HOJA 6

1. $\begin{cases} y' = y^{2/3} = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Hallar al menos 3 soluciones

$y_1 \equiv 0$ es solución

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \iff \frac{y^{1/3}}{-\frac{2}{3}+1} = x + c \iff \left.\begin{array}{l} y = \left(\frac{1}{3}x + \tilde{c}\right)^3 \\ \text{junto con } y(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{c} =$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{x^3}{27}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{27}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$f(x,y)$ es localm. Lipschitz (con respecto de la variable y) si

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x,y_1), (x,y_2) \in \mathcal{U}$ donde $\mathcal{U}$ es un entorno de $(0,0)$

$$\frac{|y^{2/3} - 0^{2/3}|}{|y-0|} \xrightarrow[y\to 0]{} \infty$$ no es localm. Lipschitz.

OJO: No ser localm. Lipschitz $\not\Rightarrow \neg\exists!$ solución local (puede haberla)

2.) Calcular todos los valores de $\alpha \in [0,\infty)$ para los que

$$\begin{cases} y' = |y|^{\alpha} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$ tiene existencia y unicidad

Para $\underline{\alpha = 0}$ escribir: $\begin{cases} y' = 1 = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |1-1| \leq$

$\Rightarrow f$ es localm. Lipsch

$\Rightarrow$ existencia y unicidad global $\Rightarrow$ la solución y(

está definida $\forall x \in \mathbb{R}$

La solución sería:

$$dy = dx \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = x + c \\ y(0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = x$$

¡globalmente Lipschitz

$\underline{\alpha = 1}$ $\begin{cases} y' = |y| \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \big||y_1| - |y_2|\big| \leq |y_1 - y_2| \Rightarrow \exists!$ sol. q

$\Rightarrow y \equiv 0$

$\underline{\alpha > 1}$ $\begin{cases} y' = |y|^{\alpha}, \ \alpha > 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Como $f(x,y) \in C^1$, porque $\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \alpha y^{\alpha - 1} & y \geq 0 \\ (-\alpha)(-y)^{\alpha-1} & y < 0 \end{cases}$

es continua, luego $|\partial_y f(x,y)| \leq C \quad \forall (x,y) \in \underset{\text{compacto}}{K}$

$\underset{\text{TVM.}}{\Rightarrow} f$ es localm. Lipschitz $\underset{\text{TEU}}{\Rightarrow}$ existencia y unicidad local

$\underline{\alpha \in (0,1)}$ $\begin{cases} y' = |y|^{\alpha} = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$f(x,y)$ no es Lipschitz local en ningún entorno de cero:

$$\frac{\big||y|^{\alpha} - |0|^{\alpha}\big|}{|y - 0|} \xrightarrow[y \to 0]{} \infty$$ $\Rightarrow$ No podemos garantizar existencia y unicidad local

Podemos encontrar $y \equiv 0$, y resolver como en el ej. 1 para encon[t] ot[ra]

$\Rightarrow$ No tenemos existencia y unicidad en entornos del (0,

$\boxed{3.}$

a) $y \geq z \Longrightarrow y' \geq z'$

Falso $\quad \begin{array}{l} y(x) = x^2+1 \\ z(x) = x \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} y'(x) = 2x \\ z'(x) = 1 \end{array} \qquad z'(x) > y'(x)$ para $x < \frac{1}{2}$

$y \geq z$

b) $y' \geq z' \Longrightarrow y \geq z$

Falso $\quad \begin{array}{l} y'(x) = x^2+1 \\ z'(x) = x \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} y(x) = \frac{x^3}{3} + x + C_1, \quad C_1 = 0 \\ z(x) = \frac{x^2}{2} + C_2, \quad C_2 = 1 \end{array}$

$y(1) = \frac{1}{3} + 1 < \frac{1}{2} + 1 = z(1)$

c) $y' \geq z'$, $y(0) = z(0) \Longrightarrow y \geq z$

$$\underbrace{\int_0^s y'(x)}_{\text{T.F.C.}\ \|} \geq \underbrace{\int_0^s z'(x)}_{\|\ \text{T.F.C.}}$$

$y(s) - y(0) \geq z(s) - z(0)$

↳ porque $y(s) \geq z(s) \ \forall s$

$\boxed{1.}$ Estudiar existencia y unicidad $\begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ y hallar explícitamente las soluciones cuando $y_0 = 1$ y cuando $y_0 = -1$, ndicando a qué $C^n(\mathbb{R})$ pertenecen

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \big| |y_1| + x - |y_2| - x \big| = \big| |y_1| - |y_2| \big| \leq |y_1 - y_2|$

es lipschitz global $\Longrightarrow$ existencia y unicidad en todo $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x)$ está definido)

a) $\begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{del cero}]{\text{en un entorno}} \begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$y > 0$

e.d. $(0,1)$

Ec. homogénea : $y' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow y = e^x \cdot K$

$y_p(x) = Ax + B \Rightarrow y_p'(x) = A$ Sustituyo en la ecuación:

$A = Ax + B + x \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = -x - 1$

$\Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ke^x - x - 1$

Como $y(0) = 1 \Rightarrow K - 1 = 1 \Rightarrow K = 2$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = 2e^x - x - 1}$ en un entorno de $(\underset{x}{\overset{\shortparallel}{0}}, \underset{y(x)}{\overset{\shortparallel}{1}})$

es solución de $\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Queremos ver que $2e^x - x - 1$ es positivo $\forall x$ (y lo es)

$\Rightarrow y(x)$ es solución de (Ec_a) y es $C^\infty(\mathbb{R})$.

b) $(Ec_b) \begin{cases} y' = |y| + x \\ y(0) = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{en un entorno de } x=0 \text{ ó de } (0,-1)]{} \begin{cases} y' = -y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Ec. homogénea : $y' = -y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -1 \Rightarrow \log y = -x + C$

$\Rightarrow y = Ke^{-x}$

$y_p(x) = B + Ax \Rightarrow y_p'(x) = A \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{matrix} A = -1 \\ B = 1 \end{matrix}$

$y = Ke^{-x} + x - 1$, Como $y(0) = -1 \Rightarrow K = 0$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = x - 1}$ es solución de $[1]\begin{cases} y' = -y + x \\ y(0) = -1 \end{cases} \xrightarrow[\text{en entorno de } (0,-1)]{} [2]\begin{cases} y' = |y| \\ y(0) = \end{cases}$

Para $x \leq 1$ [1] coincide con [2], pero para $x > 1$ hay que ver que pas

Buscamos solución de $\begin{cases} y' = y + x \\ y(1) = 0 \end{cases} \longrightarrow y(x) = Ke^x - x - 1$

$y(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = Ke - 1 - 1$

$K = 2/e$

$\Rightarrow y(x) = 2e^{x-1} - x - 1$

Entonces la solución de (EC_b) es: $y(x) = \begin{cases} x-1, & x<1 \\ 2e^{x-1}-x-1, & x \geq 1 \end{cases}$

y es $C^1(\mathbb{R})$

$\boxed{5.}$ Estudiar si para x_0, y_0, la solución de $\begin{cases} y' = \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2+2} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ se puede definir en toda la recta real

Voy a ver si $\partial_y f(x,y)$ está acotado.

$$\partial_y f(x,y) = \frac{(x+2y)(x^2+y^2+2) - (xy+y^2)(2y)}{(x^2+y^2+2)^2}$$

$|x+2y| \leq 2(|x|+|y|)$

$y^2 < x^2+y^2+2 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{x^2+y^2+2} <$

$$|\partial_y f(x,y)| \leq \frac{|x+2y|}{|x^2+y^2+2|} + \frac{2y^2|x+y|}{(x^2+y^2+2)^2} \leq \frac{2(|x|+|y|)}{|x^2+y^2+1|} + \frac{2(|x|+|y|)}{x^2+y^2+2} <$$

$|x|+|y| < x^2+y$

Como esto vale $\forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ es lipschitz global

TEORÍA: Resultados de prolongabilidad de una banda

Si $|f(t,y)| \leq \alpha(t)|y| + \beta(t)$, en D

con α y β continuas en (a,b) $D = (a,b) \times \mathbb{R}$

entonces la solución no prolongable está definida en todo (a,b)

5.] (P) $\begin{cases} y' = y^4 + r & r > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

a tal que y $\exists!$ en $[0,a]$

$y' = f(t,y) = y^4 + r$

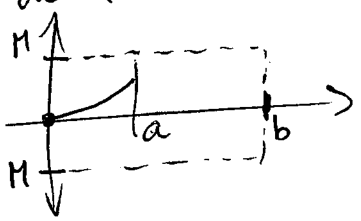
Para existencia y unicidad local basta que y^4+r sea Lipschitz.

1) En $\underbrace{[0,b] \times [-M,M]}_{\text{podemos suponer } \mathbb{R}\times[-M,M] \equiv D}$ f es Lipschitz en y $\underbrace{(\text{unif en } t)}_{\text{sobra}}$ notación

$|f_y| = |4y^3| \leq 4M^3$, y entonces $|f(x) - f(y)| \leq \underset{\overset{\shortparallel}{L}}{4M^3} |x-y|$

$|x| \leq M \ , \ |y| \leq M$

$\overset{\text{EUL}}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0$ e $y : [0,\delta] \longrightarrow [-M,M]$ tal que y es solución de (P)



$|y| \leq M$

$\begin{array}{l} y' = y^4 + r \\ y(0) = 0 \end{array} \Rightarrow y' \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} y \text{ crece} \\ y \geq 0 \end{array}$

$y' \leq M + r$ mientras $|y| \leq M \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y(t) \leq (M^4 + r)t$

Por otro lado, mientras $(M^4+r)t \leq M$ $|y| \leq M$ $(0 \leq y(t) \leq M)$

$\Rightarrow$ y existe en $[0, t_M]$, $t_M = \dfrac{M}{M^4 + r}$

Importante: eso vale $\forall M$, vamos a elegir M para que t_M sea máximo

$$t'_M = \frac{M^4+r-4M^4}{(M^4+r)^2} = 0 \longleftrightarrow M = \sqrt[4]{r/3} \quad y$$

entonces $t_M = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{r}\right)^{3/4}$

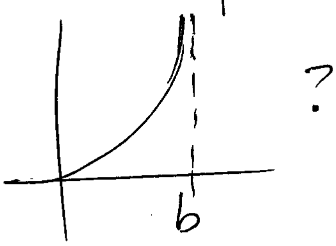
$$a = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{r}\right)^{3/4}$$

b) y existe en $[0, r^{-3/4}]$ (hipótesis)

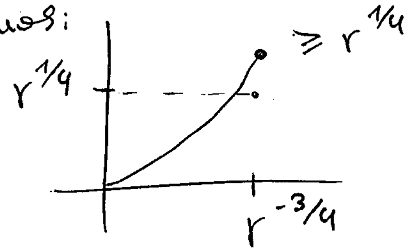
1. $y(r^{-3/4}) \geq r^{1/4}$

$$\underset{(y^4 \geq 0)}{y' \geq r} \underset{y(0)=0}{\Longrightarrow} y(t) \geq rt \quad ; \quad y(r^{-3/4}) \geq r \cdot r^{-3/4} = r^{1/4}$$

2. Usar esto e $y' \geq y^4$ para encontrar $[0,b]$ al que no se puede prolongar



Sabemos:



$z' = z^4$

$z(r^{-3/4}) = r^{1/4}$

$$y(r^{-3/4}) \geq z(r^{-3/4})$$

$$y' \geq y^4 \Downarrow$$

$$y(t) \geq z(t) \qquad t \geq r^{-3/4}$$

$z(t)??$ $\quad z^3 = \frac{1}{3(c-t)}$; con condición inicial $z(r^{-3/4}) = r^{1/4}$

. . . . obtenemos $c = \frac{4}{3} r^{-3/4}$

Como $z(t) \longrightarrow \infty$ cuando $t \longrightarrow c^- = \frac{4}{3} r^{-3/4}$ entonces $y(t)$ ($\geq z(t)$) se "tiene que ir" a ∞ antes (o al aprox.

a c) ; entonces y NO existe en todo $[0, \frac{1}{3}r ...]$

$$\begin{cases} y' = y + \operatorname{sen}(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = z + xz \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Observ: en ambos hay existencia y unicidad en todo $\mathbb{R}$.

$y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$z: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$F(x,y)$ $\quad F = y + \operatorname{sen}(xy)$

$\nearrow \nearrow$

$t \quad x$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + x\cos(xy)$

$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq \underbrace{1 + a}_{L}$ si $|x| \leq a$, e.d. F es Lipschitz en

y unif. en x en $[-a,a] \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists!$ en $[-a,a]$ $\forall a > 0$ $\Rightarrow \exists!$ en todo $\mathbb{R}$

a) $\max |z(x) - z(y)| \leq ?$ $\quad x \in [0, 0'1]$

$\hat{F}(x, \xi) = \xi + x\xi$

$F(x, \xi) = \xi + \operatorname{sen}(x\xi)$

Record: $|\operatorname{sen}(\theta) - \theta| \leq \frac{|\theta|^3}{6}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$

Si z es la solución de $\hat{F}$, e.d., $\begin{cases} z' = z + xz \\ z(0) = 1 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow z(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$

Si $\left|\hat{F}(x,z(x)) - F(x,z(x))\right| \leq \varepsilon$ en $[0,a]$ (donde $z(x)$ es la solución de $\left.\begin{matrix} z' = \hat{F}(x,z(x)) \\ z(0)=1 \end{matrix}\right)$ entonces

$\left|z(x) - y(x)\right| \leq \varepsilon \dfrac{e^{Lx}-1}{L}$ si $x \in [0,a]$ (donde y es la solución de $\left.\begin{matrix} y' = F(x,y) = y + \operatorname{sen}(xy) \\ y(0) = 1 = z(0) \end{matrix}\right)$

$$\left|z(x) + xz(x) - \left(z(x) + \operatorname{sen}(xz(x))\right)\right| = \left|\underbrace{xz(x)}_{\theta} - \operatorname{sen}(\underbrace{xz(x)}_{\theta})\right| \leq \frac{|\theta|^6}{6}$$

$$\overset{\varepsilon x \leq a}{\leq} \frac{|xz(x)|^3}{6} = \frac{\left|xe^{x+\frac{x^2}{2}}\right|^3}{6} = \varepsilon_a$$

i función $xe^{x+\frac{x^2}{2}}$ es crec. en $[0,a]$

Para $x \in [0,a]$, $\left|z(x) - y(x)\right| \leq \varepsilon_a \dfrac{e^{lax}-1}{L_a}$ $L_a = 1+a$.

$$\max_{\varepsilon x \leq a} \left|z(x) - y(x)\right| \leq 2a \frac{e^{aL_a}-1}{L_a} = \left(\frac{a^3e^{3a+\frac{3a^2}{2}}}{6}\right)\frac{e^{a(1+a)}-1}{1+a}$$

$a = 0{,}1$ ✓

<u>osibilidad 2</u> : $y + xy \geq y + \operatorname{sen}(xy)$ siempre que $xy \geq 0$ y lo es en $x \geq 0$) $\Longrightarrow z(x) \geq y(x)$ $\forall x > 0$

Si $0 \leq xy \leq \pi$, $\operatorname{sen}(xy) \geq 0$ e $\begin{matrix} y' \geq y \\ y(0) = 1 \end{matrix} \longrightarrow y \geq e^x$

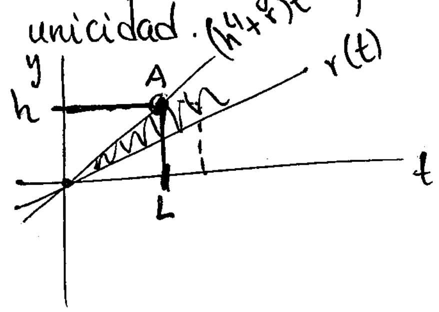
$$e^x \leq y(x) \leq e^{x+\frac{x^2}{2}}$$

) $z(0{,}1)$

) ¿max $|z(x) - y(x)|$ $-0'1 \leq x \leq 0$?

16.1 MARTA $\begin{cases} y' = y^4 + r = \ldots & , \; r > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

a) Hallar un entorno de cero (intentando que sea lo mayor posible) en el que se puede asegurar existencia y unicidad.



$y^4 + r \in C^1 \Rightarrow$ es lipschitz local

$\frac{\partial g}{\partial y} = 4y^3 \longrightarrow$ lipschitz local

$g(t,y) > 0 \Longrightarrow y$ es creciente

Cogemos $y \in [0,h]$: $\quad r \leq y'(t) \leq h^4 + r \xrightarrow{\text{integr.}} rt \leq y(t) \leq (h^4+r)t$

Calculamos punto A: $(h^4+r)t = h \iff \boxed{t = \frac{h}{h^4+r}} := \tilde{g}(h)$ maximizar

$$\tilde{g}'(h) = \frac{h^4 + r - 4h^4}{(h^4+r)^2} = \frac{-3h^4 + r}{(h^4+r)^2} \qquad \tilde{g}'(h) = 0 \iff 3h^4 = r$$

$$h = \left(\frac{r}{3}\right)^{1/4}$$

$+ \quad \left(\frac{r}{3}\right)^{1/4} \quad -$

máximo

Mi solución maximal está definida <u>al menos hasta</u>:

$$t_1 = \frac{(r/3)^{1/4}}{\frac{r}{3} + r}$$

b) Probar que si la solución existe en $[0, r^{-3/4}]$ entonces $\boxed{y(r^{-3/4}) \geq r^{1/4}}$ y, usar esto junto con $y' \geq y^4$ para encontrar un entorno en el que se pueda asegurar que no existe sol. regular.

$rt \leq y(t) \leq (h^4 + r)t$

$y(r^{-3/4}) \geq r \cdot r^{-3/4} = r^{1/4}$ para $t > r^{-3/4}$

$$\frac{y'}{y^4} \geq 1 \Rightarrow \int_{r^{-3/4}}^{t} \frac{y'}{y^4} \geq \int_{r^{-3/4}}^{t} 1 \Longrightarrow \left.\frac{y^{-3}}{-3}\right]_{r^{-3/4}}^{t} \geq t - r^{-3/4} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3r^{3/4}} - \frac{1}{3y(t)^3} \geq t - r^{-3/4} \quad \Rightarrow \quad \frac{r^{-3/4}}{3} - \left(t - r^{-3/4}\right) \geq \frac{1}{3y(t)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{3y(t)^3} + \frac{1}{3y(r^{-3/4})^3} \geq t - r^{-3/4}$$

$$y(t)^3 \geq \frac{1}{r^{-3/4} - 3\left(t - r^{-3/4}\right)} \Longleftrightarrow y(t) \geq \frac{1}{\left(r^{-3/4} - 3\left(t - r^{-3/4}\right)\right)^{1/3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^{-3/4} = 3\left(t - r^{-3/4}\right) \Longrightarrow \frac{r^{-3/4} + 3r^{-3/4}}{3} = t \Longrightarrow \boxed{t_{max} = \frac{r^{-3}}{3}}$$

8. Sean los problemas:

$$(A) \begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+x^2} + e^{-y^2} \\ y(0) = 10 \end{cases} \qquad (B) \begin{cases} z' = \dfrac{z}{1+z^2} \\ z(0) = 10 \end{cases}$$

Demostrar que $0 \leq y(x) - z(x) \leq e^{-100}\left(e^x - 1\right) \quad x \in [0,1]$

Resolvemos (B) que es la que sabemos:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \boxed{z = Ke^{\operatorname{arctg} x}} > 0$$

Llamo ahora $\omega(x) = y(x) - z(x)$. Sabemos: $\omega(0) = 0$ y que

$$\omega'(x) = y'(x) - z'(x) = \frac{y - z}{1+x^2} + e^{-y^2} = \frac{\omega}{1+x^2} + e^{-y^2}$$

Forma 1 de ver que $\omega'(x) > 0$ en $[0,1]$:

$\omega(0) = 0$, $\omega'(0) = e^{-y^2(0)} > 0 \Rightarrow \omega$ es creciente en un entorno de cero.

Forma 2: $\omega'(x) > \dfrac{\omega}{1+x^2} \Longrightarrow \omega(x) \geq \displaystyle\int_0^x \frac{\omega(s)}{1+s^2}\, ds$

$$\overbrace{-\omega(x)}^{\omega(x)^*} \leq \int_0^x \frac{\overbrace{-\omega(s)}^{\omega(x)^*}}{1+s^2}\, ds \xrightarrow{\text{GRONWALL}} \omega(x)^* \leq 0 \Rightarrow -\omega(x) \leq 0 \Rightarrow \omega(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow y(x) \geq z(x) > 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow y' > 0 \quad \forall x$$

Ahora la otra desigualdad.

LA FORMA: Como y crece, $e^{-y^2} \leq e^{-y(0)^2} = e^{-100}$

$$w'(x) \leq \frac{w}{1+x^2} + e^{-100} \leq w + e^{-100} \xRightarrow{\text{integrando}}$$

$$w(x) \leq e^{-100} x + \int_0^x w(s)\, ds \longrightarrow \text{grouwall (LEMA)}$$

9. Estudiar el intervalo de definición de las sol. no prolongables de:

a) $x' = \dfrac{x^2+t^4}{\sqrt{1+x^2+t^2}} = f(t,x) \in C^1 \Rightarrow$ exist. y unicidad local

$\sqrt{1+x^2+t^2} > |x|$

$\sqrt{1+x^2+t^2} \geq 1$

$$|f(t,x)| = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+t^2}} + \frac{t^4}{\sqrt{1+x^2+t^2}} \leq |x| + t^4$$

Mi solución maximal está definida en todo (a,b) para cualquier $(a,b) \Rightarrow$ Mi solución maximal está definida en todo (a,b).

b) $x' = \dfrac{x^3+t^5}{\sqrt{1+x^4+t^4}} = f(t,x) \in C^1 \Rightarrow$ exist. y unicidad local

$\sqrt{1+x^4+t^4} \geq x^2$

no depende de (a,b)

$$|f(t,x)| \leq \frac{|x|^3}{\sqrt{1+x^4+t^4}} + \frac{|t|^5}{\sqrt{1+x^4+t^4}} \leq |x| + |t|^5 \Longrightarrow \text{Mi}$$

solución maximal está definida en todo (a,b) $\forall (a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ en todo $\mathbb{R}$.

[11.]

$$\begin{cases} x' = x - y - \dfrac{x}{(1-t)(x^2+y^2)^{1/2}} \\ \\ y' = x + y - \dfrac{y}{(1-t)(x^2+y^2)^{1/2}} \end{cases}$$

$r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $tg\,\theta = \dfrac{y}{x}$

$$x^2+y^2 = r^2 \implies 2rr'(t) = 2x\,x'(t) + 2yy'(t)$$

$$2rr'(t) = 2x\left(x - y - \frac{x}{(1-t)(x^2+y^2)^{1/2}}\right) + $$

$$+ 2y\left(x+y - \frac{y}{(1-t)(x^2+y^2)^{1/2}}\right) =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 - \frac{(2x^2+2y^2)}{(1-t)(x^2+y^2)^{1/2}} = 2r^2 - \frac{2r^2}{(1-t)\,r}$$

$$(*)\ r' = r - \frac{1}{(1-t)} \xrightarrow[\text{lineal}]{\text{resolvemos}} \boxed{\begin{array}{l} r_h(t) = ce^t \\ r_p(t) = c(t)e^t \end{array}}$$

$\hookrightarrow$ solución de $(*)$ $\iff$

$$\iff r_p'(t) = \underbrace{c(t)e^t}_{= r} + c'(t)e^t$$

$$c'(t)e^t = \frac{-1}{1-t} \implies c'(t) = \frac{e^{-t}}{t-1} \implies \boxed{c(t) = \int \frac{e^{-s}}{s-1}\,ds}$$

$$\implies tg\,\theta = \frac{y}{x} \implies \frac{1}{\cos^2\theta}\,\theta'(t) = \frac{y'(t)\,x(t) - y(t)\,x'(t)}{y(t)^2} = \dots$$

$$\theta' = 1 \implies \theta(t) = t$$

OJO: La constante de Lipschitz puede depender de t:

$$y'(t) = t^3 \operatorname{sen}(ty) = f(t,y)$$

$$|\partial_y f(t,y)| = |t^4 \cos(ty)| \leq t^4$$

$t=b$ máximo en $[a,b]$

Fijas $t \in [a,b]$:

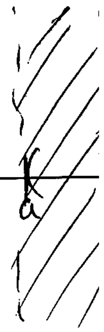
$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| = b^4|y_1 - y_2|$$

GRONWALL

$$\omega(x) \leq C + \int_{x_0}^{x} \omega(s)\, \underbrace{K(s)}_{\geq 0 \text{ y continua}}\, ds$$

$$\Longrightarrow \quad \omega(x) \leq C e^{\int_{x_0}^{x} K(s)\,ds}$$

$\to (a,b) \times \mathbb{R}$



RESULTADOS DE PROLONGABILIDAD EN UNA BANDA:

Res 1: $|f(t,x)| \leq L \quad \forall (t,x) \in D$

$\Rightarrow$ Solución maximal está definida en todo (a,b)

Res 2: $|f(t,x)| \leq \alpha(t)|x| + \beta(t)$ $\quad \alpha$ y β continuas en $(a,$

$\Rightarrow$ Sol. maximal definida en todo (a,b).

Res 3: $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq K(t)|x_1 - x_2|$ $\quad K$ continua en (a,b)

$\Rightarrow$ Sol. maximal definida en todo (a,b).

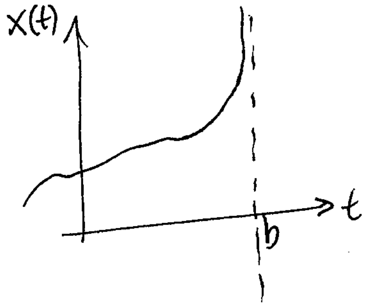
12. $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ es una integral primera de (E) si es constante a lo largo de las soluciones de (E), e.d.,

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \langle \nabla f(x(t)), V(x(t)) \rangle = 0 \qquad (E) \equiv X' = V(X) \qquad V \in C^1$$

Demostrar que si f es una integral primera para (E) tal que $\boxed{\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty}$ (*), entonces V es completo.

$f(x_1, \dots, x_n) = C$
$x = (x_1, \dots, x_n)$ es solución de (E)

Supongamos que V no es completo $\Longrightarrow \exists\, x(t)$ solución de (E), $b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t \to b^-} |x(t)| = \infty$



Como f es integral primera: $f(x(t)) = C$, $\forall t \in I$ ← intervalo de def. de $x(t)$

$$C = \lim_{t \to b^-} f(x(t)) \overset{(*)}{=} \infty \qquad \underline{\text{contradicción}}$$

f continua $\Longrightarrow f\left(\lim_{t \to b^-} (x(t))\right)$

13. a) Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ verificando $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty$ y sea $x = x(t)$ solución de (E). Supongamos que existe $c > 0$ tal que $\frac{df}{dt}(x(t)) \leq c$. Probar que es indefinidamente prolongable a la derecha.

OJO: Aquí el enunciado no nos dice que f sea integral primera.

Supongamos que f no es indefinidamente prolongable $\Longrightarrow \exists b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t \to b^-} |x(t)| = \infty$

$$f(x(t)) - f(\underbrace{x(t_0)}_{\text{cte.}}) = \int_{t_0}^{t} \frac{df(x(s))}{ds}\, ds \leq \int_{t_0}^{t} c\, ds = c(t - t_0) \qquad \forall t \in I$$

$$f(x(t)) \leq f(x(t_0)) + c(t - t_0)$$

$$\lim_{t \to b^-} f(x(t)) \leq f(x(t_0)) + c(b - t_0) < \infty \qquad \underline{\text{contradicción}} \text{ con hipótesis}$$

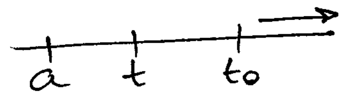
b) $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$ y $\underbrace{\left|\frac{d}{dt} f(x(t))\right| < M}_{\substack{\text{III} \\ -M \leq \frac{d}{dt} f(x(t)) < M}}$

ntonces V es completo.

Veamos que es indefinidamente prolongable a la izquierda.

Suponemos que no lo es. Entonces existe $a\in\mathbb{R}$ tal que

$\lim\limits_{t\to a^+} |x(t)| = \infty$



$$M(t_0-t) = \int_t^{t_0} (-M)\,ds \leq \int_t^{t_0} \frac{d}{ds} f(x(s))\,ds = f(x(t_0)) - f(x(t))$$

$$f(x(t)) \leq f(x(t_0)) + M(t_0-t)$$

$$\infty = \lim_{t\to a^+} f(x(t)) \leq f(x(t_0)) + M(t_0-a) < \infty$$

<u>contradicción</u>

$\boxed{4.}$ a) Demostrar que $x'' + \nabla U(x') = 0$, $x\in\mathbb{R}^3$, donde $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$\iota \in C^1(\mathbb{R}^3)$ verifica $\lim\limits_{|x|\to\infty} U(x) = \infty$ es completo.

$X' = V(X)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$

$x_1 = x$
$x_2 = x'$

$$(*) = \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\nabla U(x_1) \end{cases} \qquad V(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\nabla U(x_1) \end{pmatrix}$$

Busco f integral primera $(*)$ tal que $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$

ara que sea integral primera, $\left\langle \nabla f(X(t)), \begin{pmatrix} x_2 \\ -\nabla U(x_1) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

debe cumplir que $\nabla f(X(t)) = \begin{pmatrix} \nabla_{x_1} U(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{III}}{}$$

$:\mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad (\partial_{x_{11}} f, \partial_{x_{12}} f, \partial_{x_{13}} f, \partial_{x_{21}} f, \partial_{x_{22}} f, \partial_{x_{23}} f) = (\nabla_{x_1} f, \nabla_{x_2} f)$

$$?(X(t)) = U(x_1) + \frac{\|x_2\|^2_{\mathbb{R}^3}}{2} \qquad \|x_2\|^2_{\mathbb{R}^3} = \sum_{i=1}^3 x_{2_i}^2$$

$$\frac{\partial}{x_{2_j}} \|x_2\|^2_{\mathbb{R}^3} = 2x_{2_j}$$

Si $\|X\|_{\mathbb{R}^6} = \left(\|x_1\|^2_{\mathbb{R}^3} + \|x_2\|^2_{\mathbb{R}^3} \right)^{1/2}$

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\|X\|_{\mathbb{R}^6} \longrightarrow \infty$ si:

a) $\|x_1\|_{\mathbb{R}^3} \to \infty$ y $\|x_2\|_{\mathbb{R}^3} \to \infty$

b) $\|x_1\|_{\mathbb{R}^3} \to \infty$

c) $\|x_2\|_{\mathbb{R}^3} \to \infty$

En todos los casos $\lim_{\|X\|_{\mathbb{R}^6} \to \infty} f(X(t)) = \infty$ (usamos ej. 12, V es comp

b) Misma pregunta que en a) para $x'' + \nabla U(x) = -R(x')$
donde $R: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $R \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y verifica $\langle \xi, R(\xi) \rangle \geq 0$ $\forall \xi$ (**)

$X_1 = x$
$X_2 = x'$

$$\begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = -\nabla U(X_1) - R(X_2) \end{cases} \qquad V = \begin{pmatrix} X_2 \\ -\nabla U(X_1) - R(X_2) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} f(X(t)) = \Big\langle \underbrace{\nabla f(X(t))}_{= \begin{pmatrix} \nabla U(X_1) \\ X_2 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} X_2 \\ -\nabla U(X_1) - R(X_2) \end{pmatrix} \Big\rangle_{\mathbb{R}^6} \longleftarrow \text{tomo } f \text{ del apartado a}$$

$$= \cancel{\langle \nabla U(X_1), X_2 \rangle_{\mathbb{R}^3}} + \cancel{\langle X_2, -\nabla U(X_1) \rangle_{\mathbb{R}^3}} - \langle X_2, R(X_2) \rangle \underset{\text{hip. } (**)}{\leq} 0 < C \implies$$

$\implies$ Ej 13 a las sol. son indef. prol. a la derecha.