CÁLCULO 1: $1^0$ del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

**Hoja 4: Límites y continuidad de funciones**

**1.-** Utilizando la formulación en términos de $\varepsilon$ y $\delta$ demostrar:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{3+x}=\dfrac{1}{2}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{|x|}=0$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}=0$.

**2.-** Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

(a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\,(3+\operatorname{sen}x)}{(x+\operatorname{sen}x)^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}$ (f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+4}}{x^2+4x+3}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x}{x}$ (h) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x^2-4}$ (i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x^2}$

*Indicación: En el caso* (k), *puede ser útil recordar que* $\cos x=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$.

**3.-** (*) Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$. Utilizar esta propiedad para calcular

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\tan x)}{x}$

**4.-** En las siguientes expresiones, aparece la función *parte entera*, denotada por $[x]$, y que representa al mayor número entero que es menor o igual que $x$. Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4}\left[\dfrac{3}{x}\right]$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} x\left[\dfrac{3}{x}\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{[x]}$ (d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}\right|^3+x^6-1\right)^{[x]}$

**5.-** Encontrar las constantes $a$ y $b$ para las cuales

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-a\,x-b\right)=1.$$

**6.-** Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

(a) Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$, entonces existe el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

(b) Si no existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces no existe el límite $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$.

(c) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, entonces $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|\ell|$.

(d) Si $f(x)\le g(x)$ para todo $x\ne c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x\to c} f(x)\le\lim_{x\to c} g(x).$$

(e) Si $f(x)<g(x)$ para todo $x\ne c$, entonces, en caso de existir ambos límites,

$$\lim_{x\to c} f(x)<\lim_{x\to c} g(x).$$

**7.-** Sea $f(x)$ tal que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, y sea $g(x)$ tal que $|g(x)| < K$ para todo $x$. Demostrar que $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$. Estudiar si se puede debilitar de alguna manera la hipótesis sobre $g$.

**8.-** Dibujar la gráfica y estudiar la continuidad de las siguientes funciones donde $[x]$ denota la parte entera de $x$, es decir, el mayor entero menor o igual que $x$:

(a) $f(x) = [x]$ (b) $f(x) = x - [x]$ (c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$

(d) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ (e) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{[\frac{1}{x}]}$

**9.-** Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \qquad f_2(x) = \frac{b}{x - b}, \qquad f_3(x) = x\left[\frac{1}{x}\right], \qquad f_4(x) = [\operatorname{sen} x].$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a), \\ x + a & \text{si} \quad x \in [a, a+1]. \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si} \quad x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si} \quad x \geq \pi. \end{cases}$$

**10.-** Se consideran las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \cos x$.
a) Escribir la expresión analítica de las funciones $f \circ g$, $f \circ h + h \circ g$, $f \circ g \circ h$.
b) Escribir en términos de operaciones con las funciones $f, g, h$, las expresiones siguientes: $y = e^{\cos x}$, $y = \cos(e^x + e^{x^2})$, $y = e^{2x}$.

**11.-** (*) Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

(a) Si una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces es continua.

(b) Si una función $f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ toma **todos** los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ en todo intervalo $[a, b]$ entonces es continua.

(c) Si $f$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua en 0 y tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, entonces $f$ es continua en $\mathbb{R}$.

**12.-** Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

**13.-** Supóngase que $f$ y $g$ son funciones continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún $x$ en $(a, b)$.

**14.-** (*)Supóngase que $f$ es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo $x$. Demostrar que $f(x) = x$ para algún $x$ en $[0, 1]$.

**15.-** Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$(a) \quad x - \operatorname{sen} x - 5 = 0, \qquad (b)(*) \quad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12, \qquad (c)(*) \quad \frac{x}{4} = x - [x].$$

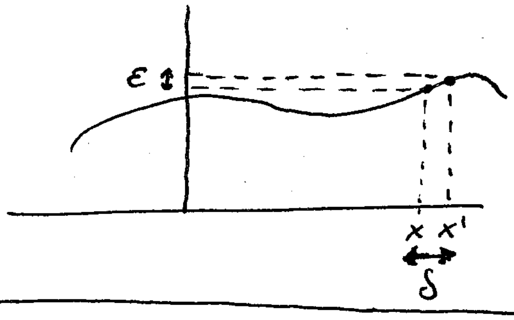
**16.-** a) Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.
b) (*) Demostrar que $f(x)$ satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en el intervalo $[-1, 1]$.

**17.-** (**) Demostrar que no existe ninguna función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada valor.

# HOJA 4 — LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

## DEFINICIÓN DE LÍMITE

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$




## 1.

**OJO**

$|x-1| > |x|-1$

$|x-1| > 1-|x|$

A) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta : \forall x \quad 0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-(x+1)}{2(x+1)}\right| = \left|\frac{1-x}{2(x+1)}\right| \underset{x+1>x}{\leq} \frac{|1-x|}{2|x|} < \frac{\delta}{2|x|}$$

$$\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right| < \frac{\delta}{2|x|} \underset{|x|>\frac{1}{2}}{<} \frac{\delta}{2/2} = \delta$$

Si tomamos $\delta = \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

---

B) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{3+x} = \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{2x}{3+x}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4x-(3+x)}{2(3+x)}\right| = \left|\frac{3(x-1)}{6+2x}\right| = \frac{3}{2}\,\frac{|x-1|}{|3-x|} \overset{|x-1|<\delta}{<} \frac{3}{2}\,\underbrace{\frac{\delta}{|3+x|}}_{|3+x|\geq 3+x}$$

Como $0<|x-1|<\delta \Rightarrow 1-\delta \leq x \leq 1+\delta \Rightarrow 4-\delta \leq x+3 \leq 4-\delta$

$$\frac{3}{2}\,\frac{\delta}{|3+x|} \overset{|3+x|\geq 3+x}{\leq} \frac{3}{2}\,\frac{\delta}{4-\delta} = \varepsilon$$

despejamos $\delta$

$$\delta = \frac{\frac{8}{3}\varepsilon}{\frac{2}{3}\varepsilon+1}$$

$\cancel{\delta = (4-\delta)\frac{2}{3}\varepsilon = \frac{8}{3}\varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon}$

1.

A) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{(-2)^3+8}{(-2)^2-4} = \frac{0}{0}$ IND

$$\begin{array}{r|l} x^3+8 & x^2-4 \\ \cline{2-2} -x^3+4x & x \\ \hline 4x+8 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x(x^2-4)+4x+8}{x^2-4} = \lim_{x\to -2}\left(x+\frac{4x+8}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to -2}\left(x+\frac{4(x+2)}{(x+2)(x-2)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -2}\left(x+\frac{4}{x-2}\right) = -2-1 = -3.$$

---

$\longrightarrow$ multiplicar por el conjugado

B) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

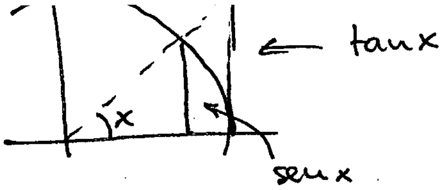
---

C) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\operatorname{sen}x)}{(x+\operatorname{sen}x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\operatorname{sen}x)}{x^2+2x\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3+\operatorname{sen}x}{1+\frac{2\operatorname{sen}x}{x}+\frac{\operatorname{sen}^2x}{x^2}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3+\operatorname{sen}x}{1+2\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}+\left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}\right)^2} = \frac{3}{1+2+1} = \frac{3}{4}$$

tiende a 1 cuando $x\to 0$

$\boxed{3.}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$




$$\boxed{\operatorname{sen} x \le x \le \tan x}$$

$$1 \le \frac{x}{\operatorname{sen} x} \le \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$1 = \lim \frac{x}{\operatorname{sen} x} \qquad 1$$

$$\downarrow$$

$$1$$

A) $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 2$$

B) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \underbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\dfrac{x^2-1}{x-1}}_{\downarrow \atop 2} = 2$

5.1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=1$$

$a \neq 1, -1$

$$\sqrt{x^2+x+1}-(ax+b)=\frac{x^2(1-a^2)+x(1-2ab)+(1-b^2)}{\sqrt{x^2+x+1}+ax+b}$$

Dividimos por $x^2$:

$$\frac{(1-a^2)+\underbrace{\cancel{\frac{1-2ab}{x}}}_{\text{tiende a }0}+\underbrace{\cancel{\frac{1-b^2}{x^2}}}_{\text{tiende a }0}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^4}+\underbrace{\cancel{\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}}_{\text{tiende a }0}}+\underbrace{\cancel{\frac{a}{x}}}_{\text{tiende a }0}+\underbrace{\cancel{\frac{b}{x^2}}}_{\text{tiende a }0}} \longrightarrow \text{tiende a } \infty \neq 1.$$

$\boxed{a=1}$

$b \neq \frac{1}{2}$

$$\frac{x(1-2b)+(1-b^2)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+b} \quad \text{dividimos por } x \quad \frac{(1-2b)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+b}=$$

$$=\frac{(1-2b)+\underbrace{\cancel{\frac{1-b^2}{x}}}_{\text{tiende a }0}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{b}{x}}=\frac{1-2b}{2}=b=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{a=-1}$

$\boxed{4.}$ A) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{4}\left[\dfrac{3}{x}\right]$

$$\boxed{x\in\mathbb{R} \Rightarrow x-1 \leq [x] \leq x}$$

$$\underbrace{\frac{x}{4}\left(\frac{3}{x}-1\right)}_{\downarrow\text{ tiende a } 3/4} \leq \frac{x}{4}\left[\frac{3}{x}\right] \leq \frac{\cancel{x}}{4}\cdot\frac{3}{\cancel{x}}$$

$\downarrow$ tiende a $3/4$ — Sandwich $\searrow$ — $\downarrow$ tiende a $3/4$ — $\swarrow$ Sandwich — $\downarrow$ tiende a $3/4$

$3/4$

$\boxed{7.}$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ; $|g(x)| < K \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Demostrar $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

Sabemos:

$$\boxed{\forall \varepsilon>0 \quad \exists\delta \ \ldots\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon_1}$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta : \ x : |x-a|<\delta \Rightarrow$$

$$|f(x)\,g(x)| = |f(x)|\,\underbrace{|g(x)|}_{\text{acotado por } K} < \underbrace{K|f(x)|}_{K.\varepsilon_1} < \varepsilon_2$$

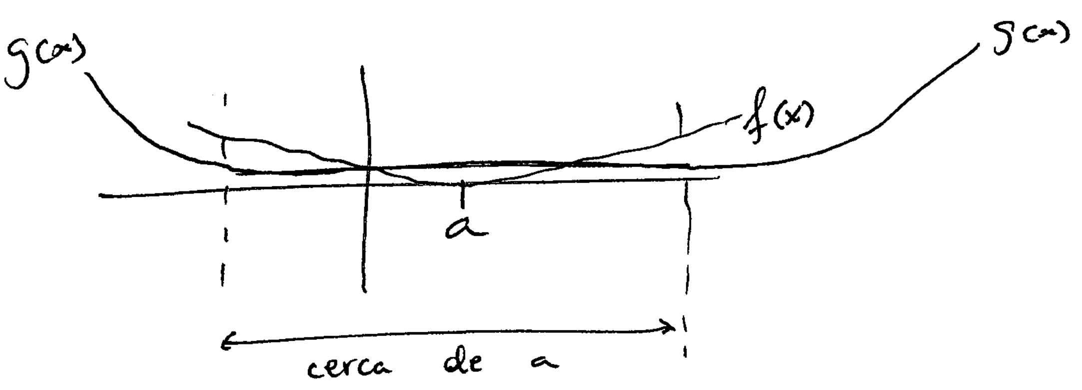
TAMBIÉN SE PUEDE HACER CON SANDWICH!

$$0 \leq |f(x)\,g(x)| \leq K.|f(x$$

$\downarrow$ tiende a 0 — $\downarrow$ tiende a 0

$|f(x)g(x)|$ tiende a 0.

Sí, $|g(x)|$ solo tendría (o solo necesitaríamos) que estuviera acotada cerca de $a$.



9. A) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ Cociente de polinomias $\Rightarrow$ cont. siempre que: $x^2-4 \neq 0$

Continuidad en $x \neq \{2,-2\}$

$x = \{2,-2\}$ no está definida.

$\boxed{\text{CASO } x=2}$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$$

Discontinuidad evitable de la siguiente forma:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{CASO } x=-2}$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{4-4+4}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{4-4+4}{+0} = +\infty$$

Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto infinito.

$\boxed{6.}$

a) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) - \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Como $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existe y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ también, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ también es finito

Verdadero

b) $\lim f(x)$, $\lim g(x)$

Si $f(x) = -g(x) \Rightarrow \lim (f(x)+g(x)) = \lim 0 = 0$

Si $f(x) = g(x) \Rightarrow \cancel{\exists} \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Falso (contraejemplo)

c)

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = l}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

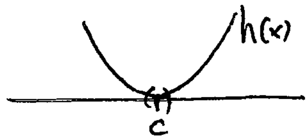
$\boxed{\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow ||f(x)|-|l||<\varepsilon$

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$$

Verdadero

d) Tomamos $h(x) = g(x) - f(x)$ ; $h(x) \geq 0 \quad \forall x \neq c$

Entonces $\lim\limits_{x\to c} h(x) \geq 0$




Verdadero

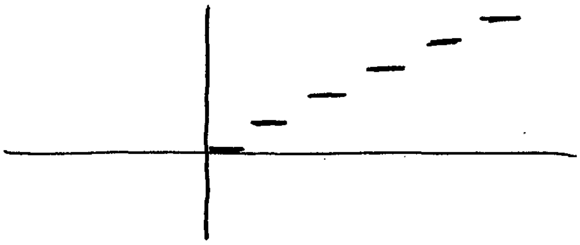
e) $f(x) < g(x) \quad \forall x \neq c \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) < \lim\limits_{x\to c} g(x)$ Falso

$\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x} \quad \forall x > 1 \qquad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

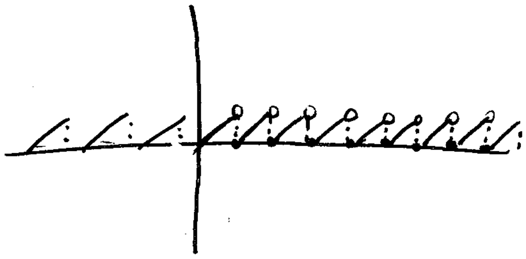
↳ Sería verdadero: $f(x) < g(x) \quad \forall x \neq c \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) \leq \lim\limits_{x\to c} g(x)$

Si una función es menor estricta que otra, su límite es MENOR O IGUAL que la otra.

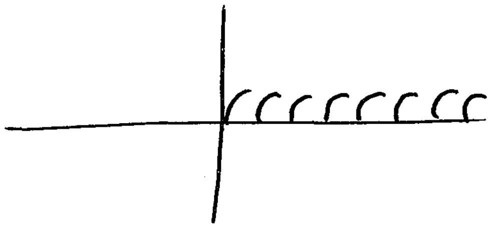
$\boxed{8.}$ A) $f(x) = [x]$



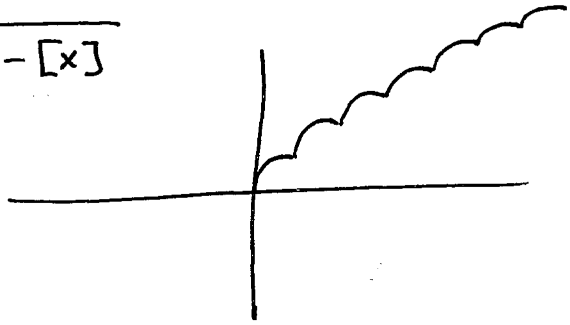
B) $f(x) = x - [x]$



c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$



d) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$



e)

f)

$\boxed{10.}$ $f(x) = x^2$ ; $g(x) = e^x$ ; $h(x) = \cos x$

A)

- $f \circ g \rightarrow f(g(x)) = (e^x)^2$
- $f \circ h + h \circ g \rightarrow f(h(x)) + h(g(x)) = \cos^2 x + \cos(e^x)$
- $f \circ g \circ h \rightarrow f(g \circ h) \rightarrow f(g(h(x))) = f(e^{\cos x}) = (e^{\cos x})^2 = e^{2\cos x}$

B)

$\boxed{13.}$ $f, g$ cont. en $[a,b]$ , $f(a) < g(a)$ , $f(b) > g(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = g(x)$ para algún $x \in (a,b)$

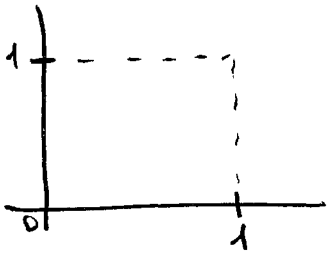
$\boxed{h(x) = f(x) - g(x)}$

$\left.\begin{matrix} h(a) < 0 \\ h(b) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists x \ h(x) = 0$ por el Teorema de Bolzano

$h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$

**14.** $f$ cont. en $[0,1]$ y $f(x) \in [0,1]$ $\forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x$ para algún $x \in [0,1]$.




$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$h(x) = f(x) - x$$

$$h(0) = f(0) \geq 0$$

$$h(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

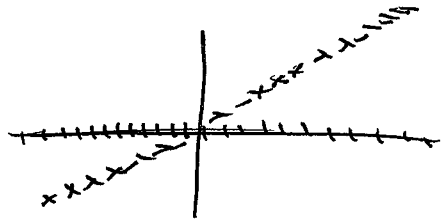
$$h(u) = 0$$

$$\parallel$$

$$f(u) - u = 0$$

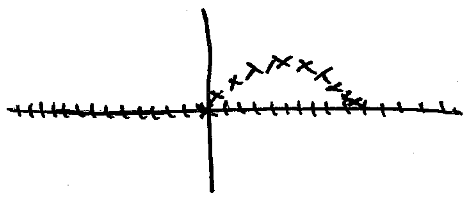
**12.**

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{I} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



$\hookrightarrow$ solo continua en 0

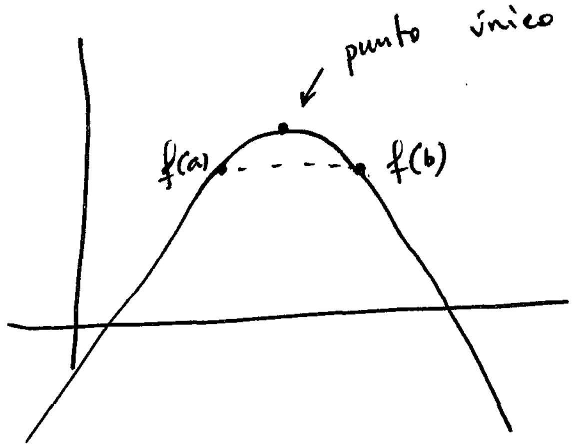
$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x \in \mathbb{I} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



$\hookrightarrow$ solo continua en 0 y 1.

**7.** $\nexists$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont. tal que toma dos veces el mismo valor.

$f(a) = f(b)$



$\boxed{15.}$

DEMOSTRAR QUE TIENEN SOLUCIÓN:

A) $x - \operatorname{sen} x - 5 = 0$

$$f(x) = x - \operatorname{sen} x - 5$$

Encontrar $f(a)$ y $f(b)$ dando valores $\begin{cases} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$

Bolzano $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$

$\boxed{4.}$

c) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{[x]}$

- $2 > x > 1 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right) = \infty$
- $0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$

REHACEMOS 6d

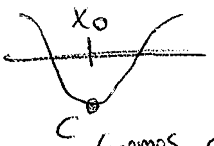
$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$ ; $h(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow h(x) \geq 0 \Rightarrow \lim_{x\to c} h(x) \geq 0$

Demostración (contradicción)

$\lim_{x\to x_0} h(x) = -c$, $c > 0$ ; por definición de límite:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |h(x) + c| < \varepsilon$



$-\varepsilon - c < h(x) < \varepsilon - c$, $\forall x : |x - x_0| <$

Cogemos $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta : |x - x_0| < \delta \Rightarrow h(x) < \underbrace{\frac{c}{2}}_{\varepsilon} - c = \frac{-c}{2} < 0$

$h(x) < \frac{-c}{2} < 0$ CONTRADICCIÓN con $h(x) \geq 0$

---

Como $g(x) \geq f(x) \Rightarrow \lim (g(x) - f(x)) \geq 0 \Rightarrow \lim g(x) - \lim f(x) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim g(x) \geq \lim f(x)$

## TEOREMA VALOR INTERMEDIO

$f$ cont. en $[a,b] \Rightarrow \forall u : f(a) < u < f(b)$

$\exists c \in (a,b) : f(c) = u$

---

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}$ tal que $|x| > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

## DESIGUALDAD TRIANGULAR

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

## DESIGUALDAD TRIANGULAR INVERSA

$$|a+b| > \big||a| - |b|\big|$$

## DISCONTINUIDADES

- EVITABLE

$$\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)} \neq f(c)$$

- INEVITABLES

$\boxed{1^a \text{ especie}}$

- SALTO FINITO

$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ pero son finitos

- SALTO INFINITO

$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ pero uno es infinito (o amb

$\boxed{2^a \text{ especie}}$ $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ pero uno de ellos NO EXISTE (o ambos)

NO EXISTIR = NI FINITO, NI INFINITO

EJEMPLO: ejercicio 2.e

$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x^2}$ ; $x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ ; $x_n = \frac{1}{\sqrt{\pi(2n+1)}}$

$\lim_{n \to \infty} \cos \frac{1}{x_n^2} = \lim_{n \to \infty} \cos 2\pi n = 1$ // $\lim_{n \to \infty} \cos \frac{1}{x_n^2} = \lim_{n \to \infty} \cos \pi(2n+1) = -1$

NO TIENE LÍMITE