HOJA DE EJERCICIOS 4: Combinatoria **EDyL 2015-2016**

[Fecha de publicación: 2015/11/17]
[Fecha de entrega: 2015/11/26, 09:00]
[Resolución en clase: 2015/11/26]

NOTA: Incluye explicaciones para tus respuestas. Un ejercicio cuya respuesta es correcta, pero que no incluye explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 1:

(a) ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con (todas) las letras de la palabra RECONOCER?

Solución:
9 letras en total, 2 Rs, 2 Es, 2 Cs, 2 Os, 9!/2!2!2!2!

(b) ¿Cuántas empiezan o acaban por la letra R?

Solución:
Empiezan por R: x1 = 8!/2!2!2!
Acaban por R: x2 = 8!/2!2!2!
Empiezan y acaban por R: x3 = 7!/2!2!2!
La solución es x1 + x2 – x3

(c) ¿Cuántas son palíndromos (palabras "capicúa")?

Solución:
Pongo la N en el medio, una letra de cada pareja al principio y permuto: 4! = 24

(d) ¿Cuántas contienen 2 Es seguidas y no contienen 2 Rs seguidas?

Solución:
Primero coloco todas las letras menos las Rs, las 2 Es van seguidas de modo que las considero un único símbolo: EE-C-O-N-O-C, 6!/2!2!
Ahora coloco las Rs en dos de los posibles huecos (7 huecos) que determinan las letras anteriores: C(7,2)
La solución es el producto: C(7,2)*6!/2!2!
Otra forma de verlo:
(total) – (casos que tienen 2 Rs seguidas) = 8!/2!2!2! – 7!/2!2!

EJERCICIO 2: Tengo 12 peras, 5 manzanas y 7 mandarinas, y dos fruteros distintos (verde y azul).

(a) ¿De cuántas maneras puedo colocar las frutas en los fruteros?

Solución:
Coloco las peras, manzanas y mandarinas de manera independiente:
Peras: 13 formas (12 pelotas en 2 cajas, CR(2,12) = C(13,12) = 13)
Manzanas: 6 formas
Mandarinas: 8 formas
La solución es el producto 13*6*8 = 624

(b) ¿De cuántas maneras puedo colocar las frutas en los fruteros si en cada frutero debe haber un mínimo de 5 frutas?

Solución:
Tenemos que descontar los casos en los que en un frutero hay 4, 3, 2, 1 o 0 frutas.
4 frutas, pueden ser peras, manzanas o mandarinas, CR(3,4) = C(6,4) = 15
3 frutas, CR(3,3) = C(5,3) = 10
Para 2, 1, y 0 frutas obtenemos 6, 3 y 1 formas respectivamente. En total nos salen 15+10+6+3+1 = 35 casos, multiplicando por dos fruteros 70 casos que hay que descontar del total.
La solución es por tanto 624 – 70 = 554

EJERCICIO 3: En una tienda de todo a 1 euro venden 7 tipos de productos.

a. ¿De cuántas formas distintas me puedo gastar 20 euros en la tienda?

Solución:
Esto es como meter 20 pelotas en 7 cajas: CR(7,20) = C(26,20) = 26!/20!6!

b. ¿De cuántas formas distintas me puedo gastar 20 euros en la tienda si quiero comprar al menos 3 productos distintos?

Solución:
Tenemos que restar los casos en los que me llevo sólo 1 o 2 productos.
1 producto: 7 maneras distintas
2 productos: primero elijo los 2 productos que me llevo, C(7,2), luego asigno un euro a cada uno de ellos y reparto los 18 euros restantes entre esos 2 productos, CR(2,18) = C(19,18) = 19. Me salen 19*C(7,2) = 19*21 = 399
El resultado es 26!/20!6! – 7 - 399

EJERCICIO 4: Siete amigos van de viaje en dos coches distintos. En cada coche pueden viajar un máximo de 5 personas.

a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir en los coches? No importa en qué orden se sientan, sólo quiénes van en cada coche.

Solución: En el primer coche pueden ir 2, 3, 4 o 5 personas, el resto van en el segundo coche. Para cada caso calculamos las posibles combinaciones:
2 personas en el primer coche: C(7,2) = 21
3 personas en el primer coche: C(7,3) = 35
4 personas en el primer coche: C(7,4) = 35
5 personas en el primer coche: C(7,5) = 21
El resultado final es la suma 21 + 35 + 35 + 21 = 112

b) ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir en los coches si sólo hay dos conductores? No importa en qué orden se sientan, sólo quiénes van en cada coche.

Solución: De los no conductores, en el primer coche pueden ir 1, 2, 3 o 4 personas, el resto van en el segundo coche. Para cada caso calculamos las posibles combinaciones:
1 persona en el primer coche: C(5,1) = 5
2 personas en el primer coche: C(5,2) = 10
3 personas en el primer coche: C(5,3) = 10
4 personas en el primer coche: C(5,4) = 5
La suma es 5 + 10 + 10 + 5 = 30. Este número lo tenemos que multiplicar por 2, que son las formas de colocar a los conductores (conductor 1 en el coche 1 o conductor 1 en el coche 2). El resultado final es 30 x 2 = 60.

EJERCICIO 5: La máquina de bebidas se ha vuelto loca e, independientemente de la bebida que selecciones, te da una al azar. Hay cuatro tipos diferentes de bebidas en la máquina. Decidimos comprar cinco bebidas.

a) ¿De cuántas maneras distintas puede la máquina sacar las bebidas? No importa el orden en el que salen y puede suponerse que hay más de 5 bebidas de cada tipo.

Solución: Esto es como meter 5 pelotas en 4 cajas. La solución es CR(4, 5) = C(8, 5) = 56

b) Si cada una de las bebidas es para una persona distinta, ¿de cuántas maneras distintas puede acabar esta experiencia? Puede suponerse que hay más de 5 bebidas de cada tipo.

Solución: La primera persona puede recibir 4 bebidas diferentes, la segunda otras 4, y así con todas. Por tanto la solución es 4^5 = 1024.

EJERCICIO 6: Cuatro niños se reparten 9 caramelos. ¿De cuántas maneras distintas pueden hacerlo de forma que ninguno se quede sin caramelos y que ninguno consiga más de 3?

SOLUCIÓN: Todos los niños reciben al menos 1 caramelo, por tanto hay que repartir los 5 caramelos restantes.

Repartir 5 caramelos entre cuatro niños es como meter 5 bolas en cuatro cajas: C(8,3) = 56.

Esto es el total, pero de aquí hay que descontar los casos en los que uno de los niños recibe 4 o más caramelos (asignamos 4-1-1-1 y repartimos los 2 caramelos que quedan, no puede ocurrir que dos niños tengan 4 caramelos, multiplicamos por 4 porque también hay que considerar 1-4-1-1, 1-1-4-1 y 1-1-1-4): 4*C(5,3) = 4*10 = 40

El resultado es 56 – 40 = 16

EJERCICIO 7: Me quedan 5 días de vacaciones, que tengo que gastar entre los días 22 de diciembre y 9 de enero (ver calendario adjunto). Los días 25 de diciembre, 1 de enero y 6 de enero son festivos, y mi jefe no me deja que en una misma semana trabaje menos de dos días. ¿De cuántas maneras distintas puedo organizar mis vacaciones?

L	M	X	J	V	S	D
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11

SOLUCIÓN: No puedo coger 3 días en la misma semana, de modo que tengo que hacer 2-2-1 ó 2-1-2 ó 1-2-2. En la semana con 1 día, este día lo puedo elegir de 4 maneras distintas, en las semanas con 2 días, estos los puedo elegir de C(4,2) = 6 maneras distintas. Por tanto el resultado es:

6*6*4*3 = 432

EJERCICIO 8: ¿Cuántas frases distintas se pueden formar con las letras de la frase "DIE WANNA WANGA" en cada uno de los supuestos siguientes?

(a) Las letras pueden cambiar de posición, pero los espacios no. Una frase válida en este caso sería por ejemplo "WAN DIENA WANGA".

SOLUCIÓN: 13 letras, 2xW, 4xA, 3xN, 1xDIEG, P(13,2,4,3) = 13!/(2!4!3!)

(b) Las letras pueden cambiar de posición sólo dentro de cada palabra. Una frase válida en este caso sería por ejemplo "IDE WANNA WANGA".

SOLUCIÓN:

Palabra 1: 3! = 6
Palabra 2: 5!/(2!2!) = 30
Palabra 3: 5!/(2!) = 60
El resultado es 6*30*60

EJERCICIO 9: ¿Cuántas frases distintas se pueden formar con las letras de la frase "WOOSSIE JAWAMBA BOOG" en cada uno de los supuestos siguientes?

(a) Las letras pueden cambiar de posición, pero los espacios no. Una frase válida en este caso sería por ejemplo "WOOSWAJ EISAMBA BOOG".

SOLUCIÓN: 18 letras, 4xO, 3xA, 2xW, 2xS, 2xB 1xMEIJG, P(18,4,3,2,2,2) = 18!/(4!3!2!2!2!)

(b) Las letras pueden cambiar de posición sólo dentro de cada palabra. Una frase válida en este caso sería por ejemplo "EISSOOW JAWAMBA BOOG".

SOLUCIÓN:

Palabra 1: 7!/(2!2!) = 1260
Palabra 2: 7!/3! = 840
Palabra 3: 4!/2! = 12
El resultado es 1260*840*12

EJERCICIO 10: En una colección de cromos hay 100 cromos distintos. Los cromos se venden en sobres de 5.

(a) ¿Cuántos sobres distintos puedo comprar si en un sobre puede haber cromos repetidos?

SOLUCIÓN: 5 bolas en 100 cajas, C(104,5) = 104!/(5!99!)

(b) ¿Cuántos sobres distintos puedo comprar si en un sobre no puede haber cromos repetidos?

SOLUCIÓN: Combinaciones de 100 elementos tomados de 5 en 5, C(100,5) = 100!/(5!95!)

EJERCICIO 11: En una tómbola se sortean 6 jamones entre 50 personas.

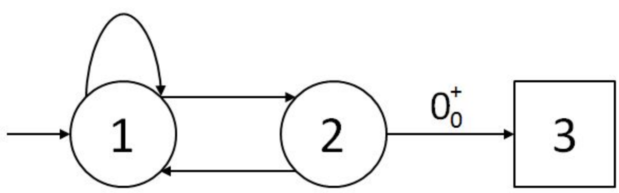
(a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir los premios si nadie puede llevarse más de un jamón?

SOLUCIÓN: Combinaciones de 50 elementos tomados de 6 en 6, C(50,6) = 50!/(6!44!)

(b) ¿De cuántas maneras se pueden repartir los premios si una misma persona puede ganar cualquier número de jamones?

SOLUCIÓN: 6 bolas en 50 cajas, C(55,6) = 55!/(6!49!)

EJERCICIO 12: Considérese la máquina de Turing representada a continuación, en la que algunas transiciones no están etiquetadas.



¿Cuántas máquinas de Turing distintas se pueden construir especificando las transiciones que no tienen etiqueta? Cada etiqueta debe especificar el símbolo leído, el símbolo que se escribe y la dirección (+ ó -) en la que se mueve el cabezal. En la cinta sólo pueden aparecer los símbolos 0 y 1.

Solución:

La transición desde el estado 2 al estado 1 se puede definir de 4 formas posibles. El símbolo leído debe ser 1 (si fuera 0 la máquina no sería determinista), pero el símbolo a escribir y el movimiento del cabezal los podemos elegir libremente (4 posibilidades).

La transición desde el estado 1 al estado 2 se puede definir de 8 formas posibles (2 opciones para el símbolo leído, 2 para el símbolo a escribir y 2 para el movimiento del cabezal). Una vez fijada esta transición, la transición desde el estado 1 al mismo estado 1 sólo se puede definir de 4 formas (ya no tenemos libertad para elegir el símbolo leído).

La solución es el producto de los tres números anteriores: 4 x 8 x 4 = 128.