Hoja 3

Derivadas parciales y funciones diferenciables

1.- Hallar todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

(a) $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(xy^2)} - \ln^2 x$, definida para los (x,y) tales que $x > 0$.

(b) $f(x,y,z) = x^2ye^z - y^2\operatorname{sen}(xz)$, definida en $\mathbb{R}^3$.

(c) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, definida en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$.

(d) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$, definida para los (x,y) tales que $xy \neq -1$.

2.- Determinar los puntos en los que existen las derivadas parciales de primer orden de la función $f(x,y) = |x|y^2$ y calcular dichas derivadas.

3.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen pero no es continua en ese punto.

4.- Considérese la función definida en los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \text{si } x \neq 0, \qquad f(0,y) = 0.$$

(a) Demostrar que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen y calcular su valor.

(b) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(c) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

(d) Hallar la derivada direccional $D_{(u,v)}f(0,0)$ para cada dirección $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

5.- Demuéstrese que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

es continua en todo el plano y tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero no es diferenciable en el origen.

6.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ que no son continuas en el punto $(0,0)$ y que, sin embargo, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

? 7.- Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

es diferenciable en cualquier punto del plano $\mathbb{R}^2$.

8.- Estúdiese la diferenciabilidad en el origen de la función

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^2}$.

9.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.

(b) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(c) $f(x,y,z) = z^2\, e^x \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(d) $f(x) = (e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

(e) $f(x,y,z,t) = (\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, x^2+y^2+z^2-9\,t^2)$, $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.

10.- Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las funciones escalares dadas por $g(x) = \|x\|^4$ y $f(x) = \langle a, x \rangle$, siendo $a \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo.

(a) Hallar las derivadas direccionales $D_v f(x)$ y $D_v g(x)$ para cada $x, v \in \mathbb{R}^n$.

(b) Tomando $n = 2$, hallar todos las direcciones $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tales que $D_{(u,v)} g(2,3) = 6$.

(c) Tomando $n = 3$, hallar todos las direcciones $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ tales que $D_{(u,v,w)} g(1,2,3) = 0$.

11.- Sea $f(r,t) = t^n\, e^{-\frac{r^2}{4t}}$, definida en los $r \geq 0$ y $t > 0$. Hallar un valor de la constante n tal que $f(r,t)$ satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) \qquad (r, t > 0)\,.$$

12.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(a) $f(x,y) = e^{-y} \cos x$.

(b) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0,)\}$.

(c) $f(x,y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

13.- (a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de $f(x,y) = \sqrt{3x^2 + 5y^2}$ en el origen.

(b) Comprobar que f es diferenciable en todos los demás puntos del plano.

(c) Calcular el vector $\nabla f(2,1)$.

14.- Hallar los puntos (x,y) y las direcciones $\mathbf{v} = (u,v)$ unitarias en los cuales la derivada direccional $D_{\mathbf{v}} f(x,y)$ de la función $f(x,y) = 3\,x^2 + y^2$ tiene un máximo, sabiendo que (x,y) está en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

? 15.- Hallar los valores de a, b, c tales que la derivada direccional de

$$f(x,y,z) = a\,x\,y^2 + b\,y\,z + c\,x^3 z^2$$

en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo de 64 en la dirección paralela al eje Z.

16.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $a \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que $D_{\mathbf{u}} f(a) = 1/\sqrt{13}$ y $D_{\mathbf{v}} f(a) = \sqrt{2}$, siendo $\mathbf{u} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ y $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(a) Calcular el gradiente $\nabla f(a)$.

(b) Hallas las dos direcciones unitarias $\mathbf{w}$ para las cuales $D_{\mathbf{w}} f(a) = 0$.

? 17.- Hallar la derivada de $f(x,y) = x^2 - 3\,xy$ a lo largo de la parábola $y = x^2 - x + 2$ en el punto $(1,2)$.

HOJA 3

1.

a) $f(x,y) = e^{\text{sen}(xy^2)} - \ln^2 x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\text{sen}(xy^2)} \cdot \cos(xy^2)y^2 - 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\text{sen}(xy^2)} \cdot \cos(xy^2) . 2yx$$

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 & x \geq 0 \\ -xy^2 & x < 0 \end{cases}$$

Para $x > 0$ sin problema

Para $x < 0$ sin problema

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{f(0,y+h)}^{\,0} - \cancel{f(0,y)}^{\,0}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - \cancel{f(0,y)}^{\,0}}{h} \quad \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{hy^2}{h} = y^2 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-hy^2}{h} = -y^2 \end{cases}$$

$\boxed{4.}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0 \end{aligned}\right\} = \checkmark$$

b) • Reiterados: sin problemas $\lim = 0$

• Radiales: $y = \lambda x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x^3}{x^2(1+\lambda^2 x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x}{(1+\lambda^2 x^2)} = 0$$

• Polares:

$$\lim_{r\to 0} \left| \frac{r^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{r^2(\cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^4\theta)} - 0 \right| = 0$$

c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \right|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

– Reiterados $L = 0$

– Radial $(y = \lambda x)$

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{\lambda x^3}{x^3(1+\lambda^4 x^2)\sqrt{1+\lambda^2}} \right| = \left| \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right|$$ ✗

No diferenciable

d) $D_{(u,v)} f(0,0) = \langle \vec{\nabla} f(0,0), (u,v) \rangle = \langle (0,0), (u,v) \rangle = 0$

$\boxed{5.}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) ¿cont. (0,0)? ¿$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$?

- $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right) = 0$; $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right) = 0$

- $\lim_{r\to 0}\left| \dfrac{r^3\cos^3\theta}{r^2} - 0\right| = \lim_{r\to 0}\left| r\cos^3\theta\right| = 0$

b) Derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

c) Diferenciable en (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|f(x,y) - \cancelto{0}{f(0,0)} - \cancelto{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}(x-0) - \cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}(y-0)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

- Reiterados $= 0$
- Radial: $\lim_{x\to 0} \dfrac{-\lambda^2 x^3}{(x^2+\lambda^2x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\lambda x^3}{x^3(1+\lambda^2)^{3/2}} = \dfrac{-\lambda}{(1+\lambda^2)^{3/2}}$

$\boxed{9.}$ $Df(a)$

a) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2-x^2)$ en $(1,2)$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$Df(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ y & x \\ -2x & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{17.}$ Hallar la derivada de la función $f(x,y) = x^2 - 3xy$ a lo largo de la parábola $y = x^2 - x + 2$ en el pto. $(1,2)$

$y = x^2 - x + 2 \Rightarrow r(t) = (t, t^2 - t + 2)$

$$\left.\begin{aligned} r'(t) &= (1, 2t-1) \\ \|r'(t)\| &= \sqrt{1 + (2t-1)^2} \end{aligned}\right\} \vec{u} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}, \frac{2t-1}{\sqrt{1+(2t-1)^2}} \right)$$

$$D_{\vec{u}} f(1,2) = \langle \vec{\nabla} f(1,2), \vec{u} \rangle = \left\langle (2x-3y, -3x)\Big|_{(1,2)}, \left(\frac{1}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}, \frac{2t-1}{\sqrt{1+(2t-1)^2}} \right)\Bigg|_{t=} \right.$$

$\boxed{11.}$ $f(r,t) = t^n \exp\left(-\frac{r}{4t}\right)^2 \qquad r \geq 0 \quad t > 0$

Hallar n para que $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)\left(n t^{n-1} + t^n \frac{r^2}{4t^2}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)\left(n t^{n-1} + \frac{1}{4} r^2 t^{n-2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = t^n \exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right)\left(\frac{-2r}{4t}\right) = -\frac{1}{2} r t^{n-1} \exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right)$$

$$r^2 \frac{\partial t}{\partial r} = -\frac{1}{2} r^3 t^{n-1} \exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r}\right) = \exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right)\left(\frac{1}{4} r t^{n-2} - \frac{3}{2} t^{n-1}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-r^2}{4t}\right)\left(\frac{1}{4} r t^{n-2} - \frac{3}{2} t^{n-1}\right) = \left(\frac{-r^2}{4t}\right)\left(\frac{1}{4} r t^{n-2} + n t^{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{-3}{2}}$$

8 Diferenciabilidad en $(0,0)$ de)

a) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$ sí   b) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}$ NO

---

a) observamos que $0 \leq f(x,y) \leq \sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2} =$

$= \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2+y^2$

NUESTRO CANDIDATO

$$\Rightarrow \frac{|f(x,y) - \cancel{f(0,0)}^{0} - \cancel{(0,0)}^{0}(x,y)|}{|(x,y)|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

b) $f(x,0) = \sqrt{x^4+0} = x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = x^2\Big|_{x=0} = 0$

$f(0,y) = \sqrt{0+y^2} = |y|$ $\nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pq $|y|$ no es derivable en $y=0$

---

13 $f(x,y) = \sqrt{3x^2+5y^2}$

$f(x,0) = \sqrt{3}\,|x| \to \nexists\, \partial_x f(0,0)$

$f(0,y) = \sqrt{5}\,|y| \to \nexists\, \partial_y f(0,0)$

$f(x,y,z) = axy^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} =$

Demostrar que:

a) $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$ y son cont.

b) $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $(x,y)=(0,0)$ pero no son continuas.

c) f diferenciable en $(0,0)$.

$\boxed{a}$ Derivando: en $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\left[\cos\frac{1}{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\ \operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\right]}$$ similar a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$\longrightarrow$ está bien definida fuera de $(0,0)$

$\boxed{c}$ $f(x,y)$ claramente cumple $|f(x,y)| \leq |(x,y)|^2 \quad \forall (x,y)$

$$\Rightarrow \frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|} \longmapsto 0 \qquad (x,y) \to (0,0)$$

Afirmo que esto implica que $\nabla f(0,0) = (0,0)$

$$\frac{|f(x,y) - \cancelto{0}{f(0,0)} - \cancelto{0}{(0,0)(x,y)}|}{|(x,y)|} = \frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|} \to 0 \qquad (x,y) \to (0,0)$$