UAM
Universidad Autónoma
de Madrid

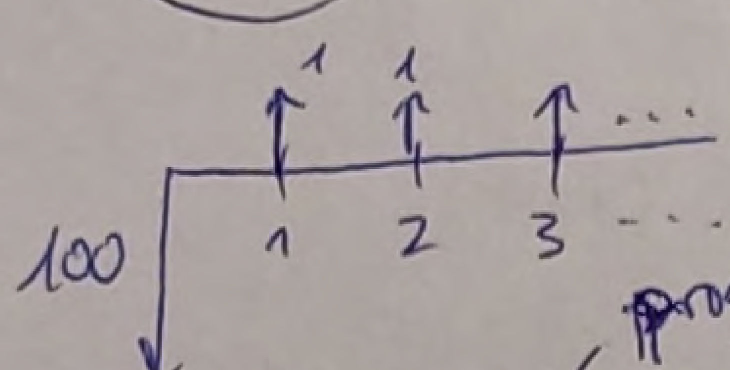
Economía y finanzas matemáticas
Optativa del grado en Matemáticas, UAM, 2020-2021
Examen final de la convocatoria ordinaria, 31 de mayo de 2021

Ejercicio 1. Tenemos

- un instrumento financiero que cuesta hoy 100 euros y que paga 1 euro cada año, desde el año 1 en adelante;
- y otro instrumento financiero que cuesta hoy 100 euros y que paga $a > 0$ euros cada dos años, desde el año 2 en adelante.

Calcula el valor de a que hace que ambos instrumentos tengan la misma TIR.

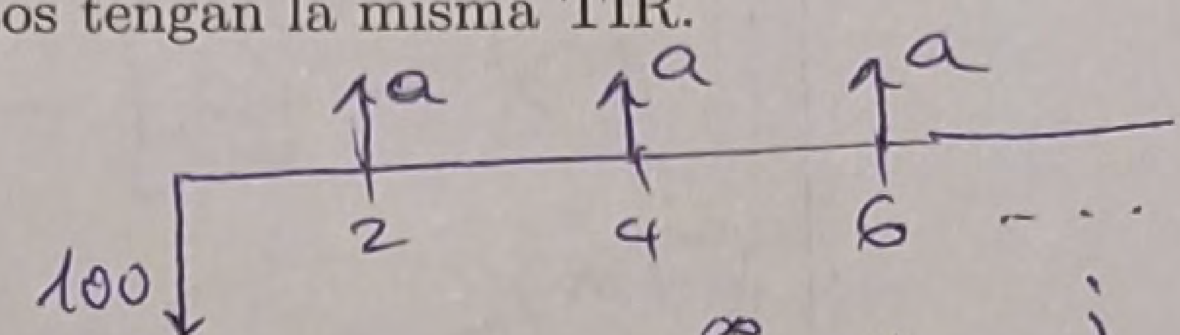
TIR1



prog. geométrica

$$100 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^j} = \frac{1}{x} \Rightarrow TIR_1 = \frac{1}{100}$$

TIR2



$$100 = a \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^{2j}} = a \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+x)^2}\right]^j = \frac{a}{x^2+2x}$$

sustituyes x por 1/100
y sale $a = 2 + \frac{1}{100}$

Ejercicio 2. Tenemos 1 millón de euros. El factor de descuento a 1 año es del 99 %. Planeamos la siguiente estrategia:

- Contratamos hoy un FRA, de coste 0, con nominal 1 millón de euros, para el periodo de 1 a 3 años, recibiendo intereses según un tipo fijo (simple, anual).
- Prestaremos 1 millón de euros dentro de 1 año (al tipo simple anual que entonces esté vigente) para recuperarlos dentro de 3 años.

Tras hacer nuestros cálculos, concluimos que dentro de 3 años tendremos 1 030 000 (un millón treinta mil) euros. ¿Cuál es el factor de descuento a 3 años?

Es (casi) el ejercicio 5 de la hoja 2

El tipo fijo del FRA es $F_s(0,1,3) = \frac{1}{2}\left(\frac{\overset{99\%}{P(0,1)}}{P(0,3)} - 1\right)$

El préstamo + FRA paga

$$1M€ \cdot (1 + 2 \cdot R_s(1,3)) + 1M€ \cdot (F_s(0,1,3) - R_s(1,3)) \cdot 2$$

$$= 1M€ \cdot (1 + 2 F_s(0,1,3))$$

Igualas esto a 1030.000 € → despejas $F_s(0,1,3)$
↓
despejas $P(0,3) = \frac{99}{103}$

Ejercicio 3. En este ejercicio, suponemos válida la fórmula de Black–Scholes

$$c = S\,\Phi(d_+) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_-), \qquad \text{donde} \qquad d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{S}{Ke^{-rT}}\right) \pm \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

para el precio c de la call con un subyacente que cotiza hoy a S, vencimiento T y strike K. El tipo continuo anual se denota por r, y la volatilidad del subyacente, por σ.

¿A partir de qué valor de S (fijados los otros cuatro parámetros) tendremos que $\frac{\partial^3 c}{\partial S^3}$ es positiva? (Esta tercera derivada mide la variación de la "Gamma"de la opción).

Nota: puedes usar las fórmulas de arriba y que $\frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_+)$.

Cálculos previos

$$\frac{\partial}{\partial S} d_+ = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial S}\phi(d_+) = \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_+^2/2}\right] = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_+^2/2}}_{\phi(d_+)}(-d_+)\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \phi(d_+)\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial^3 c}{\partial S^3} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\frac{-\phi(d_+)}{S^2} - \phi(d_+)\,d_+\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{1}{S}\frac{1}{S}\right]$$

$$= \frac{-\phi(d_+)}{\sigma\sqrt{T}\,S^2}\left[1 + \frac{d_+}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$\frac{\partial^3 c}{\partial S^3} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{d_+}{\sigma\sqrt{T}} < 0 \Rightarrow d_+ < -\sigma\sqrt{T}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{S}{Ke^{-rT}}\right) + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} < -\sigma\sqrt{T}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{S}{Ke^{-rT}}\right) < -\frac{3}{2}\sigma^2 T$$

$$\Rightarrow S < Ke^{-rT}e^{-\frac{3}{2}\sigma^2 T}$$

Ejercicio 4. Consideremos un modelo matricial, con estados $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ y activos básicos $\{S_1, \dots, S_M\}$, en el que no hay oportunidades de arbitraje. Es decir, para cada numerario $\mathbf{N}$, existe (al menos) una probabilidad $\mathbb{Q}_{\mathbf{N}} = \{q_1, \dots, q_N\}$ de valoración asociada. Sea $\mathcal{X}$ un activo replicable cualquiera (cuyos flujos en tiempo 1 denotamos por $X(\omega_1), \dots, X(\omega_N)$). Comprueba que si escribimos

$$\text{precio hoy de } \mathcal{X} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j\, X(\omega_j),$$

es decir, que el precio hoy sea promedio de los flujos del instrumento, entonces los números $\pi_1, \dots, \pi_N$ no son *probabilidades* (excepto en un caso muy especial, que tendrás que exhibir).

para cualquier numerario $\mathbf{N}$ y sus probs $q_j^{(N)}$ asociadas $\to$

$$\frac{\text{precio hoy } X}{\mathbf{N}^0} = \sum_{j=1}^{N} q_j^{(N)} \frac{X(\omega_j)}{\mathbf{N}(\omega_j)} \Rightarrow \text{precio hoy } X = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{q_j N^0}{\mathbf{N}(\omega_j)}}_{\pi_j} X(\omega_j)$$

Los $\pi_j > 0$, OK

Suma 1 exige $\displaystyle \frac{1}{N^0} = \sum_{j=1}^{N} q_j^{(N)} \frac{1}{N(\omega_j)}$ para cualquier numerario $\mathbf{N}$ y probs asociadas $q_j^{(N)}$

Esto exige que instrumento que paga $(1 \dots 1)$ sea replicable y tenga precio hoy $\underline{1}$.

Ejercicio 5. Consideramos un modelo de mercado financiero con dos instantes de tiempo, $t = 0$ y $t = 1$; dos escenarios en $t = 1$: up y down; y dos instrumentos de mercado: S_1 y S_2.

El activo S_1
- cotiza hoy a 1;
- y paga 3/2 en el escenario up y 0 en el down.

El activo S_2
- cotiza hoy a -2;
- y paga 0 en el escenario up y -4 en el down.

Comprueba que no hay oportunidades de arbitraje en el modelo y valora el instrumento $\mathcal{X}$ que paga 7 en el escenario up y 2/3 en el down.

No podemos tomar S_1 o S_2 como numerarios.

Pero, por ejemplo, $S_1 - S_2$ ok $\longrightarrow 3 \begin{cases} 3/2 \\ 4 \end{cases}$

(hay muchas otras opciones)

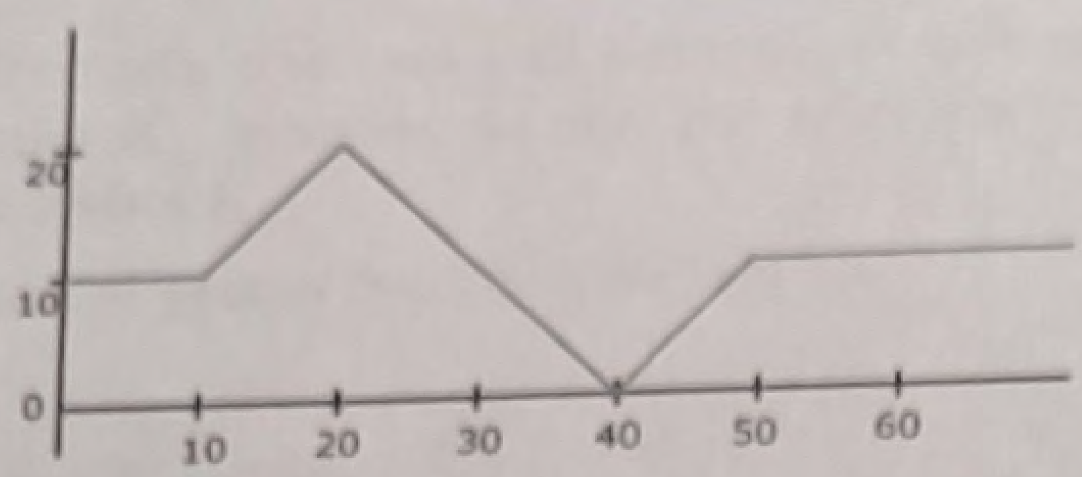
Con este numerario salen $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$ $p = 1/3$, $q = 2/3$

y al valor X da 5

(Alternativa: mercado es completo. Se puede comprobar que no hay OA a mano)

Ejercicio 6. En el mercado se negocian los siguientes instrumentos relacionados con la acción de TFN: la propia acción, además de calls, puts y forwards (con subyacente la acción de TFN y vencimiento T) con strikes 10, 20, 30, 40, 50 y 60. Se negocia también el bono cupón cero de nominal 1 de vencimiento T.

Diseña una cartera con (algunos de) esos instrumentos que produzca el perfil de pagos que se representa en la figura. *Justifica* tu respuesta.



(En el eje horizontal se representan cotizaciones de la acción de TFN en tiempo T).

10 bonos nominal 1
1 call strike 10 comprada
2 " " 20 vendidas
2 " " 40 compradas
1 " " 50 vendida

→ se comprueba
↳ "gráficamente"
↳ escribiendo lo que pasa en cada tramo.

Ejercicio 7. La acción de TFN cotiza hoy a 4 euros.

- Comprar hoy una call sobre TFN con vencimiento $T = 1$ año y strike $K = 5$ cuesta c euros.
- Comprar hoy una put sobre TFN con vencimiento $T = 1$ año y strike $K = 5$ cuesta p euros.
- El factor de descuento a 1 año es del 99.5 %.
- Finalmente, comprar hoy acciones de TFN conlleva una comisión adicional del 1 % sobre el montante de la operación.

¿Que relación ha de haber entre c y p?

Repetir argumento de paridad call-put

$\left\{ \begin{array}{l} \text{call } K=5 \\ + \\ \underset{\substack{\shortparallel \\ 5}}{K}\, P(0,T) \text{ cash} \end{array} \right.$ paga lo mismo que $\left\{ \begin{array}{l} \text{acción} \\ + \\ \text{put } K=5 \end{array} \right.$

↓ coste

Costes han de ser iguales

$p + S_0(1+1\%)$

$C + K \underset{\substack{\shortparallel \\ 99'5\%}}{P(0,T)}$ =

✓

Ejercicio 8. Datos de mercado: cotización hoy S_0 del subyacente, tipo de interés R (anual, continuo) y volatilidad σ (anual) del subyacente.

Consideramos el modelo binomial (Jarrow-Rudd) de paso $\Delta t = 1/12$ y con parámetros son: $p = 50\,\%$,

$$u = e^{R\Delta t}\,\frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}\,e^{+\sigma\sqrt{\Delta t}},\quad d = e^{R\Delta t}\,\frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}\,e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Nuestra cartera está formada por una call europea (sobre el subyacente) comprada, con vencimiento 6 meses y strike K_1, además de una put europea (sobre el subyacente) vendida, con vencimiento 9 meses y strike K_2.

Escribe una fórmula para el precio hoy de esta cartera.

Está (casi) hecho en clase. Basta copiar fórmulas.

Si M pasos, niveles del subyacente

$$S_j^{(M)} = S_0\, e^{MR\Delta t}\left(\frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{T})}\right)^M e^{(2j-M)\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad j = 0 \dots M$$

① $$\text{call}^{(M,K)} = e^{-MR\Delta t}\sum_{j=0}^{a}\binom{M}{j}\frac{1}{2^j}\left[S_j^{(M)} - K\right]^+$$

② $$\text{put}^{(M,K)} = e^{-MR\Delta t}\sum_{j=0}^{a}\binom{M}{j}\frac{1}{2^j}\left[K - S_j^{(M)}\right]^+$$

$$\text{precio cartera} = \text{call}^{(6,K_1)} - \text{put}^{(9,K_2)}$$

se sustituye en ① $\rightarrow$ $M = 6$, $\Delta t = \frac{1}{12}$, $K = K_1$

se sustituye en ② $\rightarrow$ $M = 9$, $\Delta t = \frac{1}{12}$, $K = K_2$