HOJA 4

1. $\mathbb{P}(X = \text{"varón"}) = 50\%$

a) $\mathbb{P}$("una familia de 6 hijos tenga por lo menos 1 niña") = ?

b) $\mathbb{P}$(" " " " " " " " " 1 niño") = ?

c) $\mathbb{P}$(" " " " " " " " " 2 niños y 1 niña") = ?

$\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, X_i = "i-esimo hijo" $\quad X_i \sim \text{Bernoulli}(1/2)$

$\Updownarrow$

X_i = "hombre" $\qquad X = \sum_{1}^{6} X_i \sim \text{Bin}(6; 1/2)$

a) $\mathbb{P}(X \leq 5) = 1 - \mathbb{P}(X=6) = 1 - \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(1-\frac{1}{2}\right)^0$

b) $\mathbb{P}(X \geq 1) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=1}^{6} \binom{6}{i} p^i (1-p)^{6-i} =$

$= 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^6$

c) $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 6) = \sum_{i=2}^{5} p(X=i) = \sum_{i=2}^{5} \binom{6}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-i}$

2.1 $f(x) = \begin{cases} k(x-1)(3-x) & , \quad x \in [1,3] \\ 0 & , \quad x \notin [1,3] \end{cases}$

a) Si $x \in (1'7,\ 2'4) \Longrightarrow$ es útil

$\mathbb{P}(\text{"útil"}) = ?$

$$\mathbb{P}(x \in (1'7, 2'4)) = \int_{1'7}^{2'4} k(x-1)(3-x)\,dx = k\int_{1'7}^{2'4} (3x - x^2 - 3 + x)\,dx =$$

$$= k\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{-x^3}{3} - 3x + \frac{x^2}{2}\right]_{x=1'7}^{x=2'4} = \cdots = \bar{p}$$

Sabemos que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 = k\int_1^3 (x-1)(3-x)dx \Longrightarrow k = \cdots$

b) Un lote tiene 5 unidades, se acepta el lote si contiene menos de 2 piezas defectuosas

$\mathbb{P}(\text{"lote rechazado"}) = ? = 1 - \mathbb{P}(X \geq 3) = \mathbb{P}(X \leq 2)$

X = "nº de piezas útiles en un lote de 5 piezas" $\sim$

$\sim$ Binomial $(5; \bar{p})$

$$X = \sum_{i=0}^{2} \binom{5}{i} \bar{p}^{\,i} (1-\bar{p})^{5-i}$$

$\boxed{3.}$ $n = 10000$

$\mathbb{P}(\text{"accidente"}) = 0'005\%$

a) X = "nº asegurados con accidente de 10000"

$\mathbb{P}(X \geq 3) = ?$

$$X \sim \text{Binomial}(\overset{n}{\overset{\|}{10000}}, \overset{p}{\overset{\|}{0'005\%}}) \approx \text{Poisson}(\overbrace{10000 \cdot 0'005\%}^{\lambda = np = 0'5})$$

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{10000}{i} \cdot 0'005^{i} (1 - 0'005\%)^{10000-i} \approx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{2} e^{-0'5} \cdot \frac{0'5^{i}}{i!}$$

b) $\mathbb{E}(X) = np = \lambda = 0'5$

$\boxed{4.}$ $P(\text{"reacción alérgica"}) = 0'001$

$\mathbb{P}(\text{"3 individuos tienen reacción alérgica sobre 2000"}) = ?$

X = "nº individuos que tienen reacción alérgica sobre 2000"

$\sim \text{Binomial}(2000, 0'001) \approx \text{Poisson}(2)$

$$\mathbb{P}(X = 3) = e^{-2} \cdot \frac{2^{3}}{3!}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - \sum_{i=0}^{1} e^{-2} \cdot \frac{2^{i}}{i!}$$

5.

$$f(x) = \begin{cases} 1000 \ldots & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

a) $$\mathbb{P}(100 < X < 1000) = \int_{100}^{1000} \frac{1}{1000} \cdot e^{-x/1000}\, dx = \left[-e^{-x/1000} \right]_{x=100}^{x=1000} =$$

$$= -e^{-1} + e^{-0'1}$$

b) $$\mathbb{P}(X \geq 100 \mid X < 500) = ?$$

$$= \frac{\mathbb{P}(100 \leq X < 500)}{\mathbb{P}(X < 500)} = \frac{\int_{100}^{500} \frac{1}{1000} e^{-x/1000}\, dx}{\int_{0}^{500} \frac{1}{1000} e^{-x/1000}\, dx} = \frac{\left[-e^{-x/1000} \right]_{x=100}^{x=500}}{\left[-e^{-x/1000} \right]_{x=0}^{x=500}}$$

6.

X = "tiempo transcurrido (en horas) hasta el fallo de una pieza"

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15000} e^{-x/15000} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) $$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x)\, dx = \frac{1}{15000} \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x/15000}\, dx = 15000$$

b) $$\mathbb{P}(10000 \leq X \leq 15000) = \int_{10000}^{15000} \frac{1}{15000} \cdot e^{-x/15000}\, dx =$$

$$= \frac{1}{15000} \int_{10000}^{15000} e^{-x/15000}\, dx = \left[-e^{x/15000} \right]_{10000}^{15000} = -e + e^{2/3}$$

$\boxed{7.}$ Consideramos como "éxito" comerse una mariposa envenenada y "fracaso" comerse una mariposa en buen estado. Utilizamos el modelo de la <u>geométrica</u>.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p} = [p = 0'4] = \frac{1-0'4}{0'4} = \frac{0'6}{0'4} = 1'5$$

Como se come la mariposa considerada como "exito" también la media de mariposas comidas es: $1'5 + 1 = 2'5$.

$\boxed{8.}$

a) $\mathbb{P}(X=10) = (1-0'15)^{10} \cdot 0'15 = 0'0295$

b) $\mathbb{P}(X=10) = \binom{10+3-1}{10} \cdot (0'15)^3 \cdot (1-0'15)^{10}$

$\boxed{16.}$ Un zoólogo estudia una especie de ratones de campo. Captura ejemplares de una población grande con una proporción p de esa especie.

a) Si $p = 0'3$, ¿$\mathbb{P}$("nº de razones de esta especie ≥ 2 si captura 6 hay exactamente 3 de campo")?

b) Si $p = 0'03$, ¿$\mathbb{P}$("de 200 capturados hay entre 75 y 110 de los que le interesan")

c) Si $p = 0'4$, ¿$\mathbb{P}$("de 200 hay entre 75 y 110 de los que le interesan")

d) Si $p = 0'2$

a) $X \sim Bin(6; 0'3)$

$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) = 1 - 0'11765 - 0'3025$

b) $X \sim Bin(200; 0'03) \approx Poisson(6)$

$\mathbb{P}(X=3) = 0'089 = \binom{200}{3} \cdot (0'03)^3 (0'97)^{197} \approx \frac{6^3}{3!} e^{-6}$

c) $X \sim Bin(200; 0'4) \approx \mathcal{N}(\underbrace{200 \cdot 0'4}_{np=\mu}, \underbrace{\sqrt{200 \cdot (0'4) \cdot (1-0'4)}}_{\sqrt{np(1-p)} = \sigma})$

$$\mathbb{P}(75 \leq X \leq 110) = \mathbb{P}\left(\frac{75-\overset{\mu}{80}}{\underset{\sigma}{\underset{\shortparallel}{6'93}}} \leq \underbrace{\frac{X-80}{6'93}}_{= Z \sim N(0;1)} \leq \frac{110-80}{6'93}\right) =$$

$$\cong \mathbb{P}(-0'72 \leq Z \leq 4'33) = \underbrace{\int_{-0'72}^{4'33} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx}_{\text{no se hace} \rightarrow \text{usamos tablas}} = 1 - \mathbb{P}(Z > 4'33) - \mathbb{P}(Z < -0'72) =$$

$= 1 - \mathbb{P}(Z > 4'33) - \mathbb{P}(Z > 0'72) =$

$= 1 - 8'54 \cdot 10^{-6} - 0'23576$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0'2}{0'2} = \frac{0'8}{0'2} = 4 \Big\} \text{ caso } 1$$

$$\mathbb{E}(X+1) = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p} = \frac{1}{0'2} = 5 \Big\} \text{ caso } 2$$

11.) El peso de las personas de una población sigue una distribución normal con media 72 Kg y desviación típica 10.

a) Cuatro personas elegidas independientemente y al azar en esa población entran en un ascensor cuya carga máxima es de 350kg. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los cuatro superen esa carga máxima?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas, elegidas independientemente y al azar en esa población, puedan jugar en un balancín, si sólo pueden hacerlo cuando sus pesos difieren en menos de 5 Kg?

a) $X \sim N(72;10)$

$\underline{4}$ personas $\longrightarrow Y \sim N(\underline{4}.72\,;\sqrt{\underline{4}.10^2}) = N(288\,;20)$

$$\mathbb{P}(Y \geq 350) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normalización} \\ N(0;1)}}{=} \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{Y-288}{20}}_{Z} \geq \frac{350-288}{20}\Big) = \mathbb{P}(Z \geq 3'1) = 9'68.10^{-4}$$

b) $X \sim N(72-72\,;\sqrt{2.10^2}) = N(0\,;\sqrt{200})$

$$\mathbb{P}(-5 \leq X \leq 5) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normalización}}}{=} \mathbb{P}\Big(\frac{-5-0}{\sqrt{200}} \leq \underbrace{\frac{X-0}{\sqrt{200}}}_{Z} \leq \frac{5-0}{\sqrt{200}}\Big) = \mathbb{P}(-0'35 \leq Z \leq 0'35) =$$

$$= \mathbb{P}(Z \geq -0'35) - \mathbb{P}(Z \geq 0'35) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq -0'35) - \mathbb{P}(Z \geq 0'35) =$$

$$= 1 - 2\mathbb{P}(Z \geq 0'35) = 1 - 2.0'36317 = 0'274$$

12. Avería cuando tensión $\geq$ capacidad.

Tensión $T \sim N(100; 20)$

Capacidad $C \sim N(140; 10)$

$$A \sim N\left(100-140; \sqrt{20^2+10^2}\right) = N\left(-40; \sqrt{500}\right)$$

$$¿\mathbb{P}(A \geq 0)? \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(A \geq 0) = \mathbb{P}\left(\frac{A-(-40)}{\sqrt{500}} \geq \frac{0-(-40)}{\sqrt{500}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{40}{\sqrt{500}}\right) = \mathbb{P}(Z \geq 1'789) \simeq 0'03673$$

13. Anchura de un álamo: $X \sim N(6; \sigma)$

a) Sabemos que $\mathbb{P}(X \leq 7'5) = 0'9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq 7'5) = 0'1$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X-6}{\sigma} \geq \frac{7'5-6}{\sigma}\right) = 0'1 \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{1'5}{\sigma}\right) = 0'1$$

Mirando en la tabla de la distribución Normal averiguamos que número K hace $\mathbb{P}(Z \geq K) \simeq 0'1$.

$K \simeq 1'28$

Entonces: $\frac{1'5}{\sigma} = 1'28 \rightarrow \sigma = \frac{1'5}{1'28} = 1'1719$

$$X \sim N(6; 1'1719)$$

b) $¿\mathbb{P}(X \geq 8)?$

$$\mathbb{P}(X \geq 8) = \mathbb{P}\left(\frac{X-6}{1'1719} \geq \frac{8-6}{1'1719}\right) = \mathbb{P}(Z \geq 1'707) \simeq 0'04363$$