HOJA DE EJERCICIOS 3: Combinatoria EDyL 2013-2014

[Fecha de publicación: 2013/10/17]
[Fecha de entrega: 2013/11/05, 09:00]
[Resolución en clase: 2013/11/05]

EJERCICIO 1: Suponiendo que el alfabeto tiene 26 letras, cuántas palabras de 6 letras minúsculas contienen:

a) Exactamente dos vocales

Solución: $5^2 * 21^4 * C_{6,2}$

b) Al menos dos vocales

Solución: $26^6 - 5 * 21^5 * C_{6,1} - 21^6$

EJERCICIO 2: ¿De cuántas formas se pueden elegir ocho monedas de una hucha que contiene 100 monedas de un euro y 80 monedas de dos euros?

Solución: 9 (solo hay que decidir cuántas monedas de dos euros hay 0-8)

EJERCICIO 3: ¿De cuántas formas se puede ir en el espacio xyz desde el origen (0,0,0) hasta el punto (4,3,5) si los pasos son de una unidad, y siempre en el sentido positivo (creciente) de los ejes xyz (es decir, no se dan "pasos atrás")?

Solución: $P_{12}^{4,3,5}$

EJERCICIO 4: Hay seis corredores en una carrera.

a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir las medallas de oro, plata y bronce si no puede haber empates?

Solución: 6 * 5 * 4

b) ¿De cuántas maneras se pueden repartir medallas de oro, plata y bronce si puede haber empates? El corredor o corredores que llegan en primer lugar ganan una medalla de oro, aquellos corredores que terminan detrás de exactamente un corredor, una de plata, y aquellos que llegan detrás de exactamente dos corredores, una de bronce. Por ejemplo, podrían todos ganar una medalla de oro (los seis llegan a la vez), o podría ganar uno el oro, cuatro la plata y el otro nada, etc.

Solución:
Al menos tres oros: $2^6 – C_{6,2} – C_{6,1} – C_{6,0}$
Dos oros y al menos una bronce: $C_{6,2} * (2^4 – C_{4,0})$
Un oro y al menos dos platas: $C_{6,1} * (2^5 – C_{5,1} – C_{5,0})$
Un oro, una plata y al menos un bronce: $C_{6,1} * C_{5,1} * (2^4 – C_{4,0})$

EJERCICIO 5: ¿De cuántas formas posibles pueden ponerse en fila un grupo de 10 mujeres y 6 hombres de manera que no haya dos hombres en posiciones consecutivas?

Solución: 10 mujeres definen 11 huecos para poner los hombres, hay que escoger 6 huecos y luego permutar los hombres y las mujeres en todas las formas posibles: $C_{11,6} * 6! * 10!$

EJERCICIO 6: ¿Cuántas cadenas de bits contienen exactamente 10 unos y 8 ceros, si cada cero va siempre seguido de al menos un uno?

Solución: ocho grupos de 01 y dos unos, es decir $C_{10,2}$

EJERCICIO 7: De entre los números enteros no negativos menores de 1.000.000

a) ¿Cuántos hay tales que sus cifras sumen 9?

Solución: es equivalente a $x1+x2+x3+x4+x5+x6=9$, es decir $C_{14,5}$

b) ¿Cuántos tienen entre sus cifras exactamente dos doses y un tres?

Solución: $C_{6,2} * C_{4,1} * 8^3$

c) ¿Cuántos son pares o múltiplos de 5?

Solución: $5 * 10^5 + 10^5$ (los múltiplos de 10 solo se tienen que contar una vez)

EJERCICIO 8: En una modalidad del juego del póker se juega con cartas con los símbolos consecutivos 8, 9, 10, J, Q, K, A, y pertenecientes a cuatro palos distintos (es decir 28 cartas distintas). Un jugador recibe 5 cartas, a lo que llamaremos “jugada”. El orden de las cartas en la “jugada” es indiferente.

a) ¿Cuántas “jugadas” distintas hay?

Solución: $C_{28,5} = 98.280$

b) ¿Cuántas de ellas son “escalera”, es decir, entre las cinco cartas hay cinco símbolos consecutivos, o bien los símbolos A, 8, 9, 10, J?

Solución: Hay 4 configuraciones de escalera (empezando por A, por 8, por 9 y por 10), y para cada una de ellas cada carta puede ser de 4 palos: $4*4^5 = 4096$

c) ¿Cuántas de ellas son “color”: cinco cartas del mismo palo, que no formen escalera?

Solución: 4 palos, 7 cartas a elegir 5, menos cuatro escaleras de cada palo, $4 * C_{7,5} – 4 * 4 = 68$

d) ¿Cuántas de ellas son “full”: tres de las cartas con un mismo símbolo, y las otras dos también con un mismo símbolo, pero distinto del anterior?

Solución: Escogemos los dos símbolos entre los siete (importa el orden), y luego hay que escoger tres palos (entre cuatro) y dos palos (entre cuatro), $7 * 6 * C_{4,3} * C_{4,2} = 1008$

EJERCICIO 9:

a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir 12 libros iguales entre cinco alumnos, de manera que a ninguno le correspondan más de 7 libros?

Solución:

Sin restricción: $C_{16,4}$

Un alumno tiene 8 libros o más: $5*C_{8,4}$

[Seleccionar alumno que tiene 8 o más libros (5)

AND

Resolver la ecuación con soluciones enteras no negativas

$(x_1 + 8) + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$]

La solución es la diferencia de los anteriores: 1820 – 350 = 1470

b) ¿De cuántas formas se pueden colocar 10 monedas iguales en cinco recipientes distintos? ¿Y si las monedas son distintas?

Solución:

(b1) $C_{14,4} = 14! / 10!\ 4!$

(b2) 5^{10}

EJERCICIO 10:

a) Si hay 36 maneras diferentes de escoger dos personas de un colectivo, ¿cuántas personas forman el colectivo?

Solución: $C_{N,2}$=36; N*(N-1) /2 = 36; N=9.

b) Supongamos que cada persona tiene tres iniciales en un alfabeto de 26 letras. ¿Cuántos habitantes tiene que tener una población como mínimo para que sea seguro que hay al menos dos habitantes con las mismas iniciales?

Solución: $26^3 + 1 = 17577$

EJERCICIO 11. Las matrículas de los coches consisten en tres consonantes y 4 dígitos, en ese orden. ¿Cuántas matrículas distintas se pueden formar si hay 21 consonantes y 10 dígitos?

Solución: $21^3 * 10^4$

¿Y si no se permite que haya consonantes repetidas?

Solución: $21*20*19*10^4$

EJERCICIO 12. ¿Cuántas formas distintas hay de rellenar una quiniela con 14 partidos si

a) se marcan 14 simples?

   Solución: 3^{14}

b) se marcan 7 simples, 5 dobles y 2 triples?

   Solución: $P_{14}^{7,5,2}*3^7*3^5$

EJERCICIO 13. ¿Cuántos resultados distintos se pueden dar en un partido de tenis a 3 sets? Para simplificar, puede suponerse que cada set lo gana el primer jugador que alcanza 7 juegos, independientemente de la diferencia entre las puntuaciones de los jugadores.

Solución: $2*7^2 + 4*7^3$