$$y_{n+2} = \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h f_{n+2}$$

Supongamos que se verifican (H_{MN}). Ver si se verifican:

(1) Dos condiciones de consistencia

Por el Teorema de consistencia, sabemos que el método es consistente $\Leftrightarrow$ (1) $\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 0$

(2) $\sum_{j=0}^{2} j\alpha_j f(t, y(t)) = \phi_f(t, y(t), y(t); 0)$.

En la tarea 2 vimos que la función de incremento para este método es la siguiente:

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} h f\left(t+2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{y_n}{3} + h\phi_f\right)$$

$$\boxed{\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \frac{2}{3} f\left(t+2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + h\phi_f\right)}$$

Veamos que se verifican las condiciones de consistencia:

(1) $\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 0$ ✓

(2) $\sum_{j=0}^{2} j\alpha_j = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1\left(-\frac{4}{3}\right) + 2 = \frac{2}{3}$, además,

$$\phi_f(t, y(t), y(t); 0) = \frac{2}{3} f\left(t, \frac{4}{3} y(t) - \frac{1}{3} y(t)\right) = \frac{2}{3} f(t, y(t)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2} j\alpha_j \cdot f(t, y(t)).$$ ✓

<u>De manera que el método es consistente.</u>

(2) Ver si se verifica el criterio de la raíz.

Se dice que un método (MN) satisface la condición de la raíz si todas las raíces del primer polinomio característico tienen módulo menor o igual a uno, y que aquellas que tienen módulo 1 son simples.

El primer polinomio característico de este método es:

$P(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ cuyas raíces son:

$$P(x) = 0 \iff x = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{12}{9}}}{2} = \frac{(4 \pm 2)}{3 \cdot 2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$|x_1| = 1$ y es una raíz simple

$|x_2| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$

De manera que el método verifica el criterio de la raíz.

Ejercicio 3

Considerando el método con paso equidistante:

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\left(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\right)$$

→ Comprobar que se verifican las dos condiciones de consistencia y el criterio de la raíz

Por la tarea 2, sé que la función incremento de este método es:

$$\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \frac{f(t_n, y_n) + 4f(t_n+h, y_{n+1}) + f(t_n+2h, y_n + h\phi_f)}{3}$$

y supongo que verifican las hipótesis H_{MN}

a) Verifica las dos condiciones de consistencia

que son $\rightarrow \sum_{j=0}^{K} \alpha_j = 0$

$$\Rightarrow \phi_f(t, Y(t), \ldots, Y(t); 0) = \left(\sum_{j=0}^{K} j\alpha_j\right) f(t, Y(t))$$

↳ Sé que α_j acompaña a y_{n+j},

luego $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{2} \alpha_j = -1 + 0 + 1 = 0 \checkmark \text{ (lo cumple)}$$

$$↳ \phi_f(t, Y(t), Y(t); 0) = \frac{f(t, Y(t)) + 4f(t+0, Y(t)) +}{3}$$

$$\frac{+f(t+0, Y(t)+0\cdot\Phi_f)}{} = \frac{f(t,Y(t))+4f(t,Y(t))+f(t,Y(t))}{3} =$$

$$= \frac{6}{3}f(t,Y(t)) = 2f(t,Y(t)) = \sum_{j=0}^{2} j\alpha_j f(t,Y(t)) \checkmark$$

ya que $\sum_{j=0}^{2} j\alpha_j = 2\alpha_2 = 2$ (lo cumple)

$\Rightarrow$ El método es <u>consistente</u>

b) Verifica el criterio de la raíz:
todas ~~su~~ las raíces del primer polinomio característico tienen módulo menor o igual que 1, y aquellas que tienen módulo 1 son simples

El primer polinomio característico es $p(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \xi^j$

Recordando que $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p(\xi) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j \xi^j = -1 + 0\cdot\xi + 1\cdot\xi^2 = \xi^2 - 1$$

Saco las raíces: $\xi^2 - 1 = 0 \Rightarrow \xi = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$|-1| = |+1| = 1 \rightarrow$ Tiene dos raíces de módulo 1 y ambas son simples $\Rightarrow$ Cumple el criterio de la raíz $\checkmark\checkmark$ (Además, por ser consistente $\xi_1 = 1$ es su raíz principal)

TAREA 3

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + (1-\theta)h,\ \theta y_n + (1-\theta)y_{n+1}) \quad \theta \in (0,1)$$

Ver si verifica las condiciones de consistencia y el criterio de la raíz.

Por la tarea anterior sabemos que:

$$\phi(t_n, y_n; h) = f(t_n + (1-\theta)h,\ y_n + (1-\theta)h\phi(t_n, y_n; h))$$

$$y_{n+1} - y_n = h\,\phi(t_n, y_n; h)$$

* Probemos las condiciones de consistencia C_1 y C_2:
  - C_1: $\sum_{j=0}^{1} \alpha_j = 0$

    Esto se cumple pues $\alpha_0 = -1$ y $\alpha_1 = 1 \rightsquigarrow \alpha_0 + \alpha_1 = 0$.
  - C_2: $\phi_f(t, y(t); 0) = \left(\sum_{j=0}^{1} \alpha_j \cdot j\right) f(t, y(t))$

    $$\sum_{j=0}^{1} j\alpha_j = 0(-1) + 1 \cdot 1 = 1.$$

    $$\phi_f(t, y(t); 0) = f(t + \cancel{(1-\theta)\cdot 0},\ y(t) + \cancel{(1-\theta)\cdot 0\,\phi(t, y(t); 0)})$$

    $$= f(t, y(t)).$$

    Entonces se cumple que $f(t, y(t)) = 1 \cdot f(t, y(t))$.

Concluimos con que el método es consistente.

* Probemos ahora el criterio de la raíz.
  - Un M.N satisface el criterio de la raíz si todas las raíces del primer polinomio característico $(y_{n+1} - y_n)$ tienen módulo menor que 1, lo que hace que disminuye en cada iteración y las que tengan módulo igual a 1 sean simples:

$$P_1(x) = x - 1 \rightsquigarrow \text{raíz única simple } x = 1.$$

Es decir, cumple que sus raíces tengan módulo menor que 1 y las de módulo 1 sean simples $\Rightarrow$ Cumple el criterio de la raíz.

El método numérico es consistente y 0-estable.

Escaneado con CamScanner

Debemos comprobar que se verifican las dos condiciones de consistencia y el criterio de la raíz para: $y_{n+1} = y_n + h(\theta f_n + (1-\theta) f_{n+1})$ *con* $\theta \in (0,1)$

Consideramos la función de incremento de $y_{n+1} = y_n + h(\theta f_n + (1-\theta) f_{n+1})$ calculada en la Tarea 2:

$$\phi(t_n, y_n; h) = \theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_n + h, y_n + h\phi)$$

y recordamos que

$$\sum_{j=0}^{1} \alpha_j y_{n+j} = y_{n+1} - y_n = h\phi(t_n, y_n; h)$$

por lo que $\alpha_0 = -1$ y $\alpha_1 = 1$.

- La primera condición a comprobar (C1) es:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0$$

  que, evidentemente, se cumple para nuestro método.

- La segunda condición (C2) es:

$$\phi(t, Y(t); 0) = \left(\sum_{j=0}^{k} j\alpha_j \right) f(t, Y(t))$$

  que para nuestro método equivale a:

$$\theta f(t, Y(t)) + (1-\theta) f(t, Y(t)) = f(t, Y(t))$$

  por lo que la segunda condición también se cumple.

Nuestro método, por tanto, es **consistente**.

Criterio de la raíz

Un método numérico satisface la condición de la raíz si todas las raíces del primer polinomio característico tienen módulo ≤ 1 y las de módulo 1 son simples.

Como sabemos que nuestro método es **consistente** y de orden k = 1 tenemos que la única raíz de $p(\zeta)$ es $\zeta = 1$ (simple), por lo que nuestro método satisface la condición de la raíz.