CÁLCULO 1: 1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 3: Series numéricas.

1.- Sea $\sum a_k$ una serie de términos no negativos. Sea $\sum b_k$ una serie de términos positivos y supongamos que $a_k/b_k \to 0$.
a) Demostrar que si $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
b) Demostrar que si $\sum a_k$ diverge, entonces $\sum b_k$ diverge.
c) Mediante un ejemplo, demostrar que si $\sum a_k$ converge, entonces $\sum b_k$ puede converger o diverger.
d) Demostrar mediante un ejemplo que si si $\sum b_k$ diverge, entonces $\sum a_k$ puede converger o diverger.

2.- Demostrar que las series siguientes divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k, \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{k-2}}{3^k}.$$

3.- Determinar si las siguientes series convergen o divergen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^3+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\arctan k}{1+k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^4-k^3+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+\operatorname{sen} k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+\cos k}{\sqrt{k+1}}.$$

4.- Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum \frac{10^k}{k!}$ (b) $\sum \frac{1}{k\,2^k}$ (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log k}$

(d) $\sum \frac{n!}{100^n}$ (e) $\sum \frac{(\log k)^2}{k}$ (f) $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$

(g) $\sum k\left(\frac{2}{3}\right)^k$ (h) $\sum \frac{1}{1+\sqrt{k}}$ (i) $\sum \frac{2\,k+\sqrt{k}}{k^3+2\sqrt{k}}$

(j) $\sum \frac{k!}{10^{4\,k}}$ (k) $\sum \frac{k^2}{e^k+1}$ (l) $\sum \frac{2^k\,k!}{k^k}$

(m) $\sum \frac{n!}{(n+2)!}$ (n) $\sum \frac{1}{n\,(\log n)^{\frac{1}{2}}}$ (ñ) $\sum \frac{1}{n\,\log n(\log(\log n))^{\frac{3}{2}}}$

(o) $\sum \frac{(k!)^2}{(2\,k)!}$ (p) $\sum \frac{45}{1+100^{-n}}$ (q) $\sum \frac{\log n}{n^2}$

(r) $\sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)$ (s) $\sum(\sqrt[n]{n}-1)^n$ (t) $\sum \frac{1}{2^{\log n}}$

5.-
a) Sea f una función decreciente. Demostrar

$$f(2)+\cdots+f(n)\le \int_1^n f(x)dx \le f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1).$$

b) Aplicar la fórmula anterior con $f(x)=\log x$ para demostrar que

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n-1}}$$

c) Usar el apartado anterior para demostrar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

6.- Describir la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\, n!}{n^n},$$

según los valores de $a > 0$.

7.- Una oruga avanza por una cuerda elástica de 100 metros de largo a una velocidad de 1 m/h. Cada hora, alguien estira 100 metros la cuerda de forma homogénea. ¿Llegará alguna vez la oruga al final de la cuerda?

8.- Dos locomotoras se desplazan en línea recta, en sentido contrario, a 30 km/h partiendo de dos puntos a una distancia de 180 km. Una paloma sale de uno de los puntos a 60 km/h en dirección a la locomotora que viene en sentido opuesto. Cuando llega a la misma, gira y se dirige hacia la otra locomotora, y va repitiendo el proceso indefinidamente. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido hasta que las locomotoras se encuentren? ¿Cuántos en cada sentido?

9.- Calcular las siguientes sumas:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n\,(n+2)}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+1}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

10.- Decidir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(*a*) Si $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

(*b*) Si para todo n, $a_n > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente.

(*c*) Si para todo n, $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n a_n$ es convergente.

(*d*) Existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que para todo n, $a_n \geq a_{n+1} > 0$, $\lim a_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n a_n$ es convergente.

11.- Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

12.- Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{3^k\, k!}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \log k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

13.- Identificar la función

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \big(\lim_{k\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2k} \big).$$

(Esta función juega un papel importante en la teoría de la integral de Riemann).

HOJA 3

$\boxed{2.}$ a) $\sum \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$; $a_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e \neq 0$$

Com $\lim \neq 0 \Rightarrow$ $\sum a_k$ no puede converger
$\sum a_k$ diverge

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{k-2}}{3^k}$;

$a_k = 9\left(\frac{k}{3}\right)^{k-2} \underset{k\geq 2}{\geq} 9$ y como $\lim_{k\to\infty} a_k \geq 9 \neq 0 \Rightarrow$ la serie es divergente

$\boxed{3.}$ a) $\sum \frac{k}{k^3+1}$; $a_k = \frac{k}{k^3+1} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$

Criterio de comparación:

$\sum \frac{1}{k^2} \underbrace{< \infty}_{\text{que converge}} \Longrightarrow \sum \frac{k}{k^3+1} \underbrace{< \infty}_{\text{que converge}}$

b) $\sum \frac{\arctan k}{1+k^2}$; $a_k = \frac{\arctan k}{1+k^2} \leq \frac{\overbrace{\pi/2}^{\text{constante}}}{k^2}$

Entonces como $\frac{\pi/2}{k^2}$ converge $\Rightarrow a_k$ converge

$\boxed{4.1}$ a) $\sum \frac{10^k}{k!}$; $a_k = \frac{10^k}{k!}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{10^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{10}{k+1} = \underbrace{0}_{r}$$

$r < 1 \rightarrow$ Converge

f)

$$1 + \frac{1.2}{1.3} + \frac{1.2.3}{1.3.5} + \frac{1.2.3.4}{1.3.5.7} + \dots \Rightarrow$$

$$1.3.5.7 \text{ --- } (2n-1) = \frac{1.2.3.4.5 \text{ --- } 2n-1}{2.4.6.8 \text{ --- } 2n-2} = \frac{1.2.3.4.5 - 2n-1}{2^{n-1}(1.2.3.4 - n-1)} =$$

$$= \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1.2}{1.3} + \frac{1.2.3}{1.3.5} + \frac{n!}{\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}} = \sum \frac{2^{n-1} n!(n-1)!}{(2n-1)!}$$

$$a_n = \frac{2^{n-1}.n!(n-1)!}{(2n-1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n(n+1)!\,n!}{(2n+1)!}}{\frac{2^{n-1}\,n!\,(n-1)!}{(2n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)!\,\cancel{n!}\,(2n-1)!}{2^{n-1}\,\cancel{n!}\,(n-1)!\,(2n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2}(n+1)\,\cancel{n}}{(2n+1)\,\cancel{2}\cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Converge}$$

$\boxed{4.}$

g) $\sum k\left(\frac{2}{3}\right)^k$; $a_k = k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\left(\frac{2}{3}\right) = \Rightarrow$$

* OBSERV.

$$\sqrt[k]{k} = e^{\log \sqrt[k]{k}} = e^{\frac{\log k}{k}} \rightsquigarrow e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}_{\text{tiende}\to 1}\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) < 1 \to \text{converge}$$

12. $\sum_{K=2}^{\infty} (-1)^K \cdot \frac{1}{K \cdot \log K}$

¿converge absolutamente?

¿converge? Sí

$\boxed{\sum (-1)^K a_K \quad \text{si} \quad a_K \searrow 0 \Rightarrow \sum (-1)^K a_K \text{ Converge}}$ → Aquí: $a_K = \frac{1}{K \cdot \log K}$

Por lo tanto, sí que converge.

COMENTARIO SOBRE EL LOGARITMO

En Bachillerato:

$\log a = b \Leftrightarrow 10^b = a$

log → neperiano

[. . .]

$\log_{10} a = (\log_{10} e)(\log_e a)$

$$\sum \left| \frac{(-1)^K}{K \cdot \log K} \right| = \sum \frac{1}{K \cdot \log K}$$

Criterio de condensación

$$\sum 2^n a_{2^n} \ ; \quad \sum \cancel{2^n} \frac{1}{\cancel{2^n} \log 2^n} = \sum \frac{1}{n \cdot \log 2} \quad \text{Divergente}$$

PARA EL FIN DE SEMANA

$$\sum \frac{1}{K^\alpha}$$

Criterio de condensación

$$\sum \frac{1}{K^\alpha \log K}$$

$$\sum \frac{1}{K^\alpha (\log K)(\log(\log K))}$$

$$\sum \frac{a^n\, n!}{n^n}$$

$a>0$ criterio del cociente

$$\frac{\dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n\,.\,n!}{n^n}} = \frac{\cancel{a^{n+1}}\,\cancel{(n+1)!}\quad n^n}{\cancel{a^n}\quad \cancel{n!}\quad (n+1)^{n+1}} = \frac{a\,\cancel{(n+1)}\;n^n}{(n+1)^n.\,\cancel{(n+1)}} =$$

$$= a\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{\text{tiende a}} e^{-1}$$

Por lo tanto, $a\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n}$ tiende a: $a.e^{-1} = \frac{a}{e}$.

Por cociente
- $\to$ Si $\frac{a}{e}<1$ Converge
- $\to$ Si $\frac{a}{e}=1$?
- $\to$ Si $\frac{a}{e}>1$ Divergente

Entonces, $\begin{cases} \text{si } 0<a<e & \text{Converge} \\ \text{si } a>e & \text{Diverge} \\ \text{si } a=e & ? \end{cases}$

$\Rightarrow$ Buscar "Fórmula de Stirling" para el caso $a=e$ de:

$$\sum \frac{e^n.\,n!}{n^n}$$

$\boxed{10.}$ V o F? $\begin{cases} \to \text{demostr.} \\ \to \text{contraejemplo} \end{cases}$

a) Si $\lim a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ Convergente.

contraejemplo $\begin{cases} a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \searrow 0 \\ \sum (-1)^n (-1)^n \frac{1}{n} = \sum (-1)^{2n} \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n} \text{ Divergente} \end{cases}$

b) Si $\lim a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ Convergente, $\forall a_n > 0$

$\boxed{4.}$

n) $\sum \frac{1}{n(\log n)^{1/2}}$ $\boxed{\sum a_n \text{ c.} \Leftrightarrow \sum 2^n a_{2^n} \text{ c}}$

$$\sum \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}(\log 2^n)^{1/2}} = \sum \frac{1}{(n \log 2)^{1/2}} \quad \text{diverge}$$

k) $\sum \frac{k^2}{e^k + 1}$

Criterio de la raíz:

$$\lim \sqrt[k]{\frac{k^2}{e^k+1}} = \cancel{\lim} = \frac{\sqrt[k]{k^2}}{\sqrt[k]{e^k+1}} <$$

$$< \lim \frac{k^{2/k}}{\sqrt[k]{e^k}} = \cancel{\lim \ldots = \frac{1}{e} \lim k^{2/k} = \frac{1}{e} \lim \log k^{2/k}}$$

$$= \lim \frac{k^{2/k}}{e}$$

$$\lim \log k^{2/k} = \lim \frac{2}{k} \log k = 2 \lim \underbrace{\frac{\log k}{k}}_{\to 0}$$

12.1 a) $\sum (-1)^k \dfrac{k^k}{3^k \cdot k!}$

Observemos si converge absolutamente: $\sum \left| (-1)^k \dfrac{k^k}{3^k . k!} \right| =$

$$= \sum \frac{k^k}{3^k . k!}$$

Criterio del cociente:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}.(k+1)!}}{\frac{k^k}{3^k . k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1} \cancel{3^k} . \cancel{k!}}{\cancel{3^{k+1}} . k^k . \cancel{(k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{\cancel{k+1}}}{3k^k \cancel{(k+1)}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{3k^k} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot e = \frac{e}{3} < 1 \quad \text{Converge}$$

Converge abs $\longrightarrow$ converg $\sum (-1)^k \dfrac{k^k}{3^k . k!}$

---

b) $\sum \dfrac{(-1)^k}{k \log k}$ Observemos si converge absolutamente

$$\sum \left| \frac{(-1)^k}{k \log k} \right| = \sum \frac{1}{k \log k}$$

Criterio de condensación

$$\sum \frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^k} \log 2^k} = \sum \frac{1}{k \log 2} \longrightarrow \infty \quad \text{Diverge}$$

Observemos si converge condicionalmente por el Criterio de Leibniz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k \log k} = 0 \checkmark$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1) \log k+1} \leq \frac{1}{k \log k} = a_k \checkmark$$

Criterio Leibniz $\Rightarrow$ Converge $\sum \dfrac{(-1)^k}{k \log k}$ condicionalm

~~10~~

13 $f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2k}\right)$

$\boxed{x = \frac{p}{q}}$ $n!\pi x = m\pi \quad , \quad m\in\mathbb{Z}$

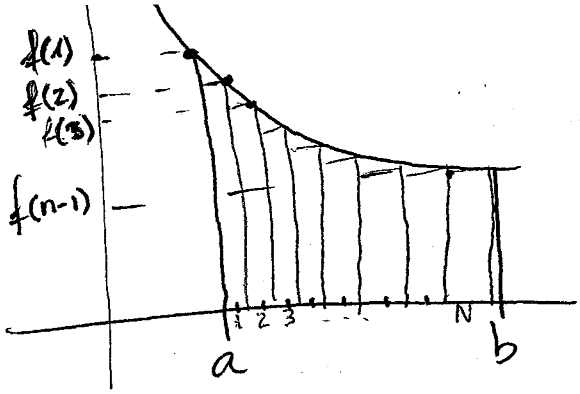
Entonces $(\cos n!\pi x)^{2k} = 1$ porque $m\pi$ puede ser 1 ó -1

pero está elevado a un nº par.

$\boxed{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \Rightarrow \left(\cos \underbrace{n!\pi x}_{\neq m\pi}\right)^2 < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\Big(\underbrace{\cos\ n!\pi x}_{\substack{<1 \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ =1 \text{ si } x\in\mathbb{Q}}}\Big)^{2k} = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

5.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq f(1) + f(2) + \dots f(N-1)$$

11.

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

$$\sum \left| (-1)^{n+1} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} \right| \quad \text{Diverge}$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} \geq \sum \frac{1}{n} \quad \text{Diverge}$$

No es absolutamente convergente.

<u>Criterio de Leibniz</u>

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} \leq \frac{e}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$a_{n+1} \leq a_n$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$$

Si $\sum a_n$ converg $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Downarrow$

$$\boxed{\text{Si } \lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n = \infty \text{ D}}$$

- COMPARACIÓN

$\sum a_n \leq \sum b_n < \infty$

$\sum a_n \geq \sum b_n = \infty$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sum \frac{1}{n} & D \\ \sum \frac{1}{n^2} & C \\ \sum \frac{1}{2^n} & C \end{array}}$$

- COCIENTE
- RAÍZ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r \begin{cases} r<1 & \text{converg} \\ r>1 & \text{diverg} \\ =1 & ? \end{cases}$
- CONDENSACIÓN $\rightarrow$ útil con logaritmos

- CRITERIO DE LEIBNIZ

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ $\quad \sum (-1)^n a_n$ Conveg si: • a_n tiende a 0 • y a_n decreciente

Abs $\sum |a_n|$ Converg.

Cond. $\sum (-1)^n a_n$ Cong

$\sum |a_n|$ converg $\Rightarrow \sum a_n$ Converg.

CRITERIO DE COMPARACIÓN

$$a_n < b_n \quad y \quad \sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$$

$$a_n > b_n \quad y \quad \sum b_n = \infty \Rightarrow \sum a_n = \infty$$

CRITERIO COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad ; \quad \begin{array}{l} r<1 \to \text{Conv.} \\ r>1 \to \text{Diverg.} \end{array} \quad r = 1 \ ?$$

CRITERIO RAÍZ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r \quad ; \quad \begin{array}{l} r<1 \to \text{Conv.} \\ r>1 \to \text{Diverg.} \end{array} \quad r = 1 \ ?$$

TEOREMA

$$\sum a_n < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n > 0 \Rightarrow \sum a_n = \infty$$

CLASE DUDAS

Criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \begin{cases} <1 & C \\ =1 & ? \\ >1 & \text{Diverg} \end{cases}$$

$$\sum K\left(\tfrac{2}{3}\right)^K$$

$$\sqrt[K]{K\left(\tfrac{2}{3}\right)^K} = \sqrt[K]{K}\ \sqrt[K]{\left(\tfrac{2}{3}\right)^K} = \sqrt[K]{K}\ \left(\tfrac{2}{3}\right)$$

$$* \sqrt[K]{K} = K^{1/K} = e^{1/K \log K} \longrightarrow e^0 = 1$$

$$\lim_{K\to\infty} \sqrt[K]{K}\ \left(\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{2}{3} < 1$$ Por lo tanto $\sum K\left(\tfrac{2}{3}\right)^K$ Converge

---

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$$ NO EXISTE

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \ell$ y $\ell > 0$

Tomamos $\varepsilon = \frac{\ell+1}{2}$

$$\underbrace{|(-1)-\ell|}_{(-1)^n\ n \text{ impar}} = |1+\ell| = 1+\ell > \frac{\ell+1}{2} = \varepsilon$$

$\forall N$ existen $n > N$ tales que $|a_n - \ell| > \varepsilon$

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cdots}} \longrightarrow 2 + \frac{1}{a_{n-1}} = a_n$$

$a_1 = 2$

$a_2 = 2 + \frac{1}{2}$

$a_3 = 2 + \cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$

TEOREMA PRÁCTICAS

$\lim a_n = l$; $\lim b_n = m$

$\Rightarrow \lim (a_n + b_n) = l + m$

$\Rightarrow \lim (a_n . b_n) = l . m$

TEOREMA SANDWICH:

Si a_n, b_n, c_n son sucesiones

si $\lim b_n = l$ y $\lim c_n = l$ y $b_n \leq a_n \leq c_n$,

$\lim a_n = l$.

TEOREMA

$$\{r^n\} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \infty & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

TEOREMA CONVERGENCIA MONÓTONA

$\{a_n\}$ monótona creciente y acotada sup $\Rightarrow$ tiene límite

$\{a_n\}$ monótona decreciente y acotada inf $\rightarrow$ tiene límite

$\{a_n\}$ creciente y acotada $\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} a_n$ y

supremo $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \to \infty} a_n$