TOPOLOGÍA. UAM, 29 de junio de 2017

Apellidos, Nombre: ____

Grupo: ____

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6	TOTAL
1,5 puntos	2 puntos	1,5 puntos	2 puntos	1,5 puntos	1,5 puntos	10

---

1. Se considera una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definida del modo siguiente:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{F \subset \mathbb{R}^2 : \ F \text{ consta de un número finito de puntos y de rectas}\}.$$

(a) Probar que $\mathcal{F}$ es la familia de los cerrados de una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) Probar que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ es la mínima topología de $\mathbb{R}^2$ en la que las rectas y los puntos son conjuntos cerrados.

(c) Comparar $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ con la topología usual y con la topología cofinita.

(d) Contestar razonadamente las dos preguntas siguientes:

- ¿Existe alguna topología en $\mathbb{R}^2$ en la que las rectas sean conjuntos cerrados y los puntos no?
- ¿Existe alguna topología en $\mathbb{R}^2$ en la que los puntos sean conjuntos cerrados y las rectas no?

---

2. En $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se considera la topología $\mathcal{T}_1$ producto de la topología usual en el primer factor $\mathbb{R}$ por la topología discreta en el segundo factor $\mathbb{R}$. Después se define en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$:

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1^2 + 2y_1^2 = x_2^2 + 2y_2^2 \ .$$

(a) Demostrar que el espacio cociente X de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1)$ por la relación $\mathcal{R}$ es homeomorfo a $[0, \rightarrow [= [0, \infty)$ con su topología usual.

(b) Estudiar si la proyección canónica de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1)$ sobre X es abierta o cerrada.

3.

(a) Definir con precisión qué quiere decir que un espacio topológico sea *compacto*.

(b) Sea $(X, \prec)$ un conjunto totalmente ordenado y sea $\mathcal{T}$ la topología de X asociada al orden $\prec$.

Demostrar que $(X, \mathcal{T})$ es compacto si y sólo si todo subconjunto no vacío de X posee supremo e ínfimo.

⇝ **dorso**

4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Para cada $A \subset X$ se define χ_A, la *función característica de* A mediante:

$$\begin{array}{ccl} X & \xrightarrow{\chi_A} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

Se pide

(a) Definir qué es la frontera de A, a la que denotaremos por $\mathrm{Fr}(A)$, para un conjunto $A \subset X$.

(b) Demostrar que, para un punto $x \in X$, χ_A es una aplicación continua en x si y sólo si $x \notin \mathrm{Fr}(A)$.

(c) Demostrar que χ_A es continua en X si y sólo si A es, a la vez, abierto y cerrado.

---

5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

(a) Explicar qué quiere decir que $(X, \mathcal{T})$ sea *conexo*.

(b) Demostrar que si $(X, \mathcal{T})$ es conexo y, además, existe una aplicación

$$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$$

continua y no constante, donde $\mathcal{T}_u$ es la *topología usual* de $\mathbb{R}$, entonces el conjunto X es *no numerable*.

6.

(a) Definir con precisión qué quiere decir que un espacio topológico sea *simplemente conexo*.

(b) Probar que el conjunto de los puntos $z \in \mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ para los que $\mathbb{D} \setminus \{z\}$ es simplemente conexo es, precisamente, $\mathbb{S}^1 = \mathrm{Fr}(\mathbb{D}^2)$.

(c) Deducir que si $f : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ es un homeomorfismo, entonces $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

TIEMPO: 3 horas.