UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos Nombre

Ejercicio del día 20 de abril de 2017. Examen parcial.

1.1 (0.5)	1.2 (0.5)	1.3 (1)	1.4 (1)	2.1 (1.5)	2.2 (1)	2.3 (2)	2.4 (1.5)	2.5 (1)	Total (10)

1. PROBLEMA (3 puntos).

Una empresa desea implantar un sistema cliente-servidor para la solicitud de información bursátil. Se espera que las peticiones de los clientes sigan un proceso de Poisson y que éstas se realicen a un ritmo medio de **20 peticiones por segundo**. El único servidor de que se dispone para atender las peticiones tarda en promedio **50 milisegundos** en atender cada petición y el tiempo que tarda el servidor en atender cada petición de se asume distribuido exponencialmente. Para ahorrar costes de almacenamiento de peticiones, la empresa decide fijar un número K de peticiones en espera de forma que aquellas peticiones que no estén siendo servidas o en espera, serán rechazadas. Suponer además que existe un número muy grande de clientes, de modo que el número de peticiones pendientes de servicio no afecta al ritmo de llegada de nuevas peticiones.

Redondear todos los resultados a cuatro posiciones decimales.

1.1 (0.5 puntos) Justificar razonadamente un modelo de colas válido para describir el escenario planteado. No se considerarán respuestas sin razonar.

Se trata de un sistema **M/M/1/K+1** debido a que:

- Tiempo de servicio exponencial con valor esperado 50 ms → $T_S = 0.05\ s$ y $\mu = 20$ petciones/s.
- Cola de espera limitada, de modo que rechaza cualquier nueva solicitud que reciba cuando ya se encuentra procesando una y hay K en cola
- Las peticiones que se realizan siguen un ritmo de Poisson con tasa de 20 peticiones por segundo → Tiempo entre llegadas exponencial con tasa de llegadas $\lambda = 20$ peticiones/s.

1.2 (0.5 puntos) Determinar el tamaño de la cola de forma que el servidor esté libre, en promedio, el 10% del tiempo.

En este caso, se tiene $\lambda = \mu$ y se aplican las ecuaciones del modelo M/M/1/K y se impone que el factor de utilización del servidor debe ser 0.9. OJO! Se debe tener en cuenta que en las ecuaciones del modelo M/M/1/K, K representa el tamaño total del sistema (y, por tanto, es diferente del K que hemos utilizado para representar el tamaño de la cola en el apartado 1.1.)

$$\rho = \frac{K}{K+1} = 0.9 \ \Rightarrow K = \frac{0.9}{0.1} = 9$$

Si se quiere mantiene la notación con K=tamaño de la cola, entonces se tendría:

$$\rho = \frac{K+1}{K+2} = 0.9 \ \Rightarrow K = \frac{1.8-1}{0.1} = 8$$

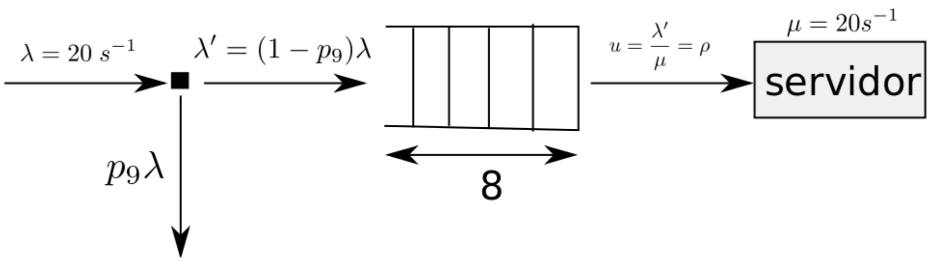
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura: SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo: 236 y 240

Apellidos: Nombre:

Ejercicio del día: 20 de abril de 2017. Examen parcial.

En cualquiera de los casos, **el tamaño de la cola será de 8 peticiones** y se trata de un sistema M/M/1/9 como el de la siguiente figura:



1.3 (1 punto) Determinar el tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones aceptadas.

Se obtiene el número medio de clientes en el sistema L de acuerdo a las ecuaciones del modelo M/M/1/K con $\lambda = \mu$ y luego se aplica el Teorema de Little sobre la tasa efectiva de llegadas.

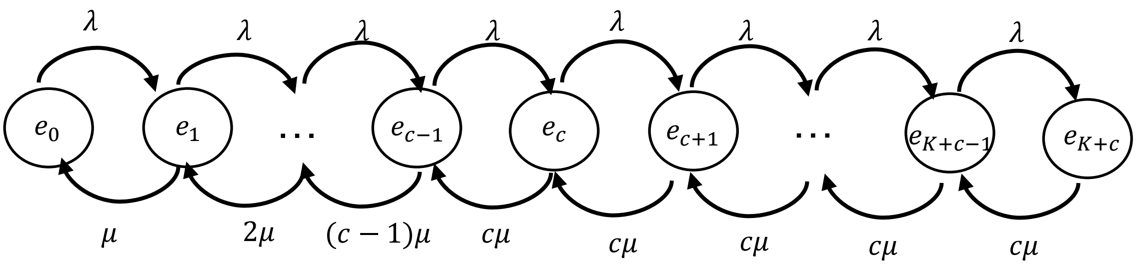
$$L = \frac{K}{2} = \frac{9}{2} = 4.5\ clientes$$

La tasa efectiva de llegadas será $\lambda' = (1-p_9)\lambda$ y p_9 se obtiene como:

$$p_9 = p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{K+1}1^9 = \frac{1}{10} = 0.1$$

Por tanto, el tiempo medio de estancia en el sistema será: $W = \frac{L}{\lambda'} = \frac{4.5}{(1-0.1)20} = \mathbf{0.25\ segundos}$

1.4 (1 punto) De cara a una posible ampliación del sistema, se desean realizar estimaciones sobre los tiempos de respuesta del sistema en caso de que éste estuviera formado por c servidores que pueden atender cualquiera de las peticiones de una cola de tamaño K. Completar los estados y tasas de transición del proceso de nacimiento-muerte correspondiente a este nuevo requerimiento.



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos Nombre

Ejercicio del día 20 de abril de 2017. Examen parcial.

2. PROBLEMA (7 puntos).

El sistema de gestión de usuarios de la universidad recibe peticiones de los clientes según un proceso de Poisson con una media de **16 peticiones por segundo**. Todas las peticiones son recibidas inicialmente por un servidor que actúa de distribuidor con una tasa de servicio de **20 peticiones al segundo** y tiempo de servicio distribuido exponencialmente. Al finalizar su proceso, este servidor distribuye las peticiones a otros servidores. De las peticiones recibidas, un **30%** son para cambiar la contraseña de acceso al correo electrónico, mientras que el **70%** son para modificar información del trabajador (dirección postal, despacho, número de teléfono, etc).

Las solicitudes que solicitan un cambio de contraseña pasan a ser atendidas por un servidor destinado a esta tarea. El servidor de cambio de contraseña tiene un tiempo de servicio distribuido exponencialmente y tasa de servicio de **10 peticiones al segundo**. Una vez procesadas por el servidor de contraseña, todas las peticiones requieren acceder a un servidor de disco para registrar los cambios producidos.

Por otra parte, las peticiones para modificar información del trabajador son procesadas por un servidor con dos CPUs. Cualquier da las CPUs puede atender cualquiera de los mensajes en cola y una petición puede ser atendida por una única CPU. Los tiempos de servicio de cada CPU se pueden considerar distribuidos exponencialmente y con una tasa de servicio por CPU de **12.5 peticiones al segundo.** De las peticiones procesadas por el servidor de modificación de información personal, el **25%** requieren volver a ser atendidas por este mismo servidor, mientras que el **75%** restante pasa al servidor de disco que registrará los cambios efectuados. El servidor de disco tiene una tasa de servicio de **30 peticiones al segundo** y su tiempo de servicio se encuentra distribuido exponencialmente. Una vez procesadas por el servidor de disco, todas las peticiones salen del sistema.

Suponer que todos los servidores tienen una cola de espera de tamaño infinito, que se encuentran en estado estacionario, y que existe un número muy grande de clientes, de modo que el número de peticiones pendientes de servicio no afecta al ritmo de llegada de nuevas peticiones.

Redondear todos los resultados a cuatro posiciones decimales.

2.1 (1.5 puntos) Dibujar el diagrama de proceso del sistema completo, y expresar (no calcular) las tasas de llegada a la entrada de cada servidor, indicando las suposiciones realizadas. Dar una explicación razonada de qué modelo, según la notación de Kendall, será aplicable a cada una de sus componentes.

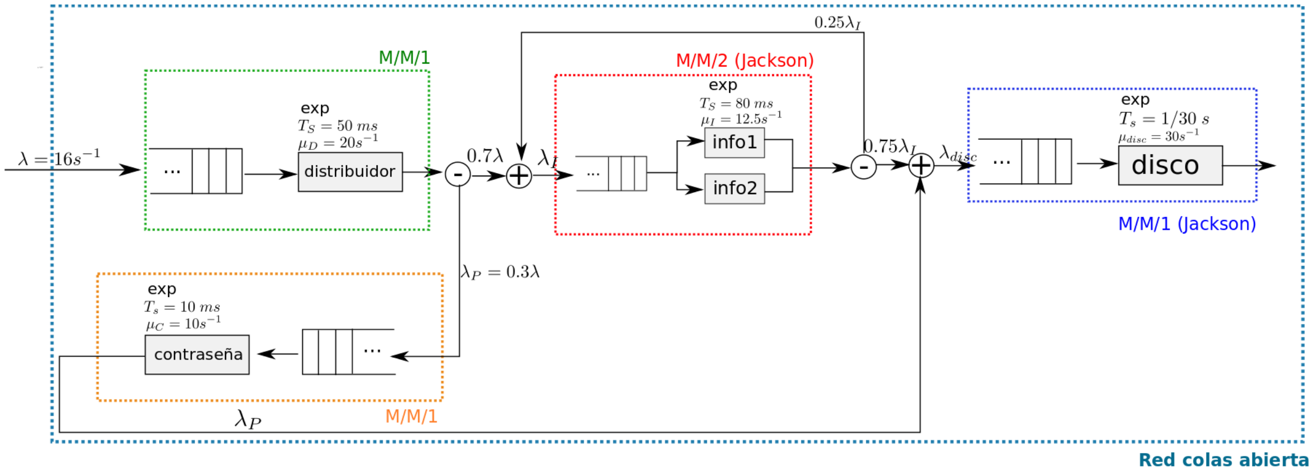


Figura 1 Diagrama de proceso del sistema completo

Las tasas de llegadas a la entrada de cada servidor se pueden obtener al <u>suponer que los sistemas se encuentran en estado estacionario</u> y, por tanto, en cada uno de los sistemas se tendrá a la salida la misma tasa que a la entrada. Entonces:

- El servidor distribuidor recibe una tasa de llegadas de Poisson y su tiempo e servicio es exponencial, por tanto, se puede modelar con un modelo **M/M/1**. Además, de acuerdo al Teroema de Burke, la salida del distribuidor sabemos que sigue un proceso de Poisson de tasa λ.
- El servidor de cambio de contraseña recibe el 30% de la tasa de salida del distribuidor que sabemos que es de Poisson. Al tratarse de una bifurcación aleatoria de un proceso de Poisson, sabemos que a tasa de llegadas al servidor de cambio de contraseña es de Poisson con $\lambda_P = 0.3\,\lambda$. Por tanto, el número de clientes en este servidor se puede obtener mediante un modelo **M/M/1**.
- La tasa de entrada al servidor de información, λ_I, es el 70% de la tasa de salida del distribuidor y el 25% de su retroalimentación, por tanto será $\lambda_I = 0.7\,\lambda + 0.25\,\lambda_I$. La entrada exterior al servidor info es de Poissiion al ser una bifurcación aleatoria de un proceso de Poisson pero, al haber retroalimentación, la entrada neta λ_I no es de Poisson. No obstante, se puede utilizar el Teorema de Jackson para modelar el número medio de clientes en el servidor info de acuerdo a un **M/M/2**.
- La tasa de entrada al servidor de disco, λ_{disc}, es la tasa de salida del servidor de cambio de contraseña y el 75% de la salida del servidor info, por tanto será $\lambda_{disc} = \lambda_P + 0.75\,\lambda_I$. Aunque la entrada neta al servidor de disco no es de Poisson, se puede modelar este subsistema de acuerdo al modelo **M/M/1** gracias a Teorema de Jackson.

Para determinar los modelos a utilizar en cada subsistema, se ha tenido en cuenta que todos los tiempos de servicio se encuentran distribuidos exponencialmente, que las colas se pueden suponer de tamaño infinito y que existe un número muy grande de clientes, de modo que el número de peticiones pendientes de servicio no afecta al ritmo de llegada de nuevas peticiones.

2.2 (1 punto) Calcular la tasa de llegadas efectiva a la entrada de cada servidor.

- Tasa de llegadas efectiva a la entrada al distribuidor: $\lambda = 16\ s^{-1}$.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos Nombre

Ejercicio del día 20 de abril de 2017. Examen parcial.

- Tasa de llegadas efectiva a la entrada del servidor de contraseña: $\lambda_P = 0.3\,\lambda = 0.3\,\cdot 16 = 4.8\,s^{-1}$.
- Tasa de llegadas efectiva a la entrada del servidor info: $\lambda_I = 0.7\,\lambda + 0.25\,\lambda_I \Rightarrow \lambda_I = {0.7\,\lambda}/{0.75} = {0.7\,\cdot 16}/{0.75} = 14.9\hat{3}\,s^{-1}$.
- Tasa de llegadas efectiva a la entrada del servidor de disco: $\lambda_{disc} = 0.75\,\lambda_I + \lambda_P = 0.75\,\cdot\, 14.9\hat{3} + 4.8 \,= 16\,s^{-1}$.

Observar que en todos los casos ${\lambda}/{c\mu} < 1$, y, por tanto, el sistema se encuentra efectivamente en estado estacionario.

2.3 (2 puntos) Calcular el tiempo medio de espera en cola de las peticiones que requieren la modificación de datos de un trabajador.

El tiempo de estancia de estas peticiones será la suma del tiempo medio de espera en el distribuidor, , W_q^{dist}, el tiempo medio en cola en el servidor de cambio de información info, W_q^I, y el tiempo medio en cola en el servidor de disco, W_q^{disc}:

$$W_q = W_q^{dist} + W_q^I + W_q^{disc}$$

El tiempo de espera en cola en el distribuidor vendrá dado por el modelo M/M/1, dado que no hay retroalimentación. Se puede obtener calculando el número medio de unidades en cola en el distribuidor y aplicando el Teorema de Little sobre la cola.

$$L_q^{dist} = \frac{\rho_{dist}}{1-\rho_{dist}} - \rho_{dist} = \frac{0.8}{1-0.8} - 0.8 = 3.2\,peticiones$$

$$\rho_{dist} = \frac{\lambda}{\mu_{dist}} = \frac{16}{20} = 0.8$$

$$W_q^{dist} = \frac{L_q^{dist}}{\lambda} = \frac{3.2}{16} = 0.2\,segundos$$

El tiempo de espera en el servidor info se calculará obteniendo el número medio de unidades en cola en el servidor de acuerdo a un modelo M/M/2 (por el Teorema de Jackson) y aplicando el Teroema de Little sobre la cola:

$$L_q^I = \frac{P_q\,\rho_I}{1-\rho_I}$$

Por tanto, es necesario calcular la probabilidad de esperar en cola P_q y el factor de utilización del servidor de modificación de información ρ_I.

$$\rho_I = \frac{\lambda_I}{c\,\mu_I} = \frac{14.9\hat{3}}{2\,\cdot 12.5} = 0.5973$$

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

$$P_q = \frac{p_c}{1-\rho_I} = \frac{p_2}{1-\rho_I} = \frac{0.1799}{1-0.5973} = 0.4467$$

$$p_2 = p_0 \frac{\left(\frac{\lambda_I}{\mu_I}\right)^2}{2!} = 0.2521 \frac{\left(\frac{14.9\hat{3}}{12.5}\right)^2}{2!} = 0.1799$$

$$p_0 = \left[\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda_I}{\mu_I}\right)^n}{n!}\right) + \frac{\left(\frac{\lambda_I}{\mu_I}\right)^c}{c!\,(1-\rho_I)}\right]^{-1} = \left[\frac{\left(\frac{14.9\hat{3}}{12.5}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{14.9\hat{3}}{12.5}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{14.9\hat{3}}{12.5}\right)^2}{2!\,(1-0.5973)}\right]^{-1} = 0.2521$$

Sustituyendo valores en la expresión de L_q^I:

$$L_q^I = \frac{P_q \rho_I}{1-\rho_I} = \frac{0.4467 \cdot 0.5973}{1-0.5973} = 0.6626\ clientes$$

Por tanto, el tiempo medio de espera en cola para el servidor de información teniendo en cuenta la retroalimentación se obtendrá aplicando el Teorema de Little:

$$W_q^I = \frac{L_q^I}{0.7\,\lambda} = \frac{0.6626}{0.7 \cdot 16} = 0.0592\ segundos$$

El tiempo de espera en el servidor de disco se calculará obteniendo el número medio de unidades en cola en el servidor de acuerdo a un modelo M/M/1 (por el Teorema de Jackson) y aplicando el Teroema de Little sobre la cola:

$$L_q^{disc} = \frac{\rho_{disc}}{1-\rho_{disc}} - \rho_{disc} = \frac{0.5\hat{3}}{1-0.5\hat{3}} - 0.5\hat{3} = 0.6095\ peticiones$$

$$\rho_{disc} = \frac{\lambda_{disc}}{\mu_{disc}} = \frac{16}{30} = 0.5\hat{3}$$

$$W_q^{disc} = \frac{L_q^{disc}}{\lambda_{disc}} = \frac{0.6095}{16} = 0.0381\ segundos$$

Y el tiempo medio en cola de las peticiones que solicitan un cambio de información de un trabajador será:

$$W_q = W_q^{dist} + W_q^I + W_q^{disc} = 0.2 + 0.0592 + 0.0381 = 0.2973\ segundos$$

2.4 (1.5 puntos) Calcular el tiempo medio de respuesta de todo el sistema.

Para calcular el tiempo medio de respuesta de todo el sistema, se aplicará el Teorema de Little sobre el sistema total (recuadro azul claro del diagrama)[1].

Aplicamos el Teorema de Little sobre el sistema global, teniendo en cuenta que el número medio de clientes en el sistema total es la suma del número medio de clientes en cada uno de los subsistemas.

$$W = \frac{L_{dist} + L_I + L_P + L_{disc}}{\lambda}$$

Para calcular L_{dist}, L_I y L_{disc}, se utilizarán los resultados del apartado anterior:

$$L_{dist} = L_{dist}^q + \rho_{dist} = 3.2 + 0.8 = 4\, peticiones$$
$$L_I = L_I^q + c\,\rho_I = 0.6626 + 2 \cdot 0.5973 = 1.8572\, peticiones$$
$$L_{disc} = L_{disc}^q + \rho_{disc} = 0.6095 + 0.5\hat{3} = 1.1428\, peticiones$$

Para calcular el número medio de clientes L_P en el servidor de contraseña, se aplican las ecuaciones del modelo M/M/1.

$$L_P = \frac{\rho_P}{1-\rho_P} = \frac{0.48}{1-0.48} = 0.9231\, peticiones$$

$$\rho_P = \frac{\lambda_P}{\mu_P} = \frac{4.8}{10} = 0.48$$

Por tanto, el tiempo medio de estancia en el sistema global será:

$$W = \frac{L_{dist} + L_I + L_P + L_{disc}}{\lambda} = \frac{4 + 1.8572 + 1.1428 + 0.9231}{16} = 0.4952\, s$$

2.5 (1 punto). Un nuevo requisito del sistema impone que al menos el 70% de las peticiones que pasan por el servidor de contraseña deben ser atendidas por éste en menos de 100 milisegundos (incluyendo tiempo de servicio y tiempo de espera en cola) ¿Cumple la arquitectura actual el nuevo requisito? En caso negativo, cuantificar las modificaciones a realizar en términos de la potencia mínima del único servidor de contraseña para satisfacer el nuevo requerimiento.

Dado que el servidor de contraseña es un sistema M/M/1, se conoce la función de probabilidad del tiempo de estancia en el sistema y se puede determinar si la configuración actual satisface el nuevo requisito:

$F_W(t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$

[1] También podría obtenerse como la media ponderada de los tiempos de estancia en cada una de las colas.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos Nombre

Ejercicio del día 20 de abril de 2017. Examen parcial.

En este caso: $F_W(t) = 1 - e^{-(10-4.8)0.1} = 0{,}5945 < 0{,}7$ y, por tanto, no se satisface el nuevo requisito.

Dado que se indica que las modificaciones a realizar se refieren a la potencia del único servidor de contraseña, lo que se está pidiendo es establecer el valor de μ_P tal que se satisfaga el requisito. Esto es,

$$F_W(t) = 0{,}7 < 1 - e^{-(\mu_P-4.8)0.1} \Rightarrow \mu_P > 4.8 - \frac{\log_e 0.3}{0.1} = 16.8397$$

Por tanto, la potencia mínima requerida para el servidor de contraseña es 16.8397 peticiones/s.