Independencia de sucesos y de clases de sucesos

1.- Supóngase que A, B, C, D, E son sucesos independientes. Probar o refutar las afirmaciones siguientes:

(a) Los sucesos AB y $C^c \cup (DE^c)$ son independientes.
(b) $A \cup B$ y AC son independientes.
(c) $\mathrm{P}(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$ (se supone $\mathrm{P}(C) > 0$).
(d) $\mathrm{P}(AB|F) = \mathrm{P}(A|F)\mathrm{P}(B|F)$ (donde F es cualquier suceso de probabilidad no nula).

2.- De tres sucesos A, B y C de probabilidades no nulas se sabe: **(i)** A es independiente de $B \cup C$ y de BC; **(ii)** B es independiente de AC; **(iii)** C es independiente de AB. Demostrar que A, B y C son mutuamente independientes.

3.- Sea $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, donde p es un número primo. Supongamos que los elementos de Ω son equiprobables. Comprobar que (salvo en los casos triviales) dos sucesos A y B *no* pueden ser independientes.

4.- Dado un suceso C con $P(C) > 0$, decimos que A y B son *condicionalmente independientes con respecto a* C si

$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|C).$$

Sean A y B dos sucesos. Demuestra o da un contraejemplo para las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\mathrm{P}(BC) > 0$, A y B son condicionalmente independientes con respecto a C si y sólo si $\mathrm{P}(A|C) = \mathrm{P}(A|BC)$.
(b) Si A y B son independientes, entonces A y B son condicionalmente independientes con respecto a C.
(c) Si A y B son condicionalmente independientes con respecto a C, entonces A y B son independientes.
(d) Si $\mathrm{P}(C) = 1$, A y B son independientes si y sólo si A y B son condicionalmente independientes respecto a C.

SUGERENCIA: Para los apartados **(b)** y **(c)**, puedes estudiar dos lanzamientos de una moneda.

Límite superior e inferior

5.- Encontrar $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ en los siguientes casos:

(a) $A_n = A$, si n es par y $A_n = B$, si n es impar.
(b) $A_n = (-2 - 1/n, 1]$, si n es par y $A_n = [-1, 2 + 1/n)$, si n es impar.
(c) $A_n = [0, a_n)$, siendo $a_n = 2 + (-1)^n(1 + 1/n)$.
(d) $A_n \uparrow A$ ó $A_n \downarrow A$.
(e) Los A_n son disjuntos dos a dos.

6.- Sean A_n y B_n subconjuntos de Ω. Demostrar:

(a) $(\limsup A_n) \cap (\limsup B_n) \supset \limsup(A_n \cap B_n)$.
(b) $(\limsup A_n) \cup (\limsup B_n) = \limsup(A_n \cup B_n)$.
(c) $(\liminf A_n) \cap (\liminf B_n) = \liminf(A_n \cap B_n)$.
(d) $(\liminf A_n) \cup (\liminf B_n) \subset \liminf(A_n \cup B_n)$.
(e) En **(a)** y **(d)**, las inclusiones opuestas no son ciertas en general.
(f) $\limsup A_n - \liminf A_n = \limsup(A_n - A_{n+1}) = \limsup(A_{n+1} - A_n)$.
(g) Si $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1 = \mathrm{P}(\liminf B_n)$, entonces $\mathrm{P}(\limsup(A_n \cap B_n)) = 1$.
(h) De $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1 = \mathrm{P}(\limsup B_n)$ no se sigue, en general, que $\mathrm{P}(\limsup(A_n \cap B_n)) = 1$.
(i) Si $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$, entonces $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$.

SUGERENCIA: Recordar el apartado (f).

7.- Sean A_n y B_n subconjuntos de Ω. Demostrar:

(a) Si $A_n \to A$, entonces $\mathrm{P}(A_n) \to \mathrm{P}(A)$. Es decir, la probabilidad es continua.
(b) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$, entonces $A_n \cup B_n \to A \cup B$ y $A_n \cap B_n \to A \cap B$.

8.- Sean $A_1, A_2, \ldots$ sucesos independientes. Según la convergencia o divergencia de las series $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n)$ y $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n^c)$, se presentan, en principio, cuatro casos posibles. En cada caso, describir qué ocurre con $\mathrm{P}(\limsup A_n)$ y $\mathrm{P}(\liminf A_n)$.

9.- Sean $A_1, A_2, \ldots$ sucesos independientes tales que $\mathrm{P}(A_n) < 1$ $(n \geq 1)$ y $\mathrm{P}(\cup_n A_n) = 1$. Demostrar que $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1$. Averiguar si se mantiene la conclusión cuando se suprime la condición de independencia.

10.- Construir sucesiones de sucesos $\{A_n\}$ tales que: **(a)** $\mathrm{P}(\limsup A_n) = \alpha$ ($\alpha \in [0, 1]$ fijo); **(b)** $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n) = \infty$ y $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$.