UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, grupo 721, 2018-2019

Ejercicios 1 a 7

1. A. Sea $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $\|\cdot\|$ la norma asociada. Demostrar las siguientes identidades:

1. *Identidad del paralelogramo.*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2=\frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}.$$

2. *Identidad de polarización.*

$$\langle x\,,y\rangle=\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2.$$

Interpretar geométricamente estas identidades.

B. Supongamos ahora que E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de una norma $\|\cdot\|$ que satisface la Identidad del Paralelogramo. Teniendo en cuenta la Identidad de Polarización definimos

$$B(x,y)=\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2,$$

que, obviamente, satisface $B(x,x)=\|x\|^2$, así como $B(x\,,y)=B(y\,,x)$ y $B(x,0)=0$.

1. Demostrar la identidad

$$2\,B(x\,,y)=B(x+z\,,y)+B(x-z\,,y).$$

Comprobar que, en particular, se verifica

$$2\,B(x\,,y)=B(2x\,,y)$$

y también

$$B(x+z\,,y)=B(x\,,y)+B(z\,,y).$$

2. Demostrar que todos los $p\,,q\in\mathbb{N}$, $q\neq 0$, satisfacen

$$B(p\,x\,,y)=p\,B(x\,,y)\,,\qquad q\,B(\frac{x}{q}\,,y)=B(x\,,y).$$

Teniendo en cuenta que para cada y fijo la función $x\to B(x,y)$ es continua, concluir que

$$B(\lambda\,x\,,y)=\lambda\,B(x\,,y)\qquad \text{para todo}\quad \lambda\in\mathbb{R}\,,\lambda>0.$$

3. Demostrar que todo $\lambda \in \mathbb{R}\,, \lambda < 0$ satisface

$$\lambda\, B(x\,,y) - B(\lambda\, x\,,y) = \lambda\, B(0\,,y) = 0\,.$$

En conclusión, $B(x\,,y)$ es un producto escalar en E y su norma asociada es la norma original $\|\cdot\|$ de E.

2. Considérense las funciones

$$A(x,y) = \text{máx}\ \{\, 2\,|x|\,,\sqrt{x^2+y^2}\,\}\,,$$

$$B(x,y) = \text{máx}\ \{\, |x-y|\,,\,|y|\,\}\,,$$

definidas en $\mathbb{R}^2$.

Demostrar que estas funciones son normas en $\mathbb{R}^2$. Dibujar la bola unidad de cada una de ellas. Comprobar que para $A(x,y)$ la desigualdad triangular no es estricta, incluso para vectores que no son linealmente independientes.

3. Sea (X,d) un espacio métrico.

A. Demostrar que la métrica satisface las siguientes propiedades:

1. $$\big|d(x,y) - d(y,z)\big| \leq d(x,z)\,.$$
   En particular, para cada $y \in X$ fijo, la función $d(\cdot\,,y)$ es uniformemente continua en X.
2. Si $x\,,y \in B(c,r)$ entonces $d(x,y) < 2r$.
3. Si $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset$ entonces $d(x,y) < r+s$.

B. Dado un subconjunto A de X, se define

(1) $$\text{dist}\,(x\,,A) = \text{ínf}\ \{\, d(x,a)\ :\ a \in A\,\}\,.$$

1. Demostrar que todos los $x,y \in X$ satisfacen
   $$\big|\,\text{dist}\,(x,A) - \text{dist}\,(y,A)\,\big| \leq d(x,y)\,.$$
   En particular, la función $\text{dist}\,(\cdot\,,A)$ es uniformemente continua en X.
2. Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $d(x_0,A) > 0$.
   Demostrar que si $L \geq 0$ satisface
   $$\big|\,\text{dist}\,(x,A) - \text{dist}\,(y,A)\,\big| \leq L\,d(x,y)\,,\qquad \text{para todos los } x\,,y \in X\,,$$
   entonces $L \geq 1$.

C.

1. Demostrar que si A es compacto en X , entonces para cada $x \in X$ existe algún $a \in A$ tal que $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$.

2. Obsérvese que $A \subset \{ x \in X \; : \; \operatorname{dist}(x, A) = 0 \}$. Demostrar que A es cerrado si y sólo si

$$\{ x \in X \; : \; \operatorname{dist}(x, A) = 0 \} \subset A . \tag{2}$$

4. Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y d una distancia en E .

A. Demostrar que son equivalentes:

1. Existe una norma $\| \cdot \|$ en E tal que $d(x, y) = \|x - y\|$.

2. La función d satisface:

$$\begin{cases} d(\lambda\, x \,, \lambda\, y) = |\lambda|\, d(x \,, y) \,, \\ d(x + z, y + z) = d(x, y) \,, \end{cases} \tag{3}$$

en todos los $x \,, y \,, z \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

B. Comprobar que las funciones

$$d_1(x, y) = \min \{ 1 \,, |x - y| \} \,,$$
$$d_2(x, y) = |x - y| + \big| |x| - |y| \big|$$

son distancias en $\mathbb{R}$ y que definen los mismos abiertos en $\mathbb{R}$ que la distancia estándar $|x - y|$. Estudiar si estas dos distancias satisfacen las identidades en (3).

5. Considérese el espacio vectorial $\mathbb{R}^{m \times n}$ formado por las matrices $m \times n$ de números reales.

A. Demostrar que

$$\langle \mathbf{A} \,, \mathbf{B} \rangle = \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{B}$$

es un producto escalar. ¿Cuál es, de entre las normas de matrices, la norma asociada a este producto escalar?

Demostrar que

$$\left| \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{B} \right|^2 \leq \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \, \cdot \, \operatorname{traza} \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \mathbf{B} \, .$$

B. Supongamos ahora que $m = n$. Demostrar:

1. $\left| \operatorname{traza} \mathbf{A} \right|^2 \leq n \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{A}$.

2. $\operatorname{traza} \mathbf{A}^2 \leq \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{A}$.

3. $$\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{B} \leq \frac{\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} + \operatorname{traza} \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \mathbf{B}}{2} \, .$$

C. Seguimos suponiendo que $m = n$. Considérense los subespacios vectoriales $\mathcal{S}_n$ y $\mathcal{K}_n$ formados por las matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente.

1. Demostrar que $\mathcal{K}_n$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{S}_n$.
2. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ¿cuál es su proyeccción ortogonal sobre $\mathcal{S}_n$?
3. Calcular la distancia entre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y el subespacio $\mathcal{S}_n$.

6. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p},$$

donde $1 \leq p < +\infty$.

A. Dados $1 \leq p < q < +\infty$, demostrar:

1. Si $\|x\|_p = 1$, entonces $\|x\|_q \leq 1$.
2. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se verifica

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p .$$

? B. Demostrar que para todo $0 < \alpha < 1$ se verifica

$$\big|a^\alpha - b^\alpha\big| \leq |a - b|^\alpha , \qquad \text{en todos los } 0 < a\,, b \in \mathbb{R}.$$

C. Sea ahora

$$\|x\|_\infty = \max\big\{ |x_i| \,:\, i = 1, 2, \dots, n \big\}.$$

Demostrar que todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty .$$

?

7. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea y sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, propio y no-vacío.

A. Supongamos que K es cerrado y sea $x_0 \notin K$. Demostrar que existe $k \in K$ tal que

$$\|x_0 - k\| \leq \|x_0 - \xi\| \qquad \text{para todo} \quad \xi \in K .$$

Es decir, este $k \in K$ satisface

$$\|x_0 - k\| = \operatorname{dist}(x_0\,, K).$$

B. Supongamos que K es, además, convexo y consideremos el subespacio

$$H_k = \big\{ \xi \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle \xi - k\,; x_0 - k\rangle \leq 0 \big\}.$$

Demostrar que $K \subset H_k$.

HOJA 1

1.

A) Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con $\|\cdot\|$ su norma (e.d. $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$) Demuestra:

1. Identidad del paralelogramo

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} \qquad \forall x,y \in V$$

Sol:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \|x+y\|^2 = \frac{1}{4} \langle x+y, x+y\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[\|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\right] \quad (1)$$

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \|x-y\|^2 = \frac{1}{4} \langle x-y, x-y\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\right] \quad (2)$$

$$(1) + (2) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} \qquad \blacksquare$$

B) E esp. vect. $\mathbb{R}$ con norma $\|\cdot\|$ que satisface la identidad del paralelogramo. Definimos:

$$B(x,y) = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} B(x,x) = \|x\|^2 \\ B(x,y) = B(y,x) \\ B(x,0) = 0 \end{array}$$

1. Demostrar que $2B(x,y) = B(x+z,y) + B(x-z,y)$

$$B(x+z,y) = \left\|\frac{x+z+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x+z-y}{2}\right\|^2 \quad (1)$$

$$B(x-z,y) = \left\|\frac{x-z-y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-z-y}{2}\right\|^2 \quad (2)$$

$$(1) + (2) = \left\|\frac{x+y+z}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x+y-z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y-z}{2}\right\|^2 \underset{\text{id. paralelogram}}{=}$$

$$= \frac{[illegible]}{2} - \frac{[illegible]}{2} = \frac{[illegible]}{2} = 2B(x,y)$$

$\blacksquare$

Comprobar que $2B(x,y) = B(2x,y)$ (comprobar que B es bilineal)

Con la identidad demostrada anteriormente ponemos $x = z$

$$2B(x,y) = B(x+x,y) + B(x-x,y) = B(2x,y) + \underbrace{B(0,y)}_{0}$$

$\blacksquare$

Comprobar finalmente que $B(x+z,y) = B(x,y) + B(z,y)$

Sabemos $\begin{cases} 2B(x,y) = B(x+z,y) + B(x-z,y) \\ 2B(z,y) = B(z+x,y) + B(z-x,y) \end{cases}$

$$2\big(B(x,y) + B(z,y)\big) = 2B(x+z,y) + B(x-z,y) + B(z-x,y)$$

Tenemos que ver que $B(x-z,y) + B(z-x,y) = 0$

$$B(x-z,y) = \frac{\|x-z+y\|^2 - \|x-z-y\|^2}{2}$$

desarrollo $B(z-x,y)$ y cancelamos todo

$\blacksquare$

2. Demostrar que todos los $p,q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, satisfacen

$B(px,y) = pB(x,y)$, $qB(\frac{x}{q},y) = B(x,y)$

$\to$ inducción en p

$p = 1$ obvio

si es cierto para p:

$B((p+1)x,y) = B(px+p,y) =$

$= B(px,y) + B(x,y) =$

$= pB(x,y) + B(x,y) = (p+1)B(x,y)$

$\blacksquare$

$\to \forall q \in \mathbb{N}$

$qB(\frac{x}{q},y) = B(x,y)$

$\frac{x}{q} = \bar{x} \to x = \bar{x}q$

$qB(\bar{x},y) = B(q\bar{x},y) = B(x,y)$

$\blacksquare$

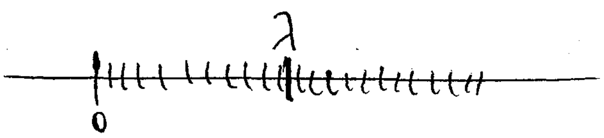
Asumiendo ahora que para y fijo $x \to B(x,y)$ es continua, concluir que $B(\lambda x,y) = \lambda B(x,y)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$

En 2.1 lo hemos demostrado para $\mathbb{N}$ y en 2.2 lo hemos demostrado para $\frac{1}{\mathbb{N}}$. Vamos a intentarlo para los racionales.

$p, q \in \mathbb{N}$

$$B(p/q\, x, y) = B\left(p \frac{x}{q}, y\right) = p B\left(\frac{x}{q}, y\right) = \frac{p}{q} B(x,y)$$

Solo faltan los irracionales.



$\lambda \in (0, \infty) \Rightarrow \exists \frac{p_n}{q_n} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$ $\quad p_n, q_n \in \mathbb{N}$, $q_n \neq 0$

$$B(\lambda x, y) = B\left(\left(\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}\right)x, y\right) = \left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right] B(x,y) = \lambda B(x,y)$$

$x \to B(x,y)$ es continua

3. Demostrar que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$ satisface:

$$\lambda B(x,y) - B(\lambda x, y) = \lambda B(0,y) = 0$$

$$\underbrace{(-\lambda)}_{>0} B(x,y) = B(-\lambda x, y) = -B(\lambda x, y)$$

$$B(-x,y) = -B(x,y) \quad \blacksquare$$

Importante

E, $\|\cdot\|$ norma + id. del paralelogramo $\Rightarrow \exists \langle \cdot, \cdot \rangle$ del que procede la norma

$\boxed{2.}$ $\mathbb{R}^2$ $A(x,y) = \text{máx}\{2|x|, \sqrt{x^2+y^2}\}$

$B(x,y) = \text{máx}\{|x-y|, |y|\}$

1. Ver que A es una norma en $\mathbb{R}^2$

Sol:

A es norma sii:

- $A((x,y)) \geq 0$, "$=0$" $\Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$
- $A(\lambda(x,y)) = |\lambda| A(x,y)$
- $A((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \leq A((x_1,y_1)) + A((x_2,y_2))$

1.1. $A((x,y)) \geq 0$

$2|x| \geq$, $\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ y encima tomo el máx $\Rightarrow A((x,y)) \geq 0$

Además $A((0,0)) = \text{máx}\{2.|0|, \sqrt{0+0}=0\} = \text{máx}\{0,0\} = 0$

Si $A((x,y))=0 = \text{máx}\{2|x|, \sqrt{x^2+y^2}\}$

$0 \leq 2|x| \leq \text{máx}\{-\} = 0 \Rightarrow |x|=0 \Rightarrow x=0$

$0 \leq \sqrt{0+y^2} \leq \text{máx}\{-\} = 0 \Rightarrow |y|=0 \Rightarrow y=0$

1.2. Inmediato

1.3. $\text{máx}\{2|x_1+x_2|, \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\} \overset{?}{\leq}$

$\leq \text{máx}\{2|x_1|, \sqrt{x_1^2+y_1^2}\} + \text{máx}\{2|x_2|, \sqrt{x_2^2+y_2^2}\}$

$\text{máx}\{2|x_1+x_2|, \sqrt{\cdots}\} \leq$ algo $\Leftrightarrow$ $2|x_1+x_2| \leq$ algo y $\sqrt{\cdots} \leq$ algo

$2|x_1+x_2| \leq 2|x_1| + 2|x_2| \leq \text{máx}\{2|x_1|, \sqrt{x_1^2+y_1^2}\} + \text{máx}\{2|x_2|, \sqrt{x_2^2+y_2^2}\} =$

$= A((x_1,y_1)) + A((x_2,y_2))$

Por otro lado: $\sqrt{(x_1+y_1)^2+(y_1+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}$

$\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2} \leq \text{máx}\{2|x_1+x_2|, \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}\} =$

$= A((x_1,y_1)) + A((x_2,y_2)) \Rightarrow$? es verdad

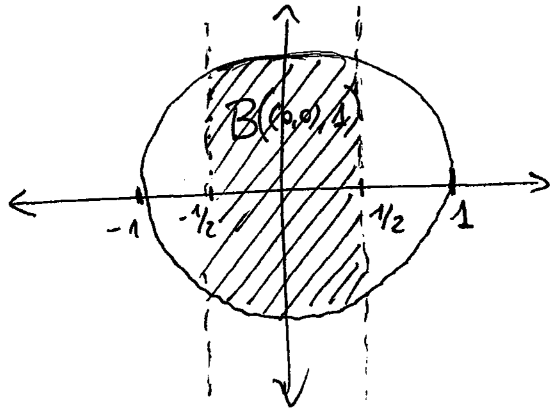
2. Dibujar la bola unidad de $\mathcal{A}$.

$B((0,0),1) =$ bola unidad $=$

$= \{(x,y) / \mathcal{A}(x,y) < 1\} =$

$= \{(x,y) / \text{máx}\{2|x|, \sqrt{x^2+y^2}\} < 1\} =$

$= \{2|x| < 1\} \cap \{\sqrt{x^2+y^2} < 1\}$



$\boxed{5.}$ $\mathbb{R}^{m\times n}$ = matrices $m\times n$, números reales, espacio vectorial

A) $\langle A,B\rangle = \text{traza}(A^t B)$

1. ¿Cuál es la norma asociada?

$\|A\|^2 = \langle A,A\rangle = \text{traza}(A^t A) \Rightarrow \|A\| = \sqrt{\text{traza}(A^t A)}$

2. Demostrar que $|\text{traza}(A^t B)|^2 \leq \text{traza}(A^t A) \cdot \text{traza}(B^t B)$

$|\langle A,B\rangle|^2 \leq \langle A,A\rangle \langle B,B\rangle$ que es la desigualdad de Cauchy-Schwartz

3. $m=n$

Demostrar que $|\text{tr} A|^2 \leq n\, \text{tr}(A^t A)$

$\langle A, I_n\rangle = \text{tr}(A)$

$\langle I_n, A\rangle = \text{tr}(I_n^T A) = \text{tr}(A)$

$$|\langle A, I\rangle|^2 \leq \underbrace{\langle A,A\rangle}_{\text{tr}(A^t A)} \underbrace{\langle I_n, I_n\rangle}_{\text{tr}(I_n^t I_n) = n}$$

$\Rightarrow (\text{tr}(A))^2 \leq n \cdot \text{tr}(A^t A)$

B) Sabemos que $\langle A, B\rangle = \text{traza}(A'B)$

2. $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Demostrar $\text{traza}(A^2) \leq \text{traza}(A^TA)$

$$\text{traza}(A^2) = \text{traza}(A.A) = \langle A^T, A\rangle \leq \|A\|.\|A^T\| = \text{traza}(A^TA)$$

$$\|A\|^2 = tr(A^TA)$$
$$\|$$
$$\|A^T\|^2 = tr(AA^T)$$

3.

$$tr(A^TB) \leq \frac{tr(A^TA) + tr(B^TB)}{2}$$

$$0 \leq \langle A-B, A-B\rangle = \langle A, A\rangle - 2\langle A, B\rangle + \langle B, B\rangle$$

$$2\langle A, B\rangle \leq \langle A, A\rangle + \langle B, B\rangle$$

$$2.tr(A^TB) \leq tr(A^TA) + tr(B^TB)$$

C) $M_{n\times n}$ $\quad S_n$ = matrices simétricas $(A = A^T)$

K_n = matrices antisimétricas $(A = -A^T)$

1. Demostrar que K_n es el complemento ortogonal de S_n.

$S_n^\perp = \{A \in M_{n\times n} / \langle A, B\rangle = 0 \quad \forall B \in S_n\}$

$M_{n\times n} = S_n \oplus S_n^\perp$

Queremos ver que $S_n^\perp = K_n$

Primero voy a ver que si $B \in K_n$, entonces $\langle A, B\rangle = 0 \; \forall A \in S_n$.

Con esto veré que $K_n \subseteq S_n^\perp$.

Sea $A \in S_n$ y $B \in K_n$.

$$\langle A, B\rangle = tr(A^TB) \overset{A \text{ simétrica}}{=} tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) =$$

$$= \sum_{i<k} a_{ik}b_{ki} + \sum_{i>k} a_{ik}b_{ki} + \sum_{k=i}^{n} a_{kk}\underbrace{b_{kk}}_{=0}$$

las matrices antisimétricas tienen 0's en la diagonal

$=$

$$= \sum_{i<k} a_{ik} b_{ki} - \sum_{i>k} a_{ik} b_{ik} = \sum_{i<k} a_{ik} b_{ki} - \sum_{i<k} a_{ik} b_{ki} = 0$$

Acabamos de ver que $K_n \subseteq S_n^{\perp}$.

Ahora hay que ver que $S_n^{\perp} \subseteq K_n$. Basta ver que

$$\dim K_n = \dim S_n^{\perp} = \dim M_{n\times n} - \dim S_n = n^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) =$$

$$= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Sabemos que $\dim K_n = \sum_{i=1}^{n-1} i = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ∎

2. $A \in M_{n\times n}$ ¿cuál es su proyección ortogonal sobre S_n?

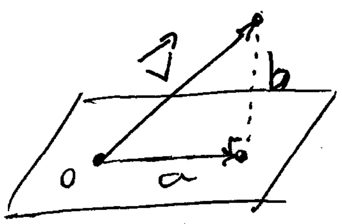
$W \subseteq V$, $V = W \oplus W^{\perp}$

$A = \underset{\text{simétrico}}{\text{algo}} + \underset{\text{antisemétrico}}{\text{algo}}$ $\qquad v = a + b$

$\qquad Pr_W(v) = a$

$$A = \underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{\text{antisimétrica}} \Rightarrow Pr_W(A) = \frac{A+A^T}{2}$$

3. Distancia de A a S_n



$$d(A,S_n) = \text{longitud de } \frac{A-A^T}{2}$$

$$\left\|\frac{A-A^T}{2}\right\|^2 = \left\langle \frac{A-A^T}{2}, \frac{A-A^T}{2} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\|A\|^2 + \|A^T\|^2 - 2\langle A, A^T\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[\|A\|^2 - tr(A^2)\right]$$

$$\Rightarrow d(A,S_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\|A\|^2 - tr(A^2)\right]^{1/2}$$

$\boxed{3.1}$ (X, d) espacio métrico

A.

1) Ver que $\left| d(x,y) - d(y,z) \right| \leq d(x,z)$

Hay que ver que:

$$-d(x,z) \leq d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$$

$$¿ -d(x,z) \leq d(x,y) - d(y,z) ?$$

$d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ esto se cumple que es la des. triangula

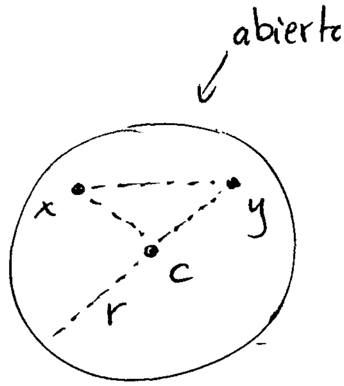
Igual con el otro menor igual.

$$f: X \longrightarrow [0, \infty)$$

$$f(p) = d(p,y)$$

2) Si $x, y \in B(c,r)$ entonces $d(x,y) < 2r$

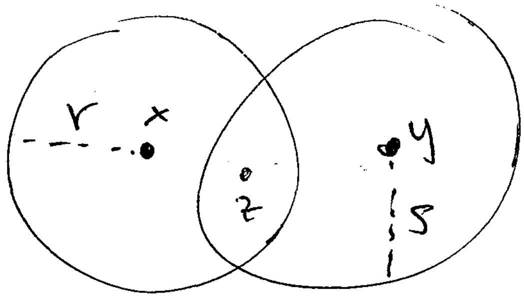
$$d(x,y) \leq \underbrace{d(x,c)}_{x \in B(c,r)} + \underbrace{d(c,y)}_{y \in B(c,r)} < r + r = 2r$$



3) $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset \Rightarrow d(x,y) < r+s$

$$\exists z \in B(x,r) \cap B(y,s)$$

$$d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{z \in B(x,r)} + \underbrace{d(z,y)}_{z \in B(y,s)} < r + s$$



B. $A \subset X$

$$\text{dist}(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

1) Demostrar que $\forall x,y \in X$: $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

$$-d(x,y) \leq \underbrace{d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)}$$

Hacemos esta, la otra es similar

$\forall a \in A$, $d(x,A) \leq d(x,a) \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,A) - d(y,A) \leq \mathbf{d(x,a)} - d(y,A)$ $\forall a \in A$

TRUCO

(*) Si tenemos que ver que $A \leq B \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Veo que $\forall \varepsilon > 0$ $A \leq B + \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$ $\exists a \in A$: $d(y,a) < d(y,A) + \varepsilon$ ya que
$d(y,A) = \inf\{d(y,a) / a \in A\} \Rightarrow -d(y,A) < \varepsilon - d(y,a)$

$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,a) - d(y,a) + \varepsilon \leq d(x,y) + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$ porque $\varepsilon > 0$ era arbitrario

2) Supongamos $x_0 \in X$ tal que $d(x_0, A) > 0$
Demostrar que si $L \geq 0$ satisface $|\text{dist}(x,A) - \text{dist}(y,A)| \leq$
$\leq L \cdot d(x,y)$ $\forall x,y \in X$ entonces $\Rightarrow L \geq 1$.

Si $x = x_0 \wedge y = a \in A$: $\begin{array}{l} d(x,A) = d(x_0,A) > 0 \\ d(y,A) = d(a,A) = 0 \end{array}$ $\Rightarrow d(x_0,A) \leq L\, d(x_0,$

Si veo que $1 - \varepsilon \leq L$ $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow L \geq 1$

$d(x_0,A) = \inf\{d(x_0,a) | a \in A\}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tq. $d(x_0,a_\varepsilon) \leq d(x_0,A) + \varepsilon \Rightarrow d(x_0,a_\varepsilon) - \varepsilon \leq d(x_0,A$

$$1 - \frac{\varepsilon}{d(x_0,a_\varepsilon)} \leq \frac{d(x_0,A)}{d(x_0,a_\varepsilon)} \leq L \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{0}{d(x_0,A)} \leq L$$

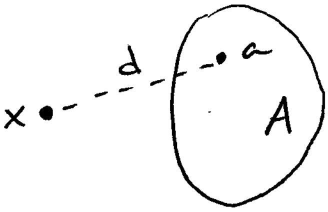
c) $A \subset X$ $\quad \text{dist}(A,x) = \inf\{d(x,a) / a \in A\}$

$\text{dist}(A,\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua

1) Demostrar que si A compacto en X, para cada $x \in X$ $\exists a \in A$ tal que $\text{dist}(x,A) = d(x,a)$

$x \in X$

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(a) = \text{dist}(a,x)$ es continua



Como A es compacto, f alcanza un mínimo en $A \Rightarrow \exists a_0 \in A$ tal que $d(a_0,x) \leq d(a,x)$ $\forall a \in A$

$\Rightarrow d(a_0,x) = \inf\{d(a,x) / a \in A\} = d(A,x)$ $\quad (1)$

Como $a_0 \in A$, $\underset{\inf\{d(a,x)/a\in A\}}{\underset{\shortparallel}{d(A,x)}} \leq d(a_0,x)$ $\quad (2)$

$(1) + (2) \Rightarrow d(a_0,x) = d(A,x)$

2) $A \subset \{x \in X : \text{dist}(x,A) = 0\}$. Demostrar que A es cerrado si y solo si $\underbrace{\{x \in X : \text{dist}(x,A) = 0\}}_{\hookrightarrow \text{ le llamamos } Z} \subset A$.

$\boxed{\Rightarrow}$

A cerrado, $x \in Z$, $d(x,A) = 0 = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$

¿$x \in A$? $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n$ A tal que $d(x,a_n) < \frac{1}{n}$

La sucesión a_n tiene límite x, $x = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow x \in A$

Como A cerrado, contiene todos sus puntos límite

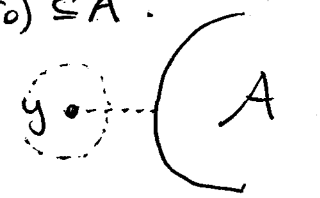
$\boxed{\Leftarrow}$ Queremos ver que $Z \subset A \Rightarrow A$ cerrado

Voy a ver que A^c es abierto.

$y \in A^c$, quiero ver que $\exists r_0 > 0$ tal que $B(y,r_0) \subseteq A^c$.

hipótesis

$y \notin A \overset{\downarrow}{=} Z \Rightarrow \text{dist}(y,A) > 0$



Tomamos $r_0 = \frac{d(y,A)}{2}$; $z \in B(y,r_0) \subseteq A^c$?

$d(y,z) < r_0$

$d(z,a) \geq d(y,a) - d(y,z) \geq 2r_0 - r_0 = r_0 > 0$

$\Rightarrow d(z,A) = \inf\{d(z,a) \mid a \in A\} \geq r_0 > 0$

$\boxed{7.}$ $\mathbb{R}^n$ métrica euclídea $\qquad K \subset \mathbb{R}^n$ propio y no-vacío.

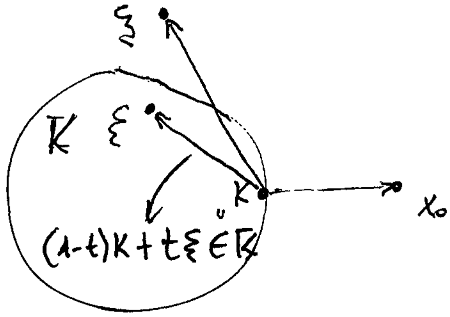
A) K cerrado y sea $x_0 \notin K$. Demuestra que existe un $k \in K$ tal que $\|x_0 - k\| \le \|x_0 - \xi\| \quad \forall \xi \in K$.

<u>Sol</u>: véase el problema 3

$\|x_0 - k\| = dist(x_0, k) \quad ; \quad \|x_0 - \xi\| = d(x_0, \xi)$

B) K convexo y $H_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n : (\xi - k, x_0 - k) \le 0\}$.

Demostrar que $K \subset H_k$.



$d((1-t)k + t\xi, x_0) \ge d(k, x_0)$

por convexidad de K, $(1-t)k + \xi t \in K$

Sea $f(t) = \|(1-t)k + t\xi - x_0\|^2$ porque no es fácil derivar raíces cuadradas

$f'(0) \ge 0$, ya que k es el mínima distancia a x_0.

Al derivar apararece la condición pedida (...).

• DESIGUALDAD DE YOUNG

$a, b, p, p' \in \mathbb{R}$ tales que $a \geq 0, b \geq 0, p > 1, p' > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}}$$

demostración

Por la concavidad del logaritmo en $(0, \infty)$ tenemos:

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(a^{p'}) = \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

Aplicando exponenciales: $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^{p'}}{p'}$ ∎

• DESIGUALDAD DE HÖLDER

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ $p > 1, p' > 1 \in \mathbb{R}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\boxed{|x \cdot y| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_{p'}}$$

demostración

Llamemos $A = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}$ y $B = \left(\sum^{n} y_k{}^{p'}\right)^{1/p'}$. Si $A = 0$ ó $B = 0$ la desigualdad es trivial. Si $A > 0$ y $B > 0$: usamos la desigualdad de Young para $a = \frac{x_k}{A}$, $b = \frac{y_k}{B}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{A} \cdot \frac{y_k}{B} \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k{}^p}{A^p} + \frac{1}{p'}\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k{}^{p'}}{B^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Es decir, $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq AB \implies |\langle x, y\rangle| \leq AB$ ∎

DESIGUALDAD DE MINKOWSKY

$x, y \in \mathbb{R}^n \quad , \quad p \in \mathbb{R} \; , \quad p > 1$

$$\boxed{\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p}$$

demostración

$p' > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)(x_k + y_k)^{p-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} y_k (x_k + y_k)^{p-1} \leq$$

$\boxed{p = p'(p-1)}$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{p'(p-1)}\right)^{1/p'} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{p'(p-1)}\right)^{1/p'} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/p'} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/p'} =$$

factor común

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/p'} \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1 - \frac{1}{p'}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \blacksquare$$