ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 4: Cocientes, primer teorema de isomoría y aplicaciones.

1. Sea F el subespacio de $E=\mathbb{R}^4$ definido por

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ \begin{array}{c} x+y=0 \\ z+t=0 \end{array}\right\}.$$

Se pide:

(i) Encuentra una base de F, complétala para obtener una de E y utiliza esta última para calcular una base de E/F.

(ii) Encuentra las cordenadas de los vectores

$$[(2,-2,0,0)] \text{ y } [(3,4,0,0)]\in E/F$$

respecto de la base de E/F encontrada en el apartado anterior.

2. Sea $E=\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y F el subespacio vectorial definido por

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}:\ \begin{array}{c} a+b=0 \\ a'+b'=0 \\ c+c'=0 \end{array}\right\}.$$

Encuentra una base de E/F y las coordenadas del vector $[v]$, con $v=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, respecto a dicha base.

3. Sea

$$f: V_1=\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})\to V_2=\{\text{polinomios de grado}\leq 2\}$$

la aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=(a+b)+(c+c')x+(a'+b')x^2.$$

(i) Demuestra que su núcleo es el subespacio F del ejercicio anterior.

(ii) Demuestra que la expresión

$$\overline{f}([v])=f(v)$$

define un isomorfismo entre $\mathcal{M}_{2\times 3}/F$ y $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$. **(Primer teorema de isomorfía).**

(iii) Decide si esta misma expresión define una función cuando F es el subespacio generado por los vectores

$$v_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } v_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales arbitrarios definidos sobre el mismo cuerpo k y sea $f: V_1\to V_2$ un homomorfismo. Demuestra que f induce una aplicación $\overline{f}: V_1/F\to V_2$ (que además es un homomorfismo) si y sólo si $F\subset \operatorname{Ker}(f)$.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea G un subespacio vectorial de V.

(i) Demuestra que la aplicación canónica $\pi : V \to V/G$ definida por $\pi(v) = [v]$ es un epimorfismo. Calcula su núcleo y aplica el primer teorema de isomorfía.

(ii) Demuestra que existen bases de V y de V/G respecto a las cuales la matriz de π es de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \end{array}\right)$$

5. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(p(x)) = p(i)$.

(i) Demuestra que f es un homomorfismo suprayectivo entre espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

(ii) Demuestra que $\mathrm{Ker}(f) = \{(x^2+1)p(x) \mid p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. (Sugerencia: habrá que dividir por x^2+1).

(iii) Concluye que se tiene un isomorfismo

$$\mathbb{R}[x]/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

(iv) Da bases de los espacios vectoriales reales $\mathbb{R}[x]/\mathrm{Ker}(f)$ y $\mathbb{C}$ respectivamente.

HOJA 4: ESPACIO COCIENTE E ISOMORFÍA

1.

$F \subset E = \mathbb{R}^4$

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x+y=0 \\ z+t=0 \end{matrix} \right\}$$

i) Base de F, complétala para obtener una de E y calcular base de E/F

Base de $F = \{ \underbrace{(1,-1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,0,1,-1)}_{v_2} \}$

Base de $E = \{ v_1, v_2, \underbrace{(1,0,0,0)}_{v_3}, \underbrace{(0,0,1,0)}_{v_4} \}$

$\pi : E \longrightarrow E/F$ es sobreyectiva

$\{ \underbrace{[v_1]}_{0}, \underbrace{[v_2]}_{0}, [v_3], [v_4] \}$ generan E/F

Base de $E/F = \{ [v_3], [v_4] \}$

ii) Coord de $[(2,-2,0,0)]$, $[(3,4,0,0)]$ e E/F

$[(2,-2,0,0)] = [0] \rightsquigarrow$ coordenadas $(0,0)$

$(3,4,0,0) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow [(3,4,0,0)] = \lambda_1 \underbrace{[v_1]}_{0} + \lambda_2 \underbrace{[v_2]}_{0} + \lambda_3 [v_3] + \lambda_4 [v_4] = \lambda_3 [v_3] + \lambda_4 [v_4]$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} * & & & & ? \\ 0 & * & & & ? \\ 0 & 0 & a & b & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & c & \beta \end{array} \right)$$

$\lambda_4 = \frac{\beta}{c}$

$\lambda_3 = \frac{1}{a} [\alpha - b\lambda_3]$

$f: V \longrightarrow W$

Quiero resolver $f(v) = w$

$\uparrow$ es la incógnita

Dado v_1, ¿qué vectores v tienen la misma imagen?

$f(v_1) = f(v) \rightsquigarrow f(v_1 - v) = 0 \Rightarrow v_1 - v \in \operatorname{Ker} f$

Tiene sentido cocientar por $\operatorname{Ker} f$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Im} f \\ V/\operatorname{Ker} f \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{f}([v]) = f(v)$

Está bien definida

$\bar{f}$ es isomorfismo

$f = \bar{f} \circ \pi$

$\boxed{4.}$ V e.v. dimensión finita y G subespacio de V.

i) $\pi: V \longrightarrow V/G$, $\pi(v) = [v]$ es epimorfismo (lineal y sobreyectiva).

Calcular $\operatorname{Ker}\pi$ y aplica 1$^{\text{er}}$ teorema de isomorfía

π lineal: $\pi(\alpha v + \beta w) = [\alpha v + \beta w] = \alpha[v] + \beta[w] = \alpha\pi(v) + \beta\pi(w)$

π sobreyectiva: $w \in V/G$, entonces $w = [v]$, $v \in V$. $\Rightarrow w = \pi(v)$

$\operatorname{Ker}\pi$: $v \in \operatorname{Ker}\pi \iff \pi(v) = [v] = 0 \iff v \in G$.

$\operatorname{Ker}\pi = G$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & V/G \\ V/\operatorname{Ker}\pi \arrow[ur, dashed, "I"'] & \end{tikzcd}$$

$\overset{\shortparallel}{V/G}$

Continuación 4

ii) Demuestra que existen bases de V y V/G respecto de las cuales la matriz de π es de la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = \left(0 \mid I\right)$$

La proyección (semana pasada)

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) : \quad \underbrace{}_{KerP} \; \underbrace{}_{ImP}$$

$\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ base de G.

Ampliamos a : $B = \{V_1, V_2, \ldots, V_k, V_{k+1}, \ldots, V_n\}$ base de V.

$B' = \{[V_{k+1}], [V_{k+2}], \ldots, [V_n]\}$ base de V/G.

$$M_{BB'}(\pi) = \left(\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{K} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ & & 1 & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0\;1 \end{matrix}}_{V_n - V_k} \end{array}\right)$$

$\pi(V_1) = [V_1] = 0$

$\vdots$

$\pi(V_k) = [V_k] = 0$

$\pi(V_{k+1}) = [V_{k+1}] \neq 0$

$\vdots$

$\pi(V_n) = [V_n] \neq 0$

$\boxed{5.}$ $f: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(p(x)) = p(i)$

i) Demuestra que f es un homomorfismo suprayectivo (lineal y suprayect.) entre espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

- lineal $f(\alpha p(x) + \beta q(x)) = \alpha p(i) + \beta q(i) = \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x))$
- sobreyectiva

$$f(a+bx) = a + bi \in \mathbb{C} \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

ii) Demuestra $\operatorname{Ker} f = \{(x^2+1)\,p(x) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$ (Sugerencia: habrá que dividir por x^2+1)

$\supseteq$ $f((x^2+1)p(x)) = \underbrace{(i^2+1)}_{0}p(i) = 0$

$\subseteq$ Si $f(p) = p(i) = 0$, $p \in \mathbb{R}[x]$

$(x^2+1) = (x-i)(x+i)$ divide a $p(x) \Rightarrow p(x) = (x^2+1)\,q(x)$, $q \in \mathbb{R}[x]$

iii) Concluye que se tiene un isomorfismo $\mathbb{R}[x]/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$

1er teorema isomorfía

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[x] \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{C} \\ \mathbb{R}[x]/\operatorname{Ker} f \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

f sobreyectiva

$\bar{f}$ es isomorfismo

iv) Bases de los espacios reales $\mathbb{R}[x]/\operatorname{Ker} f$ y $\mathbb{C}$ respectivamente.

Si $p \in \mathbb{R}[x]$, $p(x) = (x^2+1)\,q(x) + r(x)$

$[p] = [r] = [a+bx]$ $\quad$ grad $r \leq 1$

$\mathbb{R}[x]/\operatorname{Ker} f$ generado por $[1], [x]$

$[1]$ y $[x]$ son independientes $\Rightarrow$ Base de $\mathbb{R}[x]/\operatorname{Ker} f = \{[1], [x]\}$

Base de $\mathbb{C} = \{\underset{\bar{f}([1])}{\overset{\shortparallel}{1}}, \underset{\bar{f}([x])}{\overset{\shortparallel}{i}}\}$

$\boxed{3.}$

iii) $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$F = \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$ $\quad \bar{f}([v]) = f(v)$

$$\bar{f} : M_{2\times 3}/F \longrightarrow P_{\mathbb{R}}^{2}[x]$$

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = (a+b) + (c+c')x + (a'+b')x^2$$

$$\bar{f}([V_1]) = \bar{f}([0]) = 0$$

$$\bar{f}([V_2]) = 0$$

$$\bar{f}([V_3]) = 0$$

$$\bar{f}([V_1]) = f(V_1) = 0$$

$$\bar{f}([V_2]) = f(V_2) = 0$$

$\bar{f}([V_3]) = f(V_3) = 1$ $\Rightarrow$ MAL DEFINIDA!

Todos los elementos del espacio por el que divides tienen que ir al 0.

Si $v \in F \Rightarrow \bar{f}([v]) = f(v) = 0$.