PROBABILIDAD II

Grado en Matemáticas

Tema 1
Espacios de probabilidad

Javier Cárcamo

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
`javier.carcamo@uam.es`

Tema 1: Espacios de probabilidad

Tipos de fenómenos:

1. **Deterministas**: Se conoce desde el principio el resultado final.
2. **Aleatorios**: Muchas situaciones finales posibles.

La **Teoría de la probabilidad** estudia el comportamiento de los fenómenos o experimentos aleatorios.

Dado ϵ experimento aleatorio:

- Conocemos con antelación el conjunto de todos los posibles resultados finales Ω (**espacio muestral**).
- No es posible determinar que resultado se va a dar previa realización de ϵ.
- La Teoría de la Probabilidad nos permitirá "medir" o "cuantificar" la incertidumbre asociada a los posibles resultados finales de un experimento aleatorio.

Queremos definir la probabilidad como *medida* de la incertidumbre.

Definiciones de la probabilidad en la historia

Clásica: Basada en los juegos de azar. La probabilidad se define como el cociente entre los casos favorables y los posibles.

Inconvenientes: ¿Qué ocurre cuando Ω es infinito o cuando los sucesos elementales no son equiprobables?

Frecuentista o empírica: La probabilidad de un suceso se define como el límite de las frecuencias relativas del suceso.

Inconvenientes: ¿Qué número de pruebas debemos realizar?, ¿qué ocurre con aquellos experimentos que se puedan repetir una sola vez?

Axiomática: Engloba a las anteriores y solventa los problemas mencionados. Es la que estudiaremos y se debe a Kolmogorov.

Espacios de probabilidad

Un **espacio de probabilidad** es un triplete $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, donde

(1) Ω es un conjunto no vacío llamado **espacio muestral**.

(2) $\mathcal{F}$ es una σ-**álgebra** o **tribu** de $\mathcal{P}(\Omega)$ (partes de Ω).

(3) P es una **medida de probabilidad** sobre $\mathcal{F}$, es decir,

$$\begin{aligned} \mathrm{P} : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathrm{P}(A) \end{aligned}$$

verificando los **axiomas de probabilidad de Kolmogorov**:

(A1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

(A2) σ-**aditividad** o **aditividad numerable**: $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos (i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$), entonces:

$$\mathrm{P}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

σ-álgebras

Una colección $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se dice que es una σ-**álgebra** o **tribu** si

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(2) $\mathcal{F}$ es cerrada o estable para la complementación.

$$\text{Si } A \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c \in \mathcal{F}.$$

(3) $\mathcal{F}$ es estable para la unión numerable.

$$\text{Si } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}, \text{ entonces } \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Los elementos de $\mathcal{F}$ se llaman **sucesos (aleatorios)**.

Si $A = \{\omega\} \in \mathcal{F}$ con $\omega \in \Omega$, A se denomina **suceso elemental**.
Si A no es elemental, se dice **suceso compuesto**.

Si $A \in \mathcal{F}$, A^c se llama **suceso contrario a** A.

Ω se denomina **suceso seguro** y $\emptyset$ se **suceso imposible**.

Ejercicio: Dado Ω cualquiera, ¿Podrías dar ejemplos de σ-álgebras sencillas?

Propiedades de las σ-álgebras

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(2) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

(3) Si $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

- Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, decimos que A_n **crece** hasta A, $A_n \uparrow A$, si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ y $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
- Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, decimos que A_n **decrece** hasta A, $A_n \downarrow A$, si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ y $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) $\mathcal{F}$ es estable para límites crecientes y decrecientes:
Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ y $A_n \uparrow A$ o $A_n \downarrow A$, entonces $A \in \mathcal{F}$.

σ-álgebras

Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-álgebras, entonces $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ es σ-álgebra.

Dado $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, se define

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{F}} \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \supset \mathcal{C} \text{ y } \mathcal{F}\ \sigma\text{-álgebra}\}.$$

El conjunto $\mathcal{C}$ se denomina **generador** de la σ-álgebra $\sigma(\mathcal{C})$.

Ejercicio: Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, calcula $\sigma(\{A\})$.

Nota: Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}')$ si y sólo si $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}')$ y $\mathcal{C}' \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Ejemplo: $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ σ-álgebras sobre Ω y
$\mathcal{C} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}_1 \text{ y } B \in \mathcal{F}_2\}$. Se tiene que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$.

σ-álgebra de Borel

Si (Ω, τ) es un espacio topológico, a la σ-álgebra $\sigma(\tau)$ se denomina **σ-álgebra Boreliana o de Borel asociada a** τ.

De interés especial para nosotros serán:

- $\Omega = \mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$, $\tau = \tau_u$ (topología usual).
- $\Omega = \mathbb{R}^k$ o $\overline{\mathbb{R}}^k$, $\tau = \tau_u$ (topología usual).

$\sigma(\tau_u) = \mathcal{B}$ σ-álgebra Boreliana (sin especificar la topología).

Observación: Si τ tiene una base contable β ((Ω, τ) es 2-contable), entonces $\sigma(\tau) = \sigma(\beta)$.

Ejemplo: Cada una de las siguientes colecciones genera la σ-álgebra Boreliana en $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(a) $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(b) $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(c) $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(d) $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(e) $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{Q}\}$.

(f) $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$.

(g) $\{[a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}$.

(h) $\{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}$.

Propiedades de la probabilidad

1. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ disjuntos, entonces $\mathrm{P}\left(\biguplus_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$.
3. Si A, $B \in \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{P}(B - A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
4. A, $B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$. $\mathrm{P}(B - A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$ y $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.
5. $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
6. **Principio de inclusión-exclusión:**

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B \cup C) = {} & \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\ & - (\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C)) \\ & + \mathrm{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathrm{P}\left(\cap_{i=1}^n A_i\right).$$

7. $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$.

1. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ disjuntos, entonces $\mathrm{P}\left(\biguplus_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$.
3. Si A, $B \in \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{P}(B - A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
4. A, $B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$. $\mathrm{P}(B - A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$ y $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.
5. $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.
6. **Principio de inclusión-exclusión:**

$$\mathrm{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathrm{P}\left(\cap_{i=1}^n A_i\right).$$

7. $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$, entonces $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(A_i)$.
8. $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ y $A_n \uparrow A$, entonces $\mathrm{P}(A_n) \uparrow \mathrm{P}(A)$.
9. $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ y $A_n \downarrow A$, entonces $\mathrm{P}(A_n) \downarrow \mathrm{P}(A)$.
10. $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{F}$, $\mathrm{P}(\cup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathrm{P}(A_i)$.

Ejemplo 1: **Modelo clásico o de Laplace**

Dado $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ espacio muestral finito, la aplicación:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{n}, \quad A \subseteq \Omega,$$

es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

En este ejemplo, cada elemento ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ tiene la misma probabilidad ($\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$). Esto se conoce como **equiprobabilidad**.

Ejemplo 2: **Espacios discretos**

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ contable, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mathrm{P}(\{w_i\}) \in [0,1]$ tal que $\sum_i \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = 1$. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es un espacio de probabilidad.

Ejemplos básicos

Ejemplo 3: **Espacios definidos mediante densidades**

$\Omega = I$ (intervalo de $\mathbb{R}$). Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ se llama **función de densidad (de probabilidad)** sobre I si cumple:

(a) f es integrable (Lebesgue).

(b) $\int_I f(t)\, dt = 1$.

Tomando como σ-álgebra $\mathcal{F} = \mathcal{B}(I)$, podemos definir

$$\mathrm{P}(A) = \int_A f(x)\, dx, \quad A \in \mathcal{F}.$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es un espacio de probabilidad.
Ejercicio: ¿Podrías dar algunos ejemplos de densidades de probabilidad?

Probabilidad condicional

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y A, $B \in \mathcal{F}$ con $\mathrm{P}(B) > 0$. Se llama **probabilidad de A condicionada a B** a:

$$\mathrm{P}(A|B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y $B \in \mathcal{F}$ fijo con $\mathrm{P}(B) > 0$. La aplicación:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\cdot|B) : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathrm{P}(A|B) \end{aligned}$$

es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Por tanto, $\mathrm{P}(\cdot|B)$ verifica los axiomas y propiedades de una probabilidad.

La nueva información disponible (se ha dado B) ha modificado la medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Hemos pasado de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}(\cdot))$ a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}(\cdot|B))$. De esta manera incorporamos esta información al modelo de probabilidad.

Fórmula del producto

Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ con $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, se tiene

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\mathrm{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathrm{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad. Una colección de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ se dice que es un **sistema completo de sucesos (S.C.S.)** o una **partición de** Ω si:

(a) $\mathrm{P}(A_i) > 0$, $i \geq 1$.
(b) $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ (unión disjunta).

Fórmula de la probabilidad total

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ un S.C.S. Entonces, para cualquier $B \in \mathcal{F}$,

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i).$$

Fórmula de Bayes

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ un S.C.S y $B \in \mathcal{F}$ con
$\mathrm{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}.$$

$\mathrm{P}(A_n)$ se llaman **probabilidades a priori**
$\mathrm{P}(A_n|B)$ se llaman **probabilidades a posteriri**