EJERCICIO 1

1) Como el refugio protege a K presas, añadimos esta constante restando a la x (presas) en los términos cruzados. En conclusión:

$$\begin{cases} X' = aX - cY(X-K) = f(x,y) \\ Y' = -bY + dY(X-K) = g(x,y) \end{cases}$$

2) Nullclinas para $x'=0$:

$$ax - cy(x-K) = 0 \Rightarrow ax = cy(x-K) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{ax}{c(x-K)}}$$

Nullclinas para $y'=0$:

$$-by + dy(x-K) = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

$$-b + d(x-K) = 0 \Rightarrow xd - Kd = b \Rightarrow \boxed{x = \frac{b}{d} + K}$$

Los puntos críticos son donde se cortan las nullclinas:

$$\begin{cases} ax - cy(x-K) = 0 \\ -by + dy(x-K) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$ claramente $(0,0)$ es punto crítico

Para el resto: $x = \frac{b}{d} + K$

$$a\left(\frac{b}{d}+K\right) - cy\left(\frac{b}{d}+K-K\right) = 0 \Rightarrow a\left(\frac{b}{d}+K\right) = cy\left(\frac{b}{d}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{a(b+dK)}{cb}$$

Sólo hay otro pto. crítico (aparte del $(0,0)$):

$$P_2 = \left(\frac{b}{d} + K, \ \frac{a(b+dK)}{cb}\right)$$

3) Linealizamos:

$f_x = a - cy$ $\qquad$ $f_y = -c(x-K)$

$g_x = dy$ $\qquad$ $g_y = -b + dx - dK$

Primer punto crítico: $P_1 = (0,0)$

$$\begin{pmatrix} a & cK \\ 0 & -b-dK \end{pmatrix}$$

como el determinantes es menor que cero

$a.(-b-dK) < 0 \implies \boxed{\text{PUNTO DE SILLA}}$

Segundo punto crítico: $P_2 = \left(\frac{b}{d} + K, \ \frac{a(b+dK)}{cb}\right)$

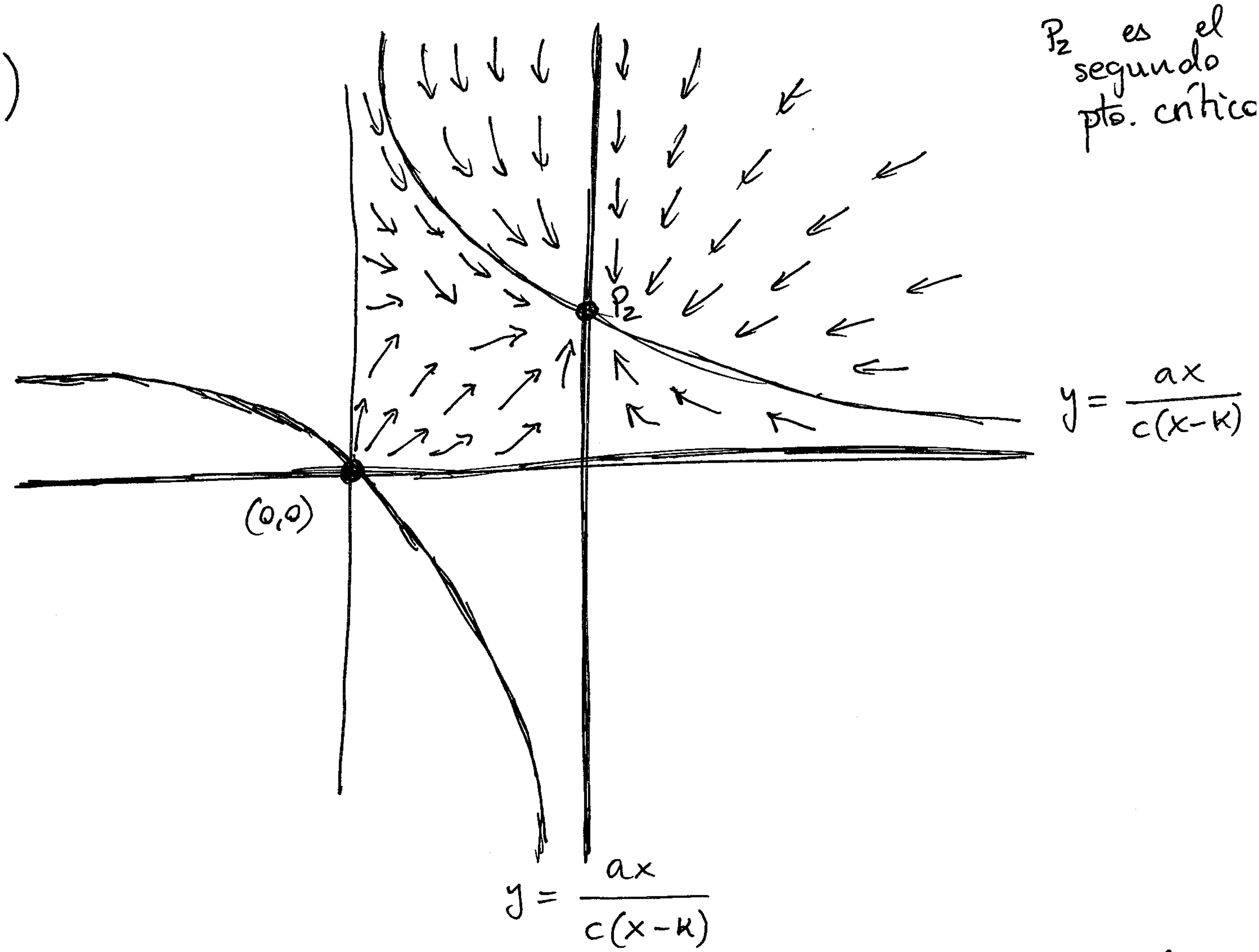
$$\begin{pmatrix} a - \frac{a(b+dK)}{b} & -c \cdot \frac{b}{d} \\ \frac{ad(b+dK)}{cb} & 0 \end{pmatrix}$$

Traza: $a - \dfrac{ab + adK}{b} = a - a - \dfrac{adK}{b} = \dfrac{-adK}{b} < 0$

Determinante: $-\left[\dfrac{ad(b+dK)}{cb} \cdot \left(-\dfrac{cb}{d}\right)\right] = a(b+dK) > 0$

Usando esto podemos sostener que $\boxed{P_2 \text{ es asintótic. estable.}}$

4)



Hemos dibujado las tres nullclinas en todo el plano pero las trayectorias sólo en el primer cuadrante.

EJERCICIO 2

1) Sustituimos la parametrización en la ecuación:

$$a^2u^2\cos^2(v) + a^2u^2\mathrm{sen}^2(v) = b^2u^2\tan^2\theta$$

$$a^2u^2 = b^2u^2\tan^2\theta \implies \boxed{\tan\theta = \frac{a}{b}}$$

2) $$\frac{\partial r}{\partial u} = (a\cos(v),\ a\,\mathrm{sen}(v),\ b)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-au\,\mathrm{sen}(v),\ au\cos(v),\ 0)$$

$$E = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u} \right\rangle = a^2\cos^2(v) + a^2\mathrm{sen}^2(v) + b^2 = a^2 + b^2$$

$$F = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle = -a^2u\cancel{\cos(v)}\mathrm{sen}(v) + a^2u\cancel{\cos(v)}\mathrm{sen}(v) + 0 = 0$$

$$G = \left\langle \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle = a^2u^2\mathrm{sen}^2(v) + a^2u^2\cos^2(v) = a^2u^2$$

Primera forma fundamental: $\boxed{ds^2 = (a^2+b^2)\,du^2 + a^2u^2\,dv^2}$

Ahora ponemos $dv^2 = v'^2(u)\,du^2$

$$\Rightarrow ds^2 = (a^2+b^2)\,du^2 + a^2u^2\,v'^2(u)\,du^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = \left((a^2+b^2) + a^2u^2v'^2(u)\right)du^2$$

Así el funcional es:

$$L = \int \sqrt{a^2+b^2+a^2u^2v'^2(u)}\,du$$

(longitud de una curva $(u, v(u))$)

3) Ahora la v es cíclica, por lo que podemos usar la ecuación de Euler-Lagrange (que nos resulta en conseguir una integral primera)

$$\frac{\partial L}{\partial v'} = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+a^2u^2v'^2(u)}} \cdot \left(2a^2u^2v'(u)\right) = c$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial v'} = \frac{a^2u^2\,v'(u)}{\sqrt{a^2+b^2+a^2u^2v'^2(u)}} = c$$

4) $a^2u^2\,v'(u) = c\sqrt{a^2+b^2+a^2u^2v'^2(u)}$

$$a^4u^4\,v'^2(u) = c^2\left(a^2+b^2+a^2u^2\,v'^2(u)\right)$$

$$\cancel{v'(u) = \sqrt{\frac{c^2\left(a^2+b^2+a^2u^2v'^2(u)\right)}{a^4v^4}} = \frac{c}{a^2v^2}\sqrt{a^2+b^2+a^2u^2}}$$

$$a^4u^4\,v'^2(u) = a^2c^2 + b^2c^2 + c^2a^2u^2\,v'^2(u)$$

$$a^4u^4v'^2(u) - c^2a^2u^2\,v'^2(u) = a^2c^2 + b^2c^2$$

$$v'^2(u)\left[a^4u^4 - c^2a^2u^2\right] = a^2c^2 + b^2c^2$$

$$v'^2(u) = \frac{a^2c^2+b^2c^2}{a^4u^4-c^2a^2u^2} \Longrightarrow v'(u) = \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2c^2}{a^4u^4-c^2a^2u^2}}$$

$$v = \int \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2c^2}{a^4u^4-c^2a^2u^2}}\,du = \cdots$$

llegaríamos a las geodésicas del cono (paralelos)

EJERCICIO 3

1) Calculamos los ptos. críticos ≡ ptos. fijos

$$X = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ X_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Para la estabilidad calculamos su derivada: $f'(x) = -2X$

$$|f'(x_1)| = |-\sqrt{5}+1| \simeq 1'24 > 1 \Rightarrow x_1 \text{ repulsor}$$

$$|f'(x_2)| = |1+\sqrt{5}| \simeq 3'24 > 1 \Rightarrow x_2 \text{ repulsor}$$

2) Los 2-ciclos son los puntos fijos de $f^2 = f \circ f$.

$$1-(1-x^2)^2 = 1-(1-2x^2+x^4) = 2x^2 - x^4$$

$$2x^2 - x^4 = x \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$ estos son los 2-ciclos

Calculando el exponente de Liapunov:

$$m = f'(x_1) \cdot f'(x_2) \cdot f'(x_3) \cdot f'(x_4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \ln|m| = \ln 0 \quad \text{no existe}$$

3) Calculando f^3:

$$1-(2x^2-x^4)^2 = x \implies$$ las soluciones de esta ecuación (usando la calculadora) están en el plano complejo (menos los ptos. críticos del ~~1~~)

$\Rightarrow$ No hay 3-ciclos.