Variables y vectores aleatorios

1.- Sean X, Y, Z tres variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Mostrar que los siguientes sucesos están en $\mathcal{F}$:
(a) $\{X \geq Y\}$; **(b)** $\{X < Y\}$; **(c)** $\{X = Y\}$; **(d)** $\{X \geq Y \geq Z\}$; **(e)** $\{X + Y \leq z\}$ $(z \in \mathbb{R})$.

2.- Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. y sea $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Demuestra que $\sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots)$.

3.- Sea (X, Y) un vector aleatorio sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ y $A \in \mathcal{F}$. Mostrar que la siguiente función es una variable aleatoria:

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \text{si } \omega \in A, \\ Y(\omega), & \text{si } \omega \in A^c. \end{cases}$$

4.- (SUMAS, MÁXIMOS Y MÍNIMOS ALEATORIAS DE VARIABLES ALEATORIAS) Sean $N, X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Se supone que N toma valores enteros no negativos y se definen

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \left(\text{es decir,} \quad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega), \quad \omega \in \Omega\right), \quad Z = \text{máx}(X_1, \ldots, X_N), \quad W = \text{mín}(X_1, \ldots, X_N).$$

Mostrar que Y Z y W son también variables aleatorias.

5.- Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ con valores reales y sea $M = \sup_{n \geq 1} X_n$. Mostrar que:

(a) Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X_n > x) < \infty$, entonces $\mathrm{P}(M < \infty) = 1$ (es decir, $\mathrm{P}(M = \infty) = 0$).
(b) Si $X_1, X_2, \ldots$ son independientes y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X_n > x) = \infty$ para todos los $x \in \mathbb{R}$, entonces $\mathrm{P}(M = \infty) = 1$.
(c) ¿Puedes encontrar ejemplos de sucesiones de variables en las condiciones de los apartados anteriores?

6.- Para $a > 1$, sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes con la misma densidad $f(x) = (a-1)/x^a$ si $x > 1$ (y $f(x) = 0$ si $x \leq 1$).

(a) Hallar la probabilidad de que ocurran infinitos de los sucesos $A_n = \{X_n > n\}$.
(b) Hallar la probabilidad de que ocurran casi todos los sucesos A_n, es decir, todos salvo un número finito de ellos.

7.- Mostrar que la función f es una densidad de probabilidad, donde

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{\infty} u^{-1} e^{-u}\, du & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Esperanza matemática

8.- Se hacen n lanzamientos de una moneda equilibrada. Sea X el número de veces que aparece *cruz seguida de cara*. Hallar $\mathrm{E}X$. (RESPUESTA: $(n-1)/4$)

9.- Sea X una v.a. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X| \geq n) \leq \mathrm{E}|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X| \geq n).$$

Concluir que X es integrable si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X| \geq n) < \infty$.

SUGERENCIA: Obsérvese que $|X| = \sum_{n=0}^{\infty} |X| 1_{\{n \leq |X| < n+1\}}$.

10.- Sea X una v.a. no negativa. Mostrar que

$$\mathrm{E}X = \int_0^{\infty} \mathrm{P}(X > t)\, dt.$$

Concluir que si X toma valores en los enteros no negativos, entonces

$$\mathrm{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq n).$$

SUGERENCIA: Escribir $\mathrm{P}(X > t)$ como la integral de una función indicatriz y aplicar el Teorema de Fubini.

11.- Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes con igual distribución exponencial de parámetro 1. Mostrar que

$$\mathrm{E}\, \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}.$$

12.- Mostrar que si $\mathrm{E}|X| < \infty$, entonces $\lim_{x \to \infty} x\mathrm{P}(|X| \geq x) = 0$. ¿Puedes demostrarlo de varias formas?

13.- (ESPERANZA DE LA SUMA ALEATORIA) Sean $N, X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias. Se supone que N toma valores enteros no negativos y consideramos la variable $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Suponemos además que $N, X_1, X_2, \ldots$ son independientes, y que las X_i tienen la misma distribución. Mostrar que si N y X_1 son integrables, entonces Y también lo es y $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}N\mathrm{E}X_1$.