PROBABILIDAD II

Grado en Matemáticas

Distribuciones notables

Javier Cárcamo

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
javier.carcamo@uam.es

Distribuciones de probabilidad notables

1. **Distribución degenerada en un punto a**

$$\mathrm{P}(X = a) = 1.$$

2. **Distribución de Bernoulli de parámetro $p \in (0,1)$**

$$\mathrm{P}(X = 0) = q = 1 - p, \quad \mathrm{P}(X = 1) = p.$$

Aplicaciones: Con esta distribución se modelizan fenómenos que sólo pueden presentar dos resultados posibles (dicotómicos). El valor 1 se identifica con el éxito y 0 con el fracaso. Es la base de la distribución binomial y de otras muchas distribuciones discretas importantes.
Notación: $X \sim \mathrm{B}(1; p)$.

3. **Distribución uniforme en n puntos $a_1, \dots, a_n$**

$$\mathrm{P}(X = a_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Notación: $X \sim \mathrm{U}(\{a_1, \dots, a_n\})$.

4. **Distribución binomial de parámetros n, p**

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Aplicaciones: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0,1)$. Consideremos un experimento ϵ en el que prestamos atención a un suceso A (éxito) y A^c (fracaso), con $\mathrm{P}(A) = p$. Repetimos n veces el experimento en pruebas independientes, es decir, bajo las mismas condiciones. Estas repeticiones se denominan **pruebas (independientes) de Bernoulli**.

La variable aleatoria

$$X \equiv \text{ número de éxitos en los } n \text{ intentos}$$

se dice que tiene distribución **binomial** (de parámetros n y p) y toma los valores $0, 1, \dots, n$.

Notación: $X \sim \mathrm{B}(n; p)$.

4. **Distribución binomial de parámetros n, p**

$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

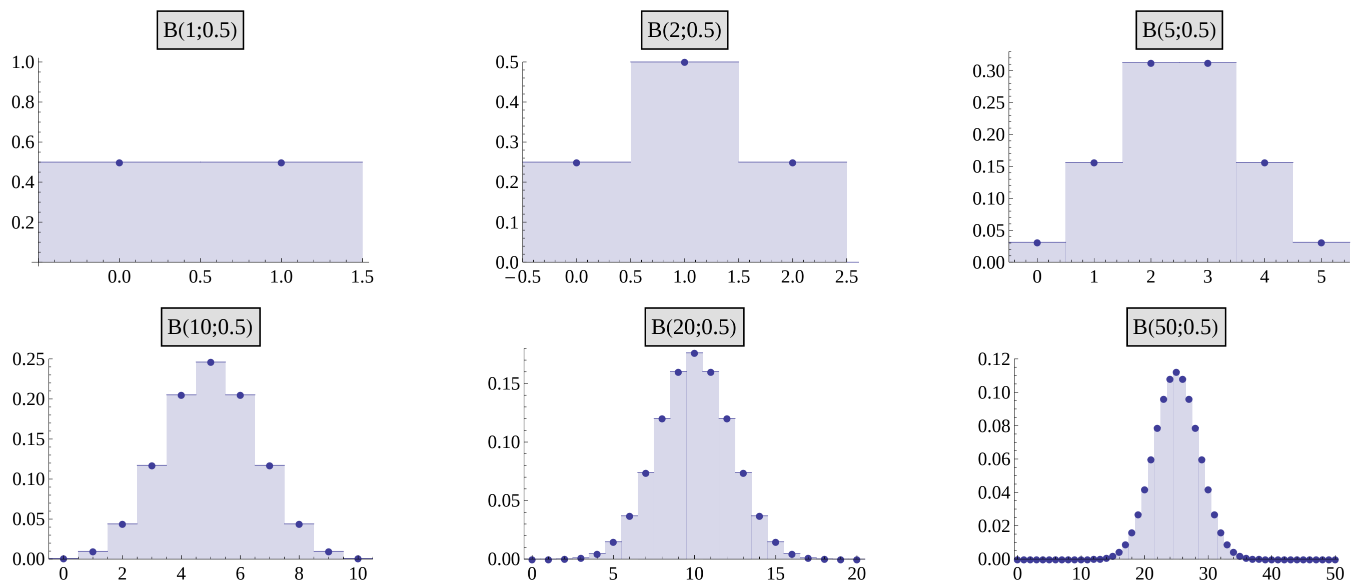
Suma de variables de Bernoulli independientes:
Consideremos $X_1,\ldots,X_n$ v.a. $B(1,p)$ independientes, donde X_i toma el valor 1 si en la i-ésima prueba de Bernoulli ocurre el suceso A (éxito). Tenemos,

$$X=X_1+\cdots+X_n, \quad X_i\sim \mathrm{B}(1;p) \quad (i=1,\ldots,n).$$

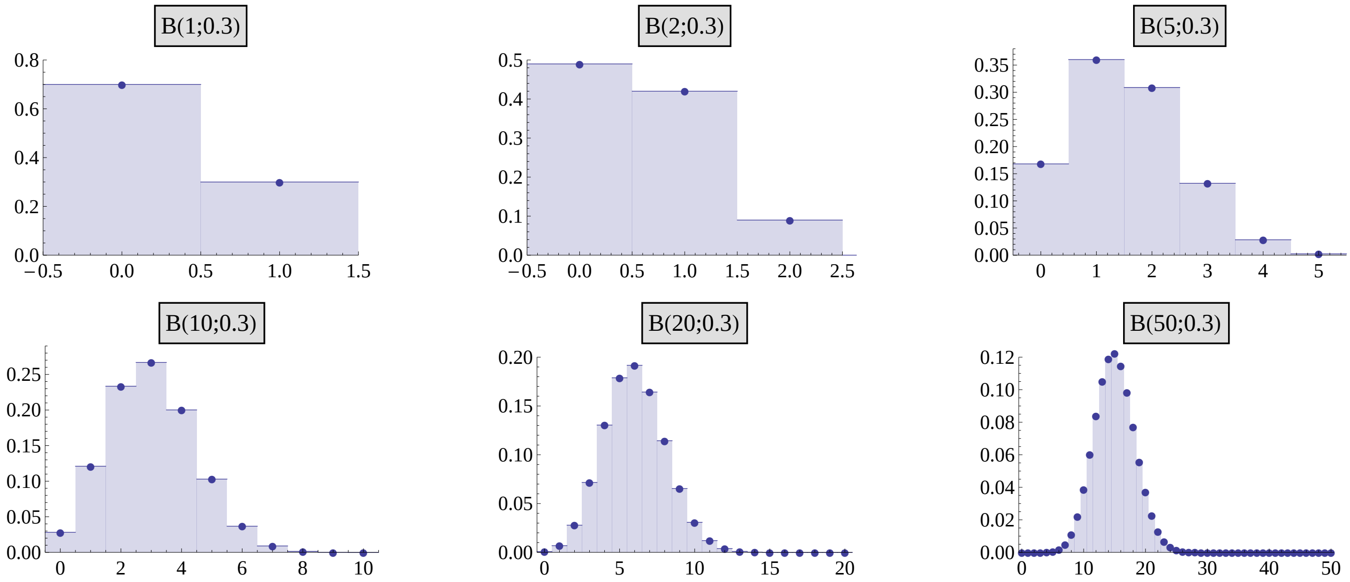
Luego, la v.a. con distribución binomial de parámetros n y p se puede expresar como suma de n v.a.s (independientes) de Bernoulli de parámetro p.

Suma de binomiales independientes:
Si $X_1,\ldots,X_k$ v.a. (independientes) con $X_i\sim \mathrm{B}(n_i;p)$ $(1\le i\le n)$, la v.a. $X=X_1+\cdots+X_k\sim \mathrm{B}(n;p)$, con $n=n_1+\cdots+n_k$.

Función de probabilidad de B$(n;0{,}5)$



Función de probabilidad de B$(n; 0{,}3)$

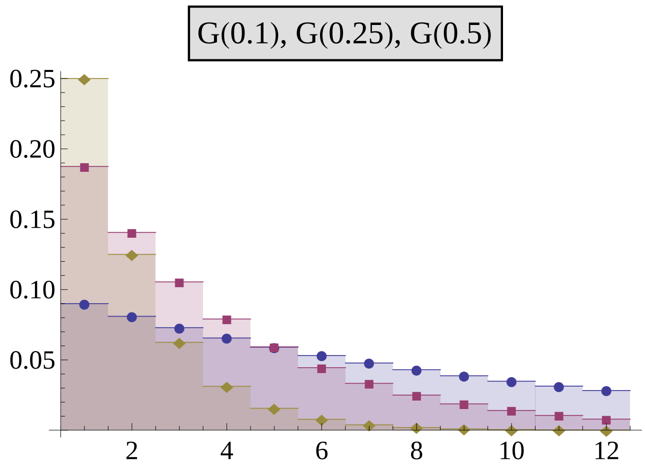


5. **Distribución geométrica de parámetro** $p \in (0, 1)$

$$\mathrm{P}(X = k) = pq^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Aplicaciones: Esta distribución aparece al considerar una variable aleatoria que representa el número de unidades de tiempo que es necesario esperar hasta la ocurrencia, por primera vez, de un determinado acontecimiento aleatorio.

Notación: $X \sim \mathrm{G}(p)$.



5. **Distribución geométrica de parámetro** $p \in (0,1)$

Nota: En algunas ocasiones interesan conocer la distribución de la variable Y que cuenta el número de intentos hasta el primer éxito. Los intentos se suponen independientes unos de otros y la probabilidad de éxito es p. En este caso, la variable de interés es $Y = X + 1$, donde $X \sim \mathrm{G}(p)$, es decir, Y verifica

$$\mathrm{P}(Y = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Dependiendo de la literatura consultada, en algunas ocasiones la distribución de la variable Y también se conoce como geométrica de parámetro p. Por tanto, en los ejemplos prácticos conviene saber cuál de las dos distribuciones nos interesa.

6. **Distribución binomial negativa (parámetros** $t > 0$**,** $p \in (0,1)$**)**

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{-t}{k} p^t (-q)^k = \binom{t+k-1}{k} p^t q^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

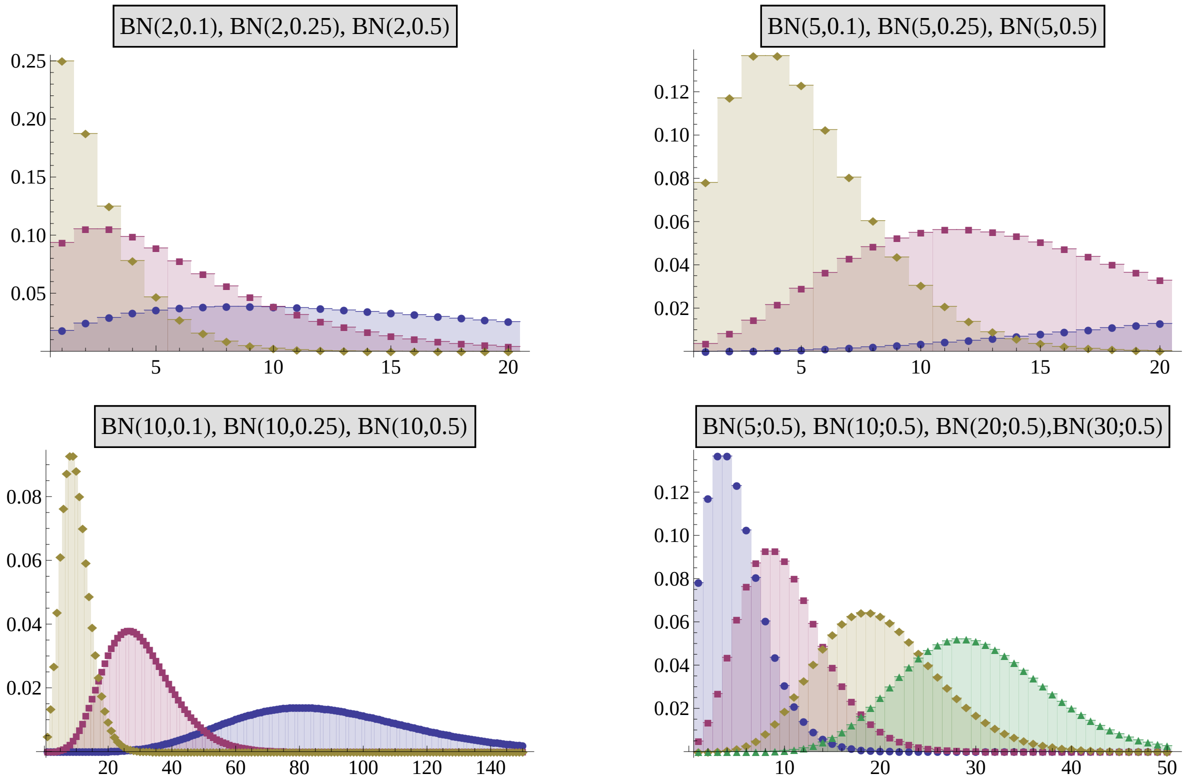
Aplicaciones: Cuando t es natural, esta distribución es un modelo discreto de tiempo de espera: En una sucesión de experimentos de Bernoulli con probabilidad de éxito p, la distribución número de fracasos antes de obtener t éxitos es binomial negativa de parámetros t, p.

Notación: $X \sim \mathrm{BN}(t; p)$.

Observación: Si $t = 1$, es geométrica de parámetro p ($\mathrm{BN}(1; p) \sim \mathrm{G}(p)$).

Algunas distribuciones notables (discretas)

Función de probabilidad de BN$(t; p)$



Algunas distribuciones notables (discretas)

7. **Distribución de Poisson de parámetro** $\lambda > 0$

$$\mathrm{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Aplicaciones: Se utiliza como modelo probabilístico para el estudio de fenómenos en los que ocurren determinados sucesos por unidad de tiempo, espacio, volumen, área, etc.

- El número de plaquetas en un ml. de sangre.
- El número de mutaciones en un fragmento de ADN después de una cierta cantidad de radiación.
- Número de personas que llegan en un intervalo de tiempo a una cola.

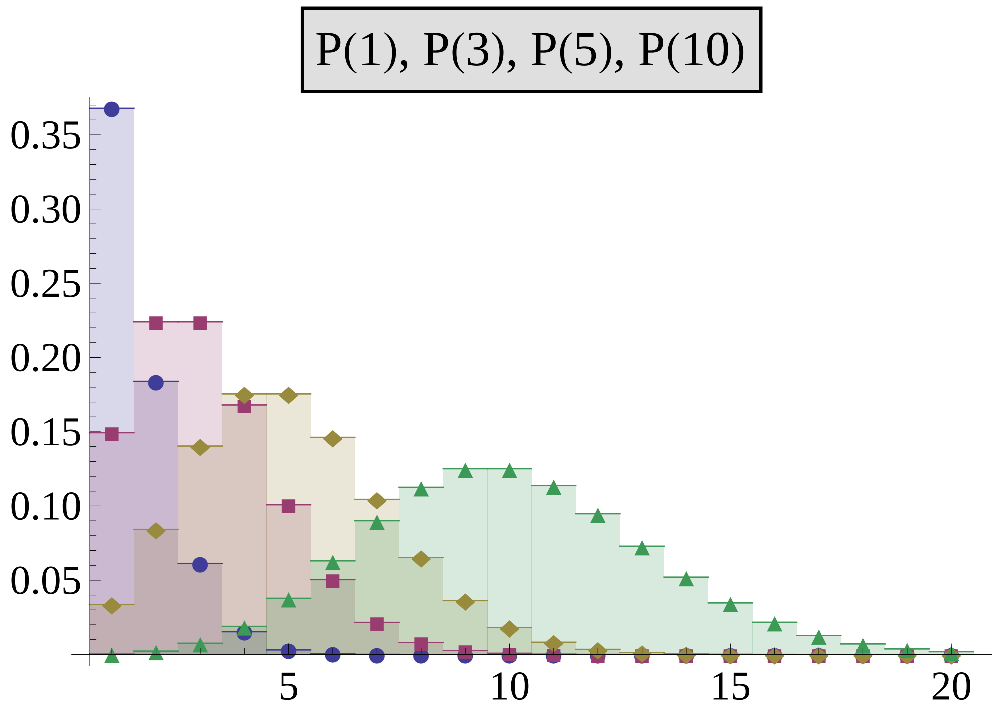
Notación: $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Observación: Aproximación de Poisson a la binomial:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad n \to \infty,\ np \to \lambda.$$

Algunas distribuciones notables (discretas)

Función de probabilidad de P(λ)

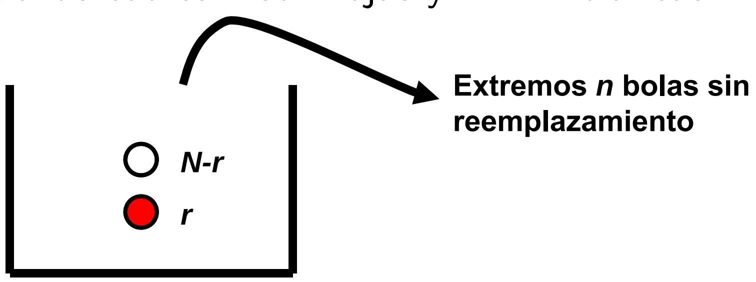


Algunas distribuciones notables (discretas)

8. **Distribución hipergeométrica ($N, n, r \in \mathbb{N}$, con $n, r \leq N$)**

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{máx}\{0, n - N + r\} \leq k \leq \text{mín}\{n, r\}.$$

Aplicaciones: Consideremos la extracción (sin reemplazamiento) de n bolas de una urna que contiene N bolas, de las cuales r son rojas y $N - r$ blancas.

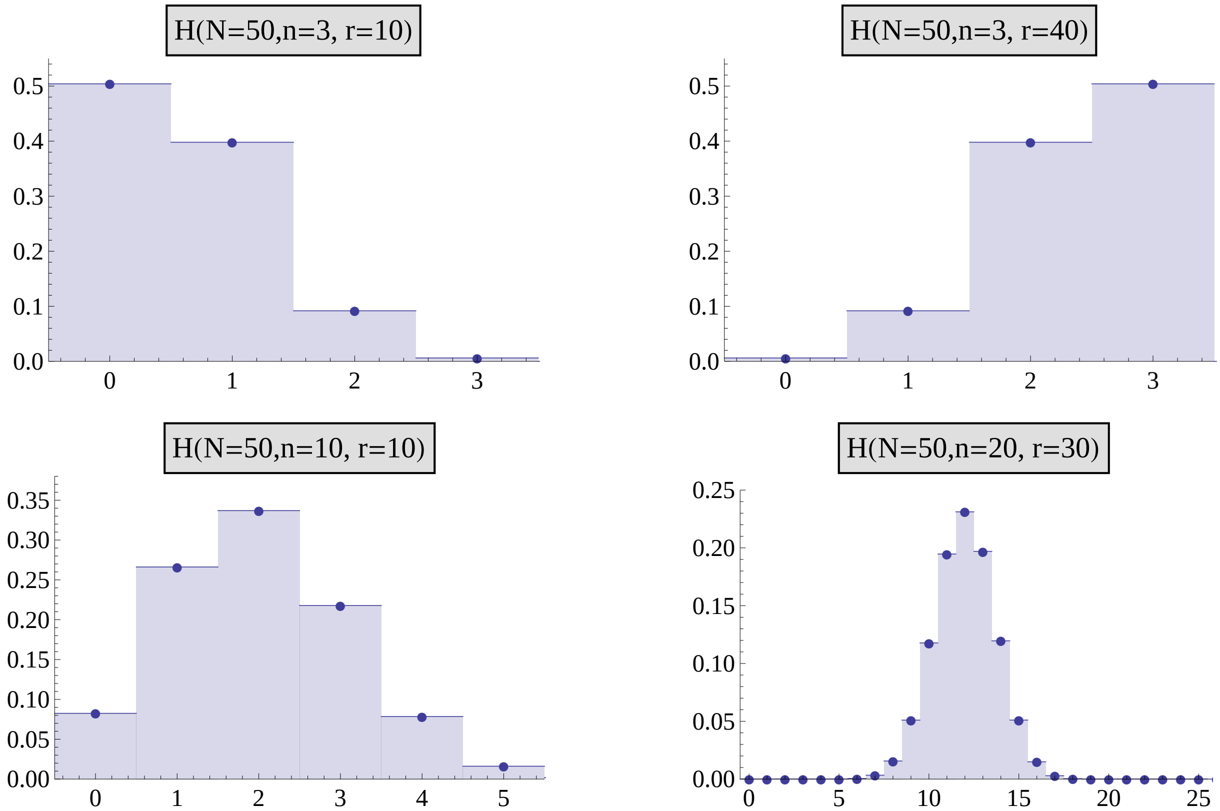


La variable X que cuenta el número de bolas rojas extraídas tiene distribución hipergeométrica de parámetros N, n y r.

Se utiliza habitualmente en Control de calidad.

Notación: $X \sim \mathrm{H}(N; n; r)$.

Función de probabilidad de H$(N; n; r)$



1. **Distribución uniforme en el intervalo** (a, b)

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x).$$

Aplicaciones: Se utiliza en los métodos de generación de números (pseudo-)aleatorios. Supongamos que queremos generar observaciones aleatorias de una variable con función de distribución F (continua). Primeramente se generan números de una variable U uniforme estándar (i.e. con $a = 0$, $b = 1$) y se transforman con F^{-1}. Esta aplicación se basa en la siguiente propiedad.

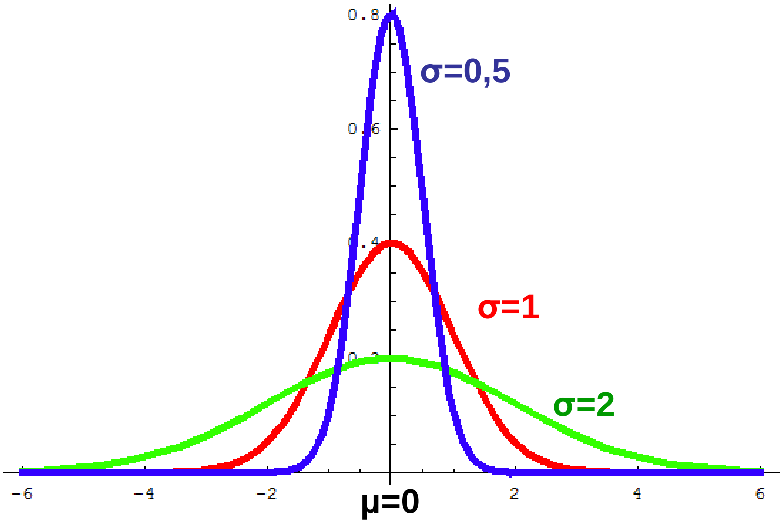
Propiedad: generación de números aleatorios

Sea X variable aleatoria con función de distribución F continua. La variable $U = F(X)$ tiene distribución uniforme estándar.

Notación: $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

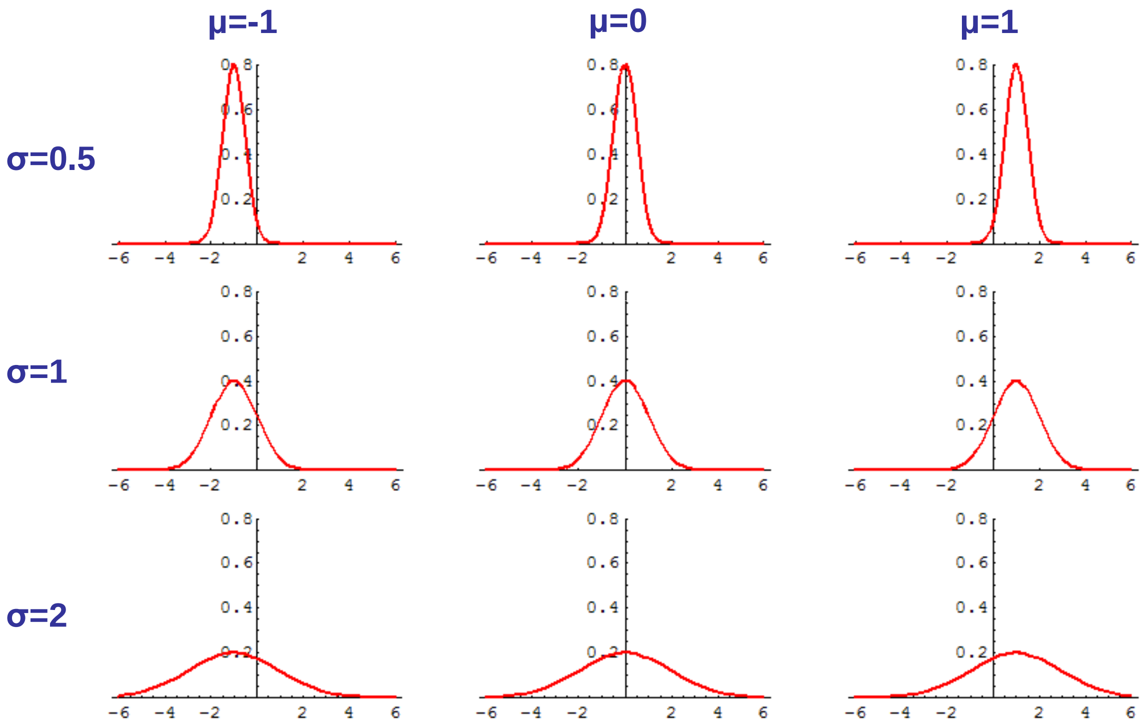
❷ **Distribución normal de parámetros** $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$



Notación: $X \sim \mathrm{N}(\mu; \sigma)$.

Ejemplos de densidades normales



La distribución normal es la ley en la cual todo el mundo cree firmemente, los matemáticos porque creen que es un hecho comprobado experimentalmente y los experimentadores, porque creen que se trata de un teorema matemático.
Gabriel Lippman (1845-1921), Premio Nobel de Física (1906).

Importancia de la distribución normal (o de Gauss):

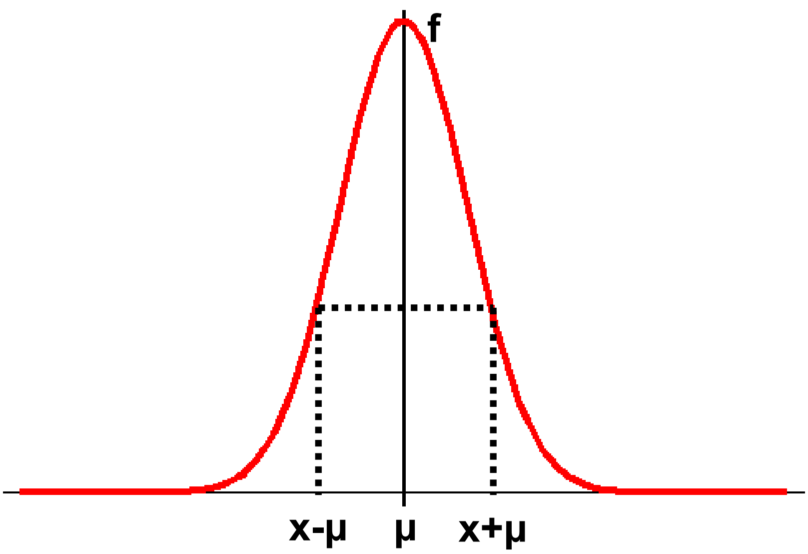
(1) Modeliza muchos fenómenos aleatorios muy usuales de la naturaleza que se pueden considerar como la suma de muchos pequeños efectos independientes como: Peso o altura de una persona o animal (datos biométricos en general); Magnitudes físicas; Ingesta de alimentos; Errores de medición; Datos meteorológicos; etc.

(2) En Estadística aparece como distribución límite de muchos estadísticos que se usan para la inferencia.

(3) (1) y (2) son debidos (principalmente) a que se verifica el Teorema Central del Límite (TCL).

Algunas propiedades de la densidad normal

- f es simétrica respecto de la recta $x = \mu$ $(f(\mu - x) = f(\mu + x))$.
- Si $\mu = 0$ ($X \sim \mathrm{N}(0; \sigma)$), f es par ($f(-x) = f(x)$).
- f alcanza su máximo absoluto en μ y $f(\mu) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$.
- Los puntos $\mu \pm \sigma$ son puntos de inflexión de f.



Tipificación de variables normales

Llamamos **variable normal tipificada** a la v.a. $Z \sim \mathrm{N}(0;1)$. Es decir, Z tiene densidad

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Su función de distribución se suele denotar mediante Φ,

$$\Phi(z) := \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt, \quad z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } X \sim \mathrm{N}(\mu;\sigma) \Longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0;1).$$

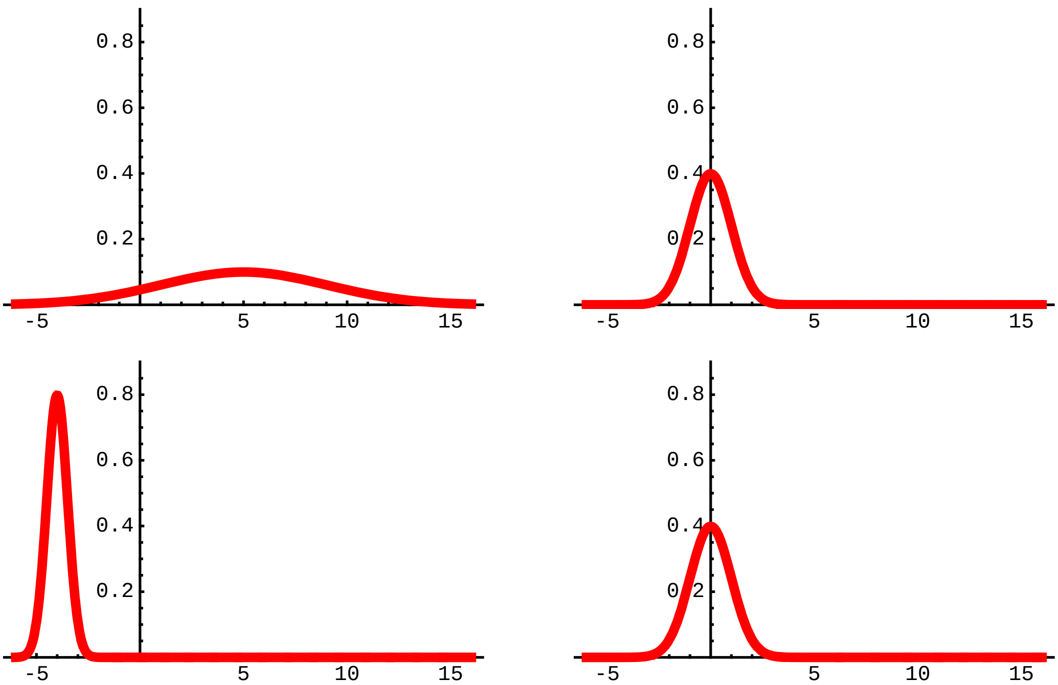
Esta transformación se denomina **tipificación** o **estandarización**.

Ejemplos:

- Si $X \sim \mathrm{N}(5;4)$, entonces $Z = \frac{X-5}{4} \sim \mathrm{N}(0;1)$.
- Si $X \sim \mathrm{N}(-4;0{,}5)$, entonces $Z = \frac{X+4}{0{,}5} \sim \mathrm{N}(0;1)$.

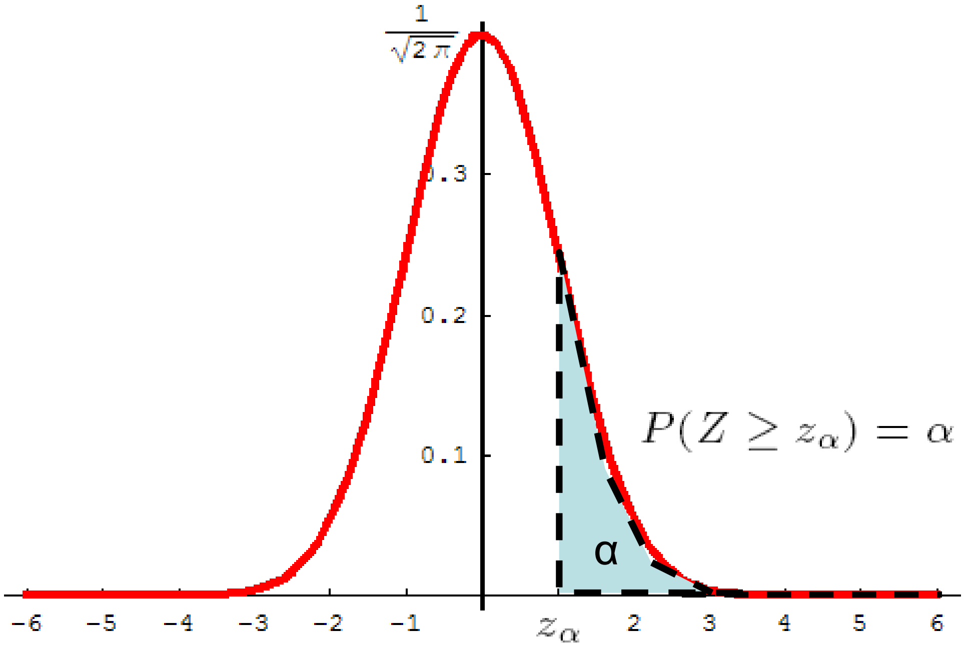
Tipificación de variables normales

- Si $X \sim \mathrm{N}(5;4)$, entonces $Z = \frac{X-5}{4} \sim \mathrm{N}(0;1)$.
- Si $X \sim \mathrm{N}(-4;0{,}5)$, entonces $Z = \frac{X+4}{0{,}5} \sim \mathrm{N}(0;1)$.



Tabulación de variables normales

En las tablas están los valores α y z_α de forma que $\mathrm{P}(Z \geq z_\alpha) = \alpha$.

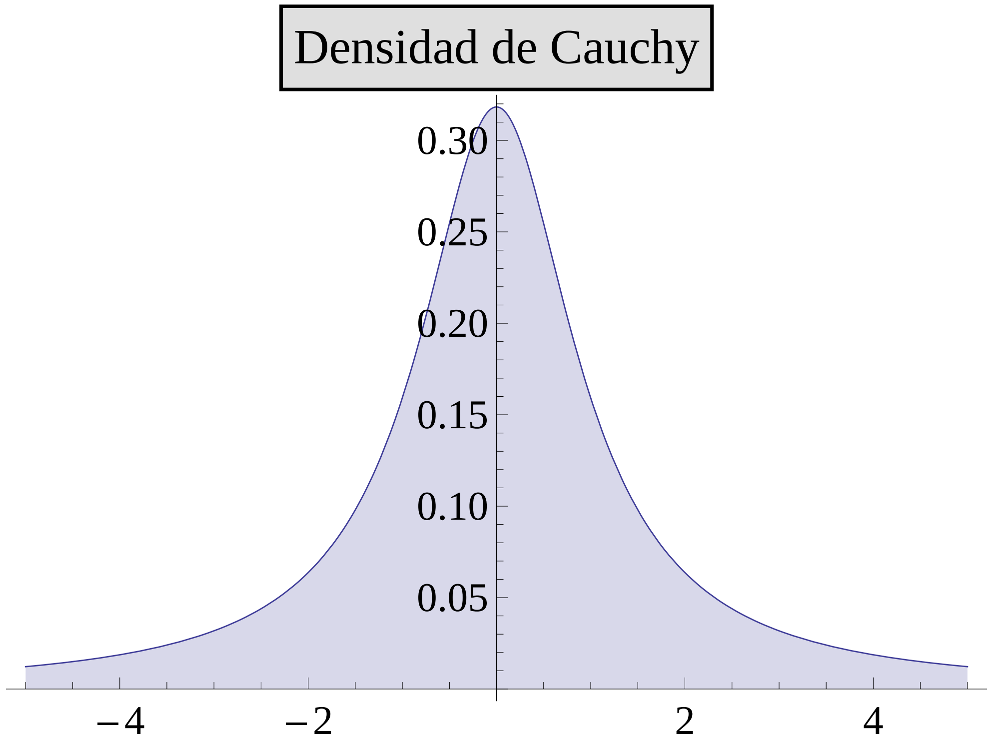


3. **Distribución de Cauchy**

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicaciones: En el estudio de emisiones de partículas. Si Z es un ángulo aleatorio distribuido uniformemente entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, $\mathrm{tg}(Z)$ tiene distribución de Cauchy. El cociente de dos v.a. normales estándar independientes tiene también distribución de Cauchy.

Esta distribución es muy útil para muchos contraejemplos ya que *no* es integrable.



4. **Distribución exponencial de parámetro** $\lambda > 0$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Aplicaciones: La distribución exponencial se utiliza para modelar el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia por primera vez de un suceso. Muy utilizada en modelos de fiabilidad.

- Tiempo entre dos llamadas consecutivas en una centralita.
- Tiempo entre la llegada de dos pacientes a un servicio de urgencias.
- Tiempos de vida de artículos o piezas (tiempo que tarda en averiarse un electrodoméstico).
- Tiempo que tarda una cierta cantidad de una sustancia radiactiva en reducir su masa a la mitad (datación de fósiles o cualquier materia orgánica mediante la técnica del C^{14}).
- Distancia entre mutaciones en un fragmento de ADN.
- Tiempos de espera en colas.

Notación: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

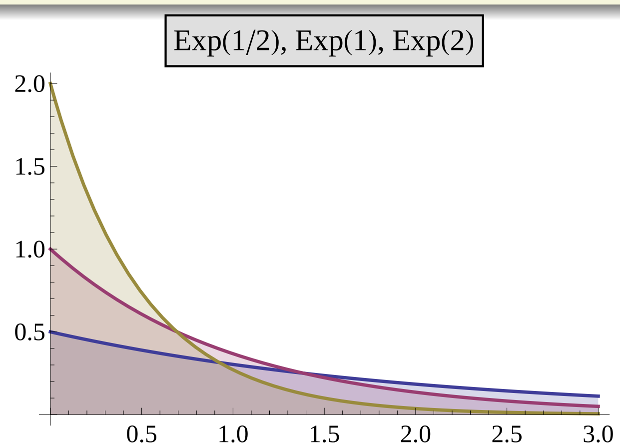
Una variable aleatoria $X \geq 0$ se dice que **no tiene memoria** si

$$\mathrm{P}(X > s + t | X > s) = \mathrm{P}(X > t), \quad \text{para todo } s, t > 0.$$

Propiedad: falta de memoria de la exponencial

Sea $X \geq 0$ es v.a. absolutamente continua. Son equivalentes:

1. X tiene distribución exponencial.
2. X no tiene memoria.



5. **Distribución gamma de parámetros** $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0,$$

$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$, $p > 0$, es la función **gamma de Euler**.

Propiedades: $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $p > 0$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

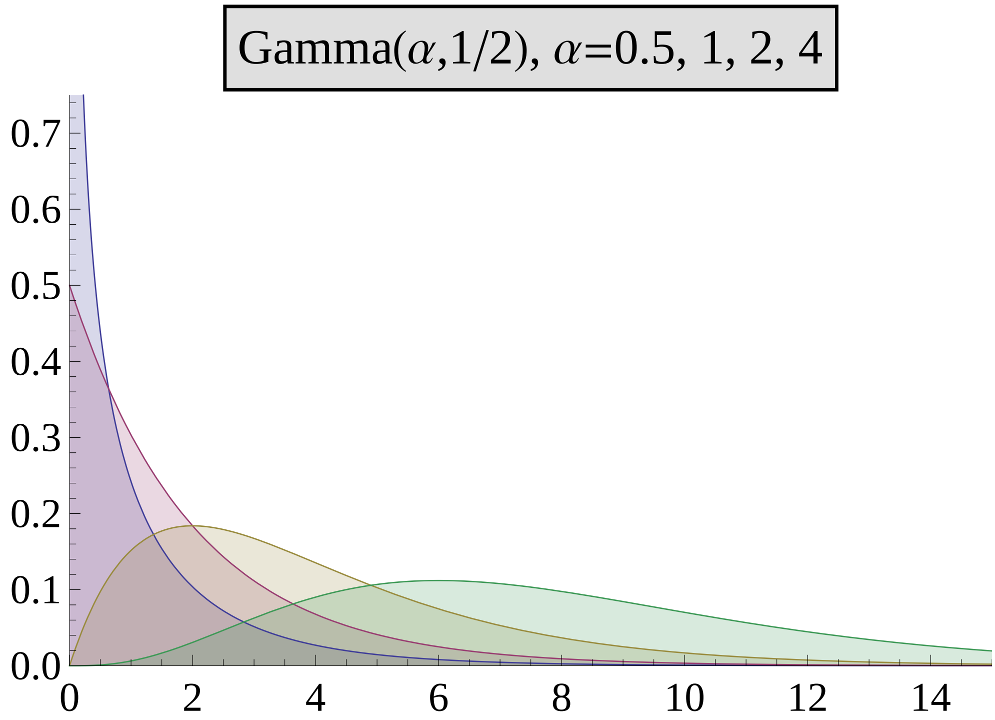
Aplicaciones: Cuando $\alpha \in \mathbb{N}$, se llama distribución de Erlang y se usa en problemas de fiabilidad (tiempo de espera hasta α fallos), cantidad de lluvia caída, cuantía de las reclamaciones a las compañías de seguro, modelos de supervivencia,....

Cuando $\alpha = n/2$ ($n \in \mathbb{N}$) y $\beta = 1/2$, se llama χ^2 con n grados de libertad y desempeña un importante papel en Estadística.

Si $\alpha = 1$ y $\beta = \lambda$, es una distribución Exp(λ).

Notación: $X \sim \text{Gamma}(\alpha; \beta)$.

Función de densidad de Gamma$(\alpha; \beta)$



6. **Distribución beta de parámetros** $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\beta(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1),$$

donde

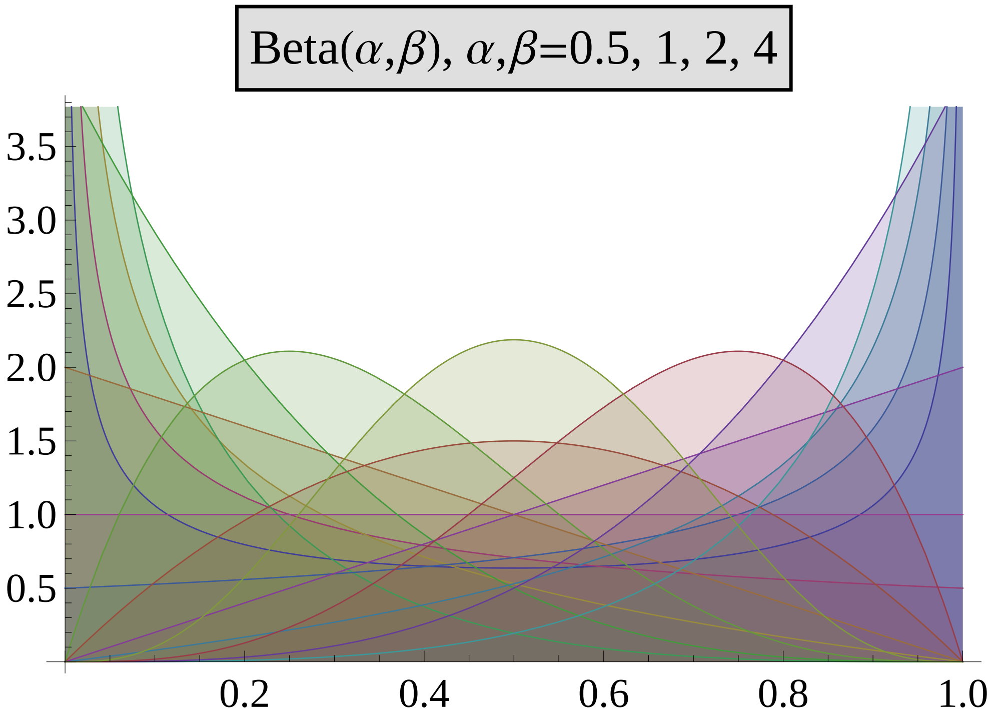
$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a, b > 0,$$

es la función **beta de Euler**.

Aplicaciones: Dependiendo de los valores de los parámetros la densidad beta adopta formas muy variadas. Esta distribución (o sus versiones "reescaladas" en otros intervalos diferentes a $[0, 1]$) proporciona un modelo muy flexible para describir variables aleatorias reales de soporte compacto.

Notación: $X \sim \text{Beta}(\alpha; \beta)$.

Función de densidad de Beta(α, β)



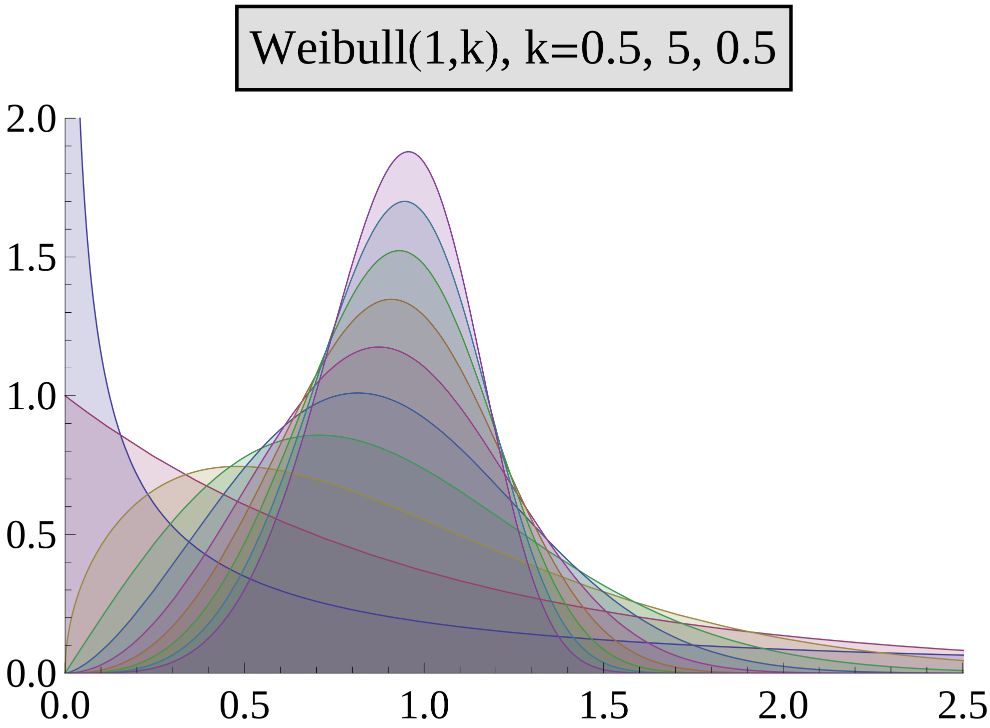
7. **Distribución Weibull de parámetros** $\theta, k > 0$

$$f(x) = \frac{k}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{k-1} e^{-(x/\theta)^k}, \quad x > 0.$$

Aplicaciones: Esta distribución suele modelizar tiempos de supervivencia en problemas de fiabilidad en ingeniería, velocidad del viento, periodos de incubación de algunas enfermedades, etc.

Notación: $X \sim \text{Weibull}(\theta; k)$.
Observación: $\text{Weibull}(1/\lambda; 1) \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Función de densidad de Weibull$(\theta; k)$



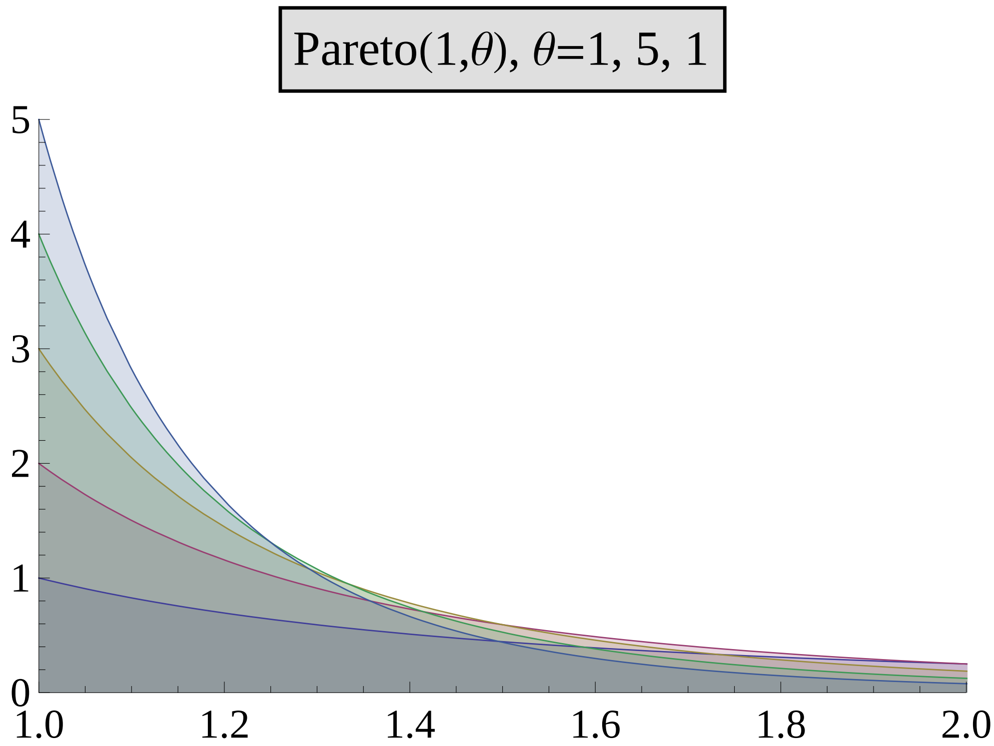
8 **Distribución de Pareto de parámetros** $a > 0$ **y** $\theta > 0$

$$f(x) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}, \quad x > a.$$

Aplicaciones: Distribución de ingresos, de reservas de petróleo, de área quemadas en bosques, de tamaños de ficheros enviados por e-mail, de tamaños de partículas,...

Notación: $X \sim \text{Pareto}(a; \theta)$.

Función de densidad de Pareto$(a;\theta)$



9. **Distribución lognormal de parámetros** $\mu \in \mathbb{R}$ **y** $\sigma > 0$

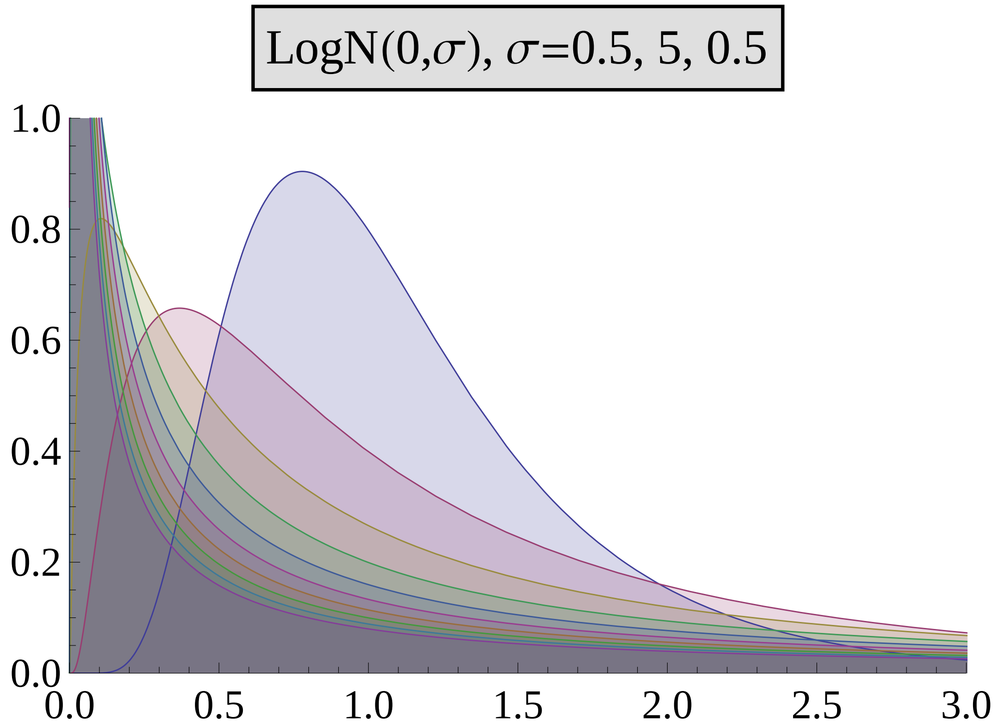
$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x > 0.$$

Aplicaciones: Si $X \sim \text{LogN}(\mu;\sigma)$, entonces $\log X \sim \text{N}(\mu;\sigma)$. Se usa en geología (tamaño de rocas sedimentarias) y en general en aquellos casos en los que una variable puede considerarse producto de muchos factores de pequeño efecto individual.

Notación: $X \sim \text{LogN}(\mu;\sigma)$.

Algunas distribuciones notables (continuas)

Función de densidad de LogN$(\mu;\sigma)$



Distribuciones multidimensionales notables (discretas)

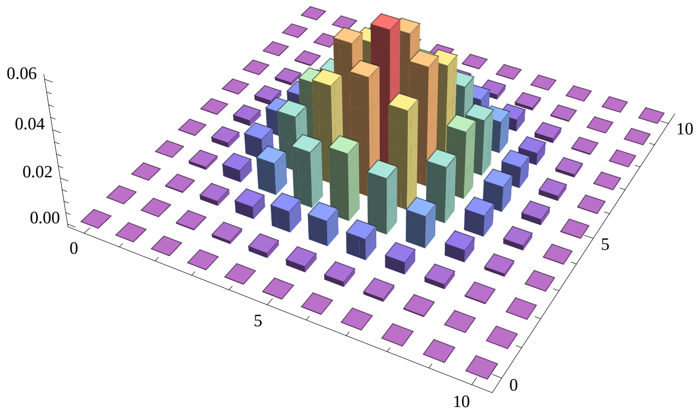
1. **Producto de binomiales** $(n_1, n_2 \in \mathbb{N},\ p_1, p_2 \in (0,1))$

$$\mathrm{P}(X = k, Y = l) = \binom{n_1}{k} p_1^k (1 - p_1)^{n_1 - k} \binom{n_2}{l} p_2^l (1 - p_2)^{n_2 - l}.$$

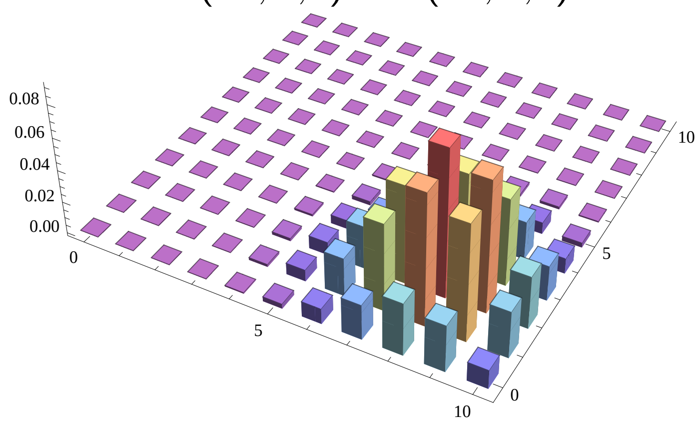
El soporte es $S = \{0, 1, \ldots, n_1\} \times \{0, 1, \ldots, n_2\}$.

Las marginales son $X \sim \mathrm{B}(n_1, p_1)$ e $Y \sim \mathrm{B}(n_2, p_2)$.

$\mathrm{B}(10, 0{,}5) \otimes \mathrm{B}(10, 0{,}5)$



$\mathrm{B}(10, 0{,}2) \otimes \mathrm{B}(10, 0{,}8)$



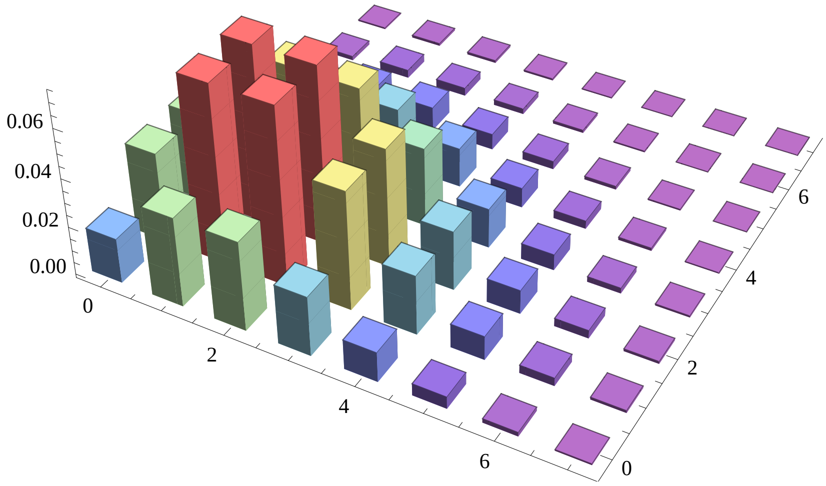
2. **Producto de Poisson** de parámetros $\lambda, \mu > 0$

$$\mathrm{P}(X = k, Y = l) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^l}{l!}, \quad k, l = 0, 1, \ldots$$

El soporte es $S = \{0, 1, \ldots\} \times \{0, 1, \ldots\}$.

Las marginales son $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathrm{P}(\mu)$.

$\mathrm{P}(2) \otimes \mathrm{P}(2)$



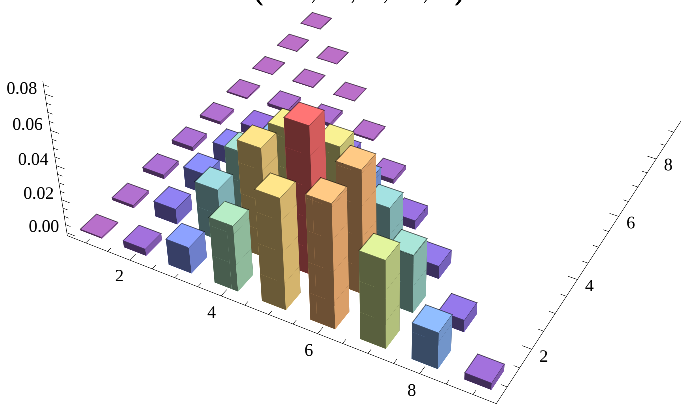
3. **Trinomial** ($n \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2 \in (0,1)$ con $p_1 + p_2 \leq 1$)

$$\mathrm{P}(X = k, Y = l) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l} p_1^k p_2^l (1 - p_1 - p_2)^{n-k-l}$$
$$= \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!} p_1^k p_2^l (1 - p_1 - p_2)^{n-k-l}.$$

El soporte $S = \{(k, l) : k, l = 0, 1, \ldots, n \text{ y } k + l \leq n\}$.

Las marginales son $X \sim \mathrm{B}(n, p_1)$ e $Y \sim \mathrm{B}(n, p_2)$.

$\mathrm{B}(10, 0{,}2, 0{,}5)$



Distribuciones multidimensionales notables (continuas)

Teorema: Producto de densidades univariadas

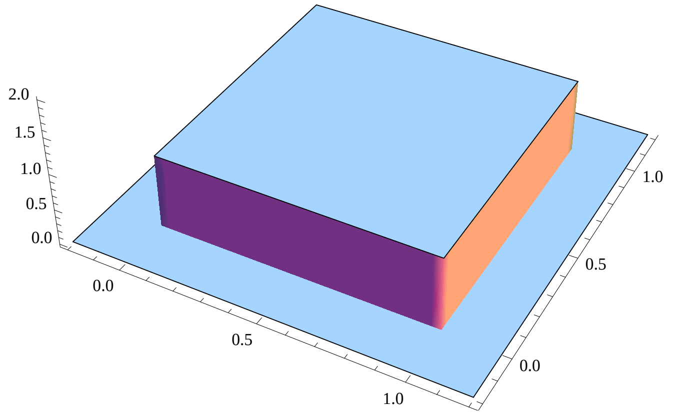
Sean f, g funciones de densidad sobre $\mathbb{R}$. La función

$$h(x,y) = f(x)g(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

es una densidad en $\mathbb{R}^2$ cuyas densidades marginales son f y g.

1. **Uniforme en el rectángulo** $(a,b) \times (c,d)$

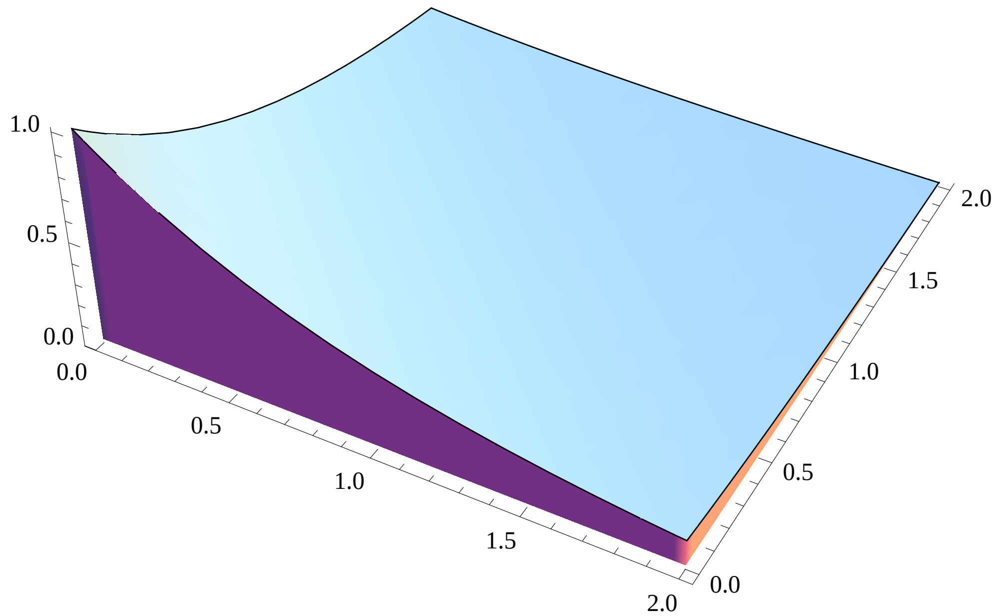
$$f(x,y) = \frac{1}{(b-a)(c-d)} 1_{(a,b)\times(c,d)}(x,y).$$



Distribuciones multidimensionales notables (continuas)

2. **Producto de exponenciales de parámetros** $\lambda, \mu > 0$

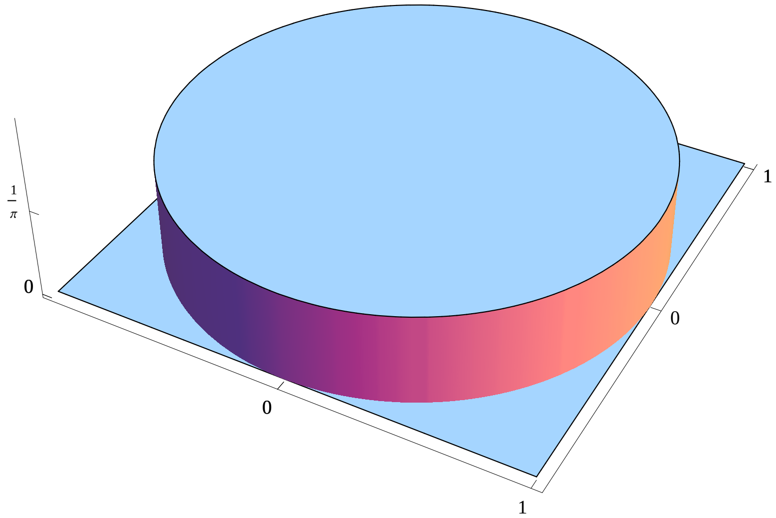
$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}, & \text{si } x,y>0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Distribuciones multidimensionales notables (continuas)

3 **Uniforme en el círculo unidad**

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/\pi, & \text{si } x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

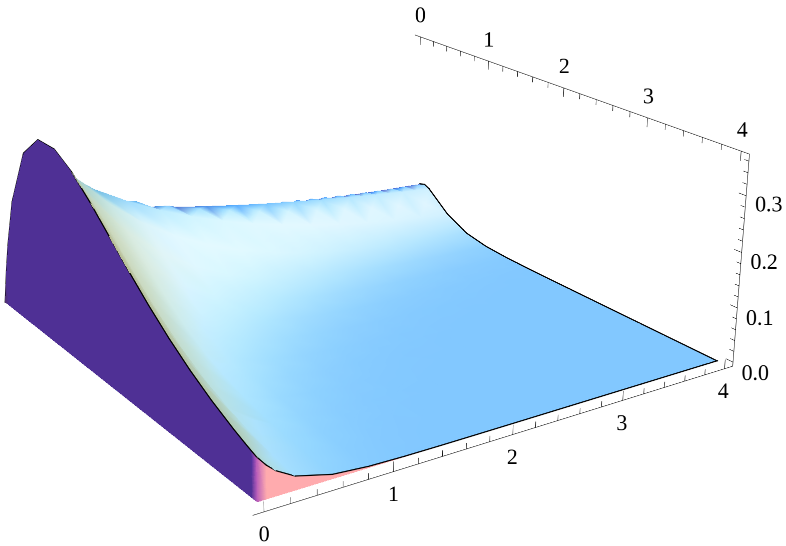


Ejercicio: Calcula las densidades marginales, $f_1(x)$ y $f_2(y)$.

Distribuciones multidimensionales notables (continuas)

4 (X, Y) con densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & \text{si } x, y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Ejercicio: Calcula las densidades marginales, $f_1(x)$ y $f_2(y)$.

5. **Normal multivariante:** El vector aleatorio $\mathbf{X}$ es **normal** (d-dimensional) con parámetros μ y Σ (notación: $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$) si tiene densidad dada por:

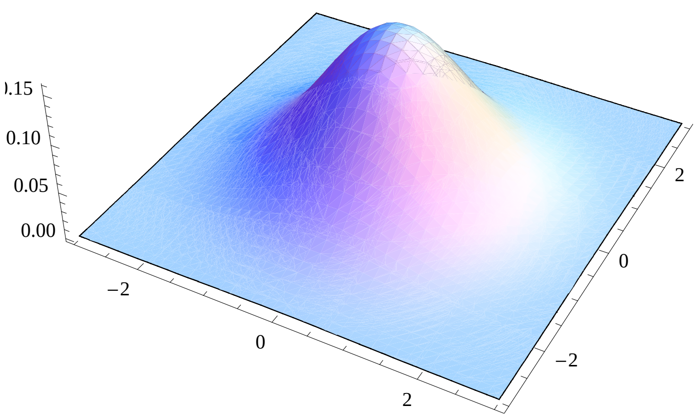
$$f(\mathbf{x}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}(2\pi)^{-d/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}.$$

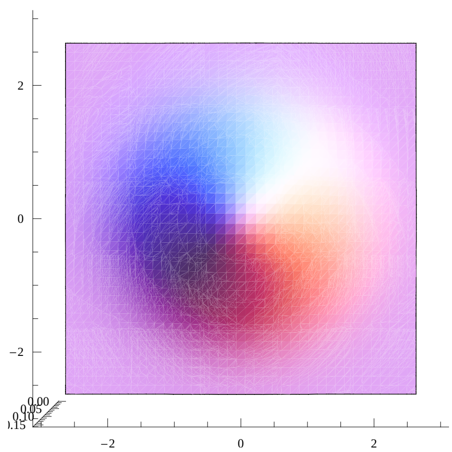
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_d \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{d1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{dd} \end{bmatrix}.$$

Nota: Se puede comprobar que las variables marginales también son normales. De hecho, $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_{ii})$.

Ejemplos de densidades normales en dimensión 2

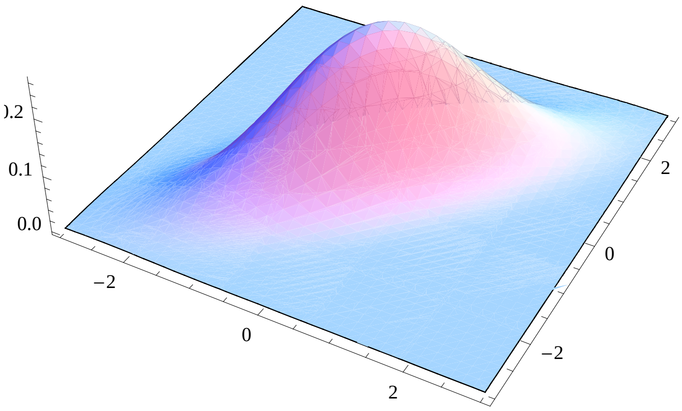
Densidad de $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\mu} = (0,0)'$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

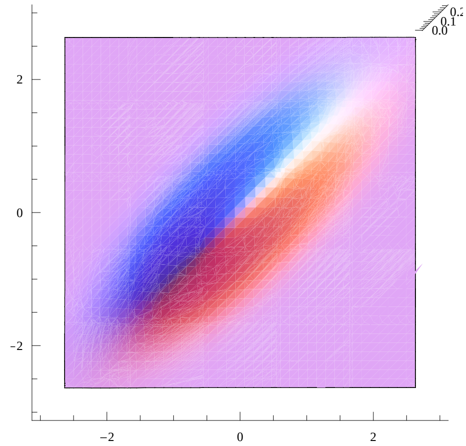




Ejemplos de densidades normales en dimensión 2

Densidad de $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\mu} = (0,0)'$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}$.





Nota: En dimensión 2, la densidad de la normal (bivariante) se suele expresar también como

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} Q(x,y)\right],$$

donde Q es la forma cuadrática

$$Q(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \\ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \end{pmatrix}.$$

Los parámetros del vector son $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y $\rho \in (-1,1)$.