Teoría de la Integral y la Medida. Soluciones del examen parcial del 22/11/2019.

1.) (3 puntos) Probar o refutar con un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

1.1) Si A y B son dos subconjutos de $\mathbb{R}$ que no son medibles de Lebesgue, entonces $A \cup B$ tampoco es medible de Lebesgue.

FALSO: basta tener en cuenta que, si A no es medible, su complementario $\mathbb{R} \setminus A$ tampoco lo es. Sin embargo la unión de ambos resulta un conjunto medible:

$$A \cup (\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R}\,.$$

1.2) Si $f \geq 0$ es integrable sobre $(X, \mathcal{F}, \mu)$, es decir, si $\int_X f d\mu < \infty$, entonces $A_\varepsilon = \{x \in X :\ f \geq \varepsilon\}$ tiene $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ para cada $\varepsilon > 0$.

VERDADERO: la función simple $g = \varepsilon\, \chi_{A_\varepsilon}$ satisface $g \leq f$ y, por tanto,

$$\varepsilon\, \mu(A_\varepsilon) = \int_X g\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu < \infty\,.$$

1.3) Si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones tales que f es medible de Lebesgue, g es continua y para todo conjunto $N \subset \mathbb{R}$ con medida exterior de Lebesgue $\lambda^*(N) = 0$, se cumple que $\lambda^*(g^{-1}(N)) = 0$, entonces $f \circ g$ es medible de Lebesgue.

VERDADERO: si $E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, tenemos que probar $(f \circ g)^{-1}(E) \in \mathcal{L}$, donde $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ y $\mathcal{L}$ denotan las σ-álgebras de Borel y Lebesgue, respectivamente. Para ello es importante tener claro que $(f \circ g)^{-1}(E) = g^{-1}(f^{-1}(E))$ y que $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$, por ser f medible. Eso significa que podemos expresar

$$f^{-1}(E) = A \cup B$$

siendo $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ y $\lambda^*(B) = 0$ por ser $\mathcal{L}$ la completación de $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. Por tanto

$$g^{-1}(f^{-1}(E)) = g^{-1}(A \cup B) = g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B)\,.$$

Como g es continua, es también medible Borel, de manera que $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Como además, por hipótesis, $\lambda^*(g^{-1}(B)) = 0$, resulta que

$$g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B) \in \mathcal{L}$$

por el mismo argumento de completación utilizado antes.

2.) (2,5 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible. Demostrar, justificando apropiadamente todos los pasos, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left\{ 1 - \left(\frac{2}{e^{f(x)} + e^{-f(x)}} \right)^n \right\} d\mu = \mu(\{x \in X\ :\ f(x) \neq 0\})$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = 1 - \left(\frac{2}{e^{f(x)} + e^{-f(x)}} \right)^n$$

es medible, ya que $f_n = g_n \circ f$ con $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_n(t) = 1 - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}}\right)^n$, que es una función continua. Por otro lado, como $e^t + e^{-t} \geq 2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $g_n \geq 0$ y por tanto también $f_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, dado que

$$\frac{2}{e^{f(x)} + e^{-f(x)}} \leq 1,$$

para cada $x \in X$, resulta que $f_n \leq f_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de manera que la sucesión de funciones f_n es monótona creciente. Finalmente

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) = 0 \\ 1 & \text{si} \quad f(x) \neq 0 \end{cases} \quad ,$$

es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \chi_A$, donde $A = \{x \in X : \ f(x) \neq 0\}$. Aplicando el Teorema de convergencia monótona, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A) = \mu(\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\})\,.$$

3.) (2 puntos) Dado $0 < \varepsilon < 1$ y siendo λ la medida de Lebesgue, se pide:

3.1) Construir un abierto $E \subset [0,1]$ tal que E sea denso en $[0,1]$ y $\lambda(E) = \varepsilon$.

Usamos una ligera variación del procedimiento que se utiliza para construir el conjunto de Cantor: en el paso n-ésimo, en lugar de quitar un intervalo abierto de longitud $1/3^k$ del centro de cada uno de los 2^{k-1} intervalos cerrados que hay en esa etapa, quitamos uno de longitud $\varepsilon/3^k$. Si consideramos la unión de todos los abiertos que hemos ido eliminando en cada etapa, obtenemos un abierto denso (porque su complementario no puede tener puntos interiores al no contener intervalos) cuya medida es

$$\frac{\varepsilon}{3} + 2\,\frac{\varepsilon}{3^2} + \cdots + 2^{k-1}\,\frac{\varepsilon}{3^k} + \cdots = \varepsilon\,.$$

Otra forma (aparentemente más sencilla) de construir el abierto consiste en poner a los racionales de $[0,1]$ en forma de sucesión $\{q_n\}$ y considerar luego el conjunto

$$E = \cup_n \left(q_n - \varepsilon/2^{n+1}, q_n + \varepsilon/2^{n+1}\right) \cap [0,1]\,.$$

Ciertamente E es un abierto denso, pero con esta construcción resulta siempre

$$\lambda(E) < \varepsilon\,.$$

Se puede solucionar el problema si para cada $t \in [0,1]$ consideramos

$$E_t = E \cup (0,t)$$

(con $E_0 = E$) y la función continua $f : [0,1] \to [0,\infty)$

$$f(t) = \lambda(E_t)\,.$$

La razón de que f sea continua es que si $0 \leq t < t' \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned} f(t') - f(t) &= \lambda(E_{t'}) - \lambda(E_t) \\ &\leq \lambda([t,t') \setminus E_t) \\ &\leq t' - t\,. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $f(0) = \lambda(E) < \varepsilon$ mientras que $f(1) = 1 > \varepsilon$. Del teorema de los valores intermedios para funciones continuas de una variable se sigue la existencia de $t_0 \in [0,1]$ tal que $f(t_0) = \varepsilon$ y, por tanto, la de un conjunto E_{t_0} con $\lambda(E_{t_0}) = \varepsilon$.

3.2) Construir un cerrado $E \subset [0,1]$ que tenga interior vacío y $\lambda(E) = \varepsilon$.

Si $E \subset [0,1]$ es un abierto denso que tiene medida $1-\varepsilon$ (cuya existencia está garantizada por el apartado anterior), su complementario $[0,1] \setminus E$ es un cerrado que no contiene intervalos y tiene medida ε.

4.) (2,5 puntos) Para cada $E \subset \mathbb{R}$, se considera $E^2 = \{x^2 : x \in E\}$. Denotamos por λ^* la medida exterior de Lebesgue. Se pide:

4.1) Demostrar que si $\lambda^*(E) = 0$, entonces $\lambda^*(E^2) = 0$.

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $E \subset (0, M)$ para algún $M > 0$ ya que si $E \subset (0, \infty)$ podemos expresar $E = \cup_n (E \cap (0, n))$. En el caso general, $E = E^+ \cup E^-$, siendo $E^+ = E \cap [0, \infty)$ y

$$E^- = E \cap (-\infty, 0) = -(-E \cap (0, \infty))\,.$$

Por definición de λ^*, dado $\varepsilon > 0$, existen intervalos abiertos $I_j = (a_j, b_j)$, $j \in \mathbb{N}$, con $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ y tales que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) < \varepsilon$. Podemos suponer también que $I_j \subset (0, M)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y entonces

$$I_j^2 = (a_j^2, b_j^2)$$

para cada $j \in \mathbb{N}$, de manera que

$$\lambda(I_j^2) = b_j^2 - a_j^2 = (b_j - a_j)(b_j + a_j) \leq 2M(b_j - a_j) = 2M\lambda(I_j).$$

Lo anterior resulta ser la idea clave porque a partir de aquí, se sigue que

$$\lambda^*(E^2) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j^2) \leq 2M \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) < 2M\varepsilon.$$

Y, como esto se puede hacer para todo $\varepsilon > 0$, llegamos a que $\lambda^*(E^2) = 0$.

4.2) Demostrar que si E es un conjunto de Borel, entonces, también E^2 es un conjunto de Borel

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $E \subset [0, \infty)$ ya que en el caso general $E = E^+ \cup E^-$. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} [0,\infty) & \xrightarrow{F} & [0,\infty) \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$$

es continua y biyectiva. Al ser continua, es medible de Borel y su inversa viene dada, justamente, por $F^{-1}(s) = s^2$. Por lo tanto $E^2 = F^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, como queríamos demostrar.

Otra forma de hacer este ejercicio es considerar la familia de conjuntos

$$\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} :\ S^2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

y ver que es una $\sigma-$álgebra. Puesto que, desde luego, esta familia contiene a los intervalos, por fuerza ha de ser $\mathcal{S} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

4.3) Demostrar que si E es un conjunto medible de Lebesgue, entonces, también E^2 es un conjunto medible de Lebesgue.

Basta observar de nuevo que todo conjunto $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ es de la forma $E = B \cup A$ con $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $\lambda^*(A) = 0$. Entonces $E^2 = B^2 \cup A^2$. Y, por los dos apartados anteriores $\lambda^*(A^2) = 0$ y $B^2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. En consecuencia, $E^2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.