Teoría de Galois

Hoja 5. Aplicaciones: Gran Teorema de Galois

1. Decimos que una extensión E/K es abeliana si E/K es de Galois y $\mathrm{Gal}(E/K)$ es un grupo abeliano. Demuestra que si E/K es abeliana y $K \subseteq L \subseteq E$ es un subcuerpo intermedio, entonces E/L y L/K son abelianas.

2. Sea E/K una extensión de Galois y $K \subseteq L, M \subseteq E$ subcuerpos intermedios. Se define $\langle L, M\rangle$ como la intersección de todos los subcuerpos de E que contienen a L y M. Prueba que

$$\mathrm{Gal}(E/L) \cap \mathrm{Gal}(E/M) = \mathrm{Gal}(E/\langle L, M\rangle).$$

3. Sea E/K de Galois y sean $K \subseteq L, M \subseteq E$ subcuerpos intermedios. Prueba que $L \subseteq M$ si, y solo si, $\mathrm{Gal}(E/M) \subseteq \mathrm{Gal}(E/L)$.
Sugerencia: La implicación directa se sigue de la definición de grupo de Galois de una extensión. Para el recíproco, nota que por el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois basta probar que $\mathrm{Gal}(E/M) = \mathrm{Gal}(E/\langle L, M\rangle)$*, ya que la inyectividad de f en el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois implica que $M = \langle L, M\rangle$ que contiene a L por definición. Usa el ejercicio 2.*

4. (Irracionalidades Naturales) Sea E/K y sean $K \subseteq L, M \subseteq E$ subcuerpos intermedios. Supongamos que $E = \langle L, M\rangle$ y sea $F= L \cap M$. Si M/K es de Galois, entonces E/L es de Galois y la restricción $\mathrm{Gal}(E/L) \to \mathrm{Gal}(M/F)$ es un isomorfismo de grupos.
Sugerencia: Prueba que E/L es de Galois. La restricción $\Theta\colon \mathrm{Gal}(E/L) \to \mathrm{Gal}(M/F)$ *definida por $\tau \mapsto \tau_M$ es un homomorfismo de grupos, usando que M/F es una subextensión normal de E/F. Demuestra que Θ es inyectiva y sobreyectiva usando el ejercicio 2 y el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois.*

5. Sea $\xi \in \mathbb{C}$ es una raíz primitiva n-ésima de la unidad, y $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ la n-ésima extensión ciclotómica de $\mathbb{Q}$.

a) Demuestra que $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ es una extensión abeliana.

b) Nota que el apartados anterior sigue siendo cierto si sustituimos $\mathbb{Q}$ por K con $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$.

c) ¿Es $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ siempre cíclico?

Sugerencia: Compara la última cuestión con el ejercicio 5 de la Hoja 4.

6. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva novena de la unidad y $E = \mathbb{Q}(\omega)$.

a) Calcula el polinomio mínimo de ω sobre $\mathbb{Q}$.

b) Encuentra todas las subextensiones de $E/\mathbb{Q}$.

c) Determina las órbitas que la acción de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ define sobre las raíces novenas de la unidad.

Sugerencia: Para el primer apartado nota que $x^3 - 1$ divide a $x^9 - 1$. Ahora tienes un polinomio de grado 6 del que ω es raíz. Encuentra dos extensiones sobre $\mathbb{Q}$ dentro de E que te permitan concluir que $|E : \mathbb{Q}| = 6$.

7. Prueba que la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt[3]{3}i)/\mathbb{Q}$ es radical.

8. Sea G un grupo finito.

a) Si G es resoluble y $H \leq G$, entonces H es resoluble.

b) Si $N \lhd G$, entonces G es resoluble si, y solo si, G/N y N son resolubles.

9. Sea G un grupo finito. Demuestra que G es resoluble si, y solo si, existe una serie $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{k-1} \lhd G_k = G$ tal que G_j/G_{j-1} es cíclico de orden primo para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Sugerencia: Para la implicación directa nota que si A es abeliano existe tal serie con cocientes cíclicos de orden primo, y luego refina una serie normal con cocientes abelianos de G usando la misma idea. El recíproco es obvio porque los cocientes cíclicos son, en particular, abelianos.

10. Demuestra que S_4 es resoluble. Demuestra que S_n no es resoluble para todo $n \geq 5$.

11. Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 5. Demuestra que si f es resoluble por radicales, entonces $|\mathrm{Gal}(f)| \leq 24$.

12. Sea p un primo y sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible de grado p. Supongamos que f tiene exactamente dos raíces no reales en $\mathbb{C}$. Demuestra que entonces $\mathrm{Gal}(f) \cong \mathsf{S}_p$.
Sugerencia: Utiliza que S_p está generado por las permutaciones (12) y $(12\ldots p)$.

13. Demuestra que el polinomio $x^5 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ no es resoluble por radicales.