Ejercicios 16-10-2017(condiciones necesarias y suficientes)

October 13, 2017

0.1 ALEJANDRO SANTORUM VARELA - Ejercicios 16-10-2017(Condiciones necesarias y suficientes)

EJERCICIO 1 - Encontrar la condición necesaria y suficiente sobre el entero n para que $1 + 2 + 3 + ... + n$ divida exactamente a $n!$. Una vez encontrada hay que intentar demostrar la equivalencia.

El siguiente programa nos ayudará a visualizar "por donde van los tiros".

```
In [1]: for k in srange(1,51):
            suma = 0
            for i in srange(1,k+1):
                suma = suma + i
            kk = factorial(k)
            if kk%suma == 0:
                print(k)
```

```
1
3
5
7
8
9
11
13
14
15
17
19
20
21
23
24
25
26
27
29
31
32
33
```

34
35
37
38
39
41
43
44
45
47
48
49
50

No es muy difícil ver que para valores de n impares todos cumplen la condición (condición suficiente), pero aún no es necesaria, ya que algunos valores pares lo cumplen también.

Por otro lado, es conocido que $1+2+3+...+n$ es igual a $\frac{n*(n+1)}{2}$ con lo que podemos trabajar más fácilmente.

Si dividimos $n!$ entre $\frac{n*(n+1)}{2}$ y haciendo las simplificaciones oportunas obtenemos:

$$\frac{2*(n-1)!}{n+1}$$

Una vez aquí, podemos afirmar que si n es impar, el denominador es par, por lo que se puede simplificar con el dos del numerador y lo restante en el denominador sería menor estricto que $(n-1)!$, por lo que este último sería exactamente divisible por el denominador ya que es uno de sus factores.

No obstante, las cosas no iban a ser tan fáciles. Si n es par, el denominador es impar y ya no se puede simplificar con el 2 del numerador. La única opción que tenemos para que esta división sea exacta es que el denominador $(n+1)$ se pueda descomponer en factores de menor valor, los cuales se encontrarían entre los factores de $(n-1)!$ y la división sería exacta. Sin embargo, si $n+1$ no es compuesto, es decir, $n+1$ es un número primo, esta división no es exacta por lo que no se cumpliría la condición.

Para finalizar, en conclusión, la condición necesaria y suficiente sobre n es que este sea un número impar o un número par que no preceda a un primo. Esto se demuestra con todo lo explicado anteriormente.

.

.

EJERCICIO 4 - Demuestra que para $n > 1$ el entero $n^4 + 4$ es siempre compuesto.

Veamos el caso $n = 2$: $2^4 + 4 = 20 = 2^2 * 5$ compuesto.

Ahora bien, como $n^4 + 4 > 2$ para todo $n > 1$, para que $n^4 + 4$ NO sea compuesto, tiene que ser un número impar(hablamos de $n^4 + 4$ no del propio n).

-Veamos si n es par:

$n^4 + 4$ ----> Es conocido que todo número par elevado a cualquier potencia es par y que todo número par sumado con otro par da un número par. Con esto podemos afirmar que si n es par, $n^4 + 4$ es par y por lo tanto compuesto, ya que se puede descomponer como mínimo en 2 por otro número.

-Caso en que n es impar: utilizamos inducción y suponemos que $n^4 + 4$ es compuesto (hipótesis de inducción) y lo probamos para el caso n+1:

```
In [2]: f(n) = (n+1)^4 + 4
        f.expand()

Out[2]: n |--> n^4 + 4*n^3 + 6*n^2 + 4*n + 5
```

Entonces $(n+1)^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.

$n^4 + 4$ es un número compuesto por la hipótesis de inducción, por lo que un numero impar.

$4n^3$ es un número par, ya que está multiplicado por 4.

$6n^2$ es un número par, ya que está multiplicado por 6.

$4n$ es un número par, ya que está multiplicado por 4.

5 es trivialmente impar.

Sabiendo que la suma de pares es par, la suma de impares es par, y que la suma de impar+par es impar, podemos agrupar lo anteior.

impar+par+par+par+impar = par

Por lo que $(n+1)^4 + 4$ es par, o lo que es lo mismo, un número compuesto.

`Queda demostrado.`

.

.

EJERCICIO 3 - La cifra dominante de un entero es la primera por la izquierda que no es nula. Encontrar los dígitos que pueden ser la cifra dominante al mismo tiempo de 2^n y 5^n, con el mismo exponente n. Una vez encontrados, hay que intentar demostrar que esos dígitos son los únicos posibles, pero en este caso, no me han sido de ninguna ayuda las pruebas que he hecho con el ordenador.

En primer lugar, vamos a ayudarnos de Sagemath para poder averiguar un posible patrón entre el exponente n y el resultado.

```
In [3]: for i in srange(1,101):
            print("Exponente:")
            print(i)
            print("Potencia de 2:")
            print(2^i)
            print("Potencia de 5:")
            print(5^i)
            print("")
```

```
Exponente:
1
Potencia de 2:
2
Potencia de 5:
5

Exponente:
```

```
2
Potencia de 2:
4
Potencia de 5:
25

Exponente:
3
Potencia de 2:
8
Potencia de 5:
125

Exponente:
4
Potencia de 2:
16
Potencia de 5:
625

Exponente:
5
Potencia de 2:
32
Potencia de 5:
3125

Exponente:
6
Potencia de 2:
64
Potencia de 5:
15625

Exponente:
7
Potencia de 2:
128
Potencia de 5:
78125

Exponente:
8
Potencia de 2:
256
Potencia de 5:
390625
```

```
Exponente:
9
Potencia de 2:
512
Potencia de 5:
1953125

Exponente:
10
Potencia de 2:
1024
Potencia de 5:
9765625

Exponente:
11
Potencia de 2:
2048
Potencia de 5:
48828125

Exponente:
12
Potencia de 2:
4096
Potencia de 5:
244140625

Exponente:
13
Potencia de 2:
8192
Potencia de 5:
1220703125

Exponente:
14
Potencia de 2:
16384
Potencia de 5:
6103515625

Exponente:
15
Potencia de 2:
32768
Potencia de 5:
30517578125
```

```
Exponente:
16
Potencia de 2:
65536
Potencia de 5:
152587890625

Exponente:
17
Potencia de 2:
131072
Potencia de 5:
762939453125

Exponente:
18
Potencia de 2:
262144
Potencia de 5:
3814697265625

Exponente:
19
Potencia de 2:
524288
Potencia de 5:
19073486328125

Exponente:
20
Potencia de 2:
1048576
Potencia de 5:
95367431640625

Exponente:
21
Potencia de 2:
2097152
Potencia de 5:
476837158203125

Exponente:
22
Potencia de 2:
4194304
Potencia de 5:
```

```
2384185791015625

Exponente:
23
Potencia de 2:
8388608
Potencia de 5:
11920928955078125

Exponente:
24
Potencia de 2:
16777216
Potencia de 5:
59604644775390625

Exponente:
25
Potencia de 2:
33554432
Potencia de 5:
298023223876953125

Exponente:
26
Potencia de 2:
67108864
Potencia de 5:
1490116119384765625

Exponente:
27
Potencia de 2:
134217728
Potencia de 5:
7450580596923828125

Exponente:
28
Potencia de 2:
268435456
Potencia de 5:
37252902984619140625

Exponente:
29
Potencia de 2:
536870912
```

```
Potencia de 5:
186264514923095703125

Exponente:
30
Potencia de 2:
1073741824
Potencia de 5:
931322574615478515625

Exponente:
31
Potencia de 2:
2147483648
Potencia de 5:
4656612873077392578125

Exponente:
32
Potencia de 2:
4294967296
Potencia de 5:
23283064365386962890625

Exponente:
33
Potencia de 2:
8589934592
Potencia de 5:
116415321826934814453125

Exponente:
34
Potencia de 2:
17179869184
Potencia de 5:
582076609134674072265625

Exponente:
35
Potencia de 2:
34359738368
Potencia de 5:
2910383045673370361328125

Exponente:
36
Potencia de 2:
```

```
68719476736
Potencia de 5:
14551915228366851806640625

Exponente:
37
Potencia de 2:
137438953472
Potencia de 5:
72759576141834259033203125

Exponente:
38
Potencia de 2:
274877906944
Potencia de 5:
363797880709171295166015625

Exponente:
39
Potencia de 2:
549755813888
Potencia de 5:
1818989403545856475830078125

Exponente:
40
Potencia de 2:
1099511627776
Potencia de 5:
9094947017729282379150390625

Exponente:
41
Potencia de 2:
2199023255552
Potencia de 5:
45474735088646411895751953125

Exponente:
42
Potencia de 2:
4398046511104
Potencia de 5:
227373675443232059478759765625

Exponente:
43
```

```
Potencia de 2:
8796093022208
Potencia de 5:
1136868377216160297393798828125

Exponente:
44
Potencia de 2:
17592186044416
Potencia de 5:
5684341886080801486968994140625

Exponente:
45
Potencia de 2:
35184372088832
Potencia de 5:
28421709430404007434844970703125

Exponente:
46
Potencia de 2:
70368744177664
Potencia de 5:
142108547152020037174224853515625

Exponente:
47
Potencia de 2:
140737488355328
Potencia de 5:
710542735760100185871124267578125

Exponente:
48
Potencia de 2:
281474976710656
Potencia de 5:
3552713678800500929355621337890625

Exponente:
49
Potencia de 2:
562949953421312
Potencia de 5:
17763568394002504646778106689453125

Exponente:
```

```
50
Potencia de 2:
1125899906842624
Potencia de 5:
88817841970012523233890533447265625

Exponente:
51
Potencia de 2:
2251799813685248
Potencia de 5:
444089209850062616169452667236328125

Exponente:
52
Potencia de 2:
4503599627370496
Potencia de 5:
2220446049250313080847263336181640625

Exponente:
53
Potencia de 2:
9007199254740992
Potencia de 5:
11102230246251565404236316680908203125

Exponente:
54
Potencia de 2:
18014398509481984
Potencia de 5:
55511151231257827021181583404541015625

Exponente:
55
Potencia de 2:
36028797018963968
Potencia de 5:
277555756156289135105907917022705078125

Exponente:
56
Potencia de 2:
72057594037927936
Potencia de 5:
1387778780781445675529539585113525390625
```

```
Exponente:
57
Potencia de 2:
144115188075855872
Potencia de 5:
6938893903907228377647697925567626953125

Exponente:
58
Potencia de 2:
288230376151711744
Potencia de 5:
34694469519536141888238489627838134765625

Exponente:
59
Potencia de 2:
576460752303423488
Potencia de 5:
173472347597680709441192448139190673828125

Exponente:
60
Potencia de 2:
1152921504606846976
Potencia de 5:
867361737988403547205962240695953369140625

Exponente:
61
Potencia de 2:
2305843009213693952
Potencia de 5:
4336808689942017736029811203479766845703125

Exponente:
62
Potencia de 2:
4611686018427387904
Potencia de 5:
21684043449710088680149056017398834228515625

Exponente:
63
Potencia de 2:
9223372036854775808
Potencia de 5:
108420217248550443400745280086994171142578125
```

```
Exponente:
64
Potencia de 2:
18446744073709551616
Potencia de 5:
542101086242752217003726400434970855712890625

Exponente:
65
Potencia de 2:
36893488147419103232
Potencia de 5:
2710505431213761085018632002174854278564453125

Exponente:
66
Potencia de 2:
73786976294838206464
Potencia de 5:
13552527156068805425093160010874271392822265625

Exponente:
67
Potencia de 2:
147573952589676412928
Potencia de 5:
67762635780344027125465800054371356964111328125

Exponente:
68
Potencia de 2:
295147905179352825856
Potencia de 5:
338813178901720135627329000271856784820556640625

Exponente:
69
Potencia de 2:
590295810358705651712
Potencia de 5:
1694065894508600678136645001359283924102783203125

Exponente:
70
Potencia de 2:
1180591620717411303424
Potencia de 5:
```

```
847032947254300339068322500679641962051391601562 5
```

```
Exponente:
71
Potencia de 2:
2361183241434822606848
Potencia de 5:
42351647362715016953416125033982098102569580078125

Exponente:
72
Potencia de 2:
4722366482869645213696
Potencia de 5:
211758236813575084767080625169910490512847900390625

Exponente:
73
Potencia de 2:
9444732965739290427392
Potencia de 5:
1058791184067875423835403125849552452564239501953125

Exponente:
74
Potencia de 2:
18889465931478580854784
Potencia de 5:
5293955920339377119177015629247762262821197509765625

Exponente:
75
Potencia de 2:
37778931862957161709568
Potencia de 5:
26469779601696885595885078146238811314105987548828125

Exponente:
76
Potencia de 2:
75557863725914323419136
Potencia de 5:
132348898008484427979425390731194056570529937744140625

Exponente:
77
Potencia de 2:
151115727451828646838272
```

```
Potencia de 5:
661744490042422139897126953655970282852649688720703125

Exponente:
78
Potencia de 2:
302231454903657293676544
Potencia de 5:
3308722450212110699485634768279851414263248443603515625

Exponente:
79
Potencia de 2:
604462909807314587353088
Potencia de 5:
16543612251060553497428173841399257071316242218017578125

Exponente:
80
Potencia de 2:
1208925819614629174706176
Potencia de 5:
82718061255302767487140869206996285356581211090087890625

Exponente:
81
Potencia de 2:
2417851639229258349412352
Potencia de 5:
413590306276513837435704346034981426782906055450439453125

Exponente:
82
Potencia de 2:
4835703278458516698824704
Potencia de 5:
2067951531382569187178521730174907133914530277252197265625

Exponente:
83
Potencia de 2:
9671406556917033397649408
Potencia de 5:
10339757656912845935892608650874535669572651386260986328125

Exponente:
84
Potencia de 2:
```

```
19342813113834066795298816
Potencia de 5:
51698788284564229679463043254372678347863256931304931640625

Exponente:
85
Potencia de 2:
38685626227668133590597632
Potencia de 5:
258493941422821148397315216271863391739316284656524658203125

Exponente:
86
Potencia de 2:
77371252455336267181195264
Potencia de 5:
1292469707114105741986576081359316958696581423282623291015625

Exponente:
87
Potencia de 2:
154742504910672534362390528
Potencia de 5:
6462348535570528709932880406796584793482907116413116455078125

Exponente:
88
Potencia de 2:
309485009821345068724781056
Potencia de 5:
32311742677852643549664402033982923967414535582065582275390625

Exponente:
89
Potencia de 2:
618970019642690137449562112
Potencia de 5:
161558713389263217748322010169914619837072677910327911376953125

Exponente:
90
Potencia de 2:
1237940039285380274899124224
Potencia de 5:
807793566946316088741610050849573099185363389551639556884765625

Exponente:
91
```

```
Potencia de 2:
2475880078570760549798248448
Potencia de 5:
4038967834731580443708050254247865495926816947758197784423828125

Exponente:
92
Potencia de 2:
4951760157141521099596496896
Potencia de 5:
201948391736579022185402512712393274796340847387909889221191406 25

Exponente:
93
Potencia de 2:
9903520314283042199192993792
Potencia de 5:
1009741958682895110927012563561966373981704236939549446105957031 25

Exponente:
94
Potencia de 2:
19807040628566084398385987584
Potencia de 5:
5048709793414475554635062817809831869908521184697747230529785156 25

Exponente:
95
Potencia de 2:
39614081257132168796771975168
Potencia de 5:
2524354896707237777317531408904915934954260592348873615264892578 125

Exponente:
96
Potencia de 2:
79228162514264337593543950336
Potencia de 5:
1262177448353618888658765704452457967477130296174436807632446289 0625

Exponente:
97
Potencia de 2:
158456325028528675187087900672
Potencia de 5:
6310887241768094443293828522262289837385651480872184038162231445 3125

Exponente:
```

```
98
Potencia de 2:
316912650057057350374175801344
Potencia de 5:
3155443620884047221646914261131144918692825740436092019081115722656250

Exponente:
99
Potencia de 2:
633825300114114700748351602688
Potencia de 5:
15777218104420236108234571305655724593464128702180460095405578613281250

Exponente:
100
Potencia de 2:
1267650600228229401496703205376
Potencia de 5:
78886090522101180541172856528278622967320643510902300477027893066406250
```

Se puede ver que la cifra dominante solo coincide con $n = 5, n = 15, n = 88, n = 98$ en los 100 primeros valores de n y en todos ellos el valor dominante es 3. Por lo tanto, nuestra atención se centrará ahora en demostrar que es la única cifra en que pasa esto.

Desafortunadamente, todos mis intentos de demostrar esta propiedad no han tenido éxito. Mantengo que 3 es la única cifra en que pasa esto, pero quedará en conjetura y no en hecho demostrado.

.

.

EJERCICIO 2 - Encontrar la condición necesaria y suficiente para que existan infinitos múltiplos de un entero n que se escriban únicamente con unos en base 10. Una vez encontrada hay que intentar demostrar la equivalencia. £Ocurrirá algo similar si queremos que infinitos múltiplos se escriban usando únicamente otro dígito (2, 3, etc.).

Como hecho en los ejercicios anteriores, vamos a ayudarnos de la programación para hacer unos cálculos rápidos y poder conseguir algunas pistas:

```
In [4]: print(factor(11))
        print(factor(111))
        print(factor(1111))
        print(factor(11111))
        print(factor(111111))
        print(factor(1111111))
        print(factor(11111111))
        print(factor(111111111))
        print(factor(1111111111))
        print(factor(11111111111))
        print(factor(111111111111))
```

```
        print(factor(1111111111111))
        print(factor(11111111111111))
        print(factor(111111111111111))
        print(factor(1111111111111111))
```

```
11
3 * 37
11 * 101
41 * 271
3 * 7 * 11 * 13 * 37
239 * 4649
11 * 73 * 101 * 137
3^2 * 37 * 333667
11 * 41 * 271 * 9091
21649 * 513239
3 * 7 * 11 * 13 * 37 * 101 * 9901
53 * 79 * 265371653
11 * 239 * 4649 * 909091
3 * 31 * 37 * 41 * 271 * 2906161
11 * 17 * 73 * 101 * 137 * 5882353
```

Personalmente esto no me dice mucho. La verdad es que no se por donde atacar el problema más.

Quizá lo máximo que puede decir sobre n es que tiene que ser un entero no múltiplo de 2 ni de 5, ya que cualquier número acabado en 1 no puede ser divisible por 2 ni por 5. Pero mantengo que es una información pobre, lejos de demostrar nada.