2.5. Espacios producto y teorema de Fubini

1. Mostrar que si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ son espacios de medida completos, el espacio producto $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu)$ *no* tiene por qué ser completo.
Sugerencia: Considerar $E = A \times B$, donde $\emptyset \neq A \in \mathcal{F}$ y $\mu(A) = 0$ y $B \subset Y$ con $B \notin \mathcal{G}$.

2. Sea μ la medida de contar sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

(a) Mostrar que la medida producto $\mu \times \mu$ coincide con la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

(b) Consideramos la función

$$f(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n, \\ -1, & \text{si } m = n+1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprobar que las sumas iteradas

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) \right) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) \right)$$

existen, pero son distintas. ¿Contradice esto el teorema de Fubini?

3. Sean $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-medible y $g : Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-medible. Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es medible Borel, entonces la función $H(x,y) = h\big(f(x), g(y)\big)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-medible.

4. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Para funciones $f \colon X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-medible y $g \colon Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-medible se considera la función $h(x,y) = f(x)g(y)$.

(a) Demostrar que h es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-medible.

(b) Demostrar que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$ entonces $h \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$ y

$$\int_{X \times Y} h(x,y)\, d(\mu \times \nu)(x,y) = \left(\int_X f(x)\, d\mu(x) \right) \left(\int_Y g(y)\, d\nu(y) \right).$$

5. Sean $(X, \mathcal{F}, m)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$, donde $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}(Y)$, m es la medida de Lebesgue y ν es la medida de contar. Consideramos el espacio producto $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, m \times \nu)$ y el conjunto $D = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$.

(a) Mostrar que $D \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.
Sugerencia: $D = \cap_1^{\infty} D_n$ con $D_n = \cup_{j=1}^{n} [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$.

(b) Comprobar que

$$\int_Y \left(\int_X 1_D(x,y) dm(x) \right) d\nu(y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_X \left(\int_Y 1_D(x,y) d\nu(y) \right) dm(x) = 1.$$

(c) Mostrar que $(m \times \nu)(D) = \infty$.
Sugerencia: Tener en cuenta que

$$(m \times \nu)(D) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)\nu(B_j) : A_j \in \mathcal{F},\, B_j \in \mathcal{G} \text{ y } D \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j\right\}.$$

(d) ¿Contradice este ejercicio el teorema de Fubini-Tonelli?

6. Consideramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \in [-1,1]^2 - \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mostrar que sus integrales iteradas existen y valen cero. ¿Es f integrable?

7. Sea $m > 0$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin^2 x}{x^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+m^2)}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable.
Sugerencia: Mostrar que $|f(x,y)| \leq f_1(x) f_2(y)$, con f_1, f_2 integrables.

8. Sea $f : [-1,1] \to [0,\infty]$ una función positiva e integrable. Definimos, para $x \in (0,1]$,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f(t)\, dt.$$

(a) Probar que $g \in \mathcal{L}^1[0,1]$ si y sólo si $f(t)\log(1/|t|)$ es integrable en $[-1,1]$ y, en ese caso,

$$\int_0^1 g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(t)\log(1/|t|)\, dt.$$

(b) Si f es integrable, pero no es positiva, ¿qué implicaciones del "si y sólo si" se mantienen?

9. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones medibles Borel e integrables en $\mathbb{R}$.

(a) Probar que la función $(x,y) \mapsto f(x-y)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-medible.

(b) Probar que la *convolución* de f y g, $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy$, está bien definida en casi todo $x \in \mathbb{R}$ y, además, $f * g \in \mathcal{L}^1$.
Sugerencia: Usar el Teorema de Fubini-Tonelli.

10. Consideramos la función $S : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$S(T) = \int_0^T \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

(a) Mostrar que S es uniformemente continua. Es decir, $\sup_{T\in[0,\infty)} |S(T+h)-S(T)| \to 0$, cuando $h \to 0$.

(b) $\lim_{T\to\infty} S(T) = \pi/2$.
Sugerencia: Usar que $1/x = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$ (para $x > 0$), el teorema de Fubini y el TCD. Por favor, comprobar que todos los teoremas se aplican correctamente.

(c) S está acotada.

(d) La función $f(x) = \sin x/x$ no es integrable en $(0,\infty)$, es decir,

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty.$$

Sugerencia: Mostrar que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$.

11. Mostrar que la función $f(x,y) = e^{-y}\sin(2xy)$ es integrable para $(x,y) \in [0,1] \times [0,\infty)$, y deducir el valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 y}{y} e^{-y}\, dy.$$

Sugerencia: Calcular la integral $\int_0^1 \sin(2xy)\, dx$.

12. Consideramos la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \in [-1,1]^2 - \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mostrar que las integrales iteradas de f son iguales, pero f *no* es integrable.

2 5. Integración en coordenadas polares

13. Sean Γ y β las funciones gamma y beta de Euler, respectivamente.

(a) Integrando por partes muestra la ecuación funcional de Γ: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, para $p > 0$.

(b) Haz un cambio de variable adecuado para ver que

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty u^{2p-1}\, e^{-u^2}\, du.$$

(c) Muestra que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
Sugerencia: Calcula $\Gamma(1/2)^2$ usando la expresión del apartado (b), el Teorema de Fubini y el cambio a coordenadas polares en el plano.

(d) Haz un cambio de variable adecuado para ver que

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} v \, \cos^{2q-1} v \, dv.$$

(e) Muestra que

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Sugerencia: Usa la sugerencia del apartado (c) y (d) para calcular $\Gamma(p)\Gamma(q)$.

14. En $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m)$, determinar para qué valores de α existen y son finitas las siguientes integrales y calcular su valor en ese caso.

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+\|x\|^2)^\alpha}$.

(b) $\displaystyle\int_{\{\|x\|<R\}} \|x\|^\alpha \, dx$, para $R > 0$.

(c) $\displaystyle\int_{\{\|x\|<1\}} \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - \cdots + (-1)^{n+1} x_n^2}{\|x\|^\alpha} \, dx$.