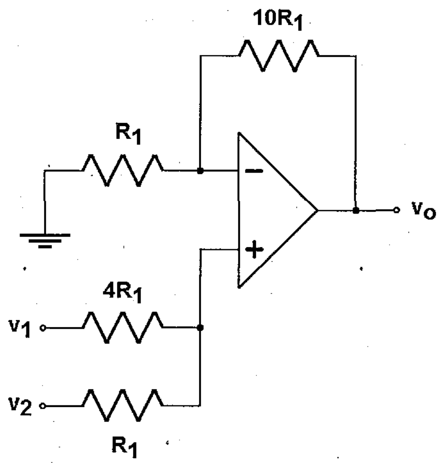
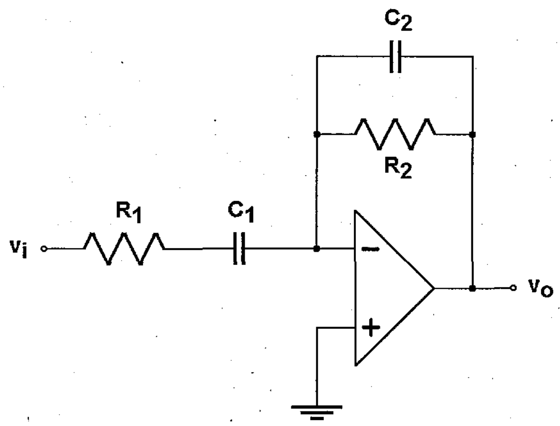
PROBLEMAS DE CIRCUITOS ELECTRÓNICOS
2º Curso de Grado en Ingeniería Informática – 17/18

TEMA 3: Amplificadores operacionales

1.- Hallar v_O en el circuito de la figura.



2.- El circuito representado es un diferenciador práctico que minimiza los problemas de ruido mediante la atenuación de las frecuencias altas.



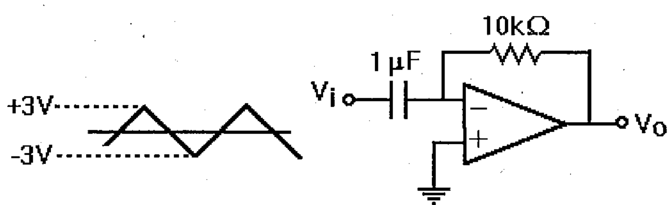
a) Determinar la función de transferencia $v_o(j\omega)$ / $v_i(j\omega)$.

b) Si $R_1C_1 = R_2C_2$ ¿hasta qué frecuencias debe ser restringida la entrada para que el circuito funcione como diferenciador?, es decir, $v_o(j\omega) = cte \cdot j\omega\, v_i(j\omega)$.

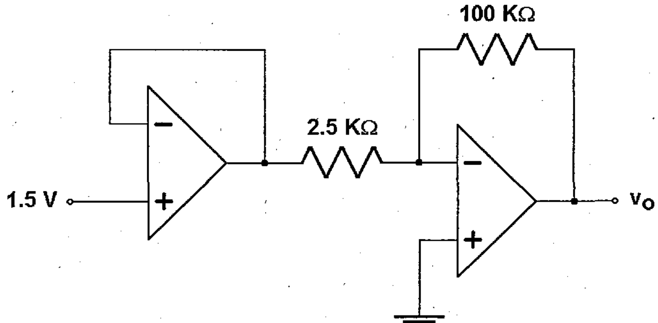
c) Calcular la nueva función de transferencia cuando: (*i*) $C_1 \approx 0$, (*ii*) $C_2 \approx 0$, (*iii*) $C_1 \approx \infty$ y (*iv*) $C_2 \approx \infty$, describiendo el tipo de filtro obtenido en cada caso.

d) ¿Para qué margen de frecuencias de la señal de entrada el circuito se comporta como un filtro paso-bajo?

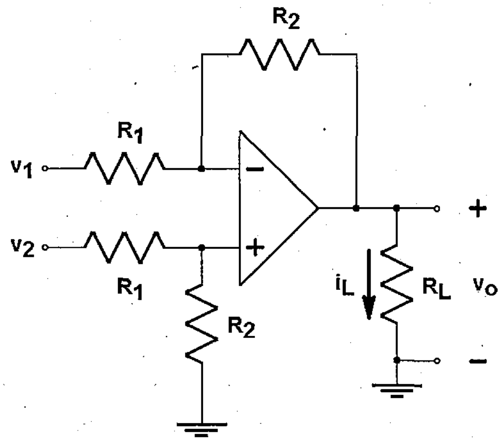
3.- Para el circuito derivador de la figura, determinar la forma y la amplitud de la onda de salida cuando a la entrada le suministramos una señal triangular de amplitud +/- 3V y frecuencia igual a 25Hz.



4.- Calcular la tensión de salida v_O en el siguiente circuito, suponiendo que los amplificadores operacionales son ideales.



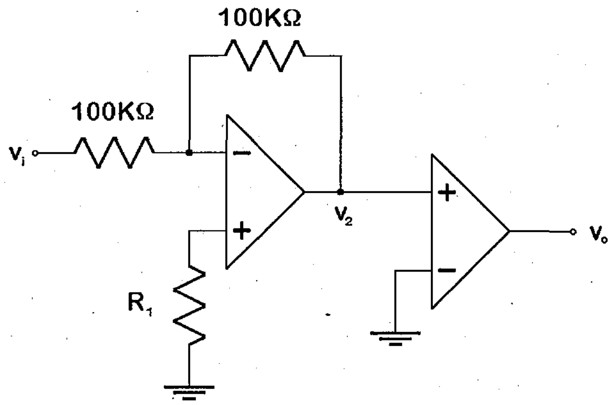
5.- ¿Cuál es el valor de v_2 necesario para producir $v_o = 500$ mV cuando $v_1 = 40$ mV, $R_1 = 50$ KΩ y $R_2 = 150$ KΩ? ¿Cuál es el valor de la corriente de salida, i_L, en las condiciones anteriores y si $R_L = 4$ KΩ? Calcular la corriente suministrada por el amplificador operacional a través de su terminal de salida.



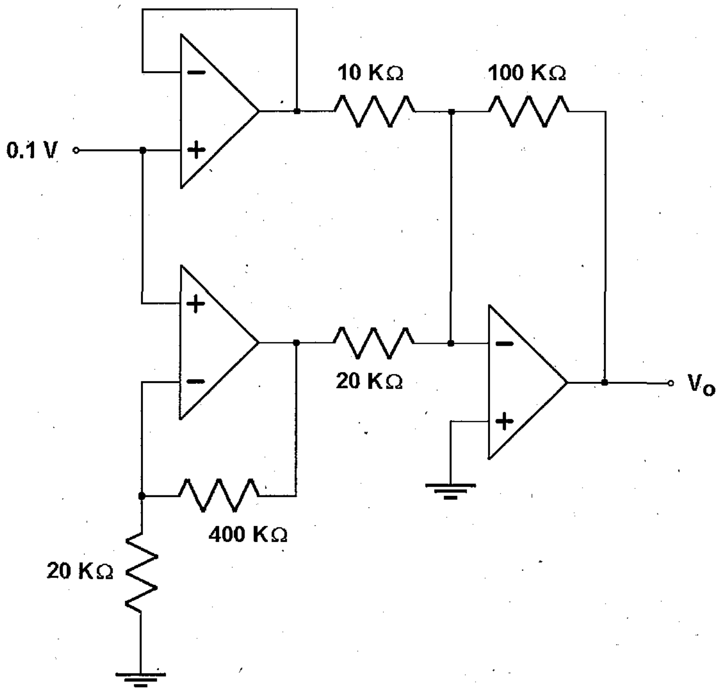
6.- En el circuito de la figura, los amplificadores operacionales, supuestos ideales, están alimentados con $\pm V_{cc} = \pm 12$V. Suponiendo que la tensión de entrada toma valores en el rango $-10V \leq v_i \leq +10V$, calcular:

a) La tensión intermedia v_2 en función de la tensión de entrada v_i.

b) La tensión de salida v_o en función de la tensión de entrada v_i.

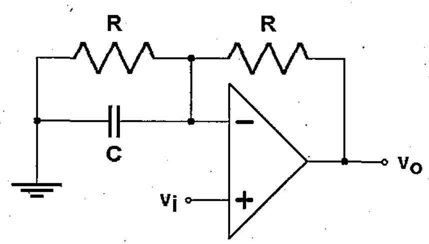


7.- En el circuito de la figura todos los amplificadores operacionales son ideales. Calcular la tensión de salida V_o.

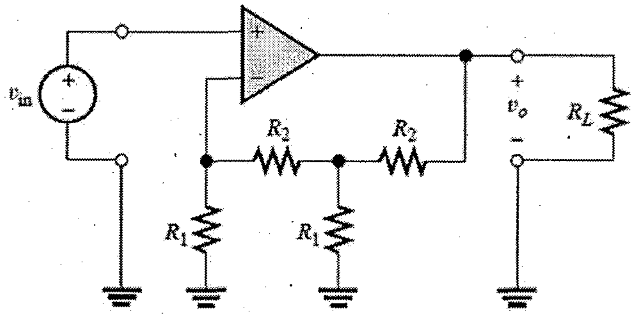


8.- En el circuito de la figura el amplificador operacional es ideal. Calcular:

- La ganancia de voltaje $A_V(f)$ y su módulo $|A_V(f)|$.
- Las dos asíntotas $f \to 0$ y $f \to \infty$ y su intersección.
- Dibujar esquemáticamente $|A_V(f)|$ y sus asíntotas.



9.- (*a*) Obtener la expresión de la ganancia de tensión v_o/v_{in} del circuito que se muestra en la figura. (*b*) Evaluar la expresión para $R_1 = 1\ k\Omega$, $R_2 = 10\ k\Omega$.

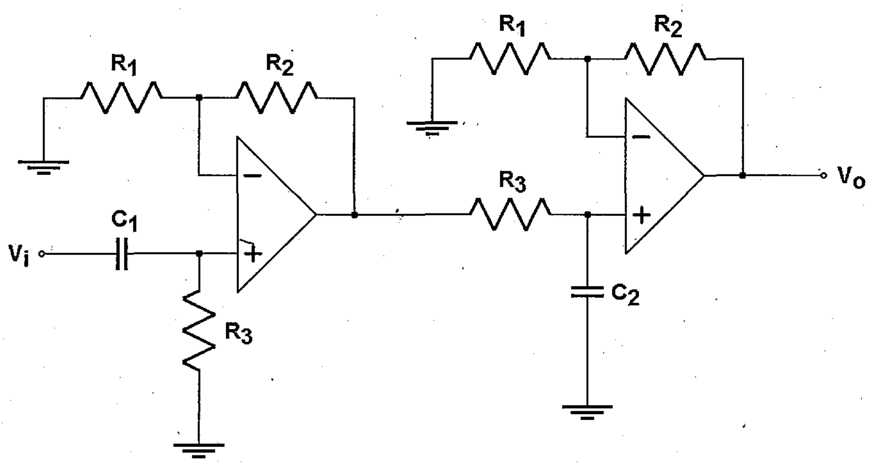


10.- Suponiendo los amplificadores operacionales ideales, y $R_1 = 2x10^4\ \Omega$, $R_2 = 2x10^5\ \Omega$ y $R_3 = 10^4\ \Omega$:

a) Calcular la ganancia de tensión, módulo y fase, para señales sinusoidales.

b) Calcular los valores de C_1 y C_2 para que las frecuencias de corte a 3 dB ($|A^{máx.}|/2^{½}$) sean 20 Hz y 20 KHz para las etapas izquierda y derecha, respectivamente.

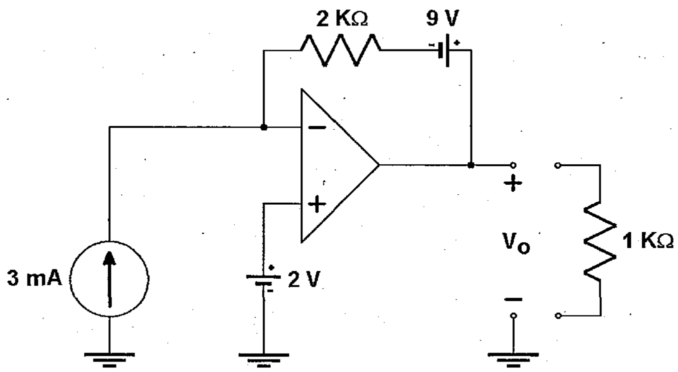
c) Con los valores calculados en el apartado anterior, representar el módulo y la fase de la ganancia en función de la frecuencia.



11.- En el circuito de la figura:

a) Calcular la tensión de salida en circuito abierto, V_o.

b) Si se conecta la resistencia de 1KΩ a la salida del circuito, calcular la intensidad I_o que suministra el operacional por su terminal de salida.



12.- El amplificador operacional del circuito siguiente se considera ideal.

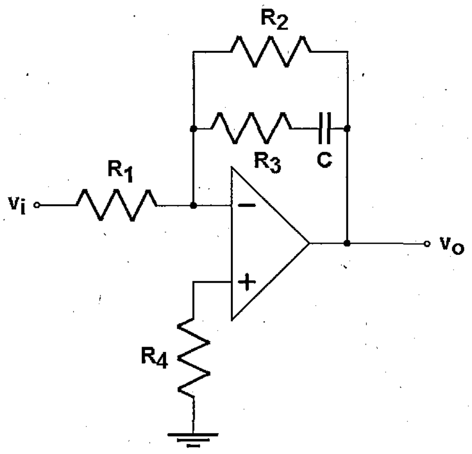
a) Hallar la expresión de la ganancia de voltaje, A_V, en función de la frecuencia, f. ($A_V = v_o/v_i$).

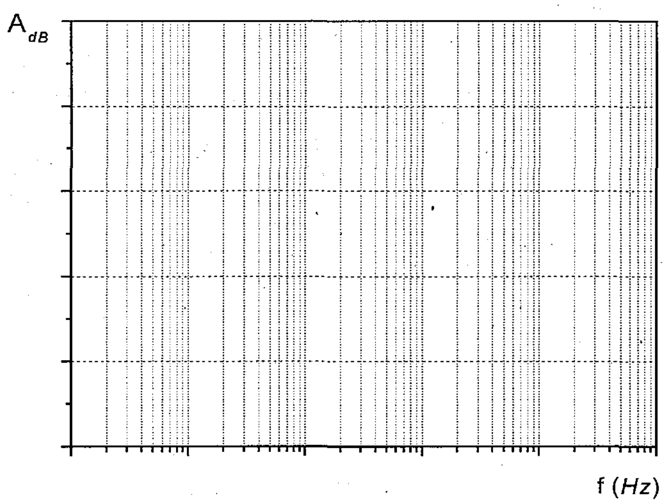
b) Encontrar las frecuencias de corte para el módulo de la función obtenida.

c) Calcular el módulo de la ganancia y hallar su valor en los casos $f \rightarrow 0$ y $f \rightarrow \infty$.

Suponiendo que $R_1 = 10$ KΩ, $R_2 = 100$ KΩ, $R_3 = 20$ KΩ, $R_4 = 9$ KΩ y $C = 4$ nF (1 nF = 10^{-9} F):

d) Representar $A_{dB}=20 \log |A_V|$ en función de la frecuencia en escala logarítmica.

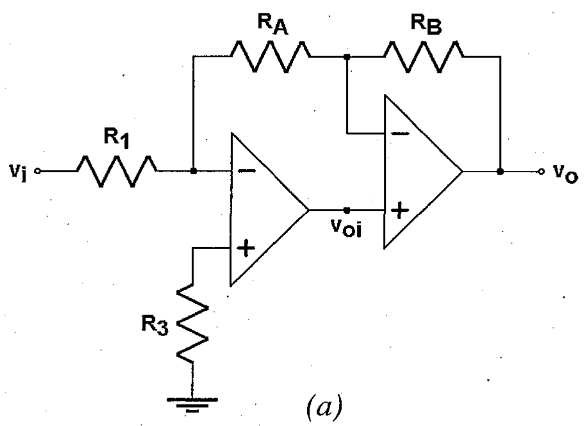




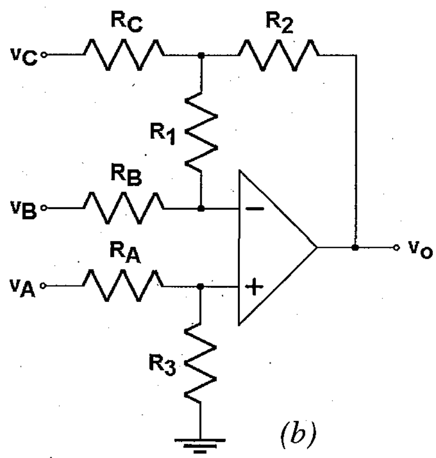
13.- Los amplificadores operacionales de los siguientes circuitos se suponen ideales.

a) Deducir la característica de transferencia del circuito de la figura (*a*), así como la expresión de voi en función de v_i.

b) Deducir la expresión de v_o, como función de los voltajes de entrada v_A, v_B y v_C, en el circuito de la figura (*b*).



(*a*)



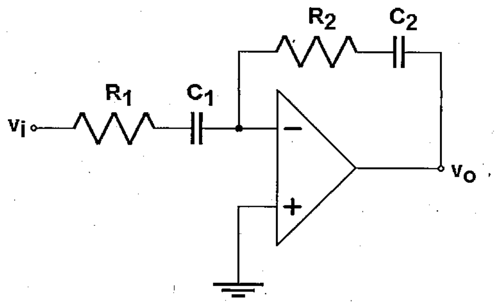
(*b*)

14.- Suponiendo que el amplificador operacional del siguiente circuito es ideal:

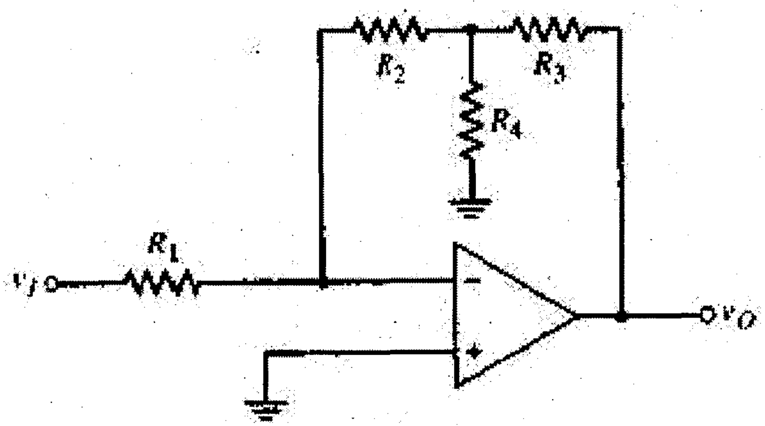
a) Deducir la expresión de la ganancia de voltaje, $A_V = v_o/v_i$, en función de la frecuencia.

b) Escribir, a partir de la anterior, las expresiones de su módulo y su ángulo de fase.

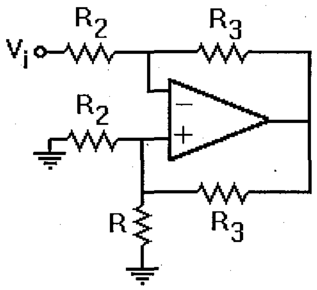
c) Calcular la expresión del módulo de A_V en los límites de frecuencia $f \to 0$ y $f \to \infty$.



15.- Calcular la ganancia de tensión v_o/v_i del siguiente circuito.

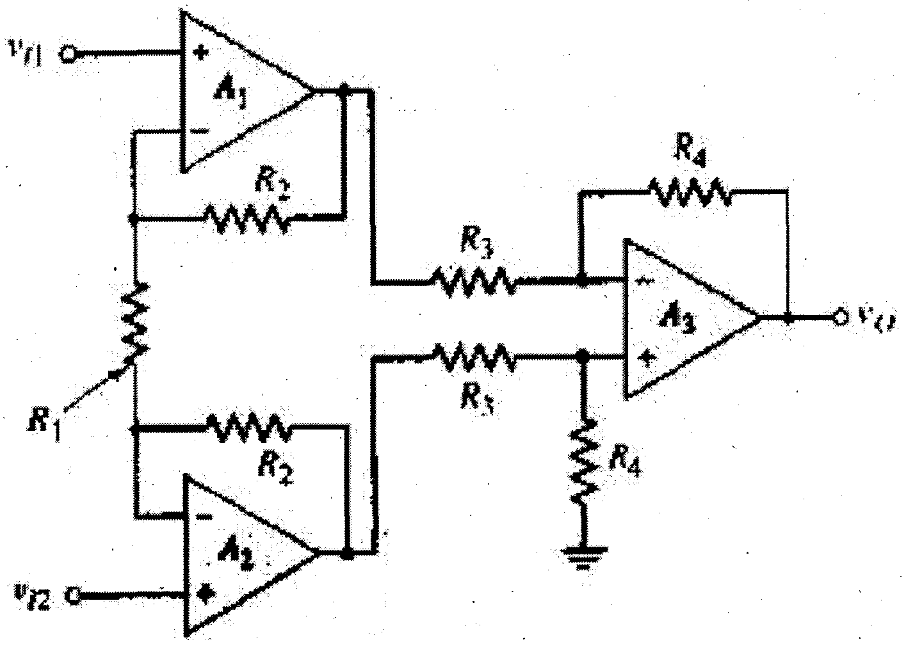


16.- Demostrar que el circuito de la figura se comporta, respecto a la carga R, como una fuente de corriente, gobernada por la tensión V_i

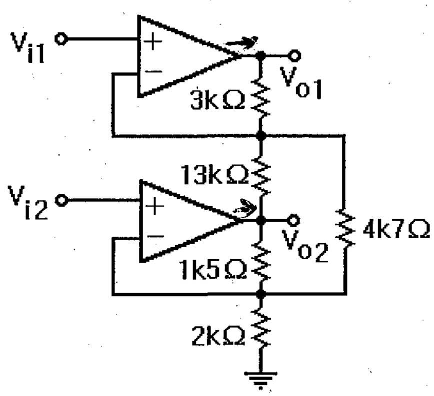


17.- Comprobar que el siguiente circuito tiene una tensión de salida igual a

$$v_o = \frac{R_4}{R_3}\left(1+\frac{2R_2}{R_1}\right)(v_{i2}-v_{i1}).$$

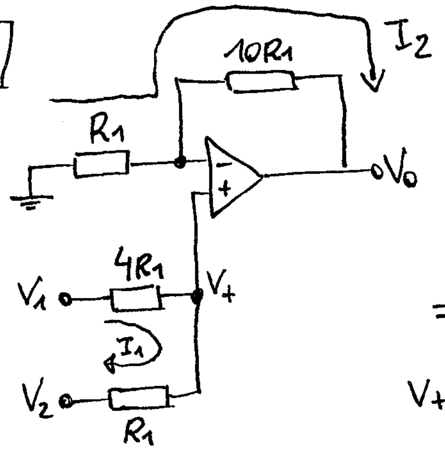


18.- Suponiendo V_{i1} = 14.7V y V_{i2} = 10V: (*a*) Determinar la corriente que circula por las resistencias de 2KΩ y de 4K7Ω ; (*b*) calcular las tensiones V_{O1} y V_{O2}; (*c*) calcular la suma de las potencias disipadas en todas las resistencias, así como la suma de las potencias suministradas por los dos operacionales; (*d*) suponiendo $V_{i1}=V_{i2}=V_i$ determinar V_{O2} en función de V_i; (*e*) para V_i = 1V ¿cuál es la potencia disipada en una resistencia de 1KΩ conectada entre V_{O1} y V_{O2} .



TEMA 3: AMPLIFICADORES OPERACIONALES

1.



$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_1 - V_+}{4R_1} \\ I_1 = \dfrac{V_+ - V_2}{R_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1 - V_+}{4\cancel{R_1}} = \frac{V_+ - V_2}{\cancel{R_1}} \Rightarrow V_1 - V_+ = 4(V_+ - V$$

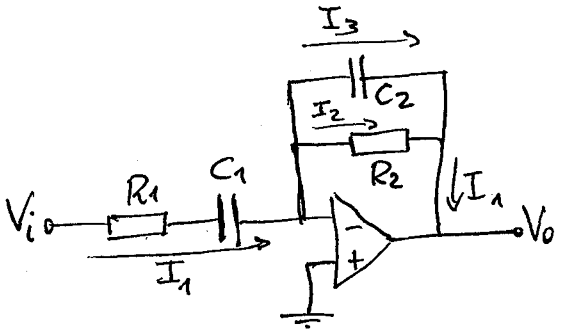
$$\Rightarrow 5V_+ = V_1 + V_2 \Rightarrow V_+ = \frac{V_1 + V_2}{5}$$

$$V_+ = V_-$$

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{0 - V_+}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{V_+ - V_0}{10R_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{-V_+}{\cancel{R_1}} = \frac{V_+ - V_0}{10\cancel{R_1}} \Rightarrow -10V_+ = V_+ - V_0 \Rightarrow V_0 = 11V_+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{11}{5}(V_1 + V_2)}$$

2.



$$I_1 = \frac{V_i - 0}{R_1 + Z_{C_1}}$$

$$I_2 = \frac{0 - V_0}{R_2} \qquad I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_3 = \frac{0 - V_0}{Z_{C_2}}$$

a)

$$\frac{V_i}{R_1 + Z_{C_1}} = \frac{-V_0}{R_2} + \frac{-V_0}{Z_{C_2}} \Rightarrow \frac{V_i}{R_1 + Z_{C_1}} = \frac{-Z_{C_2}V_0 - R_2V_0}{Z_{C_2}R_2} \Rightarrow V_i Z_{C_2} R_2 = -V_0(Z_{C_2} + R_2)(R_1 + Z_{C_1})$$

$$\Rightarrow \frac{V_i}{V_0} = \frac{-(Z_{C_2} + R_2)(R_1 + Z_{C_1})}{Z_{C_2} \cdot R_2} \Rightarrow \frac{V_0}{V_i} = \frac{-Z_{C_2} \cdot R_2}{(Z_{C_2} + R_2)(R_1 + Z_{C_1})} = \frac{-R_2/j\omega C_2}{\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)}$$

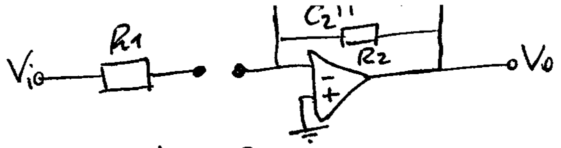
$$= \frac{-R_2}{(j\omega C_2 R_2 + 1)\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)} = \frac{-j\omega C_1 R_2}{(1 + j\omega C_2 R_2)(1 + j\omega C_1 R_1)}$$

b) Si $R_1C_1 = R_2C_2$: $A_V = \dfrac{-j\omega C_1 R_2}{(1 + j\omega C_1 R_1)^2}$ $\qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{C_1 R_1}}$

Para $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow A_V = \text{cte} \cdot j\omega \Rightarrow \dfrac{V_0}{V_i} = \text{cte} \cdot j\omega \Rightarrow V_0 = \text{cte} \cdot j\omega \cdot V_i$

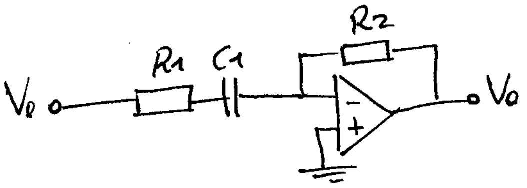
c)

i) $\boxed{C_1 \approx 0}$



$A_v = 0$

ii) $\boxed{C_2 \approx 0}$



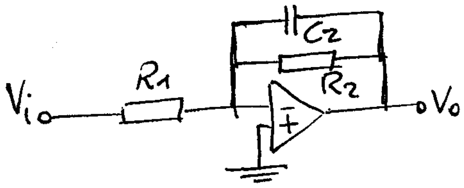
$$A_v = \frac{-j\omega C_1 R_2}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

$Z_{C_2} = \infty$

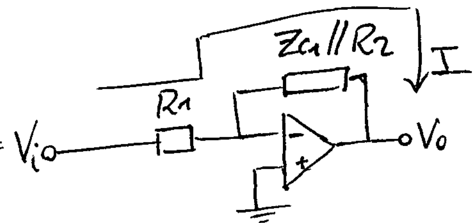
$$|A_v| = \frac{\omega C_1 R_2}{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_1)^2}} \quad ; \quad |A_v| \xrightarrow[\omega \to 0]{} 0 \qquad |A_v| \xrightarrow[\omega \to \infty]{} \frac{R_2}{R_1}$$

Filtro paso alto.

iii) $\boxed{C_1 \approx \infty}$



$\equiv$



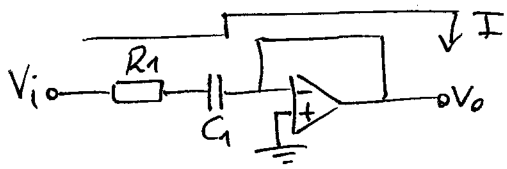
$$\begin{cases} I = \dfrac{V_i}{R_1} \\ I = \dfrac{-V_o}{Z_{C_2} // R_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_i}{R_1} = \frac{-V_o}{Z_{C_2} // R_2} \Rightarrow \frac{V_i}{V_o} = \frac{-R_1}{Z_{C_2} // R_2} \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{Z_{C_2} // R_2}{-R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{\left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}}{-R_1} = \frac{1}{-\left(\frac{R_1}{R_2} + j\omega C_2 R_1\right)} = \frac{1}{-\frac{R_1}{R_2}\left(1 + j\omega C_2 R_2\right)} = \underbrace{\frac{-R_2}{R_1}}_{\text{ganancia básica}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

$$|A_v| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_2)^2}} \quad ; \quad |A_v| \xrightarrow[\omega \to 0]{} \frac{R_2}{R_1} \qquad |A_v| \xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0$$

Filtro paso bajo

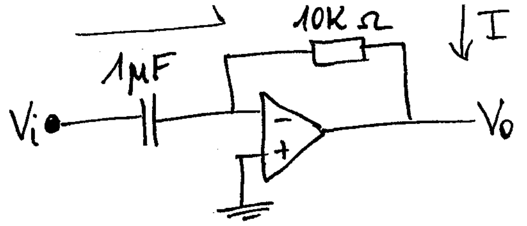
iv) $\boxed{C_2 \approx \infty}$

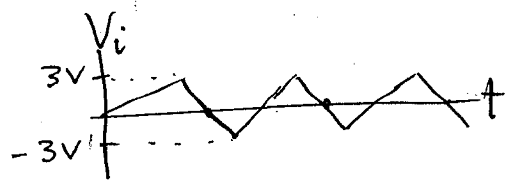


$$\begin{cases} I = \dfrac{V_i - 0}{Z_{C_1} + R_1} \\ I = \dfrac{0 - V_o}{0} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_i}{Z_{C_1} + R_1} = \frac{-V_o}{0} \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{-0}{Z_{C_1} + R_1} = 0 \qquad A_v = 0$$

d)

3.



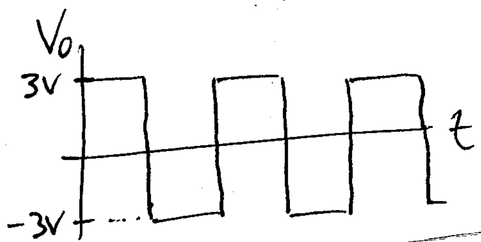


$$I = \frac{0 - V_o}{R} \Rightarrow V_o = -IR \Rightarrow V_o = -R \cdot \frac{d(V_c \cdot C)}{dt} = -RC \cdot \frac{dV_i}{dt}$$

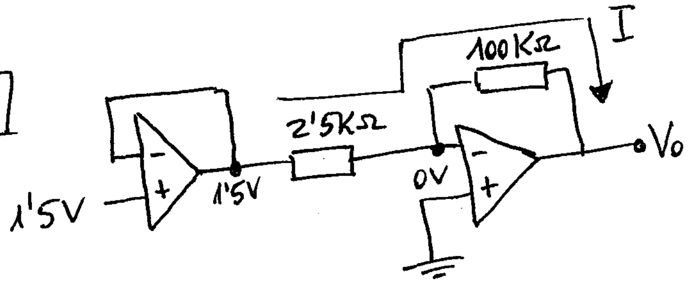
$f = 25Hz \Rightarrow T = 40ms$ $\qquad RC = 10^{-2} s$

$$V_o = -RC \cdot \frac{dV_i}{dt} \rightarrow V_o = -RC \cdot \frac{6V}{20ms} = -10^{-2} \cdot \frac{6}{2 \cdot 10^{-2}} = -3V$$

$$\rightarrow V_o = -RC \cdot \frac{-6V}{20ms} = -10^{-2} \cdot \frac{-6}{2 \cdot 10^{-2}} = 3V$$



4.



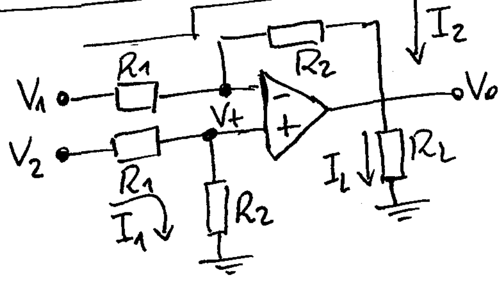
$$\begin{cases} I = \frac{1'5 - 0}{2'5K} \\ I = \frac{0 - V_o}{100K} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0'0006 = \frac{-V_o}{100K} \Rightarrow \boxed{V_o = -60V}$$

5.

$R_1 = 50K \quad R_2 = 150K \quad V_o = 500mV \quad V_1 = 40mV$

$R_L = 4K$



a) ¿V_2? $I_1 = \frac{V_2 - V_+}{R_1} = \frac{V_+ - 0}{R_2} \Rightarrow R_2 V_2 - R_2 V_+ = R_1 V_+ =$

$$\Rightarrow V_+ = \frac{R_2 V_2}{R_1 + R_2}$$

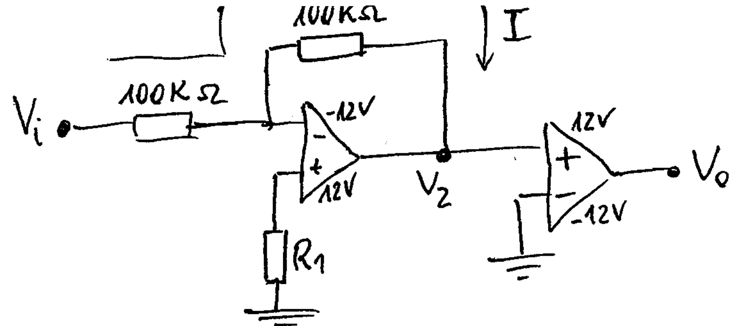
$$I_2 = \frac{V_1 - V_+}{R_1} = \frac{V_+ - V_o}{R_2} \Rightarrow R_2 V_1 - R_2 V_+ = R_1 V_+ - R_1 V_o \Rightarrow R_2 V_1 + R_1 V_o = V_+ (R_1 + R_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_2 V_1 + R_1 V_o = R_2 V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{R_2 V_1 + R_1 V_o}{R_2} = \boxed{0'21V}$$

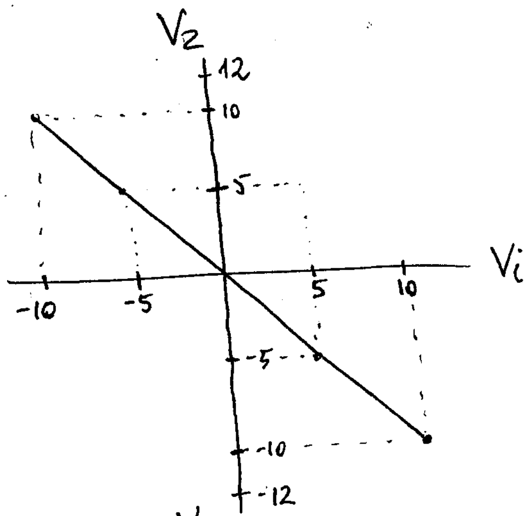
b) ¿I_L? $I_L = \frac{V_o - 0}{R_L} = \frac{0'5}{4K} = 0'000125 A = \boxed{1'25 \cdot 10^{-4} A}$

c) $I_2 + I_A = I_L \Rightarrow I_A = I_L - I_2 = \boxed{127'3 \mu A}$

6.



$-10V \leq V_i \leq 10V$

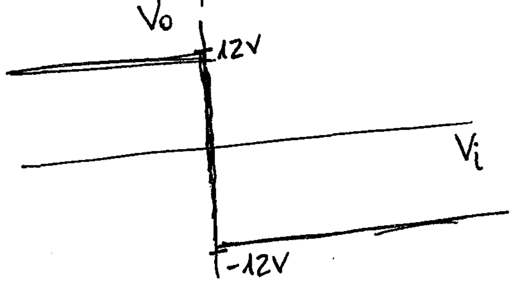


a)
$$I = \frac{V_i - 0}{100K} = \frac{0 - V_2}{100K} \Rightarrow \boxed{V_2 = -V_i}$$

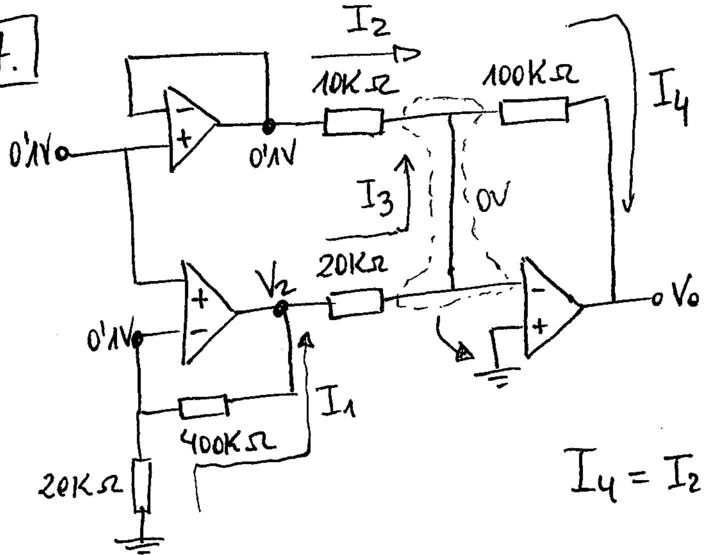
b) LAZO ABIERTO → REGIÓN DE SATURACIÓN

$$V_d = V_+ - \cancel{V_-}_{0} = V_+ = V_2$$

- Si $V_2 < 0$ $(V_i > 0) \Rightarrow V_o = -12V$ (saturación)
- Si $V_2 = 0$ $(V_i = 0) \Rightarrow V_o = 0V$
- Si $V_2 > 0$ $(V_i < 0) \Rightarrow V_o = 12V$ (saturación)



7.



$$I_1 = \frac{0 - 0'1}{20K} = \frac{0'1 - V_2}{400K} \Rightarrow V_2 = 2'1\,V$$

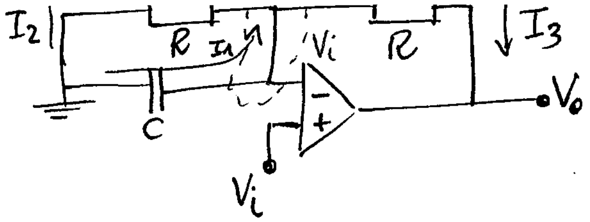
$$I_2 = \frac{0'1 - 0}{10K} = 10^{-5}A$$

$$I_3 = \frac{V_2 - 0}{20K} = \frac{2'1}{20K} = 1'05 \cdot 10^{-4}A$$

$$I_4 = I_2 + I_3 = \frac{0 - V_o}{100K} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{-5} + 1'05 \cdot 10^{-4} = \frac{-V_o}{100K} \Rightarrow \boxed{V_o = -11'5\,V}$$

8.



$$I_1 = \frac{0 - V_i}{Z_c} \qquad I_2 = \frac{0 - V_i}{R} \qquad I_3 = I_1 + I_2 = \frac{V_i - V_o}{R}$$

a)

$$I = \frac{-V_i}{Z_c} + \frac{-V_i}{R} = \frac{V_i - V_o}{R} \Rightarrow \frac{-RV_i - Z_cV_i}{RZ_c} = \frac{-V_i(R+Z_c)}{\cancel{R}Z_c} = \frac{V_i - V_o}{\cancel{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-V_i(R+Z_c)}{Z_c} = V_i - V_o \Rightarrow -V_i(R+Z_c) = Z_cV_i - Z_cV_o \Rightarrow -V_i(R+2Z_c) = -Z_cV_o$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{R+2Z_c}{Z_c} \Rightarrow A_v = \frac{R + 2/j\omega C}{1/j\omega C} = 2 + j\omega CR = 2\left(1 + j\omega\frac{CR}{2}\right)$$

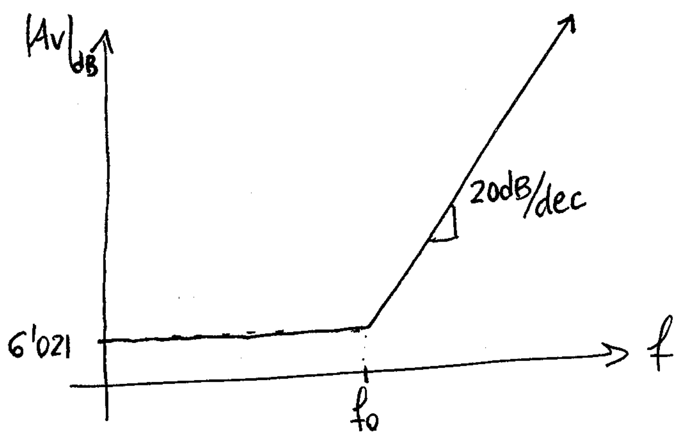
$$\Rightarrow \boxed{A_v = 2\left(1 + j\omega\frac{CR}{2}\right)} \qquad \boxed{|A_v| = 2\sqrt{1+\left(\omega\frac{CR}{2}\right)^2}}$$

$$A_v(f) = 2\left(1 + 2\pi j f\frac{CR}{2}\right) \Rightarrow A_v(f) = 2(1 + j\pi f CR)$$

$$|A_v(f)| = 2\sqrt{1+\left(2\pi f\frac{CR}{2}\right)^2} \Rightarrow |A_v(f)| = 2\sqrt{1+(\pi f CR)^2}$$

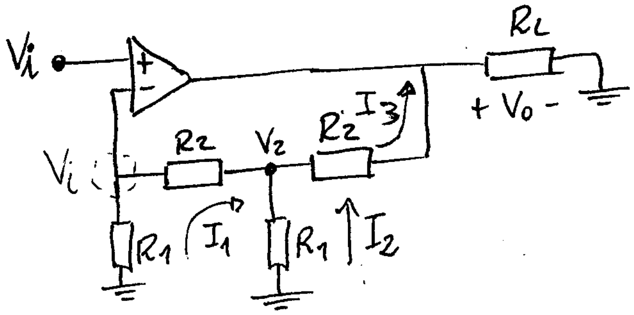
b) $|A_v(f)| \xrightarrow[f\to 0]{} 2 \qquad |A_v(f)| \xrightarrow[f\to\infty]{} \infty$

c) $\omega_0 = \frac{2}{CR} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{\pi CR}$



$20\log(2) = 6'021$ dB

9.



$$I_1 = \frac{V_i - 0}{R_1} = \frac{V_i - V_2}{R_2}$$

$$I_2 = \frac{V_2 - 0}{R_1}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{V_2 - V_0}{R_2}$$

$$I_1 = \frac{-V_i}{R_1} = \frac{V_i - V_2}{R_2} \Rightarrow \frac{-R_2 V_i}{R_1} = V_i - V_2 \Rightarrow V_2 = V_i + \frac{R_2 V_i}{R_1} = V_i\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = V_i\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right.$$

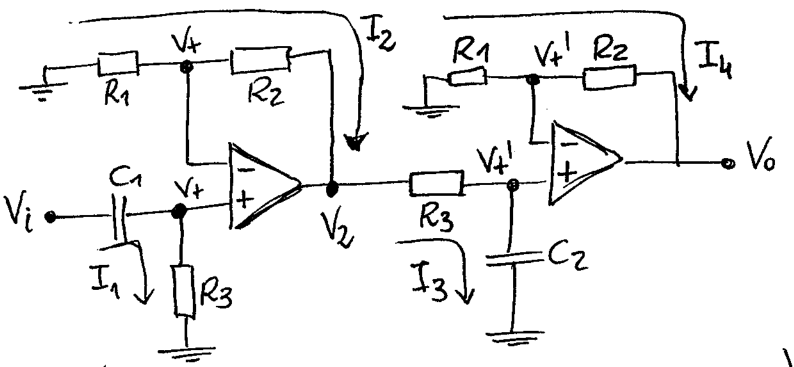
$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{-V_i}{R_1} + \frac{-V_2}{R_1} = \frac{V_2 - V_0}{R_2} \Rightarrow -R_2V_i - R_2V_2 = R_1V_2 - R_1V_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_2V_i - V_2(R_2+R_1) = -R_1V_0 \Rightarrow -R_2V_i - V_i\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)(R_2+R_1) = -R_1V_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{V_i} = \frac{-R_2 - \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)(R_2+R_1)}{-R_1}$$

b) $R_1 = 1K\Omega$, $R_2 = 10K\Omega$ $\quad \boxed{A_v = 131.}$

10.



$$I_1 = \frac{V_i - V_+}{Z_{C1}} = \frac{V_+ - 0}{R_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_3V_i - R_3V_+ = Z_{C1}V_+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_+ = \frac{R_3V_i}{R_3 + Z_{C1}}$$

$$I_2 = \frac{0 - V_+}{R_1} = \frac{V_+ - V_2}{R_2} \Rightarrow -R_2V_+ = R_1V_+ - R_1V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{V_+(R_1+R_2)}{R_1} = \frac{R_3V_i}{(R_3+Z_{C1})} \cdot \frac{(R_1+R_2)}{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = V_i \cdot \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1(R_3+Z_{C1})}$$

$$I_3 = \frac{V_2 - V_+'}{R_3} = \frac{V_+' - 0}{Z_{C2}} \Rightarrow Z_{C2}V_2 - Z_{C2}V_+' = R_3V_+' \Rightarrow V_+' = \frac{Z_{C2}V_2}{Z_{C2}+R_3} = V_i\frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1(R_3+Z_{C1})}\cdot\frac{Z_{C2}}{(Z_{C2}+R}$$

$$I_4 = \frac{0 - V_+'}{R_1} = \frac{V_+' - V_0}{R_2} \Rightarrow -R_2V_+' = R_1V_+' - R_1V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{V_+'(R_1+R_2)}{R_1} \Rightarrow$$

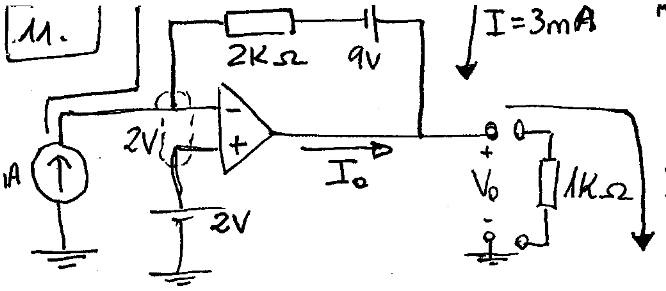
$$\Rightarrow V_0 = V_i \cdot \frac{R_3(R_1+R_2)Z_{C2}\cdot(R_1+R_2)}{R_1(R_3+Z_{C1})(Z_{C2}+R_3)R_1} \Rightarrow A_v = \frac{V_0}{V_i} = \frac{R_3Z_{C2}(R_1+R_2)(R_1+R_2)}{R_1^2(R_3+Z_{C1})(R_3+Z_{C2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{R_3(R_1+R_2)(R_1+R_2)}{R_1^2(R_3+Z_{C1})(j\omega C_2R_3+1)} = \boxed{\frac{(R_1+R_2)^2}{R_1^2}\cdot\frac{j\omega C_1R_3}{(1+j\omega C_1R_3)(1+j\omega C_2R_3)}}$$

$$\boxed{|A_v| = \left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \frac{\omega C_1R_3}{\sqrt{1+(\omega C_1R_3)^2}\sqrt{1+(\omega C_2R_3)^2}}} \quad \boxed{\varphi = \pi - \operatorname{arctg}(\omega C_1R_3) - \operatorname{arctg}(\omega C_2R_3)}$$

$R_1 = 10K\Omega \quad R_2 = 100K\Omega \quad R_3 = 20K\Omega \quad R_4 = 1K\Omega \quad C = 4nF$

11.

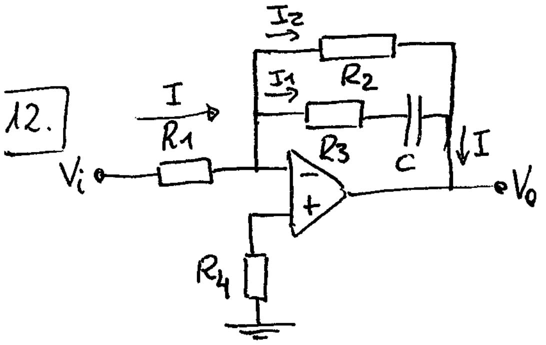


a) $2V - 3mA \cdot 2K\Omega + 9V = V_0 \Rightarrow \boxed{V_0 = 5\ V}$

b) $I_L = \frac{V_0 - 0}{1K\Omega} = \frac{5}{1000} = 5mA$

$I + I_0 = I_L \Rightarrow \boxed{I_0 = I_L - I = 5mA - 3mA = 2mA}$

12.



a) $\begin{cases} I = \frac{V_i - 0}{R_1} \\ I_1 = \frac{0 - V_0}{R_3 + Z_C} \\ I_2 = \frac{0 - V_0}{R_2} \end{cases}$ $\qquad I = I_1 + I_2$

$$\frac{V_i}{R_1} = \frac{-V_0}{R_3 + Z_C} + \frac{-V_0}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_i}{V_0} = \frac{-R_1}{R_3 + Z_C} + \frac{-R_1}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_v^{-1} = R_1\left(\frac{-1}{R_3+Z_C} + \frac{-1}{R_2}\right) = -R_1\left(\frac{R_2 + (R_3 + Z_C)}{R_2(R_3+Z_C)}\right) = \frac{-R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2 + R_3 + Z_C}{R_3 + Z_C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3 + 1/j\omega C}{R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C}} = \boxed{\frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + j\omega C R_3}{1 + j\omega C(R_2 + R_3)}}$$

c) $|A_v| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\sqrt{1 + (\omega C R_3)^2}}{\sqrt{1 + (\omega C(R_2+R_3))^2}}$; $|A_v| = 20\log_{10}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + 20\log_{10}\left(\sqrt{1+(\omega C R_3)^2}\right) - 20\log_{10}\left(\sqrt{1 + (\omega C(R_2+R_3))^2}\right)$

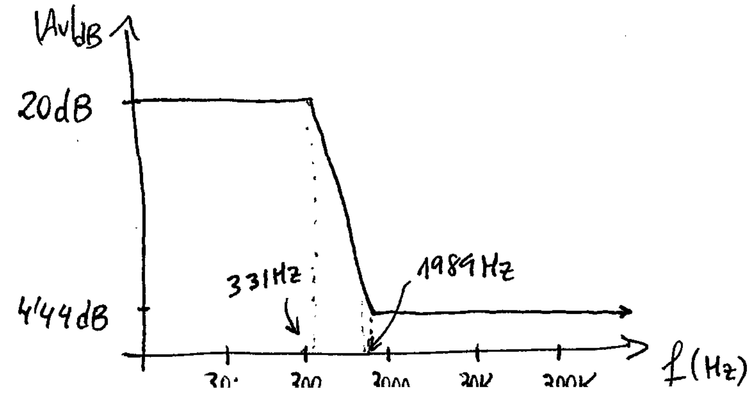
$$\varphi = \text{arctg}(\omega C R_3) - \text{arctg}(\omega C(R_2 + R_3))$$

$$|A_v| \xrightarrow[\omega \to 0]{} \frac{R_2}{R_1} = 10 \qquad |A_v| \xrightarrow[\omega \to \infty]{} \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 1'6$$

b) $\omega_1 = (CR_3)^{-1} = 12500 \frac{rd}{s} \rightarrow f_1 = \frac{12500}{2\pi} = 1989\ Hz$

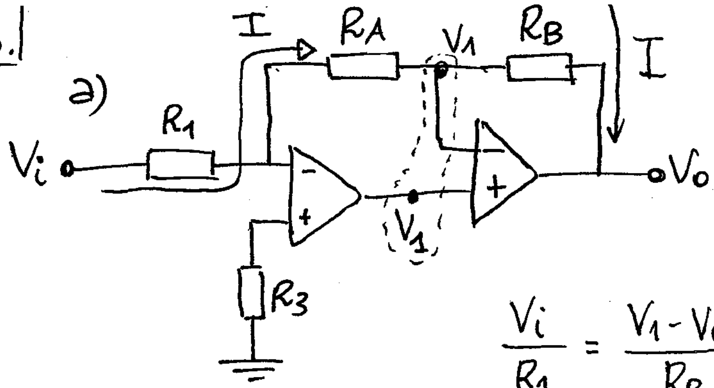
$\omega_2 = (C(R_2+R_3))^{-1} = 2083 \frac{rad}{s} \rightarrow f_2 = \frac{2083}{2\pi} = 331'5\ Hz$

d)



13.

a)



$$I = \frac{V_i - 0}{R_1} = \frac{0 - V_1}{R_A} = \frac{V_1 - V_o}{R_B}$$

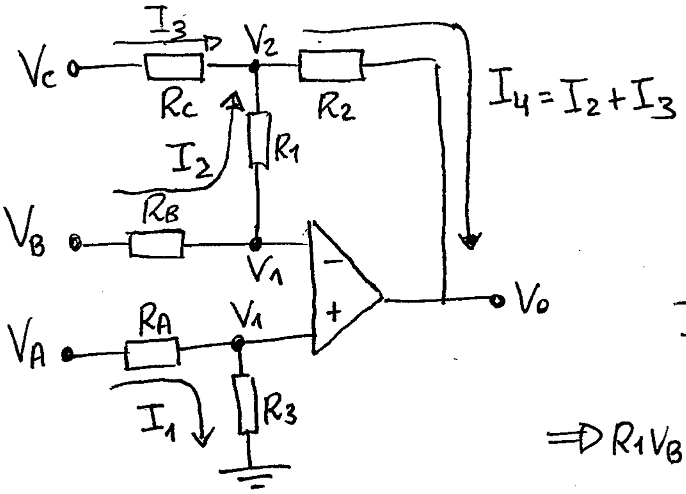
$$\frac{V_i}{R_1} = \frac{-V_1}{R_A} \rightarrow \boxed{\frac{-R_A V_i}{R_1} = V_1}$$

$$\frac{V_i}{R_1} = \frac{V_1 - V_o}{R_B} \Rightarrow R_B V_i = R_1 V_1 - R_1 V_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 V_o = R_1 V_1 - R_B V_i \Rightarrow R_1 V_o = V_i\left(\frac{-R_A \cancel{R_1}}{\cancel{R_1}} - R_B\right) = V_i(-R_A - R_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A_V = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_A + R_B}{R_1}}$$

b)



$$I_1 = \frac{V_A - V_1}{R_A} = \frac{V_1}{R_3} \Rightarrow R_3 V_A - R_3 V_1 = R_A V$$

$$\Rightarrow V_1(R_A + R_3) = R_3 V_A \Rightarrow V_1 = \frac{V_A R_3}{R_A + R_3}$$

$$I_2 = \frac{V_B - V_1}{R_B} = \frac{V_1 - V_2}{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 V_B - R_1 V_1 = R_B V_1 - R_B V_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 V_B + R_B V_2 = V_1(R_1 + R_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{V_1(R_1 + R_B)}{R_B} - \frac{R_1 V_B}{R_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{V_A R_3 (R_1 + R_B)}{R_B(R_A + R_3)} - \frac{R_1 V_B}{R_B} = \frac{V_A R_3 (R_1 + R_B) - R_1 V_B (R_A + R_3)}{R_B (R_A + R_3)}$$

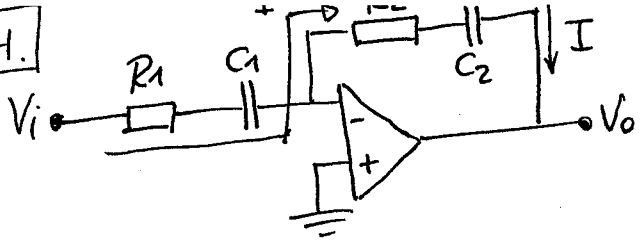
$$I_3 = \frac{V_c - V_2}{R_c} \; ; \; I_4 = \frac{V_2 - V_o}{R_2} = \frac{V_B - V_1}{R_B} + \frac{V_c - V_2}{R_c} \Rightarrow \frac{V_2 - V_o}{R_2} = \frac{R_c V_B - R_c V_1 + R_B V_c - R_B V}{R_B R_c}$$

$$\Rightarrow R_B R_c (V_2 - V_o) = R_2 R_c V_B - R_2 R_c V_1 + R_2 R_B V_c - R_2 R_B V_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B R_c V_2 - R_B R_c V_o = R_2 R_c V_B - \frac{V_A R_3 R_2 R_c}{R_A + R_3} + R_2 R_B V_c - \frac{R_2 R_B R_3 V_A (R_1 + R_B) - R_1 R_2 R_B V_B (R_A +}{R_B (R_A + R_3)}$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{-R_2 V_B}{R_B} + \frac{V_A R_3 R_2}{R_B (R_A + R_3)} - \frac{R_2 V_c}{R_c} + \frac{R_2 R_3 V_A (R_1 + R_B) - R_1 R_2 V_B (R_A + R_3)}{R_B R_c (R_A + R_3)} + V_2$$

14.



$$I = \frac{V_i - 0}{R_1 + Z_{C_1}} = \frac{0 - V_o}{R_2 + Z_{C_2}} \Rightarrow$$

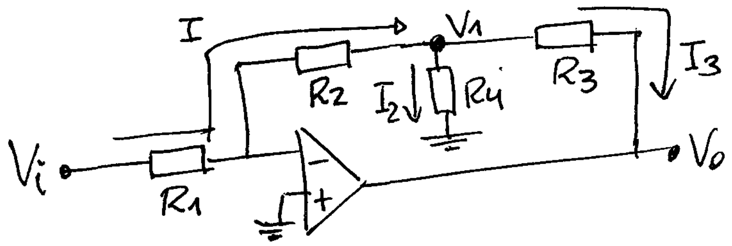
$$\Rightarrow V_i(R_2 + Z_{C_2}) = -V_o(R_1 + Z_{C_1}) \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2 + Z_{C_2}}{R_1 + Z_{C_1}} = -\frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{j\omega C_2}{j\omega C_1} \cdot \frac{j\omega C_2 R_2 + 1}{j\omega C_1 R_1 + 1} = -\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{1 + j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

$$|A_v| = \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_1)^2}} \quad ; \quad \varphi = \pi + \operatorname{arctg}(\omega C_2 R_2) - \operatorname{arctg}(\omega C_1 R_1)$$

$$|A_v| \xrightarrow{\omega \to 0} \frac{C_2}{C_1} \quad ; \quad |A_v| \xrightarrow{\omega \to \infty} \frac{C_2^2 R_2}{C_1^2 R_1}$$

15.



$$I_3 = \frac{V_1 - V_o}{R_3} = I - I_2$$

$$I = \frac{V_i - 0}{R_1} = \frac{0 - V_1}{R_2} \Rightarrow \frac{V_i}{R_1} = \frac{-V_1}{R_2} \Rightarrow V_i R_2 = -R_1 V_1 \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{-V_i R_2}{R_1}}$$

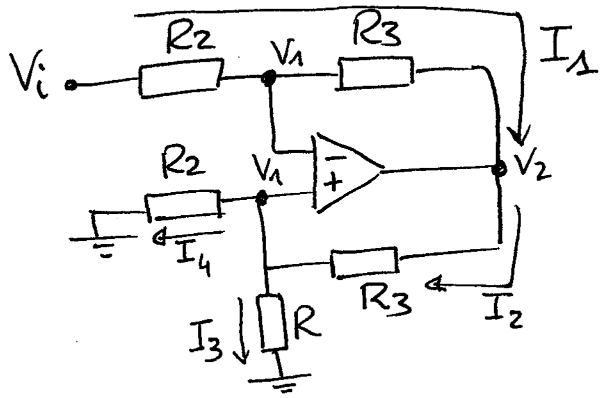
$$I_2 = \frac{V_1}{R_4} = \frac{-V_i R_2}{R_4 R_1}$$

$$\frac{V_1 - V_o}{R_3} = \frac{V_i R_2}{R_4 R_1} + \frac{V_i}{R_1} = \frac{V_i R_2 + V_i R_4}{R_1 R_4} = \frac{V_i(R_4 + R_2)}{R_1 R_4} \Rightarrow R_1 R_4 V_1 - R_1 R_4 V_o = V_i R_3 (R_4 + R$$

$$\Rightarrow -R_1 R_4 V_o = V_i R_3 (R_4 + R_2) + \frac{R_1 R_4 V_i R_2}{R_1} \Rightarrow -R_1 R_4 V_o = V_i \left(R_3 (R_4 + R_2) + R_2 R_4 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_3(R_4 + R_2) + R_2 R_4}{-R_1 R_4}}$$

16.



$$V_i - I_1 R_2 = R_2 I_4$$

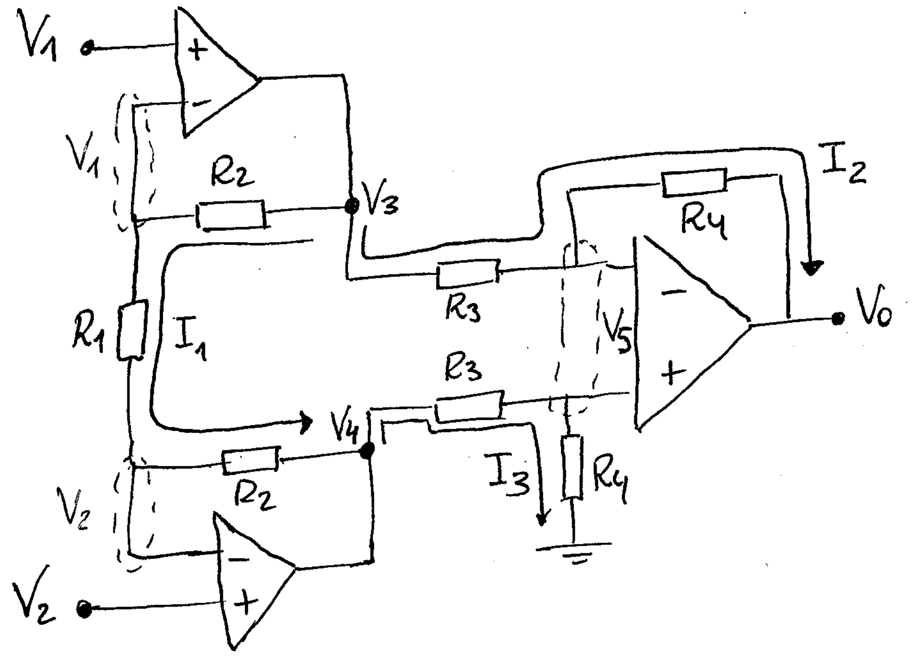
$$-I_1 R_3 = R_3 I_2$$

$$I_4 R_2 = I_3 R$$

$$I_4 = I_2 - I_3$$

$$I_2 = \frac{-I_1 R_3}{R_3} = -I_1 \quad ; \quad I_3 = \frac{I_4 R_2}{R} \quad ; \quad I_4 = \frac{V_i}{R_2} - I_1$$

17.



$$I_1 = \frac{V_3 - V_1}{R_2} = \frac{V_1 - V_2}{R_1} \Rightarrow R_1V_3 - R_1V_1 = R_2V_1 - R_2V_2 \Rightarrow \boxed{V_3 = \frac{V_1(R_1+R_2) - R_2V_2}{R_1}}$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} = \frac{V_2 - V_4}{R_2} \Rightarrow R_2V_1 - R_2V_2 = R_1V_2 - R_1V_4 \Rightarrow \boxed{V_4 = \frac{V_2(R_1+R_2) - R_2V_1}{R_1}}$$

$$I_3 = \frac{V_4 - V_5}{R_3} = \frac{V_5}{R_4} \Rightarrow R_4V_4 - R_4V_5 = R_3V_5 \Rightarrow \boxed{V_5 = \frac{R_4V_4}{R_3+R_4}}$$

$$R_4V_3 - R_4V_5 = R_3V_5 - R_3V_0 \iff V_5(R_3+R_4) = R_3V_0 + R_4V_3$$

$$\frac{R_4V_4}{(R_3+R_4)} \cdot (R_3+R_4) = R_3V_0 + R_4 \cdot \frac{V_1(R_1+R_2) - R_2V_2}{R_1}$$

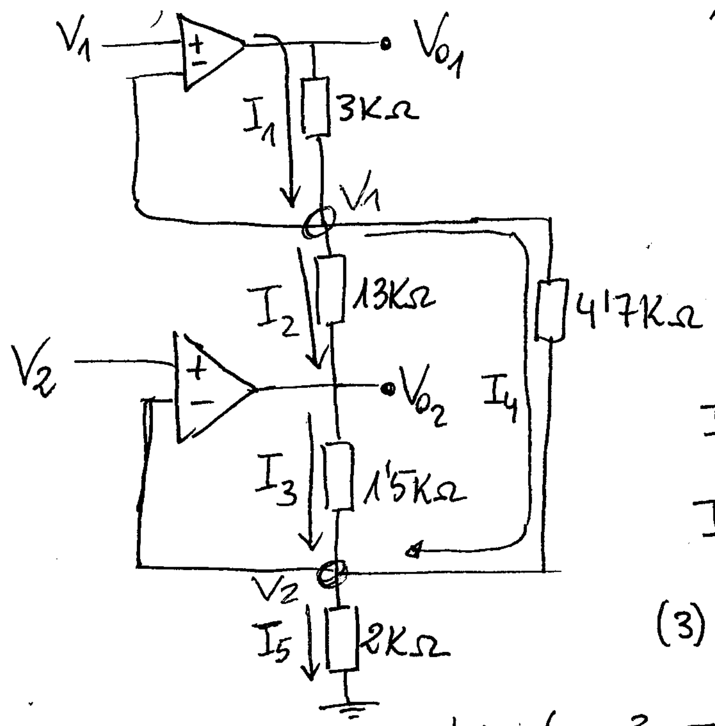
$$V_0 = R_4V_4 - R_4 \cdot \frac{V_1(R_1+R_2) - R_2V_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}V_4 - \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{V_1(R_1+R_2) - R_2V_2}{R_1}$$

$$V_0 = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{V_2(R_1+R_2) - R_2V_1}{R_1} - \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{V_1(R_1+R_2) - R_2V_2}{R_1}$$

$$V_0 = \frac{R_4}{R_3}\left(\frac{(R_1+R_2)(V_2-V_1) + R_2(V_2-V_1)}{R_1}\right) = \frac{R_4}{R_3}\left(\frac{(R_1+2R_2)(V_2-V_1)}{R_1}\right)$$

$$V_0 = \frac{R_4}{R_3}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)(V_2 - V_1) \quad \square$$

18. $V_1 = 14'7V \quad V_2 = 10V$



a) $I_1 = I_2 + I_4$

$I_5 = I_4 + I_3$

$I_5 = \frac{V_2}{2K\Omega} = \frac{10}{2000} = 5mA \Rightarrow \boxed{I_5 = 5mA}$

(1) $1'5KI_3 + 13KI_2 = 4'7KI_4$

(2) $I_3 + I_4 = 5mA$

$I_2 = \frac{V_1 - V_{o2}}{13K} \Rightarrow V_{o2} = V_1 - 13KI_2$

$I_3 = \frac{V_{o2} - V_2}{1'5K} \Rightarrow V_{o2} = 1'5KI_3 + V_2$

(3) $V_1 - 13KI_2 = 1'5KI_3 + V_2$

$I_3 = 5.10^{-3} - I_4$; $\begin{cases} 1'5K(5.10^{-3} - I_4) + 13KI_2 = 4'7KI_4 \\ V_1 - 13KI_2 = 1'5K(5.10^{-3} - I_4) + V_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 7'5 - 1'5KI_4 + 13KI_2 = 4'7KI_4 \\ 14'7 - 13KI_2 = 7'5 - 1'5KI_4 + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7'5 + \cancel{13K}I_2 = 6'2KI_4 \\ 2'8 + \cancel{13K}I_2 = 1'5KI_4 \end{cases}$

$4'7 = 4'7KI_4 \rightarrow \boxed{I_4 = 1mA}$

$\boxed{I_3 = 4 mA}$ $\boxed{I_1 = 0'9 mA}$ $\boxed{I_2 = -0'1 mA}$

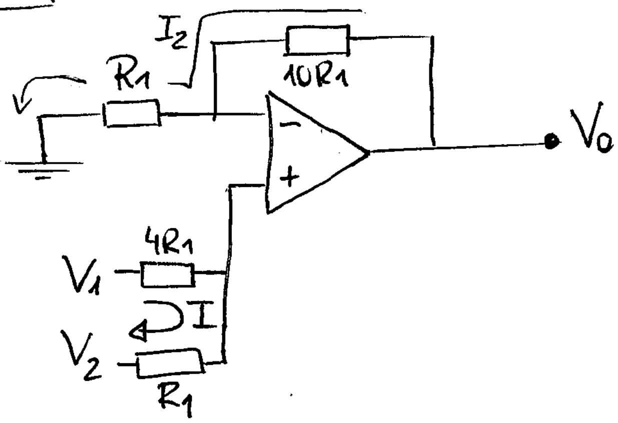
b) $V_{o2} = 14'7 - 13K.1'05.10^{-3} = 16V = 1'5K.4.10^{-3} + 10 \Rightarrow \boxed{V_{o2} = 16V}$

$V_{o1} = V_1 + I_1.3K = 14'7 + 2'7 = 17'4V \Rightarrow \boxed{V_{o1} = 17'4V}$

c)

HOJA 3 AMPLIFICADORES OPERACIONALES

1.



$$I_+ = I_- = 0$$
$$V_+ = V_-$$

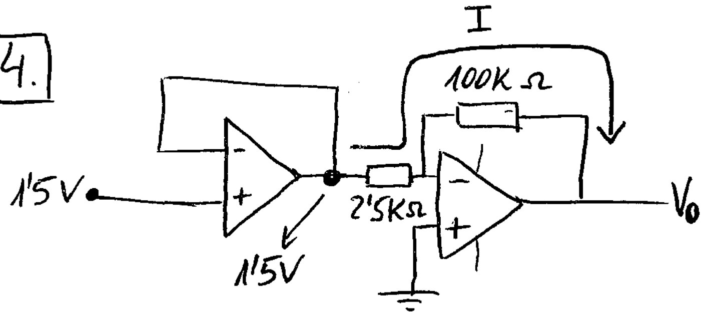
$$I = \frac{V_1 - V_2}{5R_1}$$

$$V_+ = V_2 + IR_1 = \frac{4}{5}V_2 + \frac{1}{5}V_1 = V_-$$

$$I_2 = \frac{V_- - 0}{R_1} = \frac{V_-}{R_1}$$

$$V_0 = V_- + I_2(10R_1)$$

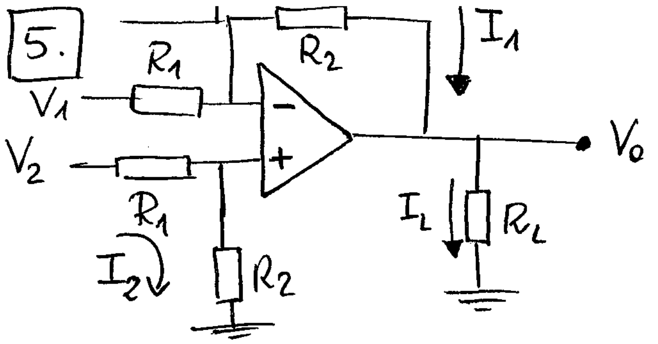
4.



$$I = \frac{1'5 - 0}{2'5K} = \frac{1'5}{2500}$$

$$V_0 = \underbrace{\cancel{V_-}}_{0} - 100KI = -100K \cdot \frac{1'5}{2500} = -60V$$

5.



$V_1 = 40mV$

$R_1 = 50K\,\Omega$

$R_2 = 150K\Omega$

a) $V_o = 500mV$; ¿V_2?

$I_2 = \frac{V_2}{R_1+R_2}$; $V_+ = I_2 . R_2 = \frac{V_2}{R_1+R_2} R_2 = V_- = \frac{3}{4} V_2$

$I_1 = \frac{V_1 - V_-}{R_1}$

$V_o = V_- - I_1 R_2 \Rightarrow V_o = \frac{3}{4} V_2 - \frac{V_1 - \frac{3}{4} V_2}{R_1} R_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0'5 = \frac{3}{4} V_2 - \frac{0'04 - 0'75 V_2}{50K} \cdot 150K \Rightarrow \cdots \Rightarrow V_2 = 207\ mV$

b) ¿I_L? ($R_L = 4K\Omega$)

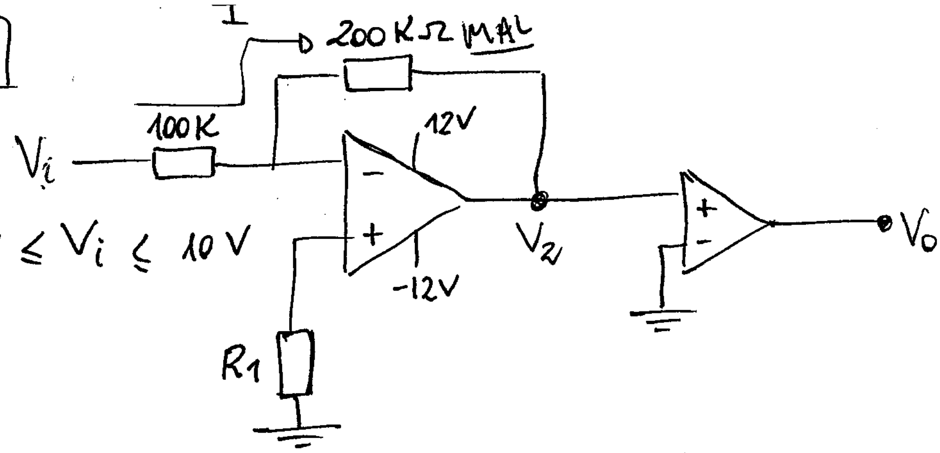
$I_L = \frac{500mV}{4K\Omega} = 125\mu A$

c) ¿I_{op}?

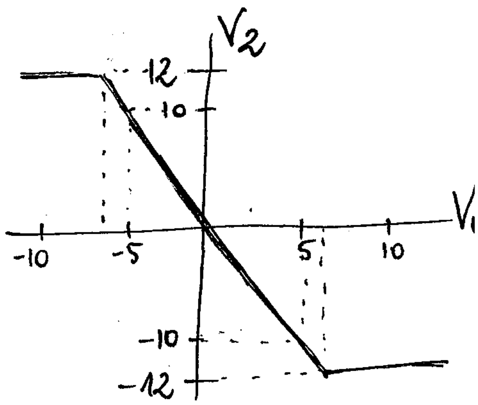
$I_1 = -2'3\mu A$

$I_{op} = I_L - I_1 = 127'3\mu A$

6.



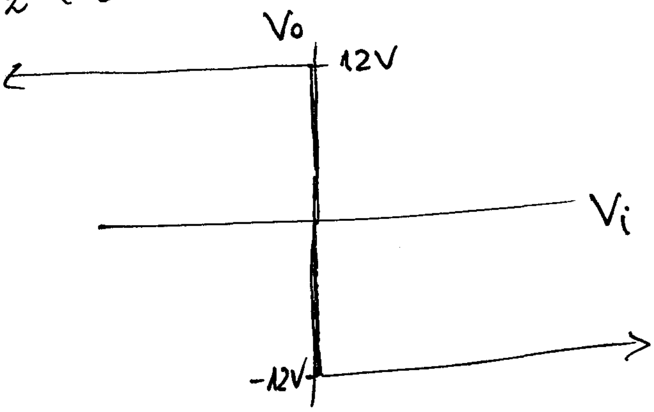
$-10V \leq V_i \leq 10V$



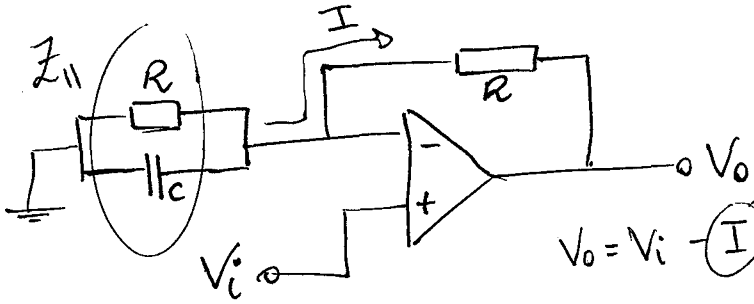
$$V_2 = -200K \cdot I = -\cancel{1}00K \cdot \frac{V_i}{100K} = -\cancel{1}V_i$$

Cuando $V_2 > 0 \rightarrow V_o = 12V$ (saturación)

Cuando $V_2 < 0 \rightarrow V_o = -12V$ (saturación)



8.



$$V_o = V_i - I R = V_i - R\frac{-V_i}{Z_{11}} = V_i\left(1 + \frac{R}{Z_{11}}\right)$$

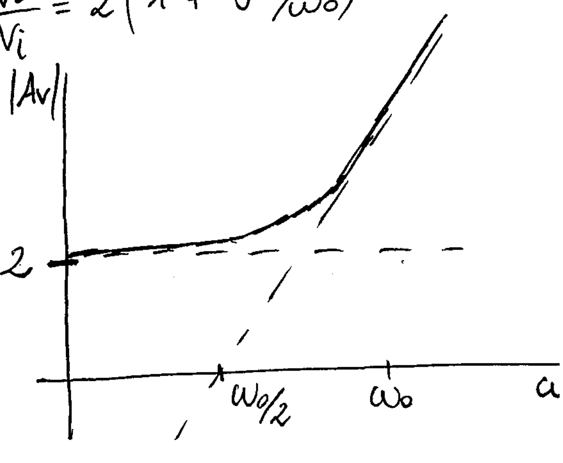
$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R}{Z_{11}} = \frac{Z_{11}+R}{Z_{11}} = \frac{(j\omega C + \frac{1}{R})^{-1} + R}{(j\omega C + \frac{1}{R})^{-1}} = \frac{1+1+j\omega CR}{1} = 2 + j\omega CR =$$

$$= 2\left(1 + j\omega C\frac{R}{2}\right) \qquad \omega_0 = \frac{2}{CR} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_o}{V_i} = 2\left(1 + j\omega/\omega_0\right)$$

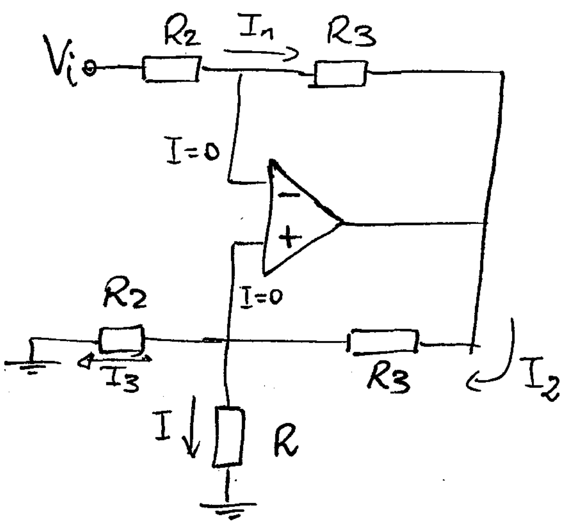
$$|A_v| = 2\sqrt{1 + \left(\omega C\frac{R}{2}\right)^2} = 2\cdot\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

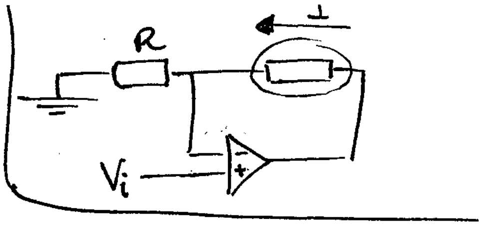
$\omega \rightarrow 0$: $|A_v| \rightarrow 2$

$\omega \rightarrow \infty$: $|A_v| \Rightarrow \frac{2\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0/2}$



16.

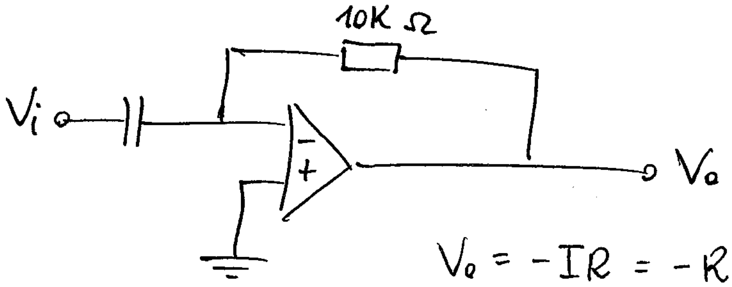




$$\begin{cases} I_2 = I + I_3 \\ V_i - R_2 I_1 = I_3 R_2 \\ I_3 R_2 = I R \\ I_2 R_3 = -I_1 R_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I = \frac{-V_i}{R_2}}$$

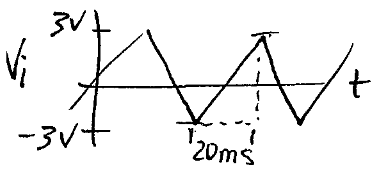
3.



$$V_o = -IR = -R \cdot \frac{d(V_c \cdot C)}{dt} = -RC \cdot \frac{dV_i}{dt}$$

$$\nearrow -RC \cdot \frac{6V}{20ms}$$

$$\searrow -RC \cdot \frac{-6V}{20ms}$$



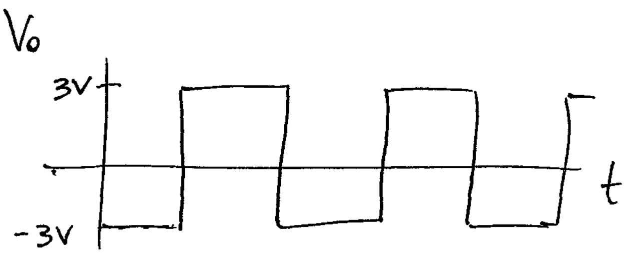
$$R \cdot C = 10^{-2}\ s$$

$f = 25\ Hz$

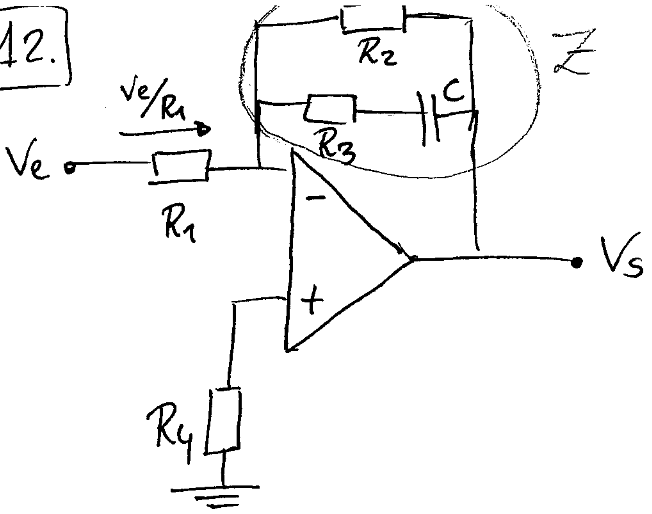
$T = 40\ ms$

$$V_o = -10^{-2} \cdot \frac{6}{2 \cdot 10^{-2}} = -3V$$

$$V_o = -10^{-2} \cdot \frac{-6}{2 \cdot 10} = 3V$$



$\boxed{12.}$



$$A_v = \frac{-Z}{R_1} = \frac{-1}{R_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + Z_C}} =$$

$\times R_2 \times (R_3 + Z_C)$

$$= \frac{-1}{R_1} \cdot \frac{R_2 (R_3 + Z_C)}{R_3 + Z_C + R_2} =$$

$$= \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3 + \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$= -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + j\omega C R_3}{1 + j\omega C (R_2 + R_3)}$$

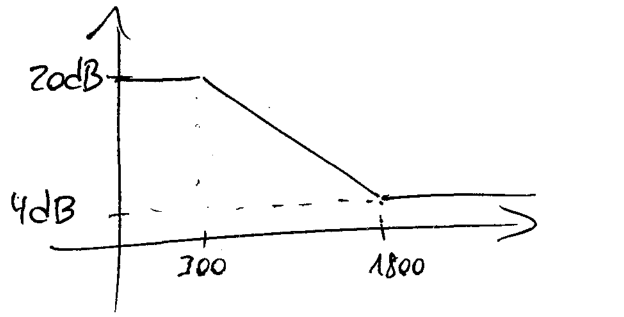
$$|A_v| = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right]^{1/2}}{\left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right]^{1/2}}$$

$$\omega_2 = [C R_3]^{-1} \Rightarrow f_2 = 30\ Hz$$

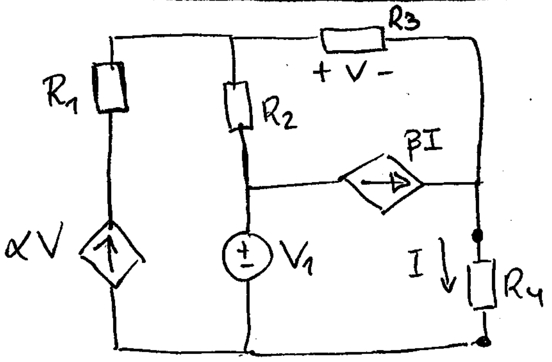
$$\omega_1 = [C (R_2 + R_3)]^{-1} \Rightarrow f_1 = 1800\ Hz$$

$$|A_v| \xrightarrow{\omega \to 0} \frac{R_2}{R_1}$$

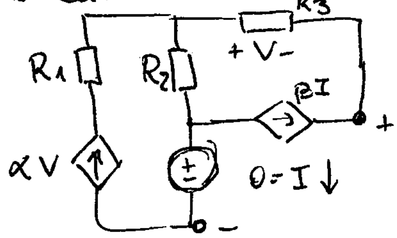
$$|A_v| \xrightarrow{\omega \to \infty} \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

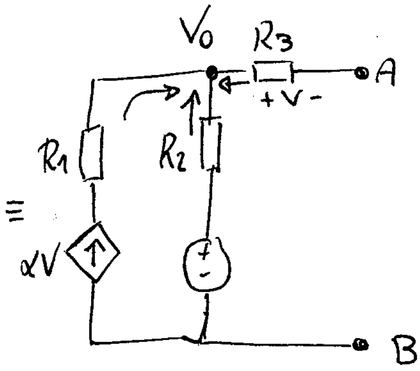


EXAMEN DE AÑOS ANTERIORES

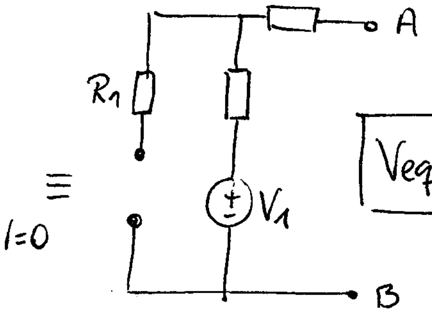


▶ Calculamos V_{Th}:



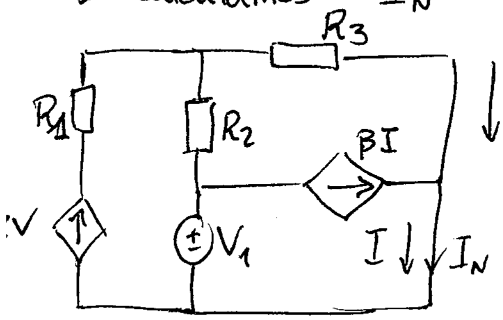


$$\alpha V + \frac{V_1 - V_0}{R_2} = 0$$



$$\boxed{V_{eq} = V_1}$$

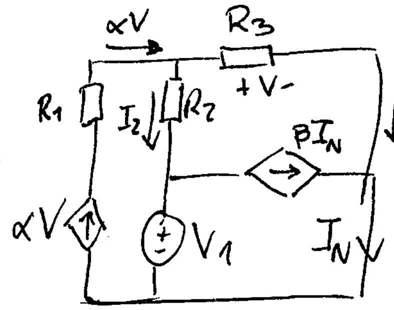
▶ Calculamos I_N:



$I_N - \beta I$

$I = I_N$

$\Rightarrow$



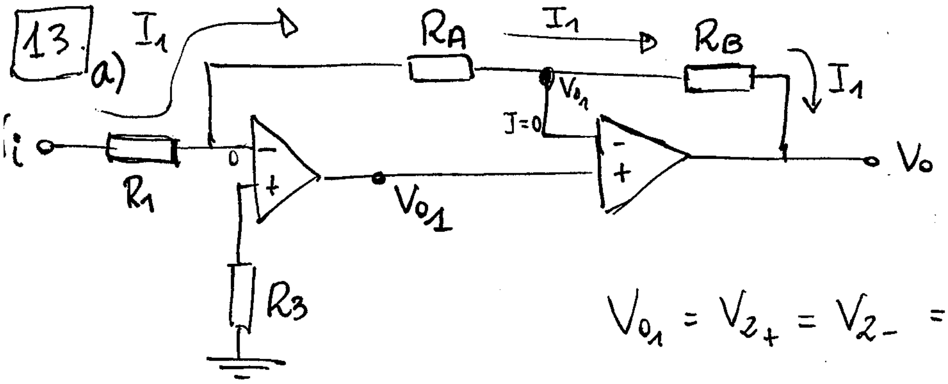
$I_N - \beta I_N = I_N(1-\beta)$

$I_2 = \alpha V - I_N(1-\beta)$

$$\begin{cases} V_1 + R_2(\alpha V - I_N(1-\beta)) - R_3 I_N(1-\beta) = 0 \\ V = R_3 \cdot I_N(1-\beta) \end{cases}$$

$$R_{eq} = R_4 = \frac{V_{Th}}{I_N}$$ despejar de aquí

13. a)



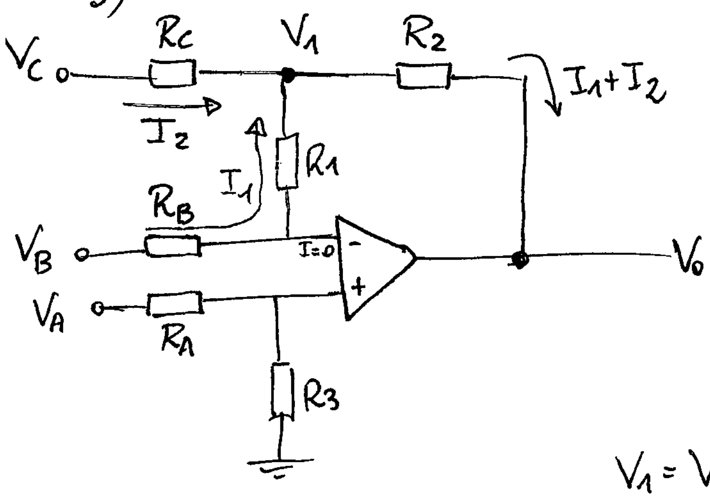
$$V_{o1} = V_{2+} = V_{2-} = -R_A I_1 = -R_A \cdot \frac{V_i}{R_1}$$

$$V_o = V_{o1} - I_1 R_B = -R_A \cdot \frac{V_i}{R_1} - R_B \frac{V_i}{R_1} =$$

$$= -V_i \frac{R_A + R_B}{R_1}$$

$$\boxed{\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_A + R_B}{R_1}}$$

b)



$$V_+ = \frac{V_A}{R_A + R_3} \cdot R_3$$

$$I_1 = \frac{V_B - V_+}{R_B}$$

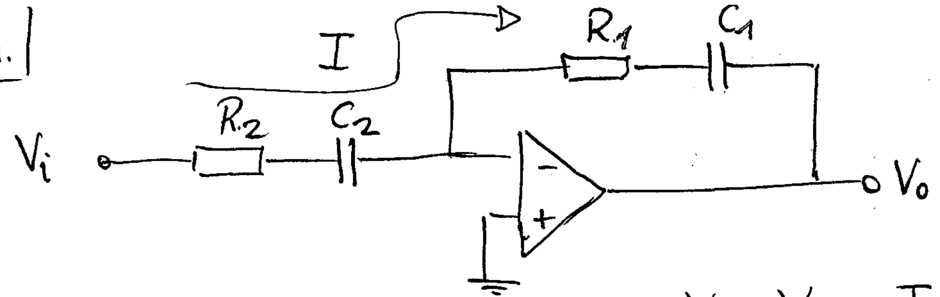
$$V_1 = V_+ - I_1 R_1$$

$$I_2 = \frac{V_C - V_1}{R_C}$$

sustituir todo esto aquí

$$\boxed{V_o = V_1 - (I_1 + I_2) R_2}$$

$\boxed{14.}$



$$V_0 = V_- - I(R_2 + Z_{C_2}) = -V_i \frac{R_1 + Z_{C_1}}{R_2 + Z_{C_2}}$$

$$A_v = \frac{V_0}{V_i} = -\frac{R_1 + Z_{C_1}}{R_2 + Z_{C_2}} = -\frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = -\frac{j\omega C_2}{j\omega C_1} \cdot \frac{1 + j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

$$A_v = -\frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{1 + j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

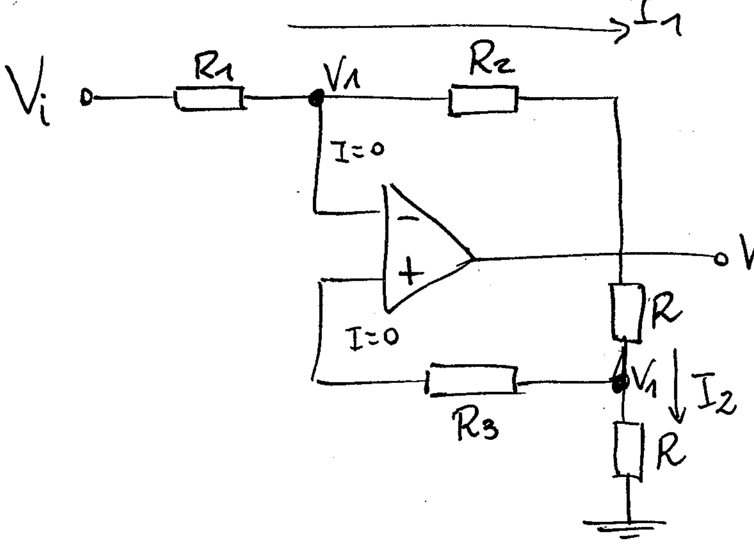
$$|A_v| = \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_1)^2}}{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_2)^2}}$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}(\omega C_1 R_1) - \operatorname{arctg}(\omega C_2 R_2)$$

$$|A_v| \xrightarrow{\omega \to 0} \frac{C_2}{C_1}$$

$$|A_v| \xrightarrow{\omega \to \infty} \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

EJERCICIO EXAMEN



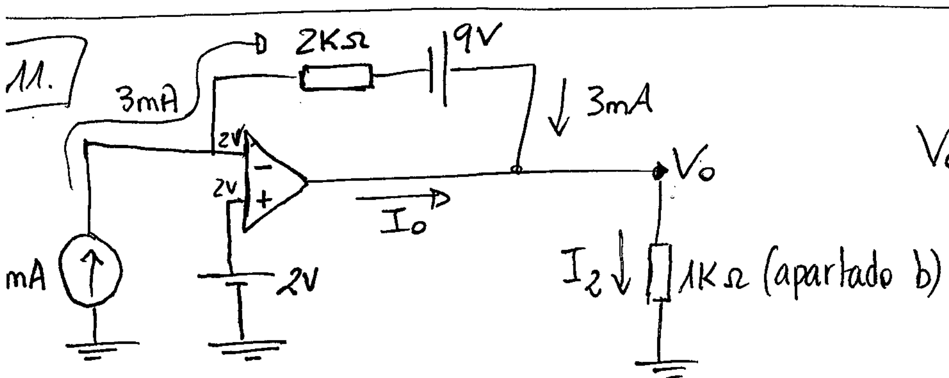
a)
$$\left\{\begin{aligned} V_0 &= V_i - (R_1 + R_2) I_1 \\ V_0 &= 2 R I_2 \\ V_1 &= V_i - I_1 R_1 \\ I_2 &= \frac{V_0 - V_1}{R} \end{aligned}\right.$$

$$\rightarrow \quad \frac{V_0}{V_i} = \frac{2R_2}{R_2 - R_1}$$

b) ¿Z_i? (impedancia de entrada)

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{V_i}{I_1} = R_1 - R_2$$

11.

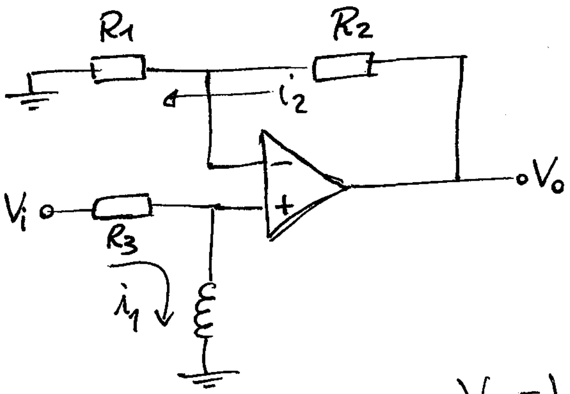


$$V_0 = 2V - 3mA \cdot 2K\Omega + 9V = 5V$$

b) $I_2 = \dfrac{V_0 - 0}{1K\Omega} = 5mA$

$$I_0 = 5mA - 3mA = 2mA$$

EJERCICIO EXAMEN



$$V_+ = V_- = i_1 \cdot Z_L = V_i \cdot \frac{Z_L}{R_3 + Z_L}$$

$$i_2 = \frac{V_+}{R_1} = V_i \frac{Z_L}{R_1 (R_3 + Z_L)}$$

$$V_0 = V_+ + i_2 . R_2 = V_i \cdot \frac{Z_L}{R_3 + Z_L} + V_i \frac{R_2 Z_L}{R_1 (R_3 + Z_L)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0 = V_i \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{Z_L}{R_3 + Z_L}$$

$$A_v = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{j\omega L}{R_3 + j\omega L}$$

$$|A_v| = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{\omega L / R_3}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R_3{}^2}}} \quad ; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R_3}\right)$$

$$|A_v| \xrightarrow{\omega \to 0} 0 \qquad |A_v| \xrightarrow{\omega \to \infty} \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$\varphi \xrightarrow{\omega \to 0} \frac{\pi}{2} \qquad \varphi \xrightarrow{\omega \to \infty} 0$$