Matrices aleatorias

Modelos de Wishart y Wigner

Autor: Alejandro Santorum Varela
Tutor: José Luis Fernández Pérez

Universidad Autónoma de Madrid. Facultad de Ciencias.
Departamento de Matemáticas

18 de enero de 2021

Contenido

Contenido

Distribución de Wishart: definición

La distribución de Wishart surge como una generalización de la distribución χ^2.

Distribución de Wishart: definición

La distribución de Wishart surge como una generalización de la distribución χ^2.

Definición

Sean $\mathbb{X}_1, ..., \mathbb{X}_n$ vectores aleatorios independientes tales que $\mathbb{X}_i \sim N_p(0, \Sigma)$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, y sea $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{p\times n}$ cuyas columnas son los vectores $\mathbb{X}_i$, entonces se dice que la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ sigue la distribución de Wishart, y lo denotaremos como $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.

Distribución de Wishart: definición

La distribución de Wishart surge como una generalización de la distribución χ^2.

Definición

Sean $\mathbb{X}_1, ..., \mathbb{X}_n$ vectores aleatorios independientes tales que $\mathbb{X}_i \sim N_p(0, \Sigma)\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, y sea $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{p\times n}$ cuyas columnas son los vectores $\mathbb{X}_i$, entonces se dice que la matriz $\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ sigue la distribución de Wishart, y lo denotaremos como $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.

Notemos que

$$\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i \mathbb{X}_i^T = \sum_{i=1}^{n} (X_{ij} X_{ik})_{1\leq j,k\leq p}$$

Distribución de Wishart: propiedades (I)

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.

1. $\mathbf{M}$ es *semidefinida positiva*.

Distribución de Wishart: propiedades (I)

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.

1. $\mathbf{M}$ es *semidefinida positiva*.
2. Si $B \in \mathcal{M}_{p\times m}$, entonces $B^T\mathbf{M}B \sim W_m(n, B^T\Sigma B)$.

Distribución de Wishart: propiedades (I)

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.

1. $\mathbf{M}$ es *semidefinida positiva*.
2. Si $B \in \mathcal{M}_{p\times m}$, entonces $B^T\mathbf{M}B \sim W_m(n, B^T\Sigma B)$.
3. Para Σ (matriz de covarianzas) definida positiva, tenemos que
$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(n, I_p).$$

Distribución de Wishart: propiedades (I)

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.

1. $\mathbf{M}$ es *semidefinida positiva*.
2. Si $B \in \mathcal{M}_{p\times m}$, entonces $B^T\mathbf{M}B \sim W_m(n, B^T\Sigma B)$.
3. Para Σ (matriz de covarianzas) definida positiva, tenemos que
$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(n, I_p).$$
4. Si $a \in \mathbb{R}^p$ tal que $a^T\Sigma a \neq 0$, entonces $\frac{a^T\mathbf{M}a}{a^T\Sigma a} \sim \chi^2_n$.

Distribución de Wishart: propiedades (I)

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.

1. $\mathbf{M}$ es *semidefinida positiva*.
2. Si $B \in \mathcal{M}_{p\times m}$, entonces $B^T\mathbf{M}B \sim W_m(n, B^T\Sigma B)$.
3. Para Σ (matriz de covarianzas) definida positiva, tenemos que
$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(n, I_p).$$
4. Si $a \in \mathbb{R}^p$ tal que $a^T\Sigma a \neq 0$, entonces $\frac{a^T\mathbf{M}a}{a^T\Sigma a} \sim \chi^2_n$.
5. La función característica de $\mathbf{M}$ es
$$\varphi_{\mathbf{M}}(\mathbf{T}) = \det(I_p - 2i\Sigma\mathbf{T})^{-n/2}, \text{ donde } \mathbf{T} \in \mathcal{S}_p.$$

Distribución de Wishart: propiedades (I)

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.

1. $\mathbf{M}$ es *semidefinida positiva*.
2. Si $B \in \mathcal{M}_{p\times m}$, entonces $B^T\mathbf{M}B \sim W_m(n, B^T\Sigma B)$.
3. Para Σ (matriz de covarianzas) definida positiva, tenemos que
$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{M}\Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(n, I_p).$$
4. Si $a \in \mathbb{R}^p$ tal que $a^T\Sigma a \neq 0$, entonces $\frac{a^T\mathbf{M}a}{a^T\Sigma a} \sim \chi^2_n$.
5. La función característica de $\mathbf{M}$ es
$$\varphi_{\mathbf{M}}(\mathbf{T}) = \det(I_p - 2i\Sigma\mathbf{T})^{-n/2}, \text{ donde } \mathbf{T} \in \mathcal{S}_p.$$
6. Si $\mathbf{M}_i$ son independientes $W_p(n_i, \Sigma)$ para $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i \sim W_p(n, \Sigma)$, con $n = n_1 + \ldots + n_k$.

Distribución de Wishart: propiedades (I)

Sea $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$.

1. $\mathbf{M}$ es *semidefinida positiva*.
2. Si $B \in \mathcal{M}_{p\times m}$, entonces $B^T \mathbf{M} B \sim W_m(n, B^T \Sigma B)$.
3. Para Σ (matriz de covarianzas) definida positiva, tenemos que
$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_p(n, I_p).$$
4. Si $a \in \mathbb{R}^p$ tal que $a^T \Sigma a \neq 0$, entonces $\frac{a^T \mathbf{M} a}{a^T \Sigma a} \sim \chi^2_n$.
5. La función característica de $\mathbf{M}$ es
$$\varphi_{\mathbf{M}}(\mathbf{T}) = \det(I_p - 2i\Sigma\mathbf{T})^{-n/2}, \text{ donde } \mathbf{T} \in \mathcal{S}_p.$$
6. Si $\mathbf{M}_i$ son independientes $W_p(n_i, \Sigma)$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $\sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i \sim W_p(n, \Sigma)$, con $n = n_1 + \ldots + n_k$.
7. $\mathbf{E}(\mathbf{M}) = n\Sigma$.

Distribución de Wishart: propiedades (II)

8. Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, I_p)$, entonces las entradas de la diagonal de $\mathbf{M}$ son χ^2_n, y además traza$(\mathbf{M}) \sim \chi^2_{np}$.

Distribución de Wishart: propiedades (II)

8. Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, I_p)$, entonces las entradas de la diagonal de $\mathbf{M}$ son χ^2_n, y además traza$(\mathbf{M}) \sim \chi^2_{np}$.
9. Si $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son independientes y satisfacen $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ con $\mathbf{M}_1 \sim W_p(n_1, \Sigma)$, entonces $\mathbf{M}_2 \sim W_p(n - n_1, \Sigma)$.

Distribución de Wishart: propiedades (II)

8. Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, I_p)$, entonces las entradas de la diagonal de $\mathbf{M}$ son χ^2_n, y además traza$(\mathbf{M}) \sim \chi^2_{np}$.
9. Si $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son independientes y satisfacen $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ con $\mathbf{M}_1 \sim W_p(n_1, \Sigma)$, entonces $\mathbf{M}_2 \sim W_p(n - n_1, \Sigma)$.
10. Si $n \geq p$ entonces $\mathbf{M}$ es *definida positiva* casi seguro.

Distribución de Wishart: propiedades (II)

8. Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, I_p)$, entonces las entradas de la diagonal de $\mathbf{M}$ son χ^2_n, y además traza$(\mathbf{M}) \sim \chi^2_{np}$.
9. Si $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son independientes y satisfacen $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ con $\mathbf{M}_1 \sim W_p(n_1, \Sigma)$, entonces $\mathbf{M}_2 \sim W_p(n - n_1, \Sigma)$.
10. Si $n \geq p$ entonces $\mathbf{M}$ es *definida positiva* casi seguro.
11. Si $\mathbf{M}_n$ es una sucesión de matrices de Wishart, $\mathbf{M}_n \sim W_p(n, \Sigma)$, entonces $\mathbf{M}_n / n \to \Sigma$ en probabilidad.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Distribución de Wishart: propiedades (II)

8. Si $\mathbf{M} \sim W_p(n, I_p)$, entonces las entradas de la diagonal de $\mathbf{M}$ son χ^2_n, y además traza$(\mathbf{M}) \sim \chi^2_{np}$.
9. Si $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son independientes y satisfacen $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ con $\mathbf{M}_1 \sim W_p(n_1, \Sigma)$, entonces $\mathbf{M}_2 \sim W_p(n - n_1, \Sigma)$.
10. Si $n \geq p$ entonces $\mathbf{M}$ es *definida positiva* casi seguro.
11. Si $\mathbf{M}_n$ es una sucensión de matrices de Wishart, $\mathbf{M}_n \sim W_p(n, \Sigma)$, entonces $\mathbf{M}_n / n \to \Sigma$ en probabilidad.
12. Para $n \geq p$, la función de densidad de probabilidad de $\mathbf{M}$ es

$$f(\mathbf{M}) = \frac{\det(\mathbf{M})^{(n-p-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\text{traza}(\Sigma^{-1}\mathbf{M})\right)}{2^{np/2} \det(\Sigma)^{n/2} \prod_{k=1}^{p} \Gamma((n-k+1)/2)}.$$

Estadístico T^2 de Hotelling

Definición

Sean $\mathbb{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes. Entonces $T_p^2(n) = n(\mathbb{X} - \mu)^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbb{X} - \mu)$ es conocido como el estadístico T^2 de Hotelling.

Estadístico T^2 de Hotelling

Definición

Sean $\mathbb{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes. Entonces $T_p^2(n) = n(\mathbb{X} - \mu)^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbb{X} - \mu)$ es conocido como el estadístico T^2 de Hotelling.

Recordemos que si $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ son i.i.d. $N_p(\mu, \Sigma)$, entonces su media y cuasivarianza muestral son

$$\overline{\mathbb{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{X}_i \quad , \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbb{X}_i - \overline{\mathbb{X}})(\mathbb{X}_i - \overline{\mathbb{X}})^T.$$

Estadístico T^2 de Hotelling

Definición

Sean $\mathbb{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $\mathbf{M} \sim W_p(n, \Sigma)$ independientes. Entonces $T_p^2(n) = n(\mathbb{X} - \mu)^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbb{X} - \mu)$ es conocido como el estadístico T^2 de Hotelling.

Recordemos que si $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n$ son i.i.d. $N_p(\mu, \Sigma)$, entonces su media y cuasivarianza muestral son

$$\overline{\mathbb{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{X}_i \quad , \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbb{X}_i - \overline{\mathbb{X}})(\mathbb{X}_i - \overline{\mathbb{X}})^T.$$

Teorema (Fisher-Cochran, versión multivariante)

$\overline{\mathbb{X}}$ y $\mathbf{S}$ son independientes y

$$\sqrt{n}(\overline{\mathbb{X}} - \mu) \text{ tiene distribución } N_p(0, \Sigma),$$
$$(n-1)\mathbf{S} \text{ tiene distribución } W_p(n-1, \Sigma).$$

Test T^2 de Hotelling

Teorema

Si $n \geq p$, entonces $\frac{n-p+1}{np} T_p^2(n) \sim F_{p,n-p+1}$.

Test T^2 de Hotelling

Teorema

Si $n \geq p$, entonces $\frac{n-p+1}{np} T_p^2(n) \sim F_{p,n-p+1}$.

Corolario

El estadístico T^2 de Hotelling para una muestra normal multivariante está definida como $T_p^2(n-1) = n(\overline{\mathbb{X}} - \mu)^T \mathbf{S}^{-1} (\overline{\mathbb{X}} - \mu)$, y entonces tenemos que $\frac{n-p}{p} \frac{n}{n-1} (\overline{\mathbb{X}} - \mu)^T \mathbf{S}^{-1} (\overline{\mathbb{X}} - \mu) \sim F_{p,n-p}$.

Test T^2 de Hotelling

Teorema

Si $n \geq p$, entonces $\frac{n-p+1}{np} T_p^2(n) \sim F_{p,n-p+1}$.

Corolario

El estadístico T^2 de Hotelling para una muestra normal multivariante está definida como $T_p^2(n-1) = n(\overline{\mathbb{X}} - \mu)^T \mathbf{S}^{-1} (\overline{\mathbb{X}} - \mu)$, y entonces tenemos que $\frac{n-p}{p} \frac{n}{n-1} (\overline{\mathbb{X}} - \mu)^T \mathbf{S}^{-1} (\overline{\mathbb{X}} - \mu) \sim F_{p,n-p}$.

Esto nos permite construir el test T^2 de Hotelling: **contrasta** la media muestral de una población con un cierto vector, es decir, $H_0 : \mu = \mu_0$.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Test T^2 de Hotelling

Teorema

Si $n \geq p$, entonces $\frac{n-p+1}{np} T_p^2(n) \sim F_{p,n-p+1}$.

Corolario

El estadístico T^2 de Hotelling para una muestra normal multivariante está definida como $T_p^2(n-1) = n(\overline{\mathbb{X}} - \mu)^T \mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbb{X}} - \mu)$, y entonces tenemos que $\frac{n-p}{p} \frac{n}{n-1}(\overline{\mathbb{X}} - \mu)^T \mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbb{X}} - \mu) \sim F_{p,n-p}$.

Esto nos permite construir el test T^2 de Hotelling: **contrasta** la media muestral de una población con un cierto vector, es decir, $H_0 : \mu = \mu_0$. El anterior corolario nos dice que $\frac{n-p}{p(n-1)} T^2 \sim F_{p,n-p}$, y entonces rechazaremos la hipótesis nula cuando $F > F_{crit} := F_{\{p,n-p;\alpha\}}$, con α nivel de significación.

Contenido

Matrices de Wigner

Definición

Decimos que una matriz $\mathbf{Y}_n \in \mathcal{S}_n$ pertenece a un *ensemble* de matrices de Wigner si:

- $\{Y_{ij}\}$ son independientes $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$.
- Las entradas $\{Y_{ii}\}_{1 \leq n}$ están idénticamente distribuidas, y las entradas fuera de la diagonal $\{Y_{ij}\}_{1<i<j<n}$ están idénticamente distribuidas.
- $\mathbf{E}(Y_{ij}^2) < \infty \ \forall i, j$, es decir, $\beta_2 = \max\{\mathbf{E}(Y_{11}^2), \mathbf{E}(Y_{12}^2)\} < \infty$.

Matrices de Wigner

Definición

Decimos que una matriz $\mathbf{Y}_n \in \mathcal{S}_n$ pertenece a un *ensemble* de matrices de Wigner si:

- $\{Y_{ij}\}$ son independientes $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$.
- Las entradas $\{Y_{ii}\}_{1 \leq n}$ están idénticamente distribuidas, y las entradas fuera de la diagonal $\{Y_{ij}\}_{1<i<j<n}$ están idénticamente distribuidas.
- $\mathbf{E}(Y_{ij}^2) < \infty$ $\forall i, j$, es decir, $\beta_2 = \text{máx}\{\mathbf{E}(Y_{11}^2), \mathbf{E}(Y_{12}^2)\} < \infty$.

Es natural anadir un factor de escalado con el objetivo de que exista un comportamiento límite de los autovalores.

Matrices de Wigner

Definición

Decimos que una matriz $\mathbf{Y}_n \in \mathcal{S}_n$ pertenece a un *ensemble* de matrices de Wigner si:

- $\{Y_{ij}\}$ son independientes $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$.
- Las entradas $\{Y_{ii}\}_{1 \leq n}$ están idénticamente distribuidas, y las entradas fuera de la diagonal $\{Y_{ij}\}_{1<i<j<n}$ están idénticamente distribuidas.
- $\mathbf{E}(Y_{ij}^2) < \infty \ \forall i, j$, es decir, $\beta_2 = \text{máx}\{\mathbf{E}(Y_{11}^2), \mathbf{E}(Y_{12}^2)\} < \infty$.

Es natural anadir un factor de escalado con el objetivo de que exista un comportamiento límite de los autovalores.

Definición

Sea $\mathbf{Y}_n$ como en la definición anterior. Entonces la matriz $\mathbf{X}_n = n^{-1/2}\mathbf{Y}_n$ es una matriz de Wigner.

Ley Semicircular de Wigner (I)

Definición

La distribución de probabilidad μ_{sc} con parámetro ρ se conoce como la Ley Semicircular de Wigner.

$$\mu_{sc} = \frac{1}{2\pi\rho}\sqrt{4\rho - x^2}\mathbf{1}_{|x|\leq 2\sqrt{\rho}}dx.$$

Ley Semicircular de Wigner (I)

Definición

La distribución de probabilidad μ_{sc} con parámetro ρ se conoce como la Ley Semicircular de Wigner.

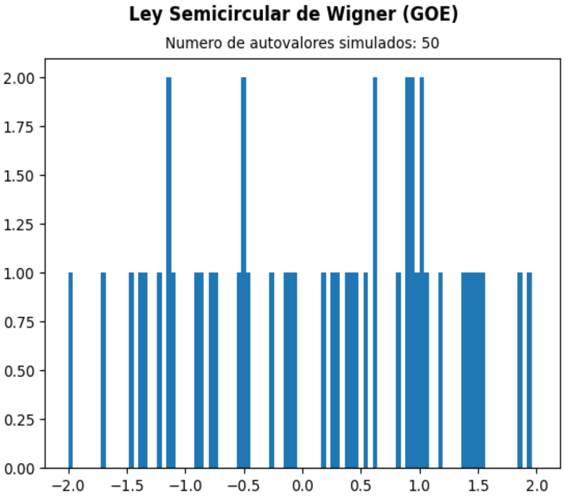
$$\mu_{sc} = \frac{1}{2\pi\rho}\sqrt{4\rho - x^2}\mathbf{1}_{|x|\leq 2\sqrt{\rho}}dx.$$

Teorema

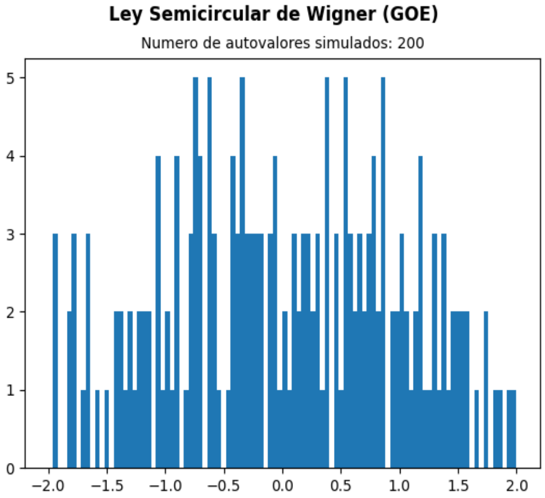
Los momentos de la Ley Semicircular de Wigner son:

$$\beta_k(\mu_{sc}) = \mathbf{E}_{\mu_{sc}}[x^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu_{sc} = \rho^{k/2}C_{k/2}\mathbf{1}_{\{k\in\mathbb{N}\ :\ k\equiv 0 \pmod 2\}}.$$

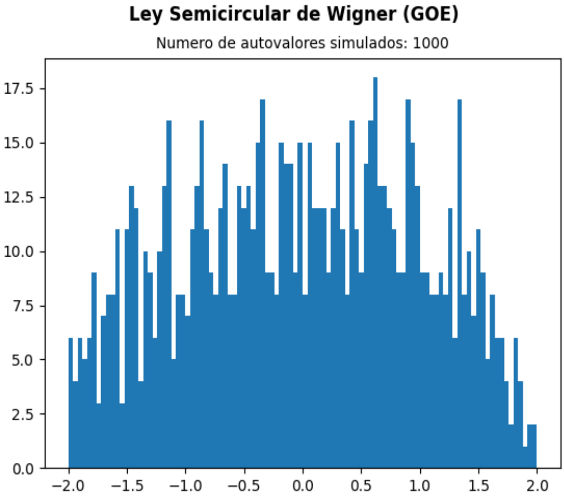
Ley Semicircular de Wigner (II)



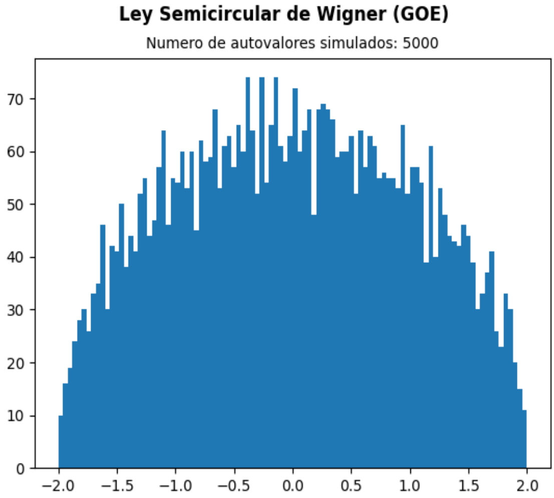
Ley Semicircular de Wigner (II)



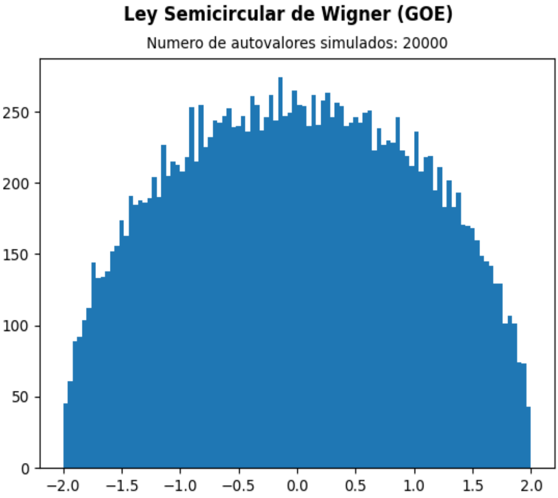
Ley Semicircular de Wigner (II)



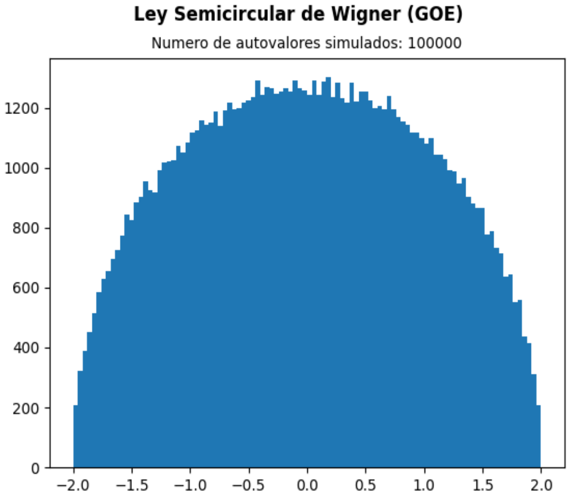
Ley Semicircular de Wigner (II)



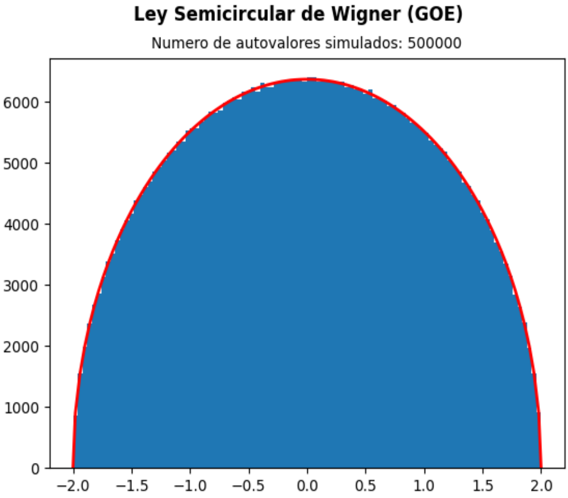
Ley Semicircular de Wigner (II)



Ley Semicircular de Wigner (II)



Ley Semicircular de Wigner (II)



Teorema de Wigner (I)

Definición

La distribución empírica espectral de una matriz aleatoria $\mathbf{X}$ cuadrada de tamaño n es una medida de probabilidad aleatoria con función de distribución

$$\mu_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{n}\#\{i \leq n : \lambda_i(\mathbf{X}) \leq x\}.$$

Teorema de Wigner (I)

Definición

La distribución empírica espectral de una matriz aleatoria $\mathbf{X}$ cuadrada de tamaño n es una medida de probabilidad aleatoria con función de distribución

$$\mu_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{n}\#\{i \leq n : \lambda_i(\mathbf{X}) \leq x\}.$$

Sea $\mathbf{X}_n = n^{-1/2}\mathbf{Y}_n$ una matriz de Wigner con $\mathbf{E}(Y_{ij}) = 0$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ y $\mathbf{E}(Y_{12}^2) = \rho$.

Teorema de Wigner (I)

Definición

La distribución empírica espectral de una matriz aleatoria $\mathbf{X}$ cuadrada de tamaño n es una medida de probabilidad aleatoria con función de distribución

$$\mu_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{n}\#\{i \leq n : \lambda_i(\mathbf{X}) \leq x\}.$$

Sea $\mathbf{X}_n = n^{-1/2}\mathbf{Y}_n$ una matriz de Wigner con $\mathbf{E}(Y_{ij}) = 0$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ y $\mathbf{E}(Y_{12}^2) = \rho$.

Teorema (1ª versión)

Sea un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces $\mu_{\mathbf{X}_n}(I) = \int \mathbf{1}_I d\mu_{\mathbf{X}_n}$ *converge en probabilidad* a $\mu_{sc}(I) = \int \mathbf{1}_I d\mu_{sc}$ cuando $n \to \infty$.

Teorema de Wigner (II)

Teorema (2ª versión)

Sea $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, entonces $\int f d\mu_{\mathbf{X}_n}$ *converge en probabilidad* a $\int f d\mu_{sc}$ cuando $n \to \infty$.

Teorema de Wigner (II)

Teorema (2ª versión)

Sea $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, entonces $\int f d\mu_{\mathbf{X}_n}$ *converge en probabilidad* a $\int f d\mu_{sc}$ cuando $n \to \infty$.

Teorema (3ª versión)

Sea f un polinomio, entonces $\int f d\mu_{\mathbf{X}_n}$ *converge en probabilidad* a $\int f d\mu_{sc}$ cuando $n \to \infty$.

Definición

Un camino de Dyck de longitud n es la lista $(d_1, \ldots, d_n)$ con $d_i = \pm 1 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ que cumple las siguientes propiedades:

- Las sumas parciales son no negativas, es decir, $\sum_{j=1}^{k} d_j \geq 0$ para $1 \leq k \leq n$.
- El número de incrementos es igual al de decrementos, es decir, $\sum_{j=1}^{n} d_j = 0$.

Definición

Un camino de Dyck de longitud n es la lista $(d_1, \ldots, d_n)$ con $d_i = \pm 1\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ que cumple las siguientes propiedades:

- Las sumas parciales son no negativas, es decir, $\sum_{j=1}^{k} d_j \geq 0$ para $1 \leq k \leq n$.
- El número de incrementos es igual al de decrementos, es decir, $\sum_{j=1}^{n} d_j = 0$.

Contenido

Ley de Tracy-Widom

Teorema

Sea $\mathbf{X}_n$ una matriz de Wigner. Entonces su mayor autovalor, $\lambda_n(\mathbf{X}_n)$, converge a 2 en probabilidad, es decir, para cualquier $\epsilon, \delta > 0$ tenemos

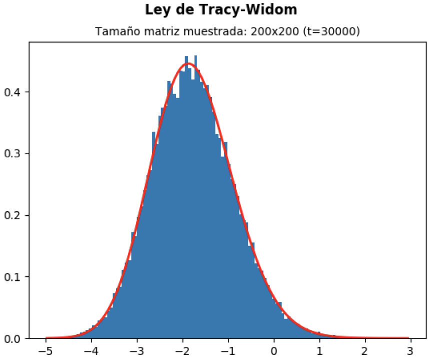
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(n^{1/6-\epsilon}(\lambda_n(\mathbf{X}_n) - 2) > \delta\right) = 0.$$

Ley de Tracy-Widom

Teorema

Sea $\mathbf{X}_n$ una matriz de Wigner. Entonces su mayor autovalor, $\lambda_n(\mathbf{X}_n)$, converge a 2 en probabilidad, es decir, para cualquier $\epsilon, \delta > 0$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(n^{1/6-\epsilon}(\lambda_n(\mathbf{X}_n) - 2) > \delta\right) = 0.$$



Contenido

Referencias

Bordenave C.
Lecture Notes on Random Matrix Theory, 2019.

Hotelling H.
The Generalization of Student's Ratio
Annals of Mathematical Statistics, Vol. 2, No. 3, 1931

Kemp T.
Introduction to Random Matrix Theory, 2016.

Wigner E.
Characteristic Vectors of Bordered Matrices With Infinite Dimensions
Annals of Mathematics, Vol. 62, No. 3, 1955

Wigner E.
On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices
Annals of Mathematics, Vol. 67, No. 2, 1958