2 4. Paso al límite bajo el signo integral

1. Sean $f_{2n-1} = 1_{[0,1)}$ y $f_{2n} = 1_{[1,2]}$, para $n = 1, 2, \ldots$. Comprobar que se verifica la desigualdad estricta en el Lema de Fatou (para funciones positivas).

2. Sea $f_n = \min\{f, n\}$, donde $f \geq 0$ medible. Demostrar que $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.

3. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finito. Mostrar que si $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ verifica que f_n converge uniformemente en X a la función f, entonces $f \in L^1(\mu)$ y $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

4. Probar con un contraejemplo que $f_n \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$ *no* implica necesariamente que $\lim \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f$.
Sugerencia: Considerar $f_n(x) = a_n/(1 + |x|)$ si $|x| \leq n$ y $f_n(x) = 0$ si $|x| > n$, para una sucesión $a_n \downarrow 0$ apropiadamente elegida.

5. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprobar que f_n verifica el lema de Fatou (para funciones positivas) con desigualdad estricta.

6. Sea f integrable sobre $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $\{E_n\} \subset \mathcal{F}$ tal que $E_n \downarrow E$, con $\mu(E) = 0$. Mostrar que $\lim \int_{E_n} f d\mu = 0$. ¿Se pueden rebajar la hipótesis sobre f del enunciado?

7. Sea $A \in \mathcal{F}$ y $f > 0$ medible e integrable. Comprobar que $\lim \int_A f^{1/n}\, d\mu = \mu(A)$.
Sugerencia: Usa (y vuelve a usar) el TCM.

8. Sea $f : X \to [0, \infty]$ una función medible tal que $\int f\, d\mu = c \in (0, \infty)$. Mostrar que para $\alpha > 0$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log \left[1 + \left(\frac{f}{n} \right)^\alpha \right] d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ c, & \text{si } \alpha = 1, \\ 0, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Sugerencias: Recordar que $\log(1 + x) \sim x$, cuando $x \to 0$. Además, para $\alpha \geq 1$ los integrandos están mayorados por αf. Cuando $\alpha < 1$ se puede usar el lema de Fatou.

9. Comprobar la siguiente identidad:

$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{1 - x} \log \frac{1}{x}\, dx = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n + 4)^2}.$$

10. Mostrar que

$$\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1 - x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Sugerencia: Desarrollar en serie de potencias la función $1/(1 - x)^2$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible e integrable y consideramos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

(a) Probar que $F(x)$ es continua.

(b) Mostrar que si $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, entonces $\sum_k |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \le \int_{\mathbb{R}} |f|$.

12. Para $x \ge 0$ y $n \ge 2$, comprobar que se verifica la desigualdad

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ge \frac{x^2}{4}.$$

Usar esta desigualdad para calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}}.$$

13. Consideramos la sucesión de funciones dadas por

$$f_n(x) = \frac{nx - 1}{(1 + x\log n)(1 + x^2 n \log n)}, \quad x \in (0, 1].$$

Comprobar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ y, sin embargo, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Sugerencia: Observar que $f_n(x) = \frac{-1}{x\log n+1} + \frac{nx}{(n\log n)x^2+1}$.

14. Calcular directamente el límite:

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} \int_a^{\infty} \frac{n}{1 + n^2x^2}\, dx$$

distinguiendo los casos $a > 0$, $a = 0$ y $a < 0$. ¿En cuáles de estos tres casos podemos aplicar algún teorema de paso al límite bajo el signo integral? En esos casos, ¿qué teorema o teoremas de convergencia son aplicables?

15. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n}\, dx.$$

16. Para $t \in \mathbb{R}$, defimos

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx.$$

Probar que $\varphi(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-t^2/4}$ de las siguientes dos formas:

(a) Justificar que $\varphi'(t) = -\frac{1}{2}t\varphi(t)$ e integrar.

(b) Expandir el coseno en serie de potencias e integrar, justificando el paso al límite.