Series de números reales (Cálculo I)

Grado en Matemáticas y doble grado Mat-Ing Inf.

20 de diciembre de 2011

[1]

[1] Apuntes preparados por el profesor Luis Guijarro

Series de números reales.

Con frecuencia aparece el problema de sumar los términos a_n de una sucesión dada de números reales $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \ldots$.

(Recordemos, p.e., que $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots$ nos da el número e).

A este procedimiento lo denominaremos *serie (infinita)*.

Para dar sentido a esto, consideramos *sumas parciales*, que no es más que ir sumando poco a poco los a_n's. Así escribimos

- la suma $s_1 = a_1$;
- la suma $s_2 = a_1 + a_2$;
- la suma $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$;
- y en general $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

Estas sumas (llamadas *sumas parciales*) forman una sucesión $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N, s_{N+1}, \ldots$ que puede tener un límite o no tenerlo.

Series convergentes y divergentes

Se dice que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es **convergente** si el la sucesión formada por las sumas parciales $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N, \ldots$ es convergente. Si $\lim s_N = L$ escribiremos directamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L.$$

Si la sucesión de sumas parciales $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N, \ldots$ no converge, entonces se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente (o simplemente que no converge).

Criterios de convergencia/divergencia

A menudo las sumas parciales no se pueden calcular de forma sencilla, y esto hace necesario recurrir a criterios que nos digan si una serie dada converge o diverge.

Teorema

SI una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim a_n = 0$.

Observación muy útil:

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene $\lim a_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Muchísimo cuidado:

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene $\lim a_n = 0$, entonces **HAY QUE SEGUIR MIRANDO CON OTROS CRITERIOS**, porque la serie puede converger o diverger.

Ejemplo: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tiene $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$, pero es una serie *divergente*.

Criterio de convergencia de Cauchy

Recordamos que una sucesión de números reales es convergente si y solo si es de Cauchy. Además observamos que

$$s_p - s_q = \sum_{n=q+1}^{p} a_n, \quad \text{si } p > q.$$

Por lo tanto se tiene el siguiente criterio, llamado de Cauchy,

Teorema

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y solo si dado* $\epsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *de forma que*

$$\left| \sum_{n=q+1}^{p} a_n \right| < \epsilon, \quad \text{si } p > q \geq N.$$

Algunos ejemplos de series convergentes y divergentes

- La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente y su valor es e. (Obsérvese el comienzo en $n = 0$ en vez de en $n = 1$; esto es irrelevante para la convergencia).
- La serie geométrica, de razón r, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^n$ es convergente $\iff |r| < 1$. De hecho sabemos que $s_n = a\dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ y el $\lim s_n$ existe $\iff |r| < 1$ y, en ese caso, vale $\dfrac{a}{1 - r}$
- La serie "p-armónica" $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente $\iff p > 1$

Series de términos positivos

Si todos los términos a_n son positivos entonces la sucesión $\{s_n\}_n$ es creciente porque $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. Usando los resultados de convergencia de sucesiones deducimos entonces

Teorema

Si $a_n \geq 0$, $\forall n$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff$ la sucesión $\{s_n\}_n$ está acotada.

Términos positivos: Criterio de comparación

Como consecuencia de lo anterior se obtiene el siguiente criterio:

Supongamos que tenemos dos series, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$.

- si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente;
- si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y $a_n \leq b_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

Términos positivos: Criterio de comparación con límite

Supongamos que tenemos dos series, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $a_n > 0,\ b_n > 0$.

- Si el límite $\lim \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son a la vez convergentes, o a la vez divergentes (lo que no se puede dar es que una sea convergente y la otra no). Ojo: $c > 0$ es un número real, no puede ser ∞.
- si el límite $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;
- si el límite $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Términos positivos: Criterio del cociente

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumple

1. $a_n > 0$ para todo n,
2. y existe el límite $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$,

entonces

- si $L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente;
- si $L > 1$ o $L = \infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente;
- si $L = 1$ hay que seguir mirando.

La demostración se hace por comparación con una serie geométrica.

Términos positivos: Criterio de la raíz

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumple

1. $a_n > 0$ para todo n,
2. y existe el límite $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$,

entonces

- si $L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente;
- si $L > 1$ o $L = \infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente;
- si $L = 1$ hay que seguir mirando.

La demostración se hace por comparación con una serie geométrica.

Términos positivos: Criterio de la integral

Si cada uno de los términos a_n es la imagen $f(n) = a_n$ de una función positiva y decreciente, f, entonces se tienen las estimaciones

- $\displaystyle\int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(x)dx,$

de donde deducimos el siguiente criterio:

Teorema

SI los términos a_n son imágenes $f(n) = a_n$ de una función positiva y decreciente, f, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff$ la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

Ejemplo: La serie "p-armónica" $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si y solo si $p > 1$ porque la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ es convergente si y solo si $p > 1$.

Términos positivos: Criterio de condensación diádica

Si además de ser positivos, los términos a_n forman una sucesión decreciente $a_n \geq a_{n+1}$, entonces se tiene la siguiente estimación en los bloques de índices diádicos $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$

- $$2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \leq 2^k a_{2^k},$$

de donde deducimos el siguiente criterio:

Teorema

SI los términos a_n son positivos y forman una sucesión decreciente entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff$ la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ es convergente.

Ejemplo: La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ es convergente porque $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ es decreciente y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(\ln 2)^2}$ es la serie 2-armónica.

Series con términos positivos y negativos

Hasta aquí los criterios que hemos considerado sólo se usan para series con términos positivos. En el caso en que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tenga términos de ambos signos, hay que afinar un poco más:

A veces es posible utilizar el siguiente resultado:

Teorema

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie para la que* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente, entonces la serie original* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *también es convergente.* [a]

[a] para probarlo, basta usar el criterio de Cauchy

Convergencia absoluta y condicional

Definición

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie cuyos términos pueden ser positivos y negativos:*

- *es* **absolutamente convergente** *si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge;*
- *es* **condicionalmente convergente** *si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge pero no absolutamente.*

- Si una serie converge absolutamente, entonces converge;
- Una serie que diverge no converge ni absoluta ni condicionalmente.

Criterio de Leibniz

Las series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ se llaman alternadas porque el signo de sus términos va alternando entre positivo y negativo.

Teorema

Si $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *es una serie tal que*

- $a_n \geq 0$,
- $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n$, *y*
- $\lim a_n = 0$

entonces la la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *es convergente.*