Primer Control Análisis Matemático de 2º de Matemáticas 2018-2019

Apellidos: **Nombre:** **DNI:**

Problema 1.- (2 puntos) **(Teoría).** Contestar brevemente a las siguientes preguntas:

1. Dar la definición de subconjunto abierto de un espacio métrico (X, d).

2. Dar la definición de subconjunto cerrado de un espacio métrico (X, d) y explicar porqué X y $\emptyset$ son siempre abiertos y cerrados en X.

3. Dar la definición de cierre $\overline{A}$ de un subconjunto A de X (métrico).

4. Dar la definición de interior $\operatorname{int}(C)$ de un subconjunto C de X (métrico).

5. Si definimos $\partial C := \overline{C} \setminus \operatorname{int}(C)$ (borde topológico de $C \subset X$, con X métrico), probar que ∂C es un cerrado.

<u>Soluciones:</u>

1. Si $U \subset X$, U es abierto en X si para todo x en U, hay un $\delta > 0$ tal que la bola abierta $B_\delta(x)$ está dentro de U; simbólicamente, $\forall x \in U \exists \delta > 0 \wedge B_\delta(x) \subset U$.

2. $E \subset X$ es cerrado en X precisamente si $E^c = X \setminus E$ es abierto; $\emptyset, X$ son ambos abiertos y cerrados porque está claro que ambos son abiertos según la definición de 1.), y son complementarios el uno del otro.

3. Son posibles varias definiciones equivalentes: $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A (intersección de todos los cerrados que lo contienen), ó también es el conjunto de todos sus puntos adherentes: $\overline{A} = \{x \in X : \exists (a_n) \text{ sucesion en } A \wedge a_n \to x\}$.

4. Como en 3,), son posibles varias definiciones equivalentes: $\operatorname{int}(C)$ es el mayor abierto contenido en C (unión de todos los abiertos contenidos en C), ó bien el conjunto de todos sus puntos interiores: $\operatorname{int}(C) = \{x \in X : \exists \delta > 0 \wedge B_\delta(x) \subset C\}$.

5. ∂C es un cerrado porque como $\operatorname{int}(C) \subset C \subset \overline{C}$, $\partial C = \overline{C} \cap \operatorname{int}(C)^c$, que es la intersección de dos cerrados.

<u>Soluciones:</u>

1. Si $U \subset X$, U es abierto en X si para todo x en U, hay un $\delta > 0$ tal que la bola abierta $B_\delta(x)$ está dentro de U; simbólicamente, $\forall x \in U \exists \delta > 0 \wedge B_\delta(x) \subset U$.

2. $E \subset X$ es cerrado en X precisamente si $E^c = X \setminus E$ es abierto; $\emptyset, X$ son ambos abiertos y cerrados porque está claro que ambos son abiertos según la definición de 1.), y son complementarios el uno del otro.

3. Son posibles varias definiciones equivalentes: $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A (intersección de todos los cerrados que lo contienen), ó también es el conjunto de todos sus puntos adherentes: $\overline{A} = \{x \in X : \exists (a_n) \text{ sucesion en } A \wedge a_n \to x\}$.

4. Como en 3,), son posibles varias definiciones equivalentes: $\operatorname{int}(C)$ es el mayor abierto contenido en C (unión de todos los abiertos contenidos en C), ó bien el conjunto de todos sus puntos interiores: $\operatorname{int}(C) = \{x \in X : \exists \delta > 0 \wedge B_\delta(x) \subset C\}$.

5. ∂C es un cerrado porque como $\mathrm{int}(C) \subset C \subset \overline{C}$, $\partial C = \overline{C} \cap \mathrm{int}(C)^c$, que es la intersección de dos cerrados.

Problema 2.- (3 puntos)

1. Sea E un espacio normado y $f : \Omega \subset E \mapsto E$ para las cuales existen constantes $L < \infty$ y $\alpha \in (0,1]$ tales que, para todos los $x, y \in \Omega$, $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|^\alpha$. Probar que f es uniformemente continua en Ω.

2. Sea $f(x) = x^\alpha$, $x \in [0, \infty)$; $\alpha \in (0,1]$. Probar que f es uniformemente continua.

3. Si f es como en 1.), pero para $\alpha > 1$ y su dominio Ω es un abierto conexo, probar que debe ser constante; dar un contraejemplo a ésta afirmación cuando $\alpha = 1$.

Soluciones:

1. Fijemos $\epsilon > 0$. Si $\delta > 0$ cumple $L\delta^\alpha = \epsilon$ (ó lo que es lo mismo, $\delta = (\epsilon/L)^{1/\alpha}$), si $x, y \in \Omega$ cumplen $\|x - y\| < \delta$, entonces, usando que la función $t \mapsto t^\alpha$ es creciente ($t \geq 0$), $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|^\alpha < L\delta^\alpha = \epsilon$, y como tal elección de δ sólo depende de ϵ, pero no de los puntos $x, y \in \Omega$, f es uniformemente continua.

2. Éste apartado puede abordarse de muchas maneras, pero habida cuenta del Prob 2.1, podemos intentar probar que f cumple las condiciones dichas. Para ello, observamos que si $0 \leq x < y$, podemos calcular

$$\begin{aligned} 0 < y^\alpha - x^\alpha &= \alpha \int_x^y t^{\alpha-1}\, dt \\ &= \alpha \int_0^{y-x} (t+x)^{\alpha-1}\, dt \\ &\leq \alpha \int_0^{y-x} t^{\alpha-1}\, dt \\ &= (y-x)^\alpha \end{aligned}$$

dónde en la segunda línea hemos usado el cambio de variable $t \mapsto t + x$, y en la tercera línea, que para $\alpha \in (0,1]$, $t^{\alpha-1}$ es no-creciente en $[0, \infty)$. Otras posibilidades hubieran sido explotar que como $\alpha \in (0,1]$, $t \mapsto t^\alpha$ es cóncava, y vale 0 para $t = 0$, de dónde es subaditiva, y es fácil probar por otro argumento que $|x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|^\alpha$, o varias otras más que omito.

3. Observamos que dado $x \in \Omega$, si $B_\delta(x) \subset \Omega$ (con $\delta > 0$) y $h \in E$ con $\|h\| < \delta$, $x + h \in \Omega$ y podemos escribir $f(x+h) = f(x) + 0 \cdot h + (f(x+h) - f(x))$, con $\|f(x+h) - f(x)\| \leq L\|h\|^\alpha$, que es $o(\|h\|), h \to 0$, por ser $\alpha > 1$. Se sigue que en todo $x \in \Omega$, f es diferenciable con diferencial nula. Usando un resultado probado en clase, se sigue que como Ω es un abierto conexo en un espacio normado, que f es constante.

Problema 3.- (2 puntos)

1. Sea (X_i, d_i), $i = 1, 2$ espacios métricos y $X = X_1 \times X_2$ (producto cartesiano de X_1, X_2). Pongamos en X $d_X((x,y),(x',y')) = d_1(x,x') + d_2(y,y')$; $x, x' \in X_1$, $y, y' \in X_2$. Probar que (X, d_X) es un espacio métrico en el que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ (con (x_n) sucesión en X_1, (y_n) sucesión en X_2), $x \in X_1$, $y \in X_2$ sii $x_n \to x$ (en X_1), $y_n \to y$ (en X_2).

2. Probar que X es completo si ambos factores lo son, y que es compacto si ambos factores lo son. Generalizar éstos resultados al caso de un producto cartesiano con n factores.

Soluciones:

1. Es trivial comprobar que d_X define una métrica en X. $(x_n, y_n) \to (x, y)$ sii $d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y) \to 0$, y como las distancias son no-negativas, ésto equivale a que $d_1(x_n, x)$, $d_2(y_n, y) \to 0$, lo cual a su vez equivale a que $x_n \to x$ (en X_1) e $y_n \to y$ (en X_2).

2. Usaremos el apartado 1.). Si ambos factores son completos y (x_n, y_n) es una sucesión de Cauchy en X (con $x_n \in X_1$, $y_n \in X_2$), como $d_1(x_m, x_n)$, $d_2(y_m, y_n) \leq d_X((x_m, y_m), (x_n, y_n))$, (x_n) es de Cauchy en X_1, (y_n) es de Cauchy en X_2, y usando la completitud de ambos espacios, $\exists x \in X_1$, $\exists y \in X_2$ con $x_n \to x$ (en X_1), $y_n \to y$ (en X_2), y usando el resultado del apartado 1.), $(x_n, y_n) \to (x, y)$ (en X); se sigue que X es X completo. Si, en cambio, suponemos que los factores son compactos, extraemos primero una subsucesión convergente (x_{n_k}) a un $x \in X_1$ (usando la compacidad de X_1) y consideramos la sucesión $(x'_k, y'_k) = (x_{n_k}, y_{n_k})$. Ahora, extraemos una subsucesión (y'_{k_l}) de (y'_k) convergente a un $y \in X_2$ (usando la compacidad de X_2). Si $(x''_l, y''_l) = (x'_{k_l}, y'_{k_l})$, $x''_l \to x$ (en X_1), $y''_l \to y$ (en X_2), y de nuevo, usando el apartado 1.), $(x''_l, y''_l) \to (x, y)$ (en X), luego X es compacto.

Problema 4.- (3 puntos) Sea (X, d) un espacio métrico y $D \subset X$ no-vacío. Definimos $\operatorname{diam}(D)$ como $\sup\{d(x, y) : x, y \in D\}$ (con el entendimiento de que el supremo es ∞ si ése conjunto de valores no es acotado superiormente); diremos que D es <u>acotado</u> si $\operatorname{diam}(D) < \infty$.

1. Probar que si $D \subset E \subset X$, con E acotado, entonces D es acotado.

2. Probar que en $Y = X^2 = X \times X$, con distancia $d_Y((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$; $x, x', y, y' \in Y$, la función $d(x, y)$ es continua.

3. Probar que si X es compacto, todo subconjunto no-vacío suyo D es acotado y además, si D es cerrado, existen $x, y \in D$ tales que $\operatorname{diam}(D) = d(x, y)$ (<u>indicación</u>: recordar el resultado del Problema 3.2)).

Soluciones:

1. Si $\emptyset \neq D \subset E \subset X$, $\emptyset \neq \{d(x, y) : x, y \in D\} \subset \{d(x, y) : x, y \in E\}$, y si E es acotado, entonces toda cota superior de $\{d(x, y) : x, y \in E\}$ también lo es de $\{d(x, y) : x, y \in D\}$, luego $\sup\{d(x, y) : x, y \in D\} \leq \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$, lo cual quiere decir que $\operatorname{diam}(D) \leq \operatorname{diam}(E) < \infty$, luego D es acotado.

2. Dados puntos (x, y), $(x', y') \in Y$, $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$ (aplicando dos veces consecutivas la Desigualdad Triangular). Se sigue que $d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y', y)$, y por simetría, $d(x‘, y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y', y)$, de dónde $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y', y) = d_Y((x, y), (x', y'))$, de dónde la función $d(x, y)$ en Y es continua.

3. Por 2.), la función $d(x, y)$ es continua en Y, que es compacto, luego por el Teorema de Weiersstrass alcanza un máximo en cierto punto $(x_0, y_0) \in Y$, lo cual equivale a afirmar que $\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\} = d(x_0, y_0)$ (para ciertos x_0, $y_0 \in X$); si $\emptyset \neq D \subset X$, usando 1.), se sigue que D es acotado, mientras que si además D es cerrado, por ser subconjunto de X, que es compacto, es él mismo también compacto, luego entonces aplicando el argumento del principio, existe $(x_0, y_0) \in D \times D$ con $\operatorname{diam}(D) = \sup\{d(x, y) : x, y \in D\} = d(x_0, y_0)$ (con x_0, $y_0 \in D$).