CÁLCULO II.
1º DE GRADO EN MATEMÁTICAS Y DOBLE GRADO INFORMÁTICA-MATEMÁTICAS. Curso 2016-17.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Hoja 2

Límites y continuidad de funciones de varias variables

1.- Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(a)\ f(x,y) = x+y-2$ $\quad (b)\ f(x,y) = x^2+4y^2$ $\quad (c)\ f(x,y) = -x^2y^2$

$(d)\ f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$ $\quad (e)\ f(x,y) = 1+(x^2+y^2)$ $\quad (f)\ f(x,y) = x^2-y^2$

$(g)\ f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ $\quad (h)\ f(x,y) = \text{máx}\{|x|,|y|\}$ $\quad (i)\ f(x,y) = \cos^2(x^2+y^2)$

2.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(a)\ f(x,y,z) = x-y-z+2.$ $\quad (b)\ f(x,y,z) = x^2+y^2.$

$(c)\ f(x,y,z) = \exp(x^2+y^2+z^2).$ $\quad (d)\ f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2.$

$(e)\ f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-z.$ $\quad (f)\ f(x,y,z) = xy.$

3.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

$(g)\ f(x,y) = x^4+y^4-4x^2y^2.$ $\quad (h)\ f(x,y) = \tan\dfrac{x^2}{y}.$ $\quad (i)\ f(x,y) = \dfrac{1}{\log\sqrt{x^2+y^2}}.$

$(j)\ f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}.$ $\quad (k)\ f(x,y) = \dfrac{\cos x^2}{x-y}.$ $\quad (l)\ f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

4.- Hallar los límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2\,\text{sen}\, y^2 + y^2e^{-|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\cos\frac{4xy}{5x^2+3y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\text{máx}\{|x|,|y|\}}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

5.- ¿Cuál de los siguientes límites existe?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{5x^2+3y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cos\frac{4xy}{5x^2+3y^2}.$$

6.- Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

definida para los $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $x+y\neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = -1.$$

¿Existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)\to(0,0)$?

7.- Sea $f(x,y)$ definida mediante

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

en los $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $x^2y^2+(x-y)^2\neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = 0$$

y que no existe el $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

8.- Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \text{si } x, y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ y que, sin embargo, no existen los límites iterados

$$\lim_{x \to 0} \big(\lim_{y \to 0} f(x, y) \big) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y \to 0} \big(\lim_{x \to 0} f(x, y) \big).$$

9.- Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$ se define

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Hallar el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la rectas $y = \lambda x$. ¿Es posible definir $f(0, 0)$ de modo que f sea continua en $(0, 0)$?

10.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = \frac{7xy}{2x^2 + 5y^2}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0, 0)$?

11.- Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

¿Es f continua en $(1, 0)$?

12.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \quad \text{ó} \quad y \geq x^2, \\ 1 & \text{si} \quad 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $f(x, y) \longrightarrow 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x, y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es f continua en el origen?

13.- Demuéstrese que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = 1.$

(Sugerencia. Obsérvese que $0 \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2$.)

14.- Estudiar si son abiertos o cerrados los siguientes conjuntos, utilizando razonamientos con funciones continuas.

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5\,x^2 + 6\,y^2 = 30\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 + \operatorname{sen}^2(x+y)\}, \\ C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4\,x^6 + 2\,y^2 + z^4 < 7\}, \\ D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y > 1,\ \exp(x^2 + y^2 - 5) < e\}, \\ E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 y \cos(xy) < x^2 - y^2 + 1\}. \end{aligned}$$

¿Son acotados o compactos algunos de ellos? ¿Cuáles?

HOJA 2

1.

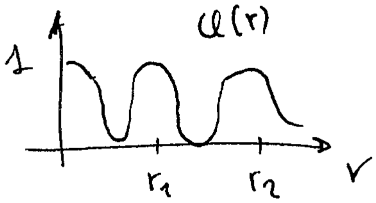
i) $f(x,y) = \cos^2(x^2+y^2)$

$r = |(x,y)|$; $\varphi(r) = \cos^2 r^2$

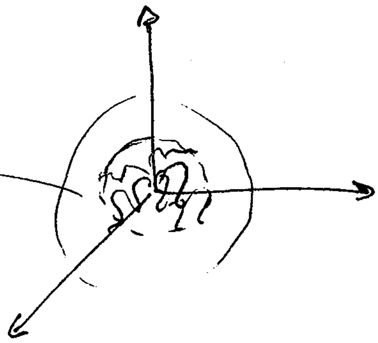
$\varphi(r) = 1 \iff r^2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \\ 2\pi \\ \vdots \end{cases}$ $\qquad r^2 = k\pi, \quad k = 0,1,2,\dots$

$r_k = \sqrt{k\pi}$

$r_{k+1} - r_k = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \downarrow 0$



esta gráfica rotándola



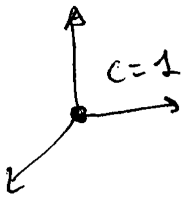
2.

c) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$

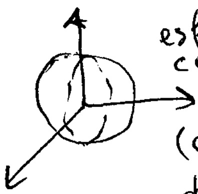
Si $c < 1$, no hay imagen

Si $c = 1$, $x = y = z = 0$

Si $c > 1$, $x^2+y^2+z^2 = \ln c$

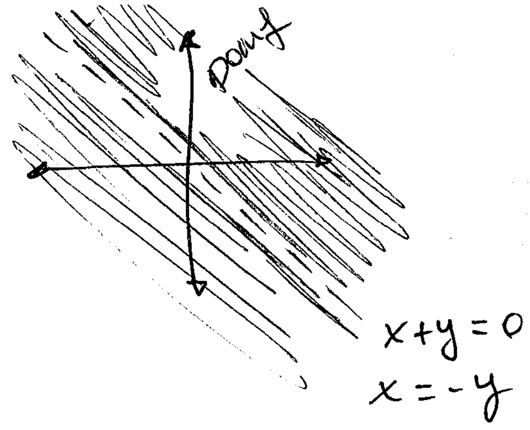


$r = \sqrt{\ln c}$



esfera centrad en $(0,0,0)$ y de radio $\sqrt{\log}$

$\boxed{6.}$ $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, si $x+y \neq 0$



$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x+y = 0\}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

No existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ya que los propios límites reiterados no coinciden.

$\boxed{7.}$ $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{-y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{r\to 0}\left|\frac{r^2\cos^2\theta \cdot r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta\, r^2\,\mathrm{sen}^2\theta + (r\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\theta)^2} - 0\right| = \lim_{r\to 0}\left|\frac{r^4\cos^2\theta \cdot \mathrm{sen}^2\theta}{r^4\cos^2\theta\cdot\mathrm{sen}^2\theta + r^2(\cos\theta - \mathrm{sen}\theta)^2}\right| =$$

$$= \lim_{r\to 0}\left|\frac{r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + (\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta)^2}\right|$$

- Si $\theta = \frac{\pi}{4} + K\pi$ $\quad K = 0,1,2,\dots$

$$\lim_{r\to 0}\left|\frac{r^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+K\pi\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+K\pi\right)}{r^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+K\pi\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+K\pi\right) + \left(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)^2}\right| = \lim_{r\to 0}\left|\frac{r^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{r^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right| = 1$$

- Si $\theta \neq \frac{\pi}{4} + K\pi$ $\quad K = 0,1,2,\dots$

$$\lim_{r\to 0}\left|\frac{r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{\underbrace{r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + (\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta)^2}_{\neq 0}}\right| = \frac{0}{K} = 0$$

Los polares dependen de $\theta \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\boxed{8.}$ $f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x \operatorname{sen} \frac{1}{y} & \text{si} \quad x, y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right) = \nexists \lim_{y \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{y} \Rightarrow \nexists \text{ lim iterado}$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right) = \nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \Rightarrow \nexists \text{ lim iterado}$$

Posible límite global $= 0$ (ya que $f(x,y) = 0$ si $x, y = 0$)

$$\lim_{r \to 0} \left| r \underbrace{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\left(\frac{1}{r\cos\theta} \right)}_{\in [-1,1]} + r \underbrace{\cos\theta \operatorname{sen}\left(\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \right)}_{\in [-1,1]} - 0 \right| = 0$$

$\boxed{9.}$ $(x,y) \neq (0,0)$ se define $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$y = \lambda x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \lambda^2 x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}(1-\lambda^2)}{\cancel{x^2}(1+\lambda^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

No, porque el límite al que se aproxima la función en $(0,0)$ depende de la recta (del valor λ) con que nos acerquemos.

10. a) $f(x,y) = \dfrac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

- Reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x}\cos x^2}{\cancel{2x}} = \lim_{x\to 0} \cos x^2 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{2y}\cos y^2}{\cancel{2y}} = \lim_{y\to 0} \cos y^2 = 1$$

- Radiales : $y = \lambda x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x^2+\lambda^2x^2)}{x^2+\lambda^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x+2\lambda^2x)\cos(x^2+\lambda^2x^2)}{2x+2\lambda^2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2+2\lambda^2)\cos(x^2+\lambda^2x^2) - (2x2\lambda^2x)(2x+2\lambda^2x)\,\text{sen}(x^2\lambda^2x^2)}{2+2\lambda^2} =$$

$$= \frac{2+2\lambda^2}{2+2\lambda^2} = 1$$

- Polares

$$\lim_{r\to 0}\left| \frac{\text{sen}(r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta)}{r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta} - 1\right| = \lim_{r\to 0}\left| \frac{\text{sen}\, r^2}{r^2} - 1\right| =$$

$$= \lim_{r\to 0}\left| \frac{\text{sen}r^2 - r^2}{r^2}\right| = \lim_{r\to 0}\left| \frac{2r\cos r^2 - 2r}{2r}\right| = \lim_{r\to 0} |\cos r^2 - 1| = 0$$

Sí que podría ser continua si $f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

10. b) $f(x,y)=\dfrac{7xy}{2x^2+5y^2}$

- Reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{7xy}{2x^2+5y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{2x^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{7xy}{2x^2+5y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{5y^2}=\lim_{y\to 0}0=0$$

- Radiales: $y=\lambda x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x\lambda x}{2x^2+5\lambda^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{7\lambda}{2+5\lambda^2}=\frac{7\lambda}{2+5\lambda^2}\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$$

por lo que la función no puede ser continua en (

11. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(1,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0)\end{cases}$

- Reiterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{(x-1)^2}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{1+y^2}=0$$

- Radiales: $y=\lambda(x-1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\lambda(x-1)-\lambda(x-1)}{(x-1)^2+\lambda^2(x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda\cancel{(x-1)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)^2}(1+\lambda^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

$\nexists \lim_{(x,y)\to(1,0)}f(x,y)\Rightarrow f(x,y)$ no puede ser continua en (1,0)

15.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x)\right) = \lim_{x\to 0}(x^2)^0 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x)\right) = \lim_{y\to 0}(y^2)^0 = 1$$

reiterados

$$\lim_{r\to 0}\left|\left(r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta\right)^{r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta} - 1\right| = 0\ ?$$

$$\lim_{r\to 0}\left|(r^2)^{r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta} - 1\right| = \lim_{r\to 0} r^{2r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta} - 1$$

$$\lim_{r\to 0} r^{2r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta} = L'$$

$$\ln L' = \lim_{r\to 0} 2r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\ \ln r = 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta \cdot \lim_{r\to 0}\frac{\ln r}{r^{-4}} =$$

$$= 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta \cdot \left[\lim \frac{1/r}{r^{-5}\cdot(-4)}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln L' = 0 \Rightarrow L' = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0}\left|\left(r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta\right)^{r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta} - 1\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1}$$

$\boxed{14.}$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \leq 1 + \text{sen}^2(x+y)}_{\equiv}\}$$

$$\underbrace{x^2+y^2 - \text{sen}^2(x+y)}_{f(x,y)} \leq 1$$

$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow B = f^{-1}((-\infty,1])$

$\Rightarrow f^{-1}((-\infty,1])$ continua y conjunto cerrado $\Rightarrow$

$\Rightarrow B$ es cerrado

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y \cos(xy) < x^2 - y^2 + 1\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 y \cos(xy) - x^2 + y^2}_{f(x,y)} < 1\}$$

$f(x,y)\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow B = f^{-1}((-\infty,1))$

$\Rightarrow f^{-1}((-\infty,1))$ continua y conjunto abierto $\Rightarrow$

$\Rightarrow B$ es abierto.

$$) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1,\ e^{x^2+y^2-5} < e\} \equiv$$

$$\equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \{\underbrace{xy > 1}_{D_1}\} \cap \{\underbrace{e^{x^2+y^2-5} < e}_{D_2}\}\}$$

$D_1 = f^{-1}((1,\infty))$ $\qquad$ $D_2 = f^{-1}((-\infty, e))$

$\downarrow$ abto $\qquad$ $\downarrow$ abto.