Ejercicios 53 a 56

53. Dado $a \in \mathbb{R}$, considérese la función

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definida

$$f(x,y) = \big(x_1^3 + x_2^3 - 3\,a\,x_1\,x_2\,,\,y\,x_1 - x_2\big)\,, \qquad x = (x_1\,,x_2) \in \mathbb{R}^2\,, y \in \mathbb{R}\,.$$

1. Hallar un abierto $A \subset \mathbb{R}$ y una función $g : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f\big(g(y)\,,y\big) = 0\,, \qquad y \in A\,.$$

2. Determinar los $(x\,,y) \in \mathbb{R}^3$ para los que

$$\mathbf{M}(x,y) = \left[\frac{\partial f(x\,,y)}{\partial x}\right] \quad \text{no es invertible.}$$

   Confrontar esta situación con las hipótesis del Teorema de la Función Implícita.

3. Hallar un abierto $B \subset \mathbb{R}$ y una función $h : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{cases} \det \mathbf{M}\big(h(y)\,,y\big) = 0\,, \\ y\,h_1(y) - h_2(y) = 0\,. \end{cases}$$

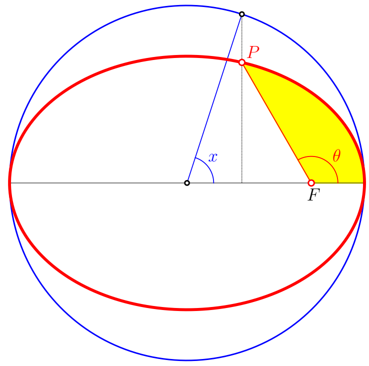
   Calcular $f_1\big(h(y)\,,y\big)$ para los $y \in B$.

4. Utilizar coordenadas polares para representar gráficamente en $\mathbb{R}^2$ las curvas dadas por g y h.

54. *La ecuación de* Kepler se puede escribir en la forma

$$x = y_1 + y_2 \sin x\,, \tag{12}$$

entendiendo x como incógnita e $y = (y_1\,,y_2)$ como parámetro. En la descripción del movimiento planetario, x representa la anomalía excéntrica, y_1 es proporcional al tiempo e y_2 es la excentricidad de la elipse. En consecuencia, tomamos $\Omega = \big\{\, y \in \mathbb{R}^2 \,:\, |y_2| < 1 \,\big\}$ como espacio de parámetros.



A.

1. Demostrar que (12) tiene una solución única $x = g(y)$ cuando $y \in \Omega$. Demostrar que la función $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es $C^\infty(\Omega)$.

2. Comprobar que

$$g(\pi\,, y_2) = \pi\,, \quad g(y_1 + 2\pi\,, y_2) = g(y) + 2\pi\,, \qquad y \in \Omega\,.$$

3. Comprobar que

$$g(-y_1\,, y_2) = -\,g(y_1\,, y_2)\,, \quad g(0\,, y_2) = 0\,, \qquad |y_2| < 1\,.$$

También
$$\frac{\partial^{2k}\, g(0\,, y_2)}{\partial\, y_1^{2k}} = 0\,, \qquad |y_2| < 1\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

4. Calcular
$$\frac{\partial\, g(y)}{\partial y_1}$$
para cada $y \in \Omega$.

B. Consideremos ahora el caso $y_2 = 1$. Demostrar que existe una única función
$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
tal que $x = h(y_1)$ es solución de (12). Demostrar que $h(0) = 0$ y que h es continua.

Demostrar que

$$y_1 = \frac{x^3}{6}\left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right)\,, \quad \text{cuando} \quad x \to 0\,,$$

y deducir que se verifica
$$\lim_{y_1 \to 0} \frac{h(y_1)}{(6\, y_1)^{1/3}} = 1\,.$$
En particular, obtener que h no es diferenciable en $y_1 = 0$.

55. Dados $b > 0$ y una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tales que

$$f(0) \neq -1 \,, \qquad \int_0^b f(t)\, dt = 0 \,,$$

demostrar que la ecuación

$$x = \int_x^a f(t)\, dt$$

tiene, para a suficientemente próximo a b, solución única $x = g(a)$ con $g(a)$ próximo a 0. Demostrar que g es una función C^1 y calcular $g'(b)$.

¿Cómo cambia lo anterior cuando $b = 1$ y $f(t) = -1 + 2\,t$?

56. Considérese la ecuación

$$x^3\, y_1 + x^2\, y_1\, y_2 + x + y_1^2\, y_2 = 0 \,, \tag{13}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ e $y = (y_1 \,, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Demostrar que existen abiertos Ω en $\mathbb{R}^2$, con $y_0 = (-1 \,, 1) \in \Omega$ y U en $\mathbb{R}$ con $x_0 = 1 \in U$, tales que para cada $y \in \Omega$ la ecuación (13) tiene una única solución $x = g(y) \in U$. Demostrar que la función $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \subset \mathbb{R}$ es de clase C^∞ en Ω.
2. Calcular
$$\nabla g(y_0) \,, \qquad \frac{\partial^2\, g(y_0)}{\partial\, y_1\, y_2} \,.$$
3. Demostrar que no existen abiertos $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ con $y_0 \in \Omega'$ y $U' \subset \mathbb{R}$ con $-1 \in U'$, tales que para cada $y \in \Omega'$ la ecuación (13) tiene solución *única* en U'.