Ejercicios 23 a 26

23. A. A partir de las normas

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$$

en $\mathbb{R}^n$, definimos las normas de matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ inducidas

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\left\{\, \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 \;:\; \|x\|_1 = 1 \,\right\},$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\left\{\, \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty \;:\; \|x\|_\infty = 1 \,\right\}.$$

Demostrar las identidades

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

y

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

B. Demostrar

$$\|\mathbf{A}\|_2 \le \sqrt{\|\mathbf{A}\|_1 \, \|\mathbf{A}\|_\infty}\,.$$

24. A. Para cada una de las normas de matrices $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_F$, comprobar las desigualdades

$$\|\mathbf{A}\|_i \le \alpha\, \|\mathbf{A}\|_j\,,$$

siendo α el valor que se encuentra en la fila i columna j de la tabla

	1	2	∞	F
1		$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
2	$\sqrt{n}$		$\sqrt{n}$	1
∞	n	$\sqrt{n}$		$\sqrt{n}$
F	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	

B. Comprobar que si los valores singulares de $\mathbf{A}$ son $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0$, donde $r \le n$, entonces

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}\,.$$

En consecuencia,

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathrm{F}} \leq r \, \|\mathbf{A}\|_{2} \, .$$

25. A. Dada una matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se considera la función

$$f \,:\, \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$$

definida

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} \, .$$

Calcular $(df)_{\mathbf{A}}$ para cada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

B. Considérese la función

$$f \,:\, \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$$

definida mediante

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \, .$$

Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, calcular $(df)_{\mathbf{A}}$.

C. Utilizar la regla de la cadena para calcular $(df)_{\mathbf{A}}$ siendo

$$f(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_{\mathrm{F}}^{2} = \operatorname{traza} \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \, .$$

D. Dadas matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y una función diferenciable $f(\mathbf{X})$ de las matrices $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, utilizar la regla de la cadena para calcular $(dg)_{\mathbf{A}}\mathbf{X}$, para cada $\mathbf{A}$ y cada $\mathbf{X}$, siendo

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{P}\, f(\mathbf{X}\mathbf{Q}) \, .$$

¿Cómo es el tamaño de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ cuando f y g toman valores en $\mathbb{R}^{a\times b}$?

26. A. Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, demostrar que $\|\mathbf{A}\| < 1$ implica:

1. $$\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \text{es invertible.}$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^{n} = \mathbf{0} \, .$$

3. $$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^{n} \, . \tag{4}$$

4. $$\left\|(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{A}\|^{n} = \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}\|} \, .$$

B. Considérese la función

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{-1},$$

definida para las matrices invertibles $\mathbf{X}$. Utilizar la identidad

$$\mathbf{I} - \mathbf{X}^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{X})(\mathbf{I} - \mathbf{X}),$$

para demostrar

$$f(\mathbf{I} - \mathbf{X}) - f(\mathbf{I}) - \mathbf{X} = \mathbf{X}^2 f(\mathbf{I} - \mathbf{X}), \qquad \text{cuando} \quad \|\mathbf{X}\| < 1.$$

Como consecuencia, obtener que la diferencial de f en $\mathbf{I}$ es

$$(df)_{\mathbf{I}} = -\mathbf{I}.$$

C. Sea $\mathbf{A}$ una matriz invertible. Utilizar la identidad

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} f(\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1})$$

y la regla de la cadena para demostrar

$$(df)_{\mathbf{A}}\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}.$$