Demostrar el binomio de Newton

TMA 1. *para todo número natural n y a y b cualesquiera se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ y } 0! = 1$$

Demostración. Sea $P(n) \equiv (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

$P(1) \equiv (a+b) = \binom{1}{0} a^0 b + \binom{1}{1} a b^0 = b + a$ es cierta. Suponiendo $P(n)$ vamos a probar que $P(n+1)$ también es cierta.

$$P(n+1) \equiv (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

Desarrollamos la suma

$$\binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a b^n + \cdots + \binom{n+1}{n} a^n b + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 =$$

descomponemos todos los $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ excepto el primero y el último, que valen 1

$$\binom{n+1}{0} b^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] a b^n + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a^n b + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} =$$

deshacemos los corchetes agrupando los primeros términos de cada corchete y los segundos términos de cada corchete

$$b^{n+1} + \binom{n}{0} a b^n + \cdots + \binom{n}{n-1} a^n b + \binom{n}{1} a b^n + \cdots + \binom{n}{n} a^n b + a^{n+1} =$$

$$b^{n+1} + a\left[\binom{n}{0} b^n + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b\right] + b\left[\binom{n}{1} a b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n\right] + a^{n+1} =$$

Ahora, $a[\ldots]$ es $a[P(n) - a^n]$, es decir $a[\ldots]$ es $aP(n)$ menos el último término, que es a^n. Análogamente, $b[\ldots]$ es $b[P(n) - b^n]$, es decir $b[\ldots]$ es $bP(n)$ menos el primer término, que es b^n. Podemos meter aquellos sumandos en los que no desarrollamos el coeficiente binomial ($\binom{n}{m}$) al principio, que son el primero, b^{n+1}, y el último, a^{n+1}, dentro de sus respectivos paréntesis para completar $P(n)$ en cada caso:

$$a\left[\binom{n}{0} b^n + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + a^n\right] + b\left[b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n\right] =$$

$$a\left[\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right] + b\left[\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right] = a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

□