Estadística II
Tercero del grado en Matemáticas, UAM, 2020-2021
Examen parcial, 4-11-2020

El valor de x para tu examen es $x =$ DDMM, donde DDMM significa día y mes de tu nacimiento (sin ceros al principio, si los hubiera). Por ejemplo, si has nacido un 9 de mayo, $x = 905$; si un 23 de noviembre, $x = 2311$.

Los argumentos que conduzcan a las respuestas numéricas han de estar escritos con detalle en las hojas que entreguéis.

Ejercicio 1.

El vector $\mathbb{X} = (X_1, X_2)^\intercal$ sigue una normal bidimensional con los siguientes parámetros:

$$\mathbb{X} \sim \mathcal{N}\Big(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} \Big),$$

donde $\mathbf{\Sigma}$ es la matriz de covarianzas (matriz 2×2, simétrica y definida positiva).

Se considera la variable

$$Z = X_1 \,|\, X_2 = 1/x$$

(X_1 condicionada a que $X_2 = 1/x$).

Se sabe que la varianza de Z es la décima parte de la varianza de X_1. ¿Cuánto vale el coeficiente de correlación entre X_1 y X_2?

Ejercicio 2.

De la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

se sabe que, además de ser simétrica, es idempotente, no es diagonal, su traza vale 2, y el vector $(x, x, x)^\intercal$ es un autovector de A. ¿De qué matriz se trata?

Ejercicio 3. Se desea contrastar (hipótesis nula) si una fuente aleatoria produce muestras aleatorias de una χ^2 con n grados de libertad, donde n es (un entero positivo) **conocido**. Se ha obtenido una muestra aleatoria de tamaño 277, y se han agrupado los resultados en el siguiente recuento:

clase	número de datos en cada clase
entre 0 y 1	51
entre 1 y 2	54
entre 2 y 3	66
entre 3 y 4	44
entre 4 y 5	22
mayores que 5	40

Se ha llevado a cabo el test de Pearson de la χ^2, y se ha determinado que el p-valor de la muestra es 7.4172 %. ¿Cuánto vale n?

Nota: si Z sigue una χ^2 con n grados de libertad,

- para cada $z > 0$, el valor de $F_Z(z) = \mathbf{P}(Z \leq z)$ se obtiene en excel como `distr.chicuad(z;n;verdadero)`;
- para cada $\alpha \in (0,1)$, el percentil $\chi^2_{\{n;\alpha\}}$ (esto es, el número z para el que $\mathbf{P}(Z > z) = \alpha$) se obtiene en excel como `inv.chicuad(1-`α`;n)`.

Ejercicio 4. Se desea contrastar (hipótesis nula) si una fuente aleatoria produce muestras aleatorias de una uniforme en $(0,1)$. Se ha obtenido la siguiente muestra de tamaño 3, que ya está ordenada de menor a mayor:

$$0.01,\ 0.02,\ z.$$

Se ha llevado a cabo el test de Kolmogorov–Smirnov, y se ha rechazado la hipótesis con nivel de significación 5 %. ¿En qué rango de valores está z?

Tablas de percentiles de la distribución de Kolmogorov–Smirnov.

$n \backslash \alpha$	0.001	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2
1		0.99500	0.99000	0.97500	0.95000	0.92500	0.90000
2	0.97764	0.92930	0.90000	0.84189	0.77639	0.72614	0.68377
3	0.92063	0.82900	0.78456	0.70760	0.63604	0.59582	0.56481
4	0.85046	0.73421	0.68887	0.62394	0.56522	0.52476	0.49265
5	0.78137	0.66855	0.62718	0.56327	0.50945	0.47439	0.44697
6	0.72479	0.61660	0.57741	0.51926	0.46799	0.43526	0.41035
7	0.67930	0.57580	0.53844	0.48343	0.43607	0.40497	0.38145
8	0.64098	0.54180	0.50654	0.45427	0.40962	0.38062	0.35828
9	0.60846	0.51330	0.47960	0.43001	0.38746	0.36006	0.33907
10	0.58042	0.48895	0.45662	0.40925	0.36866	0.34250	0.32257
11	0.55588	0.46770	0.43670	0.39122	0.35242	0.32734	0.30826
12	0.53422	0.44905	0.41918	0.37543	0.33815	0.31408	0.29573
13	0.51490	0.43246	0.40362	0.36143	0.32548	0.30233	0.28466
14	0.49753	0.41760	0.38970	0.34890	0.31417	0.29181	0.27477
15	0.48182	0.40420	0.37713	0.33760	0.30397	0.28233	0.26585
16	0.46750	0.39200	0.36571	0.32733	0.29471	0.27372	0.25774
17	0.45440	0.38085	0.35528	0.31796	0.28627	0.26587	0.25035
18	0.44234	0.37063	0.34569	0.30936	0.27851	0.25867	0.24356
19	0.43119	0.36116	0.33685	0.30142	0.27135	0.25202	0.23731
20	0.42085	0.35240	0.32866	0.29407	0.26473	0.24587	0.23152
25	0.37843	0.31656	0.30349	0.26404	0.23767	0.22074	0.20786
30	0.34672	0.28988	0.27704	0.24170	0.21756	0.20207	0.19029
35	0.32187	0.26898	0.25649	0.22424	0.20184	0.18748	0.17655
40	0.30169	0.25188	0.23993	0.21017	0.18939	0.17610	0.16601
45	0.28482	0.23780	0.22621	0.19842	0.17881	0.16626	0.15673
50	0.27051	0.22585	0.21460	0.18845	0.16982	0.15790	0.14886
OVER 50	$\frac{1.94947}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.62762}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.51743}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.35810}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22385}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.13795}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.07275}{\sqrt{n}}$