# Hoja 6

1. Decide, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.

   V (a) Sean $S_1$ y $S_2$ dos superficies isométricas, y sea $h : S_1 \to S_2$ una isometría entre ellas. Sea $\alpha(s)$ una curva en $S_1$, y sea $\beta(s) = h \circ \alpha(s)$. Si $\alpha$ está parametrizada por longitud de arco, entonces $\beta$ también lo está.

   F (b) Sean $S_1$ y $S_2$ dos superficies isométricas, y sea $h : S_1 \to S_2$ una isometría entre ellas. Sea $\alpha(s)$ una curva en $S_1$, y sea $\beta(s) = h \circ \alpha(s)$ la correspondiente curva en $S_2$. Entonces las curvaturas normales de $\alpha$ y $\beta$ son iguales.

   V (c) Sea $S$ una superficie regular. Si todos los puntos de $S$ son elípticos, entonces $S$ no puede contener ninguna recta afín.

   F (d) Sea $S$ una superficie regular. Si por un punto $\mathbf{p} \in S$ pasan dos rectas contenidas en $S$, entonces $p$ tiene que ser plano.

   V (e) Sea $S$ una superficie regular. Si por un punto $\mathbf{p} \in S$ pasan tres rectas contenidas en $S$, entonces $p$ tiene que ser plano.

2. Sea $S$ el helicoide parametrizado por: $\mathbf{X}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$.

   (a) Elige un campo normal unitario y halla las formas fundamentales primera y segunda.

   (b) Calcula la matriz del endomorfismo de Weingarten $W = dN$ en la base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$.

   (c) Calcula las curvaturas gaussiana y media.

3. Demuestra que si la curvatura media se anula en un $p \in S$ y $p$ no es un punto plano, entonces existen dos direcciones asintóticas ortogonales en $p$.

4. Demuestra que una curva biregular contenida en una superficie $S$ es asintótica si y sólo si su plano osculador es tangente a la superficie en cada punto.

   $\langle N \circ \alpha, t_\alpha \rangle = 0 \xrightarrow{\text{derivas}}$ y supones p.a.l. y como biregular $\Rightarrow K_\alpha \neq 0$

5. Sea $S$ la superficie parametrizada por:

$$\mathbf{X}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u - v^2, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

   Clasifica sus puntos en elípticos, hiperbólicos, parabólicos o planos. Determina si hay algún punto umbilical.

6. El *paraguas de Whitney* es la superficie $S$ parametrizada por $\mathbf{X}(u, v) = (u, uv, v^2)$.

   (a) Comprueba que $\mathbf{X}$ es regular en todos los puntos excepto en $(u, v) = (0, 0)$.

   (b) Calcula la segunda forma fundamental y comprueba que todos los puntos con $v \neq 0$ son hiperbólicos.

   x (c) Las líneas $v = \text{cte}_1$ son rectas afines, y por lo tanto líneas asintóticas de $S$. Halla la otra familia de líneas asintóticas, expresándola como $u \cdot h(v) = \text{cte}_2$ donde $h(v)$ es cierta función solamente de $v$. Demuestra que, aparte de la semirrecta $u = 0$ y las reglas $v = \text{cte}_1$, el paraguas de Whitney no contiene ningún trozo de recta afín.

7. Sea $\alpha(u)$ una curva birregular en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por arco, y sea $\{\mathbf{t}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)\}$ su triedro de Frenet. Sea S la parte de la supercie tangencial de $\alpha$ dada por la siguiente parametrización: $\Phi(u,v) = \alpha(u) + v\mathbf{t}(u)$, con $v > 0$.

   (a) Halla una normal unitaria $N(u,v)$ y utilízala para calcular directamente el endomorfismo de Weingarten $W = dN$ (sin pasar por la segunda forma fundamental).

   (b) Clasifica sus puntos en elípticos, hiperbólicos, parabólicos o planos.

   (c) Demuestra que si la torsión de $\alpha$ no se anula, entonces las reglas $u = cte$ son los únicos elementos rectilíneos contenidos en $S$. Sugerencia: Determina las líneas asintóticas. Deduce que $S$ no es ni un cilindro ni un cono (sin embargo es localmente isométrica al plano, según se vió en el ejercicio 9 de la hoja 5).

8. Sea $\alpha(u) = (r(u), z(u)$ con $u \in J$, un perfil en el plano $rz$, y sea $S$ la superficie de revolución que se obtiene al rotar $\alpha$ alrededor del eje $z$. Tenemos para $S$ la parametrización:

$$\mathbf{X}(u, \theta) = (r(u)\cos\theta,\ r(u)\mathrm{sen}\,\theta,\ z(u))$$

   (a) Eligiendo la normal unitaria $N = (X_u \times X_\theta)/\ell$ con $\ell = \|X_u \times X_\theta\|$, calcula la segunda forma fundamental.

   (b) Halla la matriz del endomorfismo de Weingarten $W = dN$ en la base $\{X_u,\ X_\theta\}$ y comprueba que es una matriz diagonal ¿cuáles son las líneas de curvatura?

   (c) Comprueba que si $\alpha$ está parametrizada por longitud de arco entonces entonces $N = (-z'(u)\cos\theta,\ -z'(u)\mathrm{sen}\,\theta,\ r'(u))$. Demuestra que en este caso las curvaturas principales vienen dadas por las siguientes fórmulas:

$$r'(u)z''(u) - r''(u)z'(u) \quad \text{y} \quad \frac{z'(u)}{r(u)}$$

9. Sea $S$ la esfera unidad menos un meridiano con parametrización:

$$\Phi(u,v) \equiv \big(\cos u \cos v\,,\ \cos u \mathrm{sen}\, v\,,\ \mathrm{sen}\, u\big), \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < 2\pi\,.$$

   (a) Para cada $c > 1$, encuentra funciones suaves $r_c(u)$ y $z_c(u))$, tales que si $S_c$ es la superficie de revolución parametrizada por

$$\mathbf{X}_c(u,\mu) \equiv \big(r_c(u)\cos(\mu)\,,\ r_c(u)\mathrm{sen}\,(\mu)\,,\ z_c(u)\big), \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < \mu < +\infty\,,$$

   entonces la aplicación $h_c : S \longrightarrow S_c$ dada por $\Phi(u,v) \mapsto \mathbf{X}_c(u, cv)$ es una isometría local. (Deja $z_c(u)$ indicada como una integral indefinida).

   (b) Haz dibujos de $S_2$ y $S_4$. ¿Cuántas preimágenes por $h_c$ tiene el punto $\mathbf{X}_c(0, \pi/2)$ para $c = 2$? ¿y para $c = 4$? ¿Qué le ocurre al ecuador de $S_c$ a medida que $c$ aumenta?

   (c) Demuestra que $z_c(\pi/2) - z_c(-\pi/2)$ es una función creciente de $c$. Explica por qué $S_c$ se va afilando a medida que $c$ aumenta. ¿A qué tiende $S_c$ cuando $c \longrightarrow \infty$?

   (d) Aplica el ejercicio anterior al perfil $\big(r_c(u)\,,\ z_c(u)\big)$ ¿conserva la isometría $h_c$ el par no ordenado de curvaturas principales? ¿conserva $h_c$ el producto de las curvaturas principales?

10. (a) Sea $\alpha(u)$ una curva birregular en el espacio, parametrizada por longitud de arco, con torsión constante $\tau \equiv 1$ y curvatura arbitraria $k(u) > 0$, y sea $\{\mathbf{t}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)\}$ su triedro de Frenet. Definimos una superficie $S$ mediante la parametrización:

$$\Phi(u,v) \equiv \alpha(u) + v\,\mathbf{b}(u)\,.$$

   Demuestra que $S$ contiene a $\alpha$ y calcula $I_\Phi$.

(b) Sean $\alpha_1(u), \alpha_2(u)$ dos curvas birregulares parametrizadas por longitud de arco, ambas con torsión constante 1 *pero con curvaturas* $k_1(u), k_2(u)$ *distintas.* A partir de $\alpha_1, \alpha_2$, construimos parametrizaciones respectivas $\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)$ igual que en el apartado (a) y llamamos $S_1, S_2$ a las superficies resultantes. Demuestra que la aplicación

$$h : S_1 \longrightarrow S_2 \qquad \text{definida por} \qquad \Phi_1(u,v) \longmapsto \Phi_2(u,v)$$

es una isometría local que lleva $\alpha_1$ a $\alpha_2$.

(c) Elige la normal unitaria $N$ de $S$ que cumple $N \cdot \mathbf{n}(u) > 0$, y demuestra que

$$II_S \equiv \sqrt{1+v^2}\, k(u)\, (du)^2 - 2\, \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\, du\, dv.$$

(d) Deduce que una familia de líneas asintóticas es la $u = \text{cte}$ y la otra viene dada por la ecuación $(1+v^2)\, k(u)\, u' - 2\, v' = 0$.

(e) Deduce también que las líneas de curvatura de $S$ vienen dadas por:

$$u'^2 + k(u)\, u'\, v' - \frac{v'^2}{1+v^2} = 0\,.$$

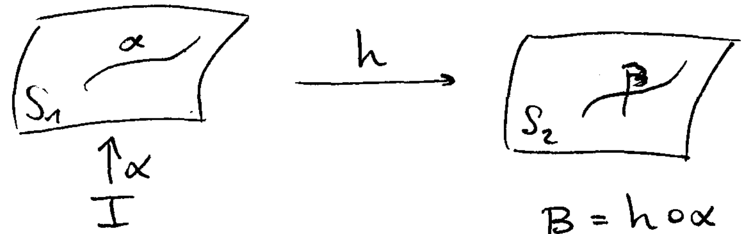
(f) Halla la matriz de $-W = -dN$ en la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ y utilízala para calcular la pareja $k_1, k_2$ de curvaturas principales de $S$.

(g) En vista del resultado en (d) dí, razonadamente, si la isometría $h$ del apartado (b) lleva o no líneas asintóticas de $S_1$ a líneas asintóticas de $S_2$ (recuerda que $k_1 \neq k_2$). Misma pregunta para líneas de curvatura.

(h) ¿Preserva la isometría $h$ del apartado (b) la pareja de curvaturas principales? ¿Preserva el producto de esas dos curvaturas?

HOJA 6

**1.** a) V




$\beta = h \circ \alpha$

$$\|\alpha'\| = 1 \implies \|\beta'\| = 1$$

$$\|(h\circ\alpha)'\| = \|(df)(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$$

b) F  Por ejemplo, plano $\longrightarrow K_{n,\alpha} \equiv 0$

cilindro $\longrightarrow$ hay curvas normales no nulas, como $\alpha$ círculo en el cilindro

c) V

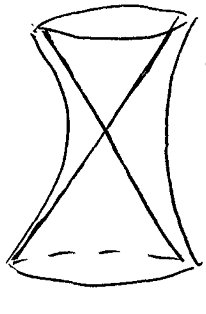
$p \in S$ elíptico si $K > 0$

Cambiando la orientación del normal si fuese necesario podemos suponer $k_1, k_2 > 0$ y también $k_1 \leq k_2$.

Si $S$ contuviese una recta, entonces esa recta tendría curvatura normal: $K_{n,\alpha} = k_\alpha \langle n_\alpha, N\rangle = 0$  $k_\alpha = 0$

Pero sabemos que todas las curvaturas normales de curvas parametrizadas por arco están en $[k_1, k_2]$. Contradicción pues $0 \notin [k_1, k_2]$

d) F  por ejemplo, el hiperboloide de una hoja



HOJA 4
EJ. 6

e) V  $\exists p \in S$ / hay 3 rectas en $S$ que pasan por $p$ ¿$\Rightarrow$ $p$ plano?

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : I \to S$ rectas $\Rightarrow K_{\alpha_i} = 0 \Rightarrow K_{n,\alpha_i} = 0 = \mathrm{II}(\alpha_i', \alpha_i')$  no hay 2 ...

Llamamos $v_i = \alpha_i'(t_0)$ y $\alpha(t_0) = p$. Entonces tenemos que $\exists v_1, v_2, v_3 \in T_p$ unitarios tal que $\mathrm{II}(v_i, v_i) = 0$  $i = 1,2,3$ $\implies \langle v_i, W v_i\rangle = 0$  $i = 1,2,3$.

Sea $\{v_1, v_2\}$ base de $T_pS$. ¿Cómo es la matriz de la forma bilineal $\mathrm{II}$ en esa base?

$$M\,\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \mathrm{II}(v_1,v_1) & \mathrm{II}(v_1,v_2) \\ \mathrm{II}(v_2,v_1) & \mathrm{II}(v_2,v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

↓ matriz de $(-dN)_p$ base $\{v_1,v_2\}$

$v_3 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$

$$0 = \mathrm{II}(v_3,v_3) = (\mu_1, \mu_2)\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 2a\mu_1\mu_2 \Rightarrow a = 0$$

porque $v_3$ es colineal con $v_1, v_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu_1 \neq 0 \neq \mu_2$

$$\Rightarrow W_p = 0 \Rightarrow \mathrm{II}_p = 0 \Rightarrow \text{plano}$$

**2.** $\mathbb{X}(u,v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\,v,\ v)$

a)

$\mathbb{X}_u(u,v) = (\cos v,\ \mathrm{sen}\,v,\ 0)$

$\mathbb{X}_v(u,v) = (-u\,\mathrm{sen}\,v,\ u\cos v,\ 1)$

$$N(u,v) = \frac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|} = \frac{(\mathrm{sen}\,v, -\cos v, u)}{\|(\mathrm{sen}\,v, -\cos v, u)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\mathrm{sen}\,v, -\cos v, u)$$

↑ campo unitario normal

$\mathbb{X}_{uu}(u,v) = (0,0,0)$

$\mathbb{X}_{uv}(u,v) = (-\mathrm{sen}\,v,\ \cos v,\ 0)$

$\mathbb{X}_{vv}(u,v) = (-u\cos v,\ -u\,\mathrm{sen}\,v,\ 0)$

$$I_{\mathbb{X}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

matriz de la 2ª forma fund. en la base $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$

$$\mathrm{II}_{\mathbb{X}}(u,v) \equiv \begin{pmatrix} \langle \mathbb{X}_{uu}, N\rangle & \langle \mathbb{X}_{uv}, N\rangle \\ \langle \mathbb{X}_{uv}, N\rangle & \langle \mathbb{X}_{vv}, N\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\{v_1,v_2\}$ base de $T_pS$. Sea $A$ matriz de la aplicación bilineal $\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ en base $\{v_1,v_2\}$. Entonces:

$$\mathrm{II}_p(a_1v_1 + a_2v_2,\ b_1v_1 + b_2v_2) = (a_1\ b_1)\,A\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

b) matriz de $W = -dN$ en $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$

igualdad de matrices

$$W \equiv I^{-1}\cdot \mathrm{II} \xrightarrow{\text{demostración}}$$

$$\mathrm{II}(v,w) = (v)^T_{base}\cdot \mathrm{II}_m \cdot (w)_{base}$$
$$\langle v, W.w\rangle = (v)^T_{base}\cdot I_m \cdot W_m \cdot (w)_{base}$$
$$\Rightarrow I_m W_m = \mathrm{II}_m \Rightarrow W = I_m^{-1}\cdot \mathrm{II}_m$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+u^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{(1+u^2)^3}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{respecto a } \{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$$

c) $K = \det W = \dfrac{-1}{(1+u^2)^2} = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = \dfrac{\frac{-1}{1+u^2}}{1+u^2} = \dfrac{-1}{(1+u^2)^2}$

$H = \operatorname{tr} W = 0 \implies$ superficie minimal

$\boxed{4.}$ $\alpha : I \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ birregular, e.d., $k_\alpha \neq 0$ y podemos suponerla parametrizada por arco.

$\underbrace{\alpha \text{ asintótica}}_{ⓐ} \iff \overbrace{\text{plano osculador de } \alpha \text{ es tangente a } S}^{ⓑ}$

$\alpha$ asintótica si $\mathrm{II}(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 0 \quad \forall s \in I$.

plano osculador en $\alpha(s)$ : $\operatorname{span}\{\mathbb{t}_\alpha(s), \mathbb{n}_\alpha(s)\}$

ⓑ $\iff \operatorname{span}\{\mathbb{t}_\alpha(s), \mathbb{n}_\alpha(s)\} = T_{\alpha(s)} S \quad \forall s \in I$

$\iff \langle \mathbb{t}_\alpha(s), N(\alpha(s)) \rangle = 0 = \langle \mathbb{n}_\alpha(s), N(\alpha(s)) \rangle$

$\frac{d}{ds}(N \circ \alpha) = dN(\alpha(s))$

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \mathbb{t}_\alpha(s), N(\alpha(s)) \rangle = \langle k_\alpha(s) \underbrace{\mathbb{n}_\alpha(s), N(\alpha(s))}_{\to 0} \rangle + \langle \mathbb{t}_\alpha(s), \frac{d}{ds} N(\alpha(s)) \rangle$$

$$= \langle \mathbb{t}_\alpha(s), \underbrace{dN(\alpha(s))}_{= -W_{\alpha(s)}} \cdot \underbrace{\alpha'(s)}_{\mathbb{t}_\alpha(s)} \rangle = -\mathrm{II}(\mathbb{t}_\alpha(s), \mathbb{t}_\alpha(s))$$

esto prueba ⓑ $\implies$ ⓐ

$$0 = \mathrm{II}(\alpha', \alpha') = \langle \alpha', -(dN)\alpha' \rangle = -\langle \alpha', (N \circ \alpha)' \rangle =$$

$$= -(\underbrace{\langle \alpha', N \circ \alpha \rangle}_{0})' + \langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle \implies \langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle = 0$$

0 porque $\alpha'$ es tangente y $N \circ \alpha$ es normal

$\langle \alpha'', N \circ \alpha \rangle = \langle k_\alpha \mathbb{n}_\alpha, N \circ \alpha \rangle =$

$= \underbrace{k_\alpha}_{\neq 0} \langle \mathbb{n}_\alpha, N \circ \alpha \rangle \implies$

$\implies \langle \mathbb{n}_\alpha, N \circ \alpha \rangle = 0$

esto demuestra ⓐ $\implies$ ⓑ

**5.** $\mathbb{X}(u,v)=(\cos u,\ \operatorname{sen} u - v^2,\ v)$ , $\mathbb{X}:(0,2\pi)\times\mathbb{R}\longrightarrow S\subset\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{X}_u(u,v)=(-\operatorname{sen}u,\ \cos u,\ 0)\\ \mathbb{X}_v(u,v)=(0,\ -2v,\ 1)\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{l}E=1\\F=-2v\cos u\\G=1+4v^2\end{array}$$

$\mathbb{X}_{uu}(u,v)=(-\cos u,\ -\operatorname{sen}u,\ 0)$

$\mathbb{X}_{uv}(u,v)=(0,0,0)$

$\mathbb{X}_{vv}(u,v)=(0,\ -2,\ 0)$

$$N(u,v)=\frac{\mathbb{X}_u(u,v)\times\mathbb{X}_v(u,v)}{\|\mathbb{X}_u(u,v)\times\mathbb{X}_v(u,v)\|}=\frac{(\cos u,\ \operatorname{sen}u,\ 2v\operatorname{sen}u)}{\underbrace{\sqrt{1+4v^2\operatorname{sen}^2u}}_{\equiv \ell}}$$

$$e=\langle\mathbb{X}_{uu},N\rangle=\frac{-1}{\ell}$$

$$f=\langle\mathbb{X}_{uv},N\rangle=0$$

$$g=\langle\mathbb{X}_{vv},N\rangle=\frac{-2\operatorname{sen}u}{\ell}$$

$B=\{\mathbb{X}_u(u,v),\ \mathbb{X}_v(u,v)\}$ $\quad I_B=\begin{pmatrix}1 & -2v\cos u\\ -2v\cos u & 1+4v^2\end{pmatrix}$ $\quad II_B=\begin{pmatrix}-1/\ell & 0\\ 0 & \frac{-2\operatorname{sen}u}{\ell}\end{pmatrix}$

$$K=\det W_\beta=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=\frac{\frac{2\operatorname{sen}u}{\ell^2}}{1+4v^2-4v^2\cos^2u}=\frac{2\operatorname{sen}u}{(1+4v^2\operatorname{sen}^2u)^2}$$

$\mathbb{X}(u,v)$ elíptico $\Longleftrightarrow K>0\Longleftrightarrow u\in(0,\pi)$ , $v$ arbitrario

$\mathbb{X}(u,v)$ hiperbólico $\Longleftrightarrow K<0\Longleftrightarrow u\in(\pi,2\pi)$ , $v$ arbitrario

$\mathbb{X}(u,v)$ plano $\Longleftrightarrow II_{\mathbb{X}(u,v)}=0$ lo cual no sucede en este ejemplo

$\mathbb{X}(u,v)$ parabólico $\Longleftrightarrow K=0$ y $II_{\mathbb{X}(u,v)}\neq 0\Longleftrightarrow u=\pi$

Hay algún punto umbilical?

$$\frac{-1}{\ell}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\operatorname{sen}u\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1 & -2v\cos u\\ -2v\cos u & 1+4v^2\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=\frac{-1}{\ell}\ \text{(fijándonos en la } 1^{a} \text{ coordenada)}\\ \lambda v\cos u=0\Longleftrightarrow v\cos u=0\\ \frac{-2\operatorname{sen}u}{\ell}=-\frac{1+4v^2}{\ell}\Longleftrightarrow \begin{array}{c}2\operatorname{sen}u\\ \shortparallel\\ 1+4v^2\end{array}\end{array}\right.$$

• Dos casos:

$\boxed{v=0} \Rightarrow 2\,\text{sen}\,u = 1 \Rightarrow u \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

$\boxed{\cos u = 0} \Rightarrow u \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \circ \text{ bien } & 2 = 1 + 4v^2 \quad (*) \\ \circ \text{ bien } & -2 = 1+4v^2 \quad \text{imposible} \end{cases}$

$(*) \Rightarrow v = \pm \frac{1}{2}$

Los puntos umbílicos de $S$ son: $\mathbb{X}\left(\frac{\pi}{6}, 0\right), \mathbb{X}\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right), \mathbb{X}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right), \mathbb{X}\left(\frac{\pi}{2}, -\right.$

$\boxed{10.}$

a) $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birregular con $\tau \equiv 1$.

$$\Phi(u,v) = \alpha(u) + v\mathbb{b}(u)$$

$S = \Phi(I \times \mathbb{R})$

$\alpha(u) = \Phi(u,0) \Rightarrow \alpha(I) \subset S$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_u(u,v) &= \mathbb{t}(u) - \tau v \mathbb{n}(u) \overset{\tau \equiv 1}{=} \mathbb{t}(u) - v\mathbb{n}(u) \\ \Phi_v(u,v) &= \mathbb{b}(u) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{siempre} \\ \text{lin. indep.}\end{array}$$

$\Rightarrow S = \Phi(I \times \mathbb{R})$ es superficie regular

$$I_\Phi \equiv \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\alpha_1, \alpha_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birregulares, por arco, $\tau_1 \equiv \tau_2 \equiv 1$, $K_1 \neq K$

$\hookrightarrow \Phi_1, \Phi_2$ parametrizaciones $\Phi_i(u,v) = \alpha_i(u) + v\mathbb{b}_{\alpha_i}(u)$, $i = 1,2$

¿ $h : S_1 \longrightarrow S_2$ isometría local / $h(\alpha_1(u)) = \alpha_2(u)$ $\forall u \in I$ ?

$\underline{h(\Phi_1(u,v)) = \Phi_2(u,v)}$

$\Downarrow$

$\tilde{h} = Id$

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "h"] & S_2 \\ I\times\mathbb{R} \arrow[u, "\Phi_1"] \arrow[r, "\tilde{h}"] & I\times\mathbb{R} \arrow[u, "\Phi_2"'] \end{tikzcd}$$

$(u,v) \longmapsto (u,v)$

$\tilde{h} = Id$

$\tilde{h} = \Phi_2^{-1} \circ h \circ \Phi_1$

$I_{\Phi_1}(u,v) = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} I_{\Phi_2}(u,v) \quad \forall u,v$

lo hecho en el apart. a) para $\Phi$ se pued hacer pa $\Phi_2$.

$\Rightarrow h$ isometría local

$I_{\Phi_1} = I_{\Phi_2} \Rightarrow h$ isometría local

esta implicación solo vale cuand $\tilde{h} = Id$

- isometría local $\overset{def.}{\iff}$ $\langle (dh)(p)\,v,\ (dh)(p)\,w\rangle = \langle v,w\rangle \quad \forall p\in S_1 \quad \forall v,w\in T_pS_1$

DEMOSTRACIÓN CON LA DEFINICIÓN:

$E_1 = \langle (\Phi_1)_u, (\Phi_1)_u\rangle$ , $E_2 = \langle (\Phi_2)_u, (\Phi_2)_u\rangle$

$$\langle (dh)(p)(\Phi_1)_u,\ (dh)(p)(\Phi_1)_u\rangle \overset{?}{=} \langle (\Phi_1)_u, (\Phi_1)_u\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}(h\circ\Phi_1)(u_0,v_0),\ \frac{\partial}{\partial u}(h\circ\Phi_1)(u_0,v_0)\right\rangle$$

$$= \langle (\Phi_2)_u(u_0,v_0),\ (\Phi_2)_u(u_0,v_0)\rangle$$

$$= E_2(u_0,v_0)$$

apart. a $\longrightarrow$ $= E_1(u_0,v_0) = \langle (\Phi_1)_u, (\Phi_1)_u\rangle$

Falta hacer lo mismo con $\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}$ y $\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}$

Ahora falta ver que $h(\alpha_1(u)) = \alpha_2(u)\ \forall u\in I$:

$$h(\alpha_1(u)) = h(\Phi_1(u,0)) \overset{def.\,h}{=} \Phi_2(u,0) = \alpha_2(u)$$

c) $N$ normal unitario tal que $\langle N, \mathbb{n}\rangle > 0$

Probar $\mathrm{II} = \sqrt{1+v^2}\,K(u)(du)^2 - 2\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,du\,dv$

Por a) $T_{\Phi(u,v)}S = \operatorname{span}\{\mathbb{t}(u) - v\,\mathbb{n}(u),\ \mathbb{b}(u)\}$

Un campo normal unitario es:

$$\frac{\Phi_u\times\Phi_v}{\|\Phi_u\times\Phi_v\|} = \frac{-\mathbb{n}(u) - v\,\mathbb{t}(u)}{\sqrt{1+v^2}}$$

para que $\langle N, \mathbb{n}\rangle > 0$ consideramos el opuesto:

$$N(u,v) = \frac{\mathbb{n}(u) + v\,\mathbb{t}(u)}{\sqrt{1+v^2}} \quad \text{que cumple } \langle N,\mathbb{n}\rangle > 0$$

$$\Phi_{uu}(u,v) = K(u)\,\mathbb{n}(u) + v\,K(u)\,\mathbb{t}(u) - v\,\underset{}{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\tau(u)}}}\,\mathbb{b}(u)$$

$$\Phi_{uv}(u,v) = -\mathbb{n}(u)$$

$$\Phi_{vv}(u,v) = 0$$

$$e = \langle \Phi_{uu}, N \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \left( K(u) + v^2 K(u) \right) = K(u)\sqrt{1+v^2}$$

$$f = \langle \Phi_{uv}, N \rangle = \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}}$$

Recuerdo:

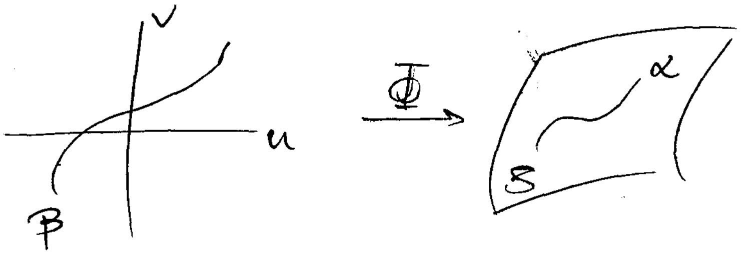
$$II \equiv \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \equiv e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

$$g = \langle \Phi_{vv}, N \rangle = 0$$

d) ¿Líneas asintóticas?

$v \in T_pS$ DIRECCIÓN ASINTÓTICA si $II_p(v,v) = 0$

$\alpha: I \longrightarrow S$ curva es LÍNEA ASINTÓTICA si $II_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$




Busquemos $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\Phi \circ \beta$ línea asintótica,

e.d. $0 = II_{\Phi\circ\beta(t)}\left((\Phi\circ\beta)'(t), (\Phi\circ\beta)'(t)\right) \qquad \beta(t) = (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$

$$(\Phi\circ\beta)'(t) = \Phi_u(\beta(t)) . u'(t) + \Phi_v(\beta(t))\, v'(t)$$

$$\to 0 = (u', v') \begin{pmatrix} K(u)\sqrt{1+v^2} & \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow 0 = (u', v') \begin{pmatrix} K(u)\sqrt{1+v^2}\, u' - \frac{v'}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{-u'}{\sqrt{1+v^2}} \end{pmatrix} = K(u)\sqrt{1+v^2}\,(u')^2 - \frac{2u'v'}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$= u'\left( K(u)\sqrt{1+v^2}\, u' - 2\frac{v'}{\sqrt{1+v^2}} \right)$$

- $u' = 0 \Rightarrow u = cte.$

e) líneas de curvatura de $S$.

$\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ línea de curvatura si $\alpha'(t) = \Phi_u(u(t),v(t))\, u'(t) +$

$\Phi_v(u(t),v(t))\, v'(t)$ es dirección de curvatura $\forall t$.

$W_{\alpha(t)}\, \alpha'(t) = \lambda(t) . \alpha'(t)$ para cierta $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\forall t \in I$.

En la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ esto equivale: $(I_{\alpha(t)})^{-1} (II_{\alpha(t)}) \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow (II) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ proporcional a $(I) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ $(*)$

Teníamos: $(I) \equiv \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(II) \equiv \begin{pmatrix} K(u)\sqrt{1+v^2} & \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(*) \Longleftrightarrow \det \left( (II) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \Bigg| (I) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} K(u)\sqrt{1+v^2}\, u' - \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} v' & (1+v^2)\, u' \\ \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} u' & v' \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow K(u) \sqrt{1+v^2}\, u'v' - \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} v'^2 + \frac{(1+v^2)\, u'^2}{\sqrt{1+v^2}} = 0$$

Dividiendo por $\sqrt{1+v^2}$:

$$0 = K(u)\, u'v' - \frac{v'^2}{1+v^2} + u'^2 \quad \blacksquare$$

f) $W = -dN$

La expresión matricial de $W$ en la base $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ viene dada por:

$$W = (\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{II}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+v^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K(u)\sqrt{1+v^2} & \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{K(u)}{\sqrt{1+v^2}} & -(1+v^2)^{-3/2} \\ -(1+v^2)^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\begin{pmatrix} K(u) & -\frac{1}{1+v^2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores:

$$\det\begin{pmatrix} K(u)-\lambda & \frac{-1}{1+v^2} \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - K(u)\lambda - \frac{1}{1+v^2} = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = \frac{K(u) \pm \sqrt{K(u)^2 + 4/(1+v^2)}}{2}$$

Las curvaturas principales: $\dfrac{K(u) \pm \sqrt{K(u)^2 + \frac{4}{1+v^2}}}{2\sqrt{1+v^2}}$

g) d) decía que las líneas asintóticas de $S$ son $u = cte.$ y $(1+v^2)K(u)u' - 2v' = 0$.

$\alpha_1, \alpha_2$ por arco con $K_{\alpha_1} \neq K_{\alpha_2}$, $\tau_{\alpha_i} \equiv 1$ (ambas curvas)

$\alpha_1 \rightsquigarrow \Phi_1$, $\alpha_2 \rightsquigarrow \Phi_2$ $\qquad \Phi_i(u,v) = \alpha_i(u) + b_{\alpha_i}(u)$

$h: S_1 \longrightarrow S_2$, $h(\Phi_1(u,v)) = \Phi_2(u,v)$ $\qquad$ Vimos en b) que $h$ es isometría local.

La curva $u=cte.$ en $S_1$ es enviada por $h$ en la curva $u=cte.$ en $S_2$, que por d) es línea asintótica de $S_2$.

Las curvas $\Phi_1(u(t), v(t))$ en $S_1$ que cumplen $(1+v^2)K_{\alpha_1}(u)u' - 2v' = 0$ son líneas asintóticas en $S_1$.

Por $h$, tales curvas van en curvas en $S_2$ $\Phi_2(u(t), v(t))$ tales que $(1+v^2)K_{\alpha_1}(u)u' - 2v' = 0$. Pero como $K_{\alpha_1} \neq K_{\alpha_2}$, la curva en $S_2$ que cumple $(1+v^2)K_{\alpha_1}(u)u' - 2v' = 0$ no cumple ni $u=cte$, ni que $(1+v^2)K_{\alpha_2}(u)u' - 2v' = 0$, que son las condiciones de ser línea asintótica en $S_2$.

La isometría local $h$ no preserva líneas asintóticas

TEORÍA: las isometrías locales preservan las propiedades intrínsecas (las que dependen solo de la $1^{a}$ FF). Las líneas asintóticas son $\mathrm{II}(\alpha',\alpha') = 0$ y la $2^{a}$ FF depende de $N$, que es extrínseco a la superficie (se sale de ella). Las líneas de curvatura tampoco se conservarían si dependiesen de otra cosa que no fuese de la $1^{a}$ FF

Las líneas de curvatura tampoco se preservan por $h$, ya que en su expresión $0 = K_\alpha(u)u'v' - \dfrac{v'^2}{1+v^2} + u'^2$ aparece la curvatura de $\alpha_i$, $i\in\{1,2\}$.

h) Preserva $h$ las curvaturas principales?

$\{K_1^{S_1}, K_2^{S_1}\}$ curvaturas principales de $S_1$

$\{K_1^{S_2}, K_2^{S_2}\}$ curvaturas principales de $S_2$

¿$K_j^{S_2}(u,v) = K_j^{S_1}(u,v)$?

Como dependen de $K_{\alpha_i} \Rightarrow$ no se preservan.

Preserva $h$ el producto de las curvaturas principales?
Tal producto es la curvatura de Gauss que es $K = \det W$.
En ambos casos ($S_1$ y $S_2$) $K_i = \det W^{S_i} = \det\begin{pmatrix} \frac{K_{\alpha_i}(u)}{\sqrt{1+u^2}} & -(1+v^2)^{-3/2} \\ -(1+v^2)^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = -(1+v^2)^{-2}$

Como no dependen de $K_{\alpha_i} \Rightarrow$ la curvatura de Gauss se preserva

$\boxed{6.}$ $X(u,v) = (u, uv, v^2)$ $\qquad S = X(\mathbb{R}^2)$

a) ¿$X$ es regular en $(u,v) = (0,0)$?

$X_u(u,v) = (1, v, 0)$

$X_v(u,v) = (0, u, 2v)$

Son linealmente independientes $\Leftrightarrow (0,u,2v) \neq (0,0,0) \Leftrightarrow (u,v) \neq (0,$

¿Es $X$ parametrización?

Hay que ver si $X$ es inyectiva:

$$(u, uv, v^2) = (\bar{u}, \bar{u}\bar{v}, \bar{v}^2) \Rightarrow \begin{cases} u = \bar{u} \\ uv = \bar{u}\bar{v} = u\bar{v} \underset{\text{si } u \neq 0}{\Longrightarrow} \bar{v} = v \end{cases}$$

si $u = 0$: $v^2 = \bar{v}^2 \Rightarrow \bar{v} = \pm v$ aquí no sería inyectiva

Para que $X$ sea inyectiva lo consideramos definida en $(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}$.

b) $X_{uu} = (0,0,0)$, $X_{uv} = (0,1,0)$, $X_{vv} = (0,0,2)$

$$(I) \equiv \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & u^2+4v^2 \end{pmatrix}$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(2v^2, -2v, u)}{\sqrt{4v^4+4v^2+u^2}}$$

$e = \langle X_{uu}, N \rangle = 0$ $\qquad \ell = \sqrt{4v^4+4v^2+u^2}$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{-2v}{\sqrt{4v^4+4v^2+u^2}} \Rightarrow (II) \equiv \frac{1}{\ell}\begin{pmatrix} 0 & -2v \\ -2v & 2u \end{pmatrix}$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{2u}{\sqrt{4v^4+4v^2+u^2}}$$

$X(u,v)$ punto hiperbólico $\Leftrightarrow K(u,v) < 0$

$$K = \det W = \det\left((I)^{-1}(II)\right) = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{-4v^2/\ell^2}{\underbrace{EG-F^2}_{>0}} < 0 \Leftrightarrow v \neq 0$$

Los puntos $X(u,0)$, $u \neq 0$, son parabólicos ya que $K(u,0) = 0$ pero $II_{X(u,0)} \neq 0$.

c) $v = v_0 = cte \Longrightarrow$ recta

$\alpha(u) = (u, uv_0, v_0^2) = (0, 0, v_0^2) + u(1, v_0, 0) \in S \quad , \forall u \in \mathbb{R}$

Por tanto es línea asintótica.

Halla la otra familia, expresando tales líneas asintóticas como $u \cdot h(v) = cte_2$

$\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ asintótica

$$\mathrm{II}(\alpha', \alpha') = 0 \iff (u', v') \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} 0 & -2v \\ -2v & 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \iff \cdots$$

$$\iff h(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \Longrightarrow \frac{u}{\sqrt{v}} = cte \Longrightarrow \mathbb{X}(c\sqrt{v}, v) = (c\sqrt{v}, c\sqrt{v}\,v, v^2)$$

no es una recta.

paso dudoso } $\rightarrow$ preguntárselo !