$\boxed{\text{HOJA 4}}$

$\boxed{44.}$ Una función real $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica cuando es de clase $\mathcal{C}^2$ y verifica $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

En nuestro caso $u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ es $\mathcal{C}^2$ para cualquier $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Con respecto a Δu, tenemos:

$$u_x = 3ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$u_y = bx^2 + 2cxy + 3dy^2$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{xx} = 6ax + 2by \\ u_{yy} = 2cx + 6dy \end{array}\right\} u_{xx} + u_{yy} = 6ax + 2cx + 2by + 6dy = (6a+2c)x + (2b+6d)y = 0 \iff$$

$\iff c = -3a$, $b = -3d$ ya que, de otro modo, el conjunto $\{(x,y) : \Delta u(x,y) = 0\}$ sería una recta en $\mathbb{R}^2$.

Por tanto, $u(x,y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$

Adicionalmente, si nos pidiesen encontrar $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $u = \mathrm{Re}(f)$, entonces usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$u_x = 3ax^2 - 6dxy - 3ay^2 = v_y$, luego,

$v(x,y) = 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + C(x)$, y ahora,

$$\left.\begin{array}{l} -u_y = 3dx^2 + 6axy - 3dy^2 \\ \quad \parallel \\ v_x = 6axy - 3dy^2 + C'(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow C(x) = dx^3 + K$$

$\Rightarrow f(x+iy) = (ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3) + i(3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + dx^3) + K$

Veamos si se puede expresar de forma más estética:

Si $y=0$, $f(x) = ax^3 + idx^3 + K = x^3(a+id) + K$

Definamos $g(z) = z^3(a+id) + K$. Resulta que

$$f|_{\mathbb{R}} = g|_{\mathbb{R}} \Longrightarrow f \equiv g$$

principio de identidad

15.1 $u(x,y) = \log\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{C-R:}\\ u_x = v_y \\ u_y = -v_x\end{array}}$$

$$u_x = \frac{-x}{x^2+y^2} = v_y \quad ; \quad u_y = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$v = \int \frac{-x}{x^2+y^2}\,dy = -x\int \frac{1}{x^2+y^2}\,dy = -x\int \frac{1/x}{1+(y/x)^2}\,dy = -\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C(x)$$

$$v_x = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(x) \implies -v_x = \frac{-y}{x^2+y^2} - C'(x)$$

Como $-v_x = u_y \implies C'(x) = 0 \implies C(x) = x + K$

$$\boxed{v = -\operatorname{arctg}(y/x) + x + K}$$

17. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n$

$$:= \left[\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4}\right]^{-1} \overset{\text{si lim existe}}{=} \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4}\right]^{-1} = \left[\lim_{n\to\infty} n^{4/n}\right]^{-1} = 1^{-1} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\,z^n \quad ; \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2}\cdot z^n \quad ; \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2^{n^2}}{1/2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}} = 2^{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

TRA FORMA: $R = \left[\limsup_n \sqrt[n]{1/2^{n^2}}\right]^{-1} = \left[\limsup_n 1/2^n\right]^{-1} = \dfrac{1}{0} = \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \;;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \quad \text{donde} \quad a_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n! \text{ para algún } n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Por lo tanto, $R = \left[\limsup_n 1^{n!}\right]^{-1} = 1^{-1} = 1$

48. Para calcular el radio de convergencia de una serie $\sum a_n (z-a)^n$, además de la definición $R = \left(\limsup_n |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$, hay que usar en algunas ocasiones que:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{(criterio cociente)} \quad \text{cuando el lím existe.}$$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{z^n}{n^n}$; $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$; A pesar de no haber definido aún el coseno complejo, podemos usar la siguiente fórmula:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow \cos(in) = \frac{e^{-n} + e^{n}}{2}$$

$$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}+e^{n}}{2} \cdot \frac{2}{e^{-(n+1)} + e^{n+1}} = \frac{1}{e}$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$; $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|n+a^n|}{|(n+1)+a^{n+1}|} = \begin{cases} 1 & \text{si } |a| \leq 1 \\ \frac{1}{|a|} & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

siendo $b_k = \begin{cases} a^{n^2} & \text{si } k = \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, entonces $\limsup_k |b_k|^{1/k} =$

$$= \lim_n \left(a^{n^2}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}} = a^2 \Rightarrow R = a^{-2}$$

4.1

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, con $a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impar} \\ \frac{1}{(k/2)!} & \text{si } k \text{ par} \end{cases}$

para calcular el radio de convergencia conviene recordar la órmula de Stirling: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$, que viene a decir ue $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ y tiene como consecuencia $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, azón por la cual la función exponencial tiene radio de nvergencia R = infinito. En nuestro caso, $\limsup_n |a_k|^{1/k} =$

$$= \lim_{2n\to\infty} \frac{1}{(n!)^{1/2n}} = \lim_{2n\to\infty} \left(\frac{1}{(n!)^{1/n}}\right)^{1/2} = 0 \implies R = \infty$$

dicionalmente, vemos que: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = e^{z^2}$

) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2\pi i)^n}{n!}$; Si hacemos el cambio $\omega = z - 2\pi i$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2\pi i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^n}{n!} = e^{-\omega} = e^{-(z-2\pi i)}$$

siendo el radio de convergencia, como en el caso de e^z, infinito.

) Conviene recordar que si $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \implies g^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n = 2.1.z^2 + 3.2.z^3 + \dots + n(n-1)z^n + \dots =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}$$

si tenemos en cuenta que $f(z) = 0 + z + \dots + z^n + \dots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (con convergencia $R=1$) entonces: $f''(z) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} = 2(1-z)^{-3}$

de modo que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n = z^2 . 2(1-z)^{-3}$

Ejemplo: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, calcular $f'(z)$, $g'(z)$ y sumar las correspondientes series

50.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$$

es fácil ver que $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = z f'(z)$

Por otro lado, $f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n z^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-2}$

La primera de estas dos series se parece a lo que nos pide calcul y, la segunda, a la calculada anteriormente:

$$z f'(z) = a_1 z + 2a_2 z^2 + \cdots + n a_n z^n + \cdots = a_1 z + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-2}$$

Ahora, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n = a_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n = a_1 z + z^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^{n-2} =$

$$= a_1 z + z^2\left(f''(z) + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-2}\right) =$$

$$= a_1 z + z^2 f''(z) + z f'(z) - a_1 z = z^2 f''(z) + z f'(z)$$

51.

a) $\dfrac{z}{z^2-5z+6} = \dfrac{z}{z-3} - \dfrac{z}{z-2} = \dfrac{-z}{3-z} + \dfrac{z}{2-z} = \dfrac{-z/3}{1-z/3} + \dfrac{z/2}{1-z/2}$

$$= \frac{-z}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n + \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) z^n$$

b) $f(z) = \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $f'(z) = \dfrac{-1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -n z^{n-1}$

luego $\dfrac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

c) $g(z) = \frac{\quad}{z+1} = \frac{\quad}{2+(z-1)} = \frac{\quad}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}\left(\frac{-1}{2}\right)^n (z-1)^n$

$$g'(z) = \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n n(z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} n(z-1)^{n-1}$$

$$\frac{2(z-1)+5}{(z+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n n(z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} n(z-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n n(z-1)^n + \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+2}(n+1)(z-1)^n =$$

$$= \frac{5}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^n n + 5\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+2}(n+1)\right](z-1)^n$$

52. DATOS: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ con $R=1$ y $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$.

Para $n \geq 0$ y $z \in D(0,1)$, sean $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ y $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

) $(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} S_k z^k + S_n z^n = \sum_{k=0}^{n-1} S_k z^k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k z^{k+1} + S_n z^n =$

$$= S_0 z^0 + \sum_{k=1}^{n-1}(S_k - S_{k-1}) z^k + (S_n - S_{n-1}) z^n = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k z^k + a_n z^n = S_n(z)$$

Entonces: $f(z) = \lim_n S_n(z) = \lim_n \left[(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} S_k z^k + S_n z^n\right] =$

$$= (1-z)\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} S_k z^k + \lim_n S_n z^n =$$

$$= (1-z)\sum_{k=0}^{\infty} S_k z^k$$

Observación: $\sum_{k=0}^{\infty} S_k z^k$ es convergente si $|z|<1$ porque $\{S_k\}$ es acotada, y $\lim_n S_n z^n = 0$ porque $\{|z|^n\}$ es acotada y $\{S_n\} \to 0$

Ahora, como $f(z)$ está definida para $z=1$, por ser $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergente, ¿es $f(z)$ continua en $z=1$?

b) Lo que se prueba en este apartado es que si $\Omega \subset \{|z|<1\}$ y $M>0$ satisfacen $|1-z| \leq M(1-|z|)$ $\forall z \in \Omega$, entonces

$$f(z) \longrightarrow 0 = f(1) \quad \text{si} \quad \left.\begin{array}{l} z \to 1 \\ z \in \Omega \end{array}\right\}$$

Como $\{S_k\} \longrightarrow 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S_k| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$ si $k \geq n_0$

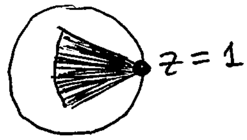
Sea $m(n_0) = \sup\{|S_k| : k \leq n_0, 1\} > 0$. Entonces, si $z \in \Omega$, y

$|z-1| < \dfrac{\varepsilon}{2(n_0+1)\, m(n_0)}$ tenemos: $\left|f(z)\right| = |1-z| \left|\sum_{k=0}^{\infty} S_k z^k\right| \leq$

$$\leq |1-z| \left|\sum_{k=0}^{n_0} S_k z^k\right| + |1-z| \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |z|^k \leq$$

$$\leq |1-z| \, (n_0+1)\, m(n_0) + |1-z| \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \frac{1}{1-|z|} \leq \varepsilon$$

El conjunto Ω recibe el nombre de "dominio de Stolz" y tiene relación con una región llamada "ángulo de Stolz" que es un sector circular con vértice en $z=1$



Los detalles de esta relación se pueden ver en:

https://demostrations.wolfram.com/StolzAngle/

54.) ¿En qué puntos del plano son $\mathbb{C}$-diferenciables las siguientes func:

a) $f(z) = \operatorname{sen}(e^{z}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ por ser composición de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.

b) $g(z) = \cos(\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}\right)$ Podemos utilizar el ejercicio 40.b que establece que si $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω dominio simétrico, entonces $g = h(\bar{z})$ es derivable en $a \in \Omega \iff g'(a) = 0$.

En nuestro caso, $g'(\bar{a}) = \cos'(\bar{a}) = -\operatorname{sen}\bar{a} = 0$

Hay que resolver la ecuación $\operatorname{sen}\bar{z} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}\right) = 0$

$$e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}} = 0 \iff e^{i\bar{z}+i\bar{z}} - 1 = 0 \iff e^{2i\bar{z}} - 1 = 0$$

$$\iff e^{2i(x-iy)} = 1 \iff e^{2y}\cdot e^{2xi} = 1 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Obsérvese que si la pregunta hubiera sido relativa a la función $e^{\bar{z}} = g(z)$, la respuesta sería que g no es derivable en ningún punto porque $e^{z} = 0$ no tiene solución.

c) $h(z) = \dfrac{1}{e^{z} - 1}$, será derivable cuando $e^{z} - 1 \neq 0$

$$e^{z} = e^{x}\cdot e^{iy} = 1 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Obsérvese que, al contrario de la exponencial real, la exponencial compleja no es inyectiva.

d) $g(z) = \dfrac{1}{e^{z} - e^{-z}}$, será derivable cuando $e^{z} - e^{-z} \neq 0 \iff$

$$\iff e^{z} = e^{-z} \iff \begin{cases} x = -x \iff x = 0 \\ y = -y + 2k\pi \iff y = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

155.1

TEORÍA: Para desarrollar en series de potencias el producto de las funciones, conviene tener en cuenta que si $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ tienen radio de convergencia $\geq r > 0$ entonces $\sum c_n z^n$ tiene radio de convergencia $\geq r$, siendo $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Además, $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = \sum c_n z^n$ si $|z| \leq r$.

a) $$f(z) = (1-z)\cos z = (1-z)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}(-1)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!}\left((-1)^n z^{2n} + (-1)^{n+1} z^{2n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{con} \quad a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+1}}{(n-1)!} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} = 0$$

obs: No se puede aplicar el criterio del cociente

b) $$g(z) = \frac{e^{-z}}{1+z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n z^k$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$\limsup |c_n|^{1/n} \leq 1$ por el resultado mencionado arriba

$\limsup |c_n|^{1/n} \geq 1$ porque $|c_n| \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \limsup |c_n|^{1/n} = 1$.

l) $$h(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{1-z^2} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)\left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots\right) =$$

$$= z + \left(1 - \frac{1}{3!}\right)z^3 + \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right)z^5 + \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}\right)z^7 + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right)}_{c_n} z^{2n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} c_n := c > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \limsup |c_n|^{1/n} = 1$

60. La teoría de las series absolutamente convergentes
esencialmente, en la de series de términos positivos, para las
cuales existen diversos criterios de convergencia. Si $p>0$,
la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p>1$ y diverge si $0<p\leq 1$.
Aunque es un resultado conocido de otros cursos, vale la pena
recordar la prueba. La divergencia para $p=1$ se sigue de
esta acotación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \cdots \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +$$

La divergencia para $0<p<1$ se deduce de que $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ si $0<p<$

La convergencia para $p>1$ se prueba así:

$$\frac{1}{(2^k)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^p} \leq 2^k \frac{1}{2^{kp}} = 2^{(1-p)k}, \quad \text{luego:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k} = \frac{1}{1-2^{1-p}} < \infty \quad \text{ya que} \quad 2^{1-p} < 1.$$

Para estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ con $z \in \mathbb{C}$, nótese:

$$|n^z| = |e^{(\ln n)z}| = e^{\mathrm{Re}(z)\ln(n)}, \quad \text{de modo que:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{n^z}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|e^{-\mathrm{Re}(z)\cdot \ln(n)}\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$$

Por tanto, si $1 < a \leq \mathrm{Re}(z)$, entonces $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{k^z}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$
lo cual, en virtud del M-test, significa que $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ conver
absolutamente en $\{z : \mathrm{Re}(z) \geq a\}$. Más adelante veremos que es
implica que $\zeta(z) \in H(\{\mathrm{Re}(z) > 1\})$. Mediante "continuación analític
se puede extender ζ a una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{z=1\}$
sobre la que se formula la famosa "Hipótesis de Riemann"