ARCONADA MANTECA, MIGUEL

CABORNERO PASCUAL, DAVID

CHACÓN AGUILERA, JOSE MANUEL

GALÁN MARTÍN, SERGIO

GARCÍA PASCUAL, MARIO

GONZÁLEZ KLEIN, ALBERTO

PETRUNINA, ELENA

SANTORUM VARELA, ALEJANDRO

Observación: Los ejercicios pueden aparecer desordenados.

Ejercicio 1. A veces uno lee que la aproximación normal a la binomial es factible para $n = 30$ y $1/10 < p < 9/10$. En torno a este asunto, se os pide echar algunas cuentas en el caso extremo $p = 1/10, n = 30$. Sea $S_{30} \sim B(30, 1/10)$. Calcular la probabilidad de tener al menos tres éxitos, es decir, $P(S_{30} \geq 3)$, *usando la distribución binomial.* Estimar la probabilidad de tener al menos tres éxitos, es decir, $P(S_{30} \geq 3)$, *usando la aproximación normal sin corrección de continuidad.* Estimar la probabilidad de tener como máximo dos éxitos, es decir, $P(S_{30} \leq 2)$, *usando la aproximación normal sin corrección de continuidad.* Hacer lo mismo pero con corrección de continuidad, o de de Moivre-Laplace.

Primero, podemos calcular $P(S_{30} \geq 3)$ sabiendo que en una distribución binomial $B(n, p)$ se sabe que $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$:

$$
\begin{aligned}
P(S_{30} \geq 3) = 1 - P(S_{30} < 3) &= 1 - P(S_{30} = 0) - P(S_{30} = 1) - P(S_{30} = 2) = (*) \\
P(S_{30} = 0) &= \binom{30}{0} \left(\frac{9}{10}\right)^{30} = \frac{9^{30}}{10^{30}} \\
P(S_{30} = 1) &= \binom{30}{1} \cdot p^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{29} = \frac{30 \cdot 9^{29}}{10^{30}} \\
P(S_{30} = 2) &= \binom{30}{2} \cdot p^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{28} = \frac{15 \cdot 29 \cdot 9^{28}}{10^{30}} \\
(*) &= 1 - \frac{9 + 30 \cdot 9^{29} + 15 \cdot 29 \cdot 9^{28}}{10^{30}} \approx 0,5886
\end{aligned}
$$

Por otra parte, si usamos el teorema de *Moivre-Laplace*, podemos aproximar $B(n, p) \sim N(np, \sqrt{npq})$. En nuestro caso, $S_{30} \sim B(30, 1/10) \sim N(30 \cdot 1/10, \sqrt{30 \cdot 1/10 \cdot 9/10}) = N(3, 3 \cdot \sqrt{3/10})$. Sabiendo esto es trivial que $P(S_{30} \geq 3)) = 1/2$ al ser 3 el valor de μ de la distribución normal. Por otra parte, para hallar $P(S_{30} \leq 2)$ necesitamos normalizar la distribución, es decir:

$$
\begin{aligned}
P(S_{30} \leq 2) &= P\left(\frac{S_{30} - 3}{3 \cdot \sqrt{3/10}} \leq \frac{2 - 3}{3 \cdot \sqrt{3/10}}\right) = P\left(Z \leq -\frac{1}{3 \cdot \sqrt{3/10}}\right) \approx P(Z \leq -0,609) \\
&= 1 - P(Z \leq 0,609) = 0,2291
\end{aligned}
$$

Este valor lo podemos obtener en una tabla, al ser Z una distribución normal estándar. Si ahora utilizamos la *corrección de continuidad*, tenemos:

$$
\begin{aligned}
P(S_{30} \geq 3) = P(X' \geq 2{,}5) &= P\left(\frac{X' - 3}{3 \cdot \sqrt{3/10}} \geq \frac{2{,}5 - 3}{3 \cdot \sqrt{3/10}}\right) = P\left(Z \geq -\frac{0{,}5}{3 \cdot \sqrt{3/10}}\right) \\
&= P(Z \geq -0{,}3043) \approx 0,6179 \\
P(S_{30} \leq 2) = P(X' \leq 2{,}5) &= 1 - P(X' \geq 2{,}5) \approx 1 - 0,6179 = 0{,}3821
\end{aligned}
$$

Podemos ver que los valores obtenidos con *corrección de continuidad* son más cercanos a los obtenidos en el primer apartado (que son valores no aproximados sino calculados)

(2) $X \in L^2$ v.a sea m t.q

$$\text{(1)} \rightarrow P(X \geq m) \geq 1/2 \quad y \quad P(X \leq m) \geq 1/2.$$

→ Por la desigualdad de Chevichev.

$$\forall t > 0, \; P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X} \geq t \right) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

si $t = 1 \Rightarrow P(X \geq \sigma_X + E(X)) \leq 1/2$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} \quad m \leq \sigma_X + E(X)$$

$$\Rightarrow -E(X) + m \leq \sigma_X$$

$$= |-E(X) + m| = |E(X) - m| \leq \sigma_X$$

(3)

Separamos X en sus partes positivas y negativas:

$X = X^+ - X^-$, siendo X^+, X^- funciones no negativas

Por tanto, $|X| = X^+ + X^-$

$$|E(X|\mathcal{G})| = |E(X^+ - X^- | \mathcal{G})| \overset{\text{Linealidad}}{=} |E(X^+|\mathcal{G}) + E(-X^-|\mathcal{G})|$$

$$\leq |E(X^+|\mathcal{G})| + |E(-X^-|\mathcal{G})| = E(X^+|\mathcal{G}) + E(+X^-|\mathcal{G}) =$$

$\forall Y \geq 0$ v.a $\int_G Y\,dP \geq 0 \ \forall G \in \mathcal{G} \Rightarrow$
$\Rightarrow E(Y|\mathcal{G}) \geq 0$ (Idem si $Y \leq 0$)

$$\overset{\text{Linealidad}}{=} E(X^+ + X^- | \mathcal{G}) = E(|X| \,|\, \mathcal{G})$$

(4) X e Y v.a t.q $E(X) = E(Y) = 0$

a) $Cov(X, E(X|Y)) > 0$

$$Cov(X, E(X|Y)) = E(X E(X|Y)) - \cancel{E(X)}\, E(E(X|Y))$$

$$= E(XX) = E(X^2) = V(X) > 0 \quad \square$$

$E(X|Y) = X$ porque X es Y^{-1} medible.

b) $sig(\rho(X, E(X|Y))) = sig(\rho(X,Y)) \rightarrow$

$$Cov(Y, E(X|Y)) = E(Y E(X|Y)) - E(Y)\cancel{E(E(X|Y))}$$

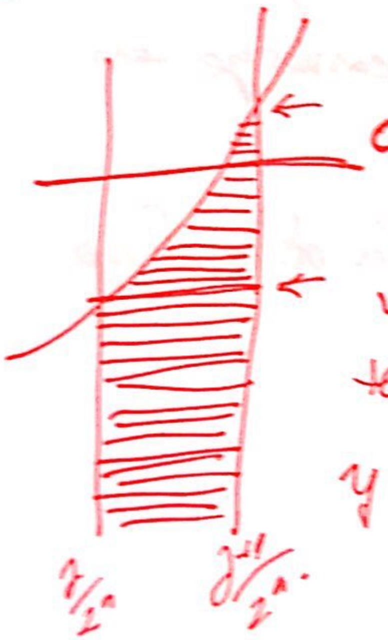
$$= E(YX) = Cov(X,Y) - E(\cancel{X})E(Y) = Cov(X,Y) \quad \square$$

5. Primero hay que observar que $\mathcal{A}_n$ es la σ-álgebra generada por la partición finita $\{A_0^n, \dots, A_{2^n-1}^n\}$, luego $E(X|\mathcal{A}_n)$ es constante en los A_j^n por ser $\mathcal{A}_n$-medible. Esa constante $c := c_j^n$ que se toma en los A_j^n es aquella que cumple

$$\int_{A_j^n} x^2 \, dx = c \cdot \mu(A_j^n) = c/2^n.$$

Es fácil ver que $c = \dfrac{3j^2+3j+1}{3 \cdot 2^{2n}}$. También sabemos que c está metido entre las imágenes de los extremos del intervalo A_j^n, esto es,

$$\left(\frac{j}{2^n}\right)^2 \leq c \leq \left(\frac{j+1}{2^n}\right)^2.$$



Para responder a la pregunta, vamos a ver que $E(X|\mathcal{A}_n)$ converge uniformemente a X. Fijado un n y fijado un $\omega \in [0,1]$ tenemos que $\omega \in A_j^n$ para algún j y que ω^2 se diferencia de c_j^n

por menos que la distancia entre las imágenes de los extremos de A_0^n, esto es,

$$|w^2 - c| \leq \left(\frac{j+1}{2^n}\right)^2 - \left(\frac{j}{2^n}\right)^2$$

Para que esto no dependa del w basta tomar el máximo entre las cotas, ya que hay un número finito. Es fácil ver que este máximo es el que se alcanza en $A^n_{2^n-1}$, que es

$$|w^2 - E(X|\mathcal{A}_n)| \leq \max_j \left|\frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n}\right| = 1 - \left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)^2$$

que tiende a 0 y no depende de w ■

Por tanto $E(X_n|\mathcal{A}_n) \to X$ uniformemente; como ess sup $\leq$ sup, convergen en L^∞; como estamos en un espacio de probabilidad, convergen en L^p para todo p válido; luego convergen en todo y casi todo punto; luego converge en probabilidad; luego converge en distribución ■

A 12 de Marzo de 2020, el día de la fuga

(6) $0 < r \leq s \leq \infty$, X proceso estoc.

$a = \|X\|_r$

$b = \|X\|_s$

Por definición, $a = \|X\|_r = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_r$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists j \in \mathbb{N} : a - \|X_j\|_r < \varepsilon$

$\Rightarrow a < \|X_j\|_r + \varepsilon \leq \|X_j\|_s + \varepsilon \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_s + \varepsilon =$

$= \|X\|_s + \varepsilon = b + \varepsilon$

Entonces, $\forall \varepsilon > 0 \quad a < b + \varepsilon \Rightarrow a \leq b$

Ejercicio 7. Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala y $||X||_s < \infty$, donde $1 \leq s < \infty$, entonces $Y := \{|X_n|^s\}_{n=0}^{\infty}$ es una submartingala.

Sabemos que para $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa, si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, entonces $\phi\left(\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ es una submartingala (por la desigualdad de Jensen). En nuestro caso, $x \mapsto |x|^s$ es una función convexa, luego $\{|X_n|^s\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala.

⑧ Dem martingala.

① X es adaptado: Trivial por definición de $\{F_n\}_{n\geq 0}$

② $\forall n \geq 0,\ E|X_n| < \infty$

$$\int 2^n \mathbb{1}_{(0,2^{-n}]} d\lambda = 2^n \int_0^{2^{-n}} 1\, d\lambda = 2^n \lambda((0,2^{-n}]) =$$

$$= 2^n \cdot 2^{-n} = 2^0 = \boxed{1} < \infty$$

③ $E(X_n | F_{n-1}) = X_{n-1} \quad \forall n \geq 1$

$$X_n = 2^n \cdot \mathbb{1}_{(0,2^{-n}]}$$

$$(0,2^{-n}] = (0,2^{-n+1}] \setminus (2^{-n},2^{-n+1}]$$

$$X_n = \underbrace{2^n \cdot (\mathbb{1}_{(0,2^{-n+1}]}}_{2X_{n-1}} - \mathbb{1}_{(2^{-n},2^{-n+1}]}) = 2X_{n-1} - 2^n \mathbb{1}_{(2^{-n},2^{-n+1}]}$$

$$E(X_n | F_{n-1}) = \underbrace{E(2X_{n-1} | F_{n-1})}_{2X_{n-1}} - E(\underbrace{2^n \mathbb{1}_{(2^{-n},2^{-n+1}]}}_{X_{n-1}} | F_{n-1}) =$$

$$= 2X_{n-1} - X_{n-1} = \boxed{X_{n-1}}$$

Veamos que $\{X_n\}$ converge c.s., ya que convergencia c.s $\Rightarrow$ convergencia en probabilidad $\Rightarrow$ convergencia en distribución.

Hay que ver que $\lim_{n\to\infty} \lambda\{\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon\} = 0$

Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \varepsilon\}\right) = 0$$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X = 0,$$

$$\{|X_{k+1} - X| > \varepsilon\} \subset \{|X_k - X| > \varepsilon\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \varepsilon\} = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda([0, 2^{-n}]) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = \boxed{0}$$

Veamos convergencia en L^p:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall m \geq N \quad \int_\Omega |X_n - X|^p < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega X_n^p < \varepsilon \Rightarrow 2^{n(p-1)} < \varepsilon$$

~~Esto no se cu~~ $\nexists N : \forall m \geq N \quad 2^{m(p-1)} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ No converge en L^p $(0 < p \leq \infty)$

9) $E[Y_j Y_k] = E[(X_j - X_{j-1})(X_k - X_{k-1})] \underset{\uparrow}{=} E[E[(X_k - X_{k-1})(X_j - X_{j-1}) | \mathcal{F}_k]] =$

$\overset{\shortparallel}{\int X_j X_k}$

sup $j > k$
s.p.d.g
Propiedad
de la torre
($\mathcal{F}_k$ subσalg de $\mathcal{F}_j$
y $X_i \in L_2 \Rightarrow X_i \in L_1$)

$= E[(X_k - X_{k-1}) \cdot E[X_j - X_{j-1} | \mathcal{F}_k]] = E[(X_k - X_{k-1})(\cancel{X_k} - X_k)] = 0$

X_k y X_{k-1}
son $\mathcal{F}_k$ medibles.

$E(X_{k+m} | \mathcal{F}_k) = X_k$
$\forall k$