Homotopía

1. Demostrar que la relación "ser un retracto de deformación fuerte" es transitiva, esto es, si A lo es de D y D de C, entonces A lo es de C.

2.

1. Hallar el grupo fundamental de $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ y de $\{x^2 + y^2 \geq 4\}$.
2. Hallar el grupo fundamental del toro sólido [1] .
3. Probar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ y $A \cup \{(1, 0)\}$ no son homeomorfos.
4. Sea $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demostrar que un homeomorfismo $f : D \longrightarrow D$ envía la frontera en la frontera y el interior en el interior [2].

3. Decide razonadamente si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

1. $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
3. $X_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
4. $X_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < y < 1\}$.
5. $\mathbb{R} \times S^1 \times (S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\})$.
6. $\mathbb{R}^2 \times (S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\})$.
7. $\mathbb{R}^4$.

4. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si A y D son subespacios simplemente conexos con $A \cap D \neq \emptyset$, entonces $A \cup D$ también lo es.
2. Si X es homeomorfo a la frontera de $[0, 1] \times [0, 1]$, el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$.
3. Si el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y X es conexo por caminos, entonces X es homeomorfo a S^1.
4. Si A y D son retractos de deformación fuerte de espacios homeomorfos, entonces A y D son homeomorfos.
5. Dos espacios que tienen el mismo grupo fundamental son homeomorfos.

5.

1. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos del espacio X que verifique las siguientes condiciones:
   (i) existe un punto x_0 tal que $x_0 \in U_i$ para todo $i \in I$;
   (ii) para cada $i \in I$, U_i es simplemente conexo, y
   (iii) si $i \neq j$, $U_i \cap U_j$ es conexo por caminos.
   Probar que X es simplemente conexo.
2. Deducir que S^n es simplemente conexo si $n \geq 2$ [3].
3. Demostrar que S^n (la esfera n-dimensional) es un retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$. Utilizar este hecho para demostrar que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n \neq 2$.

[1] El toro sólido es el espacio topológico $\overline{D^1} \times S^1$, donde $D^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

[2] Indicación: considérense los grupos fundamentales de $D \setminus \{p\}$ y $D \setminus \{f(p)\}$.

[3] Indicación: Para probar que todo lazo $\alpha : I \to X$ con base en x_0 es trivial, considerese primero el recubrimiento abierto $\{\alpha^{-1}(U_i)\}$ del compacto $I = [0, 1]$ y, con ayuda del número de Lebesgue de este recubrimiento, escribir $\alpha = \alpha_1 * ... * \alpha_n$ tal que $\alpha_j(I)$ es subconjunto de algún U_j.