Probabilidad: recordatorio 1

PFG-JLF

UAM

Estadística I, 2018-2019

Modelo: variable aleatoria discreta

La variable aleatoria X viene descrita por

valores	$x_1, \ldots, x_n$
probabilidades	$p_1, \ldots, p_n$

con las condiciones:

- $p_1, \ldots, p_n > 0$,
- $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Cada p_j es la probabilidad $\mathbf{P}(X = x_j)$.

(Aquí, n podría ser $+\infty$).

La media/esperanza de la variable X es

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, p_j$$

Si $Y = h(X)$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{j=1}^{n} h(x_j)\, p_j.$$

(Si $n = +\infty$, entonces

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\, p_j,$$

pero sólo en el caso en el que $\mathbf{E}(|X|) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|\, p_j < +\infty$.)

Los momentos de orden $k \geq 1$:

centrados	no centrados
$\mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^k)$	$\mathbf{E}(X^k)$

Varianza:

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2] = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Desviación típica:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

Ejemplos

- X es variable de Bernoulli $\textsc{Ber}(p)$, con $p \in (0,1)$: valores 1 y 0, con probabilidades respectivas p y $1-p$.
  Media y varianza:
  $$\mathbf{E}(X) = p, \qquad \mathbf{V}(X) = p(1-p).$$
- X es variable binomial $\textsc{Bin}(n,p)$, con $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0,1)$: valores $0, 1, 2, \dots, n$ con probabilidades
  $$\mathbf{P}(X = j) = \binom{n}{j} p^j \, (1-p)^{n-j} \qquad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n.$$
  Media y varianza:
  $$\mathbf{E}(X) = np, \qquad \mathbf{V}(X) = np(1-p).$$

- X es variable geométrica $\text{GEOM}(p)$, con $p \in (0,1)$: valores $1, 2, \ldots$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = p\,(1-p)^{j-1} \qquad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots$$

Media y varianza:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- X es variable de Poisson $\text{POISS}(\lambda)$, con $\lambda > 0$: valores $0, 1, 2, \ldots$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^j}{j!} \qquad \text{para cada } j = 0, 1, 2, \ldots$$

Media y varianza:

$$\mathbf{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbf{V}(X) = \lambda.$$

Modelo: variable aleatoria continua

Una variable aleatoria continua X viene definida por una función de densidad, $f_X(x)$, una función integrable en $\mathbb{R}$ tal que

$$f_X(x) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

(no negativa y con área total de 1 bajo su gráfica).

El soporte de la variable X se define como

$$\text{sop}(X) = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}.$$

Cálculo de probabilidades:

$$\mathbf{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f_X(x)\, dx.$$

Esperanza:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

(se requiere aquí que $\mathbf{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < +\infty$).

Esperanza de transformaciones de X: si $Y = h(X)$,

$$\mathbf{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_X(x)\, dx$$

(se requiere aquí de nuevo $\mathbf{E}(|h(X)|) < +\infty$.)

Función de distribución

La función de distribución de X, F_X, se define como

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}$$

(definida en todo $\mathbb{R}$ y con valores en $[0,1]$).

- Si X discreta,
$$F_X(x) = \sum_{j:\, x_j \leq x} p_j \,.$$
- Si X continua,
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy.$$
En este caso, $F_X'(x) = f_X(x)$.

Ejemplos

- X es variable uniforme en $[0, a]$:

$$f_X(x) = \frac{1}{a}\,\mathbf{1}_{[0,a]}(x) = \begin{cases} 1/a & \text{para } x \in [0, a], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

  Media y varianza:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{a}{2}, \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{a^2}{12}.$$

- X es variable exponencial con parámetro $\lambda > 0$:

$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\ \mathbf{1}_{\{x>0\}}(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

  Media y varianza:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- X es variable normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}\,.$$

Media y varianza:

$$\mathbf{E}(X) = \mu, \qquad \mathbf{V}(X) = \sigma^2.$$

Caso particular: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, la normal estándar,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\,.$$

Notación (especial) para la función de distribución de la normal estándar:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2}\, dy\,.$$

- X es variable gamma $\textsc{gamma}(\lambda, t)$ (con parámetros $\lambda, t > 0$)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(t)}\,\lambda^t\, x^{t-1}\, e^{-\lambda x} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{para } x \leq 0. \end{cases}$$

Aquí,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^t\, e^{-x}\, \frac{dx}{x}$$

es la función Γ de Euler.

Media y varianza:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{t}{\lambda}, \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{t}{\lambda^2}.$$

Transformación de variables

- Si X es variable aleatoria continua con $\mathrm{sop}(X) = (a, b)$,
- H es difeomorfismo $H\colon (a, b) \to (c, d)$,
- e Y es la variable aleatoria dada por $Y = H(X)$,

entonces,

$$f_Y(H(t))\,|H'(t)| = f_X(t)\,, \quad \text{para todo } t \in (a, b);$$

o, equivalentemente,

$$f_Y(s) = f_X(H^{-1}(s))\,|(H^{-1})'(s)|\,, \quad \text{para todo } s \in (c, d).$$

Ejemplo: transformación lineal. Sea $H(x) = a + bx$, con $b \neq 0$. Si $Y = a + bX$, entonces

$$\mathbf{E}(Y) = a + b\,\mathbf{E}(X), \qquad \mathbf{V}(Y) = b^2\,\mathbf{V}(X),$$

y además

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|}\ f_X\Big(\frac{y-a}{b}\Big).$$

Caso particular: cambio de escala: $H(x) = cx$, con $c > 0$.

Simulación de muestras independientes de una variable

Objetivo: dado un modelo X (variable discreta o continua),

- pretendemos generar números (en el ordenador)
- que se ajusten aproximadamente a la ley de X,
- y que "parezcan" muestras independientes.

Punto de partida:

- Disponemos de una máquinaU que genera muestras de la $\textsc{unif}[0, 1]$.
- En Excel, está máquina es `=aleatorio()`.

Caso discreto:

- Sorteo de una Bernoulli de parámetro p:
  - si la máquinaU da como resultado u,
  - entonces ponemos 1 si $u \leq p$.
- Sorteo de una discreta general: valores $x_1, \ldots, x_n$ con probabilidades $p_1, \ldots, p_n$:
  - dividimos el intervalo $[0, 1]$ en n tramos: $[0, p_1)$, $(p_1, p_1 + p_2)$, etc.
  - si la máquinaU da como resultado u,
  - entonces ponemos x_j si u cae en el tramo j-ésimo.

Caso continuo. Sea X una variable continua, con soporte en (a, b) y función de distribución F_X. Sea U una uniforme en $[0, 1]$. Entonces, las variables

$$Y = F_X^{-1}(U) \quad \text{y} \quad X \quad \text{tienen la misma función de distribución.}$$

Simulación:

- si la máquinaU da como resultado u,
- entonces $x = F_X^{-1}(u)$ es una muestra de X.