Teorema del Punto Fijo de Lawvere

Alejandro Sánchez Goiz

21 de enero de 2026

Índice general

Introducción

El desarrollo de la Teoría de Conjuntos por Georg Cantor, aunado a la evolución del pensamiento matemático del siglo XIX, dio pie a una clase de razonamientos lógicos que hoy llamamos **argumentos diagonales**.

Estos argumentos revelan propiedades estructurales profundas mediante mecanismos de autorreferencia. A fin de ilustrar la esencia de este procedimiento, comenzaremos mostrando uno de los ejemplos más conocidos: la demostración de que los números reales son más grandes que los números naturales.

Teorema (Teorema de la Diagonal de Cantor)**.** *El intervalo real unitario* $(0,1)$ *no es numerable. Es decir, no existe una biyección* $\phi\colon \mathbb{N} \to (0,1)$.

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que el conjunto es numerable y que, por tanto, existe una biyección ϕ que nos permite ennumerar los elementos del intervalo como una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$, donde $x_n = \phi(n)$.

Podemos representar cada número x_n mediante su expansión decimal única:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots \\ &\vdots \\ x_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{nn}\ldots \end{aligned}$$

Buscamos encontrar un número real $y \in (0,1)$ que no se encuentre en dicha lista. Para ello, definimos $y = 0.d_1d_2d_3\ldots$, donde los dígitos d_n están dados por la siguiente regla:

$$d_n = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{si } a_{nn} = 1 \end{cases}$$

Observemos que, dada esta regla, para cualquier índice $n \in \mathbb{N}$, el n-ésimo dígito de nuestro nuevo número y difiere del n-ésimo dígito del número x_n de la lista (es decir, $d_n \neq a_{nn}$).

Esto implica necesariamente que $y \neq x_n$ para todo n. Sin embargo, y es un número real bien definido con expansión decimal de unos y dos, por lo que $y \in (0,1)$. Por tanto, hemos encontrado un número en el intervalo $(0,1)$ que no está en la imagen de ϕ, contradiciendo la hipótesis de que ϕ era sobreyectiva. Por lo tanto, concluimos que el intervalo $(0, 1)$ no es numerable. □

Podemos observar en la demostración anterior que, para construir el elemento y, recurrimos explícitamente a la diagonal principal de la matriz; es decir, nos fijamos en los términos de la forma a_{nn}.

$$\begin{array}{l}
0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\cdots a_{1n}\cdots \\
0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\cdots a_{2n}\cdots \\
0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\cdots a_{3n}\cdots \\
0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\cdots a_{4n}\cdots \\
0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\cdots a_{5n}\cdots \\
\vdots \\
0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}\cdots a_{nn}\cdots \\
\vdots
\end{array}$$

La clave del argumento reside en el uso de esta información diagonal para definir un objeto que difiere sistemáticamente de todos los elementos listados. Observemos que el éxito de la construcción depende de la capacidad de "invertir" el valor encontrado en la diagonal. El apelar a esta estructura es lo que conocemos hoy como **argumento diagonal**.

Este argumento es generalizable y trasciende la geometría de una matriz infinita. En muchos contextos, la diagonal no es tan visible, pero el mecanismo subyacente es el mismo: la **autorreferencia**.

Si trasladamos este argumento a la Teoría de Conjuntos intuitiva, sustituyendo la numeración por la relación de pertenencia, el argumento diagonal, en vez de producir un "nuevo elemento", revela una contradicción en la estructura misma de la teoría. Esta contradicción fue descubierta por Bertrand Russell en 1901, y es conocida como la **Paradoja de Russell**.

La Paradoja de Russell

La Paradoja de Russell concierne a la ahora llamada *Teoría Intuitiva de Conjuntos*, como fue inicialmente concebida por Georg Cantor. Esta teoría incial se fundamentaba en el principio de que cualquier propiedad lógica define un conjunto. Por ejemplo, la propiedad de ser un número par da pie al conjunto $A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Con esto en mente, para visualizar el problema necesitamos considerar conjuntos que puedan pertenecerse a sí mismos. Por ejemplo, el conjunto definido por la propiedad de "ser una idea" es, en sí mismo, una idea, y por lo tanto pertenece a sí mismo.

Consideremos el conjunto R, definido como la colección de todos los conjuntos que **no** son elementos de sí mismos:

$$R = \{X \mid X \notin X\}$$

Podemos entonces formular la siguiente pregunta: ¿Se pertenece R a sí mismo? Ante esto, tenemos dos posibilidades:

1. $R \in R$. En este caso, tenemos que debe cumplir la condición que define al conjunto, es decir, tenemos $R \notin R$.
2. $R \notin R$. En este otro caso, tenemos que cumple la propiedad que define a R por lo que debe pertenecer al conjunto, es decir, $R \in R$.

En ambos casos llegamos a la contradicción:

$$R \in R \iff R \notin R$$

Este resultado evidencia que la teoría intuitiva es inconsistente: no puede ser el caso que cualquier propiedad defina un conjunto. De permitirlo, el edificio lógico de la teoría se derrumbaría.

Ahora bien, hemos afirmado que en el corazón de esta paradoja reside la **autorreferencia** y que se trata de un argumento diagonal. La autoreferencia está presente para llegar a la Paradoja. Sin embargo, en la formulación anterior no construimos ninguna matriz ni apelamos a la diagonal. ¿Cómo es entonces que este ejemplo cae en un "argumento diagonal" como el que observamos con Cantor?

Imaginemos, conforme a la teoría intuitiva, que podemos enlistar "todos los conjuntos existentes". Organicémoslos tanto vertical como horizontalmente para formar una tabla como la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A & B & C & D & \dots \\
A & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
B & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
C & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\vdots & & & & & \ddots
\end{array}$$

Asignemos valores de 1 y 0 de la siguiente forma: pondremos un 1 si el conjunto de la fila pertenece al conjunto de la columna, y un 0 en caso contrario. Supongamos, por ejemplo, que $A \notin A$ y $A \in B$. Los valores resultantes serían entonces 0 y 1, respectivamente. Nuestra matriz de pertenencia podría entonces lucir así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A & B & C & D & E & \cdots \\
A & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
B & 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
C & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & \cdots \\
D & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & \cdots \\
E & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Al igual que en el teorema anterior, nuestra atención se centra en la **diagonal principal** que hemos resaltado. Las entradas con valor 0 en la diagonal corresponden a los conjuntos X tales que $X \notin X$. La definición de R es precisamente la instrucción de tomar esos casos: R se define "invirtiendo" la diagonal principal.

$$X \in R \iff \text{Diagonal}(X, X) = 0$$

Dado que R es un conjunto dentro de esta teoría, debe ocupar algún lugar en la lista, es decir, la fila R. ¿Qué valor tiene R en su propia intersección diagonal? Por construcción, debe tener el valor opuesto al que tiene en la diagonal. Es decir, el valor en (R, R) debe ser 0 si y solo si es 1.

Esta visualización confirma que la paradoja es estructuralmente idéntica al argumento de Cantor: el problema surge al intentar introducir dentro de la matriz un objeto definido por la negación de la diagonal de dicha matriz.

Siguiendo estos casos de autorreferencia, el más célebre y con mayor peso filosófico es indudablemente el **Primer Teorema de Incompletitud de Gödel**. Un planteamiento y demostración rigurosa de este teorema ocuparía demasiado espacio y se saldría de los objetivos de esta introducción. Por ello, nos limitaremos a dar un esbozo que sigue la línea argumental presentada por el propio Gödel en [Göd92], resaltando cómo es, en el fondo, otro argumento diagonal.

El Teorema de Incompletitud de Gödel

Los sistemas formales que fundamentan la matemática moderna, tales como los Axiomas de Peano o la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel, poseen la capacidad expresiva suficiente para construir la aritmética básica de los números naturales. La expectativa histórica, liderada por el programa de Hilbert, era que estos sistemas fueran capaces de decidir la verdad o falsedad de cualquier proposición formulada en su lenguaje.

Sin embargo, estos sistemas presentan limitaciones internas fundamentales respecto a lo que pueden demostrar. Gödel probó que, si estos sistemas son **consistentes** (que no poseen contradicciones), existen entonces proposiciones en dichos sistemas que son *indecidibles*; es decir, enunciados que el sistema no es capaz de demostrar como verdaderos ni refutar como falsos.

Podría pensarse que la solución radica en añadir estas proposiciones como nuevos axiomas. No obstante, esto no resuelve el problema estructural: en el nuevo sistema ampliado surgirían inevitablemente nuevas proposiciones indecidibles. Este fenómeno de incompletitud no es exclusivo de los dos sistemas mencionados; como veremos en el Capítulo 3, una clase extensiva de sistemas formales sufren de esta limitación.

En el corazón de este problema yace, nuevamente, la autorreferencia. Construimos una proposición que afirma algo sobre su propia indemostrabilidad. Para formalizar esto, Gödel tuvo que idear una manera de que la aritmética "hablara de sí misma".

La idea central y genial de Gödel fue trasladar el problema de la autorreferencia al lenguaje de la aritmética. Para ello, ideó un método de codificación (conocido como *numeración de Gödel*) que asigna a cada fórmula ϕ del sistema un número natural único, denotado por $\ulcorner\phi\urcorner$. Esto permite que la aritmética "hable" de sus propias fórmulas.

Gracias a esta codificación, la propiedad metamatemática "y es una demostración de x" se puede expresar como una relación aritmética, llamémosla $\mathrm{Dem}(x, y)$. A partir de aquí, podemos definir el concepto de ser demostrable como

$$x \text{ es demostrable} \iff \exists y \, \mathrm{Dem}(x, y).$$

Nace de aquí la diagonal como en los otros dos ejemplos. Gödel definió una función de sustitución $s(n, m)$, que calcula el código de la fórmula resultante al tomar la fórmula con código n y reemplazar su variable libre por el número m, es decir,

$$s(\ulcorner\phi(x)\urcorner, m) = \ulcorner\phi(m)\urcorner.$$

Esta función s es la herramienta que nos permite "caminar por la diagonal": si evaluamos $s(n, n)$, estamos pidiéndole intrínsecamente a la fórmula número n que hable del número n. Es el análogo aritmético de mirar la entrada (n, n) en la matriz del argumento de la diagonal de Cantor o en la matriz que visualizamos de pertencencia para la Paradoja de Russell.

Ahora, consideremos la siguiente fórmula:

$$P(x) := \neg\, \mathrm{Dem}(s(x, x)).$$

Sea k el número de Gödel de esta fórmula, es decir, $k = \ulcorner P(x)\urcorner$. Si evaluamos ahora la diagonal en este punto (calculamos $P(k)$), obtenemos una sentencia G tal que:

$$G \iff \neg\, \mathrm{Dem}(s(k, k))$$

Pero por definición de nuestra función de sustitución, $s(k, k)$ es precisamente el código de G. Es decir, $\ulcorner G\urcorner = s(k, k)$. Sustituyendo esto, llegamos a:

$$G \iff \neg\, \mathrm{Dem}(\ulcorner G\urcorner)$$

Esta sentencia G afirma, esencialmente: "yo no soy demostrable".

Si el sistema es consistente, no puede demostrar falsedades, por lo que no puede demostrar G (ya que si lo hiciera, G sería falsa). Pero al no poder demostrarla, lo que G afirma es verdad. Tenemos entonces una sentencia que es verdadera pero no demostrable dentro del sistema.

Para visualizar la naturaleza diagonal de este argumento, podemos recurrir a la misma representación matricial que utilizamos con Cantor y Russell.

Imaginemos una lista enumerada de todas las fórmulas posibles con una variable libre en el lenguaje de la aritmética: $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots$. En las columnas, colocamos los números naturales que pueden servir como argumentos para estas fórmulas.

Definamos el valor de la entrada (n, m) en esta matriz como 1 si el sistema demuestra que la fórmula ϕ_n es verdadera para el número m (es decir, si $\vdash \phi_n(m)$), y 0 en caso contrario.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\phi_0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\phi_1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
\phi_2 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 1 & \cdots \\
\phi_3 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}
$$

Nuevamente, nuestra atención se dirige a la **diagonal principal**. Esta diagonal representa si es demostrable cada fórmula cuando es aplicada a su propio número de código o dicho de otra forma: la entrada (n, n) en la matriz nos dice si $\vdash \phi_n(n)$.

La sentencia indecidible de Gödel, G, se construye esencialmente definiendo una nueva fila (una nueva fórmula) que "invierte" los valores de esta diagonal. La fórmula $G(x)$ está diseñada para comportarse como la negación de la diagonal:

$$G(n) \text{ es verdadera } \iff \text{ la entrada}(n, n)\text{de la matriz es } 0$$

Como G es una fórmula válida en el sistema, debe aparecer en algún lugar de la lista de filas, digamos en la fila k. La contradicción (o en este caso, la indecidibilidad) surge al preguntar por el valor de la intersección (k, k). La fórmula debe negar su propio valor en la diagonal, llegando así a que es verdadera si y solo si no es demostrable.

A pesar de que los tres ejemplos expuestos difieren sustancialmente en su contenido proposicional —el primero trata sobre cardinalidades infinitas, el segundo sobre inconsistencias en la teoría intuitiva de conjuntos y el tercero sobre las limitaciones deductivas de la aritmética—, todos comparten un método subyacente idéntico en esencia. En cada caso, la motivación principal surge de una noción de **autorreferencia** que es "transmitida" a la demostración matemática.

Es precisamente este rasgo autorreferencial el que ha rodeado de un halo de misticismo y especulación filosófica a los Teoremas de Incompletitud de Gödel y, en general, a muchos resultados obtenidos mediante argumentos diagonales. Surge entonces una interrogante natural: si el germen de la autorreferencia puede incrustarse en el corazón de las matemáticas mediante un mecanismo tan simple, ¿acaso hay una noción más allá de lo científico que las limite?

Esta inquietud fue popular durante gran parte del siglo XX, impulsada por la crisis de los fundamentos. Sin embargo, en 1969, William F. Lawvere publicó unas notas que, silenciosa pero contundentemente, derrumbarían este misticismo. En su artículo *Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories*, Lawvere observó que todos estos argumentos no son sino consecuencias naturales de trabajar en tipos particulares de estructuras categóricas. En sus propias palabras:

> The original aim of this article was to demystify the incompleteness theorem of Gödel and the truth-definition theory of Tarski by showing that both are consequences of some very simple algebra in the cartesian-closed setting.

El aporte de Lawvere es fundamental: logró unificar en un solo esquema formal algunos de los resultados de imposibilidad más importantes del siglo pasado. Más adelante, este hallazgo sería conocido como el **Teorema del Punto Fijo de Lawvere**, uniéndose a la vasta familia de teoremas de punto fijo que abundan en diversas áreas de la matemática.

No obstante, y a pesar de su trascendencia unificadora, este teorema permanece sorprendentemente poco difundido. Una posible explicación radica en que el lenguaje natural del resultado, la Teoría de Categorías, es una disciplina relativamente joven y, en ocasiones, ajena a la formación matemática tradicional. Por ello, existe un vacío en la literatura divulgativa y educativa respecto a este resultado. El presente trabajo nace de la intención de llenar ese vacío, presentando el Teorema del Punto Fijo de Lawvere de manera autocontenida y accesible, sin asumir conocimientos previos en Teoría de Categorías.

Como el presente trabajo es autocontenido, en el **Capítulo 1** nos enfocamos en introducir los conocimientos de Teoría de Categorías necesarios. Dado que no se trata de un curso extensivo de Teoría de Categorías, nos limitaremos a los conceptos indispensables para llegar al resultado deseado. El lector interesado en profundizar en esta teoría puede consultar [**Rie16**], [**Lei16**] y [**Mac97**].

El **Capítulo 2** aborda el núcleo del trabajo: el **Teorema del Punto Fijo de Lawvere**. Presentamos una versión modernizada y una demostración más detallada que la original de Lawvere en [**Law06**]. Es en este capítulo donde introducimos el concepto de *categoría cartesiana cerrada*, enfatizando su papel crucial como el entorno donde estos argumentos diagonales ocurren. Además, veremos aquí también la contrapositiva del teorema, que es en esencia el resultado que da pie a estos argumentos diagonales.

El **Capítulo 3** explora las aplicaciones del teorema a través de diversas áreas de la matemática. Este es el capítulo más extenso, pues el interés principal de este trabajo es demostrar la utilidad y extensividad del resultado de Lawvere.

El **Capítulo 4** presenta las conclusiones del trabajo.

La bibliogafía usada para esta tesis se podrá encontrar al final de la misma.

Capítulo 1

Teoría de Categorías

1.1. Categorías y tipos de morfismos

En el estudio moderno de las matemáticas, la mayoría de áreas empiezan a través de la teoría de conjuntos. Así, por ejemplo, un grupo es un conjunto con cierta estructura añadida; una topología es un conjunto y un subconjunto del conjunto potencia con ciertos axiomas a cumplir; incluso un sistema formal parte de conjuntos de símbolos, axiomas, reglas de formación y de inferencia. El lenguaje matemático es entonces, por lo general, uno que nace de la visión conjuntista. Sin embargo, el teorema del punto fijo de Lawvere sólo puede aplicarse en categorías cartesianas cerradas. Por tanto, todos los ejemplos que veremos en el capítulo 3 serán tratados desde la visión categórica, no la conjuntista. Es necesario entonces introducir los conceptos básicos de la teoría de categorías para poder llegar al teorema deseado y poder visualizar los ejemplos a mostrar desde una nueva percepción, i.e., la categórica. El punto natural para iniciar es con la noción de categoría, dándonos nuestra primera

Definición 1.1.1 (Categoría)**.** Una *categoría* C consta de:

- Una colección de objetos, simbolizada por $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,
- Para cada A, B en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, una colección de morfismos $f\colon A \to B$, donde A es denominado el **dominio** y B el **codominio**.
- Para cada A en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, un **morfismo identidad**, denotado por 1_A, con dominio y codominio A.
- Para cada par de morfismos $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ un **morfismo composición**, $gf\colon A \to C$, también denominado el **compuesto de** f **con** g.

tales que cumplen los siguientes dos axiomas:

- **Identidad:** Para cada $f\colon A \to B$, se cumple que $1_A f = f = f 1_B$.
- **Asociatividad:** Para cualesquiera $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$, tenemos que $h(gf) = (hg)f$.

Para denotar objetos usamos intercambiablemente letras mayúsculas o letras minúsculas, según sea más conveniente en el contexto que se usen.

A los morfismos $f\colon A \to B$ también los denominamos como **flechas** o **mapas** entre objetos. A la colección de morfismos entre dos objetos A y B de una categoría C la simbolizamos por $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ o bien simplemente $\mathrm{Hom}(A, B)$ si no existe confusión sobre la categoría a la que pertenecen. Adicionalmente, los morfismos $f\colon A \to B$ también los podemos representar como $A \xrightarrow{f} B$.

En el estudio de la teoría de categorías nos veremos constantemente usando *diagramas*. Someramente, un diagrama es una representación visual de objetos y flechas entre estos objetos. Pensado como una gráfica, los objetos actuan como vértices y las flechas como aristas. Existe, como veremos a lo largo de este capítulo, una ventaja en representar cuestiones de la teoría a través de diagramas. Usualmente, nos permitirá una nueva percepción del problema y puede facilitar nuestro entendimiento de éste. Así, por ejemplo, la composición $gf\colon A \to B$ puede ser representado como la afirmación de que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] & & C. \end{tikzcd}$$

Cuando decimos que el diagrama conmuta, nos referimos a que es lo mismo tomar el camino superior que el inferior, es decir, del objeto A pasar al objeto B a través de f y del objeto B pasar a través de g al objeto C, que simplemente pasar del objeto A al objeto C a través de gf.

Para ejemplificar mejor, mostramos los axiomas de identidad y asociatividad a través de diagramas.

Axioma de identidad

Para toda $f\colon A \to B$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f"] & \\ & B \arrow[r, "1_B"] & B. \end{tikzcd}$$

Axioma de asociatividad

Para cualesquiera, $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ y $C \to D$, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "h(gf)=(hg)f"'] \arrow[dr, dashed, "gf"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "hg"'] \\
D & C. \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

Dos observaciones son importantes en la definición de categoría. La primera, la visión conjuntista habitual nos haría pensar que los objetos son en realidad conjuntos y los morfismos, funciones. Es importante observar que esta visión puede privar a uno de una visión más amplia que ofrece ésta teoría y que, en lo general, no es cierto que se pueda hacer dicha comparación.

La segunda observación, se hace mención de *colecciones*, no de conjuntos en la definición. Esto es porque en principio las categorías que se manejan pueden recolectar una cantidad tan grande de objetos y morfismos que no pueden ser conjuntos. Sin embargo, hay casos en que podemos hablar de conjuntos en vez de colecciones para los morfismos de una categoría, y la distinción es lo suficientemente importante para valer una definición:

Definición 1.1.2. Sea C una categoría. Decimos que es

1. **Localmente pequeña** si para cada par de objetos A, B en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ es un conjunto.
2. **Pequeña** si tanto la colección de sus objetos como la colección de todas sus flechas son conjuntos.

Exhibimos algunos ejemplos de categorías.

Ejemplos 1.1.3.

a) Set es la categoría cuyos objetos son conjuntos y los morfismos son funciones entre conjuntos.

b) Grp es la categoría cuyos objetos son grupos y los morfismos son homomorfismos entre grupos. Del mismo modo podemos definir categorías para grupos abelianos, Ab, para anillos unitarios, Ring, etc.

c) Un sólo grupo G puede ser visto como una categoría G, que consta de un único objeto $*$ y cuyos morfismos son todos los elementos del grupo. Así, la composición está dada por la operación del grupo y el morfismo identidad de G es el elemento neutro del grupo.

d) Top es la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas entre espacios topológicos.

e) Top_* es la categoría cuyos objetos son espacios topológicos con un punto base y los morfismos son funciones continuas que preservan puntos base.

f) $\mathsf{Mat}_{\mathbb{K}}$ es la categoría cuyos objetos son números naturales y cuyos morfismos son matrices con entradas elementos de un campo $\mathbb{K}$, es decir, dados números naturales m, n un morfismo $A\colon m \to n$ es una matriz de $m \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. La composición está dada por multiplicación de matrices, y los morfismos identidad son las matrices identidad.

g) Dado un orden parcial $(P, \leq)$ podemos tratar éste como una categoría P. Sus objetos son los elementos del orden parcial y dados dos objetos $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P})$, decimos que existe un morfismo $a \to b$ si y solo si $a \leq b$. Por la propiedad reflexiva del orden parcial, $a \leq a$ para todo $a \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P})$ por lo que existen morfismos identidad para cada objeto. La propiedad transitiva del orden define la composición de morfismos.

h) La categoría Poset tiene como objetos órdenes parciales $(P, \leq)$ y como morfismos funciones que preservan órdenes, es decir, tales que si $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ son órdenes parciales, $f\colon (P, \leq_P) \to (Q, \leq_q)$ es una función tal que para todo $p, q \in P$, $fp \leq_Q fq$ si y sólo si $p \leq_P q$.

En contraste a la teoría de conjuntos, aquí no hablamos de elementos. La pertenencia como tal no es propia en el manejo de una categoría. Es decir, si consideramos un objeto X en la categoría Set, no podemos hablar de un elemento $a \in X$. Existe, en este sentido, una forma de hablar de elementos y pertenencia a través de morfismos. Para ello consideramos las siguientes definiciones:

Definición 1.1.4. Sea C una categoría. Decimos que un objeto es:

1. **Terminal** (denotado usualmente por $\mathbf{1}$), si para cualquier objeto X en C existe un *único* morfismo $X \to \mathbf{1}$.

2. **Inicial** (denotado usualmente por $\mathbf{0}$), si para cualquier objeto X en C existe un *único* morfismo $\mathbf{0} \to X$.

Ejemplos 1.1.5.

a) En la categoría Set, cualquier conjunto unitario es un objeto terminal. Denotamos para esta categoría $\mathbf{1} = \{\varnothing\}$. Por otro lado, el único objeto inicial es el conjunto vacío $\varnothing$, que denotamos como $\mathbf{0}$; por vacuidad sólo existe una función con dominio $\varnothing$ y codominio X para cualquier conjunto X.

b) En un orden parcial $(P, \leq)$, un objeto inicial $\mathbf{0}$ es un elemento tal que para todo $x \in P$, existe una única flecha $\mathbf{0} \to x$, lo cual es equivalente a decir $\mathbf{0} \leq x$. Es decir, el objeto inicial es el **mínimo** del orden. Análogamente, un objeto terminal $\mathbf{1}$ satisface $x \leq \mathbf{1}$ para todo x, correspondiendo al **máximo** del orden.

Observemos en Set que seleccionar un elemento a de un conjunto A es equivalente a definir una función $a\colon \mathbf{1} \to A$ cuya imagen es precisamente a. Esto nos permite reinterpretar la noción conjuntista de "pertenencia" usando únicamente flechas y objetos terminales, para generalizarla a cualquier categoría con objeto terminal.

Definición 1.1.6 (Elemento Global)**.** Sea C una categoría con objeto terminal $\mathbf{1}$. Un **elemento global** de un objeto A es un morfismo $x\colon \mathbf{1} \to A$.

Bajo esta óptica, en la categoría Set, la expresión $a \in A$ se traduce al lenguaje categórico como la existencia de un morfismo $a\colon \mathbf{1} \to A$.

Pensando ahora en los morfismos, hay propiedades interesantes de estos que merecen ser distinguidas. Tenemos las siguientes definiciones.

Definición 1.1.7. Decimos que un morfismo $f\colon A \to B$ es

1. **monomorfismo** o **mono** si para cada par de morfismos $h, g\colon C \to A,\ fg = fh$ implica $g = h$. Es decir, si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

   entonces, $g = h$.

2. **epimorfismo** o **epi** si para cada par de morfismos $h, g\colon B \to C,\ gf = hf$ implica $g = h$. Es decir, si el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} C & B \arrow[l, shift right, "g"'] \arrow[l, shift left, "h"] & A \arrow[l, "f"'] \end{tikzcd}$$

   entonces $g = h$.

3. **invertible** si existe $g\colon B \to A$ tal que $fg = 1_B$ y $gf = 1_A$. Es decir, existe g tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[d, "1_B"] \arrow[dl, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

   En este caso decimos que f es un **isomorfismo** y que A y B son **isomorfos**.

Ejemplos 1.1.8.

a) En Set los monomorfismos son las funciones inyectivas, los epimorfismos son las funciones suprayectivas y los isomorfismos son las funciones biyectivas.

b) En Top los isomorfismos son los homeomorfismos.

c) En un grupo G considerado como categoría, todos los morfismos son isomorfismos. Recordemos que un grupo visto como categoría consta de un único objeto $*$ y los elementos del grupo actúan como morfismos, mientras que el elemento neutro actua como el morfismo identidad del objeto G. Recordemos que para cada elemento g del grupo G, existe un inverso h bajo la operación del grupo tal que $g \cdot h = e$, con $\cdot$ la operación del grupo y e el elemento neutro. De esto vemos que cada morfismo tiene un inverso que da el morfismo identidad, por lo que todos son isomorfismos.

Es crucial aquí hacer una observación. En la teoría de conjuntos, una función biyectiva es tanto suprayectiva como inyectiva. Conversamente, si una función es tanto suprayectiva como inyectiva, es biyectiva. En teoría de categorías el análogo es cierto para la primera parte: si un morfismo es isomorfismo es también epimorfismo y monomorfismo. Sin embargo, el converso no es cierto: un morfismo que es tanto epi como mono no implica que sea isomorfismo. Para ver esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.9. Consideremos nuevamente un orden parcial $(P, \leq)$ visto como categoría. Recordemos que una flecha $a \to b$ existe si y solo si $a \leq b$. Por tanto, entre dos objetos a, b existe a lo sumo una flecha. De este hecho tenemos que por vacuidad se da que toda flecha es tanto epimorfismo como monomorfismo: las premisas $fg = fh$ y $gf = hf$ implican trivialmente $g = h$ pues entre dos objetos la flecha es única. Por otro lado, si $a \to b$ es un isomorfismo debe primeramente existir $b \to a$. Esto implica $a \leq b$ y $b \leq a$. Por antisimetría del orden parcial tenemos entonces que $a = b$. Por tanto, los únicos isomorfismos en $(P, \leq)$ son las flechas identidad $a \to a$. De esto vemos que en un orden parcial considerado como categoría, toda flecha es epi y mono, pero solo las identidades son isomorfismos.

Basta considerar $P = \{1, 2\}$ con el orden usual para ver un ejemplo concreto de lo anterior. En este caso, la flecha $1 \to 2$ es tanto epi como mono, pero no es isomorfismo pues no existe flecha $2 \to 1$.

Por otro lado, mencionábamos que el hecho de ser isomorfismo implica ser epi y mono. Demostramos esta afirmación.

Proposición 1.1.10. *Si $f \colon A \to B$ es un isomorfismo, entonces es también un epimorfismo y un monomorfismo.*

Demostración. Demostremos primero que es un monomorfismo. Sean entonces $g, h \colon C \to A$ morfismos tales que $fg = fh$. Como f es isomorfismo, existe $f^{-1} \colon B \to A$ tal que $f^{-1}f = 1_A$. Tenemos entonces

$$g = 1_A g = (f^{-1}f)g = f^{-1}(fg) = f^{-1}(fh) = (f^{-1}f)h = 1_A h = h$$

por lo tanto $g = h$. Probar que f es epimorfismo es completamente análogo a como procedimos. □

En el uso de la prueba anterior usamos la notación f^{-1} para hablar de un morfismo inverso para f. Esto se debe a que dicho morfismo inverso, de existir, es único. Demostramos esta afirmación.

Proposición 1.1.11. *Si f es un isomorfismo, entonces existe un único morfismo inverso.*

Demostración. Sea $f\colon A \to B$ isomorfismo y $g, h\colon B \to A$ inversas de f. Tenemos entonces

$$g = g1_B = g(fh) = (gf)h = 1_A h = h$$

Por lo tanto $g = h$. □

Por tanto nuestra notación f^{-1} esta debidamente justificada.

Concluimos esta sección construyendo una categoría a partir de una dada C. Dada una flecha $a \to b$, podemos pensar en el proceso de invertir la dirección de ésta. En este caso, tendríamos $b \to a$. El proceso de "revertir todas las flechas" produce lo que conocemos como un proceso *dual*. Este procedimiento nos permite definir la siguiente categoría:

Definición 1.1.12 (Categoría Opuesta)**.** Sea C una categoría. La categoría opuesta $\mathsf{C}^{\mathbf{op}}$ tiene:

- como objetos $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}^{\mathbf{op}})$ los mismos objetos que $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,
- como morfismos los mismos que en C pero con el orden de las flechas invertidos, dado un morfismo $f\colon A \to B$ en C, el morfismo correspondiente en $\mathsf{C}^{\mathbf{op}}$ es $f^{\mathbf{op}}\colon B \to A$.
- como morfismos identidad los mismos morfismos identidad que en C.
- la composición en $\mathsf{C}^{\mathbf{op}}$ funciona igual que en C. Dados morfismos $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ su composición $gf\colon A \to C$ da lugar la composición $(gf)^{\mathbf{op}} = f^{\mathbf{op}}g^{\mathbf{op}}\colon C \to A$.

Es evidente que los axiomas de identidad y asociatividad se siguen en $\mathsf{C}^{\mathbf{op}}$ si y solo si la C es una categoría. Esta construcción y, en general, las construcciones duales que veremos más adelante serán de gran utilidad para el teorema del punto fijo de Lawvere.

1.2. Funtores y Transformaciones Naturales

La noción de categoría nos invita a pensar en objetos matemáticos y los morfismos que permiten preservar su estructura. Consideramos por ejemplo grupos. Los morfismos que preservan su estructura son los homomorfismos; pensamos en espacios topológicos, cuyos morfismos que preservan estructura son funciones continuas. Una categoría es también un objeto matemático, por lo que podemos preguntarnos en qué morfismos preservan la estructura de una categoría. Los funtores son precisamente estos morfismos.

Definición 1.2.1 (Funtor)**.** Sean C, D categorías. Un **funtor** $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ consta de

- objetos $\mathcal{F}C$ en $\mathrm{Ob}(\mathsf{D})$ para cada C en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,

- morfismos $\mathcal{F}f\colon \mathcal{F}A \to \mathcal{F}B$ en D para cada morfismo $f\colon A \to B$ en C. Es decir, para cada colección $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ corresponde una colección $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$.

Tales que:

- para cada A en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}A}$,
- para cada $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ en C, $\mathcal{F}g\mathcal{F}f = \mathcal{F}(gf)$

Ejemplos 1.2.2.

1. El funtor $\mathcal{F}\colon$ Grp $\to$ Set llamado *olvidadizo* pues "olvida" la estructura de grupo y deja tan solo al conjunto de elementos; olvida también que las funciones son homomorfismos y simplemente las convierte a funciones sin esa noción.
2. $\mathcal{P}\colon$ Set $\to$ Set es un funtor que manda a cada conjunto X a su conjunto potencia $P(X)$ y que manda toda función $f\colon X \to Y$ a $\mathcal{P}f\colon P(X) \to P(Y)$, esta función manda a cada $A \subset X$ a la imagen $f(A) \in P(Y)$.
3. Dados órdenes parciales $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ un funtor $\mathcal{F}\colon P \to Q$ es una función que preserva órdenes, es decir, manda objetos $p, q \in P$ a objetos $\mathcal{F}p, \mathcal{F}q \in Q$ de tal manera que $p \leq_P q$ si y sólo si $\mathcal{F}p \leq_Q \mathcal{F}q$. Observemos que estos funtores son los morfismos en la categoría Poset.
4. El funtor $\pi_1\colon$ $\mathrm{Top}_* \to$ Grp que manda todo espacio topológico X con punto base x a su grupo funamental $\pi_1(X, x)$ y a toda función continua $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ a un homomorfismo de grupos $\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$.
5. Sea C una categoría, el funtor identidad $1_{\mathsf{C}}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ manda a objetos C y morfismos $f\colon C \to D$ en sí mismos.

También denominamos a este tipo de funtor como **funtor covariante**, para distinguirlo de otro tipo de funtor.

Definición 1.2.3 (Funtor contravariante)**.** Sean C, D categorías. Un **funtor contravariante** de C a D es un funtor $\mathcal{F}\colon \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{D}$. Siendo más explícitos, la diferencia principal de éste y el funtor covariante de C en D es que morfismos $f\colon A \to B$ en C son mandados a morfismos $\mathcal{F}\colon \mathcal{F}B \to \mathcal{F}A$ en D. Además, si el codomonio del funtor es Set, decimos que el funtor es una **pregavilla**.

Ejemplo 1.2.4. Sea C una categoría localmente pequeña y C en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$. El funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, C) : \mathsf{C}^{\mathsf{op}} \to$ Set asigna objetos A a conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C)$ y dado un morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ le asigna a éste un morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-, C) f\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C)$ dado por $g \mapsto gf$.

Podemos, en una manera similar, definir un funtor covariante de C en Set, denotado $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, -)$, que asigna objetos A en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ a conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, A)$ y morfismos $f\colon A \to B$ a morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, -) :\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, B)$ dado por $g \mapsto fg$.

Como mencionábamos al inicio de la sección, podemos entender a los funtores como morfismos entre categorías, por lo que naturalmente surge la pregunta de si existen nociones similares a epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo para funtores. Tenemos nociones similares en categorías localmente pequeñas, que definimos a continuación.

Definición 1.2.5. Sean C, D categorías localmente pequeñas y $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un funtor entre ellas. Decimos que el funtor es:

1. **fiel** si para cada A, B en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, la función $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\mathcal{F}\,A, \mathcal{F}\,B)$ es inyectiva;

2. **pleno** si para cada A, B en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, la función $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\mathcal{F}\,A, \mathcal{F}\,B)$ es suprayectiva;

3. **esencialmente suprayectivo** si para cada A en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ existe una D en $\mathrm{Ob}(\mathsf{D})$ tal que D es isomórfica a $\mathcal{F}\,A$.

Notemos aquí que estamos hablando de funciones, inyectividad y suprayectividad, por ello es que requerimos que las categorías en cuestión sean localmente pequeñas. Por otro lado, la noción de isomorfismo es idéntica a como vimos con morfismos.

Definición 1.2.6. Sean C, D categorías. Un funtor $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es un **isomorfismo** si existe un funtor $\mathcal{G}\colon \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ tal que $\mathcal{F}\,\mathcal{G} = 1_{\mathsf{D}}$ y $\mathcal{G}\,\mathcal{F} = 1_{\mathsf{C}}$. En este caso decimos que $\mathcal{F}\,F$ y $\mathcal{G}$ son **isomorfos** y lo denotamos por $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$.

Si los funtores los podemos entender como morfismos entre categorías, es igual de válido preguntarse sobre morfismos entre funtores. Históricamente, este tipo de morfismos fueron los primeros en ser estudiados y que derivaron en la creación de la teoría de categorías. Antes de definirlos propiamente, veamos un ejemplo en donde su presencia es útil.

Ejemplo 1.2.7. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos cualquier anillo conmutativo unitario R. Consideremos ahora las matrices $n \times n$ con entradas en R. Junto con la multiplicación de matrices, este conjunto forma un monoide, que denotamos por $M_n(R)$. Por otro lado, si conservamos sólo la multiplicación del anillo R y olvidamos la suma, obtenemos también un monoide que podemos denotar por $U(R)$. A partir de un anillo R entonces tenemos dos maneras de llegar a un monoide, una definida por $M_n(R)$ y otra por $U(R)$.

Recordemos ahora que cualquier matriz cuadrada A en cualquier anillo R posee un determinante $\det(A)$ con valores en R y que, en particular, cumple las siguientes dos propiedades:

$$\det(A)\det(B) = \det(AB) \qquad\qquad \det(I_m) = 1_R$$

donde I_m es la matriz identidad de las matrices de $m \times m$ con $m \in \mathbb{N}$ y 1_R es la identidad bajo multiplicación de Q. Observemos que estas mismas dos propiedades son las que determinan un homomorfismos de monoides y que det toma matrices cuadradas con entradas en R y devuelve valores en R. Por lo tanto podemos considerar el homomorfismo $\det\colon M_n(R) \to U(R)$, para cada anillo R.

Consideremos un homomorfismo de anillos conmutativos $f\colon R \to Q$. Si preservamos únicamente la estructura de multiplicación, la función en cuestión es ahora un homomorfismo de monoides. Podemos denotar esta nueva función como $U(f)\colon U(R) \to U(Q)$. Es decir, para cada anillo conmutativo R tenemos un monoide $U(R)$ y para cada homomorfismo de anillos conmutativos $f\colon R \to Q$ tenemos un homomorfismo de monoides $U(f)\colon U(R) \to U(Q)$. Del mismo modo, todo homomorfismo de anillos $f\colon R \to Q$ induce un homomorfismos de monoides $M_n(f)\colon M_n(R) \to M_n(Q)$. Del estudio que llevamos al momento salta a la luz la noción de funtor. En efecto, podemos considerar la categoría CRing cuyos objetos son anillos conmutativos unitarios y sus morfismos son homomorfismos de anillos conmutativos y la categoría Mon cuyos objetos son monoides y cuyos morfismos son homomorfismos de monoides. Tenemos entonces dos funtores $M_n\colon$ CRing $\to$ Mon y $U\colon$ CRing $\to$ Mon.

Con estas nociones en mente, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_n(R) \arrow[r, "M_n(f)"] \arrow[d, "\det(M_n(R))"'] & M_n(Q) \arrow[d, "\det(M_n(Q))"] \\
U(R) \arrow[r, "U(f)"'] & U(Q)
\end{tikzcd}$$

Podemos observar que det actúa como un morfismo entre estos dos funtores. La primera pregunta que podría salirnos en mente es si el diagrama es conmutativo, i.e., tenemos que $U(f)\det(M_n(R)) = \det(M_n(Q))M_n(f)$. Podemos verificar rápidamente que el diagrama conmuta considerando los elementros neutros de los monoides y recordando que todas estas funciones son homomorfismos de monoides.

La elección de los valores aquí es arbitraria, por lo que vemos que para la familia de morfismos $(\det\colon M_n(R) \to U(R))_{R\in \text{CRing}}$ cualquier diagrama como el mostrado arriba será conmutativo. Si consideramos entonces a $\det\colon M_n \to M$, con det la famlilia mencionada $(\det\colon M_n(R) \to U(R))_{R\in \text{CRing}}$ vemos que para cada homomorfismos de anillos $f\colon R \to Q$, el diagrama mostrado arriba conmutará. Esto refleja que la noción de determinante es uniforme para todos los anillos, i.e., no es dependiente de cómo está determinado un anillo en particular. Esta es la idea fundamental detrás de una transformación natural, la cual procedemos a definir formalmente.

Definición 1.2.8 (Transformación Natural)**.** Sean C y D categorías, y $\mathsf{C} \underset{\mathcal{G}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightrightarrows}} \mathsf{D}$ funtores. Una **transformación natural** $\alpha\colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ consiste en una colección de morfismos $\alpha_c\colon \mathcal{F}c \to \mathcal{G}c$ para cada objeto c en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ tales que para cada morfismo $f\colon c \to d$ en C, el siguiente diagrama de morfismos en D es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\alpha_c"'] & Fd \arrow[d, "\alpha_d"] \\
G_c \arrow[r, "Gf"'] & Gd
\end{tikzcd}$$

Si además cada uno de los morfismos α_c es un isomorfismos, entonces decimos que es un **isomorfismo natural** y lo denotamos por $\alpha\colon \mathcal{F} \cong \mathcal{G}$. A los morfismos α_c también los denotamos como los **componentes** de la transformación natural.

Ejemplos 1.2.9.

a) Los funtores contravariantes $\mathcal{O}, \mathcal{C}\colon \ \mathrm{Top}^{op} \rightrightarrows \mathrm{Set}$, donde $\mathcal{O}$ es el funtor que lleva espacios topológicos X a la familia de conjuntos abiertos de X y que a funciones continuas $f\colon X \to Y$ las lleva a $\mathcal{O}f\colon \mathcal{O}Y \to \mathcal{O}X$, con $\mathcal{O}f$ la función que lleva a un subconjunto $U \subset Y$ a su preimagen bajo f, $f^{-1}(U)$ y $\mathcal{C}$ es el funtor análogo pero llevando los espacios a la familia de conjuntos cerrados de la topología son naturalmene isomórficos, con la transformación natural $\alpha\colon \mathcal{O} \to \mathcal{C}$, donde los morfismos α_X para cada $X \in \mathrm{Top}$ llevan a los conjuntos abiertos a su complemento, que es un conjunto cerrado. Para cada uno de estos, su inverso α_X^{-1} está dado como el morfismo que lleva los conjuntos cerrados de X a su complemento, que es un conjunto abierto.

b) Recordemos que dados órdenes parciales $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ vistos como categorías, un funtor entre ellos es una función que preserva órdenes. Consideremos funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ con dominio P y codominio Q. Si para todo $p \in P$ tenemos que $\mathcal{F}\,p \leq_Q \mathcal{G}p$ podemos definir morfismos $\alpha_p\colon \ \mathcal{F}\,p \to \mathcal{G}p$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\,p \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_p"'] & \mathcal{F}\,q \arrow[d, "\alpha_q"] \\
\mathcal{G}p \arrow[r] & \mathcal{G}q
\end{tikzcd}$$

conmuta, gracias a la transitividad del orden parcial $(Q, \leq_q)$. Por otro lado, la existencia de morfismos $\alpha_p\colon \ \mathcal{F}\,p \to \mathcal{G}p$ implica que $\mathcal{F}\,p \leq_Q \mathcal{G}p$, por lo que vemos que una transformación natural entre los funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ existe si y solo si $\mathcal{F}\,p \leq_Q \mathcal{G}p$ para todo $p \in P$.

Las transformaciones naturales empiezan a resaltar la importancia de los diagramas para representar la información dada. Nos permiten entender de una manera más directa lo que está ocurriendo a través de los objetos y los morfismos. Por ejemplo, dado el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "gf"'] & \\
& B \arrow[dl, "g"] \\
C &
\end{tikzcd}$$

decir que es conmutativo representa la idea de la composición en una categoría. Ahora, un funtor lo podemos entender como el traslado o mapeo de la información de la categoría a otra dada y la propiedad $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}\,g\,\mathcal{F}\,f$ implica que el mapeo del diagrama conserva la conmutatividad, es decir, el triángulo derecho del siguiente diagrama también es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "gf"'] & & & FA \arrow[dr, "Ff"] \arrow[dd, "Fgf"'] & \\
& B \arrow[dl, "g"] & \arrow[r, "F"] & {} & FB \arrow[dl, "Fg"] \\
C & & & FC &
\end{tikzcd}$$

Finalmente podemos entender a una transformación natural como un mapeo o traslado de la información de un funtor $\mathcal{F}$ a otro dado $\mathcal{G}$, de tal modo que también el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "gf"'] & & & FA \arrow[rr, "\alpha_A"] \arrow[dr, "Ff"] \arrow[dd, "Fgf"'] & & GA \arrow[dr, "Gf"] \arrow[dd, "Ggf"' near start] & \\
& B \arrow[dl, "g"] & \arrow[r, "F"] & {} & FB \arrow[rr, "\alpha_B" near start] \arrow[dl, "Fg"] & & GB \arrow[dl, "Gg"] \\
C & & & FC \arrow[rr, "\alpha_C"'] & & GC &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Expresar toda esta información a través de igualdad de composiciones no sólo sería tedioso y tardado, sino también confuso en la entendimiento de las ideas expuestas. Hay una clara ventaja pedagógica en el apoyo de los diagramas para expresar nuestras ideas y, como veremos, nuestras demostraciones. La sección que sigue es un ejemplo perfecto de esto, y es también uno de los resultados centrales en la teoría de categorías.

1.3. Lema de Yoneda

El Lema de Yoneda es uno de los resultados más importantes de la teoría de categorías. La primera aparición del lema en la literatura es con Grothendieck en [Gro60], aunque el resultado se la atribuye a Nobuo Yoneda. Para entender adecuadamente el resultado, necesitamos introducir algunos resultados. Primeramente, recordemos la definición 1.1.6 de un elemento global. Esta noción es más tradicional a como entendemos la pertenencia y lo denotamos global porque no depende de ningún punto de vista particular. Pero podemos extender la noción conjuntista de pertenencia y pensar en puntos de vista o de “referencia” desde los cuales podemos observar a un objeto. En la definición de elemento global usamos de punto de partida el objeto $\mathbf{1}$, pero podemos observar al elemento desde otro punto de partida. Esto nos lleva a la siguiente definición

Definición 1.3.1 (Elemento local)**.** Sea A un objeto no isomórfico a $\mathbf{1}$. Decimos que un morfismo $A \to B$ es un **elemento local** de B en la **etapa** A.

Esta noción de obsevar un elemento en cierta “etapa” será útil para entender lo que el lema de Yoneda dice.

Recordemos ahora los funtores vistos en el ejemplo 1.2.4. Nos referimos a estos como **Hom-funtores**, en particular $\mathrm{Hom}\,(A,-): \mathsf{C} \to \mathrm{Set}$ es el Hom-funtor covariante y $\mathrm{Hom}\,(-,A) : \mathsf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathrm{Set}$ es el Hom-funtor contravariante. Estos dos funtores son particularmente importantes porque nos permiten hablar de la noción de “representabilidad” que definimos a continuación.

Definición 1.3.2 (Representable)**.** Sea C una categoría. Un funtor $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathrm{Set}$ es (covariablemente) **representable** si es naturalmente isomórfico a un Hom-funtor $\mathrm{Hom}\,(A,-): \mathsf{C} \to \mathrm{Set}$ para algún objeto A en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$. Del mismo modo, un funtor $\mathcal{G}\colon \mathsf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathrm{Set}$ es (contravariablemente) **representable** si es naturalmente isomórfico a un Hom-funtor contravariante $\mathrm{Hom}\,(-,A) : \mathsf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathrm{Set}$ para un objeto A en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$. En ambos casos, tal objeto A es llamado un **objeto representante** del funtor $\mathcal{F}$ o $\mathcal{G}$, según corresponda. El objeto junto con la transformación natural que induce el isomorfismo son llamados una **representación del funtor** $\mathcal{F}$ o $\mathcal{G}$, según corresponda.

Ponemos entre paréntesis si es covariante o contravariante porque el dominio del Hom-funtor aclara inmediatamente eso. Así, si no existe confusión decimos simplemnte que un funtor es representable. Antes de discutir su relación con la definición 1.3.1, veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 1.3.3.

a) El funtor potencia $\mathcal{P}\colon \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ visto en 1.2.2 no es representable, sin embargo, el funtor potencia contravariante $\mathcal{P}^{\mathbf{op}}\colon \mathrm{Set}^{\mathbf{op}} \to \mathrm{Set}$ sí es representable. Consideremos el objeto $\mathbf{2} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, y a $\mathrm{Hom}\,(-,\mathbf{2}) : \mathrm{Set}^{\mathbf{op}} \to \mathrm{Set}$. La transformación natural $\alpha\colon \mathcal{P}^{\mathbf{op}} \to \mathrm{Hom}\,(-,\mathbf{2})$ está dada por la familia de morfismos $\alpha_A\colon P(A) \to \mathrm{Hom}\,(A,\mathbf{2})$ para cada conjunto A, que asigna $B \mapsto \chi_B$, donde $B \subseteq A$ y χ_B es la función característica de B,

$$\chi_B(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathrm{si}\, x \notin B \\ \mathbf{1} & \mathrm{si}\, x \in B. \end{cases}$$

Es claro ver por qué estos morfismos inducen una biyección. Dado un subconjunto $B \subseteq A$, los elementos que pertenecen a éste son mandados a $\mathbf{1}$, es decir, B no es otra cosa más que la preimagen bajo χ_B de $\mathbf{1}$. Por otro lado, para ver la naturalidad necesitamos que dada una función $f : A \to B$, el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} P(B) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\alpha_B"'] & P(A) \arrow[d, "\alpha_A"] \\ \mathrm{Hom}\,(B, \mathbf{2}) \arrow[r, "f^*"'] & \mathrm{Hom}\,(A, \mathbf{2}), \end{tikzcd}$$

donde f^* denota la precomposición. Notemos que el camino derecho nos dice que dado un conjunto $C \subseteq B$, nos da una función clasificadora de la preimagen de C, es decir, nos da $\chi_{f^{-1}(C)}$. Por otro lado, el camino izquierdo nos dice que dado ese conjunto $C \subseteq B$, nos da a través de la precomposición con f^* una función clasificadora dada por $\chi_C f$. Ver la igualdad entonces equivale a que $\chi_C f$ sea una función clasificadora de $f^{-1}(C) \subseteq A$, lo cual es claramente el caso. Por lo tanto, el diagrama conmuta.

De los argumentos anteriores vemos que α es un isomorfismo natural y por lo tanto $\mathcal{P}^{\mathbf{op}}$ es representado por $\mathbf{2}$. En realidad, es claro ver que cualquier conjunto con dos elementos representa a este funtor.

Pensemos ahora

b) Consideremos el funtor identidad de Set, $1_{\text{Set}} \colon \text{Set} \to \text{Set}$. Este funtor está representado por el elemento $\mathbf{1}$. Es decir, $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{1}, -) \cong 1_{\text{Set}}$. La transformación natural es bastante directa, para cada X en Ob(Set), $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{1}, X)$ es el conjunto de todos los elementos de X, es decir, de todos los $\mathbf{1} \xrightarrow{x} X$ que recordando la discusión en 1.1.6 no es más que los $x \in X$, por lo que $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{1}, X)$ es isomórfico a X. Es inmediato ver por qué esta biyección es natural en Set también. Este funtor nos muestra de una manera clara que en Set, dado un conjunto X, $x \in X \iff \mathbf{1} \xrightarrow{x} X$.

Antes de enunciar y demostrar el lema de Yoneda, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.4. Pensemos en un orden parcial $(P, \leq)$ como categoría y en un funtor $\mathcal{F} \to \text{Set}$. Para facilidad de consideración, supongamos que la cardinalidad del conjunto P es igual o menor a la de los naturales. Consideremos un objeto p. Tenemos que

$$\mathrm{Hom}\,(p, -) = \{q \in P \mid p \leq q\}$$

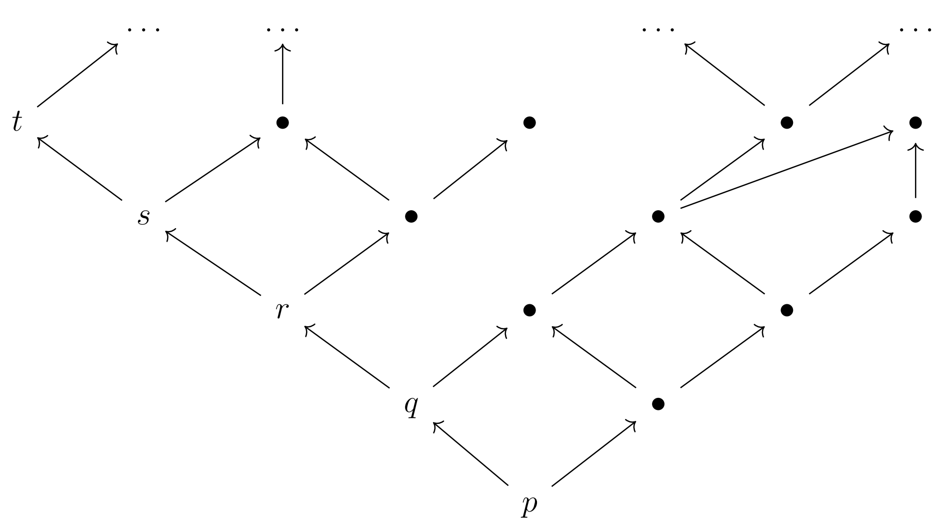
De existir una transformación natural $\alpha \colon \mathrm{Hom}\,(p, -) \Rightarrow \mathcal{F}$, debe ser tal que para cualquier $q \to r$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(p,q) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_q"'] & \mathrm{Hom}\,(p,r) \arrow[d, "\alpha_r"] \\
\mathcal{F}\,q \arrow[r] & \mathcal{F}\,r
\end{tikzcd}$$

conmuta. Si p y q no son comparables bajo $\leq$ el diagrama no aporta información alguna, del mismo modo que si $q \leq p$, pues sería vacío en su contenido. Si $p \leq q$, $\mathrm{Hom}\,(p,q)$ es simplemente la flecha $p \to q$ y del mismo modo $\mathrm{Hom}\,(p,r)$ es la flecha $p \to r$, es decir, ambos son unitarios. $\mathrm{Hom}\,(p,q) \to \mathrm{Hom}\,(p,r)$ es simplemente la transitividad del orden parcial en acción: $p \leq q \leq r$ implica $p \leq r$. De esto observamos que el diagrama determina elementos $\alpha_q \in \mathcal{F}\,q$ y $\alpha_r \in \mathcal{F}\,r$. Si denotamos por $f_{q,r}$ a la $\mathcal{F}\,q \to \mathcal{F}\,r$ del diagrama, vemos que la naturalidad implica $\alpha_r = f_{q,r}\alpha_q$. Si seguimos este proceso con una cadena que inicie en p, i.e.,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(p,p) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_p"'] & \mathrm{Hom}\,(p,q) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_q"'] & \mathrm{Hom}\,(p,r) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_r"'] & \mathrm{Hom}\,(p,s) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_s"'] & \dots \\
\mathcal{F}\,p \arrow[r, "f_{p,q}"'] & \mathcal{F}\,q \arrow[r, "f_{q,r}"'] & \mathcal{F}\,r \arrow[r, "f_{r,s}"'] & \mathcal{F}\,s \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

se vuelve un ejercicio inductivo ver que para todos estos elementos son iguales a α_p. Por supuesto, el orden parcial puede tener muchas ramificaciones en el proceso. Sin embargo, hay un componente α que “absorbe” a todos los demás valores, a saber, $\alpha_p : \mathrm{Hom}\,(p,p) \to \mathcal{F}\,p$. En principio, nuestro orden parcial visualizando a todos los elementos comparables con p podría verse de este estilo



donde los $\bullet$ son otros elementos del orden parcial. Las flechas nos indican que los elementos estan bajo la relación $\leq$. El conjunto pudiera ser denso también, pero como todos estos elementos son comparables con p, la naturalidad nos dará siempre que estos elementos son iguales a $\alpha_p \in \mathcal{F}\, p$. Por lo tanto, la transformación natural $\alpha\colon \operatorname{Hom}(p,-) \Rightarrow \mathcal{F}$ está completamente determinada por la elección $\alpha_p \in \mathcal{F}\, p$. Podemos pensar en este elemento como la imagen del morfismo 1_p bajo la transformación natural $\alpha_p\colon \operatorname{Hom}(p,p) \to \mathcal{F}\, p$. ¿Cuáles son las posibles elecciones de elementos? Vemos que es precisamente los $x \in \mathcal{F}\, p$.

De este análisis vemos que las transformaciones naturales de $\operatorname{Hom}(p,-)$ al funtor $\mathcal{F}$ están determinadas por los elementos de $\mathcal{F}\, p$. Esta idea, como veremos, no depende de nuestra elección p o del funtor en particular, ni de haber trabajado en un conjunto parcialmente ordenado.

Volveremos a este ejemplo en un momento, pero ahora enunciamos el teorema más importante en teoría de categorías.

Teorema 1.3.5 (Lema de Yoneda)**.** *Para cualquier funtor* $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathrm{Set}$*, con* C *una categoría localmente pequeña, y cualquier objeto* A *en* $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$*, la siguiente función es una biyección:*

$$\varphi\colon \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}\,(A,-)),\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}\,A,$$
$$\varphi(\alpha) = \alpha_A(1_A)$$

donde $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}\,(A,-)),\mathcal{F})$ *denota la colección de transformaciones naturales entre* $\mathrm{Hom}\,(A,-)$ *y* $\mathcal{F}$*.*

Demostración. Queremos construir una $\phi\colon \mathcal{F}\,A \to \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}\,(A,-)),\mathcal{F})$ que sea la inversa de φ. Para este fin, para cada elemento $x \in \mathcal{F}\,A$, $\phi(x)$ debe ser una transformación natural, por lo que tenemos que definir una colección de morfismos $\phi(x)_B\colon \mathrm{Hom}\,(A,B) \to \mathcal{F}\,B$ para cada objeto B en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ que definan a $\phi(x)\colon \mathrm{Hom}\,(A,-) \Rightarrow \mathcal{F}$. Para este fin, definimos para cada $x \in \mathcal{F}\,A$ y cada objeto B en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$,

$$\phi(x)_B(f) = \mathcal{F}\,f(x)$$

recordando que $f : A \to B$. Para corroborar que $\phi(x)$ es una transformación natural, debemos verificar que para cualquier $g\colon B \to C$ con C en $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(A,B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\phi(x)_B"'] & \mathrm{Hom}\,(A,C) \arrow[d, "\phi(x)_C"] \\
\mathcal{F}\,B \arrow[r, "Fg"'] & \mathcal{F}\,C
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde g_* denota la post-composición. Evaluemos el camino izquierdo del diagrama.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\,g(\phi(x)_B(f)) &= \mathcal{F}\,g\,\mathcal{F}\,f(x) \\
&= \mathcal{F}\,gf(x) \\
&= \phi(x)_C(gf) \\
&= \phi(x)_C(g_*(f)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el diagrama conmuta. Notemos que el paso de la primera igualdad a la segunda se cumple por los axiomas de funtorialidad vistos en 1.2.1.

Recordando que $\varphi(x)$ es una transformación natural y por definición de ϕ tenemos que $\phi\varphi(x) = \phi(x)_A(1_A)$, por definición de $\phi(x)_A$ esto es igual a $\mathcal{F}\,1_A(x)$ y por axiomas de funtorialidad esto es $1_{\mathcal{F}\,A}(x) = x$. Por lo tanto, $\phi\varphi(x) = x$.

Para probar la biyección, nos resta probar que $\varphi\phi(\alpha) = \alpha$. Consideremos un morfismo $f\colon A \to B$. Evaluando,

$$\begin{aligned}
\varphi(\phi(\alpha))_B(f) &= \varphi(\alpha_A(1_A))_B(f) \\
&= F(f)(\alpha_A(1_A))
\end{aligned}$$

Ahora, α es una transformación natural, por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(A, A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & \operatorname{Hom}(A, B) \arrow[d, "\alpha_B"] \\
\mathcal{F}\,A \arrow[r, "Ff"'] & \mathcal{F}\,B
\end{tikzcd}$$

conmuta. La última igualdad, $F(f)(\alpha_A(1_A))$ es el camino izquierdo del diagrama, por lo que es igual a $\alpha_B(f_*(1_A))$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\alpha_B(f_*(1_A)) &= \alpha_B(f(1_A)) \\
&= \alpha_B(f)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi(\phi(\alpha))_B(f) = \alpha_B(f)$. Como el morfismo fue elegido arbitrariamente concluimos que $\varphi(\phi(\alpha))_B = \alpha_B$, y como B fue elegido arbitrariamente, concluimos que para todo morfismo de la colección que conforman a α y a $\varphi(\phi(\alpha))$ se cumple la igualdad. Como coinciden en todos sus componentes, es el caso que son la misma transformación natural. Por lo tanot, $\varphi(\phi(\alpha)) = \alpha$. De esto concluimos que las funciones ϕ y φ son inversas y por lo tanto ϕ es una biyección. $\square$

Existe la versión del lema de Yoneda para pregavillas, es decir, tenemos

Corolario 1.3.6 (Contravariante del lema de Yoneda)**.** *Para cualquier funtor* $\mathcal{F}\colon \mathsf{C}^{op} \to \text{Set}$*, con* C^{op} *una categoría localmente pequeña, y cualquier objeto* A *en* $\text{Ob}(\mathsf{C})$*, la siguiente función es una biyección:*

$$\varphi\colon\ \text{Nat}(\operatorname{Hom}(-, A)), \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}\,A,$$

$$\varphi(\alpha) = \alpha_A(1_A^{op})$$

Demostración. La demostración de este teorema es completamente análoga a la demostración del lema de Yoneda en su versión covariante. $\square$

Podemos extender el lema. La biyección φ de 1.3.5 es una correspondencia natural tanto en A y $\mathcal{F}$. Pero expresar a qué se refiere esto en particular requiere la introducción de algunos conceptos.

Definición 1.3.7 (Categoría producto)**.** Sean C y D categorías. Definimos la categoría producto $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$ dada por

- objetos que son parejas ordenadas (c, d) donde c es un objeto en $\text{Ob}(\mathsf{C})$ y d es un objeto en $\text{Ob}(\mathsf{D})$,
- morfismos que son parejas ordenadas $(f, g)\colon (c, d) \to (e, f)$ con $f\colon c \to e$ morfismo en C y $g\colon d \to f$ morfismo en D

la composición y la identidad están definidas componentemente.

Definición 1.3.8. Dadas categorías C y D, definimos la categoría D^{C} donde

- los objetos son funtores $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$,
- los morfismos son transformaciones naturales entre funtores $\mathsf{C} \underset{\mathcal{G}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightrightarrows}} \mathsf{D}$
- dado un funtor $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ la transformación natural identidad $1_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ está definida por los morfismos $(1_{\mathcal{F}})_c = 1_{\mathcal{F}_c}$.
- dadas transformaciones naturales $\alpha\colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, $\beta\colon \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$ la composición $\beta\alpha\colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{H}$ está definida en sus componentes $(\beta\alpha)_A = \beta_A\alpha_A$.

Una observación importante de la definición anterior es que para garantizar que ésta es efectivamente una categoría, la composición de los morfismos debe estar bien definida, y esto sólo es el caso si en efecto $\beta\alpha$ es una transformación natural. Consideremos $f\colon A \to B$ en C, la naturalidad de α nos dice que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}A \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\
\mathcal{F}B \arrow[r, "\alpha_B"'] & \mathcal{G}B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}A \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "\mathcal{G}f"'] & \mathcal{H}A \arrow[d, "\mathcal{H}f"] \\
\mathcal{G}B \arrow[r, "\beta_B"'] & \mathcal{H}B
\end{tikzcd}$$

conmutan. Podemos unir estos dos diagramas y ver que por la naturalidad de cada componente, el rectángulo exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}A \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}A \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "\mathcal{G}f"] & \mathcal{H}A \arrow[d, "\mathcal{H}f"] \\
\mathcal{F}B \arrow[r, "\alpha_B"'] & \mathcal{G}B \arrow[r, "\beta_B"'] & \mathcal{H}B
\end{tikzcd}$$

conmuta. De esto podemos ver que efectivamente $\beta\alpha$ es una transformación natural y la composición está bien definida.

Requerimos la construcción de estas dos categorías para hablar de una en particular. Podemos considerar dada una categoría C localmente pequeña, la categoría $\mathsf{C} \times \mathrm{Set}^{\mathsf{C}}$. Aquí, podemos considerar un funtor $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}\,(-,-)\,,-)\colon \mathsf{C} \times \mathrm{Set}^{\mathsf{C}} \to \mathrm{Set}$ que recibe un objeto $(A, \mathcal{F})$ y lo manda al conjunto $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}\,(A,-)), \mathcal{F})$. Es importante notar en este punto, que el hecho de que C sea localmente pequeña, no garantiza que $\mathrm{Set}^{\mathsf{C}}$ sea localmente pequeña, por lo que no podríamos garantizar en principio que $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}\,(A,-)), \mathcal{F})$ sea un conjunto. Sin embargo, el lema de Yoneda precisamente garantiza esto, por lo que el codominio de este funtor está bien definido. Podemos considerar otro funtor de $\mathsf{C} \times \mathrm{Set}^{\mathsf{C}}$ a Set, el funtor $\mathrm{Ev}\colon \mathsf{C} \times \mathrm{Set}^{\mathsf{C}} \to \mathrm{Set}$ que manda objetos $(A, \mathcal{F})$ al conjunto $\mathcal{F}A$. Con esta categorías y estos funtores en vista, podemos entender a la función φ dada en el lema de Yoneda como un isomorfismo natural

$\varphi\colon \operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}(-,-),-) \Rightarrow \operatorname{Ev}$. Es en este sentido que decimos que tanto A como $\mathcal{F}$ son naturales en 1.3.5. Como tal, esto es parte de la totalidad del lema de Yoneda, por lo que lo enunciamos como una "segunda parte".

Teorema 1.3.9 (Segunda parte del Lema de Yoneda)**.** *El isomorfismo φ visto en 1.3.5 es natural tanto en A como en $\mathcal{F}$ cuando ambos lados son vistos como funtores de $\mathsf{C} \times \mathrm{Set}^{\mathsf{C}}$ a* Set.

Demostración. La demostración consiste en dos partes. Primero, fijemos un funtor $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathrm{Set}$ y consideremos un morfismo $f : A \to B$ en C. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}(A,-)),\mathcal{F}) \arrow[r, "\circ(f^*)"] \arrow[d, "\varphi_{A,\mathcal{F}}"'] & \operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}(B,-)),\mathcal{F}) \arrow[d, "\varphi_{B,\mathcal{F}}"] \\
\mathcal{F}\,A \arrow[r, "\mathcal{F}\,f"'] & \mathcal{F}\,B
\end{tikzcd}$$

□

Aquí, $\varphi_{A,\mathcal{F}}$ define la función definida en 1.3.5 en los valores A y $\mathcal{F}$ y del mismo modo para $\varphi_{B,\mathcal{F}}$; por otro lado, $\circ f^*$ es dada a través de la composición con una transformación natural, $\circ f^*(\alpha) = \alpha f^*\colon \operatorname{Hom}(A,-) \Rightarrow \operatorname{Hom}(B,-)$. Evaluando el lado derecho del diagrama,

$$\begin{aligned}
\varphi_{B,\mathcal{F}}\left(\circ(f^*)(\alpha)\right) &= \varphi_{B,\mathcal{F}}(\alpha f^*) \\
&= (\alpha f^*)_B(1_B) \\
&= \alpha_B(f) \\
&\overset{*}{=} \alpha_B(f_*(1_A)) \\
&\overset{*}{=} \mathcal{F}(f)(\alpha_A(1_A)) \\
&= \mathcal{F}(f)\varphi_{A,\mathcal{F}}(\alpha)
\end{aligned}$$

La justificación a las igualdades con un asterisco encima se encuentran en la demostración de 1.3.5. La última igualdad es precisamente el lado izquierdo del diagrama, de lo que concluimos que el diagrama conmuta. Por tanto, la función es natural en A.

Ahora fijemos al objeto A en $\operatorname{Ob}(\mathsf{C})$ y consideremos una transformación natural $\alpha\colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ en $\mathrm{Set}^{\mathsf{C}}$, es decir, α es un morfismo en dicha categoría. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}(A,-),\mathcal{F}) \arrow[r, "\mathrm{Ev}_A"] \arrow[d] & \operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}(A,-),\mathcal{G} \arrow[d] \\
\mathcal{F}\,A \arrow[r] & \mathcal{G}A
\end{tikzcd}$$

El lema de Yoneda nos dice que podemos entender cualquier objeto de una categoría a través de cómo se comportan todos los demás objetos. Por eso mismo a los morfismos también los llamamos elementos locales, como vimos en 1.3.1: son puntos de vista de un objeto que queremos entender. Es decir, para saber todo lo que necesitamos de un objeto dado, basta con ver cómo interaccionan los demás objetos de la categoría con éste.

Regresemos al ejemplo 1.3.4. Entendemos ahora, por el lema de Yoneda, que

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}\,(p, -)\,, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}\, p$$

Nosotros sabíamos que las transformaciones naturales estaban determinadas por los elementos de $\mathcal{F}\, p$, pero con el lema de yoneda entendemos también que los elementos de $\mathcal{F}\, p$ están determinados por las transformaciones naturales y que esta correspondencia es biyectiva.

Bibliografía

[Göd92] Kurt Gödel. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Dover Publications, 1992.

[Gro60] Alexander Grothendiek. "Technique de descente et théorèmes déxistence en géométrie algébriques. II. Le théorème déxistence en théorie formelle des modules". En: *Séminaire Bourbaki* (1960).

[Law06] F. William Lawvere. "Diagonal arguments and cartesian closed categories with author commentary". En: *Reprints in Theory and Applications of Categories* (2006).

[Lei16] Tom Leinster. *Basic Category Theory*. 2016. arXiv: `1612.09375 [math.CT]`. URL: `https://arxiv.org/abs/1612.09375`.

[LR03] F. William Lawvere y Robert Rosebrugh. *Sets for mathematics*. Cambridge University Press, 2003.

[Mac97] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1997.

[Rie16] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Dover Publications, 2016.

[Yan03] Noson S. Yanofsky. "A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points". En: *Bulletin of Symbolic Logic* 9.3 (sep. de 2003), págs. 362-386. ISSN: 1943-5894. DOI: `10.2178/bsl/1058448677`. URL: `http://dx.doi.org/10.2178/bsl/1058448677`.