PARCIAL 1 - OCTUBRE 2019

$\boxed{1.}$ $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 3 & a & 1/2 \\ a & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $3 > 0$ ✓

det(2x2): $3.2 - a^2 = 6 - a^2 > 0 \iff a^2 < 6 \iff -\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$

det(3x3): $6 - \frac{1}{2} - a^2 > 0 \iff a^2 < 5'5 \iff \boxed{-\sqrt{5'5} < a < \sqrt{5'5}}$

b) Como $\mathbb{X}$ sigue una normal multidimensional, $\mathbb{Y} = A\mathbb{X}$ también sigue una normal multidimensional, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $\mathbb{Y}$ es una normal multidimensional, Y_1, Y_2 independientes si y solo si Y_1, Y_2 son incorreladas:

$$\text{cov}(Y_1, Y_2) = \text{cov}(X_1 + 2X_2, X_1 - X_2) = \text{cov}(X_1, X_1) - \text{cov}(X_1, X_2)$$
$$+ 2\,\text{cov}(X_2, X_1) - 2\,\text{cov}(X_2, X_2) =$$
$$= V(X_1) - 2V(X_2) + \text{cov}(X_1, X_2) = 3 - 2.2 + a = 0$$
$$\iff \boxed{a = 1}$$

c) $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{pmatrix}$ $V = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \Big| X_3 = \frac{1}{2}$ sigue una distribución normal con los siguientes parámetros: $\mathcal{N}_2(\tilde{\mu}, \tilde{V})$

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} . 1 . \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} . 1 . \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Primero, vamos a estimar p por máxima verosimilitud:

$$\text{VERO}(p) = (p^3)^9 \cdot (3p^2(1-p))^{17} \cdot (3p(1-p)^2)^{20} \cdot ((1-p)^3)^{35} =$$

$$= p^{27} \cdot (3p^2(1-p))^{17} \cdot (3p(1-p)^2)^{20} \cdot (1-p)^{105} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\text{VERO}(p) = 27\log(p) + 17\log(3p^2(1-p)) + 20\log(3p(1-p)^2) +$$
$$+ 105\log(1-p) = 27\log(p) + K_1 + 34\log(p) +$$
$$+ 17\log(1-p) + K_2 + 20\log(p) + 40\log(1-p) +$$
$$+ 105\log(1-p) = 81\log(p) + 162\log(1-p) + K_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\log\text{VERO}}{dp}(p) = \frac{81}{p} - \frac{162}{1-p} = 0 \Leftrightarrow 81(1-p) - 162p = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 81 - 81p - 162p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{81}{243} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\hat{p} = \frac{1}{3}}$$

Por tanto: $(n = 81)$

	Observados	probs	Esperados
C_1	9	1/27	3
C_2	17	2/9	18
C_3	20	4/9	36
C_4	35	8/27	24

$$\Rightarrow b = \frac{(9-3)^2}{3} + \frac{(17-18)^2}{18} + \frac{(20-36)^2}{36} + \frac{(35-24)^2}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 12 + \frac{1}{18} + \frac{64}{9} + \frac{121}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 24'21}$$

Miramos en la tabla de la χ^2 con $4 - 1 - \underbrace{1}_{\text{por estimar } p} = 2$ grados de libertad: Vemos que el p-valor es mucho menor que 0'1%, por lo que existe una fuerte evidencia estadística en contra de la hipótesis nula H_0: "el modelo teórico es el propuesto para $C_1, \ldots, C_4$", por lo que rechazamos con seguridad.

$\boxed{3.}$ a) $n = 200$

	A	B	
mujer	12	88	$\rightarrow 100$
hombre	24	76	$\rightarrow 100$
	$\downarrow$ 36	$\downarrow$ 164	

Esperados

	A	B
mujer	$\frac{36 \cdot 100}{200} = 18$	$\frac{164 \cdot 100}{200} = 82$
hombre	$\frac{36 \cdot 100}{200} = 18$	$\frac{164 \cdot 100}{200} = 82$

$$\Rightarrow b = \frac{(12-18)^2}{18} + \frac{(24-18)^2}{18} + \frac{(88-82)^2}{82} + \frac{(76-82)^2}{82} =$$

$$\circledast = \frac{2 \cdot 6^2}{18} + \frac{2 \cdot 6^2}{82} = 4'88$$

Mirando en la tabla de la χ^2 con $4-1-(2-1) = 2$

se estima la prob. modelo A y modelo B, pero no el sexo.

podemos conseguir el percentil 5% : $\chi^2_{\{2;5\%\}} = 5'991$

Como $5'991 > 4'88 \Rightarrow$ no existe suficiente evidencia estadística para rechazar el test, aceptamos Ho: "son homogéneas las preferencias entre H y M $(\alpha = 5\%)$".

b)

	A	B	
mujer	x	$100-x$	$\rightarrow 100$
hombre	32	68	$\rightarrow 100$
	$\downarrow$ $32+x$	$\downarrow$ $168-x$	

Esperados

	A	B
mujer	$\frac{32+x}{2}$	$\frac{168-x}{2}$
hombre	$\frac{32+x}{2}$	$\frac{168-x}{2}$

Si nos fijamos en el apartado a) en $\circledast$ las discrepancias salen idénticas por columnas:

$$\frac{\left(32 - \frac{32+x}{2}\right)^2}{\frac{32+x}{2}} = \frac{\left(\frac{64-32-x}{2}\right)^2}{\frac{32+x}{2}} = \frac{(32-x)^2}{2(32+x)}$$

$$\frac{\left(68 - \frac{168-x}{2}\right)^2}{\frac{168-x}{2}} = \frac{\left(\frac{136-168+x}{2}\right)^2}{\frac{168-x}{2}} = \frac{(x-32)^2}{2(168-x)}$$

Obs: $(32-x)^2 = (x-32)^2$ lógicamente, dist. al cuadrado

$$\Rightarrow b = \frac{2\cdot(x-32)^2}{2\cdot(x+32)} + \frac{2\cdot(x-32)^2}{2\,(168-x)} = (x-32)^2\left[\frac{1}{x+32} + \frac{1}{168-x}\right] =$$

$$= (x-32)^2\left[\frac{168-x+x+32}{(x+32)(168-x)}\right] = \frac{200\,(x-32)^2}{168x - x^2 - 32x + 5376} =$$

$$= \frac{200\,(x^2 - 64x + 1024)}{-x^2 + 136x + 5376} := q \quad (\bigstar)$$

Buscamos x tal que q esté entre $\underbrace{\chi^2_{\{2;4\%\}}}_{=6'438}$ y $\underbrace{\chi^2_{\{2;5\%\}}}_{=5'991}$

Vamos a tomar $q_1 = 5'991$ y $q_2 = 6'438$ y despejar x de tal forma que <u>x sea entero</u>:

$$(\bigstar) \equiv 200(x^2 - 64x + 1024) = -qx^2 + 136q\,x + 5376q \iff$$

$$\iff (200+q)\,x^2 - (200\cdot 64 + 136q)\,x + (1024\cdot 200 - 5376\,q) = 0$$

- Para $q_1 = 5'991$: $x_1 = 48'99$; $x_2 = 17'10$
- Para $q_2 = 6'438$: $x_1 = 49'64$; $x_2 = 16'61$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\hat{x}_1 = 49} \qquad \boxed{\hat{x}_2 = 17}$$

Sustituyendo $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ en $\bigstar$ podemos comprobar que el p-valor está entre 4% y 5%:

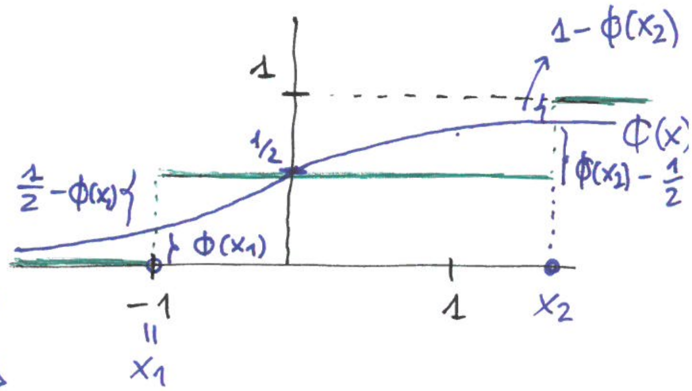
- Para $\hat{x}_1 = 49$: $\bigstar = 5'996 \in (5'991, 6'438) \Rightarrow$ <u>válido</u> (p-valor $\in [4\%, 5\%]$)
- Para $\hat{x}_2 = 17$: $\bigstar = 6'082 \in (5'991, 6'438) \Rightarrow$ <u>válido</u> (p-valor $\in [4\%, 5\%]$)

Conclusión: posibles respuestas a la pregunta "¿cuántas mujeres preferían A?" $\longrightarrow x_1 = 49$

$\boxed{4.}$ (x_1, x_2) con $x_1 = -1$ y $x_2 > 1$ desconocido

H_0: "muestra tamaño 2 normal estándar"

$\delta_2 = 0'4192$ (dato) ¿x_2?



Sabemos que:

$$\delta_2 = \max \left\{ \begin{array}{l} \max\{\Phi(x_1), \frac{1}{2}-\Phi(x_1)\} \\ \max\{\Phi(x_2)-\frac{1}{2}, 1-\Phi(x_2)\} \end{array} \right\}$$

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1) = 1-\Phi(1) = 1-0'8413 = 0'1587 \neq 0'4192$$

$$\frac{1}{2}-\Phi(x_1) = \frac{1}{2}-\Phi(-1) = \frac{1}{2}-0'1587 = 0'3413 \neq 0'4192$$

El máximo tiene que ser $\Phi(x_2)-\frac{1}{2}$ ó $1-\Phi(x_2)$.

Notar que $\frac{1}{2}-\Phi(-1) > \Phi(-1)$ y que $\Phi(-1) = 1-\Phi(1)$

y $\frac{1}{2}-\Phi(-1) = \Phi(1)-\frac{1}{2} \Rightarrow \Phi(1)-\frac{1}{2} \overset{\circledast}{>} 1-\Phi(1)$.

Como $\Phi(x)$ es monótona creciente (como toda func. distr.) y junto con $\circledast$ y que $x_2 > 1$, entonces podemos sostener que $\Phi(x_2)-\frac{1}{2} > 1-\Phi(x_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta_2 = 0'4192 = \Phi(x_2)-\frac{1}{2} \Rightarrow \Phi(x_2) = 0'9192 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \Phi^{-1}(0'9192) = 1'4}$$