1^{a} PARTE

CURVAS PLANAS:

- VECTOR TANGENTE: $\mathbb{T}_\alpha(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$

- PARÁMETRO ARCO LONGITUD : $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| \, du$

- VECTOR NORMAL: $\mathbb{N}_\alpha(t) = J\,\mathbb{T}_\alpha(t)$ con $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matriz de giro de 90°

- DIEDRO DE FRENET: base $\{\mathbb{T}_\alpha(t), \mathbb{N}_\alpha(t)\}$ positivamente orientada

- CURVATURA : $K_\alpha(t) = \dfrac{\langle \mathbb{T}'_\alpha(t), \mathbb{N}_\alpha(t) \rangle}{V_\alpha(t)}$ ó $K_\alpha(t) = \dfrac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{V_\alpha(t)^3}$

- VECTOR CURVATURA : $\mathbb{K}_\alpha(t) = K_\alpha(t)\,\mathbb{N}_\alpha(t)$

- $\theta(t) \equiv$ ángulo entre $\mathbb{T}_\alpha(t)$ y eje OX : $\theta'(t) = K_\alpha V_\alpha \overset{\text{arco}}{=} K_\alpha(t)$

  Como $\theta'(s) = K_\alpha(s) \implies \theta(s) = \theta_0 + \displaystyle\int_{s_0}^{s} K_\alpha(u)\,du$

  $\alpha'(s) = \mathbb{T}_\alpha(s) = \cos\theta(s)\,e_1 + \operatorname{sen}\theta(s)\,e_2$

  Esto nos permite conseguir $\alpha(s)$ a partir de $K_\alpha(s)$.

- CAMBIO DE PARÁMETRO :
  $\mathbb{T}_\beta = \varepsilon(\varphi).\,\mathbb{T}_\alpha(\varphi(s))$ $\qquad K_\beta = \varepsilon(\varphi).\,K_\alpha(\varphi(s))$
  $\mathbb{N}_\beta = \varepsilon(\varphi).\,\mathbb{N}_\alpha(\varphi(s))$ $\qquad \mathbb{K}_\beta = \mathbb{K}_\alpha(\varphi(s))$

CURVAS EN EL ESPACIO:

- VECTOR TANGENTE: $\mathbb{T}_\alpha(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \overset{\text{p.a.l.}}{=} \alpha'(t)$

- VECTOR NORMAL : $\mathbb{N}_\alpha(t) = \dfrac{\mathbb{T}'_\alpha(t)}{\|\mathbb{T}'_\alpha(t)\|} \overset{\text{p.a.l.}}{=} \dfrac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$

- VECTOR BINORMAL: $\mathbb{B}_\alpha(t) = \mathbb{T}_\alpha(t) \times \mathbb{N}_\alpha(t)$

- TRIEDRO DE FRENET: base $\{\mathbb{T}_\alpha(t), \mathbb{N}_\alpha(t), \mathbb{B}_\alpha(t)\}$ positivamente orientada

- CURVATURA : $K_\alpha(t) = \dfrac{\|\mathbb{T}'_\alpha(t)\|}{V_\alpha(t)}$ ó $\dfrac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{V_\alpha^3}$

- VECTOR CURVATURA: $\mathbb{K}_\alpha(t) = \dfrac{\mathbb{T}'_\alpha(t)}{V_\alpha(t)}$

- TORSIÓN : $\tau_\alpha(t) = -\dfrac{\langle \mathbb{B}'_\alpha(t), \mathbb{N}_\alpha(t) \rangle}{V_\alpha(t)}$ ó $\dfrac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$

- CAMBIO DE PARÁMETRO :
  $\mathbb{T}_\beta(s) = \varepsilon(\varphi).\,\mathbb{T}_\alpha(\varphi(s))$ $\qquad K_\beta(s) = K_\alpha(\varphi(s))$
  $\mathbb{N}_\beta(s) = \mathbb{N}_\alpha(\varphi(s))$ $\qquad \tau_\beta(s) = \tau_\alpha(\varphi(s))$
  $\mathbb{B}_\beta(s) = \varepsilon(\varphi).\,\mathbb{B}(\varphi(s))$

- FÓRMULAS DE FRENET:

$$\mathbb{t}'_\alpha(t) = \kappa_\alpha(t) \cdot v_\alpha(t) \cdot \mathbb{n}_\alpha(t)$$

$$\mathbb{n}'_\alpha(t) = -\kappa_\alpha(t) v_\alpha(t) \cdot \mathbb{t}_\alpha(t) + \tau_\alpha(t) \cdot v_\alpha(t) \cdot \mathbb{b}_\alpha(t)$$

$$\mathbb{b}'_\alpha(t) = -\tau_\alpha(t) \cdot v_\alpha(t) \cdot \mathbb{n}_\alpha(t)$$

- PLANOS:

plano osculador: $\operatorname{span}\{\mathbb{t}_\alpha(t), \mathbb{n}_\alpha(t)\} + \alpha(t) \equiv \langle p-\alpha(t), \mathbb{t}_\alpha(t) \times \mathbb{n}_\alpha(t) \rangle = 0$

plano normal: $\operatorname{span}\{\mathbb{n}_\alpha(t), \mathbb{b}_\alpha(t)\} + \alpha(t) = \langle p-\alpha(t), \mathbb{n}_\alpha(t) \times \mathbb{b}_\alpha(t) \rangle = 0$

plano rectificante: $\operatorname{span}\{\mathbb{t}_\alpha(t), \mathbb{b}_\alpha(t)\} + \alpha(t) \equiv \langle p-\alpha(t), \mathbb{t}_\alpha(t) \times \mathbb{b}_\alpha(t) \rangle = 0$

- LONGITUD: curva $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$

$$\mathcal{L}\left(\alpha|_{[a,b]}\right) = \int_a^b \sqrt{I_\alpha(\alpha'(t), \alpha'(t))}\, dt = \int_a^b \sqrt{E u'(t)^2 + 2F u'(t) v'(t) + G v'(t)^2}\, dt$$

$$\mathcal{L}\left(\alpha|_{[a,b]}\right) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$$

- ÁREA:

$$A(R) = \int_{\mathbb{X}^{-1}(R)} \|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\| du dv = \int_{\mathbb{X}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2}\, du dv$$

2ª PARTE

PLANO TANGENTE

Sea S superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y $p \in S$. Un vector $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector a S en p si existe curva diferenciable $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

También, si $\mathbb{X}$ es una parametrización (al menos de un entorno de p) de S, el plano tangente (conjunto de vectores tangentes a S en p) en p está generado por $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$.

$\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$ es una base de T_pS. $\qquad B = \{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$

ESPACIO NORMAL

El espacio normal de S en p es el generado por N, vector normal al plano tangente T_pS.

$$N(\mathbb{X}(u,v)) = \frac{\mathbb{X}_u(u,v) \times \mathbb{X}_v(u,v)}{\|\mathbb{X}_u(u,v) \times \mathbb{X}_v(u,v)\|} = \frac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|}$$

$$\mathbb{R}^3 = T_pS \oplus (T_pS)^{\perp}$$

PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

La 1FF de S en p es la forma bilineal simétrica def. positiva: es el prod. escalar restringido a vectores $\in T_pS$:

$$I_p(x,y) := \langle x, y \rangle$$, e.d.,

La matriz de I_p es : $$(I_p)_B \equiv \begin{pmatrix} \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle & \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle \\ \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle & \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$I_p(x,y) = \langle x, y \rangle = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

ISOMETRÍA LOCAL

Una aplicación $h: S_1 \to S_2$ entre superficies regulares es una isometría si conserva la 1FF para todo $p \in T_pS_1$. Las isometrías conservan longitudes, áreas y ángulos.

Una aplicación $f: S_1 \to S_2$ entre sup. regulares es conforme si conserva la 1FF para todo $p \in T_pS_1$ salvo por una aplicación diferenciable positiva $\lambda: S_1 \to \mathbb{R}$.

OPERADOR DE WEINGARTEN

Para entender como se curva S en p analizamos como varía S en p. El operador de Weingarten es $W_p(x) : -(dN)_p(x)$.

$\langle W_p x, y\rangle = \langle x, W_p' y\rangle \quad x,y \in T_pS$

Se calcula más fácilmente a partir de la 2FF.

SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL:

La 2FF es una forma bilineal simétrica en T_pS definida como:

$$\mathrm{II}_p(x,y) := \langle x, W_p y\rangle$$

La matriz de II_p con respecto a la base B es:

$$(\mathrm{II}_p)_B \equiv \begin{pmatrix} \langle X_{uu}, N\rangle & \langle X_{uv}, N\rangle \\ \langle X_{uv}, N\rangle & \langle X_{vv}, N\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Con esto podemos calcular $(W_p)_B \equiv (I_B)^{-1} \cdot \mathrm{II}_B$

CURVATURAS PRINCIPALES, CURVATURA DE GAUSS, CURVATURA MEDIA...

El operador de Weingarten es autoadjunto, por lo que su matriz es simétrica respecto a una base ortonormal $\Rightarrow$ diagonalizable.

$W_p e_1 = K_1(p) e_1 \qquad W_p e_2 = K_2(p) e_2 \qquad K_1(p), K_2(p)$ son los autovalores CURVATURAS PRINCIPALES de S en p.

Cualquier autovector es una DIRECCIÓN PRINCIPAL

- LÍNEA DE CURVATURA: curva $\alpha : I \to S$ diferenciable tal que $\alpha'(t)$ es dirección principal $\forall t$, e.d., $W_{\alpha(t)}\alpha'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$ para todo t y cierta función $\lambda : I \to \mathbb{R}$ de curvatura principal.
- DIRECCIÓN ASINTÓTICA: de S en p es un vector de T_pS tal que $\mathrm{II}_p(x,x) = 0$.
- LÍNEA ASINTÓTICA: de S es una curva tal que $\alpha'(t)$ es dirección asintótica $\forall t$, e.d., $\mathrm{II}_p(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0 \ \forall t$.
- CURVATURA DE GAUSS: $K_p = \det W_p = K_1(p) \cdot K_2(p) \qquad K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$
- CURVATURA MEDIA: $H_p = \dfrac{\mathrm{traza}(W_p)}{2} = \dfrac{K_1(p) + K_2(p)}{2} \qquad H = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$

TIPOS DE PUNTOS

Un punto p en una superficie es exactamente uno de los siguientes tipos:

- Elíptico: $K(p) > 0$, e.d. $K_1(p) \cdot K_2(p) > 0$
- Hiperbólico: $K(p) < 0$, e.d. $K_1(p) \cdot K_2(p) < 0$
- Parabólico: $K(p) = 0$ y $W_p \neq 0$, e.d., $K_1(p) = 0$ ó $K_2(p) = 0$ y $K_1(p) \neq K_2(p)$
- Plano: $K(p) = 0$ y $W_p = 0$, e.d., $K_1(p) = K_2(p) = 0$

Además, p se dice umbilical si $K_1(p) = K_2(p)$.

Una superficie se dice totalmente umbilical si $\forall p$ p es umbilical.

Una superficie es totalmente umbilical si es un abierto de un plano o esfer

CURVATURA NORMAL Y GEODÉSICA

Las curvaturas geodésica y normal de una curva param. por arco en una superficie son las componentes (escalares) tangencial y normal a la aceleración respectivamente.

$$K_{g,\alpha} = K_\alpha \langle n_\alpha, N(\alpha(t)) \times t_\alpha \rangle \overset{\text{arco}}{=} K_\alpha \langle \alpha'', N(\alpha) \times \alpha' \rangle = \frac{1}{|\alpha'|^3} \langle \alpha'', N(\alpha) \times \alpha' \rangle$$

$$K_{n,\alpha} = K_\alpha \langle n_\alpha, N(\alpha(t)) \rangle \overset{\text{arco}}{=} K_\alpha \langle \alpha'', N(\alpha) \rangle = \frac{1}{|\alpha'|^2} \langle \alpha'', N(\alpha) \rangle$$

$$K_\alpha^2 = K_{g,\alpha}^2 + K_{n,\alpha}^2$$

$$K_{n,\alpha} = \mathrm{II}(\alpha', \alpha')$$

OJO: $K_1(p) \leq K_n(p, x) = \mathrm{II}_p(x, x) \leq K_2(p) \quad \forall x \in T_pS \quad \|x\| = 1$

$K_1(p)$, $K_2(p)$ es el máximo y mínimo de K_n en p.

$$K_n(p, X_\theta) = K_1(p) \cos^2\theta + K_2(p) \operatorname{sen}^2\theta$$

donde $X_\theta \in T_pS$ vector unitario que forma un ángulo θ con e_1.

dirección principal correspondiente al mínimo de $K_1(p), K_2(p)$.

$$\tilde{\Phi} = h \circ \cancel{X}(u,v) = \Phi\left(z(u,v),\ \theta(u,v)\right)$$

CÁLCULO DE ISOMETRÍAS

$$\tilde{\Phi}_u = D\Phi\begin{pmatrix} \frac{dz}{du} \\ \frac{d\theta}{du} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\Phi}_v = D\Phi\begin{pmatrix} \frac{dz}{dv} \\ \frac{d\theta}{dv} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E_{\tilde{\Phi}} = \langle \tilde{\Phi}_u, \tilde{\Phi}_u \rangle = \left(\frac{dz}{du}, \frac{d\theta}{du}\right) \underbrace{D\Phi^T \cdot D\Phi}_{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} \frac{dz}{du} \\ \frac{d\theta}{du} \end{pmatrix} = \left(\frac{dz}{du}, \frac{d\theta}{du}\right) \mathrm{I} \begin{pmatrix} \frac{dz}{du} \\ \frac{d\theta}{du} \end{pmatrix} = E_{\Phi} \\ F_{\tilde{\Phi}} = \langle \tilde{\Phi}_u, \tilde{\Phi}_v \rangle = \left(\frac{dz}{du}, \frac{d\theta}{du}\right) \mathrm{I} \begin{pmatrix} \frac{dz}{dv} \\ \frac{d\theta}{dv} \end{pmatrix} = F_{\Phi} \\ G_{\tilde{\Phi}} = \langle \tilde{\Phi}_v, \tilde{\Phi}_v \rangle = \left(\frac{dz}{dv}, \frac{d\theta}{dv}\right) \mathrm{I} \begin{pmatrix} \frac{dz}{dv} \\ \frac{d\theta}{dv} \end{pmatrix} = G_{\Phi} \end{cases}$$

GAUSS-BONNET LOCAL

Sea $\alpha(t)$ curva cerrada simple suave a tramos, orientada positivamente en S. Entonces:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} K_g(\alpha)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi$$

ángulos exteriores

GAUSS-BONNET GLOBAL

Sea R una región de S orientable, con $\partial R = C_1 \cup \cdots \cup C_n$, curvas suaves a tramos, todas orientadas positivamente. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} K_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{l} \theta_l = 2\pi \chi(R)$$

característica de Euler

Esfera de radio r: $A(R) = r^2\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi\right)$

ángulos interiores R

$R \equiv$ región triangular esfera

Característica de Euler de una región triangular: $\chi(R) = V - A + C$

vértices − aristas + caras

Característica de Euler de una esfera: $\chi(S^2) = 2$

Característica de Euler de un toro o cilindro $= 0$

γ gedesica $\iff (\gamma'')^T \equiv 0 \iff \gamma'$ es paralelo

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad |||$

$k_{g,\gamma} \equiv 0 \qquad \langle \gamma'', X_u \rangle = 0 = \langle \gamma'', X_v \rangle \qquad \frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0$

$|||$

$\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right)^T = (\gamma'')^T \equiv 0$

γ geodésica $\Rightarrow \|\gamma'\| = cte$

γ geodésica $\Rightarrow n_\gamma \parallel N \circ \gamma \Rightarrow n_\gamma = N \circ \gamma$ (salvo dirección)

TEOREMA DE CLAIRAUT

Si I_γ solo depende de v:

γ geodésica $\iff \langle \gamma', X_u \rangle = cte_1$

SISTEMA:
$\begin{cases} \langle \gamma', X_u \rangle = cte_1 \\ \langle \gamma', \gamma' \rangle = cte_2 \end{cases}$

- Lineas asintóticas

$\alpha(t) = \cancel{X(v(t),} \; X(u(t), v(t))$

$\Updownarrow$

$II_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0 \quad \forall t \qquad \alpha'(t) = X_u u' + X_v v'$

$\Updownarrow$

$(u' \;\; v') \left(II_{\alpha(t)} \right) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

- Líneas de curvatura:

$W_{\alpha(t)} \alpha'(t) = \lambda(t) \alpha'(t)$ ~~para~~ $\forall t$ y una cierta f. de curvatura

$\Updownarrow$ en la base $\{X_u, X_v\}$

$(I^{-1})(II)\, \alpha'(t) = \lambda(t) \alpha'(t) \iff II \alpha'(t) = \lambda I \alpha'(t \iff$

~~II mul~~ $II \alpha'(t)$ múltiplo de $I\alpha'(t) \iff \det\left(II\alpha'(t) \,\middle|\, I\alpha'(t) \right) =$

3ª PARTE

TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS

La curvatura de Gauss es preservada por isometrías locales

Si $h: S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría local entre S_1 y S_2 $\Longrightarrow K_1 = K$

Es decir, $K_1(p) = K_2(h(p)) \quad \forall p \in S_1$.

ECUACIONES CURVATURA DE GAUSS USANDO SOLO 1FF

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right)$$

Si $E = a^2$, $F = 0$, $G = b^2$ (parametrización ortogonal):

$$K = \frac{-1}{ab}\left[\left(\frac{a_v}{b}\right)_v + \left(\frac{b_u}{a}\right)_u \right]$$

Si $E = 1$, $F = 0$, $G = \lambda^2$ (coordenadas de Fermi)

$$K = -\frac{\lambda_{uu}}{\lambda}$$

Si $E = G = \lambda$, $F = 0$ $\Longrightarrow$ $K = \frac{-1}{2\lambda}\Delta(\log \lambda)$

TEOREMA DE MINDING:

Si dos superficies tienen la misma curvatura gaussiana <u>constan</u> entonces son isométricas.

Si $K > 0 \Longrightarrow$ localmente isométrico con una esfera.

Si $K = 0 \Longrightarrow$ localmente isométrico con un plano.

Si $K < 0 \Longrightarrow$ localmente isométrico con una pseudoesfera.