ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 6: Espacio dual.

1. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal definida por $T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)\, dt$. Calcula las coordenadas de T respecto de la base dual de $\{1, x, x^2, x^3\}$.

2. Encuentra una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, respecto de la cual v_1^* (el dual de v_1 respecto de $\mathcal{B}$) coincida con la aplicación lineal $f(x, y, z) = x - y$.

3. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, 0, d)$$

(i) Encuentra bases de $\mathrm{Ker}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$. Comprueba la fórmula de la dimensión.

(ii) Sea $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ la base dual de $\{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ y f^* la aplicación dual. Calcula $f^*(v_3^*)$.

(iii) Calcula la matriz de f^* respecto de las bases canónicas.

(iv) Describir el núcleo de f^* y el anulador de $\mathrm{Im}(f)$.

(v) Describir el anulador de $\mathrm{Ker}(f)$ y la imagen de f^*.

4. Sea $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(p(x)) = (p(0), p'(0))$. Calcula:

(i) La matriz de f respecto de las bases canónicas y la de f^* respecto de sus duales.

(ii) La matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}_1 = \left\{1 + x, 1, x^2\right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1)\}$ y la de f^* respecto de sus duales.

5. Sean $f : V \to W$ y $g : W \to T$ dos aplicaciones lineales.

(i) Demuestra que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(ii) Si f es biyectiva, demuestra que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

(iii) Sea M una matriz invertible de orden n. Demuestra que $(M^{-1})^t = (M^t)^{-1}$.

(iv) Demuestra que $\det f = \det f^*$.

6. Expresa cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^n$ como conjunto de soluciones de un sistema lineal adecuado.

(i) $V = \langle v_1 = (1, -1, 2)\,, v_2 = (2, 1, -1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$;

(ii) $E = \langle v_1 = (1, 1, 1, 3)\,, v_2 = (1, 1, 3, 2), v_3 = (1, 3, 2, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^4$;

(iii) $F = \langle v_1 = (3, 1, 1, 1)\,, v_2 = (2, 3, 1, 1), v_3 = (1, 2, 3, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^4$;

(iv) $E \cap F \subset \mathbb{R}^4$;

(v) $G = \langle v_1 = (1, 1, 1, 1, 2)\,, v_2 = (1, 1, 1, 2, 2), v_3 = (1, 1, 2, 2, 2)\rangle \subset \mathbb{R}^5$;

(vi) $H = \langle v_1 = (2, 1, 1, 1, 1)\,, v_2 = (2, 2, 1, 1, 1), v_3 = (2, 2, 2, 1, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^5$;

(vii) $G \cap H \subset \mathbb{R}^5$.