73 → fórmula básica Cauchy (integrales) | 78 → Tma. Liouville
74 → fórmula Cauchy derivada (integrales) | 79 → Tma. Liouville + ej. 78
75 → desarrollo en series de potencias | 80 → Tma. Liouville
77 → ecuación funcional | 81 → Tma. Liouville

Variable Compleja I CURSO 2019-20, UAM

82, 83 } Tma. Liouville

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS 73-75, 77-83 (HOJA 6)

73) Calcule las siguientes integrales, aplicando la versión básica de la fórmula integral de Cauchy para circunferencias:

$$\textbf{a)} \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz, \qquad \textbf{b)} \int_{|z|=1} \frac{z^2+2}{z(z-3)} dz, \qquad \textbf{c)} \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2+3i}, \qquad \textbf{d)} \int_{|z|=1} \frac{2}{1-4z^2} dz.$$

Todas las circunferencias tienen orientación positiva.

SOLUCIÓN. **a)** La solución es inmediata: la función $f(z) = \operatorname{sen} z$ es entera y, por tanto, podemos aplicar la versión básica de la Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias con cualquier dominio que contenga al disco unidad cerrado (cuyo borde es la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$, por ejemplo, $\Omega = \mathbb{C}$, $\Omega = D(0; R)$ con $R > 1$, etc., obteniendo

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \operatorname{sen} 0 = 0\,.$$

Después de estudiar el Teorema integral de Cauchy y las singularidades aisladas, veremos que este ejercicio admite otra solución.

b) El denominador del integrando se anula en $z = 0$ y en $z = 3$; sólo el primero de estos dos puntos se ubica dentro de la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$, así que esta vez elegimos la función $f(z) = \frac{z^2+2}{z-3}$ puesto que es holomorfa en el disco $\Omega = D(0;3) = \{z : |z| < 3\}$, que contiene al disco unidad cerrado. Por la versión básica de la Fórmula integral de Cauchy, se sigue que

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2+2}{z(z-3)} dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\pi i}{3}\,.$$

c) El denominador del integrando es un polinomio cuadrático y se anula en los puntos donde $z^2 + 3i = 0$, que son los valores de la raíz

$$\sqrt{-3i} = \sqrt{3e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \sqrt{3}\, e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} i}, \qquad k = 0, 1.$$

Se trata de los valores

$$z_1 = \sqrt{3}\, e^{-\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \qquad z_2 = -z_1 = \sqrt{3}\, e^{\frac{3\pi i}{4}} = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

Comprobamos directamente que sólo uno de ellos -a saber, z_1- se encuentra en el interior de la circunferencia $\{|z-1| = 2\}$. En efecto,

$$|z_1 - 1|^2 = \left|\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1\right) - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \frac{3}{2} = 4 - 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 4\,,$$

mientras que

$$|z_2 - 1|^2 = \left|-\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1\right) + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 + \frac{3}{2} = 4 + 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 4\,,$$

Teniendo esto en cuenta, junto con la factorización

$$\frac{1}{z^2+3i} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

vemos que conviene definir $f(z) = \frac{1}{z-z_2}$, que es holomorfa en un dominio Ω que contiene al disco cerrado $\overline{D}(1;2) = \{|z-1| \le 2\}$ y tal que $z_2 \notin \Omega$. Por ejemplo, podemos tomar como Ω un disco abierto centrado en $z=1$ y de un radio mayor que 2 y menor que

$$|z_2 - 1| = \sqrt{4 + 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}.$$

Entonces, por la fórmula de Cauchy básica, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2+3i} &= \int_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{z-z_1}\, dz = 2\pi i f(z_1) = 2\pi i \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi i}{2z_1} = \frac{\pi i}{z_1} \\
&= \frac{\pi i}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\pi i}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi i}{\sqrt{6}}(-1+i).
\end{aligned}$$

d) La integral ya está calculada (con el signo cambiado) en los apuntes sobre la fórmula integral de Cauchy y analiticidad; véase el Ejercicio **2** allí. ∎

---

74) Calcule las siguientes integrales, aplicando la versión de la fórmula integral de Cauchy para la derivada:

$$\textbf{a)} \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\, dz, \qquad \textbf{b)} \int_{|z|=4} \frac{z^2+2}{(z-3)^3}\, dz.$$

Las circunferencias tienen orientación positiva.

SOLUCIÓN. **a)** Como en el primer apartado del problema anterior, la función $f(z) = \operatorname{sen} z$ es entera y, por tanto, podemos aplicar la versión básica de la Fórmula integral de Cauchy para la derivada con cualquier dominio de los mencionados antes, siendo la derivada $f'(z) = \cos z$. Se obtiene

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\, dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i.$$

b) El denominador del integrando se anula sólo en $z=3$, un punto que se encuentra en el dominio interior a la circunferencia $\{|z|=4\}$. Por tanto, podemos elegir $f(z) = z^2+2$ (función entera) y Ω cualquier dominio que contenga al disco cerrado $\overline{D}(0;4)$, por ejemplo, el plano entero o un disco centrado en el origen y de radio > 4. La fórmula de Cauchy para la segunda derivada nos dice que

$$\frac{2!}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{f(z)}{(z-3)^3}\, dz = f''(3).$$

Calculamos fácilmente $f''(z) = 2$ para todo z, obteniendo finalmente

$$\int_{|z|=4} \frac{z^2+2}{(z-3)^3}\, dz = 2\pi i. \qquad \blacksquare$$

---

75) Desarrolle las siguientes funciones en series potencias del tipo indicado y determine el disco de convergencia:

a) $z^{3/2}$, en potencias de $z-1$; **b)** $\cosh z$, en potencias de $z+1$.

SOLUCIÓN.

a) Tomando la determinación principal y usando el resultado del Ejercicio **65** (con $z-1$ en lugar de z), obtenemos

$$z^{3/2} = (1+(z-1))^{3/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{3}{2}}{k} (z-1)^k,$$

siendo la serie convergente cuando $|z-1| < 1$. Por tanto, el disco de convergencia es $D(1;1)$.

b) Recordando la definición del coseno hiperbólico en términos de la función exponencial y el desarrollo en serie de ésta (véanse los apuntes sobre series de potencias), haciendo pequeños cambios algebraicos para que aparezcan potencias de $z+1$ y agrupando los términos semejantes, obtenemos

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{z+1}}{e} + ee^{-(z+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!} + e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+1)^n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}+(-1)^n e\right)\frac{1}{2n!}(z+1)^n. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

---

77) Encuentre razonadamente todas las funciones enteras f que satisfagan la siguiente ecuación funcional:

$$f(z) + f(w) = f(z+w) + 1, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C},$$

de dos maneras: **a)** usando el desarrollo de f en serie de Taylor; **b)** usando la derivada compleja.

SOLUCIÓN.

a) En particular, para z arbitrario y $w = z$ obtenemos la condición

$$2f(z) = f(2z) + 1, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Al ser entera, f es analítica: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, siendo la serie de potencias convergente en todo el plano. De la condición anterior obtenemos entonces que coinciden los siguientes desarrollos en serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n z^n + 1.$$

Las series de potencias a ambos lados de la igualdad convergen en todo el plano. Teniendo en cuenta la unicidad de los coeficientes de Taylor y comparando los coeficientes a ambos lados, se sigue que

$$2a_0 = a_0 + 1, \qquad 2a_1 = 2a_1, \qquad 2a_n = 2^n a_n, \quad n \geq 2.$$

La primera ecuación tiene solución única $a_0 = 1$, la segunda es cierta para cualquier valor de a_1 y el resto sólo es posible cuando $a_n =$ para todo $n \geq 2$ porque, de lo contrario, podríamos cancelar a_n, obteniendo $2 = 2^n \geq 4$, lo cual es absurdo. Se sigue que

$$f(z) = 1 + a_1 z, \qquad a_1 \in \mathbb{C}.$$

Es fácil comprobar directamente que toda función de este tipo cumple la condición dada con z y w:

$$f(z) + f(w) = 2 + a_1 z + a_1 w = f(z+w) + 1, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C},$$

(Por supuesto, siempre se cumplirá que $a_1 = f'(0)$.)

b) Sustituyendo $w = 0$ en la condición

$$f(z) + f(w) = f(z+w) + 1, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

obtenemos $f(0) = 1$ (que viene a decir lo mismo que antes: $a_0 = 1$). Luego podemos proceder de varias maneras. Por ejemplo, para un w arbitario pero fijo, derivando ambos lados respecto a la variable z, obtenemos

$$f'(z) = f'(z+w), \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

En particular, tomando $z = 0$, obtenemos que $f'(0) = f'(w)$ se cumple para w arbitrario y, por tanto, para todo $w \in \mathbb{C}$. Eso significa que la función entera g, dada por

$$g(w) = f(w) - f'(0)\,w, \qquad w \in \mathbb{C},$$

cumple la condición $g'(w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Por un resultado visto en clase, la función g tiene que ser constante y, por tanto,

$$f(w) - f'(0)\,w = C,$$

para cierto $C \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $w = 0$, obtenemos que $f(0) = C$, luego $C = 1$ por lo que ya vimos al principio. Finalmente,

$$f(w) = 1 + f'(0)\,w,$$

el mismo resultado que en la primera solución.

---

78) Si f es entera y para algún $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ satisface la desigualdad $|f(z) - a| \geq r$ para todo $z \in \mathbb{C}$, demuestre que f es constante.

SOLUCIÓN. De la condición $|f(z) - a| \geq r$ para todo $z \in \mathbb{C}$ se desprende que $|f(z) - a| > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y, por tanto, $f(z) - a \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, la función g definida como

$$g(z) = \frac{r}{f(z) - a}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

es entera y cumple $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, g es constante: existe $C \in \mathbb{C}$ tal que

$$\frac{r}{f(z) - a} = C, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Además, es obvio que $C \neq 0$. Despejando $f(z)$, obtenemos

$$f(z) = \frac{r}{C} + a, \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

así que f es constante. ■

---

79) Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y no es constante, entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

SOLUCIÓN. Supongamos lo contrario: que $f(\mathbb{C})$ no es denso en $\mathbb{C}$. Entonces $f(\mathbb{C})$ omite algún disco abierto: existe $D(a;r)$ tal que $r > 0$ y $f(\mathbb{C}) \cap D(a;r) = \emptyset$. En otras palabras, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $f(z) \notin D(a;r)$, o sea, $|f(z) - a| \geq r$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por el ejercicio anterior, f es constante. ■

---

80) Si f es entera y cumple la desigualdad $|f(z)| \leq \pi e^{2\,\mathrm{Re}\, z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, demuestre que

$$f(z) = ae^{2z}, \qquad a \in \mathbb{C}.$$

¿Qué condición debe cumplir la constante a?

SOLUCIÓN. Recordando que $e^{2\,\mathrm{Re}\, z} = |e^{2z}|$, vemos que la función entera $g(z) = f(z)/e^{2z}$ está acotada: $|g(z)| \leq \pi$ (y es entera porque la exponencial no se anula en ningún punto). Por el Teorema de Liouville, g es constante: $g \equiv a$ y, por la desigualdad anterior, $|a| \leq \pi$. Finalmente, se sigue que $f(z) = ae^{2z}$, con $|a| \leq \pi$.
Recíprocamente, toda función f de la forma $f(z) = ae^{2z}$, con $|a| \leq \pi$, cumple las condiciones del problema, puesto que entonces

$$|f(z)| = \left|ae^{2z}\right| = |a|e^{2\,\mathrm{Re}\, z} \leq \pi e^{2\,\mathrm{Re}\, z}. \qquad \blacksquare$$

---

81) Determine razonadamente todas las funciones enteras f (holomorfas en $\mathbb{C}$) tales que

$$|f(z)| \leq \frac{2020\,|z|^2}{|z|^2+1}, \qquad \text{para } |z| \geq 21073.$$

SOLUCIÓN. Conviene observar que la función $u : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $u(x) = \frac{x}{x+1}$ está acotada por uno: $u(x) < 1$, para todo $x \in [0,+\infty)$. Tomando como $x = |z|^2$, se deduce inmediatamente que

$$|f(z)| \leq \frac{2020\,|z|^2}{|z|^2+1} < 2020, \qquad \text{para } |z| \geq 21073.$$

El teorema de Liouville nos dice que $f \equiv C$, para cierto $C \in \mathbb{C}$. Es claro que C debe satisfacer la desigualdad $|C| < 2020$ pero ¿valen todas esas funciones o hay que descartar alguna? Debemos afinar más.
Es obvio que la constante C debe satisfacer la desigualdad

$$|C| \leq \frac{2020\,|z|^2}{|z|^2+1}, \qquad \text{para } |z| \geq 21073,$$

y, por tanto,

$$|C| \leq \min_{|z|\geq 21073} \frac{2020\,|z|^2}{|z|^2+1} = \frac{2020 \cdot 21073^2}{21073^2+1},$$

donde en la última igualdad hemos usado el hecho de que la función u definida arriba también es creciente en $[0,+\infty)$.
Recíprocamente, toda función constante que cumpla la desigualdad $|C| \leq \frac{2020\cdot 21073^2}{21073^2+1}$, cumplirá también

$$|f(z)| = |C| \leq \frac{2020 \cdot 21073^2}{21073^2+1} = \min_{|z|\geq 21073} \frac{2020\,|z|^2}{|z|^2+1}$$

y, por tanto, cumplirá las condiciones exigidas. $\blacksquare$

---

82) Demuestre que si f, una función entera, satisface

$$f(z+1) = f(z), \qquad f(z+i) = f(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es una función constante..

SOLUCIÓN. Es fácil probar por inducción que

$$f(z+m)=f(z)\,, \quad f(z+in)=f(z)$$

para todo m, $n \in \mathbb{N}$. Luego, poniendo $z-m$ y $z-in$ respectivamente en vez de z, vemos que las mismas ecuaciones se cumplen para todo m, $n \in \mathbb{Z}$. De esta manera vemos que los valores que toma f en el plano son los que toma en un cuadrado cualquiera de lado uno, por ejemplo, en

$$Q=\{z=x+yi:\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}.$$

Puesto que el conjunto Q es compacto y f es continua ahí, su módulo alcanzará su máximo en Q. Por tanto, existe una constante positiva y finita M tal que

$$|f(z)|\le M, \quad \text{para todo } z\in Q.$$

Debido a la periodicidad de f observada arriba, se sigue que

$$|f(z)|\le M, \quad \text{para todo } z\in \mathbb{C}.$$

Por tanto, f es entera y está acotada en $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, $f\equiv cte$.

En la dirección recíproca, es obvio que si f es constante entonces cumple ambas condiciones

$$f(z+1)=f(z)\,, \qquad f(z+i)=f(z)\,. \quad \blacksquare$$

---

83) Sea f una función entera. Si

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=0\,,$$

demuestre que f es constante.

SOLUCIÓN. Este problema es tan instructivo por lo que se puede hacer como por lo que no se puede usar.

Veamos la solución correcta. Por hipótesis, existe $R>0$ tal que

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le 1, \qquad \text{cuando} \quad |z|\ge R. \tag{1}$$

Por tanto, f es entera y satisface la condición $|f(z)|\le|z|$ cuando $|z|\ge R$. Según las estimaciones de Cauchy, f es una función lineal: $f(z)=Az+B$, con A, $B\in\mathbb{C}$. Dividiendo por z (y basta hacerlo para $|z|\ge R$), obtenemos

$$\frac{f(z)}{z}=A+\frac{B}{z}$$

Dejando que $z\to\infty$, se sigue que $0=A$ y, por tanto, $f(z)=B$ para todo $z\in\mathbb{C}$. Por tanto, si f cumple las condiciones del problema, tiene que ser constante. Recíprocamente, es fácil comprobar que toda función constante cumple las condiciones del problema.

Veamos ahora lo que hubiera sido una solución incorrecta. Ya sabemos que el teorema de Liouville es sólo un caso especial de las estimaciones de Cauchy y que en dicho teorema es suficiente que una función entera esté acotada sólo en el exterior de un disco centrado en el origen. Entonces, si aplicamos el teorema de Liouville a la condición (1), se deduce que $f(z)/z$ es constante y, por tanto, $f(z)=Cz$, una respuesta distinta a la que tenemos. ¿Dónde está el problema? ¿Qué es lo que hemos hecho mal? El problema está en lo siguiente: para poder aplicar el teorema de Liouville a la función $f(z)/z$, necesitamos que sea entera y eso no lo sabemos *a priori*; de hecho, si f es constante, digamos $f\equiv C$, la función C/z no es entera dado que no está definida en el origen. Por tanto, en esté caso no es legítima la aplicación del teorema de Liouville. Pero, si Liouville es un caso especial de las estimaciones de Cauchy, ¿por qué era legítimo el uso de éstas? Porque no las aplicamos a la función $f(z)/z$ sino a la propia f, de la que sí sabemos que es entera. $\blacksquare$
