Tarea 10

- Determina el método de cuadratura de 2 pasos en el intervalo (0,1)

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)h, Y\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)h\right)\right) + f\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)h, Y\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)h\right)\right)\right).}$$

Método de cuadratura Gaussiana:

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underbrace{f(s, Y(s))}_{= Y'(s)} ds = \int_0^1 f(t_n + hs, Y(t_n + hs))\, ds \cong$$

$$\cong b_1 f(t_n + c_1 h, Y(t_n + c_1 h)) + b_2 f(t_n + c_2 h, Y(t_n + c_2 h)).$$

Método de cuadratura de 2 pasos en (0,1):

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^1 1\, dx = b_1 + b_2 = 1$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} = b_1 c_1 + b_2 c_2$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} = b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4} = b_1 c_1^3 + b_2 c_2^3$$

Con esto obtengo este sistema:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 = 1/2 \\ b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 = 1/3 \\ b_1 c_1^3 + b_2 c_2^3 = 1/4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2} \;;\; c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

- Determina el polinomio de Legendre de orden 2.

c_1 y c_2 son los ceros del polinomio de Legendre de orden 2

$$\boxed{L_2(x) = \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right)}$$

- Determina un método de colocación para calcular el tablero de Butcher asociado a los nodos anteriores.

$$q_1(x) = \frac{L_2(x)}{\left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right)} = x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$q_2(x) = \frac{L_2(x)}{\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right)} = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$a_{11} = \int_0^{c_1} \frac{q_1(s)}{q_1(c_1)}\,ds = \int_0^{c_1} \frac{s-c_2}{c_1-c_2}\,ds = \frac{1}{c_1-c_2}\cdot\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2 c_1}{c_1-c_2}$$

Sustituyendo por c_1 y c_2 me queda:

$$c_1 - c_2 = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad c_1^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6\sqrt{3}}$$

$$c_2 c_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{a_{11}} = \frac{-3}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{12\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\right) = \frac{-3}{\sqrt{3}}\left(\frac{\cancel{2\sqrt{3}} - 3 - \cancel{2\sqrt{3}}}{12\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{12\cdot 3} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$a_{22} = \int_0^{c_2} \frac{q_2(s)}{q_2(c_2)}\,ds = \int_0^{c_2} \frac{s-c_1}{c_2-c_1}\,ds = \frac{1}{c_2-c_1}\cdot\frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1 c_2}{c_2-c_1}$$

Sustituyo por c_1 y c_2:

$$c_2 - c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad c_2^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1+3}{12} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+3}{6\sqrt{3}}$$

$$\boxed{a_{22}} = \frac{3}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{12\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}\left(\frac{\cancel{2\sqrt{3}}+3-\cancel{2\sqrt{3}}}{12\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{12\cdot 3} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$a_{12} = \int_0^{c_1} \frac{q_2(s)}{q_2(c_2)}\,ds = \int_0^{c_2} \frac{s-c_1}{c_2-c_1}\,dx = \frac{c_1^2}{2(c_2-c_1)} - \frac{c_1^2}{c_2-c_1} = \frac{c_1^2}{2(c_1-c_2)}.$$

Sustituyo:

$$\boxed{a_{12}} = \frac{1}{2(-\sqrt{3}/3)}\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{-6\sqrt{3}+9}{12\cdot 3} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$a_{21} = \int_0^{c_2} \frac{q_1(s)}{q_1(c_1)}\,ds = \int_0^{c_2} \frac{s-c_2}{c_1-c_2}\,ds = \frac{c_2^2}{2(c_1-c_2)} - \frac{c_2^2}{c_1-c_2} = \frac{c_2^2}{2(c_2-c_1)}$$

Sustituyo por c_1 y c_2:

$$\boxed{a_{22}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{9+6\sqrt{3}}{12\cdot 3} = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

Tablero de Butcher :

$$
\begin{array}{c|cc}
1/2 - 1/2\sqrt{3} & 1/4 & 1/4 - \sqrt{3}/6 \\
1/2 + 1/2\sqrt{3} & 1/4 + \sqrt{3}/6 & 1/4 \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

[redacted]

Gauss-Legendre 2-pasos. en $(0,1)$

Hallamos primero un polinomio ortogonal de grado 2.

$p(x) = x^2 + ax + b$ y lo elegimos mónico

$\forall$ sea $l(x)$ un polinomio de grado ≤ 1 arbitrario

$l(x) = \alpha x + \beta$

$$\langle p(x), l(x) \rangle = \int_0^1 p(x)\, l(x) = 0$$

$$\longrightarrow \alpha(6b + 4a + 3) + \beta(12b + 6a + 4) = 0$$

resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 6b + 4a = -3 \\ 12b + 6a = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -1 \\ b = +1/6 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$p(x) = x^2 - x + 1/6$$

hallamos las raíces de $p(x)$

$$c_{1,2} = \frac{1}{6}(3 \pm \sqrt{3})$$

y calculamos los pesos por el sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$$\downarrow$$

$$b_1 = b_2 = 1/2$$

así construimos el método de cuadratura de 2 pasos en $(0,1)$

$$\int_0^1 f(s)\, ds \approx \frac{1}{2}\left(f\left(\tfrac{1}{6}(3+\sqrt{3})\right) + f\left(\tfrac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right) \right)$$

Podemos calcular el tablero de Butcher del método RK asociado con los mismos pesos $b_1 b_2$ y nodos c_1, c_2

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} \frac{q_j(s)}{q_j(c_j)} \quad \text{con } q_j(s) = \frac{q(s)}{s - c_j} \quad \text{y } q(s) = (s - c_1)(s - c_2)$$

(con muchas cuentas) obtenemos

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}) & 1/4 & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{6}(3-\sqrt{3}) & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

(satisface cond. suma)

Tarea 1o.

Pregunta. .

Sea $\{u_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales positivos que verifican;

$$u_{n+1} \leq e^{a_n} y_n + b_n \ , \quad n \geq 0$$

con $a_n, b_n \geq 0$. Entonces, probar que para $n \geq 1$;

$$u_n \leq \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k\right)$$

Determinar las condiciones para las series de a_n y b_n con la que obtenemos unas cotas uniformes para todo u_n.

Lo probaremos por el metodo de inducción;

- Paso 1, $k=1$;

$$u_1 \leq e^{a_0} u_0 + b_0 \leq e^{a_0}(u_0 + b_0) \text{ pues } a_0 \geq \log(1) = 0 \ ✓.$$

- Paso Inductivo, supongamos cierto para $k=n$, demostrémoslo para $k=n+1$;

$$u_{n+1} \leq e^{a_n} u_n + b_n \overset{H.I}{\leq} e^{a_n}\left(e^{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k\right)\right) + b_n$$

H.I

- $u_n \leq e^{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k\right)$

Luego;

$$u_{n+1} \leq e^{a_n}\left[e^{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k\right)\right] + e^{a_n} b_n$$

Esto ocurre porque $b_n \leq e^{a_n} b_n \Leftrightarrow 1 \leq e^{a_n} \Leftrightarrow a_n \geq \log(1) = 0$

Se cumple porque $a_n, b_n \geq 0 \ \forall n$.

Es decir,

$$u_{n+1} \leq e^{a_n}\left[e^{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k\right) + b_n\right]$$

Repitiendo el mismo procedimiento n veces con la constante $e^{a_{n-k}}$ en cada k-paso, se llega a;

$$u_{n+1} \leq e^{\sum_{k=0}^{n} a_k}\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k\right), \text{ pues } a_k \geq 0 \ \forall k.$$

· COTAS UNIFORMES;

Dado que hemos comprobado que,

$$u_n \leq e^{\sum_{k=0}^{n-1} a_k}\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k\right)$$

Basta con fijarse en, bajo qué condiciones, dicha cota se fija para las series a_n y b_n.

Es directo conjeturar que si ambas series convergen a unos valores C_a y C_b respectivamente, se obtiene que,

$$u_n \leq e^{C_a}(u_0 + C_b)$$

CASO TRIVIAL: $C_a = C_b = 0 \rightarrow u_n \leq u_0$: el propio valor inicial.

Si no convergiesen, no se podría afirmar una cota uniforme, pues para cada paso n la cota aumentaría.

Es decir, las series han de converger.

TAREA 10:

Sea una EDO cuyas soluciones satisfacen la ley de conservación cuadrática: $Y(t)^T S Y(t) = Y_0^T S Y_0 \quad \forall Y_0 \in \mathbb{R}^d, \ t \geq t_0$, donde S es simétrica y no nula. Entonces, dado un método R-K tal que $M \equiv 0$, probar que se verifica $y_{n+1}^T S y_{n+1} = y_n^T S y_n$. Utilizar que $f(t,y)^T S y = 0$. ¿Por qué es cierto esta última expresión?

El método R-K dado presenta: supongamos que el nº etapas es s

- Tablero de Butcher: $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^t \end{array}$

- $M :=$ matriz cuadrada con coeficientes $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$

  Como $M \equiv 0$, entonces cada $m_{ij} = 0 \quad \forall i,j = 1,..,s$

- $$\left.\begin{aligned} \xi_i &= y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \underbrace{f(t_n + c_j h, \xi_j)}_{k_j} = y_n + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{j=1}^{s} b_j k_j \end{aligned}\right\}$$

Calculamos $y_{n+1}^T S y_{n+1}$:

$$y_{n+1}^T S y_{n+1} = \left(y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i\right)^T S \left(y_n + h \sum_{j=1}^{s} b_j k_j\right) =$$

$$= y_n^T S y_n + h \, y_n^T S \sum_{j=1}^{s} b_j k_j + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i^T S y_n + h^2 \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_i b_j k_i^T S k_j =$$

$$= y_n^T S y_n + h \left(\sum_{i=1}^{s} b_i k_i^T S y_n + \sum_{j=1}^{s} y_n^T S b_j k_j \right) +$$

$$+ h^2 \left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_i b_j k_i^T S k_j \right) \quad (*)$$

La expresión $f(t,y)^T S y = 0$ sale de derivar la ley de conservación cuadrática con respecto de t y usar que S es simétrica:

$$\frac{d}{dt}\left(Y(t)^T S\, Y(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(Y_0^t S\, Y_0\right);$$

$$Y'(t)^T S\, Y(t) + Y(t)^T S\, Y'(t) = 0;$$

Como S es simétrica,
$Y'(t)^T S\, Y(t) = Y(t)^T S\, Y'(t)$

$$2Y'(t)^T S\, Y(t) = 0;$$

$$Y'(t)^T S\, Y(t) = 0 \underset{Y'(t) = f(t,Y)}{\Longrightarrow} f(t,Y)^T S\, Y = 0 \text{ o bien } Y^T S f(t,Y) = 0$$

Dado que partimos de un dato inicial Y_0 arbitrario, la igualdad anterior vale para cualquier vector arbitrario de $\mathbb{R}^d$.
En nuestro caso, lo usamos para ξ_i, $k_i = f(t_n + c_i h, \xi_i)$ y tenemos que: $k_i^T S\, \xi_i = \xi_i^T S\, k_i = 0$

Vamos a simplificar un poco la expresión (*):
Podemos escribir $y_n = \xi_i - h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j$

· Multiplicando por $k_i^T S$ por la izquierda, tenemos que:

$$k_i^T S\, y_n = \underbrace{k_i^T S\, \xi_i}_{=0} - h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_i^T S k_j = -h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_i^T S k_j$$

· Tomando el traspuesto y multiplicando por $S k_j$ por la derecha, se tiene que:

$$y_n^T S k_j = \underbrace{\xi_i^T S k_j}_{=0} - h \sum_{i=1}^{s} a_{ji} k_i^T S k_j = -h \sum_{i=1}^{s} a_{ji} k_i^T S k_j$$

Juntando todo obtenemos una nueva expresión de (*):

$$y_{n+1}^T S y_{n+1} = y_n^T S y_n - h^2 \left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_i a_{ij} k_i^T S k_j + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_j a_{ji} k_i^T S k_j \right)$$

$$+ h^2 \left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_i b_j k_i^T S k_j \right) =$$

$$= y_n^T S y_n - h^2 \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \underbrace{(b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j)}_{=0 \ \forall i,j:1,\dots,s \text{ ya que } M \equiv 0} k_i^T S k_j =$$

$$= y_n^T S y_n \;//$$

Esto es justo lo que nos pide probar.