Entregar por escrito el Jueves 27. Los ejercicios pueden hacerse en grupo; entregar en grupo, escribiendo por orden alfabético los nombres de todos los participantes, no penaliza.

Se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra.

1) Sea X una v.a. con distribución $N(0,1)$ (normal con media 0 y varianza 1). Calcular el tercer momento $E(X^3)$.

2) Lanzamos una moneda equilibrada $2n$ veces, usando $X_i = 1$ si sale cara en el i-ésimo lanzamiento, $X_i = 0$ si sale cruz. Estimar $P((X_1 + \cdots + X_{2n})/2n = 1/2)$ para $n \gg 1$. Sugerencia: usar la fórmula de Stirling. Precisar el significado de "cabe esperar que $(X_1 + \cdots + X_{2n})/2n \approx 1/2$".

3) Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ la sub-σ-álgebra generada por una partición $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de Ω, donde todos los conjuntos de la partición tienen probabilidad positiva. Dada una v.a. X, demostrar que si la variable aleatoria Y satisface
1) para todo $B \in \mathcal{B}$, $\int_B Y dP = \int_B X dP$, y
2) Y es $\mathcal{B}$-medible,
entonces cuando $w \in A_i$, tenemos $Y(w) = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X dP$.
Probar que si $Y(w)$ está definida mediante $Y(w) := \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X dP$ cuando $w \in A_i$, entonces Y satisface las condiciones 1) y 2) enunciadas arriba.
Este ejercicio demuestra que las condiciones 1) y 2) determinan de modo único la esperanza condicional, cuando la sub-σ-álgebra está generada por una partición finita cuyos conjuntos tienen probabilidad positiva (el resultado también es cierto para sub-σ-álgebras arbitrarias, pero entonces es necesario definir la esperanza condicional mediante un procedimiento distinto).

4) En un examen tipo test se plantean 5 preguntas para responder verdadero o falso. Los puntos asignados a las preguntas V o F son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo del problema: 0 puntos. Es decir, si la puntuación es negativa se asigna un cero al problema.
a) Calcular la nota esperada de un alumno que responda a las 5 perguntas de manera aleatoria, por ejemplo lanzando una moneda equilibrada 5 veces.
b) Sabiendo que el alumno ha respondido correctamente a la primera pregunta, calcular la nota esperada.

5) Lanzamos una moneda lastrada, con probabilidad de sacar cara igual a 3/5. Si sale cara lanzamos un dado equilibrado con cuatro caras numeradas del 1 al 4, y si sale cruz lanzamos un dado equilibrado con seis caras numeradas del 1 al 6. Sea Y el número obtenido. Denotando $X = 1$ si sale cara, $X = 0$ si sale cruz, hallar a) $E(Y|\sigma(X))$, y b) $E(Y)$. Comentario: con frecuencia la notación $E(Y|\sigma(X))$ se abrevia, usando $E(Y|X)$ en su lugar.

6) Lanzamos un dado equilibrado de 4 caras dos veces. Sea W la variable aleatoria que toma como valor el máximo de los dos lanzamientos. A continuación lanzamos una moneda equilibrada W veces, usando S para denotar el número de caras obtenido. Todos los lanzamientos son independientes.
a) Hallar $E(S|W)$.
b) Hallar $E(S)$.

7) Cómo ganar un euro con probabilidad 1, en un juego justo: la estrategia del doble o nada. Jugando con una moneda equilibrada, apostamos un euro a que sale cara. Si sale cara nos plantamos, si sale cruz apostamos 2 euros a que sale cara. Si sale cara nos plantamos, si sale cruz apostamos 4 euros a que sale cara, etcétera. Demostrar que la estrategia anterior gana un euro con probabilidad 1.

8) Probar la desigualdad de Jensen: si $X : \Omega \to I \subset \mathbb{R}$, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$, y X tiene media finita, entonces para toda función convexa $g : I \to \mathbb{R}$, $g(EX) \leq E(g(X))$. Comentario: el caso particular $g(t) = t^2$ es consecuencia de la no negatividad de la varianza. Sugerencia: si $L(t) := at + b$ es una recta, entonces conmuta con la integración: $L(\int X(\omega)dP(\omega)) = \int L(X(\omega))dP(\omega)$. La desigualdad de Jensen es consecuencia de esta observación, junto con el hecho de que las funciones convexas están por encima de todas sus rectas soporte.