CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2016-2017. HOJA 4.

1) Sea $X = \cup_{i \in I} A_i$ una **partición** de X; es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Demostrar que la relación "$x\mathcal{R}y \iff x$ *e* y *pertenecen al mismo* A_i", es una relación de equivalencia X.
Recíprocamente, probar que dada una relación de equivalencia sobre un conjunto X, las clases de equivalencia definen una partición de X.
En definitiva, podemos pensar siempre una relación de equivalencia como una partición.

2) Si $f : X \to V$ es una **función**, probar que "$x\mathcal{R}y$ *si* $f(x) = f(y)$" define una relación de equivalencia en X, y que cada una de sus clases de equivalencia es la imagen inversa de un $z \in V$. Establecer una biyección entre el conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ y $Im(f)$.

3) Fijado un entero positivo n, definimos $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ y consideramos la relación sobre $\mathbb{Z}$ dada por: $m\mathcal{R}k \iff m - k \in n\mathbb{Z}$. Demostrar que es una relación de equivalencia.
Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente. Al conjunto cociente de esta relación lo denotamos por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (se lee $\mathbb{Z}$ módulo n).

4) Es habitual y más cómodo utilizar la notación $\mathbb{Z}_n$ para referirse a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.
i) $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(\bar{m}) = m$ (donde $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$ denota la clase del entero m).
ii) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $g(m) = \bar{m}$.
iii) $G : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $G((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{m + k}$.
iv) $H : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $H((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{mk}$.

$\bar{m} = m + n\mathbb{Z}$
$\bar{k} = k + n\mathbb{Z}$
$\bar{m} + \bar{k} = (m + n\mathbb{Z}) + (k + n\mathbb{Z})$

5) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por: $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff xy = x'y'$. Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

6) Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación $(n, m)\mathcal{R}(n', m') \iff \max\{n, m\} = \max\{n', m'\}$.
a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Describe la clase de equivalencia del elemento $(2, 2)$.
c) Describe el conjunto cociente.
d) ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

7) Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En F se define la siguiente relación:
$$f\mathcal{R}g \iff \textit{existe } r \in \mathbb{R},\ r > 0 \textit{ tal que } f(x) = g(x) \textit{ para } |x| < r.$$
Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre F.

8) Sea $\mathcal{S}$ una relación binaria en un conjunto X, que es reflexiva y transitiva, pero no es antisimétrica.
a) Dar un ejemplo de una relación de este tipo.
b) Demostrar que la relación $\sim$, definida por $a \sim b \iff (a\,\mathcal{S}\,b) \wedge (b\,\mathcal{S}\,a)$, es una relación de equivalencia sobre X.
c) Denotamos por $[a]$ la clase de equivalencia de un elemento $a \in X$. Demostrar que la relación $\widehat{\mathcal{S}}$,
$$[a]\,\widehat{\mathcal{S}}\,[b] \iff a\,\mathcal{S}\,b, \qquad a, b \in X,$$
está bien definida en el conjunto cociente $X/\sim$.
d) Demostrar que $\widehat{\mathcal{S}}$ es una relación de orden.

9) Considerar las relaciones en $\mathbb{Z}$ definidas por $m\mathcal{R}_1 n \iff 5|(m+2n)$; $m\mathcal{R}_2 n \iff 4|(9m+3n)$ ($k|\ell$ significa "k divide a ℓ").
a) Decidir si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son relaciones de equivalencia.
b) En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.

10) Sea B un subconjunto finito de un conjunto A.
En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación: $X\mathcal{R}Y \iff \text{Card}(X \cap B) = \text{Card}(Y \cap B)$.
a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente?

11) En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ se define la siguiente relación: $X\mathcal{R}Y$ si y sólo si $\min X = \min Y$.
a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?
c) ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

12) Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$ y A equipotente a C. Utilizando los resultados del curso, demostrar que los tres conjuntos son equipotentes.

13) Definimos la siguiente relación en $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

14) Sea B un subconjunto finito de un conjunto A.
En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación: $X\mathcal{R}Y \iff \text{Card}(X \cap B) = \text{Card}(Y \cap B)$.
a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente?

15) Sean A y B dos conjuntos equipotentes. Sean A' y B' dos conjuntos también equipotentes. Demostrar lo siguiente:
a) $A \times A'$ es equipotente a $B \times B'$.
b) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B$ es equipotente a $A \times \{0, 1\}$
c) Si $A \cap A' = B \cap B' = \emptyset$ entonces $A \cup A'$ y $B \cup B'$ son equipotentes.

16) Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.

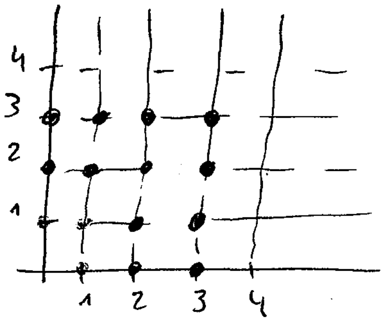
17) Sea A un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1, \ldots, a_n \in A$ son elementos de A, el conjunto $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ es equipotente a A.
(Sugerencia: quitarles a A y a $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ subconjuntos numerables apropiados.)

18) ¿Cuál es el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:
a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$; d) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$; e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
g) El conjunto de todas las raíces reales de todos los polinomios con coeficientes reales;
h) El conjunto de todas las raíces reales (racionales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama "conjunto de los números algebraicos");
i) El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen dos elementos;
j) El conjunto de los números reales $x \in [0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.

6.

c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ → Relación de equivalencia $(n,m) \, R \, (n',m') \iff$

$\iff \max(n,m) = \max(n',m')$

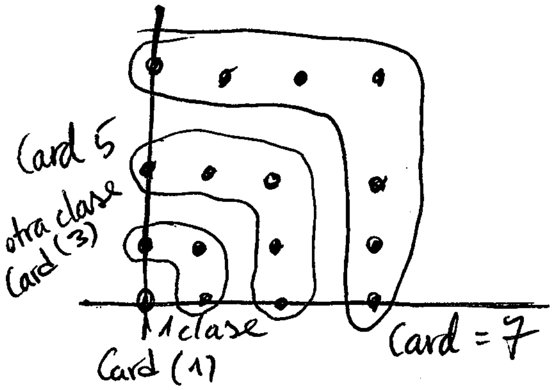


$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R = \{ \underbrace{[(n,n)]} \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$$

↳ clase del elemento $\underbrace{(n,n)}$

↳ representante

d) No



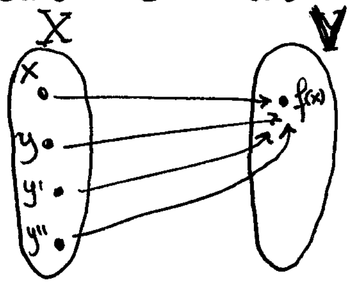
Card conjunto cociente es:

$\aleph_0$

$\boxed{2.}$ $f: X \Rightarrow V$ $\quad xRy$ si $f(x) = f(y)$

Comprobar que $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ es una relación de equivalencia (sí que lo es).

La clase de los $x \in X$ son los $y \in X$ tal que $f(x) = f(y)$



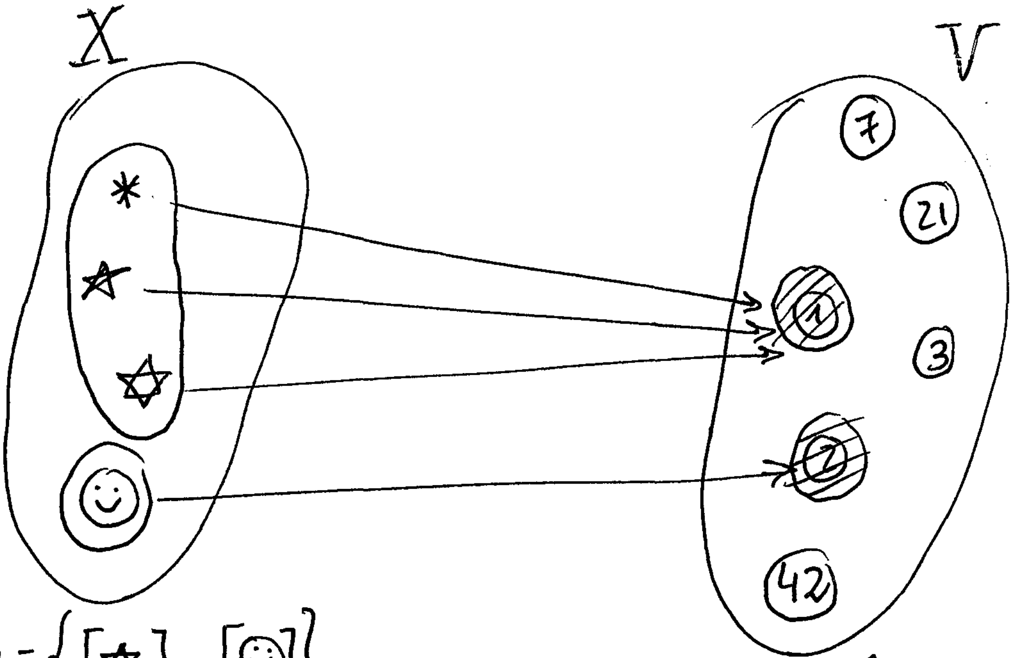
Las clases $\rightarrow \left\{ f^{-1}(f(x)) \right\}_{x \in X}$

Imagen $\left\{ f(x) = z \in V \right\}_{x \in X}$

z (como está en Imagen f)

$f^{-1}(f(x_z)) \longleftarrow \exists\, x_z$ tal que $f(x_z) = z$

$\quad \overset{\shortparallel}{f^{-1}(z)}$



$X/R = \{ [✡], [☺] \}$ $\qquad$ $\operatorname{Im} f = \{1, 2\}$

$X/R = \left\{ f^{-1}(b) : b \in V \right\}$

$\operatorname{Im} f = \left\{ y \in V : \exists\, a \in X,\ f(a) = y \right\}$

$\boxed{3.}$ $mRk \longleftrightarrow m-k \in n\mathbb{Z}$

1.REFLEXIVA xRx

2. TRANSITIVA $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

3. SIMÉTRICA $xRy \Rightarrow yRx$

a)

1. Refexiva: $m-m=0 = 0.n \in n\mathbb{Z}$

2. Transitiva: $\left.\begin{matrix} m-k \in n\mathbb{Z} \\ k-s \in n\mathbb{Z} \end{matrix}\right\} m-s \in n\mathbb{Z}$

3. Simétrica:

$$m-k \in n\mathbb{Z}$$
$$k-m \in -n\mathbb{Z}$$

b)

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} [0] = n\mathbb{Z} \\ [1] = n\mathbb{Z}+1 \\ \vdots \\ [n-1] = n\mathbb{Z}+(n-1) \end{cases}$$

$\boxed{5.}$ Plano R^2

Relación de equivalencia $(x,y)\,R\,(x',y') \Longleftrightarrow xy = x'y'$

a)

$\boxed{1}$ $(x,y)R(x,y) \Rightarrow xy = xy$

$\boxed{2}$ $(x,y)R(x',y') \Rightarrow (x',y')R(x,y)$ $\quad xy = x'y'$

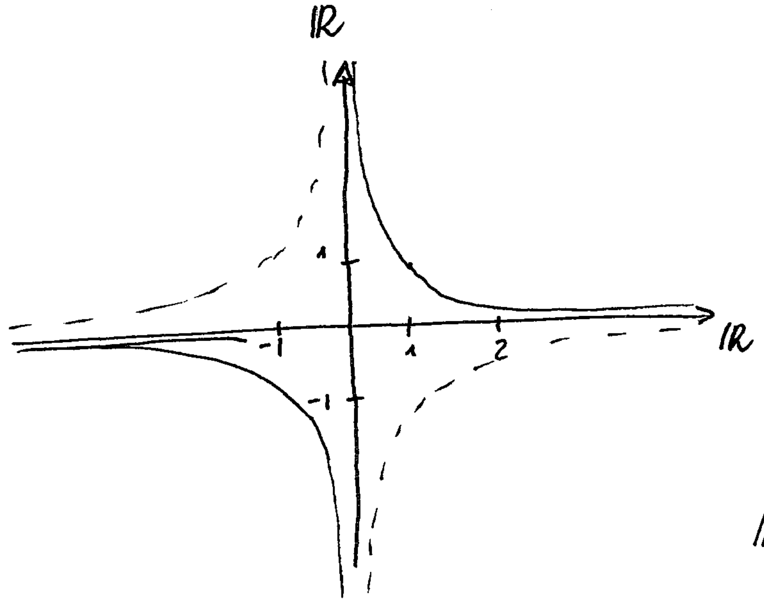
$x'y' = xy$

$\boxed{3}$ $(x,y)R(x',y') \wedge (x',y')R(x'',y'') \Rightarrow (x,y)\,R(x'',y'')$

$xy = x'y' \wedge x'y' = x''y'' \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = x''y''$

b)



$[(0,0)] = \{(x,0);\ x\in\mathbb{R}\} \cup$

$\cup \{(0,x);\ x\in\mathbb{R}\}$

$[(z,1)] = \{(x,y)\in R^2 : xy = z\}$

$\mathbb{R} \cup \{\text{ejes de coordenadas}\}$

$\boxed{8.}$

a) $A, B \in \mathcal{P}(X) \qquad ARB \Leftrightarrow \mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$

b) $a \sim b \Leftrightarrow (aSb) \wedge (bSa)$

1. $a \sim a \Leftrightarrow (aSa) \wedge (aSa)$
2. $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a \qquad (aSb) \wedge (bSa) \Rightarrow (bSa) \wedge (aSb)$
3. $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$$\begin{array}{ccc} (aSb) & (bSc) & \Rightarrow (aSc) \\ \wedge & \wedge & \wedge \\ (bSa) & (cSb) & \Rightarrow (cSa) \end{array}$$

c) $[a]\ a \in X \qquad [a]\hat{S}[b] \Leftrightarrow aSb \qquad a, b \in X.$

¿ bien definido en $X/\sim$?

$\underset{a'}{[a]}\ \hat{S}\ \underset{b'}{[b]} \Leftrightarrow a'Sb' \Leftrightarrow aSb$

siempre y cuando

$a \sim a' \longleftrightarrow aSa' \wedge a'Sa$

$b \sim b' \longleftrightarrow bSb' \wedge b'Sb$

$aSa' \quad a'Sb' \quad b'Sb$

Por la propiedad transitiva: aSb

4.)

i) $f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$; $f(\overline{m}) = m$ $\qquad 0 = f(\overline{0}) = f(\overline{n}) = n$

Mal definida porque n no tiene porque ser 0

ii) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$; $g(m) = \overline{m}$

$g(0) = \overline{0}$ $\qquad g(2) = \overline{2} = \overline{0}$ $\qquad$ Bien definida

$g(1) = \overline{1}$ $\qquad g(3) = \overline{3} = \overline{1}$

iv) $H: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$; $H((\overline{m}, \overline{k})) = \overline{mk}$

Sabiendo que $\overline{n} = n + n\mathbb{Z}$

$\overline{mk} = mk + \mathbb{Z}n$

bien definida

$$H((m+n\mathbb{Z}, k+n\mathbb{Z})) = \overline{(m+n\mathbb{Z})(k+n\mathbb{Z})} =$$

$$= \overline{mk + m.n\mathbb{Z} + k.n\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}.n\mathbb{Z}} = \overline{mk + 0} = \overline{mk}$$

$\boxed{18.}$ a) ¿Card $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$?

$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\left.\begin{array}{ll} f: n \longmapsto (n,n) & \text{inyectiva} \\ 2^n 3^m \longleftarrow\!\!\shortmid (n,m) : g & \text{inyectiva} \end{array}\right\}$ Teorema C-B-S $\quad \left.\begin{array}{l} f \text{ iny } A \to B \\ g \text{ iny } B \to A \end{array}\right\}$ h biyectiva $A \longleftrightarrow B$

$\text{Card } \mathbb{N} = \aleph_0 = \text{Card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

b) ¿Card $\mathbb{N}\times\mathbb{Q}$?

abemos: $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Q}$:

$\Downarrow$

$\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Q}\times\mathbb{N}$

$\text{Card } \mathbb{N} = \text{Card}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{Q}\times\mathbb{N}) = \aleph_0$

c) ¿Card $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$?

PARTE FRACCIONARIA:
$\{x\} = x - [x]$

$\mathbb{R}\times\mathbb{Q} \longleftrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{R}$

$(x, n) \longmapsto n + x$

$(\{r\}, [r]) \longleftarrow\!\!\shortmid r$

Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{N} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ y $\text{Card}(\mathbb{R}\times\mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{R}\times\mathbb{N}) = \text{Card}\,\mathbb{R}$

$\Rightarrow \text{Card}(\mathbb{R}\times\mathbb{Q}) = \aleph_1$

$\boxed{9.}$ $nR_2m \iff 4 \mid 9m + 3n$

• REFLEXIVA

a) $nR_2n \iff 4 \mid 9n+3n \Rightarrow 4 \mid 12n$ ✓

• SIMÉTRICA

$nR_2m \iff mR_2n$; $4 \mid 9n + 3m \iff 4 \mid 9m+3n$

Suponemos que $4 \mid 9n + 3m$;

entonces, como $12n + 12m$ es múltiplo de 4 ($12=3 \cdot 4$) si restamos a un múltiplo de 4 otro de 4, el resultado también será multiplo de 4.

$12n+12m - (9n+3m) = 9m+3n$ por lo tanto la simétrica se cumple.

• TRANSITIVA

$nR_2m \wedge mR_2\tilde{n} \Rightarrow nR_2\tilde{n}$

$4 \mid 9m+3n \wedge 4 \mid 9\tilde{n}+3m \Rightarrow 4 \mid 9\tilde{n} + 3n$; $4 \mid 12m + 3n + 9\tilde{n} \Rightarrow 4 \mid 9\tilde{n}+3$

b) $[m] = \{n \in \mathbb{Z} : 9n+3m \equiv \underbrace{0\,(4)}_{\substack{\text{resto } 0 \\ \text{mod } 4}}\} = \{n \in \mathbb{Z} : (\underbrace{8}_{\substack{\text{divisible} \\ 4}}+1)n + (\underbrace{4}_{\substack{\text{divisible} \\ 4}}-1)m \equiv 0\,(4)\}$

$= \{n \in \mathbb{Z} : n + (-m) \equiv 0\,(4)\} = \{n \in \mathbb{Z} : n \equiv \underbrace{m\,(4)}_{m \text{ mod } 4}\}$

$\underbrace{\mathbb{Z}/R_2}_{\substack{\text{conjunto} \\ \text{cociente}}} = \underbrace{\mathbb{Z}/\text{mod } 4}_{\substack{\text{conjunto} \\ \text{cociente} \\ \text{de otra} \\ \text{relación de} \\ \text{equivalencia}}} = \underbrace{\{[0], [1], [2], [3]\}}_{\text{conjunto cociente}}$

conjunto cociente es el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Las clases de $\mathbb{Z}/R_2$ son : $[0], [1], [2], [3]$

$\boxed{13.}$ $xRy \Longleftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$

- Demostración que es relación de equivalencia

$[0] = \{y \text{ tal que } 0Ry\} = \{y \text{ tal que } 0-y \in \mathbb{Q}\} =$

$= \{y \text{ tal que } -y \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$

$\operatorname{Card}[0] = \operatorname{Card}\mathbb{Q} = \aleph_0$

$[\sqrt{2}] = \{y \text{ tal que } \sqrt{2}Ry\} = \{y \text{ tal que } \sqrt{2}-y \in \mathbb{Q}\} = \sqrt{2}+\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}/_R = \{[x];\ x \in \mathbb{Q}\}$

$\boxed{18.}$ 1) $\mathcal{J}_9 \longleftrightarrow [0,1)$ biyección?

números que no contienen ningún 9 en su desarrollo en $[0,1)$.

Podríamos denominar $\mathcal{J}_9$ como A y definir el conjunto A como el conjunto de los números entre $[0,1)$ que <u>NO</u> tienen un 9 en su desarrollo decimal.

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow (0,1] \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

inyectiva

$(0,1] \longrightarrow A$

Para esto, cogemos cualquier $x \in (0,1]$ y lo pasamos a base 2 (binario). Ahora decimos que ese número en binario es en base 10 y lo mandamos a su imagen en A

$(0,1] \longrightarrow A$

$x \in (0,1]$ $\qquad$ $a \in A$

$\downarrow$ $\qquad$ $\uparrow$

pasamos a binario $x'_{(2)}$ $\longrightarrow$ decimos que ese número es en base 10 $x'_{(10)}$