D es una aplicación multilineal

$$D: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ veces}} \to \mathbb{K}$$

$f: V \to V$ endomorfismo

f^*D es una nueva aplicación multilineal

$$(f^* D)(v_1, \ldots, v_n) = D(f(v_1), \ldots, f(v_n))$$

~~Nos fijamos~~
La aplicación $D \mapsto f^*D$ es lineal

$$f^*(\alpha D_1 + \beta D_2)_{(v_1, \ldots, v_n)} = (\alpha D_1 + \beta D_2)(f(v_1), \ldots, f(v_n)) =$$

$$= \alpha D_1(f(v_1), \ldots, f(v_n)) + \beta D_2(f(v_1), \ldots, f(v_n)) =$$

$$= \alpha f^* D_1 + \beta f^* D_2.$$

Nos fijamos en el subespacio de aplicaciones multilineales alternadas. Si D es alternada $\Rightarrow f^*D$ también.

$$\underbrace{\{D \text{ alternadas}\}}_{\boxed{\text{dimensión } 1}} \to \{D \text{ alternadas}\}$$

$$D \mapsto f^*D \quad \text{lineal}$$

[En $\mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal $f(x) = ax$

Es multiplicar por un número (escalar)

La aplicación $D \mapsto f^*D$ es "multiplicar por un número". Es lo mismo que escribir $D \mapsto \lambda_f \cdot D$, donde λ_f es un número.

$$\boxed{f^*D = \lambda_f \cdot D}$$

Se define ~~def~~ $\det f = \lambda_f$.

¿Cómo se calcula? Cogemos nuestro D favorito

$D = \det_{(e_1, e_2, \ldots, e_n)}$ Por ejemplo

Calculamos

$$\left(f^* \det_{(e_1,\ldots,e_n)}\right)\underbrace{(e_1,\ldots,e_n)}_{\text{Por ejemplo}} =$$

$$= \det_{(e_1,\ldots,e_n)}(f(e_1),\ldots,f(e_n)) = \det M(f) \cdot \cancel{\ } =$$

$$= \cancel{\left[\det_{(e_1,\ldots,e_n)}(e_1,\ldots,e_n)\right] \cdot \left[\det M(f)\right]}$$

$$\lambda_f \cdot \det_{(e_1,\ldots,e_n)}(e_1,\ldots,e_n) = \lambda_f.$$

$$\det_{(e_1,\ldots,e_n)} = C_0 \det_{(v_1,\ldots,v_n)}$$

Otra forma de presentar las cosas

$$M_{B_1B_1}(f) = M_{B_2B_1} \cdot M_{B_2B_2}(f) \cdot M_{B_1B_2} =$$

$$= M_{B_1B_2}^{-1} \cdot M_{B_2B_2}(f) \cdot M_{B_1B_2}$$

$$\det(M_{B_1B_1}(f)) = \det(M_{B_1B_2}^{-1} \cdot M_{B_2B_2}(f) \cdot M_{B_1B_2}) =$$

$$= \cancel{\det(M_{B_1B_2})^{-1}} \cdot \det(M_{B_2B_2}(f)) \cdot \cancel{\det(M_{B_1B_2})} =$$

$$= \det(M_{B_2B_2}(f)).$$

~ x ~

$\boxed{f: V \to W}$

M 6. 3.

iv) $\operatorname{Ker} f^*$, $(\operatorname{Im} f)^0$. Ambos son subespacios de W^*.

Son el mismo subespacio.

V,	W
v	w
V^*,	W^*
φ	ψ

Dem:

Si $\psi \in \operatorname{Ker} f^*$, entonces

$\psi \circ f = f^*(\psi) = 0$. Quiere decir que

$\forall v \in V$ $\psi(\underbrace{f(v)}_{w}) = 0$. Es decir $\forall w \in \operatorname{Im} f$,

$\psi(w) = 0$. $\Rightarrow$ $\psi \in (\operatorname{Im} f)^0$

Forma 1: Calcular $\operatorname{Ker} f^*$

$$\underset{C^*C^*}{M}(f^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula el $\operatorname{Ker} f^* \subset (\mathbb{R}^3)^*$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Solución} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

Corresponde al vector e_2^* según la base C^*.

$\operatorname{Ker} f^* = \langle e_2^* \rangle$.

$\operatorname{Ker} f^* = \langle e_1^* + e_2^* \rangle$

<u>Forma 2:</u>

Calcular $(\operatorname{Im} f)^0$.

Encontrar $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ t.q. φ se anula en $\operatorname{Im} f$. Es lo mismo (es decir, basta que) φ se anule en $f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)$

$$\begin{matrix} f(E_1), & f(E_2), & f(E_3), & f(E_4) \\ \| & \| & \| & \| \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

tirar

$\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$

$\psi(x,y,z) = ax + by + cz$

$(\text{es } \psi = a e_1^* + b e_2^* + c e_3^*)$

$$\begin{cases} \psi(1,0,0) = a = 0 \\ \psi(0,0,1) = c = 0 \end{cases} \quad b \text{ libre} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\psi = e_2^*$ (o cualquier múltiplo).

v) $(\operatorname{Ker} f)^0 \subset [M_{2\times2}(\mathbb{R})]^*$

$\operatorname{Im} f^* \subset [M_{2\times2}(\mathbb{R})]^*$

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d.$$

$$(\operatorname{Ker} f)^0 = (\operatorname{Ker} \underbrace{f^{**}}_{g})^0 = (\operatorname{Im} \underbrace{f^*}_{g})^{00} = \operatorname{Im} f^*$$

$\operatorname{Ker} g^* = \operatorname{Im} g$

$(\operatorname{Ker} g^*)^0 = (\operatorname{Im} g)^0$

$$M(f^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Base de } \operatorname{Im} f^* = \{E_1^* + E_2^*,\ E_4^*\}.$$

6. i)

$\varphi \in V^0 \iff \begin{cases} \varphi(1,-1,2)=0 \\ \varphi(2,1,-1)=0 \end{cases}$ ⇝ sistema homogéneo para a, b, c. Se resuelve.

$\varphi(x,y,z) = ax + by + cz$

$V = \operatorname{Im} f$, donde $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$(\operatorname{Im} f)^0 = \operatorname{Ker} f^* = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Sistema homogéneo. Se resuelve.

~ x ~

$Ax_0 = b$

$Ax_1 = b$ ⇝ $A(x_0 - x_1) = 0$

Diferencia de soluciones es sol. del sistema homogéneo.

cualquier solución de $Ax=b$

$x_1 = x_0 + y$ donde $Ay = 0$.

Cualquier solución de $Ay=0$.

Una solución particular del sistema no homogéneo