HOJA 5 GIRONDO

1.

i) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

No es compacto.

Para cada punto en el conjunto existe una distancia a los dos puntos contiguos. Podemos formar un recubrimiento formado por conjuntos que contengan un sólo punto, e.d.,

$$C_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x_n - \varepsilon_n, x_n + \varepsilon_n) \subset \mathbb{R}\} \quad \text{con } \varepsilon_n := \min\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n-1})\}$$

C_1 no tiene un subrecubrimiento finito.

$\Rightarrow$ No es compacto.

ii) $\{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

No es compacto por razones idénticas al apartado anterior.

iii) $\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} \subset \mathbb{R}$

Sí es compacto.

Ahora no nos vale el razonamiento anterior ya que para el caso $x_n = 1$ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ incluye ya la cola de la sucesión que se quedaba fuera antes a partir de un n_0.

$\boxed{2.}$ $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$\{(x_n, x_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\}$ colección de intervalos abiertos que recubre $[0,1)$ pero no tiene subrecubrimiento finito.

$\boxed{3.}$

i) $(\mathbb{R}, \tau_u)$ $A = (0,1)$ $\bar{A} = [0,1]$

$\uparrow$ no compacto $\uparrow$ compacto

ii) $X = \mathbb{N}$

$\tau = \{\emptyset$ ó conjuntos que contienen al $1\}$

$A = \{1\}$ es compacto porque es finito

$\bar{A} = \mathbb{N}$, ya que dado $n \in \mathbb{N}$, $n \in \bar{A}$ porque cumple que todo U abto. con $n \in \bar{A}$ verifica $U \cap A \neq \emptyset$.

Pero $\mathbb{N}$ no es compacto, defino $U_n = \{1, n\}$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, n\} = \mathbb{N}$ y no admite subrecubrimiento finito.

$\boxed{4.}$ (X, τ_1), (X, τ_2) $\tau_1 \subset \tau_2$

Si (X, τ_2) es compacto $\Rightarrow (X, \tau_1)$ compacto

Al revés posiblemente no, p. ej. $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$

$\boxed{5.}$ Sean C_1, C_2 compactos en (X, τ) de Hausdorff.

Fijamos $x \in C_1$:
para cada $y \in C_2$ $\left\{ \begin{array}{l} \exists\, U_x^y \text{ abto. con } x \in U_x^y \\ y \in V_x^y,\ U_x^y \cap V_x^y = \emptyset \end{array} \right.$

Como los $\{V_x^y\}$ recubren $C_2 \Longrightarrow \exists$ subrecubrimiento finito
$V_x^{y_1}, \dots, V_x^{y_n}$.

Llamamos $\left\{ \begin{array}{l} U_{2,x} = U_x^{y_1} \cap \dots \cap U_x^{y_n} \\ V_{2,x} = V_x^{y_1} \cup \dots \cup V_x^{y_n} \supset C_2 \end{array} \right.$

Hacemos esto para cada $x \in C_1$
$\{U_x\}_{x \in X}$ formamos un recubrimiento de $C_1 \Rightarrow \exists$ subrecubr.
$U_{x_1}, \dots, x_{n_n}$ finito.

$\boxed{6.}$ C compacto de un espacio Hausdorff. ¿C' compacto?

$\overline{C} = C \cup C' \overset{C \text{ cerrado}}{=} C \Longrightarrow C' \subset C$

Basta ver que C' es un cerrado

$X \setminus C'$ abto.?

Sea $x \in X \setminus C' \Longrightarrow \exists U$ abto. con $y \in U$ tal que
$U \setminus \{x\} \cap C = \emptyset$.

Dado $z \neq y \in U$ afirmamos que $z \notin C'$ (obvio)

Es decir, $U \subset X \setminus C' \Rightarrow X \setminus C'$ es abto.