HOJA 3

32.

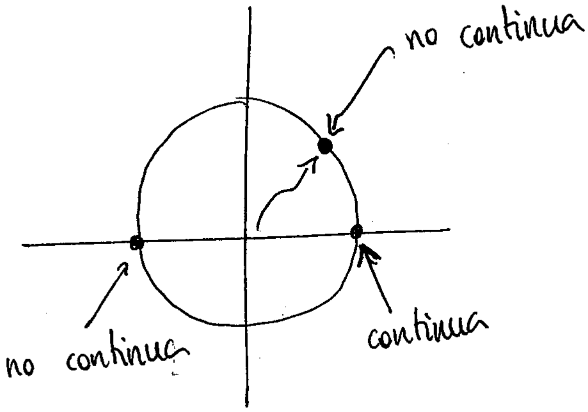
$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^4-1}{z-i} & \text{si } z \neq i \\ 4i & \text{si } z = i \end{cases}$$

$$z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z^2-1)(z-i)(z+i)$$

$$\lim_{z\to i} \frac{z^4-1}{z-i} = \lim_{z\to i} (z^2-1)(z+i) = -4i \neq 4i = f(i)$$

$\Rightarrow f$ no es continua.

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq 1 \\ |z|^2 & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$



36.

$$f_n(z) = \frac{\text{[illegible]}}{1+z^n}$$

a) $f_n \longrightarrow f$ puntualmente en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$

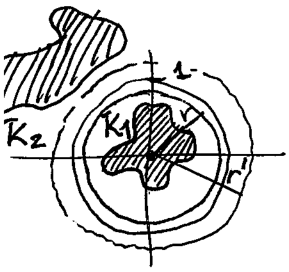
Si $|z|<1 \Rightarrow \{z^n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n(z) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Si $|z|>1 \Rightarrow \{z^n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow f_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-z^n}{z^n} = -1$

Entonces $f_n(z) \xrightarrow[pp]{} f = \begin{cases} 1 & \text{si } |z|<1 \\ -1 & \text{si } |z|>1 \end{cases}$

b) $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en todo subconjunto compacto de Ω.

Sugerencia: basta demostrar que si $0<r<1$, entonces $f_n \underset{\text{unif}}{\Rightarrow} f$ en $R_1 \cup R_2$, siendo $R_1 = \{z\in\mathbb{C} : |z|\leq r\}$, $R_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{r}\}$



Si K_1 es compacto y $K_1 \subset \overline{D}(0,1) = \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ entonces $\exists r\in(0,1)$ tal que $K_1 \subset \overline{D}(0,1) = R_1$

Si K_2 es compacto y $K_2 \subset \{|z|>1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r' \in (0,1)$ tal que $K_2 \subset \{|z| \geq \frac{1}{r'}\}$

Podemos suponer que $r = r'$.

Resumiendo: si K compacto, $K \subset \Omega \Rightarrow \exists r \in (0,1)$ tal que $K = K_1 \cup K_2$ con $K_1 \subset \{|z|\leq r\}$ y $K_2 \subset \{|z| \geq 1/r\}$

Veamos la conv. unif. en $\{|z|\leq r\} = \overline{D}(0,r)$

Fijamos $\varepsilon>0$: $|f_n(z) - f(z)| = |f_n(z) - 1| = \left|\frac{1-z^n}{1+z^n} - 1\right| < \varepsilon$ $\forall z \in \overline{D}(0,r)$ $\forall n \geq n_0$

hay que encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1-z^n}{1+z^n} - \frac{1+z^n}{1+z^n}\right| = \frac{2|z^n|}{|1+z^n|} \leq \frac{2r^n}{1-r^n} < \varepsilon \Rightarrow r^n < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$$

(despejamos n y no depende de z)

Haríamos lo mismo en $\{|z| \geq \frac{1}{r}\}$.

Recuerdo:
$$\left.\begin{array}{l} f_n : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \\ \text{continuas} \\ \{f_n\} \xrightarrow{\text{unif.}} f \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ es continua en } \Gamma$$

demo

$z_0 \in \Gamma$, sea $\varepsilon > 0$ tengo que encontrar $\delta > 0$ tal que

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $|z - z_0| < \delta$.

Sea f_n tal que $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/3$ $\forall z \in \Gamma$

Como f_n es continua en z_0, $\exists \delta > 0$ tal que

$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3$ si $|z - z_0| < \delta$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \underbrace{|f(z) - f_n(z)|}_{\wedge\!\backslash\ \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(z) - f_n(z_0)|}_{\wedge\!\backslash\ \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(z_0) - f(z_0)|}_{\wedge\!\backslash\ \varepsilon/3} \leq \varepsilon$$

c)

$$|f_n(z) - 1| < 1/2 \quad \forall z \in \{|z| < 1\} \quad \forall n \geq n_0$$

Afirmo que $\nexists n \in \mathbb{N}$: $|f_n(z) - 1| < 1/2$ $\forall z \in \{|z| < 1\}$

$\boxed{39.}$

a) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z^2+4)} = \dfrac{1}{z-1} \cdot \dfrac{1}{z+2i} \cdot \dfrac{1}{z-2i}$ $\boxed{\begin{matrix} z \neq 1 \\ z \neq 2i \\ z \neq -2i \end{matrix}}$

b) $\dfrac{1}{z+\frac{1}{z}} = \dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{z}{z+i} \cdot \dfrac{1}{z-i}$ $\boxed{\begin{matrix} z \neq i \\ z \neq -i \end{matrix}}$

$\boxed{z \neq 0}$

c) $f(z) = \dfrac{z}{z^n - 2}$, $n \in \mathbb{N}$

cuando z no sea una n-ésima de 2
(es cuando no es holomorfa)

~~$\{f_n\}$ unif. converg.~~ continuas y —

$\{f_n\}$ unif. continua y $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$

Entonces f unif. continua

<u>demostración</u>

$f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n - f| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\{f_n\}$ unif. cont. ~~$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in$~~

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f_n(z_1) - f_n(z_0)| < \varepsilon$ si $|z_1 - z_0| < \delta$
$\forall z_1, z_0 \in \mathbb{C}$

Queremos $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(z_2) - f(z_3)| < \varepsilon$ si $|z_2 - z_3| < \delta$
$\forall z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$$|f(z_1) - f(z_0)| = |\underbrace{f(z_1)} + \underbrace{f_n(z_1)} - \underbrace{f_n(z_1)} + f_n(z_0) \underbrace{- f_n(z_0)} - f(z_0)| =$$

$$= \underbrace{|f(z_1) - f_n(z_1)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(z_1) - f_n(z_0)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(z_0) - f(z_0)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

$\boxed{37.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+\sqrt{n})\, z^n$

a) Conv. unif. en todo K compacto, $K \subset D(0,1) = \{|z|<1\}$

$$\lim_n \sqrt[n]{(n^2+\sqrt{n})|z|^n} = \underbrace{\lim_n \sqrt[n]{n^2+\sqrt{n}}}_{\downarrow} \cdot |z|$$

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^2+\sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{2n^2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad \text{sandwich} \qquad 1$$

$$1$$

Para ver la convergencia en K, aplicamos el M-test.

Si K es compacto, $\exists\, r<1$: $|z| \leq r \quad \forall z \in K$

$$|f_n(z)| = |(n^2+\sqrt{n})\cdot|z|^n| = (n^2+\sqrt{n})|z|^n \leq (n^2+\sqrt{n})r^n = M_n$$

$\sum_n M_n < \infty$ (criterio de la raíz igual que antes)

b) Sí, porque tenemos conv. unif. en los compactos.
La ~~convergencia~~ continuidad es una noción puntual.
Dado un punto podemos meterlo en un compacto y aplicando la conv. unif de apart. a) podemos asegurar que es continua en ese punto.

$\boxed{41.}$ a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + ixy$

$u_x = \sqrt{y}$ $\xrightarrow{C-R}$ $\begin{cases} 2x = x \\ 2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ el único pto. donde puede ser derivable en (0,0)

$-u_y = \sqrt{x}$

Como las derivadas parciales son continuas en (0,0) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es derivable en (0,0).

b) $f(x,y) = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y$

$e^x \cos y = -e^x \cos y$ $\Rightarrow \begin{cases} \cos y = -\cos y \\ \operatorname{sen} y = -\operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos y = 0 \\ 2\operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$ sin solución

$e^x \operatorname{sen} y = -e^x \operatorname{sen} y$

$\Rightarrow$ No es derivable en ningún punto.

c) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z) \Rightarrow f(x,y) = x^2 + xyi$

$2x = x$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ (0,0)

$0 = y$

$\boxed{43.}$ a) Teoría

b) ~~Directo del a~~ Hecho en clase

c)

$$\left.\begin{array}{l} h = |f| + f^3 \in \mathcal{H}(\Omega) \overset{?}{\Rightarrow} f \text{ cte.} \\ \text{Sabemos que } f \in \mathcal{H}(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow |f| \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$$\Downarrow (a)$$

$$f = \text{cte.}$$

$\boxed{40.}$ $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$

a) Demostrar $g \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Ω simétrico con respecto a $\{\mathrm{Im}(z) = 0\}$, garantiza que $z \in \Omega \Leftrightarrow \bar{z} \in \Omega$.

Fijamos $z \in \Omega$, $\dfrac{f(z+h) - f(z)}{h} = \dfrac{\overline{g(\bar{z}+\bar{h})} - \overline{g(\bar{z})}}{h} =$

$= \overline{\left(\dfrac{g(\bar{z}+\bar{h}) - g(\bar{z})}{\bar{h}}\right)}$ Tomamos límites: $h \to 0$ $(\Leftrightarrow \bar{h} \to 0)$

conjugar es func. cont.

$$\lim_{h\to 0} \overline{\left(\frac{g(\bar{z}+\bar{h}) - g(\bar{z})}{\bar{h}}\right)} = \lim_{\bar{h}\to 0} \overline{\left(\frac{g(\bar{z}+\bar{h}) - g(\bar{z})}{\bar{h}}\right)} \overset{\downarrow}{=} \overline{\lim_{\bar{h}\to 0}\left(\frac{g(\bar{z}+\bar{h}) - g(\bar{z})}{\bar{h}}\right)} =$$

$= \overline{g'(\bar{z})} \implies f'(z) = \overline{g'(\bar{z})}$ que existe ($\bar{z} \in \Omega$ por hip.)

$f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$

b) $f(z) = g(\bar{z})$

$\exists f'(a) \Leftrightarrow g'(\bar{a}) = 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{g(\bar{a}+\bar{h}) - g(\bar{a})}{h} = \underbrace{\overset{(*)}{\overline{\frac{g(\bar{a}+\bar{h}) - g(\bar{a})}{\bar{h}}}}}_{\substack{\bar{h}\to 0 \\ h \to 0 \\ \downarrow \\ g'(\bar{a})}} \cdot \underbrace{\frac{\bar{h}}{h}}_{\substack{h \to 0 \\ \downarrow \\ ?}}$$

no tiene límite cuando $h \to 0$

→ Solo hay límite cuando $(*)$ es cero, porque $\left|\dfrac{\bar{h}}{h}\right| = 1 \;\; \forall h \neq 0$

$\Downarrow$

cuando $g'(\bar{a})$ es cero

$\boxed{35.}$ $A \subset \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$

Definimos $d(z,A) = \inf\{|z-a| : a \in A\}$

$f(z) = d(z,A)$ $\qquad f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

f unif cont. $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $|z-w| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Recuerdo: f lipschitz $\iff \exists M > 0$ tal que

$|f(z) - f(w)| \leq M|z-w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

$d(w,A) \leq |w-z| + d(z,A)$

si fijo $a \in A$,

$|w-a| \leq |w-z| + |z-a|$

$d(w,A) \leq |w-z| + |z-a|$

(tomando ínfimos de nuevo)

$\leq |w-z| + d(z,A)$

Podemos hacer lo mismo: $d(z,A) \leq |w-z| + d(w,A)$

$$\left\{\begin{array}{l} d(w,A) \leq |w-z| + d(z,A) \\ d(z,A) \leq |w-z| + d(w,A) \end{array}\right. \Rightarrow |d(w,A) - d(z,A)| \leq |w-z|$$

Lipschutz con constante 1

$\Rightarrow$ convergencia uniforme.

EXTRA :

a) Muestra que :

a.1) $\sum \frac{z^K}{K^2}$ conv. unif. para $|z| < 1$

$\left|\frac{z^K}{K^2}\right| \leq \frac{1}{K^2}$ M-test con esto (sabemos que converge)

a.2) ——

EXTRA :

$\lim_n z_n = A$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : |z_n - A| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Mostrar $\lim_n \left(\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} z_K\right) = A$

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} : \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} z_K - A\right| = \left|\frac{\left(\sum_{K=1}^{n} z_K\right) - nA}{n}\right| =$

$= \left|\frac{\sum_{K=1}^{n}(z_K - A)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n}|z_K - A| = \cancel{\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n_0}|z_K - A|} + \cancel{\frac{(n-n_0)}{n}\varepsilon}$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \xrightarrow{n\to\infty} \varepsilon$

$\blacksquare$

EXTRA : $\{nz^n\}_{n=1}^{\infty}$ Conv. pto. a pto. si $|z| < 1$.

~~Queremos ver: $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{z,\varepsilon} > 0$~~

Fijamos $z \in \mathbb{C}$ (porque queremos ver conv. pto. a pto.)

EXTRA

$$f_n(z) = \frac{z^n}{n}$$

a) Conv. unif. para $|z| < 1$

b) f' No conv. unif. para $|z| < 1$

c) ¿Qué se puede decir de la conv. unif. de $f_n'(z)$?

a) Afirmamos que $f = 0$

$$\left| f_n(z) - f(z) \right| = \left| \frac{z^n}{n} \right| = \frac{|z|^n}{n} \overset{|z|<1}{\leq} \frac{1^n}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\ \ } \ \cancel{\ \ } \ n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad \text{(no depende de } z \in \mathbb{C}\text{)}$$

b) $f_n'(z) = \dfrac{n z^{n-1}}{n}$ $\cancel{\le \frac{n}{n} = 1 < \varepsilon}$

$$\left| f_n'(z) - f'(z) \right| = \left| \frac{n z^{n-1}}{n} - 0 \right| = \frac{n |z|^{n-1}}{n} = |z|^{n-1} \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\varepsilon = 1/2 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists z_{n_0} : \quad |z_{n_0}|^{n-1} \geq \varepsilon$$

c) En compacto sí