CALCULO I. DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA.

SOLUCIÓN DE LA ENTREGA 3.

---

(1) (2 puntos) **Demuestra que la ecuación**

$$x^{180} + \frac{84}{1 + x^2 + \cos^2 x} = 119$$

tiene al menos dos soluciones.

La función

$$f(x) = x^{180} + \frac{84}{1 + x^2 + \cos^2 x} - 119$$

es continua por ser suma de funciones continuas, ya que $1 + x^2 + \cos^2 x$ nunca se anula. Además, $f(0) = -119 < 0$. Si encontramos dos puntos $a < 0 < b$ tales que $f(a) > 0$ y $f(b) > 0$, aplicando el Teorema de Bolzano llegamos a que existen dos puntos $c \in (a, 0)$ y $d \in (0, b)$ tales que $f(c) = f(d) = 0$.

Sea $a = -2$, entonces

$$f(-2) = 2^{180} + \frac{84}{1 + 2^2 + \cos^2 2} - 119 > 2^{180} - 119 > 0.$$

Además, como la función es par, se tiene que $f(2) = f(-2) > 0$. Por lo tanto, sabemos que existen $c \in (-2, 0)$ y $d \in (0, 2)$ tales que $f(c) = f(d) = 0$.

(2) (2 puntos) **Escribir un número dado $a > 0$ como producto de dos factores positivos cuya suma sea mínima.**

Llamemos x e y a esos dos factores, entonces $a = x \cdot y$, es decir, $y = \frac{a}{x}$. Queremos encontrar el punto x que minimiza la función $f(x) = x + \frac{a}{x}$. Derivando tenemos que el punto crítico será el x tal que

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = 0,$$

es decir, $x = \sqrt{a}$ (obviamos el valor negativo de la raíz ya que sabemos que x tiene que ser positivo). Por último, comprobamos que este valor de x es un mínimo de la función f : según el criterio de la segunda derivada, como

$$f''(x) = \frac{2a}{x^3}$$

es positiva en $x = \sqrt{a}$, es un mínimo. Por lo tanto, el producto de factores cuya suma es mínima es

$$a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}.$$

(3) (1 punto) **Dada la función** $f(x) = 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$, **halla** $f^{(117)}(\pi)$.

Al ser una función compuesta por funciones seno y coseno, las derivadas serán cíclicas. Vamos a calcular las primeras derivadas para ver su comportamiento:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5 \cos x - 3 \operatorname{sen} x \\
f''(x) &= -5 \operatorname{sen} x - 3 \cos x \\
f'''(x) &= -5 \cos x + 3 \operatorname{sen} x \\
f^{(iv)}(x) &= 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x.
\end{aligned}$$

La cuarta derivada vuelve a ser la función original, y es claro que la quinta derivada será igual a la primera, etc. Es decir,

$$f^{(k)} = \begin{cases} 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x & \text{si } k \equiv 0 \pmod{4}, \\ 5 \cos x - 3 \operatorname{sen} x & \text{si } k \equiv 1 \pmod{4}, \\ -5 \operatorname{sen} x - 3 \cos x & \text{si } k \equiv 2 \pmod{4}, \\ -5 \cos x + 3 \operatorname{sen} x & \text{si } k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Como $117 \equiv 1 \pmod{4}$,

$$f^{(117)}(x) = 5 \cos x - 3 \operatorname{sen} x$$

y $f^{(117)}(\pi) = 5 \cos \pi - 3 \operatorname{sen} \pi = -5$.