Economía y finanzas matemáticas
Optativa del grado en Matemáticas, UAM, 2020-2021

Hoja 4 (árboles binomiales y fórmulas de Black-Scholes)

Árboles de Jarrow-Rudd

En los siguientes ejercicios, los datos de mercado serán la cotización hoy S_0 del subyacente, el tipo de interés R (anual, continuo) y la volatilidad σ (anual) del subyacente. El modelo binomial (Jarrow-Rudd) tiene paso Δt y sus parámetros son: $p = 50\,\%$,

$$u = e^{R\Delta t}\ \frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}\ e^{+\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{R\Delta t}\ \frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}\ e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

1. *Opciones binarias.* Escribe la *fórmula* de valoración de opción que, a vencimiento $M\Delta t$,

a) paga 1 si la cotización está por encima de S_0, mientras que paga 0 si es igual o inferior;

b) paga 1 si la cotización está entre K y $2K$ (y paga 0 en el resto de los casos).

2. *Opciones path dependent.* Digamos que $M = 2$ (un árbol con dos pasos). Obtén una *fórmula* para valorar una opción que paga, en tiempo $2\Delta t$, la cantidad

$$\Big(\frac{S_0 + S_1 + S_2}{3} - S_0\Big)^+,$$

donde S_j es la cotización en tiempo $j\Delta t$ (una call sobre la media aritmética de las cotizaciones).

Fórmulas de Black-Scholes

3. Digamos que

$$S = 100, \quad r = 5\,\%, \quad \sigma = 30\,\%, \quad T = 6 \text{ meses}, \quad K = 110.$$

Calcula el valor de la prima de la call, la put y el forward (con las fórmulas de Black-Scholes).

4. Digamos que la cotización hoy de una cierta acción es 50 euros. El tipo de interés (continuo, anual) es del 1 %. Se tienen los siguientes precios de calls (sobre la acción) a distintos vencimientos y strikes:

	3 meses	6 meses	12 meses
45	7.0	8.3	10.5
50	3.7	5.2	7.5
55	1.6	2.9	5.1

¿Son estos precios consistentes con el modelo de Black–Scholes?

5. *Griegas en Black-Scholes.* Dados los valores de r (tipo anual continuo), σ y S (volatilidad y cotización del subyacente), K (strike) y $\tau = T - t$ (tiempo hasta vencimiento), la fórmula de valoración de Black-Scholes para la prima de la call en tiempo t viene dada por:

$$c = S\,\Phi(d_+) - K\,e^{-r\tau}\,\Phi(d_-), \qquad \text{donde} \qquad d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\Big(\frac{S}{Ke^{-r\tau}}\Big) \pm \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$$

y Φ denota la función de distribución de la normal estándar. Si tomamos $t = 0$ obtenemos la fórmula vista en clase.

a) Comprueba que

$$\frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_+).$$

(Nota: la derivada de la función de distribución Φ es la función de densidad de la normal estándar, que se denota por ϕ).

b) Las derivadas parciales de la prima con respecto a los parámetros reciben el nombre "griegas". La del apartado a) es la "delta". Calcula también las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} \text{ (vega);} \quad \frac{\partial c}{\partial t} \text{ (theta);} \quad \frac{\partial c}{\partial r} \text{ (rho);}$$

c) Comprueba si las cuatro derivadas parciales anteriores tienen signo e interprétalo financieramente.

d) Calcula también la "gamma", es decir,

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2},$$

e interpreta su signo.

e) Repite los cálculos para la prima de la put, cuya fórmula es

$$p = K\, e^{-r\tau}\, \Phi(-d_-) - S\, \Phi(-d_+).$$

¿Coinciden las griegas de la put con las correspondientes de la call? ¿Cuáles? ¿Por qué?

6. *Opciones binarias.* Si un derivado paga $g(S_T)$ a vencimiento T, la correspondiente fórmula de valoración (a la Black-Scholes) viene dada por

$$e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_T)\, \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx\,, \qquad \text{donde} \qquad S_T = S_0\, e^{(r-\sigma^2/2)T}\; e^{\sigma\sqrt{T}x}.$$

a) Halla una fórmula explícita para una "call binaria", que paga 1 si, a vencimiento T, $S_T > K$, mientras que paga 0 si $S_T < K$. Y para la "put binaria", que paga 0 y 1 justo al revés.

b) Hala la correspondiente fórmula para la put binaria (quizás interese aplicar la "paridad call-put" para este caso binario).

c) Halla la fórmula para la prima de una opción que paga 1 si S_T está entre K y $2K$ (y 0 en el resto de los casos).

EJERCICIO ANTICIPADO Y OPCIONES AMERICANAS

7. *Llegada de ofertas.* a) Vamos a recibir n ofertas, $F_n, F_{n-1}, \dots, F_1$, de forma consecutiva. La primera en llegar es F_n. Imponemos la cláusula habitual de que si no se acepta una oferta en el momento en que llega, se "pierde". Digamos que las ofertas son variables aleatorias i.i.d. uniformes en $[0,1]$. Llamemos U_k al *umbral de aceptación* para la oferta F_k, y V_k al *valor* del juego en el paso k. Por ejemplo, $U_1 = 0$ y $V_1 = 1/2$ (la media de una uniforme en $[0,1]$). En el paso anterior, $U_2 = 1/2$, mientras que

$$V_2 = \mathbf{E}(F_2 | F_2 > 1/2) \cdot \mathbf{P}(F_2 > 1/2) + V_1 \cdot \mathbf{P}(F_2 < 1/2) = 0.625.$$

Comprueba que $U_k = V_{k-1}$. Obtén una fórmula de recurrencia para los V_k (y por tanto para los U_k). Deduce el valor del umbral de aceptación en el primer paso para $n = 10$.

b) Repite los cálculos del ejercicio anterior para el caso de tres ofertas, F_3, F_2, F_1, que son variables aleatorias i.i.d. que siguen una distribución dada por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } 0 < x < 1; \\ 2/3 & \text{si } 1 < x < 2; \end{cases}$$

Calcula el valor a partir del cual debemos aceptar la primera oferta, F_3.