CÁLCULO 1: 1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 2: Sucesiones

1.- Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

(a)	$\left\{\frac{n^2}{n+2}\right\}$	(b)	$\left\{\frac{n^3}{n^3+2n+1}\right\}$	(c)	$\left\{\frac{n}{n^2-n-4}\right\}$
(d)	$\left\{\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2}\right\}$	(e)	$\left\{\frac{\sqrt{n^3+2n}+n}{n^2+2}\right\}$	(f)	$\left\{\frac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}}\right\}$
(g)	$\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^2+2}\right\}$	(h)	$\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}$	(i)	$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$
(j)	$\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n\right\}$	(k)	$\left\{\frac{2^n}{4^n+1}\right\}$	(l)	$\left\{\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\right\}$
(m)	$\left\{\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}\right\}$	(n)	$\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$	(ñ)	$\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right\}$

2.-

(a) Utilizar la igualdad $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ para simplificar la expresión $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

(b) Como aplicación calcular el límite de la sucesión

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

3.- (*) Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n+n}{n^2+n}\right).$$

4.- Sea $a>1$. Se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n=\sqrt{a\cdot a_{n-1}}$, $a_1=\sqrt{a}$. Probar que la sucesión es monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

5.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales definida por $a_{n+1}=\sqrt{2\,a_n+3}$, sabiendo que a_1 es un número mayor que $-\frac{3}{2}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite. Indicación: distinguir el caso $a_1\geq 3$ y $a_1<3$.

6.- Sea $a_1=1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

(a) $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n$, (b) $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}a_n$, (c) $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$, (d) $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}a_n$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite.

7.- Se define recurrentemente la sucesión $a_1=a>0$ y $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$. ¿Es convergente la sucesión?

8.- Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, existe una sucesión $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

9.-
a) (*) Demostrar que la sucesión

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

es monótona creciente y está acotada superiormente. Por consiguiente, tiene un límite, que denotamos por e. *Indicación: Puede ser útil tener en cuenta la fórmula del binomio de Newton,* $(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^k$, *donde* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, *y* $0! = 1$.
b) (**) Demostrar que si $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

10.- Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \quad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}, \quad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

11.- (*)

(a) Probar por inducción que para $n = 1, 2, \dots$ se tienen las desigualdades

$$2^{n-1}n! \leq n^n \leq e^{n-1}n!$$

Indicación: Tener en cuenta la fórmula del binomio de Newton.

(b) Como aplicación probar las siguientes afirmaciones

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

12.- Hallar los siguientes límites
a) $\lim_{n\to\infty}(n^3-1)^{\frac{1}{3n}}$
b)$\lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)$.
c)(*) $\lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)$.
d) (**) $\lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$.

13.- Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

(a) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$ (b) (*) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}$, (c) (*) $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}$.

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

14.- La sucesión de término general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ cumple que, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$. Demostrar que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.

HOJA 2

$\boxed{8.}$ $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, acotado sup ($\exists \sup A$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{a_n\} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

$S = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon : S - \varepsilon < a_\varepsilon \leq S \iff$

$\iff$ "n suficientemente grande" $\exists a_n : \varepsilon - \frac{1}{n} < a_n \leq S$

$\exists N : \forall n > N$

LEMA DE SANDWICH $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$

$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a_n tiende a a; c_n tiende a a; b_n tiende también a a.

ej:

$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$

$0 \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to \ ? \to 0$

$\boxed{1.}$

b) $\left\{ \dfrac{n^3}{n^3+2n+1} \right\}$, $\boxed{l=1}$

DEFINICIÓN LÍMITE

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_\varepsilon$

$|a_n - l| < \varepsilon$

PROBAR POR LA DEFINICIÓN

$$\left| \frac{n^3}{n^3+2n+1} - 1 \right| = \left| \frac{\cancel{n^3} - \cancel{n^3} - 2n - 1}{n^3+2n+1} \right| =$$

$$= \left| \frac{-2n-1}{n^3+2n+1} \right| = \frac{2n+1}{n^3+2n+1} \leq \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2} < \frac{3}{n_\varepsilon^2} = \varepsilon$$

$2n+1 \leq 2n+n = 3n$

$n^3+2n+1 > n^3$

$n > n_\varepsilon$

$$n_\varepsilon : \frac{3}{n_\varepsilon^2} = \varepsilon \Rightarrow \boxed{n_\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}}$$

c) $\left\{ \dfrac{n}{n^2-n-4} \right\}$, $\boxed{l=0}$

PROBAR POR EL LEMA DE SANDWICH

$$0 \leq \frac{n}{n^2-n-4} \leq \frac{n}{n^2-2n} = \frac{1}{n-2} \longrightarrow \text{tiende a } 0$$

tiende a cero

$\boxed{n^2-n-4 > 0 \quad \forall n \geq 3}$

$\boxed{\begin{array}{c} n^2 - n - 4 \geq n^2 - 2n \\ \text{a partir de un cierto } n \end{array}}$

por el lema de sandwich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2-n-4} = 0$$

PROBAR EL (1.C) POR DEFINICIÓN DE LÍMITE

$$\left|\frac{n}{n^2-n-4}\right| \overset{n\geq 3}{=} \frac{n}{n^2-n-4} \overset{n\geq 4}{\leq} \frac{1}{n-2} <$$

$$\boxed{n^2-n-4 \geq n^2-2n \quad \forall n\geq 4}$$

$$< \frac{1}{n_\varepsilon - 2} = \varepsilon$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n > n_\varepsilon \\ n\geq 3 \\ n\geq 4 \end{array}}$$

$$\boxed{n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2}$$

a) $\dfrac{n^2}{n+2}$ $\quad \boxed{l=\infty}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall K>0 \ \exists n_K \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > n_K}$$

$$\frac{n^2}{n+2} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} > \frac{n_K}{2} = K$$

$$\boxed{n+2 < 2n} \quad \forall n \geq 2$$

$$\boxed{n_K = [2K]}$$

$\boxed{14.}$ $a > 1$; $a_n = \sqrt{a \cdot a_{n-1}}$; $a_1 = \sqrt{a}$

TEOREMA: Si una sucesión es creciente y acotada superiorm. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ esa sucesión tiene límite.

$$a_1 = \sqrt{a}$$
$$a_2 = \sqrt{a \cdot a_1} = \sqrt{a\sqrt{a}}$$
$$a_3 = \sqrt{a \cdot a_2} = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$$

- Demostración de que es creciente: $\boxed{\text{H.I. } a_n > a_{n-1}}$

A) $A_2 \geq A_1$

$$a_2 = \sqrt{a \cdot a_1} = \sqrt{a\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} = a_1$$

B) $a_{n+1} = \sqrt{a \cdot a_n} \geq \sqrt{a a_{n-1}} = a_n$

- Demostración de que es acotada superiormente

$\boxed{\text{H.I. } a_n \leq a}$

$$a_1 = \sqrt{a} \leq a$$
$$a_{n+1} = \sqrt{a \cdot a_n} \leq \sqrt{a \cdot a} = a$$

1.

d) $\left\{ \dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} \right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} = \sqrt{2}$$

FORMA SANDWICH

- $\dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} \leq \dfrac{\sqrt{2n^2}}{n+2} = \dfrac{n\sqrt{2}}{n+2} \leq \dfrac{\cancel{n}\sqrt{2}}{\cancel{n}} = \sqrt{2}$

forma 1

- $\dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} \geq \dfrac{\sqrt{2n^2-2}}{n+2} = \dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{n^2-1}}{n+2} = \sqrt{2}\cdot \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n+2}$

aplicando otra vez el teorema del sandwich habría que probar que tiende a 1.

forma 2

$$\frac{\sqrt{2-\frac{2}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$\frac{2}{n^2}$ tiende a 0, $\frac{2}{n}$ tiende a 0

$a_n \to \sqrt{2}$

$b_n \to 1$

Si $a_n = \sqrt{2-\frac{1}{n^2}}$, $b_n = 1+\frac{2}{n}$, como

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$ (TEOREMA PRÁCTICAS)

DEFINICIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} = \sqrt{2}$$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_\varepsilon \quad \left| \dfrac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} - \sqrt{2} \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{2n^2-1} - \sqrt{2n^2} - 2\sqrt{2}}{n+2} \right| \leq \left| \frac{\sqrt{2n^2-1} - \sqrt{2n^2}}{n+2} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\sqrt{2n^2-1} - \sqrt{2n^2}}{n} \right| = \left| \frac{\left(\sqrt{2n^2-1} - \sqrt{2n^2}\right)\left(\sqrt{2n^2-1} + \sqrt{2n^2}\right)}{n\left(\sqrt{2n^2-1} + \sqrt{2n^2}\right)} \right| =$$

$$= \left| \frac{(2n^2-1) - (2n^2)}{n\left(\sqrt{2n^2-1} + \sqrt{2n^2}\right)} \right| \leq \frac{1}{n\left(\sqrt{2n^2-1} + \sqrt{2n^2-1}\right)} = \frac{1}{2n\sqrt{2n^2-1}}$$

($2n^2$)

Tomamos $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2N_\varepsilon \sqrt{2N_\varepsilon^2-1}} < \varepsilon$ → esto es mayor que el valor absoluto inicial.

3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$$

- $$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\Big(n\underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{n}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{\frac{n(n+1)}{2}}\Big)=$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(n.n+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+k}{n^2+k}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(n.n+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(n^2+\frac{n^2+n}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n+k}{n^2+k}\leq\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=1+\frac{1}{2}+0=\boxed{\frac{3}{2}}$$

$n\geq k\Rightarrow\frac{1}{n}\leq\frac{1}{k}$

- $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}\geq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n}\left(\sum_{k=1}^{n}n+k\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n}n}_{n\underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{n}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{\frac{n(n+1)}{2}}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n^2+n}{2}}{n^2+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}+\frac{n^2+n}{2(n^2+n)}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Teorema de Sandwich

$$b_n\leq a_n\leq c_n$$

$$\downarrow\qquad\qquad\qquad\downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=l\qquad\qquad\lim_{n\to\infty}c_n=l$$

$$\searrow\quad\downarrow\quad\swarrow$$

$$l$$

$\boxed{1}$ i) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ $\qquad \left|\left(\frac{2}{3}\right)^n\right| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon$

$\log\left(\frac{2}{3}\right)^n = \underbrace{n \cdot \log\frac{2}{3}}_{<0} \overset{n>n_\varepsilon}{<} \underbrace{n_\varepsilon \cdot \log\frac{2}{3}} = \log\left(\frac{2}{3}\right)^{n_\varepsilon}$

ya que $\log n$ cuando $n < 1$ $\log n < 0$

$\Rightarrow n_\varepsilon \cdot \log\frac{2}{3} < \log \varepsilon \Rightarrow \boxed{n_\varepsilon < \frac{\log \varepsilon}{\log\frac{2}{3}}}$

j) $\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n\right\}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \infty$

$\forall K > 0 \quad \exists n_K \in \mathbb{N} : \forall n > n_K$ tal que $\left(\frac{5}{3}\right)^n > K$

$n \cdot \log\frac{5}{3} > n_K \log\frac{5}{3} > \log K \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{n_K > \frac{\log K}{\log\frac{5}{3}}}$

6.1

a) $\boxed{a_1 = 1}$ $a_1 = 1$ $a_2 = \frac{a_1}{4}$, $a_3 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_1}{16}$

$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ // $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{4} = l/4 \Rightarrow l = \frac{l}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{l = 0}$

• Decreciente (por inducción)

a) $a_2 \leq a_1$ ✓, $a_2 = 1/4$, $a_1 = 1$

b) $\boxed{a_n \leq a_{n-1}}$ H.I.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4} \overset{H.I.}{\leq} \frac{a_{n-1}}{4} = a_n$$

• Decreciente

$\forall n \quad a_{n+1} \leq a_n$

$a_{n+1} = \frac{a_n}{4}$, so $\frac{a_n}{4} \leq a_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1$ ✓

• Acotado inf. (por inducción)

• $a_1 = 1 \geq 0$

• $a_{n+1} = \frac{a_n}{4} \geq 0$

$\boxed{a_n \geq 0}$ H.I

$\boxed{10.}$

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n^2-3} =$$

$$= \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^2}_{\downarrow n\to\infty \; e^2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\underbrace{n^2}_{0}}\right)^{-3}}_{\downarrow n\to\infty \; 1}$$

* faltan los $\lim_{n\to\infty}$

$\boxed{13.}$

a) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$

$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$

$a_1 = 1$

Tomas límites:

$l = \sqrt{1+l} \Rightarrow l^2$

11. a) $2^{n-1}\cdot n! \leq n^n \leq e^{n-1} n!$

PRIMERA DESIGUALDAD

$n=1$

$n+1$: $\quad 2^n (n+1)! \leq (n+1)^{n+1} = (n+1)^n (n+1)$

Suponiendo: $2^{n-1}\cdot n! \leq n^n$

$$2^n (n+1)! = 2\cdot \underbrace{2^{n-1}\cdot n!}_{\substack{\leq n^n \\ \text{H.I.}}} (n+1) \leq 2\cdot(n+1)\cdot n^n$$

Entonces bastaría ~~que~~ probar:

$$2\cancel{(n+1)}\, n^n \leq (n+1)^n \cancel{(n+1)}$$

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

$$2 \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\substack{\text{Binomio} \\ \text{de Newton}}}{=} \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \text{—} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \text{—} + \frac{1}{n!} < 3$$

También sabemos ahora que como b_n es creciente y $b_1 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow b_n \geq 2$.

SEGUNDA DESIGUALDAD

$n=1$

$n+1$: Suponiendo $n^n \leq e^{n-1}\cdot n!$ queremos probar $(n+1)^{n+1} \leq e^n (n+1)!$

$$e^n (n+1)! = e\cdot \underbrace{e^{n-1}\cdot n!}_{\substack{\geq n^n \\ \text{H.I.}}} (n+1) \geq e(n+1)\, n^n$$

Bastaría probar:

$$(n+1)^n (n+1) \leq e(n+1)\, n^n \Rightarrow (n+1)^n \leq e\, n^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

TEOREMA CONVERGENCIA MONÓTONA: $\{a_n\}$ sucesión creciente y acotada $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = \lim a_n$

$a_n \leq \sup a_n = e$

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Continuación 11

$$2^{n-1} n! \leq n^n \leq e^{n-1} n! \longrightarrow n! \geq \frac{n^n}{e^{n-1}}$$

$$\longrightarrow \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} \geq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{e^{n-1}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{1-\frac{1}{n}}} = \infty$$

$\boxed{12.}$

a) $\lim_{n\to\infty} (n^3-1)^{1/3n}$

$$0 \leq \frac{1}{3n}\log(n^3-1) \leq \frac{1}{3n}\log(n^3) = \frac{1}{n}\log n = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} (n^3-1)^{1/3n} = 1$$

b) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

$$n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = n\,\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= n\,\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \longrightarrow \infty$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\underbrace{\sqrt[3]{n+1}}_{a} - \underbrace{\sqrt[3]{n}}_{b}\right)$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

$$\lim_{n\to\infty} n \frac{\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)\left((n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n(n+1)} + n^{2/3}\right)}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n(n+1)} + n^{2/3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{n+1-n}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n(n+1)} + n^{2/3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n(n+1)} + n^{2/3}} \longrightarrow \infty$$