**PROBLEMAS. HOJA 6. Depredador-Presa, Competencia.**

1. Considera los modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy = x(a - by) = f(x, y), \\ \dot{y} = -cy + dxy = y(-c + dx) = g(x, y). \end{cases}$$

   - Demuestra que no es un sistema Hamiltoniano.
   - Encuentra integral primeras para Lotka-Volterra.

   **Solución**: Lotka-Volterra: $\vec{F} = (x(a - by), y(-c + dx))$. Notemos que $\vec{F} = (xh_1(y), yh_2(x))$ por lo que

$$\text{div}\vec{F} = h_1(y) + h_2(x) \neq 0,$$

   y no es un sistema hamiltoniano.

   Recordando ejercicio de la hoja anterior, podemos adivinar que el factor integrante $\frac{1}{xy}$ funciona directamente,

$$\frac{1}{xy}\vec{F} = (\frac{h_1(y)}{y}, \frac{h_2(x)}{x})$$

   que tiene obviamente divergencia $0$, pero hagamos el cálculo. Recordemos que,

$$\text{div}\mu\vec{F} = \langle \nabla\mu, \vec{F} \rangle + \mu\text{div}F \qquad (1)$$

   que en nuestro caso nos da

$$0 = \text{div}(\mu\vec{F}) = (h_1 + h_2)\mu + x\mu_x h_1 + y\mu_y h_2 = h_1(\mu + x\mu_x) + h_2(\mu + y\mu_y)$$

   Resolviendo $(\mu + x\mu_x) = 0 = (\mu + y\mu_y)$, llegamos a $\mu(x, y)xy = 1$.

   Una vez hallado el factor integrante, hallamos la correspondientes integral primera. Sea

$$H_y = \frac{a - by}{y}, \qquad -H_x = \frac{c - dy}{x}.$$

   Integrando

$$H(x, y) = a\log(y) - by + c\log(x) - dy,$$

   que coinciden con las ecuaciones de las trayectorias calculadas en la teoría.

2. Demuestra que un sistema que admite una integral primera no puede tener puntos críticos asintóticamente estables o inestables o ciclos.
   **Observación**: Se puede demostrar que un centro para el sistema linealizado, corresponde a un centro, foco o punto de rotación en el sistema no lineal, por lo tanto un centro para el sistema linealizado lo es para el sistema original.

   **Solución**:

   El argumento para puntos críticos se dió en Problemas 4, ejercicio 2 d.

   Supongamos que tiene un punto crítico $\vec{x}_\infty$ asintóticamente estable. Sea $x_0$ en la región de atracción y $\vec{x}(t, \vec{x_0})$ una trayectoria tal que $H(\vec{x}(t)) = H(\vec{x_0})$. Por continuidad $H(\vec{x}_\infty) = H(\vec{x_0})$, por tanto, $H$ es constante en la región de atracción. entonces, $H$ no es una integral primera.

Para extenderlo para ciclos observamos que si $\omega$ atractor es un ciclo corresponde a una trayectoria periódica por lo que para todo $(x, y) \in \omega, H(x, y) = H(\omega)$ es constante. Si ocurriera que $\omega$ fuera ciclo atractor por el Teorema de Poincaré-Bendixon las trayectorias convergerían de manera espiral a él. Por tanto, para cualquier valor en la región de atracción de $\omega$ la función $H$ sería constante. Es decir las funciones $f$ y $g$ serián $0$.

El mismo argumento te dice que si $x_\infty$ es inestable.

3. Supongamos que $V$ es una función de Liapunov en un abierto $\mathcal{U}$ para un sistema

$$\dot{x} = f(x, y), \qquad \dot{y} = g(x, y).$$

Sea $c < \inf_{\partial U} V$.

i) Probar que sus conjuntos de nivel $\{(x, y) : V(x, y) \leq c\}$ son positivamente invariantes.

ii) Sea $x(t, x_0)$ una trayectoria acotada y $\omega$ su límite que puede ser un ciclo o un punto de equilibrio. Demostrar que $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial y} g(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \omega$

**Solución i)**:

Sea $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ tal que $V(p_0) < c$. Supongamos que no es positivamente invariante. Entonces existe una trayectoria que empieza en $p_0$ y un $t_*$ tal que $V(x(t_*, p_0)) = c$ como $c < m\ x(t_*, p_0) \in \mathcal{U}$. Pero entonces

$$V(x(t_*, p_0)) = c > V(p_0) = V(x(0, p_0)),$$

lo que contradice que $V$ sea no creciente a lo largo de las trayectorias.

**Solución ii):**

- Sea $(x(t, p_0))$ una trayectoria acotada, $V(x(t, p_0))$ está acotada y es decreciente asi que tiene lḿite $l$ cuando $t$ tiende a infinito.
- Sea $(x_\omega, y_\omega) \in \omega$. Por definición existe una subsucesión de tiempos $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que y

$$\lim_{t_k \to \infty} x(t_k, x_0) = (x_\omega, y_\omega).$$

  Por continuidad $V(x_\omega, y_\omega) = l$. Es decir, $V$ es constante en $\omega$.
- Ahora bien si $\omega$ es límite es porque existe una trayectoria de una órbita periódica $y(t, \omega_0) \subset \Omega$ para todo tiempo $t$. Por tanto $V(y(t)) = l$ para todo $t$. Y usando la regla de la cadena

$$0 = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial y} g(x, y)$$

4. El modelo predador-presa no tiene en cuenta la competencia dentro de la especie que aparecía en la logística. Una versión mas sofisticada es,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - \lambda x - by), \\ \dot{y} &= y(-c + dx - \mu y). \end{aligned}$$

i) Estudia el caso $\frac{a}{\lambda} < \frac{c}{d}$. Analiza primero los puntos críticos y despues las distintas regiones definidas por las nullclinas.

ii) Estudia el caso $\frac{a}{\lambda} < \frac{c}{d}$ y todos los parámetros positivos. Utiliza la integral primera $H$ del caso Lotka-Volterra como función de Liapunov.

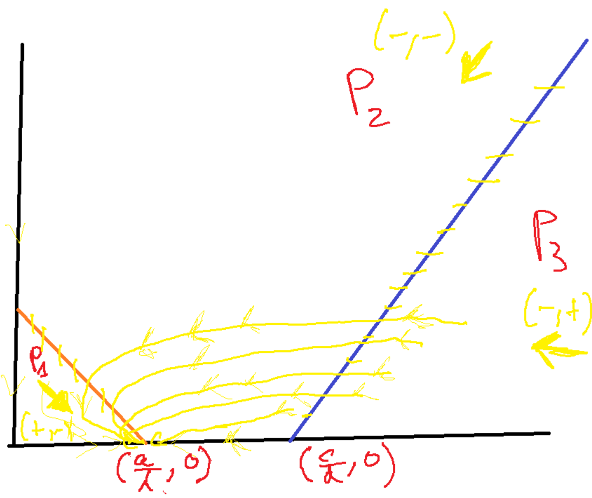


Figura 1: LVgananpresas

**Solución i):**
**Análisis Local**: En este caso las nullclinas no se cortan y existen solo dos puntos crt́icos el $(0, \frac{a}{\lambda})$ que es estable y el $(0,0)$ que es punto de silla.

**Segundas derivadas sobre las nullclinas**

- Si $x(t), y(t) \in L_x^{-1}[0]$, $\ddot{x} = -bx\dot{y}$
- Si $x(t), y(t) \in L_y^{-1}[0]$, $\ddot{y} = +dy\dot{x}$

**Análisis por regiones**

- $P_1$ es positivamente invariante. Los ejes son trayectorias y si cruzará la nullclina la $x$ tendria un máximo pero por lo anterior como $\dot{y} < 0$ tendría un mímo.
- $P_2$ Las trayectorias permanecen acotadas, y no pueden cruzar $L_y^{-1}[0]$ porque en esta región como $\dot{x} < 0$ $\ddot{y} < 0$ sobre $L_y^{-1}[0]$. En $P_2$ $y' < 0$ y en $P_3$ $y' > 0$. Asi que al cruzar tendrá un mínimo lo que es una contradicción. Asi pues o cruza a $P_1$ o converge al punto crítico. lo que tendrían un máximo.
- $P_3$. Describimos la región analiticamente como $(x,y)$:

$$\frac{d}{c} < x < \infty; 0 < y < \frac{dx - c}{\mu}.$$

  Supongamos que existe una trayectoria se queda atrapada en $P_3$. Como la $x$ es decreciente y por su definición $\frac{d}{c} < x(t) < x(0)$ y por tanto $0 < y(t) < \frac{dx-c}{\mu} < \frac{dx(0)-c}{\mu}$. Es decir, la $(x(t), y(t))$ son funciones acotadas y monótonas y por lo tanto tienen límite. Por los lemas que hemos visto en el curso este límite tiene que ser punto crítico. Por tanto: Toda trayectoria que emerge de $P_3$ entra en $P_2$.

**Solución ii):**
El punto de corte es $a = \lambda\bar{x} + b\bar{y}, c = -d\bar{x} + \mu\bar{y}$. Es facil ver que es atractor que el $(0,0)$ es punto de silla.

**Análisis Global**. Observamos que para el punto crítico $(\bar{x}^{LV}, \bar{y}^{LV}) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ es $H^{LV}(x,y) = -a\log(y) + by - c\log(x) + dx = d(x - \bar{x}^{LV}\ln(x)) + b(y - \bar{y}^{LV}ln(y))$. Probamos con la misma versión con nuestros nuevos puntos críticos

$$V^{LV}(x,y) = d(x - \bar{x}\ln(x)) + b(y - \bar{y}ln(y))$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x}f + \frac{\partial V}{\partial y}g(x,y) = \\ &\qquad d(1 - \frac{\bar{x}}{x})x(a - \lambda x - by) + b(1 - \frac{\bar{y}}{y})y(-c + dx - \mu y) \\ &\qquad = d(x - \bar{x})\lambda(\bar{x} - x) + b(y - \bar{y})(\bar{y} - y) \leq 0 \end{aligned}$$

Así que es función de Liapunov en todo $\mathbb{R}^2_+$ (el cuadrante positivo). Además $V = K$ son órbitas cerradas y $V < K$ es su interior. Por tanto, las trayectorias quedan atrapadas en esta región. En el único lugar en que $\dot{V} = 0$ es el centro por lo que todo todo el cuadrante es atraído de manera espiral.

5. Analizar e Interpretar el comportamiento de dos poblaciones competitivas

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - bx - cy) \qquad \frac{dy}{dt} = y(1 - ex - fy)$$

para los casos

- $f > c, e < b$
- $f > c, e > b$
- $c > f, e > f$. [1]

**Solución**: Preliminares comunes.

**Las nullclinas**: A parte de los ejes coordenados son las rectas $m \equiv 1 - ex - fy = 0, l \equiv 1 - bx - cy$

**La linearización:**

$$D\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 - 2bx - cy & -cx \\ -ey & 1 - 2fy - ex \end{pmatrix}$$

**Análisis local: Puntos críticos en cada población**

$$D\vec{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D\vec{F}(\frac{1}{b},0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{c}{b} \\ 0 & 1 - \frac{e}{b} \end{pmatrix}, D\vec{F}(0,\frac{1}{f}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{c}{f} & 0 \\ -\frac{e}{f} & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto el $(0,0)$ es siempre repulsor. El $(\frac{1}{b},0)$ es punto de silla si $b > e$ y atractor si $b < e$. El $(0,\frac{1}{f})$ es punto de silla si $f > c$ y atractor si $f < c$.

**Análisis local: Puntos de corte** En el caso primero y tercero, las nullclinas se cortan en $(\bar{x}, \bar{y})$ que satisface

$$b\bar{x} + c\bar{y} = 1 = e\bar{x} + f\bar{y}$$

Por tanto

$$D\vec{F}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} -b\bar{x} & -c\bar{y} \\ -e\bar{y} & -f\bar{y} \end{pmatrix}, Tr[D\vec{F}(\bar{x},\bar{y})] = -b\bar{x} - f\bar{y}, \det[D\vec{F}(\bar{x},\bar{y})] = \bar{x}\bar{y}(bf - ce)$$

[1] Pista: En este caso existe un punto de silla (no lineal) y por tanto dos trayectorias que convergen a el y dos trayectorias que divergen. Estas trayectorias dividen el plano de fase generando nuevas regiones

Por tanto si $bf > ce$ (caso 1), tenemos un punto atractor y en el caso 3 un punto de silla.

**Segunda derivada sobre las nullclinas**

$$\ddot{x} = -cx\dot{y}, \ddot{y} = -ey\dot{x}$$

**Analisis Global**

**Caso 1**Este caso es completamente similar al primer caso de Lotka Volterra. Los puntos críticos $(\frac{1}{b}, 0)$, $(0, \frac{1}{f})$ son puntos de silla, y el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ es asintoticamente estable. Llamemos $R_b, R_f$ a las regiones que contienen a $(\frac{1}{b}, 0)$, $(0, \frac{1}{f})$, $R_0$ a la del origen y $R_\infty$ a la no acotada. Se puede ver que $R_b, R_f$ son positivamente invariantes y en $R_0, R_\infty$ o converges al punto crítico o pasas a $R_b$, $R_f$. Por tanto todo el cuadrante positivo es atraido al punto crítico.

**Las especies conviven**

**Caso 2** Se hizo en clase. Las nullclinas no se cortan. El punto atractor es el $(\frac{1}{b}, 0)$ y el análisis por regiones demuestra que si la poblacion inicial de la especie $x$ es mayor que cero, a largo plazo **la población $y$ se extingue.**

**Caso 3:** $c > f, e > f$**.** En este caso $(\frac{1}{b}, 0)$, $(0, \frac{1}{f})$ son ambos atractores y $(\bar{x}, \bar{y})$ es punto de silla.

**Regiones** La region $R_b, R_f$ que contienen a $(\frac{1}{b}, 0), (0, \frac{1}{f})$ son positivamente invariantes. Por ejemplo en $m \cap I_f$, $\ddot{y} > 0$. La trayectoria tendria un mínimo asi que solo se puede cruzar pasando de decreciente a creciente (Desde la región donde $y' > 0$ a donde $y' < 0$). Cualquier trayectoria que esta en $R_b, R_f$ converge a su correspondiente punto crítico.

La región que contiene el origen $R_0$, está acotada y no tiene puntos críticos, asi que cualquier trayectoria la abandona. La región no acotada, $R_\infty$, ambas derivadas son negativas por lo que las trayectorias están acotadas. Como no tiene puntos críticos, las trayectorias tienen que dejar la región.

**Novedad: La variedad estable e inestable** El análisis anterior, nos dice que vamos a converger a alguno de los dos equilibrios pero a cual? Para dilucidarlo necesitamos un análisis más sutil dado por la versión refinada dada por el teorema de linearización de Poincaré. Dado el punto de silla existe dos trayectorias que convergen a el formando la variedad estable y dos que divergen (que convergen cuando $t$ tiende a $-\infty$. Además las trayectorias son tangentes a los autovectores del sistema linearizado (de la matriz $D\vec{F}$.

- La variedad estable no puede intersecar las regiones $R_b, R_f$ pues entonces las trayectorias no convergerian a $R_b$, $R_b$. Una rama pertenece a $R_0$ y por tanto converge a $0$ cuando $t$ tiende a $-\infty$ y la otra rama pertence a $R_\infty$ y no esta acotada.
- La variedad inestable va de la región $R_b$ y a la $R_f$ y por tanto cada una de sus trayectorias converge a $(\frac{1}{b}, 0)$, $(0, \frac{1}{f})$ respectivamente.
- La variedad estable esta formada por trayectorias asi que no puede ser cruzada. Por tanto, ejerce de "separatriz".

  **Si la población inicial $(x, y)$ esta por debajo de la separatriz $S$ se converge a $(\frac{1}{b}, 0)$ y se extingue la especie $y$. Si la población inicial está por encima de $S$ se extingue la especie $x$.**

6. Encontrar un sistema que modelice la evolución de las tres poblaciones siguientes: dos especies que compiten por una cantidad limitada de recursos y un predador para el que ambas sirven de alimento.

$$\dot{x} = x(1 - a_1x - a_2y - a_3z), \dot{y} = y(1 - b_1x - b_2y - b_3z), \dot{z} = z(-c_1z + c_2x + c_3y)$$

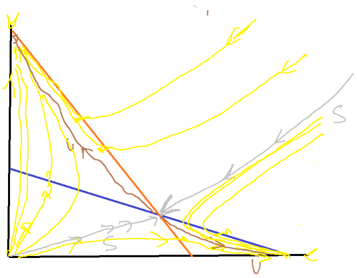


Figura 2: Separatriz

7. Los sistemas

(a) $\begin{cases} x' = x(r - ax + by) \\ y' = y(s - cy + dx) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = rx(1 - (ax + by)/L) + \alpha \\ y' = sy(1 - (ax + by)/L) \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = x(r - a(x + y)) \\ y' = y(s - b(x + y)) \end{cases}$

describen las siguientes situaciones (no necesariamente en este orden):

i) Dos especies compiten por una cantidad limitada de alimentos; además hay inmigración de una de ellas, a ritmo constante.

ii) Dos tipos de levadura crecen en un mismo medio, y producen alcohol, cuya concentración, proporcional en cada momento al peso total de ambas levaduras, limita el crecimiento de cada una de ellas.

iii) Dos especies en `simbiosis`: la concentración de cada una limita su propio crecimiento, pero favorece el de la otra.

Se trata de

- identificar cuál es cuál y explicar cómo traducen las fórmulas cada aspecto del modelo descrito
- estudiar los rasgos *generales* de la dinámica,

**Nota**: todos los parámetros se suponen positivos.