PROBLEMAS. HOJA 3. Modelos unidimensionales.

1. Considera el problema de valor inicial para la ecuación logística

$$\dot{x} = rx(K - x), \qquad x(0) = x_0.$$

Realiza un cambio de escalas para reducir los tres parámetros r, K, x_0 a uno solo.

2. Se considera el modelo logístico bajo una *intensidad de explotación* $h(t)$

$$\dot{N} = rN(1 - N/L) - h(t)$$

Estudiar el comportamiento en los casos:

i) $h(t) = c$

ii) $h(t) = cN(t)$, con c constante.

Sugerencia: *simplificar la ecuación mediante cambios de escala para estudiar la respuesta*.

3. Se considera el modelo logístico bajo un efecto por depredadores

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{L}\right) - \frac{\alpha N^2}{\beta + N^2}$$

- ¿Qué intenta reflejar el término nuevo?
- Reescala las variables convenientemente para que el término nuevo no dependa de los parámetros.
- Analiza la posible bifurcación en término de los parámetros al aumentarlos y disminuírlos.

4. **Crecimiento en pesquería con captura I**. La evolución de la población de peces con captura viene dada por la ecuación logística $\dot{x} = Rx(K - x)$. Si la población se ve sometida a una explotación pesquera que produce h toneladas por unidad de tiempo la ecuación se transforma en

$$\dot{x} = Rx(1 - \frac{x}{K}) - h(t).$$

Supongamos primero h constante.

a) Demuestra que si la captura es menor que una cierta cantidad h_{max} que debes determinar existe un único stock de equilibrio sostenible x_e. Interpreta que quiere decir sostenible y relacionalo con los posibles puntos de equilibrio y su estabilidad.

b) ¿Qué ocurré con x_e cuando h aumenta pero es menor que h_{max}? ¿Y si $h > h_{max}$?

c) ¿Teóricamente qué stock de equilibrio permite la captura máxima? ¿Qué riesgo tiene permitir una captura muy cercana a la máxima?

5. **Crecimiento en pesquería con captura II, modelo de Schaeffer**. Los modelos de explotación pesquera como el anterior ignoran el hecho de que la captura es una actividad humana cuyos resultados dependen de los factores productivos invertidos y de la cantidad de stock existente. Si E es la variable esfuerzo pesquero (número de barcos por día) entonces se supone que la captura es proporcional a dicho esfuerzo pesquero y al stock existente.

a) Escribe una ecuación diferencial autónoma para explicar la evolución del stock suponiendo el esfuerzo pesquero constante.

b) Representa en un diagrama la ley de crecimiento endógeno y la de captura. Demuestra que si el esfuerzo pesquero crece por encima de un cierto nivel E_{max} el stock se agotará independientemente de las condiciones iniciales.

c) Prueba qué el stock de equilibrio es una función decreciente del esfuerzo pesquero. ¿Cuál es el esfuerzo pesquero que garantiza una captura máxima de equilibrio?

d) Da una fórmula para describir la captura en equilibrio en términos del esfuerzo pesquero y discute como evoluciona en términos de E.

e) El patrón de los barcos te dice que cuantos más barcos más capturas, intenta explicarle que esto solo es así a corto plazo con tus modelos y sugierele cúal es el esfuerzo pesquero que maximiza las capturas.[1]

6. Se ha observado que una población se duplicó al cabo de 8 horas.

   a) Si estuviera creciendo con tasa de crecimiento constante γ, ¿cuál sería γ?

   b) Si al cabo de 15 horas se ha triplicado (respecto de su valor inicial P), ¿podemos seguir creyendo que la tasa es constante?

   c) Si suponemos en cambio que el crecimiento es logístico, ¿cuál sería la población de equilibrio L en términos de P?

7. Se considera una reacción nuclear en cadena en la cual la tasa de cambio (x') del número de moléculas es proporcional al número de encuentros entre ellas pero la tasa de mortalidad (pierden actividad) es constante $\alpha > 0$. Encuentra una ecuación diferencial que describa el comportamiento de las soluciones positivas.

   a) ¿A qué tendría sentido llamar valor crítico?

   b) ¿Están las soluciones definidas en todo tiempo?

   c) ¿Para un sistema autónomo general puedes dar condiciones que garanticen que se produce explosión (las soluciones no están definidas para todo tiempo)?

8. Un grupo de ecólogos te piden que estimes a nivel cualitativo la tasa de crecimiento

$$\frac{\dot{x}}{x} = r(x)$$

   de diversas poblaciones a partir de ciertos datos empíricos que han observado (modelo continuo):

   i) Observan dos equilibrios estables consecutivos $0 < x_0 < x_1$.

   ii) Observan que las poblaciones tienden a extinguirse cuando la densidad es menor que x_0, la velocidad de reproducción máxima se alcanza cuando la población es x_1 y además a largo plazo si las poblaciones no se extinguen tienden a x_2.

   iii) Observan que la población crece exponencialemente cerca de cero, se reproduce velozmente cerca de x_1 pero después inexplicablemente se reproduce de manera muy lenta. Cerca de un valor x_2 observan que a veces la población tienden a estabilizarse y otras crece rapidamente hacia un valor mayor x_3. Aunque comiencen con poblaciones muy altas, a la larga siempre observan valores que no exceden x_3.

[1] Evidencia empírica: la gamba del mediterráneo