Hoja 4

7. Usando el producto escalar usual en $\mathbb{C}^3$, recordad

$$\langle (x,y,z), (t,r,s) \rangle = x\bar{t} + y\bar{r} + z\bar{s}.$$

$x,y,z,t,r,s \in \mathbb{C}$

a) Encuentra la expresión en coordenadas de la simetría ortogonal S_ℓ con respecto a la recta $\ell = \{x - iz = 0, y = 0\} = \langle (i,0,1) \rangle = W_2$
¿Es unitaria? ¿Es autoadjunta?

$$\ell = \langle (i,0,1) \rangle \overset{a.n.}{=} \langle (i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \rangle$$

$$\ell^\perp = \{(x,y,z) \mid -xi + z = 0\}$$
$$= \langle (0,1,0), (1,0,i) \rangle \overset{a.n.}{=} \langle (0,1,0), (1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2}) \rangle$$
$$= W_1$$

$\mathcal{B} = \{(i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (0,1,0), (1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2})\}$ es base o.n. de $\mathbb{C}^3$

Sabemos que $u \in \mathbb{C}^3$ se escribe como

$(x,y,z) = u = u_1 + u_2$ donde $u_1 \in W_1$ y $u_2 \in W_2$

$$= \underbrace{\lambda(0,1,0) + \mu(1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2})}_{\in W_1} + \underbrace{\delta(i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})}_{\in W_2}$$

además $S_\ell(u) = u_2 - u_1$

Queremos calcular λ, μ y δ en función de x,y,z (las coordenadas de u). Escribimos $S = S_\ell$ por comodidad.

$$\begin{cases} S(u) - u = -2u_1 \in W_1 = \ell^\perp \\ \Rightarrow \langle S(u) - u, (i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \rangle = 0 \\ S(u) + u = 2u_2 \in W_2 = \ell = (\ell^\perp)^\perp \\ \Rightarrow \langle S(u) + u, (0,1,0) \rangle = 0 \\ \quad \langle S(u) + u, (1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2}) \rangle = 0 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas --> desarrollarlo y resolver

$$\begin{cases} \langle S(u)-u, (i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \rangle = 0 \\ \langle S(u)+u, (0,1,0) \rangle = 0 \\ \langle S(u)+u, (1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2}) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$S(u) = u_2 - u_1 = \delta(i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) - \lambda(0,1,0) - \mu(1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2})$$

$u = (x,y,z)$

$$\begin{cases} \langle \delta(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}) - \lambda(0,1,0) - \mu(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2}) - (x,y,z), (i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}) \rangle \underset{\text{B base o.n.}}{=} \delta + i/\sqrt{2}\, x - 1/\sqrt{2}\, z = 0 \\ \langle \delta(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}) - \lambda(0,1,0) - \mu(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2}) + (x,y,z), (0,1,0) \rangle \underset{\text{B base o.n.}}{=} -\lambda + y = 0 \\ \langle \delta(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}) - \lambda(0,1,0) - \mu(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2}) + (x,y,z), (1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2}) \rangle \underset{\text{B base o.n.}}{=} -\mu + 1/\sqrt{2}\, x - i/\sqrt{2}\, z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{z - ix}{\sqrt{2}} \\ \lambda = y \\ \mu = \dfrac{x - iz}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (x,y,z)$$

Por tanto, $S(u) = \dfrac{z-ix}{\sqrt{2}}(i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) - y(0,1,0) - \dfrac{x-iz}{\sqrt{2}}(1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2})$

$= (iz, -y, -ix)$

En la base estándar $C = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$M_C(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De hecho si consideramos la base $C' = \{e_2, e_1, e_3\}$

$$M_{C'}(S) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{array}\right)$$

↳ esta caja tiene pol. característico
$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

así que $M_{C'}(S) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

la matriz de una simetría respecto a una recta

C es base o.n.

¿Es unitaria? $M_C(S)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{M_C(S)}$

así que sí

¿Es autoadjunta? $\Leftrightarrow$ ¿ $S = \tilde{S}$ $\Leftrightarrow$ $M_C(S) = M_C(\tilde{S})$
$= \left(\overline{M_C(S)}\right)^T$

así que sí

NOTA: Noted que el ejercicio 5 de la hoja 3 está hecho para V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial cualquiera. Es decir, las conclusiones del ejercicio sirven tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$. Así que no es extraño que nuestra simetría de $\mathbb{C}^3$ con matriz en la base estándar $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se puede escribir en otra base como $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

NOTA II. El apartado b) es similar, sólo que pide calcular una proyección (de este tipo de ejercicios hicimos en la hoja 3). Simplemente notad que en este apartado no pregunta si la aplicación es unitaria ¿por qué? porque toda aplicación unitaria es biyectiva y las proyecciones no son biyectivas

$\Updownarrow$ $\det \neq 0$

$\Updownarrow$ $\det = 0$