Hoja 3

Decimos **curva espacial** para referirnos a cualquier curva en $\mathbb{R}^3$.
Una curva espacial α es **birregular** si su vector curvatura $\mathbf{k}$ es distinto de $\mathbf{0}$ en cada punto de α. Esto permite definir la **normal** $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$ y la **binormal** $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.
Si $\alpha(t)$ es cualquier parametrización regular (no necesariamente por longitud de arco) entonces la curva es birregular si y sólo si $\alpha'(y)$ y $\alpha''(t)$ son linealmente independientes para todo t.

---

1. Sea $\alpha(t)$ un camino regular (no necesariamente birregular) en el espacio. Demuestra que α está contenido en una esfera de centro el punto $\mathbf{p}_0$ si y sólo si los planos normales afines de α pasan todos por $\mathbf{p}_0$.

2. Sean a, b, c constantes con $c^2 = a^2 + b^2$ y $c > 0$. Consideramos la **hélice circular:**
$$\alpha(s) \equiv \left(a \cos \frac{s}{c} \, , \, a \operatorname{sen} \frac{s}{c} \, , \, b \frac{s}{c} \right) .$$
   (a) Demuestra que $\alpha(s)$ es parametrización por longitud de arco.
   (b) Halla el plano osculador, la curvatura y la torsión de α.
   (c) Comprueba que las tangentes de α forman un ángulo constante con el eje z.
   (d) Comprueba que las normales de α forman ángulo recto con el eje z.

3. Se dice que una curva en $\mathbb{R}^3$ es una **hélice generalizada** si es regular y forma un ángulo constante, no nulo, con una dirección fija (llamada *eje de hélice*). Demuestra que las hélices generalizadas con eje de hélice vertical admiten parametrizaciones de la forma:
$$\gamma(t) \equiv \big(x(t) \, , \, y(t) \, , \, c_0 + c_1 t \big) \, ,$$
siendo $\gamma_0(t) \equiv \big(x(t), y(t)\big)$ una curva plana parametrizada por longitud de arco y c_0, c_1 constantes. Demuestra que γ es birregular si y sólo si lo es γ_0.

4. Sea $\alpha(s)$ curva birregular parametrizada por longitud de arco, con curvatura k y torsión τ. Definimos una nueva curva paramétrica β mediante $\beta(s) \equiv \mathbf{t}_\alpha(s)$. Comprueba que β es parametrización regular ¿es una parametrización por longitud de arco?
Demuestra que $\mathbf{k}_\beta = \frac{\tau}{k} \mathbf{b}_\alpha - \mathbf{t}_\alpha$. (**Indicación:** calcula $\beta'(s)$ y $\beta''(s)/\|\beta'(s)\|$).

5. Sea $\alpha(s)$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Definimos una nueva parametrización $\beta(\tilde{s}) \equiv \alpha(-\tilde{s})$. Halla el triedro de Frenet, curvatura y torsión de β a partir de los de α.

6. Sea α curva birregular en el espacio. Demuestra que si todos los planos osculadores afines de α pasan por un mismo punto entonces α es plana.

7. Sea α una curva espacial birregular cuyas normales afines pasan todas por un mismo punto. Demuestra que α está contenida en una circunferencia.

8. Dada una curva espacial birregular ¿pueden pasar todas sus binormales afines por un mismo punto?

9. Demuestra que, dadas constantes cualesquiera k_0, τ_0 con $k_0 > 0$, hay una hélice circular (ejercicio 2) que las realiza como curvatura y torsión. Deduce que una curva birregular está contenida en una hélice circular si y sólo si su curvatura y su torsión son constantes.

10. Sea α curva espacial birregular y supongamos que es, además, una hélice generalizada (ver ejercicio 3). Demuestra que las normales de α son perpendiculares al eje de hélice.

11. **(Teorema de Lancret).** Sea α una curva birregular con curvatura k y torsión τ. Demuestra que las condiciones siguientes son equivalentes:

    (a) α es una hélice generalizada (ver ejercicio 3).

    (b) El vector $\mathbf{t}_\alpha$ traza una circunferencia en el espacio.

    (c) El cociente τ/k es constante.

    Indicación: el eje de hélice coincidirá con el de la circunferencia trazada por $\mathbf{t}_\alpha$.

12. Sean $\alpha(t), \beta(t) : J \to \mathbb{R}^3$ dos curvas birregulares que utilizan el mismo parámetro (no necesariamente la longitud de arco). Suponiendo que cumplen las identidades:

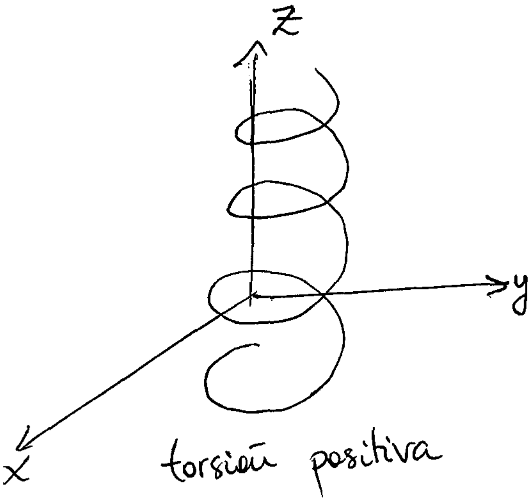
$$k_\alpha(t) \equiv k_\beta(t) \quad , \quad \tau_\alpha(t) \equiv \tau_\beta(t) \quad , \quad \|\alpha'(t)\| \equiv \|\beta'(t)\| \ ,$$

demuestra que existe un movimiento directo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(t) \equiv \varphi \circ \alpha(t)$.

HOJA 3

2. $a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad c>0 \quad c^2 = a^2+b^2$

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\,\text{sen}\frac{s}{c},\ b\frac{s}{c}\right)$$



a) Probar $\|\alpha'(s)\| = 1$

b) Hallar plano osculador, curvatura y torsión

c) ángulo $(\mathbb{t}_\alpha, \text{eje } z)$ = constante (comprobarlo)

d) ángulo $(\mathbb{n}_\alpha, \text{eje } z) = \frac{\pi}{2}$ (comprobarlo)

a) $$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\,\text{sen}\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$$

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\left(\frac{-a}{c}\,\text{sen}\frac{s}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}\right)^2 + \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}} = 1$$

b) La ecuación del plano osculador en s_0 es:

$$\langle x - \alpha(s_0), \mathbb{b}_\alpha(s_0)\rangle = 0 \quad (*)$$

$$\mathbb{t}_\alpha(s) \overset{\alpha \text{ por arco}}{=} \alpha'(s) = \left(\frac{-a}{c}\,\text{sen}\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right)$$

$$\mathbb{n}_\alpha(s) = \frac{\mathbb{t}_\alpha'(s)}{\|\mathbb{t}_\alpha'(s)\|} = \frac{\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\,\text{sen}\frac{s}{c},\ 0\right)}{|a|/c^2} = \left(-\cos\frac{s}{c},\ -\text{sen}\frac{s}{c},\ 0\right).\underbrace{\varepsilon(a)}_{\text{sgn}(a)}$$

$$\mathbb{b}_\alpha(s) = \mathbb{t}_\alpha(s) \times \mathbb{n}_\alpha(s) = \varepsilon(a)\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{a}{c}\text{sen}\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\cos\frac{s}{c} & -\text{sen}\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{b}{c}\,\text{sen}\frac{s}{c},\ \frac{-b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right).\ \varepsilon(a)$$

Sustituimos aquí (*) y obtenemos la ec. plano osculador

$$K_\alpha(s) = \|\mathbb{t}_\alpha'(s)\| = \frac{|a|}{c^2}$$

$$\tau_\alpha(s) = -\langle \mathbb{b}_\alpha'(s), \mathbb{n}_\alpha(s)\rangle = -\left\langle \varepsilon(a)\left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c^2}\,\text{sen}\frac{s}{c},\ 0\right),\ \varepsilon(a)\left(-\cos\frac{s}{c},\ -\text{sen}\frac{s}{c},\right.\right.$$

$$= +\frac{b}{c^2}$$

c) $$\cos(\measuredangle(\mathbb{t}_\alpha, e_3)) = \langle \mathbb{t}_\alpha, e_3\rangle = \frac{b}{c} = \text{constante}$$

d) $$\cos(\measuredangle(\mathbb{n}_\alpha, e_3)) = \langle \mathbb{n}_\alpha, e_3\rangle = 0 \Longrightarrow \measuredangle = \frac{\pi}{2}$$

3.| $\exists u \in \mathbb{R}^3 / \measuredangle(\alpha'(t), u) = \text{constante} \neq 0$
$u \neq 0$

Demuestra que si $u = e_3$ entonces γ se puede parametrizar como:

$\gamma(t) = (x(t), y(t), C_0 + C_1 t)$ siendo $\gamma_0(t) = (x(t), y(t))$ curva plana parametrizada por arco, $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$.

Sea entonces $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una parametrización de una hélice generalizada con eje vertical, e.d., $\measuredangle(\gamma'(t), e_3) = \text{constante}$

Podemos considerar su proyección sobre el plano XY $\gamma_0(t) = (x(t), y(t))$ que define una curva plana. Podemos suponer que γ_0 está parametrizada por arco si γ_0 es regular (γ_0 regular $\iff \gamma_0'(t) \neq 0 \ \forall t$)

$\gamma_0' = (x'(t), y'(t))$

γ_0 regular $\iff x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0 \ \forall t$

Si $x'(t_0) = y'(t_0) = 0 \Rightarrow \gamma'(t_0) = (0, 0, z'(t_0))$, pero entonces $\measuredangle(\gamma'(t_0), e_3) = 0$ contradiciendo la def. de hélice generalizada, por tanto γ_0 es regular $\Rightarrow \gamma_0$ podemos suponerla param. por arco.

esto si α estuviera parametrizada por arco

Sabemos que $\langle \gamma'(t), e_3 \rangle = c$, y entonces $z'(t) = c$

$\langle (x', y', z'), (0,0,1) \rangle = z'$

$\Rightarrow z(t) = ct + c'$, $c' \in \mathbb{R}$.

integrando z'

si no p.arc. usamos $\langle t_\alpha, u \rangle = c$ y hacemos el mismo razonamiento

$t_\alpha = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$

Demuestra ahora que γ es birregular $\iff \gamma_0$ es birregular

$\gamma' = (x', y', C_1)$
$\gamma'' = (x'', y'', 0)$
son linealmente independientes (ESTO ES LO QUE TENEMOS QUE VER)

Si $C_1 = 0$ es claro que γ' y γ'' son lin. indep. si y solo si lo son γ_0' y γ_0''.

Si $C_1 \neq 0$, ambos son linealmente independientes siempre:

γ_0' y γ_0'' lin. dep. $\overset{\gamma_0 \text{ por arco}}{\iff} \gamma_0'' = 0 \iff \gamma_0$ recta

En este caso γ' y γ'' son lin. dependientes.

<u>OTRA FORMA</u>: Usar $K_\alpha = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} \neq 0 \iff \gamma$ birregular

$\boxed{11.}$ Demostrar:

α hélice generalizada (a) $\Longleftrightarrow$ t_α traza circunferencia (b) $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\tau}{\kappa} =$ constante (c)

$\boxed{a \Leftrightarrow b}$

Supongamos que α está parametrizada por arco

$\measuredangle(t_\alpha, u) = c$ para un $u \in \mathbb{R}^3$ $\|u\| = 1 \Longleftrightarrow \langle t_\alpha, u\rangle = c$

$\Rightarrow \langle t_\alpha, u \rangle = c$

$t_\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva $t_\alpha(t) \in S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| = 1\}$

Sea Π el plano $\langle x, u \rangle = c \Rightarrow t_\alpha(s) \in \Pi \cap S^2$ circunferenci[a]

Supongamos que t_α tiene una circunferencia. Entonces como $t_\alpha(s) \in S^2$ $\forall s \in I$, se tiene que $t_\alpha(s) \in S^2 \cap \Pi$ para un cierto plano Π. Si $\langle x, u \rangle = c$ es la ecuación de Π entonces $\langle t_\alpha(s), u \rangle = c$ $\forall s \in I$, por lo que es hélice generalizada.

$\boxed{a \Leftrightarrow c}$

$\langle t_\alpha, u \rangle = c^{(*)}$ para cierto $u \in \mathbb{R}^3$, $\|u\| = 1$ y cierto $c \in \mathbb{R}$.

Derivando: $\langle \kappa_\alpha n_\alpha, u \rangle = 0 \xRightarrow[\alpha \text{ birregular } (\kappa_\alpha \neq 0)]{} \langle n_\alpha, u \rangle = 0$ [1]

$\Rightarrow \langle -\kappa_\alpha t_\alpha + \tau_\alpha b_\alpha, u \rangle = 0$

$\overset{(*)}{\parallel}$

$-\kappa_\alpha c + \tau_\alpha \langle b_\alpha, u \rangle = 0$

Tenemos que ver que $\langle b_\alpha, u \rangle$ es constante. Derivamos:

$\langle b_\alpha, u \rangle' = \langle -\tau_\alpha n_\alpha, u \rangle \overset{[1]}{=} 0 \Rightarrow \langle b_\alpha, u \rangle = \tilde{c}$

$\Rightarrow 0 = -\kappa_\alpha c + \tau_\alpha \tilde{c} \Rightarrow \dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \dfrac{c}{\tilde{c}} =$ constante (la llamos abajo λ)

"El candidato a eje de la hélice sería $u = c\, t_\alpha + 0 \cdot n_\alpha + \tilde{c}\, b_\alpha$"

Como $\|u\| = 1$, $\begin{cases} c^2 + \tilde{c}^2 = 1 \\ \dfrac{c}{\tilde{c}} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \quad c = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad \tilde{c} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

De la implicación $a \Rightarrow c$ hemos sacado esta información por ingeniería inversa.

Consideramos ahora $u(s) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} t_\alpha(s) + \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} b_\alpha(s)$

$u'(s) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \kappa_\alpha n_\alpha + \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-\tau_\alpha n_\alpha) = \dfrac{\lambda \kappa_\alpha - \tau_\alpha}{\sqrt{1+\lambda^2}} n_\alpha \overset{\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \lambda}{=} 0 \Rightarrow u$ constante

y entonces $\langle t_\alpha, u \rangle = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} =$ constante $\Rightarrow \alpha$ es hélice general. con eje dirección de u

$\boxed{1.}$

$$f(s) = \langle \mathbb{t}_\alpha(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0$$

$$f'(s) = \langle \mathbb{t}'_\alpha(s), \alpha(s) - p_0 \rangle + \langle \mathbb{t}_\alpha(s), \alpha'(s) \rangle = \underbrace{K_\alpha(s) \langle \mathbb{n}_\alpha(s), \alpha(s) - p_0 \rangle + 1}_{\substack{\| \\ 0}}$$

$$\Rightarrow K_\alpha(s) \neq 0 \qquad \rho_\alpha(s) = \frac{1}{K_\alpha(s)} \Rightarrow \langle \mathbb{n}_\alpha(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = -\rho_\alpha(s)$$

radio de convergencia (radio de la circ. osculatriz)

$$\Rightarrow -\rho'_\alpha(s) = \langle \mathbb{n}'_\alpha(s), \alpha(s) - p_0 \rangle + \langle \mathbb{n}_\alpha(s), \alpha'(s) \rangle =$$

$$= -K_\alpha(s) \langle \mathbb{t}_\alpha(s), \alpha(s) - p_0 \rangle + \tau_\alpha(s) \langle \mathbb{b}_\alpha(s), \alpha(s) - p_0 \rangle$$

Si $\tau_\alpha \neq 0$:

$$\langle \mathbb{b}_\alpha(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = \frac{-\rho'_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)}$$

$$\alpha(s) - p_0 = -\rho_\alpha(s)\, \mathbb{n}_\alpha(s) - \frac{\rho'_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)} \mathbb{b}_\alpha(s)$$

$$p_0 = \alpha(s) + \rho_\alpha(s)\, \mathbb{n}_\alpha(s) + \frac{\rho'_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)} \mathbb{b}_\alpha(s)$$

Si $\tau_\alpha = 0$ en $J \subset I$:

$\cancel{\rho'_\alpha(s) = 0} \Rightarrow \rho'_\alpha(s) = 0$ a $J \Rightarrow \rho_\alpha(s) = r$ (que es constante)

OTRA FORMA:

$$g_p(s) = \frac{1}{2} \| \alpha(s) - p \|^2 = \frac{1}{2} r^2$$

$$g'_p(s) = \langle \mathbb{t}_\alpha(s), \alpha(s) - p \rangle$$

$\boxed{5.}$ $\beta(s) = \alpha(-s)$

$\beta'(s) = -\alpha'(-s) \Rightarrow \|\beta'(s)\| = 1 \quad , \quad t_\beta(s) = -t_\alpha(-s)$

$t_\beta'(s) = t_\alpha'(-s) = K_\alpha(-s) \cdot n_\alpha(-s) \Rightarrow K_\beta(s) = K_\alpha(-s) \quad n_\beta(s) = n_\alpha(-s)$

$b_\beta(s) = t_\beta(s) \times n_\beta(s) = -t_\alpha(-s) \times n_\alpha(-s) = -b_\alpha(-s)$

$\Rightarrow b_\beta'(s) = b_\alpha'(-s) = -\tau_\alpha(-s) n_\alpha(-s) = -\tau_\alpha(-s) n_\beta(s) \Rightarrow \tau_\beta(s) = \tau_\alpha(-s)$

7.) $f(s) = \alpha(s) + \lambda(s) n_\alpha(s)$ buscamos λ tal que $f(s)$ sea const.

$f'(s) = \alpha'(s) + \lambda'(s) n_\alpha(s) - \lambda(s) K_\alpha(s) t_\alpha(s) + \lambda(s) \tau_\alpha(s) b_\alpha(s) =$

$= (1 - \lambda(s) K_\alpha(s)) t_\alpha(s) + \lambda'(s) n_\alpha(s) + \lambda(s) \tau_\alpha(s) b_\alpha(s) = 0$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} 1 - \lambda(s) K_\alpha(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) \neq 0 \ \forall s \quad K_\alpha(s) \neq 0 \ \forall s \\ \lambda'(s) = 0 \Longrightarrow \lambda(s) = \lambda \text{ constante} \\ \lambda(s) \tau_\alpha(s) = 0 \Longrightarrow \tau_\alpha(s) = 0 \ \forall s \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda \neq 0 \quad K_\alpha(s) = \frac{1}{\lambda}$ (constante) $\Leftrightarrow$ circunferencia

8.) $g(s) = \alpha(s) + \mu(s) b_\alpha(s)$

$g'(s) = \alpha'(s) + \mu'(s) b_\alpha(s) + \mu(s) \tau_\alpha(s) n_\alpha(s) =$

$= t_\alpha(s) - \mu(s) \tau_\alpha(s) n_\alpha(s) + \mu'(s) b_\alpha(s) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \quad \text{imposible} \\ -\mu(s) \tau_\alpha(s) = 0 \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ $\alpha(s)$ birregular param. por arco

$$\beta(s) = \mathbf{t}_\alpha(s) = \alpha'(s)$$

Demostrar que $\mathbf{K}_\beta = \dfrac{\tau}{\kappa}\,\mathbf{b}_\alpha - \mathbf{t}_\alpha$

$$\beta'(s) = \mathbf{t}_\alpha'(s) = \kappa_\alpha(s)\,\mathbf{n}_\alpha(s)$$

Con $\kappa_\alpha(s) > 0 \Longrightarrow v_\beta(s) = \kappa_\alpha(s) \qquad \mathbf{t}_\beta(s) = \mathbf{n}_\alpha(s)$

$$\mathbf{t}_\beta'(s) = -\kappa_\alpha(s)\,.\,\mathbf{t}_\alpha(s) + \tau_\alpha(s)\,\mathbf{b}_\alpha(s) = \kappa_\beta(s)\,.\,v_\beta(s)\,.\,\mathbf{n}_\beta(s)$$

obs: $\|\mathbf{t}_\alpha'(s)\|^2 = \left(\kappa_\alpha(s)^2 + \tau_\alpha(s)^2\right) = \kappa_\alpha(s)^2\left(1 + q_\alpha(s)^2\right)$ con $q_\alpha = \dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}$

$$\Rightarrow \|\mathbf{t}_\alpha'(s)\| = \kappa_\alpha(s)\sqrt{1+q_\alpha(s)} = \kappa_\beta(s)\,.\,v_\beta(s) = \kappa_\beta(s)\,.\,\kappa_\alpha(s)$$

$$\Rightarrow \kappa_\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{1+q_\alpha(s)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{t}_\beta'(s)}{\|\mathbf{t}_\beta'(s)\|} = -\frac{1}{\sqrt{1+q_\alpha(s)^2}}\,\mathbf{t}_\alpha(s) + \frac{q_\alpha(s)}{\sqrt{1+q_\alpha(s)^2}}\,\mathbf{b}_\alpha(s) = \mathbf{n}_\beta(s)$$

Como $\mathbf{K}_\beta(s) = \kappa_\beta(s)\,\mathbf{n}_\beta(s) = -\mathbf{t}_\alpha(s) + q_\alpha(s)\,\mathbf{b}_\alpha(s)$

19. $a>0 \quad b\in\mathbb{R} \quad r^2=a^2+b^2$

$$\alpha(s)=\left(a\cos\frac{s}{r},\ a\,\mathrm{sen}\frac{s}{r},\ b\frac{s}{r}\right)$$

$$\alpha'(s)=\left(-\frac{a}{r}\mathrm{sen}\frac{s}{r},\ \frac{a}{r}\cos\frac{s}{r},\ \frac{b}{r}\right) \qquad \|\alpha'(s)\|=\frac{a^2+b^2}{r^2}=1$$

$$\alpha''(s)=\left(-\frac{a}{r^2}\cos\frac{s}{r},\ \frac{-a}{r^2}\mathrm{sen}\frac{s}{r},\ 0\right)=\frac{a}{r^2}\left(-\cos\frac{s}{r},\ -\mathrm{sen}\frac{s}{r},0\right)$$

$$\mathbb{t}_\alpha(s)=\left(-\frac{a}{r}\mathrm{sen}\frac{s}{r},\ \frac{a}{r}\cos\frac{s}{r},\ \frac{b}{r}\right)$$

$$\mathbb{n}_\alpha(s)=\left(-\cos\frac{s}{r},\ -\mathrm{sen}\frac{s}{r},0\right) \qquad \mathbb{K}_\alpha(s)=\frac{a}{r^2}=K_0$$

$$\mathbb{b}_\alpha(s)=\left(\frac{b}{r}\mathrm{sen}\frac{s}{r},\ -\frac{b}{r}\cos\frac{s}{r},\ \frac{a}{r}\right)$$

$$\mathbb{b}'_\alpha(s)=\left(\frac{b}{r^2}\cos\frac{s}{r},\ \frac{b}{r^2}\mathrm{sen}\frac{s}{r},\ 0\right)=\frac{-b}{r^2}\mathbb{n}_\alpha(s) \Rightarrow \tau_\alpha(s)=\frac{b}{r^2}=\tau_0$$

$$K_0^2+\tau_0^2=\frac{a^2}{r^4}+\frac{b^2}{r^4}=\frac{1}{r^2}$$

$$K_0=a\left(K_0^2+\tau_0^2\right) \Rightarrow a=\frac{K_0}{K_0^2+\tau_0^2}$$

$$\tau_0=b\left(K_0^2+\tau_0^2\right) \Rightarrow b=\frac{\tau_0}{K_0^2+\tau_0^2}$$

$$\alpha(s+c)=\left(a\cos\frac{s+c}{r},\ a\,\mathrm{sen}\frac{s+c}{r},\ b\frac{s+c}{r}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{bc}{r}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\frac{c}{r} & -\mathrm{sen}\frac{c}{r} & 0\\ \mathrm{sen}\frac{c}{r} & \cos\frac{c}{r} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\cos\frac{s}{r}\\ a\,\mathrm{sen}\frac{s}{r}\\ b\frac{c}{r}\end{pmatrix}$$

movimiento helicoidal
"tuerca con el tornillo"