σ-álgebras

1.- Sean $A, B \subset \Omega$. Describir la σ-álgebra generada por la colección $\mathcal{C} = \{A, B\}$, es decir, $\sigma(\mathcal{C})$.

2.- Se consideran las siguientes colecciones de $\mathcal{P}(\Omega)$:

$$\mathcal{F}_1 = \{A \subset \Omega : \ A \text{ es finito ó } A^c \text{ es finito}\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{A \subset \Omega : \ A \text{ es contable ó } A^c \text{ es contable}\},$$
$$\mathcal{F}_3 = \{A \subset \Omega : \ A \subset B \text{ ó } A^c \subset B\}, \quad \text{donde } B \subset \Omega \text{ es un conjunto fijo.}$$

(a) Mostrar que $\mathcal{F}_1$ es σ-álgebra cuando y sólo cuando Ω es finito.
(b) Mostrar que $\mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_3$ son σ-álgebras.

3.- Demuestra o da un contraejemplo para las siguientes afirmaciones.
(a) La unión de álgebras no es necesariamente un álgebra.
(b) La unión de σ-álgebras no es necesariamente una σ-álgebra incluso cuando $\mathcal{F}$ no es finito.
(c) Si $\{\mathcal{F}_n\}$ es una colección creciente de σ-álgebras ($\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$), la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ puede no ser una σ-álgebra.
(d) Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son dos σ-álgebras sobre Ω, entonces $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \sigma(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{C} = \{A \cap B : \ A \in \mathcal{F}_1, \ B \in \mathcal{F}_2\}$.
SUGERENCIA: Para los apartados **(b)** y **(c)** se puede usar el conjunto de los números naturales y σ-álgebras del tipo $\mathcal{F}_3$ del problema anterior.

4.- Sea Ω un conjunto no vacío. Describir $\sigma(\mathcal{H})$, donde
(a) $\mathcal{H} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ es una *partición* (contable) de Ω, es decir, los elementos de $\mathcal{H}$ son dos a dos disjuntos y la unión de todos ellos es Ω.
(b) $\mathcal{H}$ es la colección de los subconjuntos finitos de Ω. Distinguir si Ω es contable o no.

Espacios de probabilidad

5.- Demostrar las propiedades básicas de la probabilidad. ¿Cuáles de estas propiedades no son ciertas para medidas positivas? Pon los contraejemplos necesarios.

6.- Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{P}(A) = 1$. Probar que $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$, para todo $B \in \mathcal{F}$.

7.- Sea Ω un conjunto infinito no numerable. Sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}$ formada por los subconjuntos contables o cuyo complementario es contable, se define la aplicación

$$\mathrm{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ contable,} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ contable.} \end{cases}$$

Mostrar que P es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

8.- Sean $A_1, A_2, \ldots$ sucesos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ tales que $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) > n - 1$. Demuestra que $\mathrm{P}(\cap_{k=1}^{n} A_k) > 0$.

9.- Probar o refutar las afirmaciones siguientes:

(a) $\mathrm{P}(A \cap B) \geq \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B^c)$.
(b) $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \mathrm{P}(A_1) - \sum_{i=2}^{n} \mathrm{P}(A_i^c)$.
(c) $\mathrm{P}(A \triangle B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\mathrm{P}(A \cap B)$
$= 2\mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$.
(d) $\mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.
(e) $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \leq \text{mín}(\mathrm{P}(A_1), \ldots, \mathrm{P}(A_n))$.
(f) $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \text{máx}(\mathrm{P}(A_1), \ldots, \mathrm{P}(A_n))$.
(g) Si $\mathrm{P}(A_k) = 1$ para $k \geq 1$, entonces $\mathrm{P}(\cap_{k=1}^{\infty} A_k) = 1$.

Recordamos que "$\triangle$"simboliza la *diferencia simétrica*, definida por $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

10.- Sean $A_1, A_2, \ldots$ sucesos (en un espacio de probabilidad) tales que $\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = 0$, siempre que $i \neq j$. Mostrar que

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

11.- Sean A y B son sucesos tales que $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B|A)$, $\mathrm{P}(A \cup B) = 1$ y $\mathrm{P}(A \cap B) > 0$. Mostrar que $\mathrm{P}(A) > 1/2$.

12.- Probar o refutar las siguientes afirmaciones relativas a probabilidades condicionales (se supone en todos los casos que los sucesos condicionantes son de probabilidad no nula):
(a) $\mathrm{P}(A|C) + \mathrm{P}(A|C^c) = 1$.
(b) $\mathrm{P}(A|C) + \mathrm{P}(A^c|C^c) = 1$.
(c) Si $\mathrm{P}(A|C) \geq \mathrm{P}(B|C)$ y $\mathrm{P}(A|C^c) \geq \mathrm{P}(B|C^c)$, entonces $\mathrm{P}(A) \geq \mathrm{P}(B)$.
(d) $\mathrm{P}(A|B) \geq (\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1)/\mathrm{P}(B)$.