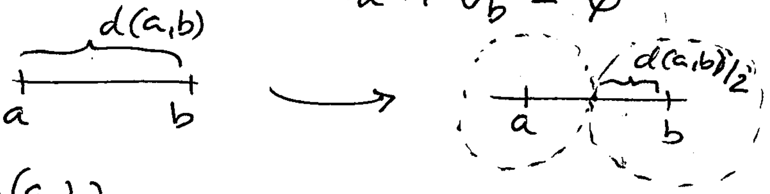
$\boxed{15.}$ (X, d)

A) $a, b \quad a \neq b \qquad U_a \cap U_b = \emptyset$



$r = d(a,b)$

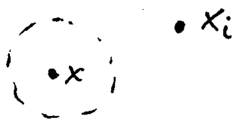
$\mathcal{U}_a = B(a, r/2) \qquad \mathcal{U}_b = B(b, r/2)$

$z \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \qquad r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

B) Subconjunto finito de X es cerrado

$S = \{x_1, \dots, x_n\}$

Como la unión finita de cerrados es cerrado, basta ver que $\{x_i\}$ es cerrado



$U_x = B(x, d(x,x_i))$ no contiene a x_i

$\boxed{16.}$ $(X, d) \quad a \in X, \; r > 0 \qquad B(a,r) \qquad C(a,r)$

A) $(E, \|\cdot\|)$ espacio vectorial normado

$\overline{B(a,r)} = C(a,r)$

$\subseteq$] $B(a,r) \subseteq C(a,r) \Rightarrow \overline{B(a,r)} \subseteq \overline{C(a,r)} = C(a,r)$

$\supseteq$] ¿$C(a,r) \subseteq \overline{B(a,r)}$?

Basta ver que si $q \in C(a,r)$ $\exists x_n \in B(a,r)$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = p$.

Si $p \in B(a,r) \quad x_n = p \ \forall n$

Si p, $\|p - a\| = r$

$a + (1 - \frac{1}{n})(p - a) = x_n$

$\|x_n - a\| = \|(1 - \frac{1}{n})(p-a)\| = (1 - \frac{1}{n}) r < r \Rightarrow x_n \in B(a,r)$

$\lim x_n = p$

Indicación para hacer el B.

b.1) $d(x,y) = \min\{1, \|x-y\|\}$

Abiertos de E, $\|\cdot\|$, E, d

$B^{\|\cdot\|}(a,r) = B^d(a,r)$ cuando $r \leq 1$

Cuando $r > 1$, $B^d(a,r) = E$

b.2) $\overline{B^d(a,r)} \neq C(a,r)$

Si $r = 1 \longrightarrow C(a,1) = E$ y $\overline{B^d(a,1)} = C^{\|\cdot\|}(a,1) = E$

$\boxed{19.}$ Sean (X,d) espacio métrico $A, B \subset X$

1) Supongamos $A \subset B$

Demostrar que A es compacto en (X,d) si y solo si es compacto en el subespacio métrico (B,d).

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos que A es compacto en (X,d).

Quiero ver que A es compacto en (B,d).

Tomo un recubrimiento de A por abiertos en B, $\{V_i\}_{i\in\Lambda}$

$V_i = B \cap O_i$, O_i abierto en X.

Sabemos que $A = \bigcup_{i\in\Lambda} (B \cap O_i) = B \cap \bigcup_{i\in\Lambda} O_i \Rightarrow$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i\in\Lambda} O_i$, $\Rightarrow \{O_i\}_{i\in\Lambda}$ son un recubrimiento de A por abiertos en $X \Rightarrow \exists$ un subrecubrimiento finito $O_1, \dots, O_n$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i$ (compacidad de A en X)

$\{O_i \cap B\}_{i=1}^{n} = \{V_i\}_{i=1}^{n}$ y ahora $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ (?)

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i$, $A \subset B$ por hipótesis $\Rightarrow A \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i \cap B =$

$= \bigcup_{i=1}^{n} (O_i \cap B) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

Los $\{V_i\}_{i\in\Lambda}$ tenía un subrecubrimiento finito de A.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos que A es compacto en (B,d)

Quiero ver que A es compacto en (X,d)

Tomo $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ recubrimiento abierto de A en X.

$\Rightarrow \{\underbrace{U_i \cap B}_{\text{abiertos relativos en } B}\}_{i\in\Lambda}$ recubrimiento A ya que $A \subseteq B \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{U}_1 \cap B, \dots, \mathcal{U}_n \cap B$ que recubren A $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ recubren A (porque $A \subseteq B$).

2) Si A es cerrado en (X,d) y B es compacto en (X,d)

$\Rightarrow A \cap B$ es compacto en (X,d).

$\{x_n\} \subseteq A \cap B$. En particular $\{x_n\} \subseteq B$ compacto $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión convergente $\left(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in B\right)$.

Por otra parte $\{x_n\} \subset A$ cerrado $\Rightarrow x_0 \in \overline{A} = A$ (por ser cerrado A contiene a todos sus ptos de acumulación)

$\Rightarrow x_0 \in A \cap B \Rightarrow A \cap B$ compacto.

4) Unión de finitos subconjuntos de X compactos en (X,d) es compacta en (X,d).

$K_1, \dots, K_n$ compactos ¿ $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ compacto ?

$\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\Lambda}$ recubrimiento por abiertos de $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\mathcal{U}_i\}_{i\in\Lambda}$ recubren cada K_j $j=1,\dots,n$.

K_1 compacto $\Rightarrow \mathcal{U}_1^1, \dots, \mathcal{U}_{n_1}^1$ subrecubrimiento que cubre a K_1

⋮

con todos

[22.]

A) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad x \in (0,1]$

Demostrar que no hay ninguna función continua $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) \quad x \in (0,1)$

Si existiera $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tendría un máximo ya que $[0,1]$ es compacto $\Rightarrow |g(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,1]$

pero $g(1/n) = f(1/n) = n$ no acotado $\forall n$.

▸ También valdría demostrarlo con la definición de continuidad de toda la vida.

B) (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos. $\Omega \subset X$.

$f : \Omega \subset X \longrightarrow Y$ continua en Ω.

Demostrar que a lo sumo existe una función $F : \overline{\Omega} \subset X \rightarrow Y$ continua en $\overline{\Omega}$ y tal que $F(x) = f(x)$ en cada $x \in \Omega$.

Suponemos que existe F. obligatorio por el enunciado

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ (?) & x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega \end{cases}$$

$x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega \Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq \Omega$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

x_0 pto. de adherencia

$$F(x_0) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \overset{F \text{ continua}}{=} \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (?) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

c) Supongamos que (Y, d_2) [cut off at top edge] es uniformemente continua.
la función $f: \Omega \subset X \longrightarrow Y$

Demostrar:

1) Si $\{x_n\}_n \subset \Omega$ es de Cauchy en (X, d_1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}_n$ es de Cauchy en (Y, d_2)

Sea $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (porque f es unif. continua).

Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, $\exists N$ tal que $\forall n, m \geq N$,

$d_1(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow \forall n, m > N$, $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ es de Cauchy.

2) $F: \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow Y$

$x \in \overline{\Omega}$, $F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ cuando $\{x_n\}_n \subset \Omega$ satisface

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

3) Demostrar que F está bien definida en $\overline{\Omega}$ y que

$F(x) = f(x)$ en cada $x \in \Omega$.

Quiero ver que si $x_n \longrightarrow x$ y que si $y_n \longrightarrow x$,

entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

$z_{2n} = x_n$ $\quad \{z_n\}$ $\quad \lim_{n\to\infty} z_n = x \Rightarrow \{z_n\}$ de Cauchy $\Rightarrow$

$z_{2n-1} = y_n$

$\Rightarrow \{f(z_n)\}$ de Cauchy (por el c.1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim f(z_n)$ existe porque (Y, d_2) es completo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = y_0 \Rightarrow \begin{cases} \lim f(x_n) = y_0 \\ \lim f(y_n) = y_0 \end{cases}$ porque subsuces.

de sucesión convergente tiene el mismo límite.

4) Demostrar que F es uniformemente continua en $\overline{\Omega}$.

Tengo que ver que si $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $d_1(x, x_0) <$ con $x, x_0 \in \overline{\Omega}$, entonces $d_2(F(x), F(x_0)) < \varepsilon/2$

Si $x, x_0 \in \Omega$ entonces el δ de la f valdría, porque $F(x) = f(x)$ y $F(x_0) = f(x_0)$.

$\varepsilon > 0$, $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ $\quad F(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, $x_n \in \Omega$

$x \in \Omega$ $\quad d_2(F(x_0), F(x)) = d_2(\lim_{n\to\infty} f(x_n), f(x)) =$

$$= \lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(x))$$

Parece que si $d_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_1(x_n, x) < \delta \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon/2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(x)) \leq \varepsilon/2$

$$\overset{\parallel}{d_2(f(x_0), f(x))} < \varepsilon$$

$\boxed{21.}$ $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

corregido un error en el enunciado

$$g: [-2, 2] \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$g(t) = \begin{cases} (1+t, \sqrt{1-(1+t)^2} & , -2 \leq t \leq 0 \\ (1-t, -\sqrt{1-(1-t)^2} & , 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

0) g es sobreyectiva

Si $(x,y) \in S^1$, $y \geq 0$, entonces $g(\underset{[-2,0]}{\underset{\cap}{x-1}}) = (x,y)$

Si $(x,y) \in S^1$, $y \leq 0$, entonces $g(\underset{[0,2]}{\underset{\cap}{1-x}}) = (x,y)$

1) Ninguna función continua $f: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva en S^1.

S^1 es compacto (porque es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$),
así que si $f: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces $\exists p_0 \in S^1$ tal que $f(p_0) = \max_{S^1} f$

Supongamos $p_0=(x_0,y_0)$, $y_0>0$. En este caso, la función $f\circ g:[-2,0]\longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, inyectiva, pero tiene un máximo en un $t_0\in(-2,0)$, con $g(t_0)=p_0$. Eso es una contradicción.

El caso $p_0=(x_0,y_0)$, $y_0<0$, se hace igual pero usando $g:[0,2]\longrightarrow S^1$

Si $y_0=0$, lo podemos hacer igual reemplazando g por

$$\tilde{g}(t)=\begin{cases}\left(\sqrt{1-(1+t)^2},\ 1+t\right), & -2\le t\le 0\\ \left(\sqrt{1-(1-t)^2},\ 1-t\right), & 0\le t\le 2\end{cases}$$

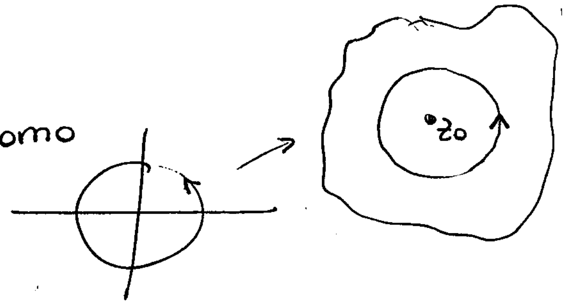
② Supongamos $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ continua, $z_0\in\mathbb{R}^2$. Todo entorno de z_0, contiene puntos p,q con $p\neq q$, tales que $\|h(p)\|_2=\|h(q)\|_2$

Sea U un entorno abierto de z_0

Hay un $r>0$ tal que $B_{2r}(z_0)\subseteq U$

Sea $F:S^1\longrightarrow U\subseteq\mathbb{R}^2$ definida como

$p\longmapsto z_0+rp$



Defino $f:S^1\longrightarrow\mathbb{R}$

$p\longmapsto\|h\circ F(p)\|$

f no es inyectiva por ① $\Rightarrow\exists\, p_1,p_2\in S^1$ tales que $\|h(F(p_1))\|=$
$=\|hF(p_2)\|$ $\Rightarrow$ $y_1=F(p_1)\in U$ sirven como p,q

$y_2=F(p_2)\in U$

③ Considérese g definida solamente en $t\in[-2,2]$. Demostrar que g es continua e inyectiva en $[-2,0)$ pero su inversa no es continua

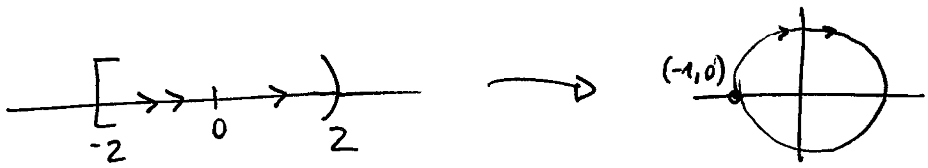
(Errata corregida)

- g continua e inyectiva (inmediato)
- g^{-1} no es continua:

1ª solución: Si g^{-1} fuera continua, entonces $[0,2)$ sería compacto, por serlo S^1, ya que g sería biyectiva, continua con inversa continua.

(y recubrimientos abiertos de S^1 inducirían recubrimientos abiertos de $[0,2)$ y viceversa).

2ª solución:



Consideremos la sucesión de puntos:

$$P_{2n} = \left(-1+\frac{1}{n}, \sqrt{1-\left(-1+\frac{1}{n}\right)^2}\right), \quad g^{-1}(P_{2n}) = -2+\frac{1}{n}$$

$$P_{2n+1} = \left(-1+\frac{1}{n}, -\sqrt{1-\left(-1+\frac{1}{n}\right)^2}\right), \quad g^{-1}(P_{2n+1}) = 2-\frac{1}{n}$$

$$P_K \longrightarrow (-1,0)$$

pero $g^{-1}(P_K)$ no converge, ya que

$g^{-1}(P_K) \longrightarrow (-2)$ con K par

$g^{-1}(P_K) \longrightarrow 2$ con K impar

$$|a^\alpha - b^\alpha| \leq |a-b|^\alpha$$

$\cancel{t^\alpha} \longrightarrow \quad t \to t^\alpha$

$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$

$$\left|a^\alpha + \cancel{(-b)}(-b^\alpha)\right| \leq \underset{\underset{a^\alpha}{\shortparallel}}{|a^\alpha|} + |-b^\alpha|$$

$\boxed{a>b}$

$$\underset{\underset{a^\alpha - b^\alpha}{\shortparallel}}{|a^\alpha - b^\alpha|} \leq |a-b|^\alpha$$

$$a^\alpha - b^\alpha \leq (a-b)^\alpha$$

$b > a$

$$|a^\alpha - b^\alpha| = |b^\alpha - a^\alpha| \leq |a-b|^\alpha = |b-a|^\alpha$$

$f(a) - f(b) \leq f(a-b)$?

$f : t \longrightarrow t^\alpha$ con α

$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$