Ejercicios 8 a 14

8. Sea X un espacio vectorial normado.

A. Demostrar que si X es un espacio de Banach, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.

B. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en X. Demostrar que existe una sucesión $\{n_j\}_j \subset \mathbb{N}$, estrictamente creciente y tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}.$$

C. Demostrar que es convergente toda sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente.

D. Demostrar que X es un espacio de Banach cuando toda serie absolutamente convergente es convergente.

9. A.

1. Demostrar que todos los $a, b \in \mathbb{R}$ positivos satisfacen

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

2. Demostrar que todos los $a, b \in \mathbb{R}$ cumplen

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} < \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

B. Considérese el espacio vectorial $\mathcal{S}$ formado por todas las sucesiones $X = \{x_n\}_n$ de números reales. Demostrar que

$$d(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|}$$

es una métrica en $\mathcal{S}$.

10. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea

$$C = \overline{B(0;1)} = \{\, x \in E \ : \ \|x\| \leq 1 \,\}$$

la bola unidad cerrada de E.

A. Demostrar que para todos los $r\,,s>0$ se verifica

$$r\,C=\left\{\,x\in E\ :\ \|x\|\le r\,\right\},$$
$$r\,C+s\,C=(r+s)\,C\,.$$

B. Demostrar que las dos identidades anteriores también son válidas para la bola unidad abierta de E.

11. Considérese el espacio vectorial ℓ^2 formado por todas las sucesiones $X=\{x_n\}_n$ de números reales para las que

$$\|X\|_2^2=\sum_{n=0}^{\infty}x_n^2$$

es convergente.

1. Demostrar que esta norma procede de un producto escalar $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ en ℓ^2.
2. Sea, para cada $j\in\mathbb{N}$, la sucesión $\mathbf{e}_j=\{e_{j,n}\}_n$ definida por

$$e_{j,n}=\begin{cases}1\,, & n=j\,,\\ 0\,, & n\neq j\,.\end{cases}$$

   Considérese el conjunto $A=\left\{\,\mathbf{e}_j\ :\ j\in\mathbb{N}\,\right\}$. Demostrar que A es un subconjunto cerrado y acotado de ℓ^2.
3. Calcular cada

$$\|\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j\|_2\,.$$

   Demostrar que A no es compacto.

12. Sean $(X\,,d\,)$ un espacio métrico y A u subconjunto de X. Considérense el cierre $\overline{A}$ de A y el conjunto de puntos de acumulación de A, que denotamos por A'. Demostrar:

1. A' es cerrado en $(X\,,d)$.
2. Si $A\subset B$, entonces $A'\subset B'$.
3. $(A\cup B)'=A'\cup B'$.
4. $(\,\overline{A}\,)'=A'$.
5. $\overline{A}$ es cerrado en $(X\,,d)$.
6. $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

13. Dados un espacio métrico (X, d), un subconjunto A de X y un punto $c \in X$, decimos que *c es un punto interior de A* cuando existe algún abierto G tal que $x \in G \subset A$.

Coleccionamos todos los puntos interiores de A en el conjunto que denotamos $\operatorname{Int} A$. Obsérvese que, con esta definición, un conjunto A es abierto si y sólo si coincide con $\operatorname{Int} A$.

A. Demostrar las siguientes identidades:

1. $\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.
2. $\operatorname{Int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$.
3. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

B. Denotando por ∂A la frontera de A,

1. $\operatorname{Int}(\partial A)$ es vacío si A es abierto o si A es cerrado.
2. Dar un ejemplo de un A y un X para los que $\operatorname{Int}(\partial A) = X$.
3. Si $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} B = \emptyset$ y A es cerrado entonces $\operatorname{Int}(A \cup B) = \emptyset$.
4. Dar un ejemplo en el que $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} B = \emptyset$, pero $\operatorname{Int}(A \cup B) = X$.
5. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ y $\partial A = \partial(X \setminus A)$.
6. Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ entonces $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

14. Considérense $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y también $(\mathbb{R}, d)$, donde

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Comprobar que esta función $d(x, y)$ define una métrica en $\mathbb{R}$.

1. Representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

   Demostrar que f es biyectiva, continua y con inversa continua entre estos dos espacios métricos. En particular, concluir que toda sucesión es simultáneamente convergente en ellos.

2. Estudiar si la sucesión $\{n\}_n$ es de Cauchy o convergente en $(\mathbb{R}, d)$. ¿Es completo este espacio métrico?