ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 8: Geometría afín Euclídea

1. En $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ fijamos un sistema de referencia ortonormal $R = \{O; e_1, \ldots, e_n\}$, y sea $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ un hiperplano $H \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$.

i. Demuestra que el vector $(a_1, \ldots, a_n)$ es ortogonal a cualquier vector en la dirección de H.

ii. Sea $P = (b_1, \ldots .b_n)$ un punto y sea H como en el apartado anterior. Demuestra que

$$d(P, H) = \frac{|a_1b_1 + \ldots + a_nb_b + b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

2. En $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considera el producto escalar cuya matriz en la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcula la distancia del punto $Q = (-1, 1, -2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas cartesianas $A = (1, -1, 1)$, $B = (-2, 1, 3)$ y $C = (4, -5, -2)$ en la referencia $\{O = (0, 0, 0); B\}$.

3. Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cruzan en $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sobre el que consideramos el producto escalar usual.

a) Demuestra que existe una única recta L que es ortogonal a L_1 y a L_2.

b) Sean $P_1 = L \cap L_1$ y $P_2 = L \cap L_2$. Demuestra que

$$d(L_1, L_2) = d(P, Q).$$

4. En el espacio afín $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con su estructura euclídea usual, calcula la distancia entre las rectas r y s que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2z = -1 \end{cases}.$$

Halla un punto $P \in r$ y un punto $Q \in s$ tales que $d(r, s) = d(p, q)$. ¿Son únicos los puntos P y Q?

5. El el espacio afín $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ con su estructura euclídea usual, calcula la distancia entre los espacios afines L_1 y L_2 que vienen dadas en un sistema de referencia ortonormal por las siguientes ecuaciones implícitas:

$$L_1 : \begin{cases} x + z + t = 1 \\ y - z - t = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z - 3t = 3 \end{cases}.$$

Halla puntos $P \in L_1$ y $qQ \in L_2$ tales que $d(L_1, L_2) = d(P, Q)$. ¿Son únicos esos puntos P y Q?

6. Halla una fórmula, en función de α y β, para calcular la distancia entre las rectas del espacio afín $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con su estructura euclídea usual:

$$r := (1, 0, 1) + \langle (1,\ \alpha,\ 0) \rangle \quad \text{y} \quad s := (1, 1, 2) + \langle (1,\ 1,\ \beta) \rangle.$$

7. Encuentra la expresión analítica (o en coordenadas) de las siguientes isometrías del plano:

a) La simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2x + y = 3$ y que transforma $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

b) El giro de ángulo $\pi/3$ que lleve $(2, 1)$ en $(1, 0)$.

8. Estudia las siguientes isometrías del plano:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} x' = -2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{array} \right. \quad (b) \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{array} \right.$$

Estudia la isometría composición de las anteriores.

9. Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia estándar de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$) de la simetría axial con respecto a la recta $y + x = 1$.

10. Sea $\mathcal{R} = \{P; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal (con respecto al producto escalar usual) en el plano afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Consideremos los puntos de coordenadas $A = (1, 0)_{\mathcal{R}}$, $B = (0, -1)_{\mathcal{R}}$, $C = (2, 2)_{\mathcal{R}}$ y $D = (-2, -2)_{\mathcal{R}}$.

a) ¿Existe alguna traslación T en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = B$ y $T(C) = D$?

b) ¿Existe alguna simetría axial S en $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $S(A) = B$ y $S(C) = D$? ¿Es única? En el caso de respuestas positivas, calcula los elementos geométricos de S.

11. Sean $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2\}$ una referencia ortonormal y $f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})$ un giro de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

a) Escribe la matriz de la aplicación lineal asociada a f.

b) Escribe la expresión en coordenadas de f respecto de $\mathcal{R}$.

c) Calcula la imagen por f del punto $(1, 1)$.

d) Describe geométricamente las imágenes de $(1, 1)$ por todos los giros de ángulo $\pi/2$ y centro un punto en la recta $x + y = 1$.

12 Determina las ecuaciones (respecto del sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3$) del movimiento helicoidal de eje la recta $x = y = z$, ángulo de rotación $\theta = \pi$ y vector de traslación $\vec{v} = (3, 3, 3)$.

13. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

a) La reflexión o simetría respecto al plano $3x - y + 2z = 1$.

b) La rotación helicoidal respecto al eje $\langle(1, -1, 0)\rangle$, con ángulo π y vector de traslación $(2, -2, 0)$.

c) La composición de la isometría del apartado a) con la del apartado b).

14. Estudia las siguientes isometrías de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} x' = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \end{array} \right. , \quad (b) \left\{ \begin{array}{l} x' = 1 + y \\ y' = 1 - z \\ z' = -x \end{array} \right.$$

HOJA 8

1. $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ $\qquad R = \{O ; e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$$H \equiv a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$$

a) $(a_1, \dots, a_n)$ en R es ortogonal a H.

$H = P + F$; $\quad v \in F$

$v = (b_1, \dots, b_n)$ en R

$a_1b_1 + \dots + a_nb_n = 0 = \langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle \Rightarrow (a_1, \dots, a_n)$ es ortogonal a H.

b) $Q = (b_1, \dots, b_n)$

$$d(Q,H) = \min\{d(Q,T) / \forall T \in H\} = d(Q, \underbrace{P_H(Q)}_{\text{proyección ortogonal}}) = \|\overrightarrow{QP_H(Q)}\|$$

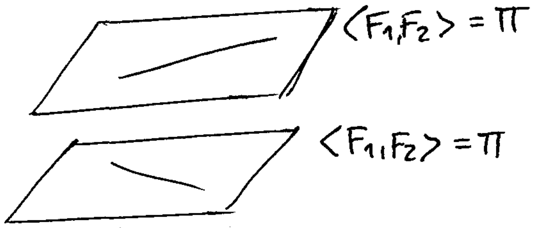
$$d(Q,H) = \frac{|b - a_1b_1 - \dots - a_nb_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

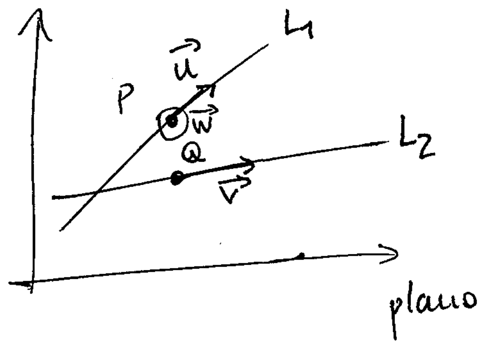
$\boxed{3.}$ L_1 y L_2 $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ se cruzan

$L_1 = P + F_1$ y $L_2 = Q + F_2$

$\vec{PQ} \notin \langle F_1, F_2 \rangle$ es un plano

a) Demuestra que existe una <u>única recta</u> L ortogonal a L_1 y a L_2 que corta a L_1 y L_2.





$F_1 = \langle \vec{u} \rangle$ $\quad \|\vec{u}\| = 1$

$F_2 = \langle \vec{v} \rangle$ $\quad \|\vec{v}\| = 1$

$a = = \langle v, u \rangle$

prod. escalar

$v' = au - v$

$\langle v', u \rangle = a \langle u, u \rangle = - \langle v, u \rangle = a - a = 0$

$\langle F_1 F_2 \rangle^{\perp} = \langle w \rangle$ vector que sale del plano

En este sistema de referencia:

$P_R = (0,0,0)$ $\qquad u_B = (1,0,0)$

$Q_R = (q_1, q_2, q_3)$ $\qquad v_B = (a, 1, 0)$

$w_B = (0,0,1)$

$L_1 = (0,0,0) + \langle (1,0,0) \rangle$ $\qquad$ Punto genérico L_1: $S = (\lambda, 0, 0)$

$L_2 = (q_1, q_2, q_3) + \langle (a, 1, 0) \rangle$ $\qquad$ Punto genérico L_2: $T = (q_1 + a\mu, q_2 + \mu, q_3)$

Si $\vec{ST} \in \langle w \rangle$: $(q_1 + \mu a - \lambda,\ q_2 + \mu,\ q_3) = (0, 0, \alpha)$

$$\begin{cases} q_1 + \mu a - \lambda = 0 \iff \lambda = q_1 + \mu a = q_1 - q_2 \cdot a \\ q_2 + \mu = 0 \iff \mu = -q_2 \\ q_3 = \alpha \end{cases}$$

$L = S + \vec{ST}$ es única $\qquad S_R = (q_1 + q_2 \cdot a, 0, 0)$ $\qquad T_R = (q_1 - q_2 \cdot a, 0, q_3)$

Está MAL

$\boxed{4.}$ $r: (2,0,-1) + \langle (1,1,-1) \rangle$

$s: (1,1,1) + \langle (2,-3,1) \rangle$

$F = \langle (1,1,-1), (2,-3,1) \rangle$ dim 2 $\Rightarrow$ no son paralelas

$(-1,1,2) \notin F \Rightarrow r$ y s se cruzan

$\exists! P \in r$ y $Q \in s \; / \; d(r,s) = d(P,Q)$

$P = (2+\lambda, \lambda, -1-\lambda)$

$Q = (1+2\mu, 1-3\mu, 1+\mu)$ tales que $\overrightarrow{PQ} = (2\mu-\lambda-1, -3\mu-\lambda+1, \mu+\lambda+2) \in F^{\perp}$

$F^{\perp} = \langle (2,3,5) \rangle$

calculando $F^{\perp}$ $\left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y,z) \in \langle (2,3,5) \rangle$

$\overrightarrow{PQ} = (2\mu-\lambda-1, -3\mu-\lambda+1, \mu+\lambda+2) = \alpha(2,3,5)$

$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu-\lambda-2\alpha = 1 \\ -3\mu-\lambda-3\alpha = -1 \\ \mu+\lambda-5\alpha = -2 \end{array} \right.$; $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/38 \\ -17/19 \\ 11/38 \end{pmatrix}$

$\boxed{5.}$ $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$

$L_1 = (1,2,0,0) + F_1 \qquad F_1 = \langle (-1,1,1,0), (1,1,0,1) \rangle$

$L_2 = (1,0,0,-1) + F_2 \qquad F_2 = \langle (-1,1,1,0), (-3,3,0,1) \rangle$

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \langle (-1,1,0,0), (1,1,0,1), (-3,3,0,1) \rangle$$

$(0,-2,0,-1) \notin \langle F_1, F_2 \rangle \Rightarrow$ los dos planos no son paralelos y se cruzan en $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$.

Halla $P \in L_1$ y $Q \in L_2 \,/\, d(L_1, L_2) = d(P,Q)$

<u>Subespacio ortogonal a F_1 y F_2</u>

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + y + t = 0 \\ -3x + 3y + t = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) \in \langle (-5,-2,-3,3) \rangle$$

Un $P \in L_1$ genérico: $P = (1,2,0,0) + \underbrace{\lambda(-1,1,1,0)} + \mu(1,1,0,1)$

Un $Q \in L_2$ genérico: $Q = (1,0,0,-1) + \alpha(-3,3,0,1) + \underbrace{\beta(-1,1,1,0)}$

Imponer: $\overrightarrow{PQ} = \gamma(-5,-2,-3,3)$

$$\overrightarrow{PQ} = (0,-2,0,-1) + \underbrace{(\beta-\lambda)}_{\delta}(-1,1,1,0) + \alpha(-3,3,0,1) - \mu(1,1,0,1)$$

$$\begin{cases} -\delta - 3\alpha - \mu = -5\gamma \\ -2 + \delta + 3\alpha - \mu = -2\gamma \\ \delta = -3\gamma \\ 1 + \alpha - \mu = 3\gamma \end{cases} \xrightarrow{\text{mat.}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -23 \\ 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d(P,Q) = |\gamma| \cdot \|(-5,-2,-3,3)\| = \frac{2}{13}\sqrt{47}$$

NOTA: $\delta = \beta - \lambda = -\frac{23}{13} \Rightarrow \beta = \lambda - \frac{23}{13}$

α y μ están determinados, pero hay libertad en una dirección.

[7.]

a) Simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2x+y=3$.

$f(2,1)=(1,0)$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+M_{B_c}(\tilde{f})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

0 ES JN STEMA $\begin{cases}2x+y=3\\2x+y=0\end{cases} \longrightarrow$ dirección $(1,-2)$

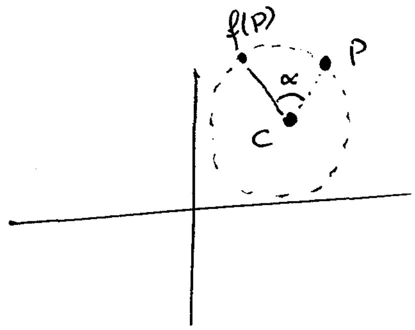
$B=\{(1,-2),\ (2,1)\}$ $\qquad M_B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$M_{B_cB}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$ $\qquad M_{BB_c}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1/5&-2/5\\2/5&1/5\end{pmatrix}$

$$M_{B_c}(\tilde{f})=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/5&-2/5\\2/5&1/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/5&-4/5\\-4/5&3/5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3/5&-4/5\\-4/5&3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1=a-2\\0=b-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}$$

b) giro ángulo $\pi/3$ $\qquad f(2,1)=(1,0)$



Si $(x_0,y_0)=C$ es el centro del giro

$$\|(x_0-2,\ y_0-1)\|=\|(x_0-1,\ y_0-0)\|$$

$$(x_0-2)^2+(y_0-1)^2=(x_0-1)^2+y_0^2 \iff -2x_0-2y_0+4=0 \iff x_0+y_0=2$$

$$M_{B_c}(\tilde{g})=\begin{pmatrix}1/2&-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2&-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=g\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}/2\\\sqrt{3}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{2\times1}\iff\begin{cases}1=a+1-\sqrt{3}/2\\0=b+\sqrt{3}+1/2\end{cases}$$

$$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ -\frac{1}{2}-\sqrt{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

(x_0,y_0) cumple:

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2+\frac{1}{2}x_0-\sqrt{3}/2\,y_0\\ -\frac{1}{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}/2\,x_0+\frac{1}{2}y_0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\\ y_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\boxed{8.}$ a) $$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}}_{\tilde{f}\text{ giro }\pi/3}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$(x_0,y_0)=C$ centro del giro, C es un punto sobre la recta $4x-2y=-5$

Otra forma:

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\,x_0-\sqrt{3}/2\,y_0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_0+\frac{1}{2}y_0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ única solución de:

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{resolver} \longrightarrow \begin{cases}x_0=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ y_0=\frac{1}{2}-\sqrt{3}\end{cases}$$

b) $$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\end{pmatrix}}_{\tilde{g}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$\det(\tilde{g})=-1 \Rightarrow \tilde{g}$ simetría

Recta de simetría: $(x,y)\,/\,\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2-1 & \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)y=0$$

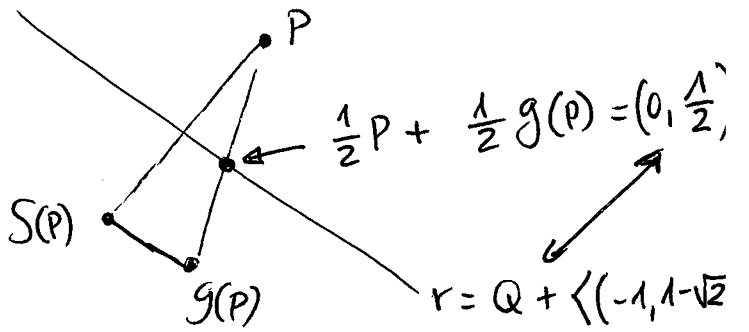
$$\left\langle\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle=-\left\langle\left(\sqrt{2}+2,\sqrt{2}\right)\right\rangle$$

¿g es deslizante o no?

$$(A - Id)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{incompatible}$$

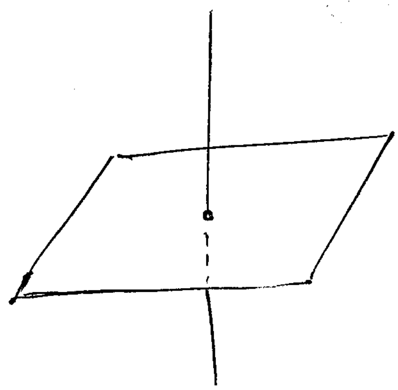
Rango = 1 y Rango Ampliada = 2

$$\left.\begin{array}{l} \det(\tilde{g}) = \det(A) = -1 \\ g \text{ no tiene puntos fijos} \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ simetría deslizante}$$



vector deslizamiento $= \overrightarrow{Qg(Q)}$

$\boxed{13.}$ b) Rotación helicoidal respecto a $\langle(1,-1,0)\rangle$ con ángulo π y vector de traslación $\vec{u} = (2,-2,0)$.



$$B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1)\right\}$$

$$M_B(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\operatorname{sen}\pi \\ 0 & \operatorname{sen}\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_cB} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{BB_c} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_c}(\tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-y \\ b-x \\ c-z \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{14.}$ a) $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2\\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} M^T = M^{-1} \\ \det(M) = -1 \\ tr(M) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{f}$$ es una simetría respecto de un plano.

▷ Para sacar el plano de simetría de $\tilde{f}$.

Calcular

$$(M - Id)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \ , \quad \boxed{-x + \sqrt{2}y + z = 0} \equiv \Pi$$

▷ f es simetría deslizante o no?

Es deslizante si y solo el sistema $\underbrace{(M - Id)}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ es INCOMPATIBLE.

$Rang(A) \neq Rang(A|b)$ por tanto el sistema es incompatible.

$$Q = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}f(P) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right) \in \Pi.$$

$$\Pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right) + \left\langle (1,0,1), (\sqrt{2}, 1, 0)\right\rangle$$

vector deslizamente $\Rightarrow$ $\vec{u} = \overrightarrow{f(Q)Q}$