Curso 2020/21

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

PROBLEMAS. Hoja 3

1. Sea un método Runge-Kutta explícito de 2 pasos:

$$k_1 = f(t_n, y_n), \qquad k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1), \qquad y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2).$$

a) Identificar las condiciones que han de verificar los coeficientes para que el orden de consistencia (orden de cuadratura) sea 2.

b) Probar que no pueden ser de orden 3 (**Barrera**).

2. Dado un PVI podemos escribirlo como un un problema autónomo considerando una nueva función vectorial $Z(t) = (t, Y(t))$. Así, se satisface la EDO $Z'(t) = F(Z(t)) = (1, f(t, Y(t))$. Demostrar que para que la solución numérica de un método Runge-Kutta sea la misma para las dos EDO se debe verificar la **condición suma**:

$$\text{(CS)} \qquad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Nota. Verlo considerando f una función escalar.

3. Sea un método Runge-Kutta explícito de 3 pasos.

a) Identificar las condiciones que han de verificar los coeficientes para que el orden de consistencia (orden de cuadratura) sea 2.

b) Bajo la condición (CS) demostrar que las condiciones para que sea de orden 3 son:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \qquad b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}, \qquad b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}, \qquad b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}.$$

c) Probar que no pueden ser de orden 3 (**Barrera**).

4. El método Runge-Kutta implícito de 2 pasos de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

es de orden 3

5. Demostrar que para un método Runge-Kuta de s pasos sea de orden p al menos debe verificar las siguientes condiciones

$$m! \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{s} b_{j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdots a_{j_{m-1} j_m} = 1, \qquad m = 1, \ldots, p.$$

Para demostrarlo utilizar que el PVI $Y' = Y$ en $[0,1]$ con $Y(0) = 1$ su solución es $Y(t) = e^t$.

6. **Primera barrera de Butcher**. Utilizando el ejercicio anterior demostrar que un método Runge-Kutta explícito de s pasos no puede tener orden mayor que s.