Sección 1.1

1. La restricción a ecuaciones de primer orden no supone pérdida de generalidad, pues siempre es posible transformar un problema de mayor orden en uno de primer orden a costa de aumentar la dimensión del sistema. Para ello simplemente hay que añadir como nuevas variables dependientes a cada una de las derivadas de las variables dependientes originales de orden estrictamente menor que las de mayor orden que aparecieran en las ecuaciones de partida.

   (a) Escribir la ecuación lineal $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ en la forma $Y' = AY$ con $Y = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^T$ y A una matriz $n \times n$.

   (b) Reducir el problema de valor inicial

   $$\begin{array}{l} u''' = u'' + v', \qquad v'' = u^2 + e^x u'v' + \operatorname{sen} v, \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = v'(0) = 0, \qquad v(0) = 1, \end{array}$$

   a un problema de valor inicial para una EDO de primer orden escrita en la forma estándar.

Solución. (a) Para $k = 1, \ldots, n-1$, se tiene que

$$(Y^k)' = (y^{(k-1)})' = y^{(k)} = Y^{(k+1)}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (Y^n)' = y^{(n)} &= -a_0 y - a_1 y' - \cdots - a_{n-1}y^{(n-1)} \\ &= -a_0 Y^1 - a_1 Y^2 - \cdots - a_{n-1} Y^n. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(b) Definimos una función vectorial $y = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5)^T$ cuyas componentes vienen dadas por

$$y^1 = u, \quad y^2 = u', \quad y^3 = u'', \quad y^4 = v, \quad y^5 = v'.$$

A continuación obtenemos la ecuación diferencial satisfecha por la derivada de cada una de las componentes. Usando las definiciones de las mismas, así como las EDO de partida, se tiene

$$\begin{aligned}
(y^1)'(x) &= u'(x) = y^2(x); \\
(y^2)'(x) &= u''(x) = y^3(x); \\
(y^3)'(x) &= u'''(x) = u''(x) + v'(x) = y^3(x) + y^5(x); \\
(y^4)'(x) &= v'(x) = y^5(x); \\
(y^5)'(x) &= v''(x) = (u(x))^2 + e^x u'(x)v'(x) + \operatorname{sen}(v(x)) \\
&= (y^1(x))^2 + e^x y^2(x)y^5(x) + \operatorname{sen}(y^4(x)).
\end{aligned}$$

En notación vectorial, $y'(x) = f(x, y(x))$, con $f = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5)^T$ y

$$\begin{aligned}
&f^1(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) = y^2; \\
&f^2(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) = y^3; \\
&f^3(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) = y^3 + y^5; \\
&f^4(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) = y^5; \\
&f^5(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) = (y^1)^2 + e^x y^2 y^5 + \operatorname{sen}(y^4).
\end{aligned}$$

Sólo nos queda transformar las condiciones iniciales. Usando la definición de las componentes de y se tiene que

$$\begin{aligned}
y^1(0) &= u(0) = 0; \\
y^2(0) &= u'(0) = 0; \\
y^3(0) &= u''(0) = 0; \\
y^4(0) &= v(0) = 1; \\
y^5(0) &= v'(0) = 0.
\end{aligned}$$

En notación vectorial, $y(0) = (0, 0, 0, 1, 0)^T$.

---

2. Una EDO de primer orden escrita en la forma estándar se dice *autónoma* si la función f del lado derecho no depende explícitamente de la variable independiente x. Cualquier EDO se puede transformar en autónoma introduciendo una nueva variable dependiente dada precisamente por x.

Transformar el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u' &= xu + x^2 v, & u(0) &= 3,\\ v' &= u - v + 2xw, & v(0) &= 2,\\ w' &= u + \frac{v}{1+x}, & w(0) &= 5, \end{aligned}$$

en un problema de valor inicial para una EDO autónoma.

Solución. Definimos $y = (u, v, w, x)^T$. Se tiene que

$$\begin{aligned} (y^1)' &= u' = xu + x^2 v = y^4 y^1 + (y^4)^2 y^2,\\ (y^2)' &= v' = u - v + 2xw = y^1 - y^2 + 2y^4 y^3,\\ (y^3)' &= w' = u + \frac{v}{1+x} = y^1 + \frac{y^2}{1+y^4},\\ (y^4)' &= 1. \end{aligned}$$

Así pues, el sistema se puede escribir $y' = f(y)$, con

$$f(y) = f(y^1, y^2, y^3, y^4) = \begin{pmatrix} y^4 y^1 + (y^4)^2 y^2 \\ y^1 - y^2 + 2y^4 y^3 \\ y^1 + \dfrac{y^2}{1+y^4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En cuanto a los datos iniciales, se tiene que

$$y(0) = (y^1(0), y^2(0), y^3(0), y^4(0))^T = (3, 2, 5, 0)^T.$$

---

3. Al restringirnos a ecuaciones que se puedan escribir en forma estándar, sí dejamos fuera algunos problemas: la EDO de primer orden más general, $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, donde y, y' y F tienen d componentes cada una, no siempre equivale a una única EDO escrita en forma estándar.

Encontrar todas las soluciones de la EDO de primer orden en forma no estándar $(y')^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0$.

Solución. La EDO se puede factorizar como $(y' - 2x)(y' - y) = 0$. Así pues las soluciones tendrán que satisfacer o bien $y' = 2x$ o bien $y' = y$. Nótese que una solución puede satisfacer una de estas ecuaciones para algunos valores de x y la otra para otros valores de x distintos. Eso sí, la transición entre las dos ecuaciones tiene que producirse de forma que la solución sea C^1. Por consiguiente en los puntos de cambio se tiene que satisfacer en particular que $y(x) = 2x$.

Vamos a clasificar las soluciones en función de su estructura, de cuántos "trozos" tienen.

Soluciones "simples". Hay de dos tipos: las soluciones de $y' = 2x$, que son las parábolas

$$y_c(x) = x^2 + c,$$

y las soluciones de $y' = y$, que son las exponenciales

$$y_d(x) = d\mathrm{e}^x.$$

Soluciones con dos "trozos". Se obtienen pegando dos soluciones simples, en cualquiera de los dos órdenes posibles. En el punto de transición, $\bar{x}$, se tiene que cumplir que

$$\bar{x}^2 + c = d\mathrm{e}^{\bar{x}}, \qquad 2\bar{x} = d\mathrm{e}^{\bar{x}},$$

de donde se deduce que

$$c = 2\bar{x} - \bar{x}^2, \qquad d = 2\bar{x}\mathrm{e}^{-\bar{x}}.$$

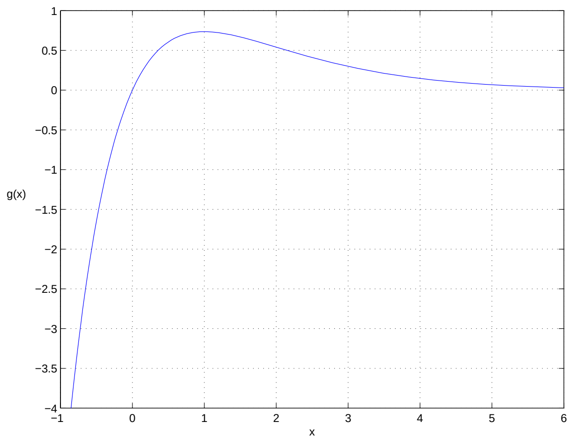
El punto de transición $\bar{x}$ se puede elegir arbitrariamente. Hay así dos tipos de soluciones:

$$y_{\bar{x}}(x) = \begin{cases} x^2 + 2\bar{x} - \bar{x}^2, & x \le \bar{x}, \\ 2\bar{x}\mathrm{e}^{x-\bar{x}}, & x \ge \bar{x}, \end{cases} \qquad \hat{y}_{\bar{x}}(x) = \begin{cases} 2\bar{x}\mathrm{e}^{x-\bar{x}}, & x \le \bar{x}, \\ x^2 + 2\bar{x} - \bar{x}^2, & x \ge \bar{x}. \end{cases}$$

Soluciones con tres "trozos". Alternan parábolas y exponenciales. Sean $x_1 < x_2$ los puntos de transición. Como las soluciones son C^1, las soluciones del tipo parábola/exponencial/parábola tienen que ser de la forma

$$y_{x_1,x_2}(x) = \begin{cases} x^2 + 2x_1 - x_1^2, & x \leq x_1, \\ 2x_1 \mathrm{e}^{x - x_1}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ x^2 + 2x_2 - x_2^2, & x \geq x_2, \end{cases}$$

con $x_1 < x_2$ satisfaciendo $2x_1 \mathrm{e}^{x_2 - x_1} = 2x_2$. Es decir, x_1 y x_2 tienen que pertenecer al mismo conjunto de nivel de la función $g(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$. Como se puede ver en la figura, esto sólo es posible si $0 < x_1 < 1$.

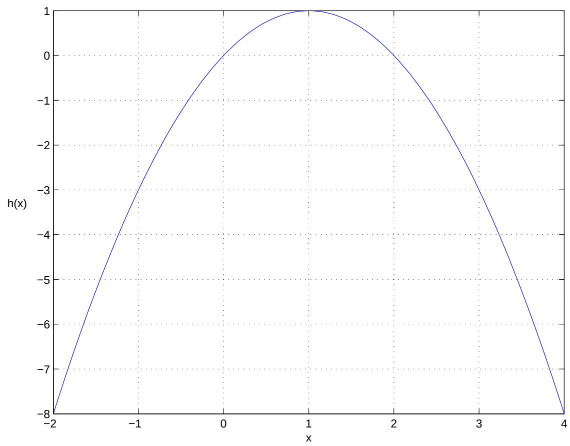


Una vez fijado cualquier x_1 con esa condición, x_2 queda totalmente determinado, y es mayor que 1.

De manera análoga se tiene que las soluciones del tipo exponencial/parábola/exponencial tienen que ser de la forma

$$y_{x_1,x_2}(x) = \begin{cases} 2x_1 \mathrm{e}^{x - x_1}, & x \leq x_1, \\ x^2 + 2x_1 - x_1^2, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 2x_2 \mathrm{e}^{x - x_2}, & x \geq x_2, \end{cases}$$

con $x_1 < x_2$ satisfaciendo $2x_2 = x_2^2 + 2x_1 - x_1^2$. Es decir, x_1 y x_2 tienen que pertenecer al mismo conjunto de nivel de la función $h(x) = 2x - x^2$. Como se puede ver en la figura, esto sólo es posible si $x_1 < 1$. Una vez



fijado cualquier x_1 con esa condición, x_2 queda totalmente determinado, y es mayor que 1.

Ya no hay más posibilidades. En efecto, si hubiera otra transición parábola/exponencial, en un punto $x_3 > x_2 > 1$, la regularidad C^1 exigiría $h(x_2) = h(x_3)$, lo que es claramente imposible. De la misma forma, otra transición exponencial/parábola en un punto $x_3 > x_2 > 1$ exigiría $g(x_2) = g(x_3)$, lo que también es claramente imposible.

Sección 1.2

1. Comprobar que las siguientes funciones satisfacen una condición de Lipschitz con respecto a su segunda variable para $x \in [1, \infty)$:

$$\text{(a)} \quad f(x, y) = 2yx^{-4}, \qquad \text{(b)} \quad f(x, y) = e^{-x^2} \arctan y.$$

Solución. (a) $|f(x,y) - f(x,\hat{y})| = 2|x|^{-4}|y - \hat{y}|$. Dado que $|x|^{-4} \le 1$ si $x \in [1, \infty)$, concluimos que $|f(x,y) - f(x,\hat{y})| \le 2|y - \hat{y}|$.

(b) $|f(x,y) - f(x,\hat{y})| = e^{-x^2}|\arctan y - \arctan \hat{y}|$. Por el Teorema del Valor Medio, $|\arctan y - \arctan \hat{y}| = \frac{1}{1+\xi^2}|y - \hat{y}|$, donde ξ es un punto intermedio entre y e $\hat{y}$. Como $e^{-x^2} \le 1$ y $\frac{1}{1+\xi^2} \le 1$, concluimos que $|f(x,y) - f(x,\hat{y})| \le |y - \hat{y}|$.

---

2. Consideramos el problema de valor inicial

$$y'(x) = Ay(x) \qquad \text{para } 0 \le x \le 2, \qquad y(0) = \eta,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & \sqrt{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Encontrar la mejor constante de Lipschitz para la función del lado derecho usando las normas $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ y $\| \cdot \|_\infty$[1].

[1] Recordemos que, para $x \in \mathbb{C}^d$ se define $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{1/p}$ si $p \in [1, \infty)$, $\|x\|_\infty = \text{máx}_{1 \le j \le d} |x_j|$. Por otra parte, dada una matriz A de entradas $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \le i, j \le d$, se define $\|A\|_p = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$, $1 \le p \le \infty$, y se demuestra que

$$\|A\|_1 = \underset{1 \le j \le d}{\text{máx}} \sum_{i=1}^d |a_{ij}|, \qquad \|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^* A)}, \qquad \|A\|_\infty = \underset{1 \le i \le d}{\text{máx}} \sum_{j=1}^d |a_{ij}|,$$

donde $r_\sigma(B)$ denota el *radio espectral* de B, $r_\sigma(B) = \text{máx}_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|$, siendo $\sigma(B)$ el *espectro* de B, es decir, el conjunto de todos sus autovalores.

(b) Sean y e $\hat{y}$ las soluciones del problema correspondientes a datos iniciales $(0,1)^T$ y $(1,0)^T$ respectivamente. Acotar $\max\limits_{x\in[0,2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|$ para cada una de las normas del apartado anterior.

Solución. (a) Dado que $f(x,y) - f(x,\hat{y}) = A(y-\hat{y})$, la mejor constante de Lipschitz vendrá dada por $\sup_{z\neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$, es decir, por $\|A\|$. Para las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ se tiene

$$\|A\|_1 = \max\{\sqrt{7}+0, \sqrt{2}+2\} = \sqrt{2}+2,$$

$$\|A\|_\infty = \max\{\sqrt{7}+\sqrt{2}, 0+2\} = \sqrt{7}+\sqrt{2}.$$

Para obtener la norma 2, comenzamos calculando

$$A^*A = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & 0 \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & \sqrt{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{14} \\ -\sqrt{14} & 6 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz son -1 y 14, de donde deducimos que $\|A\|_2 = \sqrt{14}$.

(b) Según hemos visto en la teoría,

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \|y(0) - \hat{y}(0)\| \exp(Lx)),$$

de donde deducimos que

$$\max_{x\in[0,2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \|(-1,1)^T\| \exp(2L).$$

Dado que $\|(-1,1)^T\|_1 = 2$, $\|(-1,1)^T\|_2 = \sqrt{2}$ y $\|(-1,1)^T\|_\infty = 1$, concluimos que

$$\max_{x\in[0,2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|_1 \leq 2\exp(2(\sqrt{2}+2)),$$

$$\max_{x\in[0,2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|_2 \leq \sqrt{2}\exp(2\sqrt{14}),$$

$$\max_{x\in[0,2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|_1 \leq \exp(2(\sqrt{7}+\sqrt{2})).$$

3. Consideramos la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = (x + \operatorname{sen} y^2, \frac{x^2}{2} + \cos y^1)^T.$$

(a) Encontrar, usando las normas[2] $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$, una constante de Lipschitz para f con respecto a $y = (y^1, y^2)^T$.

(b) Sean y e $\hat{y}$ las soluciones de $y'(x) = f(x, y(x))$ en el intervalor $[0,1]$ con datos iniciales $y(0) = (0,1)^T$ e $\widehat{y(0)} = (1,0)^T$ respectivamente. Acotar $\max_{x\in[0,1]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|$ para cada una de las normas del apartado anterior.

Solución. Se tiene que

$$f(x,y) - f(x,\hat{y}) = (\operatorname{sen} y^2 - \operatorname{sen} \hat{y}^2, \cos y^1 - \cos \hat{y}^1)^T.$$

Empezamos por la norma $\|\cdot\|_1$. Usando el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned}
\|f(x,y) - f(x,\hat{y})\|_1 &= |\operatorname{sen} y^2 - \operatorname{sen} \hat{y}^2| + |\cos y^1 - \cos \hat{y}^1| \\
&= |\cos \xi||y^2 - \hat{y}^2| + |\operatorname{sen} \eta||y^1 - \hat{y}^1| \\
&\leq |y^1 - \hat{y}^1| + |y^2 - \hat{y}^2| = \|y - \hat{y}\|_1.
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos tomar $L = 1$.

En cuanto a la norma $\|\cdot\|_2$, usando de nuevo el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned}
\|f(x,y) - f(x,\hat{y})\|_2 &= \sqrt{|\operatorname{sen} y^2 - \operatorname{sen} \hat{y}^2|^2 + |\cos y^1 - \cos \hat{y}^1|^2} \\
&= \sqrt{|\cos \xi|^2|y^2 - \hat{y}^2|^2 + |\operatorname{sen} \eta|^2|y^1 - \hat{y}^1|^2} \\
&\leq \sqrt{|y^1 - \hat{y}^1|^2 + |y^2 - \hat{y}^2|^2} = \|y - \hat{y}\|_2,
\end{aligned}$$

[2]Si nos basta con obtener una constante de Lipschitz cualquiera, sin buscar la óptima, puede ser útil recordar que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty$, $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{d}\|x\|_2$.

y también podemos tomar en este caso $L = 1$.

Finalmente, consideramos $\|\cdot\|_\infty$. Una vez más usamos el Teorema del Valor Medio, y obtenemos

$$\begin{aligned} \|f(x,y) - f(x,\hat{y})\|_2 &= \max\{|\operatorname{sen} y^2 - \operatorname{sen} \hat{y}^2|, |\cos y^1 - \cos \hat{y}^1|\} \\ &= \max\{|\cos \xi||y^2 - \hat{y}^2|, |\operatorname{sen} \eta||y^1 - \hat{y}^1|\} \\ &\leq \max\{|y^1 - \hat{y}^1|, |y^2 - \hat{y}^2|\} = \|y - \hat{y}\|_\infty \end{aligned}$$

Por consiguiente, también ahora podemos tomar $L = 1$.

---

4. Demostrar que cualquier problema de valor inicial para las ecuaciones diferenciales

   (a) $y'(x) = 2y(1+y^2)^{-1}(1+e^{-|x|})$, (b) $y'(x) = 3|y(x)+1| + \cos x$,

   tiene a lo sumo una solución.

Solución. Se trata de ver en cada caso que la función f del lado derecho es Lipschitz respecto de su segunda variable.

(a) En este caso $|f(x,y) - f(x,\hat{y})| = 2(1+e^{-|x|})\left|\frac{y}{1+y^2} - \frac{\hat{y}}{1+\hat{y}^2}\right|$. Ahora bien, por el Teorema del Valor Medio, se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\frac{y}{1+y^2} - \frac{\hat{y}}{1+\hat{y}^2}\right| &= \left|\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\right| |y - \hat{y}| \leq \frac{1+\xi^2}{(1+\xi^2)^2}|y - \hat{y}| \\ &\leq \frac{1}{1+\xi^2}|y - \hat{y}| \leq |y - \hat{y}|. \end{aligned}$$

Por otra parte, $1+e^{-|x|} \leq 2$. En conclusión, $|f(x,y) - f(x,\hat{y})| \leq 4|y - \hat{y}|$, y podemos tomar $L = 4$.

(b) En este caso usaremos la desigualdad[3] $||a| - |b||le|a-b|$. Gracias a ella se tiene que

$$|f(x,y) - f(x,\hat{y})| = 3||y+1| - |\hat{y}+1|| \leq 3|y - \hat{y}|,$$

y podemos tomar $L = 3$.

[3]Se demuestra fácilmente a partir de la desigualdad triangular

5. Consideramos la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(y) = |y|^\alpha$, $\alpha > 0$.

   (a) Si $\alpha \in (0, 1)$, demostrar que f no es Lipschitz en ningún intervalo que contenga el origen.

   (b) Si $\alpha > 1$, demostrar que f es Lipschitz en cualquier intervalo de la forma $[-K, K]$, pero no en todo $\mathbb{R}$.

Solución. (a) En caso contrario, existirían un intervalo $[a, b]$ conteniendo el origen y una constante $L > 0$ tales que $|f(y) - f(\hat{y})| \leq L|y - \hat{y}|$ para todo $y, \hat{y} \in [a, b]$. Tomando en particular $\hat{y} = 0$, se tendría que $|y|^{\alpha-1} \leq L$ para todo $y \in [a, b]$, $y \neq 0$, lo que es evidentemente falso (tomar $y \approx 0$).

(b) La función f es de clase C^1, con derivada dada por

$$f'(y) = \begin{cases} -\alpha|y|^{\alpha-1}, & y \leq 0, \\ \alpha|y|^{\alpha-1}, & y \geq 0. \end{cases}$$

Por consiguiente, por el Teorema del Valor Medio se tiene que

$$|f(y) - f(\hat{y})| = \alpha|\xi|^{\alpha-1}|y - \hat{y}| \leq \alpha K^{\alpha-1}|y - \hat{y}|$$

si $y \in [-K, K]$; es decir, f es Lipschitz en $[-K, K]$ con constante $L = \alpha K^{\alpha-1}$. Este argumento obviamente no es válido en todo $\mathbb{R}$. De hecho, no puede existir ninguna constante L tal que $|f(y) - f(\hat{y})| \leq L|y - \hat{y}|$ para todo $y, \hat{y} \in \mathbb{R}$. En efecto, tomando $\hat{y} = 0$, esto implicaría que $|y|^{\alpha-1} \leq L$ para todo $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, lo que es evidentemente falso (tomar $|y| \to \infty$).

---

6. La función f satisface una *condición de Lipschitz unilateral* en $D = [a, b] \times \mathbb{R}^d$ con *constante de Lipschitz unilateral* l si

$$\langle f(x, y) - f(x, \hat{y}), y - \hat{y} \rangle \leq l\|y - \hat{y}\|_2^2 \qquad \forall (x, y), (x, \hat{y}) \in D.$$

(a) Si $l < 0$ se dice que el problema de valor inicial PVI es *disipativo*. Demostrar que el problema de valor inicial del problema 2 es disipativo.

(b) Demostrar que si f satisface una condición de Lipschitz unilateral con constante l y las funciones y e $\hat{y}$ son soluciones de $y'(x) = f(x, y(x))$ en $[a, b]$, entonces

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\|_2 \leq \exp(l(x-a))\|y(a) - \hat{y}(a)\|_2 \qquad \text{si } a \leq x \leq b.$$

(c) Dar una cota para la norma euclídea, $\|y(x)\|_2$, de la solución del problema 2 con dato inicial $y(0) = (0, 1)^T$.

Solución. (a) Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned}
&\langle f(x,y) - f(x,\hat{y}), y - \hat{y}\rangle \\
&\qquad = \left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{7}(y^1 - \hat{y}^1) + \sqrt{2}(y^2 - \hat{y}^2) \\ -2(y^2 - \hat{y}^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^1 - \hat{y}^1 \\ y^2 - \hat{y}^2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\qquad = -\sqrt{7}(y^1 - \hat{y}^1)^2 + \sqrt{2}(y^1 - \hat{y}^1)(y^2 - \hat{y}^2) - 2(y^2 - \hat{y}^2)^2.
\end{aligned}$$

Si ahora usamos la desigualdad de Young, $ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}$, valida para todo $\epsilon > 0$, llegamos a

$$\langle f(x,y) - f(x,\hat{y}), y - \hat{y}\rangle$$

$$\leq \left(-\sqrt{7} + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)(y^1 - \hat{y}^1)^2 + \left(-2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)(y^2 - \hat{y}^2)^2.$$

Se trata ahora de elegir un $\varepsilon > 0$ de tal forma que los dos coeficientes sean negativos[4], por ejemplo $\varepsilon = \sqrt{2}$. Con esta elección se llega a

$$\begin{aligned}
\langle f(x,y) - f(x,\hat{y}), y - \hat{y}\rangle &\leq -\left(-\sqrt{7} + \tfrac{1}{2}\right)(y^1 - \hat{y}^1)^2 + -(y^2 - \hat{y}^2)^2 \\
&\leq -(y^1 - \hat{y}^1)^2 + -(y^2 - \hat{y}^2)^2 = \|y - \hat{y}\|_2^2.
\end{aligned}$$

[4] La elección óptima es aquella que hace que los dos coeficientes coincidan.

(b) Un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\|y(x)-\hat{y}(x)\|_2^2 &= \tfrac{d}{dx}\langle y-\hat{y}, y-\hat{y}\rangle = 2\langle y'-\hat{y}', y-\hat{y}\rangle \\ &= 2\langle f(x,y)-f(x,\hat{y}), y-\hat{y}\rangle \le 2l\|y-\hat{y}\|_2^2. \end{aligned}$$

Multiplicando por el factor integrante $\mathrm{e}^{-2l(x-a)}$ llegamos a

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-2l(x-a)}\|y(x)-\hat{y}(x)\|_2^2\right) \le 0,$$

desigualdad que integrada en (a,x) produce

$$\mathrm{e}^{-2l(x-a)}\|y(x)-\hat{y}(x)\|_2^2 \le \|y(a)-\hat{y}(a)\|_2^2,$$

de donde se sigue inmediatamente el resultado.

(c) La solución con dato inicial $\hat{y}(0) = (0,0)^T$ es evidentemente la solución trivial $\hat{y}(x) = (0,0)^T$ para todo $x \in [0,2]$. Usando los dos apartados anteriores, concluimos que

$$\|y(x)\|_2 \le \mathrm{e}^{-x}\|(0,1)^T\|_2 = \mathrm{e}^{-x}.$$

---

7. Sea y solución de (1.1) e $\hat{y}$ solución de la ecuación perturbada

$$\hat{y}'(x) = f(x,\hat{y}(x)) + r(x,\hat{y}(x)), \qquad x \in [a,b],$$

con f continua y Lipschitz (con constante L) con respecto a su segunda variable en $D = [a,b]\times\mathbb{R}$ y r acotada en D, $\|r\| \le M$. Demostrar que

$$\|y(x)-\hat{y}(x)\| \le e^{L(x-a)}\|y(a)-\hat{y}(a)\| + \frac{M}{L}(e^{L(x-a)}-1), \qquad x \in [a,b].$$

Solución. Integrando las ecuaciones satisfechas por y e $\hat{y}$ en (a,x), se obtiene que

$$\begin{aligned} &y(x) = y(a) + \textstyle\int_a^x f(s,y(s))\,ds, \\ &\hat{y}(x) = \hat{y}(a) + \textstyle\int_a^x f(s,\hat{y}(s))\,ds + \int_a^x r(s,\hat{y}(s))\,ds. \end{aligned}$$

Restando, tomando normas y usando la desigualdad triangular, junto con la condición de Lipschitz sobre f y la condición de tamaño sobre r, se llega a

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \underbrace{\|y(a) - \hat{y}(a)\| + L \int_a^x \|y(s) - \hat{y}(s)\| \, ds + M(x-a)}_{g(x)} .$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $g'(x) = L\|y(x) - \hat{y}(x)\| + M \leq Lg(x) + M$, de donde

$$\frac{d}{dx} \left(\mathrm{e}^{-L(x-a)} g(x) \right) \leq M \mathrm{e}^{-L(x-a)}.$$

Integrando en (a, x) llegamos a

$$\mathrm{e}^{-L(x-a)} g(x) - g(a) \leq -\frac{M}{L} \left(\mathrm{e}^{-L(x-a)} - 1 \right) .$$

Finalmente obtenemos que

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq g(x) \leq \mathrm{e}^{L(x-a)} g(a) + \frac{M}{L} \left(\mathrm{e}^{L(x-a)} - 1 \right) ,$$

de donde se concluye el resultado simplemente observando que $g(a) = \|y(a) - \hat{y}(a)\|$.

Sección 1.3

1. Consideramos la ecuación integral

$$y(x) = 10 + \int_1^x y(s)\, ds, \qquad 1 \leq x \leq 2.$$

   (a) Demostrar que tiene una única solución continua.

   (b) Calcularla.

Solución. El punto clave es que las soluciones continuas de la ecuación integral son funciones $C^1([1,2])$ que son solución del PVI

$$y'(x) = y(x), \quad x \in [1,2], \qquad y(1) = 10,$$

y recíprocamente.

(a) Basta con ver que el PVI equivalente tiene solución única. Pero esto es inmediato, ya que la función del lado derecho, $f(x,y) = y$, es obviamente continua y además Lipschitz con respecto a su segunda variable.

(b) Es inmediato ver que la solución del PVI (y por tanto de la ecuación integral) es $y(x) = 10e^{x-1}$.

---

2. Demostrar que existe un único par de funciones $u, v \in C([0,10])$ que resuelve el sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{cases} u(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \left(u(s) + 2v(s) + s + \int_0^{v(s)} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \right) ds, \\ v(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \left(-u(s) + 3v(s) + \frac{s^2}{2} + \arctan(\exp(u(s))) \right) ds, \end{cases}$$

para todo $x \in [0,10]$.

Solución. Si denotamos $y = (u, v)^T$, el sistema es equivalente al PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} u(x) + 2v(x) + x + \displaystyle\int_0^{v(x)} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \\ -u(x) + 3v(x) + \dfrac{x^2}{2} + \arctan(\exp(u(x))) \end{pmatrix}}_{f(x,y(x))}, \quad 0 \leq x \leq 10, \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Para ver que este PVI (y por tanto el sistema original) tiene solución única basta con comprobar que la función $f(x, y)$, que es obviamente continua en sus dos variables, es también Lipschitz respecto de y. Esto se puede hacer con cualquier norma, ya que en un espacio de dimensión finita todas las normas son equivalentes. Haremos el cálculo con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Se tiene que

$$\|f(x, y) - f(x, \hat{y})\|_\infty =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} u - \hat{u} + 2(v - \hat{v}) + \displaystyle\int_0^{v} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt - \int_0^{\hat{v}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \\ -(u - \hat{u}) + 3(v - \hat{v}) + \arctan(\exp u) - \arctan(\exp \hat{u}) \end{pmatrix} \right\|_\infty.$$

Por el Teorema del Valor Medio,

$$\int_0^{v} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt - \int_0^{\hat{v}} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \mathrm{e}^{-\xi^2}(v - \hat{v}),$$
$$\arctan(\exp u) - \arctan(\exp \hat{u}) = \frac{\exp \eta}{1 + \exp(2\eta)}(u - \hat{u}),$$

para ciertos puntos intermedios ξ, η. Ahora bien, dado que $\mathrm{e}^{-\xi^2} \leq 1$, $\exp(\eta)/(1 + \exp(2\eta)) \leq 1/2$, se tiene que

$$\|f(x, y) - f(x, \hat{y})\|_\infty$$
$$\leq \max\left\{ |u - \hat{u}| + 2|v - \hat{v}| + |v - \hat{v}|, |u - \hat{u}| + 3|v - \hat{v}| + \frac{1}{2}|u - \hat{u}| \right\}$$
$$\leq \frac{9}{2} \max\{|u - \hat{u}|, |v - \hat{v}|\} = \frac{9}{2}\, \|y - \hat{y}\|_\infty.$$

Es decir, f es Lipschitz con respecto a su segunda variable en la norma infinito con constante $L = 9/2$.

---

3. Sean c y d funciones continuas en $[a,b]$. Consideramos el problema de valor inicial PVI con $f : [a,b] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = c(x)y + d(x)$.

   (a) Demostrar que el problema tiene solución única.

   (b) Si además $c, d \in C^\infty([a,b])$, demostrar que $y \in C^\infty([a,b])$.
   Sugerencia. Usar la fórmula de Leibniz para la derivada k-ésima de un producto,

   $$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}.$$

   (c) Si $b = a + 3$ y $c(x) = \operatorname{sen}(\exp(\arctan x))$, determinar un valor de δ que garantice que dos soluciones que inicialmente distan menos que δ no se separan más de 10^{-1} en todo el intervalo $[a,b]$.

Solución. (a) Es inmediato ver que f es una función continua. Comprobemos que satisface una condición de Lipschitz con respecto a su segunda variable. En efecto,

$$|f(x,y) - f(x,\hat{y})| = |c(x)||y - \hat{y}| \leq \max_{x \in [a,b]} |c(x)||y - \hat{y}|.$$

Podemos tomar, por tanto, $L = \max_{x \in [a,b]} |c(x)|$ (que es, por cierto, la mejor constante posible). La existencia de una única solución se sigue ahora inmediatamente del Teorema de Picard.

(b) Tenemos que probar que $y^{(k)} \in C([a,b])$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Lo haremos por inducción.

La solución del PVI verifica (por el hecho de ser solución) que $y \in C^1([a,b])$, luego el resultado es cierto para $k = 0, 1$.

Supongamos que el resultado es cierto para $j = 0, \ldots, k$. Veamos que también es cierto para $k+1$. Si derivamos la EDO k veces, usando la fórmula de Leibniz para la derivada k-ésima de un producto obtenemos

$$y^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k} c^{(j)} y^{(k-j)} + d^{(k)}.$$

De aquí se concluye inmediatamente, usando la hipótesis de inducción (completa) y la regularidad de c y d, que $y^{(k+1)} \in C([a, b])$.

(c) Se tiene que $L = \max_{x\in[a,b]} |c(x)| = \max_{x\in[a,b]} |\operatorname{sen}(\exp(\arctan x))| \leq 1$. Por consiguiente,

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \|y(a) - \hat{y}(a)\| e^{L(x-a)} \leq \delta e^{L(b-a)} = \delta e^3.$$

Así pues, si $\delta e^3 \leq 10^{-1}$, se tiene que $\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq 10^{-1}$ para todo $x \in [a, b]$, el resultado deseado. Basta por tanto con tomar $\delta = 10^{-1}e^{-3}$.

---

4. Sea f continua en $D = [a, b] \times \{y \in \mathbb{R}^d : \ \|y - \eta\| \leq C\}$ y Lipschitz en D, con constante L, con respecto a su segunda variable. Sea $K > 0$ una constante tal que $\max_{(x,y)\in D} \|f(x, y)\| \leq K$. Si

$$C \geq \frac{K}{L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right), \tag{CEL}$$

probar que existe una única solución del problema de valor inicial PVI en $[a, b]$ tal que $\|y(x) - \eta\| \leq C$ en $[a, b]$.

Solución. La clave está en demostrar que $(x, y_k(x)) \in D$ para todo $x \in [a, b]$ y $k \in \mathbb{N}$. Este resultado es trivialmente cierto para $k = 0$. Supongámoslo cierto para $k - 1$. Entonces,

$$\|y_k(x) - \eta\| \leq \int_a^x \|f(s, y_{k-1}(x))\|\, ds \leq K(b - a).$$

Ahora bien, puesto que $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, se tiene que

$$\frac{K}{L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) \geq K(b - a),$$

por lo que, usando la hipótesis sobre los parámetros involucrados en el problema, concluimos que

$$\|y_k(x) - \eta\| \leq C.$$

A partir de aquí sólo hay que repetir lo que ya se hizo en la teoría.

---

5. Consideramos el problema

$$y'(x) = y^2(x) \arctan y(x), \quad x \in [0, b], \qquad y(0) = 1. \tag{1.6}$$

   (a) Aplicar el resultado del problema anterior para encontrar un valor $b > 0$ tal que el problema (1.6) tenga solución.

   (b) Sea $T = \sup\{b : \text{ (1.6) tiene solución}\}$. Probar que $\lim\limits_{x\to T^-} y(x) = \infty$.

   (c) Demostrar que $T < \infty$. Este fenómeno se denomina *explosión*.

Solución. (a) Tomo $C = 1$. En este caso, usando que $||y|-1| \leq |y-1| \leq 1$ en D, y por tanto que $|y| \leq 2$ en esa región, tenemos que

$$K = \max_D |f| = \max_{(x,y)\in D} |y^2 \arctan y| \leq 2\pi.$$

En cuanto a la constante de Lipschitz L para la función del lado derecho, $f(y) = y^2 \arctan y$, observamos que $f'(y) = 2y \arctan y + \frac{y^2}{1+y^2}$. Por consiguiente, $|f'(y)| \leq \pi|y| + 1 \leq 2\pi + 1$. Así pues, podemos tomar $L = 2\pi + 1$, y tenemos que

$$\frac{K}{L}\left(\mathrm{e}^{L(b-a)} - 1\right) \leq \frac{2\pi}{2\pi + 1}\left(\mathrm{e}^{(2\pi+1)b} - 1\right).$$

El lado derecho es obviamente menor que C=1 para b pequeño, por ejemplo para $b = 0,1$.

(b) Nótese en primer lugar que $y(x) \geq 1$ mientras existe. En efecto, inicialmente $y'(0) = \pi/4 > 0$, luego la solución está por encima de 1 en un pequeño intervalo a la derecha de $x = 0$. En el primer punto $\bar{x}$ en el que vuelva a tocar al 1 se debería tener $y'(\bar{x}) \leq 0$. Pero la ecuación dicta que $y'(\bar{x}) = \pi/4$ una contradicción.

Como corolario de lo anterior tenemos que $y'(x) \geq \pi/4$ mientras la solución existe. Por consiguiente, si la solución existe para todo $x \geq 0$, es decir, si $T = \infty$, entonces obviamente $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$.

Supongamos entonces que $T < \infty$ (por el apartado (a) sabemos que $T > 0$) y que $\lim\limits_{x\to T^-} y(x) = M < \infty$. Como y es monótona, sabemos que, fijado $\varepsilon > 0$, $y(T-\varepsilon) = y_\varepsilon \in (1, M)$. Sea

$$D_{\varepsilon,M} = [T-\varepsilon, T+\varepsilon] \times \{y \in \mathbb{R} : |y - y_\varepsilon| < M\}.$$

Es decir, estamos tomando $C = M$ en la condición (CEL) del problema anterior. Por otra parte,

$$K_{\varepsilon,M} = \max_{D_{\varepsilon,M}} |f| \leq 2\pi M^2,$$

puesto que $|y| < 2M$ en $D_{\varepsilon,M}$. Finalmente, de forma análoga a la del apartado anterior, obtenemos que podemos tomar $L = \pi 2M + 1$.

El resultado del problema anterior garantiza la existencia de una solución en $[T-\varepsilon, T+\varepsilon]$ con dato $y(T-\varepsilon) = y_\varepsilon$ si se cumple la condición (CEL), que en este caso es

$$M \geq \frac{2\pi M^2}{2\pi M + 1}\left(\mathrm{e}^{(2\pi+1)2\varepsilon} - 1\right),$$

desigualdad que es obviamente cierta para todo ε suficientemente pequeño. Esto nos dice que podríamos haber prolongado la solución hasta $T+\varepsilon$, contradiciendo la definición de T.

(c) La ecuación es de variables separadas. Tenemos que

$$\int_1^{y(t)} \frac{dy}{y^2 \arctan y} = t.$$

Pasando al límite $t \to T^-$ se tiene

$$T = \int_1^\infty \frac{dy}{y^2 \arctan y} \leq \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} = \frac{4}{\pi}.$$

6. Se considera el PVI

$$y'(x) = -y^2(x) + y(x) + 2y(x)x^2 - x^2 - x^4, \quad y(0) = 1/2.$$

(a) Demostrar que mientras la solución existe se verifica que

$$x^2 < y(x) < x^2 + 1.$$

(b) Utilizar el apartado anterior para demostrar que la solución existe para todo $x \geq 0$.

Solución. (a) Nuestro primer objetivo es ver que dos soluciones con valores iniciales distintos no se pueden tocar.

Veamos en primer lugar que la función del lado derecho satisface una condición de Lipschitz en el conjunto $[0, b] \times [-M, M]$. En efecto, en dicho conjunto

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, \hat{y})| &= |-(y + \hat{y})(y - \hat{y}) + (y - \hat{y}) + 2x^2(y - \hat{y})| \\ &\leq (2M + 1 + 2b^2)|y - \hat{y}|, \end{aligned}$$

y se tiene una constante de Lipschitz $L = (2M + 1 + 2b^2)$.

Sean ahora y e $\hat{y}$ dos soluciones de la EDO en $[0, b]$. Nótese que están acotadas, $|y(x)|, |\hat{y}(x)| \leq M$, $x \in [0, b]$. Integrando la EDO en (x, b), tenemos que

$$\begin{aligned} y(x) &= y(b) - \int_x^b f(s, y(s))\, ds, \\ \hat{y}(x) &= \hat{y}(b) - \int_x^b f(s, \hat{y}(s))\, ds. \end{aligned}$$

Restando y tomando normas, y usando que f es Lipschitz en su segunda variable (en el rango de valores de la variable y considerado), se tiene que

$$\begin{aligned}\|y(x)-\hat{y}(x)\| &\le \|y(b)-\hat{y}(b)\| + L\int_x^b \|f(s,y(s))-f(s,\hat{y}(s))\|\,ds \\ &\le \underbrace{\|y(b)-\hat{y}(b)\| + L\int_x^b \|y(s)-\hat{y}(s)\|\,ds}_{g(x)}.\end{aligned} \tag{1}$$

Dado que $g'(x) = -L\|y(x)-\hat{y}(x)\|$, llegamos a $g'(x) \ge -Lg(x)$. Multiplicando esta desigualdad por el factor integrante $\exp(Lx)$ se tiene que

$$\frac{d}{dx}(g(x)\exp(Lx)) \ge 0,$$

de donde $g(x) \le g(b)\exp(L(b-x))$. Esto, combinado con (1), produce que

$$\|y(x)-\hat{y}(x)\| \le \|y(b)-\hat{y}(b)\|\mathrm{e}^{L(b-x)}, \qquad 0 \le x \le b.$$

De aquí se deduce inmediatamente el resultado deseado: si dos soluciones se tocan en algún momento, es que eran la misma desde el principio.

Con ayuda de este resultado es fácil probar las cotas a priori indicadas. Basta con comprobar que $\underline{y}(x) = x^2$ e $\overline{y}(x) = 1 + x^2$ son solución y que $\underline{y}(0) = 0 < 1/2 = y(0) < 1 = \overline{y}(0)$.

(b) El primer paso es probar que existe un $b > 0$ tal que el PVI tiene solución en $[0, b]$. Esto se hace usando el problema 4, con argumentos similares a los que se usaron en el apartado (a) del problema 5.

A continuación definimos $T = \sup\{b : \text{ el PVI tiene solución en } [0, b]\}$. Es fácil probar, con argumentos análogos a los del apartado (b) del problema 5, que si $T < \infty$ entonces $\limsup_{x\to T^-} |y(x)| = \infty$. Pero las cotas a priori que hemos obtenido en el apartado (a) garantizan que $y(x)$ es acotada en acotados. Por consiguiente T no puede ser finito.

---

7. El Teorema de Picard, además de la continuidad Lipschitz de $f = f(x, y)$ con respecto a y, tiene también como hipótesis la continuidad

de f con respecto a sus dos variables. Demuéstrese mediante un contraejemplo que no se puede eliminar esta segunda hipótesis.

Solución. Consideramos el problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y(x))$, $x \in [0, 2]$, con lado derecho

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

y valor inicial $y(0) = 0$. La ecuación impone que $y(x) = c$ para $x \in [0, 1]$, $y(x) = x + d$ para $x \in [1, 2]$. La condición inicial dicta que $c = 0$, y la continuidad de y que $d = -1$. La función resultante,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

no es, desafortunadamente, solución del PVI, ya que ni siquiera es derivable en $x = 1$.
