Hoja nº 1

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura: SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo: 236 y 240

Apellidos .... Nombre ....

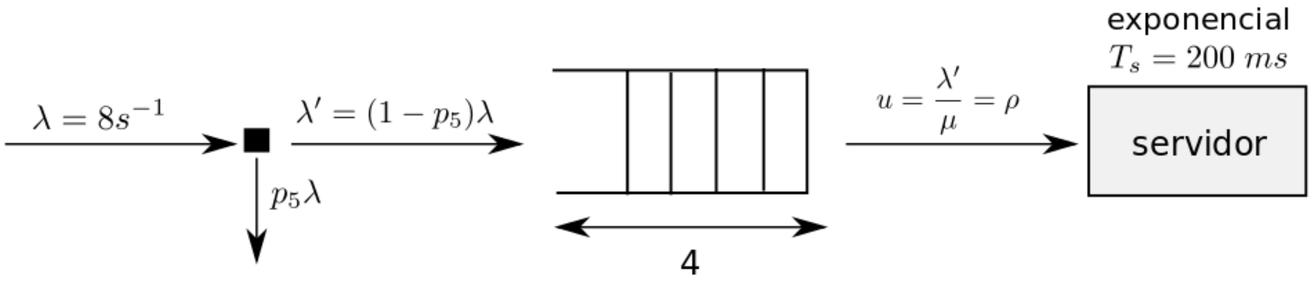
Ejercicio del día: 9 de abril de 2015. Examen parcial.

1.1 (0.5)	1.2 (0.5)	1.3 (1)	1.4 (1)	2.1 (1.5)	2.2 (0.5)	2.3 (2)	2.4 (1.5)	2.5 (1.5)	Total (10)

1. PROBLEMA (3 puntos).

Una empresa tiene un servicio que recibe 8 peticiones por segundo en promedio de acuerdo a una distribución de Poisson y que es prestado por un servidor cuya CPU tarda en procesar una petición 200ms en promedio. Sin embargo, el servidor tiene memoria limitada y solo admite 4 clientes esperando en cola. Las peticiones adicionales son rechazas. Suponer que todos los tiempos están distribuidos de forma exponencial y que existe un número muy grande de clientes, de modo que el número de peticiones pendientes de servicio no afecta al ritmo de llegada de nuevas peticiones.

1.1 (0.5 puntos) Dibujar el diagrama del sistema y justificar un modelo válido para describirlo.



Se trata de un sistema **M/M/1/5** debido a que:

- Llegadas siguen un proceso de Poisson de tasa λ.
- Tiempo de servicio distribuido exponencialmente con media $T_s = 200\ ms \Leftrightarrow \mu = 5\ s^{-1}$
- Un único servidor
- Cola finita. El sistema puede contener como máximo 5 clientes (4 en cola y 1 siendo servido).
- Existe un número muy grande de clientes, de modo que el número de peticiones pendientes de servicio no afecta al ritmo de llegada de nuevas peticiones.

1.2 (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que una petición sea rechazada.

La probabilidad de que una petición sea rechazada viene dada por la probabilidad de que el sistema se encuentre lleno; esto es, la probabilidad de que haya 5 clientes en el sistema, p_5.
Se puede obtener p_5 como sigue:

$$p_5 = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5$$

Se conocen λ y μ, pero se necesita calcular p_0 de acuerdo a la siguiente expresión:

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día 9 de abril de 2015. Examen parcial.

$$p_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} = \frac{1 - \frac{8}{5}}{1 - \left(\frac{8}{5}\right)^{5+1}} = 0.0380$$

Sustituyendo p_0 en la expresión para p_5:

$$p_5 = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 = 0.0380 \left(\frac{8}{5}\right)^5 = 0.398$$

Por tanto, la probabilidad de rechazar una petición es de 0.398.

1.3 (1 punto) Calcular el porcentaje de tiempo que el servidor está ocupado. Dar una interpretación intuitiva del resultado de acuerdo a los datos del problema.

El porcentaje de tiempo que el servidor está ocupado viene dado por el factor de utilización del servidor. El factor de utilización viene dado por $\rho = \frac{\lambda'}{\mu}$, donde λ' es la tasa efectiva de llegadas al sistema. En este caso $\lambda' = (1 - p_5)\lambda$. Por tanto, el factor de utilización del servicio será:

$$\rho = \frac{\lambda'}{\mu} = \frac{(1-p_5)\lambda}{\mu} = \frac{(1-0.398)\,8}{5} = 0.963.$$

Por tanto, el servidor se encuentra ocupado el 96.3% del tiempo.

Este resultado tiene sentido, ya que la tasa de llegadas $\lambda = 8$ es mayor que la tasas de servicio $\mu = 5$ y, por tanto, aunque se rechazan peticiones porque la cola alcanza su capacidad máxima, el servidor se encuentra saturado.

1.4 (1 punto) Calcular el número medio de clientes esperando en cola.

El número medio de clientes esperando en cola L_q viene dado por el número medio de clientes en el sistema menos el número medio de clientes siendo atendidos:

$$L_q = L - u = L - \rho.$$

Se puede calcular el número medio de clientes en el sistema de acuerdo a la siguiente expresión:

$$L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \left[\frac{1 - (K+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K + K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}\right] = \frac{\frac{8}{5}}{1 - \frac{8}{5}} \left[\frac{1 - (5+1)\left(\frac{8}{5}\right)^5 + 5\left(\frac{8}{5}\right)^{5+1}}{1 - \left(\frac{8}{5}\right)^{5+1}}\right] = 3.712\ clientes.$$

Por tanto, el número medio de clientes en cola será:

$$L_q = L - u = L - \rho = 3.712 - 0.963 = 2.749\ clientes.$$

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos Nombre

Ejercicio del día 9 de abril de 2015. Examen parcial.

2. PROBLEMA (7 puntos).

El servicio de expedición de carnés universitarios de la universidad recibe en promedio **6 solicitudes al día** de acuerdo a un proceso de Poisson. Todas las solicitudes son recibidas inicialmente por un servidor A que se encarga de un primer procesamiento de la solicitud. El servidor A es capaz de procesar un promedio de **10 peticiones al día** con un tiempo de servicio que se puede considerar distribuido exponencialmente. Al finalizar su proceso, A distribuye las peticiones a otros servidores. De las peticiones recibidas, un **60%** son para solicitar la expedición de un nuevo carné universitario, mientras que el **40%** de las solicitudes requieren la emisión de un duplicado de un carné ya existente.

Las peticiones para la expedición de un nuevo carné pasan a un servidor B que se encarga de la obtención de diversos datos asociados al nuevo carné. Este servidor es capaz de procesar un promedio de **12 peticiones al día** con un tiempo de servicio que se puede considerar distribuido exponencialmente. Todas las peticiones procesadas por B requieren después ser procesadas por un servidor C encargado de validar los datos, solicitar la expedición del carné y actualizar bases de datos. El servidor C tiene una tasa de servicio de **10 peticiones al día** y el tiempo de servicio se puede considerar distribuido exponencialmente. Una vez procesadas por C, el **50%** de los carnés son correctamente generados y, por tanto, la petición se considera resuelta, saliendo del sistema. Sin embargo, el otro **50%** de las peticiones de nuevos carnés tienen algún tipo de error que requiere que la petición sea nuevamente procesada por los servidores B y C.

Por otra parte, las solicitudes referentes a la obtención de un duplicado de un carné pasan a un servidor D tras ser inicialmente procesadas por el servidor A. Este servidor D tiene una tasa de servicio de **3 peticiones al día** y su tiempo de servicio se estima que está distribuido exponencialmente.

Suponer que todos los servidores tienen una cola de espera de tamaño infinito y que existe un número muy grande de clientes, de modo que el número de peticiones pendientes de servicio no afecta al ritmo de llegada de nuevas peticiones.

2.1 (1.5 puntos) Dibujar el diagrama de proceso del sistema completo, y expresar (no calcular) las tasas de llegada a la entrada de cada servidor, indicando las suposiciones realizadas. Dar una explicación razonada de qué modelo, según la notación de Kendall, será aplicable a cada una de sus componentes.

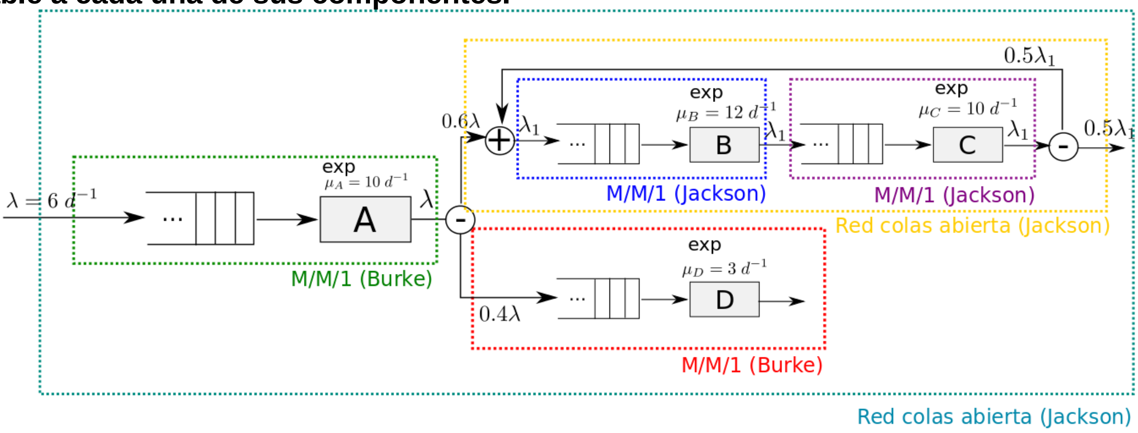


Figura 1 Diagrama de proceso del sistema completo

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos Nombre

Ejercicio del día 9 de abril de 2015. Examen parcial.

Las tasas de llegadas a la entrada de cada servidor se pueden obtener al suponer que los sistemas se encuentran en estado estacionario. Entonces:

- La tasa de salida del servidor A será la tasa de llegadas, λ. De hecho está salida sabemos que sigue un proceso de Poisson de tasa λ de acuerdo al Teorema de Burke.
- La tasa de entrada al servidor B se denotará por λ_1 y vendrá dada por $\lambda_1 = 0.6\,\lambda + 0.5\,\lambda_1$. Esta entrada no sigue un proceso de Poisson puesto que hay retroalimentación.
- La tasa de entrada al servidor C viene dada por la tasa de salida del servidor B. Al suponer estado estacionario, esta tasa viene dada por λ_1.
- La tasa de entrada al servidor D es el 40% de la tasa de salida del servidor A, por tanto será $0.4\,\lambda$. Puesto que la salida de A es un proceso de Poisson y la entrada de D se obtiene de la bifurcación aleatoria de dicho proceso de Poisson, la entrada de D también sigue un proceso de Poisson.

Cada uno de los cuatro subsistemas presentados en el diagrama se pueden modelar de acuerdo a un modelo M/M/1.

- Los servidores A y D son efectivamente modelos M/M/1 ya que su entrada es Poisson, el tiempo de servicio es exponencial, hay un único servidor y se puede considerar que el tamaño de la cola y el número de clientes son infinitos.
- Los servidores B y C no tienen entrada Poissoniana, y por tanto, no son modelos M/M/1 en el sentido estricto. Sin embargo, podemos aplicar el Teorema de Jackson (estado estacionario y red de colas abierta), y, por tanto, el número de clientes en B y C se pueden modelar cada uno de acuerdo a un modelo M/M/1.

2.2 (0.5 puntos) Calcular la tasa de llegadas efectiva a la entrada de cada servidor (A, B, C y D).

- Tasa de llegadas efectiva a la entrada de A: $\lambda = 6\,d^{-1}$.
- Tasa de llegadas efectiva a la entrada de B: $\lambda_1 = 0.6\,\lambda + 0.5\,\lambda_1 \Rightarrow \lambda = \frac{0.6\,\lambda}{0.5} = \frac{0.6 \cdot 6}{0.5} = 7.2\ d^{-1}$.
- Tasa de llegadas efectiva a la entrada de C: $\lambda_1 = 7.2\,d^{-1}$.
- Tasa de llegadas efectiva a la entrada de D: $0.4\ \lambda = 0.4\ \cdot 6 = 2.4\,d^{-1}$.

Observar que en todos los casos la tasa de llegadas a cada servidor es menor que la tasa de servicio, y, por tanto, el sistema se encuentra efectivamente en estado estacionario.

2.3 (2 puntos) Calcular el tiempo medio de respuesta de las peticiones para la expedición de un nuevo carné universitario.

El tiempo de estancia de estas peticiones será el tiempo de estancia en A, W_A, y el tiempo de estancia en B y C.

El tiempo de estancia en A vendrá dado por el modelo M/M/1:

$$W_A = \frac{1}{\mu_A - \lambda} = \frac{1}{10 - 6} = 0.25\ días$$

Para calcular el tiempo de respuesta en los servidores B y C se aplicará el Teorema de Jackson sobre la red de colas abierta que definen B y C (recuadro amarillo del diagrama)[1].

Para ello, se obtiene el tiempo medio de respuesta de B y C aplicando el Teorema de Little:

$$W_{BC} = \frac{L_B + L_C}{0.6\,\lambda}$$

Para calcular el número medio de clientes en B y C aplicamos las ecuaciones del modelo M/M/1:

$$L_B = \frac{\lambda_1}{\mu_B - \lambda_1} = \frac{7.2}{12 - 7.2} = 1.5\ clientes$$

$$L_C = \frac{\lambda_1}{\mu_C - \lambda_1} = \frac{7.2}{10 - 7.2} = 2.571\ clientes$$

Por tanto:

$$W_{BC} = \frac{1.5 + 2.571}{0.6\ \cdot 6} = 1.131\ días$$

Y el tiempo total de las peticiones que pasan por B y C (y por A) será:

$$W_{ABC} = W_A + W_{BC} = 0.25 + 1.131 = 1.381\ días$$

2.4 (1.5 puntos) Calcular el tiempo medio de respuesta de todo el sistema.

Para calcular el tiempo medio de respuesta de todo el sistema, se pueden seguir dos alternativas:

1. Media ponderada de los tiempos de las solicitudes de nuevo carné y duplicación de carné.
2. Aplicar el Teorema de Little sobre el sistema total (recuadro azul claro del diagrama).

Opción 1: El tiempo medio de respuesta de todo el sistema vendrá dado por:

$$W = 0.4\,(W_A + W_D) + 0.6\,(W_{ABC})$$

Se necesita calcular W_D. Como se justificó en 2.1 se pueden aplicar las ecuaciones del modelo M/M/1:

$$W_D = \frac{1}{\mu_D - 0.4\,\lambda} = \frac{1}{3 - 0.4\ \cdot 6} = 1.\hat{6}\ días$$

Por tanto, el tiempo medio de respuesta de todo el sistema será:

[1] También podría resolverse esta cuestión calculando el tiempo medio de una pasada y el número medio de pasadas.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos Nombre

Ejercicio del día 9 de abril de 2015. Examen parcial.

$$W = 0.4\,(W_A + W_D) + 0.6\,(W_{ABC}) = 0.4\,(0.25 + 1.\hat{6}) + 0.6\,(1.381) = 1.595\ días$$

Opción 2: Aplicamos el Teorema de Little sobre el sistema global, teniendo en cuenta que el número medio de clientes en el sistema total es la suma del número medio de clientes en cada uno de los subsistemas.

$$W = \frac{L_A + L_B + L_C + L_D}{\lambda}$$

Como L_B y L_C ya se han calculado en el apartado 2.3, solo se precisa calcular L_A y L_D. Se pueden aplicar las fórmulas del modelo M/M/1.

$$L_A = \frac{\lambda}{\mu_A - \lambda} = \frac{6}{10 - 6} = 1.5\ clientes$$

$$L_D = \frac{0.4\,\lambda}{\mu_D - 0.4\,\lambda} = \frac{0.4\cdot 6}{3 - (0.4\cdot 6)} = 4\ clientes$$

Por tanto, el tiempo medio de estancia en el sistema global será:

$$W = \frac{L_A + L_B + L_C + L_D}{\lambda} = \frac{1.5 + 1.5 + 2.571 + 4}{6} = 1.595\ días$$

2.5 (1.5 puntos). Tras realizar una serie de medidas sobre el sistema en producción, se observa que la tasa media de servicio del servidor D es efectivamente de 3 peticiones al día y su varianza es 1.

a) (0.75 puntos) Justificar la validez o invalidez del modelo empleado en los apartados anteriores, indicando las alternativas si no se considera válido.

Sea S la variable aleatoria que representa el tiempo de servicio del servidor D. Se pueden obtener las siguientes medidas estadísticas:

$$\mathbb{E}[S] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{3}\ días$$

$$Var[S] = 1$$

$$E[S^2] = Var[S] + (\mathbb{E}[S])^2 = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1.\hat{1}$$

Al calcular el coeficiente cuadrático de variación para el tiempo de servicio del servidor D se obtiene:

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura: SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo: 236 y 240

Apellidos ... Nombre ...

Ejercicio del día: 9 de abril de 2015. Examen parcial.

$$C^2 = \frac{Var[S]}{(\mathbb{E}[S])^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9$$

El coeficiente cuadrático de variación es mayor que 5 y, por tanto, el tiempo de servicio se puede medir mediante una distribución hiperexponencial y no mediante una distribución exponencial. Por tanto, las estimaciones anteriores no son válidas, puesto que la asunción de que el tiempo de servicio de D es exponencial es incorrecta. También debe tenerse en cuenta que el sistema global ya no sería una red de colas abierta puesto que no todos los tiempos de servicio son exponenciales.

b) (0.75 punto) En caso de no ser válido el modelo para el servidor D empleado en los apartados anteriores, calcular el tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones para la duplicación de un carné existente.

El tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones para la duplicación de un carné existente vendrá dado por:

$$W_{AD} = W_A + W_D$$

El tiempo medio de estancia en el subsistema A se calculó en el apartado 2.3. Como el tiempo de servicio de D no es exponencial, se recalculará el tiempo medio de estancia en el subsistema formado por D utilizando un modelo M/G/1.

El número medio de clientes en el modelo M/G/1 será:

$$L_D = \frac{(0.4\,\lambda)^2\ \mathbb{E}[S^2]}{2(1-\rho_D)} + \rho_D$$

El factor de utilización del servidor D es: $\rho_D = \frac{0.4\,\lambda}{\mu_D} = \frac{0.4 \cdot 6}{3} = 0.8$; por tanto:

$$L_D = \frac{(0.4\,\lambda)^2\ \mathbb{E}[S^2]}{2(1-\rho_D)} + \rho_D = \frac{(0.4\ \cdot 6)^2\ 1.\hat{1}}{2(1-0.8)} + 0.8 = 16.8\ clientes$$

Aplicando ahora el Teorema de Little sobre el servidor D se obtiene:

$$W_D = \frac{L_D}{0.4\,\lambda} = \frac{16.8}{0.4\ \cdot 6} = 7\ días$$

Y el tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones para la duplicación de un carné existente será:

$$W_{AD} = W_A + W_D = 0.25 + 7 = 7.25\ días$$