PROBABILIDAD II

Grado en Matemáticas

Tema 2
Independencia

Javier Cárcamo

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
javier.carcamo@uam.es

Tema 2: Independencia

1. Independencia de sucesos
2. Teorema fundamental de la independencia
3. Límite inferior y superior
4. Lemas de Borel-Cantelli
5. La Ley 0-1 de Kolmogorov

Definición: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad. Dos sucesos $A, B \in \mathcal{F}$ se dicen **independientes** si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

Notación: $AB = A \cap B$. (A, B indep. sii $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.)

Observaciones:

- Si $\mathrm{P}(A) = 0$, entonces A y B ind. para todo $B \in \mathcal{F}$.
- Si $\mathrm{P}(A) = 1$, entonces A y B ind. para todo $B \in \mathcal{F}$.
- Si A y B ind. con $\mathrm{P}(B) > 0$, entonces $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$.

  Nota: Si A y B son independientes, la ocurrencia de uno no altera la probabilidad de que ocurra el otro (y al revés). Justamente ésta es la idea detrás de la definición de independencia.
- Si A y B ind., entonces: A, B^c ind.; A^c, B ind.; y A^c, B^c ind.

Ejemplo: Las extracciones sucesivas de bolas con reemplazamiento son independientes. $(P(B_2|B_1) = P(B_2))$. Sin embargo, las extracciones sucesivas de bolas sin reemplazamiento *no* son independientes $(P(B_2|B_1) \neq P(B_2))$.

Definición: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad. Tres sucesos $A, B, C \in \mathcal{F}$ se dicen **(mutuamente) independientes** si:

- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.
- $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$.
- $\mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.
- $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.

Observación: $A, B, C \in \mathcal{F}$ son independientes sii $(*)$ y $(**)$.

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \\ \mathrm{P}(AC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) \\ \mathrm{P}(BC) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) \end{array} \right\} \quad \{A, B, C\} \text{ ind. dos a dos}$$

$$(**) \qquad \mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

Observación: $(*) \not\Rightarrow (**)$ y $(**) \not\Rightarrow (*)$.

Observación: $A, B, C \in \mathcal{F}$ son independientes sii $(*)$ y $(**)$.

$(*)$ $\{A, B, C\}$ independientes dos a dos.
$(**)$ $\mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.

Observación: $(*) \not\Rightarrow (**)$ y $(**) \not\Rightarrow (*)$.

Contraejemplo 1: $(*) \not\Rightarrow (**)$

$(\Omega = \{a, b, c, d\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ modelo de Laplace.

(Los sucesos elementales $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ y $\{d\}$ son equiprobables.)

$A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ y $C = \{c, a\}$ son independientes dos a dos, pero *no* son (mutuamente) independientes.

Contraejemplo 2: $(**) \not\Rightarrow (*)$

$(\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ modelo de Laplace.

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a_1, a_3, a_5, a_7\}$, $C = \{a_1, a_2, a_4, a_8\}$ verifican $(**)$, pero no son independientes dos a dos.

Definición: Sea $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$. Se dice que los sucesos $\{A_i\}_{i\in I}$ son **(mutuamente) independientes** si

$$\forall \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\} \subset \{A_i\}_{i\in I},\ \mathrm{P}(A_{i_1} \cdots A_{i_n}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_n}).$$

En particular, n sucesos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ son independientes sii:

- $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)$.
- $\mathrm{P}(A_1 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_3)$.

$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots$

- $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3)$.
- $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_4)$.

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n)$.

Pregunta: Comprobar la independencia de algunos sucesos puede ser una tarea complicada. ¿Cuántas condiciones debemos comprobar para asegurar que $\{A_1, \ldots, A_n\}$ son independientes?

Proposición: $\{A_i\}_{i\in I}$ independientes $\Longrightarrow$ $\{A_i^c\}_{i\in I}$ independientes.

Teorema fundamental de la independencia

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad.
Un familia $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ de clases (no vacías) de sucesos se dice que es una **familia de clases independientes de sucesos (f.c.i.s.)** si para cada elección $\{C_i : C_i \in \mathcal{C}_i,\ i \in I\}$, los sucesos $\{C_i\}_{i \in I}$ son independientes. Es decir, si para cada colección finita $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$, se verifica $\mathrm{P}(C_{i_1} \cdots C_{i_k}) = \mathrm{P}(C_{i_1}) \cdots \mathrm{P}(C_{i_k})$.

Observación: A, B independientes, entonces $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ f.c.i.s.

Definición: Una colección $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ es un π-**sistema** si

(a) $\Omega \in \mathcal{C}$.

(b) $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $AB \in \mathcal{C}$ (estable para intersecciones finitas).

Teorema fundamental de la independencia

Sean $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{F}$ π-sistemas.

$$\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \text{ f.c.i.s.} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{C}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{C}_n) \text{ f.c.i.s.}$$

Teorema fundamental de la independencia

Aplicaciones:

1. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ independientes. $\mathcal{C}_i = \{A_i, \Omega\}$ π-sistema. Por el TFI, las clases $\sigma(\mathcal{C}_i) = \{\emptyset, A_i, A_i^c, \Omega\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ f.c.i.s.
2. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ y f.c.i.s. Demostrad usando el TFI que $\mathcal{F}_I = \sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ y $\mathcal{F}_{II} = \sigma(\mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4 \cup \mathcal{F}_5)$ son también f.c.i.s.

Ejemplo concreto: A, B, C, D, E sucesos independientes. Las σ-álgebras $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \ldots, \mathcal{F}_5 = \{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$ son f.c.i.s. En particular, $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ y $\sigma(\mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4 \cup \mathcal{F}_5)$ son también f.c.i.s. Por ejemplo, los sucesos AB^c y $C \cup (D - E)$ son independientes.

Corolario: Teorema de agrupamiento

Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ familia independiente de σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Consideremos $\{I_j\}_{j \in J}$ partición de I y $\mathcal{F}_{I_j} = \sigma\left(\bigcup_{i \in I_j} \mathcal{F}_i\right)$. Se tiene que

$$\{\mathcal{F}_{I_j}\}_{j \in J} \text{ es una familia independiente de } \sigma\text{-álgebras.}$$

(a) Límite inferior y superior de sucesiones de números reales.
(b) Límite inferior y superior de sucesiones de funciones.
(c) Límite inferior y superior de sucesiones de conjuntos.

(a) Límite inferior y superior de sucesiones de números reales

Sea $\{a_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Formamos la sucesión:

$$\left\{\begin{array}{lcl} b_1 & = & \sup_{k\geq 1} a_k \\ b_2 & = & \sup_{k\geq 2} a_k \\ \vdots & & \vdots \\ b_n & = & \sup_{k\geq n} a_k \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$$

$\{b_n\}$ es una sucesión decreciente en $\overline{\mathbb{R}}$. Por tanto, existe $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\geq 1} b_n$. Se define el **límite superior de** $\{a_n\}$ como

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right).$$

Sea $\{a_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Formamos la sucesión:

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1 & = & \inf_{k\geq 1} a_k \\ c_2 & = & \inf_{k\geq 2} a_k \\ \vdots & & \vdots \\ c_n & = & \inf_{k\geq n} a_k \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \quad c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots \leq c_n \leq \cdots$$

$\{c_n\}$ es una sucesión creciente en $\overline{\mathbb{R}}$. Por tanto, existe $\lim_{n\to\infty} c_n = \sup_{n\geq 1} b_n$. Se define el **límite inferior de** $\{a_n\}$ como

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right).$$

Ejercicio: Calcular el límite superior e inferior de las siguientes sucesiones: $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$; $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$; $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_{2n-1} = 1$ y $a_{2n} = 0$.

Propiedades: Entendemos que $n \to \infty$.

1. $\liminf a_n = -\limsup(-a_n)$; $\quad \limsup a_n = -\liminf(-a_n)$.
2. $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.
3. $\liminf a_n = \limsup a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff$ existe $\lim a_n = l$.
4. $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$ con $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces
   - $\limsup a_n \leq \limsup b_n$,
   - $\liminf a_n \leq \liminf b_n$.
5. $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, entonces
   - $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$,
   - $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$,

   siempre y cuando $\{a_n + b_n\}$ esté bien definida y los miembros de la derecha están bien definidos.

(b) Límite inferior y superior de sucesiones de funciones

Sea $\{f_n\}$ con $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se definen la función **límite superior de** $\{f_n\}$ como $\limsup_{n\to\infty} f_n$ tal que

$$\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(\omega) = \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Análogamente, el **límite inferior de** $\{f_n\}$ es $\liminf_{n\to\infty} f_n$ tal que

$$\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(\omega) = \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

(c) Límite inferior y superior de sucesiones de conjuntos.

Ω conjunto. $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$ parcialmente ordenado. $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

- $A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, $i \in I$. $\bigcup_{i\in I} A_i$ es cota superior de $\{A_i\}_{i\in I}$.
- Si $A_i \subset B$, $i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \subset B$. $\bigcup_{i\in I} A_i$ es la menor cota superior.

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \sup_{i\in I} A_i. \quad \left(\text{Análogamente} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \inf_{i\in I} A_i.\right)$$

Definición: Dada $\{A_n\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, se definen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} A_k\right).$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} A_k\right).$$

Propiedades: Entendemos que $n \to \infty$.

1. $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow \limsup A_n$ y $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \uparrow \liminf A_n$.
2. **Caracterización por elementos:**
   - $\omega \in \limsup A_n \iff \omega \in A_n$ para infinitos n-s.
   - $\omega \in \liminf A_n \iff \omega \in A_n$ $n \geq n_0$ (para casi todo n).
3. **Interpretación:** $\{A_n\} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \limsup A_n, \liminf A_n \in \mathcal{F}$.
   - $\limsup A_n =$ que ocurran infinitos A_n.
   - $\liminf A_n =$ que ocurran casi todos los A_n (que ocurran todos salvo un número finito de ellos).
4. $\limsup A_n = (\liminf A_n^c)^c$, $\liminf A_n = (\limsup A_n^c)^c$.
5. $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Definición: $\{A_n\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. $A_n \to A$ si $\limsup A_n = \liminf A_n = A$.

Ejercicio: Si $A_n \uparrow A$ ó $A_n \downarrow A$, entonces $A_n \to A$.

Teorema: Sea $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$. Se tiene,

$$\mathrm{P}(\text{lím inf } A_n) \leq \text{lím inf } \mathrm{P}(A_n) \leq \text{lím sup } \mathrm{P}(A_n) \leq \mathrm{P}(\text{lím sup } A_n).$$

Teorema: 1$^{\text{er}}$ Lema de Borel-Cantelli

Sea $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$.

$$\text{Si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty, \quad \text{entonces} \quad \mathrm{P}(\text{lím sup } A_n) = 0.$$

Teorema: 2$^{\text{ndo}}$ Lema de Borel-Cantelli

Sea $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ independientes.

$$\text{Si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \infty, \quad \text{entonces} \quad \mathrm{P}(\text{lím sup } A_n) = 1.$$

$\{\mathcal{F}_n\}$ sucesión de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Consideramos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}^1 = \sigma\left(\bigcup_{i\geq 1} \mathcal{F}_i\right) \\ \mathcal{F}^2 = \sigma\left(\bigcup_{i\geq 2} \mathcal{F}_i\right) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ \mathcal{F}^n = \sigma\left(\bigcup_{i\geq n} \mathcal{F}_i\right) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \end{array} \right\} \quad \mathcal{F}^1 \supseteq \mathcal{F}^2 \supseteq \mathcal{F}^3 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}^n \supseteq \cdots.$$

$$\mathcal{F}^n \downarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^k = \mathcal{F}^\infty \quad \text{es} \quad \sigma\text{-álgebra}$$

Definición: $\mathcal{F}^\infty$ se llama **σ-álgebra asintótica (relativa a $\{\mathcal{F}_n\}$)**.
Si $A \in \mathcal{F}^\infty$, A se llama **suceso asintótico**.

Ejemplo: $\{\mathcal{F}_n\} \subset \mathcal{F}$ y $A_n \in \mathcal{F}_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$\text{lím sup } A_n \in \mathcal{F}^\infty \quad \text{y} \quad \text{lím inf } A_n \in \mathcal{F}^\infty.$$

Observación: $\mathcal{F}^\infty$ no depende de lo que ocurra al principio.

$\{\mathcal{F}_n\} \subset \mathcal{F}$ con $\mathcal{F}^\infty$ σ-álgebra asintótica. Si $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ se cambia por $\mathcal{F}'_1, \ldots, \mathcal{F}'_k$, la σ-álgebra asintótica de $\mathcal{F}'_1, \ldots, \mathcal{F}'_k, \mathcal{F}_{k+1}, \ldots$ es $\mathcal{F}^\infty$.

Teorema: Ley 0-1 de Kolmogorov

Sea $\{\mathcal{F}_n\} \subset \mathcal{F}$ familia independiente de sub-σ-álgebras.

$$\text{Para todo } A \in \mathcal{F}^\infty, \text{ se tiene} \quad \mathrm{P}(A) = 0 \text{ ó } 1.$$

Ejemplo: Si $A_1, A_2, \ldots$ son independientes, entonces $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$ o $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1$.

En este caso, los lemas de Borel-Cantelli son más informativos porque dan un criterio que permite saber cuándo estamos en una u otra situación.