ r_2(T_1 - 2T_2 + T_3) &= Q_2 \\ r_3(T_2 - 2T_3 + T_4) &= Q_3 \\ r_4(T_3 - 2T_4 + T_5) &= Q_4 \end{aligned} \tag{18}$$

De esta manera obtenemos un sistema lineal para encontrar la temperatura en cada uno de los 4 nodos.

Para poder incluir los valores de las fronteras solo tenemos que sustituir los valores de T en los nodos N-1 y N+1 que son T_A y T_B respectivamente, así que $T_0 = T_A$ y $T_{N+1} = T_B$.

3.2. Convección de calor estacionario

Para el caso del modelo númerico de convección, tenemos la ecuación general para el caso estacionario:

$$\rho\frac{\partial}{\partial x_j}(u_jT) - \frac{\partial}{\partial x_j}(k\frac{\partial T}{\partial x_j}) = S \tag{19}$$

Si consideramos u como constante:

$$\rho\frac{\partial T}{\partial x_j} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = S \tag{20}$$

Por lo que es necesario obtener la serie de Taylor para la derivada de segundo orden y también la de primer orden. Podemos obtener las siguientes aproximaciones:

$$\frac{d^2T}{dx^2}|_i = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} \tag{21}$$

$$\frac{dT}{dx}|_i = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} \tag{22}$$

Sustituyendo en la ecuación general:

$$\rho(\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h}) - k(\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2}) = S_i \tag{23}$$

Factorizando terminos:

$$-(\frac{\rho u}{2h} + \frac{k}{h^2})T_{i-1} + \frac{2k}{h^2}T_i + (\frac{\rho u}{2h} + \frac{k}{h^2})T_{i+1} = S_i \tag{24}$$

De igual manera que en la solución numérica para la conducción de calor, se hacen N ecuaciones dependiendo del número de nodos que se desea conocer, donde $i = 1...N$ y se utilizan las condiciones de frontera $T_0 = T_A$ y $T_{N+1} = T_B$. De esta manera se genera un sistema de ecuaciones para conocer los valor de la temperatura en cada nodo.

Claramente mientras más grande sea N más va a ser la precisión de la distribución de las temperaturas en el dominio pero de a misma manera la complejidad del sistema de ecuaciones también se hace mayor, por lo que es necesario emplear métodos computacionales para poder resolverlos.

3.3. Conducción de calor no estacionario

Para evaluar el curso de los fenómenos no estacionarios es ventajoso utilizar combinaciones de pruebas experimentales y un estudio de simulación por computadora realizado para las condiciones iniciales y de contorno requeridas. Tratamos un modelo matemático de conducción de calor no estacionaria bajo la condición de calentamiento o enfriamiento simétrico y también con calentamiento o enfriamiento asimétrico bajo la condiciones de transferencia de calor entre la superficie de la pared. Por lo tanto tenemos:

$$C_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}(k\frac{\partial T}{\partial x_j}) = S \tag{25}$$

3.4. Convección de calor no estacionario

Partimos de la expresión:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} = Q \tag{26}$$

Aproximaciones:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}|_i^n = \frac{T(x-h,t) - 2T(x,t) + T(x+h,t)}{h^2} = \frac{(T_{i-1}^n) - (2T_i^n) + (T_{i+1}^n)}{h^2} \tag{27}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}|_i^n = \frac{T(x+h,t) - T(x-h,t)}{2h} = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2h} \tag{28}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}|_i^n = \frac{T(x,t)-T(x,t-h_t)}{h_t} = \frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{h_t} \tag{29}$$

Sustituyendo en la ecuación general tenemos:

$$-(\frac{h_t u}{2h} + \frac{h_t \alpha}{h^2})T_{i-1}^n + (\frac{2h_t\alpha}{h^2}+1)T_i^n + (\frac{h_t u}{2h} - \frac{h_t\alpha}{h^2})T_{i+1}^n = Q_i + T_i^{n-1} \tag{30}$$

Para:

$$i = 1...N; n = 1...N_t \tag{31}$$

3.5. Solución 2D

Para resolver los casos expuestos con anterioridad en dos dimensiones, se parte de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_y^2} \tag{34}$$

Donde $h_x = \frac{L_x}{N_x+1}$ y $h_y = \frac{L_y}{N_y+1}$

Al considerar $h_x = h_y$ para discretizar el dominio y generar una malla cuadrada, obtenemos la siguiente expresión:

$$-4u_{i,j} - u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i1,j-1} + u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j} \tag{35}$$

Obteniendo así la siguiente matriz pentadiagonal:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc}
-4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right]$$

A partir de esta matriz, se podrá ir modificando, principalmente en la diagonal principal dependiendo del caso que se quiera resolver, involucrando sus respectivas constantes.