CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2016-2017. HOJA 3.

1) En cada uno de los siguientes casos, se da una relación entre elementos del conjunto que se especifica debajo. Decidir cuáles son **relaciones de orden**; en caso de serlo, estudiar si es o no un **orden total**; de lo contrario, explicar qué propiedad le falla para ser un orden.

$$\boxed{\begin{matrix} x \geq y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} x < y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} |x| \leq |y| \\ x, y \in \mathbb{R} \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} A \subset B \\ A, B \in \mathcal{P}(X) \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a \leq c \ \wedge \ b \leq d \\ (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2 \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2} \\ (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2 \end{matrix}}$$

Ojo: por convenio, '$\subset$' incluye el caso '$=$'; si se escribe '$\subseteq$', es para ayudar a recordarlo.

2) Sea X un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define en X la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Demostrar que la relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden si y sólo si f es inyectiva.

3) Para la relación de orden dada en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ por $\boxed{n|m}$, dar respuesta a las siguientes preguntas:
 a) ¿Tiene $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ un máximo y/o un mínimo para esta relación?
 b) ¿Qué subconjuntos de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ tienen un máximo y cuáles un mínimo?
 c) Dado un intervalo $A = \{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : n \leq k \leq m\}$, ¿qué debe cumplir un $k \in A$ para ser un elemento maximal de A? ¿Y para ser minimal?
 d) ¿Cuáles son los minimales de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$?
 e) Calcular los elementos minimales de $I = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 1000\}$.

4) Decimos que una relación de orden $\mathcal{R}$ en un conjunto X es un **buen orden**, si cada subconjunto no vacío $A \subset X$ tiene un mínimo, como sucede por ejemplo con el orden '$\leq$' en $\mathbb{N}$.
 Probar que también están **bien ordenados** por '$\leq$' los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
 a) La unión $X \cup Y$ de dos subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, si cada uno de ellos está bien ordenado.
 b) El conjunto $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$, si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, son dos sucesiones crecientes.

5) Probar la afirmación siguiente (o dar un contraejemplo que la refute):
Si un conjunto ordenado A tiene un solo elemento minimal a, entonces a es el mínimo de A.

6) Dar una biyección que transforme una en otra las relaciones de orden dadas sobre ellos:
 a) $\mathbb{Z}$, con el orden $\leq$ habitual en el conjunto de los racionales de la forma $1 \pm n/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, con el orden $\leq$ habitual.
 b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, con el orden dado por: $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si y sólo si $|a - c| \leq d - b$ en el conjunto de los discos abiertos del plano, con su centro en el eje X, ordenados por inclusión.

7) ¿Existe una biyección entre $\mathbb{Z}$ con el orden $\leq$ habitual y $\mathbb{Q}$ con el orden $\leq$ habitual que transforme una en otra las relaciones de orden?

8) Dado un alfabeto que, como el nuestro, tiene un orden establecido, y llamando "palabras" a todas las posibles secuencias finitas de sus signos, se llama *orden lexicográfico* al usado en los diccionarios, listas de nombres, etc., para ordenar el conjunto de palabras.
 Usando el signo '$\leq$' para el orden de las "letras", dar una definición de cuándo la palabra '$a_1 a_2 \ldots a_n$' precede a la '$b_1 b_2 \ldots b_m$' : decir qué deben cumplir sus letras para ello.
 Con esa definición, probar que este orden es total; en consecuencia, cada conjunto finito de palabras tendrá un mínimo. Pero *¿será eso cierto para cualquier conjunto infinito de palabras?*
(*) Probar que es cierto (y por lo tanto se trata de un *buen orden*), o dar un contraejemplo.

9) En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos la siguiente relación: $x\mathcal{R}y$ si x e y tienen el mismo signo y $|x| \leq |y|$.
 a) Demostrar que es una relación de orden, pero que no es de orden total.
 b) Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo $[-3, 2)$.

10) Considera la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow f(n, m) = 2^n 3^m \end{aligned}$$

y las siguientes relaciones en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n, m)\mathcal{R}_1(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \leq f(n', m')$$
$$(n, m)\mathcal{R}_2(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \mid f(n', m')$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son ambas relaciones de orden. ¿Son relaciones de orden total?

b) Hallar los elementos distinguidos (elementos maximales, elementos minimales, supremos, ínfimos, máximos y mínimos) del conjunto $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq n + m \leq 4\}$ para cada una de la relaciones de orden $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.

HOJA 3

6.

a) $(\mathbb{Z}, \leq)$; $\left(1 \pm \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N},\ \leq\right)$

$$1 + \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$$

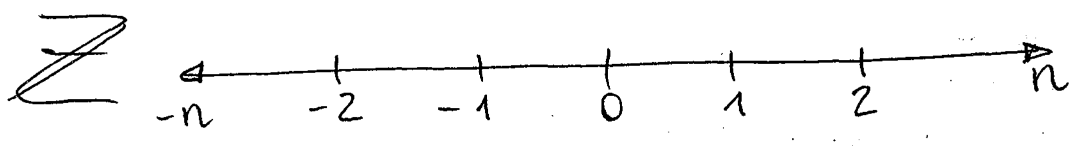
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

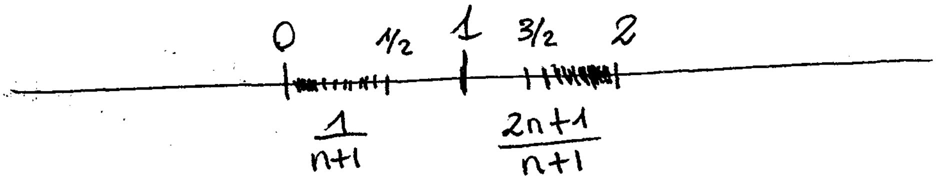
$$n=1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$n=1 \Rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$





$$\mathbb{Z} \longleftrightarrow 1 \pm \frac{n}{n+1}$$

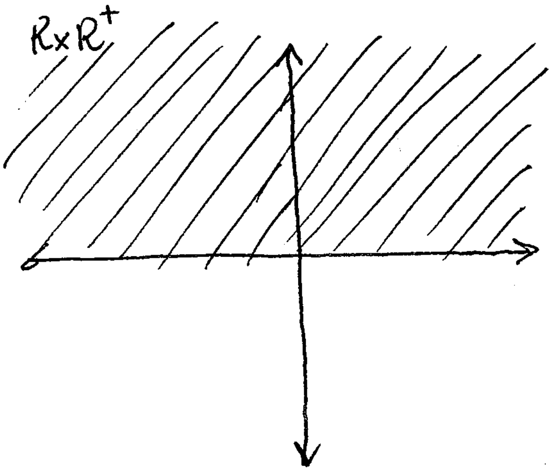
$$0 \longleftrightarrow 1$$

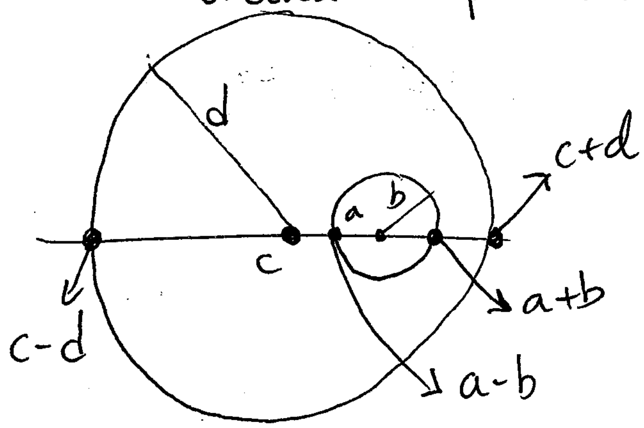
$$n \longleftrightarrow 1 + \frac{n}{n+1}$$

$$-n \longleftrightarrow 1 - \frac{n}{n+1}$$

b) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \quad (a,b)\,R\,(c,d) \iff |a-c| \leq d-b$

Discos abiertos del plano con su centro en el eje X ordenados por inclusión





$$|a-c| \leq d-b \Rightarrow \begin{cases} a-c \leq d-b \\ -a+c \leq d-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \leq c+d \\ c-d \leq a-b \end{cases}$$

$a \to$ centro disco
$b \to$ radio disco
$c \to$ otro centro de otro disco
$d \to$ otro radio de otro disco

$(a,b)\,R\,(c,d)$

$(a,b)\,R\,(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \longleftrightarrow D_b(a)$ — disco, $a \to$ centro D, $b \to$ radio D

$|a-c| \leq d-b \xleftrightarrow[\text{biyección}]{}$ estar incluido

HOJA 3

PROPIEDAD REFLEXIVA: $x \leq y$

PROPIEDAD ANTISIMÉTRICA: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow y = x$

PROPIEDAD TRANSITIVA: $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

$\boxed{1}$

b) $x < y$

$x, y \in \mathbb{R}$ $\quad 1 = 1$ y por tanto $1 < 1$.

a) $x \geq y$ si cumple las tres

$x, y \in \mathbb{R}$

c) $|x| \leq |y| \Leftrightarrow xRy$

$x, y \in \mathbb{R}$

$1R-1 \wedge -1R1$ pero $1 \neq -1$ contradicción

$|1| = |-1| \wedge |-1| = |1| \Rightarrow 1 \neq -1$.

d) $A \subset B$; $A, B \in P(x)$

- reflexiva:

  $\forall A \in P(x)$, $A \subset A$ ✓

- antisimétrica

  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ✓

- transitiva

  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

  Sea $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C \Rightarrow A \subseteq C$ ✓

e) $a \leq c \wedge b \leq d$; $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}^2$

- reflexiva:

  $(a,b) \mathcal{R} (a,b) \Leftrightarrow a \leq a \wedge b \leq b$ ✓

- antisimétrica:

  $(a,b) \mathcal{R} (c,d) \wedge (c,d) \mathcal{R} (a,b) \Rightarrow$

  $\Rightarrow a \leq c \wedge b \leq d \wedge c \leq a \wedge d \leq b \Rightarrow a = c \wedge b = d$ ✓

- transitiva:

  $(a,b) \mathcal{R} (c,d) \wedge (c,d) \mathcal{R} (e,f) \Rightarrow$

  $\Rightarrow a \leq c \wedge b \leq d \wedge c \leq e \wedge d \leq f \Rightarrow$

  $\Rightarrow a \leq e \wedge b \leq f \Rightarrow (a,b) \mathcal{R} (e,f)$ ✓

Orden total: Si $\forall x, y \in X$

$(x \mathcal{R} y) \vee (y \mathcal{R} x)$

Ej:

$(1,2) \mathcal{R} (2,1) \Leftrightarrow (1 \leq 2) \wedge (2 \leq 1)$ No

$(2,1) \mathcal{R} (1,2) \Leftrightarrow (2 \leq 1) \wedge (1 \leq 2)$ No

f) $a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}$; $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z}^2$

- reflexiva:

$a+b\sqrt{2} \leq a+b\sqrt{2}$

1. $xRx \Rightarrow x \leq x$
2. $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

- antisimétrica

$a+b\sqrt{2} \leq c+d\sqrt{2} \wedge c+d\sqrt{2} \leq a+b\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2} \Rightarrow a=c \wedge b=d$

- transitiva

$(a+b\sqrt{2} \leq c+d\sqrt{2}) \wedge (c+d\sqrt{2} \leq e+f\sqrt{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b\sqrt{2} \leq e+f\sqrt{2} \Rightarrow a+b\sqrt{2} \, R \, e+f\sqrt{2}$

$\boxed{7.}$ $\exists f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ Biyección que preserve las relaciones de orden habituales entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

f preserva el orden $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ tal que $x_1 \leq x_2$.

Tenemos que $f(x_1) \leq f(x_2)$

Supongamos que preserva el orden:

$\Rightarrow f(0) \leq f(1)$

Sea $y = \dfrac{f(0)+f(1)}{2} \in \mathbb{Q}$ y cumple $f(0)<y<f(1)$

Sea x tal que $f(x)=y \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

CONTRADICCIÓN

$x \notin \mathbb{Z}$

porque $0<x<1$

$\boxed{4.}$ R en X es un buen orden si $\forall A \subset X$, A tiene mínimo.

$X \cup Y$ está bien ordenado si X e Y están bien ordenados.

$X = \{a_n + b_n : n, m \in \mathbb{N}\}$ si $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ son crecientes

* Demostrar: $\forall A \subseteq X \cup Y$

Sean $A_1 = A \cap X$ y $A_2 = A \cap Y$

$\Rightarrow A_1$ tiene mínimo porque $A_1 \subseteq X$ y X está bien ordenado.

$\Rightarrow A_2$ tiene mínimo porque $A_2 \subseteq Y$ y Y está bien ordenado.

Sean m_1 y m_2 esos mínimos

$m = \min(m_1, m_2)$ es el mínimo de A

Sea $x \in A$

CASO 1. $(m_1 R x)$

$x \in A_1$, como $m R m_1$ tenemes por la propiedad transitiva $\Rightarrow m R x$

CASO 2.

$x \in A \setminus A_1 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow m_2 R x \Rightarrow$ como $m R m_2 \Rightarrow m R x$

$m R m_2 \wedge m_2 R x \Rightarrow m R x$

$\boxed{2.}$ $X \neq \emptyset$ $\quad f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$xRy \iff f(x) \leq f(y)$$

R es de orden $\iff$ f es inyectiva

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos R de orden y f no inyectiva

$\Rightarrow \exists\, x, y \in X$ tal que $x \neq y \wedge f(x) = f(y)$

$\Rightarrow (xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$ contradicción

$\boxed{\Longleftarrow}$

1) $xRx \iff f(x) \leq f(x)$ ✓

2) $(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ ✓

3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \leq f(z) \Rightarrow xRz$ ✓

~~en clase~~

mayor estricto

conjunto $\mathbb{Z}-\{0\}$

$\boxed{5.}$ Relación de orden $(x \leq y) \wedge (x \cdot y > 0)$

$$\cdots \to -4 \to -3 \to -2 \to -1 \qquad 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \cdots$$

elemento minimal (único) porque ningún otro número se relaciona con él.
En cambio, no es el mínimo porque no está relacionado con todos (en este caso, con todos los negativos).

Análogamente con el -1 para afirmar que si solo hay un elemento maximal, este no tiene porque ser el máximo.

$\boxed{3.}$ a) ¿$\exists$ máximo y/o mínimo?

mínimo $= 1$ ya que $1|n$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

máximo $= \nexists$

demostración:

supongamos $\exists m$ tal que $n|m$ $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$

pero $2m \in \mathbb{N}-\{0\}$ y $2m \nmid m$.

b) ¿Qué subconjuntos tienen máximos y cuales mínimo?

c)

d) ¿Cuáles son los minimales $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$?

Son los primos entre 1 y 1000.

e) Calcular los elementos minimales de $I=\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 1000$

Son los primos entre 1 y 1000.