PROBABILIDAD II

Grado en Matemáticas

Tema 5
Funciones características

Javier Cárcamo

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
javier.carcamo@uam.es

Tema 5: Funciones características

Descripción del tema

1. Números complejos.
2. La exponencial compleja.
3. Variables aleatorias complejas.
4. Funciones características.
5. Momentos y derivadas de la f.c.
6. Fórmulas de inversión.
7. Identificación de funciones características.
8. Aplicaciones.

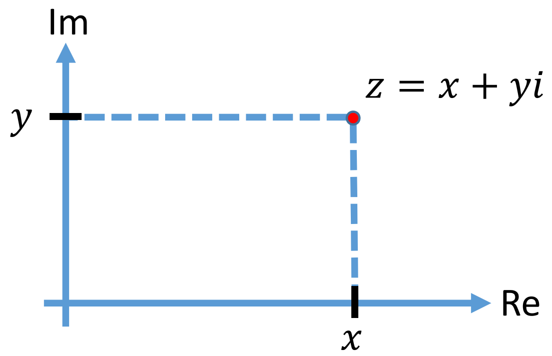
Objetivos principales

- Entender la utilidad de las funciones características en la Teoría de la probabilidad.
- Identificar y saber manejar las funciones características de las distribuciones más importantes.

Un **número complejo** es un número que se puede expresar de la forma $x + yi$, donde x e y son reales e $i = \sqrt{-1}$ es la **unidad imaginaria**. El **plano complejo** es el cuerpo

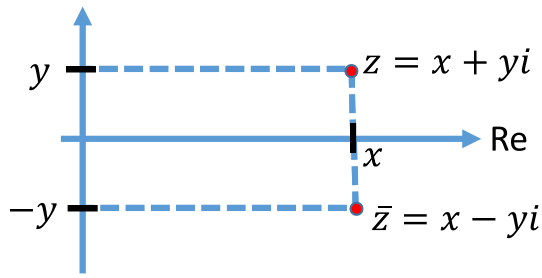
$$\mathbb{C} = \{z = x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos representar cada número complejo $z = x + yi \in \mathbb{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ identificando z con el vector (x, y).



La **parte real** del número complejo $z = x + yi$ es x $(\mathrm{Re}(z) = x)$ y la **parte imaginaria** es y $(\mathrm{Im}(z) = y)$.

El **conjugado** del número complejo $z = x + yi$ es $\bar{z} = x - yi$.

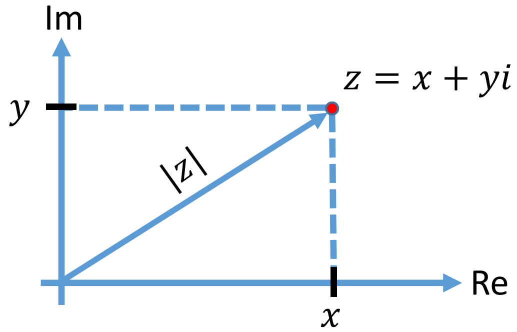


Para $z, w \in \mathbb{C}$, tenemos,

- $\bar{z}$ es una reflexión de z respecto al eje de abscisas ($\bar{\bar{z}} = z$).
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- $\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$.
- $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$.
- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$.
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
- Si $w \neq 0$, $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$.
- Si $z \neq 0$, $1/z = \bar{z}/(z\bar{z})$.

El **módulo** o **valor absoluto** del número complejo $z = x + yi$ es

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}.$$



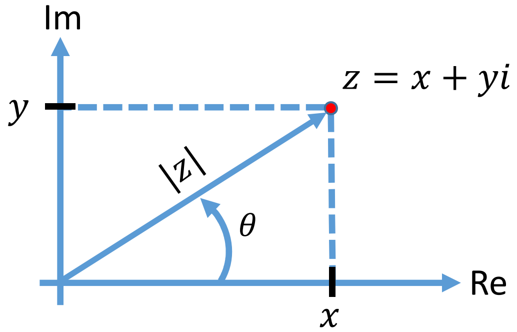
Para $z, w \in \mathbb{C}$, tenemos,

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$.
- $|zw| = |z||w|$ y si $z \neq 0$, $|1/z| = 1/|z|$.
- $|w - z| \geq |w| - |z|$.

El **argumento** del número complejo $z = x + yi$ es

$$\arg(z) = \arctan(y/x).$$

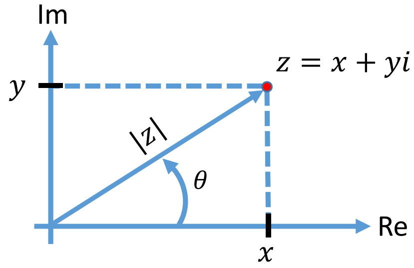
(Entendiéndose la función arctan definida en los cuatro cuadrantes.)



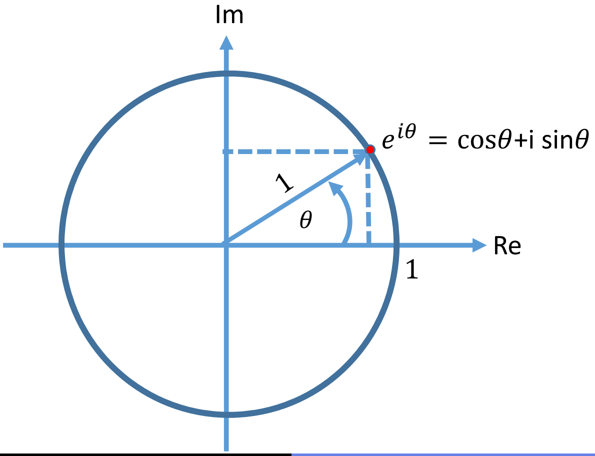
Si $\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ $(x \in \mathbb{R})$, $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ dada por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{si } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi, & \text{si } x < 0 \text{ e } y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi, & \text{si } x < 0 \text{ e } y < 0, \\ \pi/2, & \text{si } x = 0 \text{ e } y > 0, \\ -\pi/2, & \text{si } x = 0 \text{ e } y < 0, \\ \text{indefinido}, & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

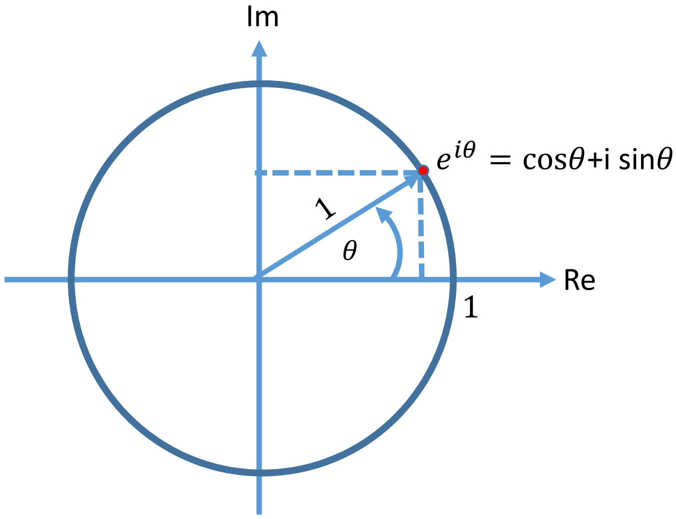
La **representación en polares** del número complejo $z = x + yi$ es $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$.



Usando la **fórmula de Euler**, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $z = re^{i\theta}$.



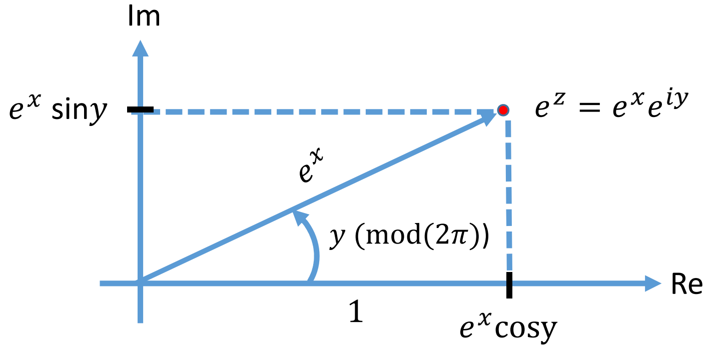
La **fórmula de Euler**, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.



- $|e^{i\theta}| = 1$ y $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.
- $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la función **exponencial compleja** de z,

$$e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$



- $e^0 = 1, \quad e^{z+w} = e^z e^w \quad$ y $\quad e^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.
- Si $z_n \to z$, entonces $e^z = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n$.

$$Z : (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ aplicación.}$$

Sean $X = \mathrm{Re}(Z)$, $Y = \mathrm{Im}(Z)$ parte real e imaginaria de Z, es decir $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \longrightarrow \mathbb{R}$ y

$$Z = X + iY$$

Z se dice **variable aleatoria compleja** si es medible cuando en $\mathbb{C}$ se considera la σ-álgebra boreliana asociada a la topología usual.

Nota: Z v.a. compleja si y solo si (X, Y) es un vector aleatorio bidimensional (es decir, si X e Y son v.a. unidimensionales).

Diremos que Z es **integrable** si X e Y son integrables. En tal caso, la **esperanza de** Z se define

$$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}X + i\mathrm{E}Y.$$

Propiedades de la esperanza de v.a. complejas

1. Si Z integrable, entonces $\mathrm{E}Z \in \mathbb{C}$.
2. Z integrable si y solo si $\mathrm{E}|Z| < \infty$.
3. **Linealidad:** Si Z_1, Z_2 v.a. complejas integrables y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $aZ_1 + bZ_2$ es integrable y
$$\mathrm{E}(aZ_1 + bZ_2) = a\mathrm{E}Z_1 + b\mathrm{E}Z_2.$$
4. Si Z es integrable, entonces $|\mathrm{E}Z| \leq \mathrm{E}|Z|$.
5. **Teorema de convergencia dominada:** Si $Z_n \to Z$ y $|Z_n| \leq U$ v.a. integrable, entonces Z_n y Z son integrables y
$$\mathrm{E}Z = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}Z_n.$$

Sea X una variable aleatoria. Se llama **función característica (f.c.)** de X a la función $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notas:

1. $\varphi_X(t)$ es una función bien definida para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
3. $\varphi_X(0) = 1$.
4. $\varphi_X(t) = \mathrm{E}(\cos(tX)) + i\mathrm{E}(\sin(tX))$.
5. Si $X =_d Y$, entonces $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Observación: Veremos más adelante que la función característica de una v.a. X, φ_X, caracteriza su distribución de probabilidad P_X. Es decir, en el punto anterior se puede escribir un "si y solo si".

Propiedades básicas

- $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$. ($\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ si y solo si $\varphi_X(t)$ es par.)
- **Cambio de origen y escala:** Sea $Y = aX + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Se tiene $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$. En particular, $\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$.

Una v.a. X se dice **simétrica** si $X =_d -X$. Si X tiene densidad $f(x)$ y es simétrica, entonces $f(x)$ es par ($f(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$).

- **Caso de v.a. simétricas:** Si X tiene densidad par, entonces $\varphi_X(t) = \mathrm{E}(\cos tX) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

  X simétrica, entonces $\varphi_X(t)$ es real ($\Longleftrightarrow \varphi_X$ es par).
- **Independencia:** $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes Se tiene:

  $$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \cdots \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

  Nota: El recíproco no es cierto.

  Aplicación importante: Suma de variables i.i.d.
- **Continuidad:** φ_X es una función uniformemente continua.

1. $X = c$ c.s. (constante), $\varphi_X(t) = e^{itc}$.
2. $X \sim \mathrm{B}(1; p)$, $\varphi_X(t) = (q + pe^{it})$.
3. $X \sim \mathrm{B}(n; p)$, $\varphi_X(t) = (q + pe^{it})^n$.
4. $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$, $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.
5. $X \sim \mathrm{G}(p)$, $\varphi_X(t) = \dfrac{p}{1-qe^{it}}$.
6. $X \sim \mathrm{BN}(r; p)$, $\varphi_X(t) = \left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^r$.
7. $X \sim \mathrm{U}(a, b)$, $\varphi_X(t) = \dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$.

   En particular,
   - $X \sim \mathrm{U}(-1, 1)$, $\varphi_X(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.
   - $X \sim \mathrm{U}(-c, c)$, $\varphi_X(t) = \dfrac{\sin tc}{tc}$.

8. X con densidad triangular $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$,

$$\varphi_X(t) = 2\left(\frac{1 - \cos t}{t^2}\right).$$

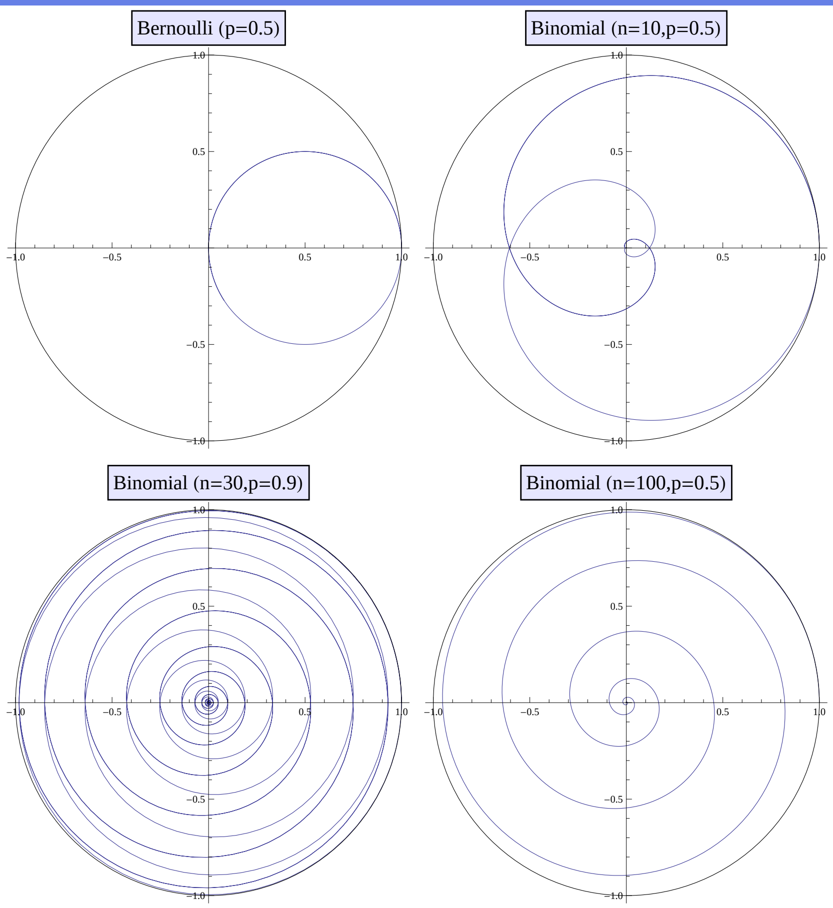
9. $X \sim \text{Exp}(a)$, $\qquad \varphi_X(t) = \left(1 - \dfrac{it}{a}\right)^{-1}.$

10. X Cauchy $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$, $\qquad \varphi_X(t) = e^{-|t|}.$

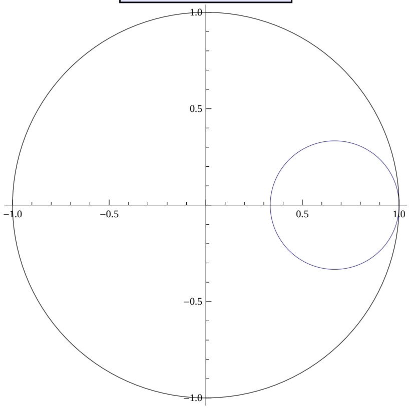
11. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > 0)$

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)},\ (x > 0), \qquad \varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

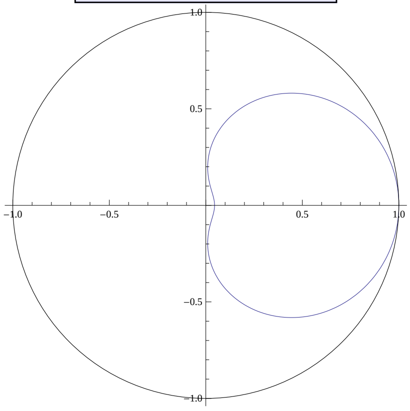
12. $X \sim \text{N}(0,1)$, $\qquad \varphi_X(t) = e^{-t^2/2}.$



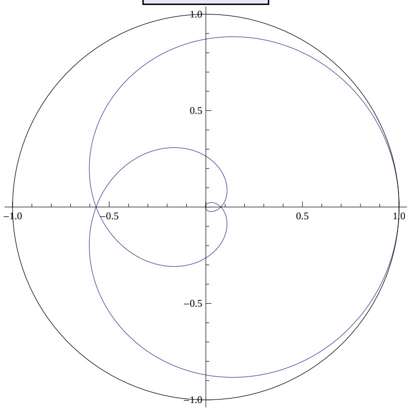
Geométrica (p=0.5)



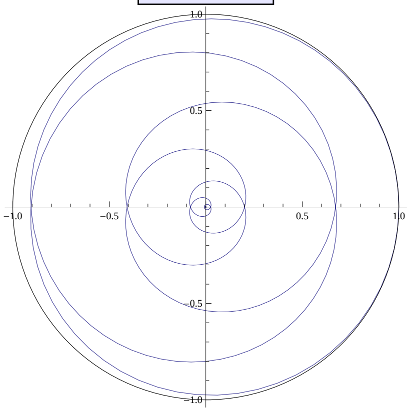
Binomial negativa (r=5,p=0.7)



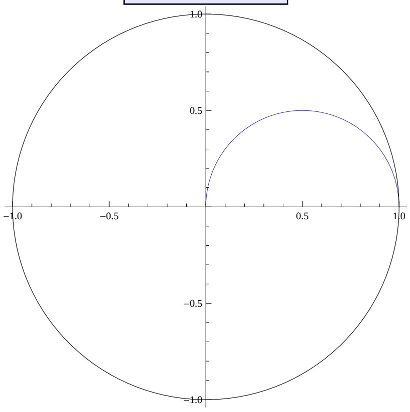
Poisson (λ=9)



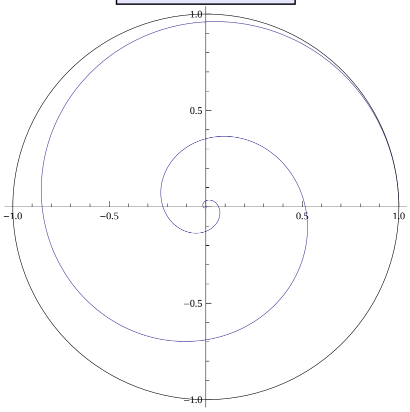
Poisson (λ=50)



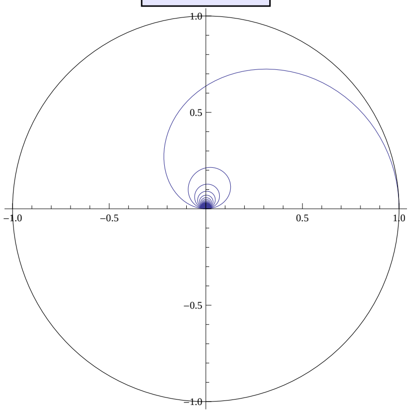
Exponencial (λ=1)



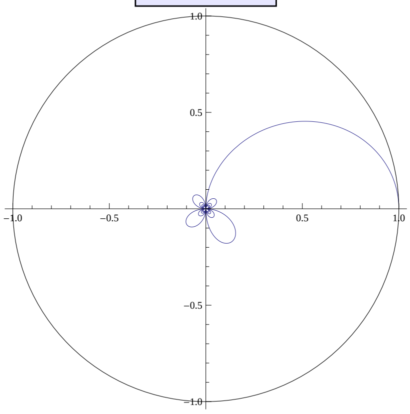
Gamma (α=30,β=1)



Uniforme(0,1)



Uniforme(−1,3)



Idea: Si todo fuera maravilloso...

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}e^{itX}$$

... y la derivada de la esperanza fuera la esperanza de la derivada:

$$\begin{array}{lcl}
\varphi'_X(t) = \mathrm{E}\big[iXe^{itX}\big] & \Longrightarrow & \varphi'_X(0) = i\mathrm{E}X \\
\varphi''_X(t) = \mathrm{E}\big[(iX)^2e^{itX}\big] & \Longrightarrow & \varphi''_X(0) = i^2\mathrm{E}X^2 \\
\varphi'''_X(t) = \mathrm{E}\big[(iX)^3e^{itX}\big] & \Longrightarrow & \varphi'''_X(0) = i^3\mathrm{E}X^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\varphi^{(k)}_X(t) = \mathrm{E}\big[(iX)^ke^{itX}\big] & \Longrightarrow & \varphi^{(k)}_X(0) = i^k\mathrm{E}X^k
\end{array}$$

Conclusión: En un mundo ideal, derivando sucesivamente la f.c. φ_X (y evaluando las derivadas en 0) obtendríamos (salvo las constantes i^k) los momentos de la variable aleatoria X.

Teorema: Derivación bajo el signo integral

Sea I intervalo real, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad y $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ función que cumple

(a) $\forall t \in I \ f(t, \bullet) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ v.a. compleja integrable.

(b) $\forall \omega \in \Omega \ f(\bullet, \omega) : I \longrightarrow \mathbb{C}$ derivable.

(c) $\exists g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ v.a. positiva e integrable tal que

$$|f'(t,\omega)| \leq g(\omega), \quad \forall t \in I, \forall \omega \in \Omega.$$

Definimos la función $\qquad H(t) = \int_\Omega f(t,\omega)\, d\mathrm{P}(\omega).$

Se tiene que H es derivable y

$$H'(t) = \int_\Omega f'(t,\omega)\, d\mathrm{P}(\omega).$$

Teorema: Momentos de la v.a. y derivadas de la f.c.

Supongamos que $\mathrm{E}|X|^n < \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Se tiene:

(a) φ_X es derivable hasta el orden n y

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k e^{itX}\, d\mathrm{P}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

En particular, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathrm{E} X^k$, $k = 1, \ldots, n$.

(b) Para $k = 1, \ldots, n$, $\varphi_X^{(k)}$ es uniformemente continua.

Observación: El recíproco de este teorema no es cierto en general. Hay ejemplos de v.a. tales que existe $\varphi'_X(0)$ pero $\mathrm{E}|X| = \infty$.

Nota (importante de cara a las aplicaciones): Supongamos que $f : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{C}$ admite derivadas en $t = 0$ hasta el orden n. Usando el desarrollo de McLaurin, tenemos

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n + R_n(t),$$

donde $R_n(t) = o(t^n)$ $(t \to 0)$, es decir, $R_n(t)/t^n \to 0$, si $t \to 0$.

Si $\mathrm{E}|X|^n < \infty$, entonces φ_X es n veces derivable y por tanto

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k \mathrm{E} X^k}{k!} t^k + o(t^n), \quad t \to 0.$$

Ejemplo: Supongamos que $X_1, X_2, \ldots,$ v.a. i.i.d. integrables de media μ. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n/n}(t), \quad \text{donde} \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Teorema: Momentos de la v.a. y derivadas de la f.c.

Si existe $\varphi_X^{(2n)}(0)$, entonces $\mathrm{E}|X|^{2n} < \infty$.

Lema (previo a la demostración:) En las condiciones del Teorema anterior, se tiene

$$\varphi_X''(0) = \lim_{h \to 0} \int_\Omega \left(\frac{e^{ihx} - e^{-ihx}}{2h} \right)^2 d\mathrm{P}.$$

En general,

$$\varphi_X^{(2n)}(0) = \lim_{h \to 0} \int_\Omega \left(\frac{e^{ihx} - e^{-ihx}}{2h} \right)^{2n} d\mathrm{P}.$$

Teorema: Desarrollo en serie de la f.c.

Supongamos que existe un $\rho > 0$ tal que $\mathrm{E}e^{\rho|X|} < \infty$. La función φ_X admite un desarrollo en serie de potencias

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \mathrm{E}X^n}{n!} t^n, \quad |t| \leq \rho.$$

Aplicaciones:

1. $X \sim \mathrm{N}(0,1)$.
2. X con distribución de Laplace o doble exponencial.
3. $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$.

Observación: Conocida la distribución de una variable aleatoria X, podemos calcular (al menos teóricamente) su función característica, φ_X.

Las **fórmulas de inversión** tratan el problema inverso, es decir, conocida la f.c. φ_X, se trata de encontrar la distribución de probabilidad de la v.a. X.

Caso discreto

Teorema: Fórmula de inversión para variables con valores en $\mathbb{Z}$

Sea X una v.a. con soporte en $\mathbb{Z}$ y con f.c. φ_X. Se tiene:

$$\mathrm{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn}\varphi_X(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{-itn}\varphi_X(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema: Fórmula de inversión de Lévy

Sea X una v.a. con f.c. φ_X y f.d. F_X. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se tiene

$$\frac{\mathrm{P}(X = a) + \mathrm{P}(X = b)}{2} + \mathrm{P}(a < X < b) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)\,dt.$$

En particular, si $a, b \in C_F$ (puntos de continuidad de F_X)

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)\,dt.$$

Corolario 1: Teorema de unicidad

Sean X e Y v.a. no necesariamente definidas sobre el mismo espacio de probabilidad. Si $\varphi_X = \varphi_Y$, entonces $X =_d Y$.

Corolario 2: Variables simétricas

X es v.a. simétrica si y solo si φ_X real (si y solo si φ_X par).

6. Fórmulas de inversión: Caso $\varphi_X \in \mathcal{L}(-\infty,\infty)$

Nota: X v.a. con f.d. F_X y f.c. φ_X. Tenemos, para $a < b \in C_{F_X}$

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)\, dt.$$

En general $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)\, dt$ no existe.

Es decir, $\displaystyle\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) \notin \mathcal{L}(-\infty,\infty)$

Teorema: Fórmula de inversión cuando $\varphi_X \in \mathcal{L}(-\infty,\infty)$

Supongamos que $\varphi_X \in \mathcal{L}(-\infty,\infty)$. Para $a < b$ con $a, b \in C_{F_X}$,

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)\, dt.$$

En particular,

$$F_X(b) - F_X(a) \leq \frac{k(b-a)}{2\pi}, \quad \text{donde} \quad k = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\, dt.$$

6. Fórmulas de inversión: Caso $\varphi_X \in \mathcal{L}(-\infty,\infty)$

Teorema: Continuidad de F_X

Si $\varphi_X \in \mathcal{L}(-\infty,\infty)$, entonces F_X es continua ($C_{F_X} = \mathbb{R}$).

Teorema: Derivabilidad de F_X

Supongamos que $\varphi_X \in \mathcal{L}(-\infty,\infty)$. Se tiene,

(a) F_X es derivable y

$$F_X'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt.$$

(b) F_X' es uniformemente continua y por tanto $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} F_X'(u)\, du$. En particular, X tiene densidad

$$f(x) = F_X'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt.$$

Ejemplos:

1. Si X es de Cauchy, entonces $\varphi_X(t) = e^{-|t|} \in \mathcal{L}(-\infty,\infty)$.
2. X v.a. con f.c. $\varphi_X(t) = 2(1-\cos t)/t^2 \in \mathcal{L}(-\infty,\infty)$.

Problema: Dada $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, ¿cómo saber si φ es la f.c. de alguna variable aleatoria?

- Si $\varphi(0) \neq 1$, entonces φ no es f.c.
- Si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|\varphi(t_0)| > 1$, entonces φ no es f.c.

Teorema de Bochner-Herglotz

Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. φ es la f.c. de alguna v.a. si y solo si

(1) $\varphi(0) = 1$.

(2) φ es continua en $t = 0$.

(3) φ es *definida positiva*, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, y, para todo $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j) z_i \bar{z}_j \geq 0.$$

Nota: El teorema anterior es de interés teórico, pero poco práctico.

Problema: Dada $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, ¿cómo saber si φ es la f.c. de alguna variable aleatoria?

Teorema de Pólya

Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$. φ es la f.c. de alguna v.a. (simétrica) si

(1) $\varphi(0) = 1$.

(2) φ es continua en $t = 0$.

(3) φ es par.

(4) φ es convexa y decreciente en $[0, \infty)$.

7. Identificación de funciones características

Normas a seguir para averiguar si φ es una f.c.

1. ¿Es φ una de las f.c. conocidas?
2. φ puede expresarse de alguna manera mediante f.c. conocidas.

   (1) $\varphi(t) = \phi(at)$, donde ϕ es la f.c. de X y $a \in \mathbb{R}$. Entonces, φ es la f.c. de aX.

   (2) $\varphi(t) = \phi_1(t)\phi_2(t)$, donde ϕ_1 es la f.c. de X y ϕ_2 es la f.c. de Y. Entonces, φ es la f.c. de $X + Y$, con X e Y independientes.

   (3) Si $\varphi(t) = e^{itb}\phi(at)$, donde ϕ es la f.c. de X y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, φ es la f.c. de $aX + b$.

   (4) $\varphi(t) = (\phi(t))^n$, donde ϕ es la f.c. de X y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, φ es la f.c. de $X_1 + \cdots + X_n$, con $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. como X.

3. Aplicar el Teorema de Pólya si se puede.
4. Sospechar que φ *no* es f.c.

8. Aplicaciones

Las funciones características tienen muchas aplicaciones. Se utilizan para demostrar importantes resultados límite del Cálculo de probabilidades, como veremos más adelante. También se utilizan en problemas relativos a distribuciones de probabilidad.

1. **Distribuciones de sumas de v.a. independientes**

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \mathrm{B}(n; p) \\ Y \sim \mathrm{B}(m; p) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \mathrm{B}(n + m; p).$$

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \mathrm{P}(\lambda) \\ Y \sim \mathrm{P}(\mu) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \mathrm{P}(\lambda + \mu).$$

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \mathrm{BN}(r; p) \\ Y \sim \mathrm{BN}(s; p) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \mathrm{BN}(r + s; p).$$

1. **Distribuciones de sumas de v.a. independientes**

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \text{Gamma}(a; k) \\ Y \sim \text{Gamma}(a; l) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \text{Gamma}(a; k + l).$$

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \text{N}(a; \sigma) \\ Y \sim \text{N}(b; \tau) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \text{N}(a + b; \sqrt{\sigma + \tau}).$$

2. **Otro tipo de problemas: Identificación de distribuciones**

(1) ¿Existen v.a. X, Y ind. y con la misma distribución tal que $X - Y \sim \text{U}(-1, 1)$?

(2) Sean X, Y v.a. independientes con la misma distribución de media 0 y varianza 1 tales que

$$\frac{X + Y}{\sqrt{2}} =_d X =_d Y.$$

Mostrar que la distribución común es necesariamente normal.