Dpto. de Matemáticas. **MODELIZACIÓN. Curso 19/20**

PROBLEMAS. HOJA 8. Cálculo de Variaciones y Mecánica.

En lo siguiente se usa la notación del lagrangiano

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$$

para un funcional y $\mathcal{H}$ para la familia de funciones admisibles, que, salvo que se mencionen cambios, será la familia

$$\{f \in C^1([a,b]) : f(a) = A, f(b) = B\}.$$

Bastará, entonces, dar L y las condiciones de borde.

1. Encontrar las funciones extremales en los siguientes casos, dibujar y describir las curvas:

(a) $L = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$,

(b) $L = y^2 + 2xyy'$,

(c) $L = xy + y^2 - 2y^2y'$, $\quad y(0) = 1 \quad y(1) = 2$,

(d) $L = \sqrt{y(1+y'^2)}$,

(e) $L = y'(1+x^2y')$

(f) $L = y'^2 + 2yy' - 16y^2$,

Solución de (a). El funcional es autónomo por lo que lo resolvemos usando la integral primera: $f - y'f_{y'}$ es constante.

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y'\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = C$$

Despejando

$$y\sqrt{1+(y')^2} = c \iff y'^2 = \frac{c-y^2}{y^2} \iff y' = \pm\frac{\sqrt{c-y^2}}{y}$$

Es más sencillo resolver la x en términos de la y:

$$\int dx = \pm\int \frac{y}{\sqrt{c-y^2}}dy = \mp\sqrt{c-y^2}$$

Así que $(x+c_2)^2 = (c-y^2) \iff (x+c_2)^2 + y^2 = c_1$, las soluciones son circunferencias en el plano de las x.

Solución de (b). Este funcional no es autónomo así que calculamos la ecuación de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 2y - \frac{d}{dx}(2xy) = 2(y + xy' - y - xy') = 0$$

Es identicamente igual a cero. Lo que ocurre es que $d(xy^2) = y^2 + x2y'y$. Por tanto el funcional solo depende de los límites de integración.

$$J(y) = by_b^2 - ay_a^2$$

Solución de (c). Este funcional no es autónomo así que calculamos la ecuación de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = x + 2y - 4yy' - \frac{d}{dx}(-2y^2) = x + 2y - 4yy' + 4yy' = 0$$

Es decir $y = -2x$. Problema la solución no verifica las condiciones de contorno. No podemos decir nada más. El mínimo no se alcanza en la clase de funciones continuas.

Solución de (d). Es un funcional autónomo por lo que podemos utilizar el truco de la integra primera: $f - y'f_{y'}$ es constante. Así,

$$\sqrt{y(1+y'^2)} - y'\frac{yy'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \iff \frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \frac{y}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

Por tanto,

$$\frac{1}{c}y = \sqrt{y(1+y'^2)} \iff Cy = 1 + (y')^2 \iff y' = \sqrt{Cy-1}$$

Tenemos que integrar

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c_1y-1}} = x + C \iff \frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1} = x + C$$

Lo manipulamos para ver que la curva es una parábola

$$c_1y = \frac{c_1}{4}(x+C)^2 + 1.$$

Solución de (e). En este caso la variable y es cíclica por lo que

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(1 + x^2 2y') = 0$$

Es decir

$$1 + 2x^2y' = C, \iff y' = \frac{c_1 - 1}{x^2} \iff y = \frac{C_1}{x} + C_2,$$

para dos nuevas constantes C_1, C_2.

Solución de (f). Resolvemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$0 = 2y' - 32y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 2y' - 32y - 2y'' - 2y' = -2y'' - 32y$$

Que resolvemos facilmente

$$y = c_1\cos(4x) + c_2\sin(4x) = A_1\sin(4x - A_2).$$

2. Sea $L = y'^2 + 2y' + y^2$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$. Encontrar las funciones extremales y analizar si en algún caso el funcional alcanza un mínimo en ellas.

   Solución. La ecuación de Euler Lagrange es muy sencilla

   $$0 = f_y - (f_{y'})' = (y - y'')$$

   Que se resuelve $y = c_1 e^x + c_2^{-x}$ imponiendo las condiciones de frontera $c_1 e + (1 - c_1)e^{-1} = 1, \iff c_1(e - e^{-1}) = 1 - e^{-1}, c_1 = \frac{1}{e+1}, c_2 = \frac{e}{e+1}$. Por tanto la única solución que satisface las ecuaciones de Euler Lagrange es

   $$y = \frac{1}{e+1}(e^x + e^{1-x})$$

3. Sea $L = y'^2 - \omega^2 y^2$ con ω constante, $y(0) = y(\pi) = 1$.

   i) Encontrar los extremales.
   ii) Demostrar que si $y(x)$ es extremal y ϕ es C^1 y se anula en 0 y π, es $J[y + \phi] = J[y] + J[\phi]$.
   iii) Comprobar que para el caso $\omega^2 = 3$ el extremal no da un mínimo de J.

   Solución. i) Por Euler Lagrange

   $$0 = -2\omega^2 y - \frac{d}{dx}(2y') = -2(\omega^2 y + y'')$$

   Que sabemos resolver $y = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)$ Imponiendo las condiciones de contorno

   $$y(x) = \frac{1 - \cos(\omega\pi)}{\sin(\omega\pi)} \sin(\omega x) + \cos(\omega x)$$

   ii) Usando el truco de Lagrange

   $$J(y + \phi) = \int (y' + \phi')^2 - \omega^2(y + \phi)^2 dy = \int y'^2 - \omega^2 y^2 + \phi'^2 - \omega^2\phi^2 + 2(\phi' y' - \omega^2 \phi y)dy$$
   $$= J(y) + J(\phi) + 2\int (\phi' y' - \omega^2 \phi y)$$

   Ahora integramos por partes $\int \phi' y' = -\int y'' \phi$ asi que el ultimo término es

   $$-\int \phi(y'' + \omega^2 y) = 0$$

   porque y resuelve la ecuación de Euler Lagrange.

   iii) Siguiendo la sugerencia

   $$J(\sin(x)) = \int_0^\pi cos^2(x) - 3\sin^2(x) < 0$$

   De modo que si y es mínimo

   $$J(\bar{y}) \leq J(\bar{y} + \phi) = J(\bar{y}) + J(\phi),$$

   pero como $J(\phi)$ es negativo llegamos a contradicción.

4. Hallar las geodésicas de la esfera.

   Solución. Hecha en clase.

5. Hallar las geodésicas de pseudoesfera $\mathbf{r}(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a(\cos u + \ln\tan u/2))$.

   Solución Sea $a = 1$ por simplicidad. Calculamos la primera forma fundamental.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} &= (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(u) + \frac{1}{\sin(u)}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} &= (-\sin(u)\sin(v), \sin(u)\cos(v), 0). \end{aligned}$$

   Así,

$$E = \cos^2(u) + \frac{\cos^4 u}{\sin^2 u} = \frac{\cos^2(u)}{\sin^2(u)}, \qquad F = 0, \qquad G = \sin^2(u)$$

   Entonces

$$ds^2 = \frac{\cos^2(u)}{\sin^2(u)}du^2 + \sin^2(u)dv^2 = du^2(\frac{\cos^2(u)}{\sin^2(u)} + \sin^2(u)v'(u)^2)$$

   Así, el funcional es

$$L = \int \sqrt{\mathsf{cotg}(u)^2 + \sin^2(u)v'(u)^2}du.$$

   Ahora la v es cíclica por lo que las ecuaciones de Euler Lagrange son equivalentes a

$$\frac{\partial L}{\partial v'} = \frac{v'\sin^2(u)}{\sqrt{\mathsf{cotg}(u)^2 + \sin^2(u)v'(u)^2}} = \alpha.$$

   Calculando como en la esfera:

$$\sin^4 v'^2 = \alpha^2(\mathsf{cotg}(u)^2 + \sin^2(u)v'^2) \iff v'^2 = \frac{\alpha\mathsf{cotg}(u)^2}{\sin^4 - \alpha^2\sin^2}$$

   Tomando raíces,

$$v' = \frac{\alpha\mathsf{cotg}(u)\sin^{-2}}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^{-2}}}, v = \int \frac{\alpha\mathsf{cotg}(u)\sin^{-2}}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^{-2}}},$$

   que es muy parecida a la ecuación de los circulos máximos. De hecho podemos hacer el mismo cambio $x = \mathsf{cotg(u)}, dx = \sin^{-2}$ para llegar a

$$v = \int \frac{\alpha x dx}{\sqrt{a^2 - \alpha x^2}} = \sqrt{b^2 - (\alpha x)^2}$$

   o en otras palabras $v^2 + \alpha\mathsf{cotg}(u)^2 = b^2$

6. Calcular las ecuaciones de Euler–Lagrange (primera variación) del funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x))dx$$

   Solución:

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(f_{y''}) = 0$$

7. Demostrar que si $M \in C[a,b]$ y si

$$\int_a^b M(x)\eta'(x)dx = 0$$

   para todo $\eta \in C^1[a,b]$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ se sigue que $M(x) \equiv C$. [1]

   Solución: Comentada en clase.

[1] Esto es el principio del concepto de derivada distribucional, o derivada débil

8. Escribir el lagrangiano para el problema de la superficie de revolución de área mínima para un giro alrededor del eje vertical y resolver Euler–Lagrange.

   Solución: Comentada en clase.

9. **(Catenaria)** Una cadena $y(x)$ de densidad lineal ρ está colgada en equilibrio bajo la fuerza de la gravedad entre los puntos $A = (-a, h)$ y $B = (a, h)$. Determinar $y(x)$. ¿Qué puede afirmarse acerca de las constantes de integración?

   Solución: Comentada en clase.

10. Hallar las geodésicas del cilindro

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)$$

y del cono

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, mr).$$

Solución: Más sencillo que la esfera. Kot, pag. 66

11. Considerar el problema de minimizar

$$J[y] = \int_0^1 (1 + y'^2)^{1/4} dx, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 1$$

Demostrar que el ínfimo es 1, pero que no se alcanza en ninguna función admisible.

12. Encontrar un Lagrangiano $L(x, y, y')$ para el que la ecuación de Euler–Lagrange es

$$y'' + p(x)y + q(x) = 0$$

Solución: $L(x, y, y') = (y')^2 + p(x)y^2 + 2q(x)y$.

13. Para el funcional habitual

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx.$$

   a) Comprobar que si se realiza un cambio de variables $x = u(t)$ entonces la ecuación de Euler-Lagrange tiene las mismas soluciones (en las nuevas coordenadas).
   b) Comprobar que si se realiza un cambio de variables $y = f(z)$ entonces la ecuación de Euler-Lagrange tiene las mismas soluciones (en las nuevas coordenadas).

Solución:

a) Escribimos

$$\int L(x, y, y')dx = \int L(u(t), y \circ u(t), y' \circ u)u'(t)dt$$

Ahora definimos $v(t) = y \circ v$ y observamos que $y' \circ uu'(t) = (y \circ u)'$ asi que podemos escribir

$$\int L(x, y, y')dx = \int L_1(t, v, v'(t))dt$$

donde $L_1(t) = L(u(t), v(t), \frac{v'(t)}{u'(t)})u'(t)$. Las ecuaciones de Euler Lagrange son,

$$\frac{dL_1}{dv} = u'\frac{dL}{dy}, \quad \frac{dL_1}{dv'} = \frac{u'(t)}{u'(t)}\frac{dL}{dy'}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dt} = u'(t)\frac{d}{dt}$$

AsÃ pues

$$\frac{dL_1}{dv}-\frac{d}{dt}(\frac{dL_1}{dv'})=u'(t)(\frac{dL}{dy}-\frac{d}{dx}(\frac{dL}{dy'})$$

b) Supongamos que podemos expresar F respecto a z o respecto a y y comparamos las derivadas que intervienen en las ecuaciones de Euler Lagrange. Antes necesitamos observar que

$$\dot{z}=\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial y}\dot{y}$$

asi pues

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}}=\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial \dot{z}}{\partial y}.$$

Resultando

- $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial y}$
- $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}=\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}}=\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\frac{\partial z}{\partial y}$
- $\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}})=\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}})\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \dot{z}}{\partial y}$

Así

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}})=\frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}))}$$

y las soluciones son equivalentes.

14. **Máquina de Atwood**. De una polea cuelga por un lado una masa m_1 y por el otro un mono de masa m_2. Supongamos que $m_2 < m_1$ y que el mono trepa con velocidad $v(t)$ respecto de la cuerda. Estudiar el movimiento. ¿Es posible que el mono pueda elevar la masa m trepando suficientemente deprisa?

    Solución: El problema es similar al de maquina de Atwood. La unica diferencia es que la posición del mono es $a-x_1-\int_0^t v(s)ds$ y su velocidad $-\dot{x_1}-v(t)$, donde x_1 es la distancia de la masa m_1 al plano de la polea. Por tanto el Lagrangiano $L=T-V$ donde $V=mgy$ es

$$L(x_1,\dot{x_1})=m_1gx_1+m_2g(a-x_1-\int_0^t v(s)ds)+\frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2+m_2(-\dot{x_1}-v(t))^2$$

Por tanto, como el Lagrangiano es sencillo hallamos la ecuación de Euler Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=m_1g-m_2g, \frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}=m_1\dot{x_1}+m_2(\dot{x_1}-v(t)), \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}})=(m_1+m_2)\ddot{x_1}+m_2\dot{v}$$

Asi que las ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{x_1}=\frac{(m_1-m_2)g-m_2\dot{v}}{m_1+m_2}$$

Para que la masa suba x_1 tiene que ser decreciente, en otras palabras $\dot{x_1}<0$. Integrando una vez y usando que $v(0)=0$

$$(m_1+m_2)\dot{x_1}=(m_1-m_2)gt-m_2v$$

Asi que el mono podra levantar el peso m_1 si su velocidad $v>\frac{gm_1t}{m_2}$.

15. Describimos movimiento de la luz en una fibra óptica orientada a lo largo del eje z. La fibras modernas tienen un índice de refracción que depende de la distancia al centro de la fibra. El principio de Fermat nos dice que la luz minimiza la longitud óptica. Usando coordenadas cilíndricas, (r, θ, z) la longitud del camino es,

$$cT = \int_{z_1}^{z_2} n(r)\sqrt{(r'(z)^2 + (r\theta')^2 + 1)}dz$$

Utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange y la analogía con dimension 1 para encontrar dos integrales primeras que describan el movimiento.

Solución Observamos que z es la variable independiente. Por un lado observamos que la variable θ es cíclica por tanto el correspondiente momento generalizado es constante:

$$\alpha = \frac{\partial L}{\partial \theta'} = \frac{nr^2\theta'}{\sqrt{(r'(z)^2 + (r\theta')^2 + 1)}}$$

Por otro lado las dos ecuaciones de Euler Lagrange son:

- $\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial L}{\partial r'})$
- $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial L}{\partial \theta'})$

Ahora la regla de la cadena nos da:

$$\partial_z L = \frac{\partial L}{\partial r}r' + \frac{\partial L}{\partial \theta}\theta' + (\frac{\partial L}{\partial r'})r'' + \frac{\partial L}{\partial \theta'}\theta''$$

$$\partial_z(r'(\frac{\partial L}{\partial r'}) + \theta'(\frac{\partial L}{\partial \theta'})) = r''(\frac{\partial L}{\partial r'}) + \theta'(\frac{\partial L}{\partial \theta'}) + r'(\partial_z((\frac{\partial L}{\partial r'})) + \theta'((\frac{\partial L}{\partial \theta'}))$$

Asi pues los terminos con segundas derivadas se cancelan, y podemos sacar factor comun los terminos con θ', r' obteniendo

$$\partial_z(L - r'(\frac{\partial L}{\partial r'}) - \theta'(\frac{\partial L}{\partial \theta'})) = r'(\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial L}{\partial r'}) + \theta'(\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial L}{\partial r'}) = 0$$

debido a las ecuaciones de Euler Lagrange.

Asi pues $\boxed{L - r'(\frac{\partial L}{\partial r'}) - \theta'(\frac{\partial L}{\partial \theta'})}$ es una integral primera. En nuestro caso

$$L - r'(\frac{\partial L}{\partial r'}) - \theta'(\frac{\partial L}{\partial \theta'} = n(r)\sqrt{(r'(z)^2 + (r\theta')^2 + 1)} - \frac{n(r)r'^2 - n(r)r\theta'^2}{\sqrt{(r'(z)^2 + (r\theta')^2 + 1)}}$$

que simplifica a

$$\frac{n(r)}{\sqrt{(r'(z)^2 + (r\theta')^2 + 1)}} = \beta$$

16. Encontrar un Lagrangiano para una partícula sobre la que actúa la fuerza electromagnética, la fuerza de Lorentz $F_L = E + v \times B$[2], donde E es el campo eléctrico, B es el campo magnético y v es la velocidad.

    i) El campo magnético obedece la ley de Faraday $\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E$ y la ley de Gauss div$(B) = 0$. Probar que existe una función escalar $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y una función vectorial $\phi(q, t) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ tal que

$$B = \nabla \times \phi, \qquad E = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla A$$

[2] Por simplicidad la carga $q = 1$ y la velocidad de la luz también

ii) Dado un vector v y campo vectorial $G = (G_1, G_2, G_3)$ probar la siguiente identidad integral. Para cada coordenada $i = 1, 2, 3$

$$(v \times \nabla \times G)_i = \partial_i (v \cdot G) - v \cdot \nabla G_i$$

iii) Sea $V(q, \tilde{q}) = A(q) - \phi(q, t) \cdot \dot{q} = A - \phi_1 \dot{q}_1 - \phi_2 \dot{q}_2 - \phi_3 \dot{q}_3$. Probar que las ecuaciónes de Euler Lagrange del correspondiente Hamiltoniano $L = T - V$ son las ecuaciones de Newton respecto a la fuerza de Lorentz. Es decir,

$$F_L = m\ddot{q}$$

Solución

[i] Subsituyendo $B = \nabla \times \phi, \nabla \times (\frac{\partial \phi}{\partial t} + E) = 0$. Asi pues existe A tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + E = -\nabla A \iff E = -\nabla A - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

[ii]Verificar la igualdad calculando. [iii]Por simplicidad trabajamos con la primera coordenada. Recordamos que $L = T - V$ y $(\partial_{q_1} - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}_1})(T) = m\ddot{q}$, tenemos que probar $(\partial_{q_1} - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}_1})(-V) = (F)_1$

$$(\partial_{q_1} - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}_1})(V(q, \dot{q})) = \partial_{q_1}(A - \phi \cdot \dot{q}) - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}_1}(\phi \cdot \dot{q})) = \partial_{q_1}(A - \phi \cdot \dot{q}) - \frac{d}{dt}(\phi_1)$$

Ahora observamos que $\phi_1 = \phi_1(t, q) = \phi_1(t, q_1, q_2, q_3)$ por lo que

$$\frac{d}{dt}(\phi_1) = \frac{d\phi_1(q, t)}{dt} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \dot{q} \cdot \nabla \phi_1$$

Por tanto

$$(-\partial_{q_1} + \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}_1})(V(q, \dot{q})) = -\partial_{q_1} A - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \partial_{q_1}(\phi \cdot \dot{q}) - \dot{q} \cdot \nabla \phi_1$$

Usando el apartado ii) se sigue que $\partial_{q_1}(\phi \cdot \dot{q}) - \dot{q} \cdot \nabla \phi_1 = (\dot{q} \times \nabla \times \phi)_1$ de lo que

$$(-\partial_{q_1} + \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}_1})(V(q, \dot{q}) = -\partial_{q_1} A - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + (\dot{q} \times \nabla \times \phi)_1 = (E + v \times B)_1 = (F_L)_1$$

donde hemos usado el apartado $[i]$