HOJA 4

GIRONDO

1. i) X conexo $\Longleftrightarrow \nexists\, f: X \to \{0,1\}$ cont. y sobre. con la top. discreta

$\Updownarrow$ lo mismo que demostrar

i) X no conexo $\Longleftrightarrow \exists\, f: X \longrightarrow \{0,1\}$ cont. y sobre. con la top. discreta.

$\boxed{\Longrightarrow}$

X no conexo $\Longrightarrow X = \underset{\neq \emptyset}{U} \cup \underset{\neq \emptyset}{V}$, U, V abtos $\wedge$ $U \cap V = \emptyset$

Podemos definir $f: X \longrightarrow \{0,1\}$

$x \longmapsto 0$ si $x \in U$

$x \longmapsto 1$ si $x \in V$

$\boxed{\Longleftarrow}$

Sea $U = f^{-1}(\{0\})$, $V = f^{-1}(\{1\})$

Como f es continua U, V son abiertos.

Además, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$, por ser f sobre.

$\Longrightarrow X$ no conexo. ∎

ii) Probar: S subconjunto conexo de X y $S \subset K \subset \bar{S} \Longrightarrow K$ conexo.

Supongamos K no conexo $\Longrightarrow \exists f: K \longrightarrow \{0,1\}$ cont. y sobre.

Definimos $g = f|_S : S \longrightarrow \{0,1\}$

g es continua por ser la restricción de una continua.

Si g es sobre, S sería no conexo; veamos en qué falla:

Supongamos $g(x) = 0 \ \forall x \in S$ (S dominio de g) $f(x) = 0 \ \forall x \in S$.

Como f es sobre $\exists c \in K$ tal que $f(c) = 1 \Longrightarrow c \in \underbrace{f^{-1}(\{1\})}_{= U}$

Este U es abierto (f cont.) que contiene a $c \in K$

pero $U \cap S = \emptyset$ porque $\forall x \in S$ $f(x) = 0$, que contradice $S \subset K \subset \bar{S}$

$\Longrightarrow K$ conexo. ∎

2. i) $A_1, \dots, A_n$ conexos y $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset \Rightarrow A = \bigcup_{j=1} A_j$ ...

Supongamos que $A \subset \underset{\neq \emptyset}{U} \cup \underset{\neq \emptyset}{V}$ abiertos.

Como A_1 es conexo $\Rightarrow \begin{cases} A_1 \subset U \\ A_1 \cap V = \emptyset \end{cases}$ ó $\begin{matrix} A_1 \subset V \\ A_1 \cap U = \emptyset \end{matrix}$ (s.p.d.g. sup. que $A_1 \subset U$)

Como A_2 es conexo y $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \Rightarrow A_2 \cap V = \emptyset \wedge A_2 \subset U$

$\vdots$

Como A_n es conexo y $A_{n-1} \cap A_n \neq \emptyset \Rightarrow A_n \cap V = \emptyset \wedge A_n \subset U$

$\Rightarrow A \subset U \wedge A \cap V = \emptyset \Rightarrow A$ conexo.

Esto se generaliza a un conjunto numerable por inducción.

↳ falso (inducción es para finito sólo)

ii) Sea $\bar{A} = \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\right) \cup A$ [RECUERDA: $A_\alpha \cap A \neq \emptyset \ \forall \alpha \in \Lambda$]

Supongamos que $\bar{A} \subset \overset{\emptyset}{\underset{}{\not{}}}\!\!\overset{\neq \emptyset}{U} \cup \overset{\neq \emptyset}{V}$ y $\bar{A} \cap U \cap V = \emptyset$

Como $A \subset \bar{A} \Rightarrow A \cap U \cap V = \emptyset$ y como $\bar{A} \subset U \cup V \Rightarrow \left.\begin{matrix} A \subset U \\ \text{ó} \\ A \subset V \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

s.p.d.g. $\Rightarrow A \subset U \wedge A \cap V = \emptyset$ · [*]

Como $A \cap A_\alpha \ \forall \alpha \in \Lambda$ y por [*] $\Rightarrow A_\alpha \subset U \quad A_\alpha \cap V = \emptyset \ \forall \alpha \in$

$\Rightarrow \bar{A} \subset U \wedge \bar{A} \cap V = \emptyset \Rightarrow \bar{A}$ conexo. ∎

$\boxed{3.}$ i) $\underset{\text{conexo}}{I} \subset \mathbb{R}$ intervalo $\qquad f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$X := \{(x, f(x)) : x \in I\} \subset I \times \mathbb{R}$

La aplicación $\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, f(x)) \end{array}$ es continua

$X = \overset{\text{continua}}{F}(\underset{\text{conexo}}{I}) \Longrightarrow X$ conexo.

OTRA POSIBLE FORMA: $\begin{array}{ccc} g: I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, f(x)) \end{array}$ continua

Supongamos que $g(I)$ no es conexo, e.d., $\exists\, \overset{\neq\emptyset}{U}, \overset{\neq\emptyset}{V}$ abtos. subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tales que $U \cap V = \emptyset \wedge U \cup V = g(I)$

$g^{-1}(U) = \pi_1(U)$ abto. en I

$g^{-1}(V) = \pi_1(V)$ abto. en I

$g^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) = \emptyset$ abtos en I, que contradice que I es conexo en $\mathbb{R}$.

ii) Caso particular ej. 2 ii).

4.1

i) $f: X \longrightarrow Y$ homeomorfismo

$g: X\setminus\{x_1,\dots,x_n\} \longrightarrow Y\setminus\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$ ¿homeomorfismo?

g claramente biyectiva $\quad x \longmapsto g(x) = f(x)$

¿ g continua ?

Sea $U \subset Y\setminus\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}$ abierto.

$$U = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{abto en } Y}}{\tilde{U}}\setminus\{f(x_1),\dots,f(x_n)\} = U \cap \left(Y\setminus\{f(x_1),\dots,f(x_n)\}\right)$$

$$g^{-1}(U) = f^{-1}(U)\setminus\{x_1,\dots,x_n\} = f^{-1}(\tilde{U}) \cap \underset{\substack{\| \\ (X\setminus\{x_1,\dots,x_n\})}}{X_1} \text{ abto. en } X.$$

Que g^{-1} es continua se demuestra igual.

$\boxed{1.}$ (Más formas de demostrar ii)

FORMA 1: Si $\bar{K}$ no es conexo $\Rightarrow$ $\bar{K} = A \uplus B$

Con A, B separación de $\bar{K}$ $(A \cap \bar{B}^K = \emptyset,\ \bar{A}^K \cap B = \emptyset)$

$S \subset K$ con S conexo $\Rightarrow \begin{cases} S \subseteq A \\ \text{ó} \\ S \subseteq B \end{cases}$

Si $S \subset A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bar{S}^K \subset \bar{A}^K \\ \bar{A}^K \cap B = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{S} \cap B = \emptyset$ ⟵ contradicción ※

pero $B \subset K \subset \bar{S}$

FORMA 2: Si $\bar{K}$ no es conexo $\Rightarrow \exists f: \bar{K} \longrightarrow \{0,1\}$ cont. y sobre

$\bar{K} \supset S$ conexo

$\Rightarrow f(S)$ conexo de $\{0,1\}$, e.d., $f(S) = 0$ ó $f(S) = 1$

Si $f(S) = 0 \ \wedge\ x_0 \in \bar{K} \setminus S \subset \bar{S} \setminus S \subset \bar{S}$ $\quad x_0 \in f^{-1}(\{1\})$ [*] $\quad f$ cont.

$\Rightarrow f(x_0) \in f(\bar{S}) \subset \overline{f(S)} = \overline{\{0\}} = \{0\}$

$\Downarrow$

contradicción con [*] ※ $\longrightarrow f(x_0) = 0$