ARCONADA MANTECA, MIGUEL
CABORNERO PASCUAL, DAVID
CHACÓN AGUILERA, JOSE MANUEL
GALÁN MARTÍN, SERGIO
GARCÍA PASCUAL, MARIO
GONZÁLEZ KLEIN, ALBERTO
PETRUNINA, ELENA
SANTORUM VARELA, ALEJANDRO

Observación: Los ejercicios pueden aparecer desordenados.

$\boxed{1.}$ Sea $X : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ una variable aleatoria.

Para cada $\omega \in \Omega$: $X(\omega) = \int_0^{X(\omega)} dx = \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,X(\omega))}(x) dx$

donde $\mathbb{1}_{(0,X(\omega))}$ es la función indicatriz en $(0,X(\omega))$.

Sustituyendo esto en la definición de $\mathbb{E}[X]$, obtenemos:

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,X(\omega))}(x) \, dx \, d\mathbb{P}$$

Como $X(\omega) \geq 0$ y $\mathbb{1}_{(0,X(\omega))} \geq 0$, esta integral cumple los requisitos del teorema de Tonelli:

$$\int_{[0,\infty)} \int_\Omega \mathbb{1}_{(0,X(\omega))}(x) \, d\mathbb{P} \, dx = \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X > x) \, dx$$

En el caso en que $X : \Omega \longrightarrow \{0,1,2,\dots\} \cup \{\infty\}$:

Si $\mathbb{P}(X = \infty) > 0$, entonces $\mathbb{E}[X] = \infty$.

Por otro lado, $\mathbb{P}(X > n) \geq \mathbb{P}(X = \infty) > 0$, entonces la serie de la derecha diverge y la igualdad se mantiene.

Ahora, si $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{j-1} \mathbb{P}(X = j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j \, \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \, \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{E}[X] \quad \blacksquare$$

(5) Los sucesos S y W son independientes $\Rightarrow \forall i \in \{1,2,3,4\}$ $\forall s$

$P(s|W=i) = P(s)$

$$E(S|W=i) = \int s \cdot P(s|W=i) \overset{\text{indep}}{=} \int s\, P(s) = E(S)$$

$$E(S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{2} = E(S|W)$$

<u>Resultado</u> Si dos sucesos S y W son independientes, entonces $E(S|W) = E(W|S) = E(S)$.

(2) $$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{|X| \geq n\}}}_{1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{1}_{\{n \leq |X| \leq n+1\}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{1}_{\{n \leq |X| < n+1\}} \underset{n \leq |X|}{\leq} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |X|\, \mathbb{1}_{\{n \leq |X| < n+1\}}}_{2} \overset{|X| \leq n+1}{\leq}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \mathbb{1}_{\{n \leq |X| < n+1\}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{1}_{\{n \leq |X| < n+1\}} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{n \leq |X| < n+1\}} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{|X| \geq n\}} + \mathbb{1}_{\{0 \leq |X|\}}}_{3}$$

Como ① $\leq$ ② $\leq$ ③ $\Rightarrow \int ① \leq \int ② \leq \int ③ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \sum_{n=1}^{\infty} 1\!\!1_{\{|X| \geq n\}} \leq \int \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|X| \cdot 1\!\!1_{\{n \leq |X| < n+1\}}}_{|X|} \leq$$

$$\leq \int \sum_{n=1}^{\infty} 1\!\!1_{\{|X| \geq n\}} + \int 1\!\!1_{\{0 \leq |X|\}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(n \leq |X|) \leq \int |X| \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(n \leq |X|) + P(0 \leq |X|)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} P(n \leq |X|) \leq E|X| \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(n \leq |X|) + 1}$$

$\Rightarrow$) X integrable $\Rightarrow \int |X| < \infty \Rightarrow E|X| < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(n \leq |X|) < \infty$$

$\Leftarrow$) $\sum_{n=1}^{\infty} P(n \leq |X|) < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(n \leq |X|) + 1 < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow E|X| < \infty \Rightarrow \int |X| < \infty \Rightarrow X$ integrable

Scanned with CamScanner

Ejercicio 4. Observamos que $X_1 + \cdots + X_N = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{1}_{\{n \leq N\}}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_N] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{1}_{\{n\leq N\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{n\leq N\}}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{n\leq N\}}] = \mathbb{E}[X_1]\sum_{n=1}^{\infty} P(n \leq N) = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N].\end{aligned}$$

Nótese como hemos utilizado la independencia entre X_n y N y el resultado del ejercicio 1). También demostramos que Y es integrable ya que $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N] < \infty$.

Ejercicio 10. Vamos a utilizar el problema 8) que dice que si $\{X_n\}$ converge c.s. a X, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $P(\limsup\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$. Llamamos $A_n = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Sea $\{X_n\}$ tal que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, tenemos que

$$0 \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n) = 0$$

por el ejercicio 8), por tanto tenemos que $\lim P(A_n)$ existe y vale 0. Esto es independiente del ε que tomemos, por tanto $\{X_n\}$ converge a X en probabilidad.

Ejercicio 13. Que los elementos de Ω son equiprobables significa que $A \subset \Omega$ tiene probabilidad $P(A) = |A|/p$. Supongamos que $A, B \subset \Omega$, ambos no nulos y distintos del total, son independientes, entonces

$$P(A)P(B) = |A||B|/p^2 = |A \cap B|/p = P(A \cap B),$$

y operando llegamos a

$$|A||B| = |A \cap B|p.$$

Como p es primo, o bien $p \mid |A|$ o $p \mid |B|$, pero por hipótesis tenemos que $0 < |A|, |B| < p$, por tanto contradicción.

Ejercicio 17. Primero hay que observar que las v.a. $\{X_n\}$ son i.i.d. y que los conjuntos $A_n = \{X_n \geq n\}$ son independientes.

1. Nos piden calcular $P(\limsup A_n)$. Para esto vamos a utilizar los dos lemas de Borel-Cantelli. Nótese que también estamos en las hipótesis del segundo ya que los A_n son independientes. Primero calculamos

   $$P(A_n) = P(\{X_n \geq n\}) = \int_n^{\infty} (a-1)/x^a dx = \cdots = 1/n^{a-1},$$

   entonces vemos que el sumatorio $\sum P(A_n)$ diverge si $a \leq 2$ y converge si $a > 2$, por tanto por los lemas de Borel-Cantelli tenemos que $P(\limsup A_n) = 0$ si $a \leq 2$ y $P(\limsup A_n) = 1$ si $a > 2$.

2. Ahora piden calcular $P(\liminf A_n)$. Para este ejercicio hay que hacer esencialmente lo mismo pero jugando con que $\liminf A_n = (\limsup A_n^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}$. Calculamos la probabilidad

   $$P(A_n^{\mathsf{c}}) = 1 - P(A_n) = 1 - 1/n^{a-1}.$$

   entonces tenemos que $\sum P(A_n^{\mathsf{c}})$ diverge siempre ya que el término de la serie cumple $1 - 1/n^{a-1} \to 1$. Por tanto nos queda que $P(\limsup A_n^{\mathsf{c}}) = 1$ y

   $$P(\liminf A_n) = P((\limsup A_n^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}) = 1 - P(\limsup A_n^{\mathsf{c}}) = 0.$$

11) Probar que $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.

Sea t un punto de continuidad de F_X

Entonces $\forall \varepsilon > 0, n$

$$F_{X_n}(t) = P\{X_n \le t\} = P\{X_n \le t, |X_n - X| \le \varepsilon\} + P\{X_n \le t, |X_n - X| > \varepsilon\} \le P\{X \le t + \varepsilon\} + P\{|X_n - X| > \varepsilon\}$$

$$= F_X(t+\varepsilon) + P\{|X_n - X| > \varepsilon\}.$$

Si $n \to \infty$

$\limsup_n F_{X_n}(t) \le F_X(t+\varepsilon)$ por convergencia en probabilidad.

y si $\varepsilon \to 0 \Rightarrow$ $\cancel{F_{X_n}(t) \le F_X}$

$\limsup_n F_{X_n}(t) \le F_X(t)$

Por otro lado, $\forall n, \varepsilon$

$$F_X(t-\varepsilon) = P(X \le t-\varepsilon) = P(X \le t-\varepsilon, |X_n - X| \le \varepsilon) + P(X \le t-\varepsilon, |X_n - X| > \varepsilon) \le F_{X_n}(t) + P\{|X_n - X| > \varepsilon\}$$

Cuando $n \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$: y usando conv en prob y cont. F_X

$F_X(t) \le \liminf_n F_{X_n}(t) \Rightarrow F_{X_n}(t) \to F_X(t)$.

$\boxed{8.}$

Sabemos que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, lo que por definición es que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$.

$\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = \{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} =$

$= \{\omega\in\Omega : \forall\varepsilon>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} : \underbrace{|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon}_{(*)}, \ \underline{\underline{\forall n \geq n_0}}\} =$

$= \liminf_n \{|X_n - X| < \varepsilon\}$ debido a que $(*)$ se cumple $\forall n\in\mathbb{N}$ menos para un número finito (n's menores que n_0)

$\Rightarrow 1 = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = \mathbb{P}(\liminf_n \{|X_n - X| < \varepsilon\}) \quad \forall\varepsilon>0$

Ahora, aplicando complementarios y usando De Morgan: ojo!

$1 = \mathbb{P}(\liminf_n \{|X_n - X| < \varepsilon\}) = \mathbb{P}((\limsup_n \{|X_n - X| \geq \varepsilon\})^c) =$

$= 1 - \mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 1 - 1 = 0. \quad \forall\varepsilon>0$

$\blacksquare$

$\boxed{9.}$ Es el recíproco del ejercicio anterior. Se demuestra igual que el ejercicio 8 pero al revés:

$\mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0 \quad \forall\varepsilon>0$

$\parallel$

$\mathbb{P}((\liminf_n \{|X_n - X| < \varepsilon\})^c) = 1 - \mathbb{P}(\liminf_n \{|X_n - X| < \varepsilon\}) =$

$= 1 - \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) \Longrightarrow \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguro a X.

$\blacksquare$

Scanned with CamScanner

16.

a) Llamemos $A_n = \{X_n > x\}$ para x tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X_n > x\}) < \infty$

Sea ahora $B_n = A_n^c = \{X_n \leq x\}$

Afirmo que $\liminf_n B_n = \{M < \infty\} = \{\omega \in \Omega : M(\omega) = \sup_{n\geq 1} X_n(\omega) < \infty\}$

Veámoslo:

¿ $\liminf_n B_n \subseteq \{M < \infty\}$?

Sea $y \in \liminf_n B_n \Rightarrow y \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ menos para un número finito $\Rightarrow X_n(y) \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ menos para un nº finito. Ahora tenemos que ver que $M(y) < \infty \iff$
$\iff \sup_{n\geq 1} X_n(y) < \infty$.

Esto se cumple porque $X_n(y) > x$ para solo un nº finito de índices ($\{i_1, \dots, i_n\} \subset \mathbb{N}$) y entonces $\sup_{n\geq 1} X_n(y) \neq \infty$ porque no tiene cómo diverger en un número finito de índices

Por lo tanto $\sup_{n\geq 1} X_n(y) < \infty \Rightarrow M(y) < \infty \Rightarrow y \in \{M < \infty\}$.

¿ $\{M < \infty\} \subseteq \liminf_n B_n$?

Sea $y \in \{M < \infty\} \Rightarrow M(y) < \infty \Rightarrow \sup_{n\geq 1} X_n(y) < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow X_n(y) \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ menos para un número finito de índices (sino divergería) $\Rightarrow y \in \liminf_n B_n$.

$\Rightarrow \liminf_n B_n = \{M < \infty\}$

Entonces ahora nos preguntamos por $\mathbb{P}(M < \infty)$:

De Morgan

$\mathbb{P}(M < \infty) = \mathbb{P}(\liminf_n B_n) = 1 - \mathbb{P}(\{\liminf_n B_n\}^c) =$

$= 1 - \mathbb{P}(\{\limsup_n B_n^c\}) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(\limsup_n A_n)}_{= 0} = 1 - 0 = 1$ ■

Por el 1er lema de Borel-Cantelli:
$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > x) < \infty$ por hipótesis

b) ¿ $\mathbb{P}(\{M=\infty\})$?

Habíamos demostrado que $\liminf_n B_n = \{M<\infty\}$

$$\liminf_n B_n = \liminf_n A_n^c$$

Aplicando complementarios: $(\liminf_n A_n^c)^c = \{M<\infty\}^c = \{M=\infty\}$

$$(\liminf_n A_n^c)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} \limsup_n A_n$$

Entonces: $\limsup_n A_n = \{M=\infty\} \Rightarrow \mathbb{P}(M=\infty) = \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$ debido al 2º lema de Borel-Cantelli, ya que estamos bajo sus hipótesis:

$X_1, X_2, \dots$, indep. $\Rightarrow A_1, A_2, \dots$ indep. y como $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > x) = \infty$

$A_1 = \{X_1 > x\}$, $A_2 = \{X_2 > x\}$

estamos bajo las condiciones del 2º lema de Borel-Cantelli y $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}(M=\infty)$$

Ejercicio 12. Supóngase que A, B, C, D, E son sucesos independientes. Probar o refutar las afirmaciones siguientes:

1. Los sucesos AB y $C^\mathsf{c} \cup (DE^\mathsf{c})$ son independientes

   Queremos ver si $P(AB \cap (C^\mathsf{c} \cup DE^\mathsf{c})) = P(AB) \cdot P(C^\mathsf{c} \cup DE^\mathsf{c}))$

   Usamos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} P(AB \cap (C^\mathsf{c} \cup DE^\mathsf{c})) &= P(ABC^\mathsf{c} \cup ABDE^\mathsf{c}) = P(ABC^\mathsf{c}) + P(ABDE^\mathsf{c}) - P(ABC^\mathsf{c}DE^\mathsf{c}) \\ &= P(AB) \cdot P(C^\mathsf{c}) + P(AB) \cdot P(DE^\mathsf{c}) - P(AB) \cdot P(C^\mathsf{c}DE^\mathsf{c}) \\ &= P(AB) \cdot (P(C^\mathsf{c}) + P(DE^\mathsf{c}) - P(C^\mathsf{c}DE^\mathsf{c})) = P(AB) \cdot P(C^\mathsf{c} \cup DE^\mathsf{c}) \end{aligned}$$

2. $A \cup B$ y AC son independientes

   Queremos ver que $P((A \cup B) \cap AC) = P(A \cup B) \cdot P(AC)$

$$P((A \cup B) \cap AC) = P(AC \cup ABC) = P(AC)$$

   Esto, junto con la primera ecuación, querría decir que $P(A \cup B) = 1 \ \forall A, B$. Esto obviamente no se cumple para todo par de sucesos aunque sean independientes.

3. $P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$ (se supone que $P(C) > 0$).

   Por definición, $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$

$$\begin{aligned} P(AB|C) &= \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(AB) \cdot P(C)}{P(C)} = P(AB) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A|C) \cdot P(B|C) &= \frac{P(AC)}{P(C)} \cdot \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{P(A) \cdot P(C)}{P(C)} \cdot \frac{P(B) \cdot P(C)}{P(C)} = P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

Ejercicio 14. Encontrar $\lim\sup A_n$ y $\lim\inf A_n$ en los siguientes casos:

1. $A_n = A$, si n es par y $A_n = B$, si n es impar.

$$\lim\sup A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup B) = A \cup B$$

$$\lim\inf A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap B) = A \cap B$$

2. $A_n = (-2 - 1/n, 1]$, si n es par y $A_n = [-1, 2 + 1/n)$, si n es impar.

   Partimos de que $2 + 1/n > 2 > 1$, luego el supremo estará en un conjunto con n impar, y $-2 - 1/n < -2 < -1$, luego el ínfimo estará en un conjunto con n par

$$\lim\sup A_n = (-2, 2), \quad \lim\inf A_n = [-1, 1]$$

3. $A_n = [0, a_n)$, siendo $a_n = 2 + (-1)^n(1 + 1/n)$.

$$\lim\sup A_n = [0, 1), \quad \lim\inf A_n = [0, 3)$$

4. Los A_n son disjuntos dos a dos.

$$\lim\sup A_n = \varnothing, \quad \lim\inf A_n = \varnothing$$

③ Si X v.a y $E(X) < \infty \Rightarrow$

$$\lim_{x \to \infty} x\, P(|X| \geq x) = 0$$

$$E(X) = \int_{\Omega} X \, dP < \infty$$

$\Big\{$ <u>obs</u>: Por 1° lema Borel-Cantelli $E(X) < \infty$

$\Rightarrow P(X_n \text{ i.o}) = 0 \Rightarrow \boxed{P(|X| \geq \infty) = 0}$ $\boxed{\text{i.o}}$

— x —

$$\int_{\Omega} |X| \, dP = \int_{\{x < \infty\}} |X| \, dP + \int_{\{\lim_{x \to \infty}\}} |X| \, dP < \infty$$

$$\Rightarrow \int_{\{\lim_{x \to \infty}\}} |X| \, dP = 0 \quad \text{a.e.}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } = r \neq 0 \Rightarrow r = \lim_{x \to \infty} x\, P(|X| > x) \\ \quad = \infty \cdot \lim_{x \to \infty} P(|X| > x) \quad \# \end{array}}$

$\hookrightarrow \boxed{\lim_{x \to \infty} x\, P(|X| \geq x) = 0}$

Es un solo punto

6) Para ver la relación usaremos las siguientes definiciones de $\limsup_n A_n$ y $\liminf_n A_n$:

$x \in \limsup A_n \Leftrightarrow x \in A_n$ para un nº infinito de A_n

$x \in \liminf A_n \Leftrightarrow x \in A_n$ salvo para $\{A_j\}: |\{A_j\}| < \infty$.

Veremos que la relación es $\begin{cases} \limsup_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A \Leftrightarrow \limsup_n A_n = A \\ \liminf_n \mathbb{1}_{A_n} = A \Leftrightarrow \liminf_n A_n = A. \end{cases}$ ⊛

Para cada punto, la función indicatriz en cualquier conjunto solo puede tomar los valores 0 y 1; por tanto, tanto el $\liminf_n \mathbb{1}_{A_n}$ como el $\limsup_n \mathbb{1}_{A_n}$ van a ser funciones indicatrices. Fijándonos en cada punto del espacio, ¿cuándo valdrá 1 el $\limsup_n$ y el $\liminf_n$ de esas funciones indicatrices en dicho punto? Al ser una sucesión de números, podemos usar la def de $\limsup_n$ y $\liminf_n$ de sucesiones de números, llegando a que en cada punto el $\limsup_n$ valdrá 1 cuando valga 1 en un número infinito de $\mathbb{1}_{A_n}$, e.d, cuando $\in$ a un nº infinito de A_n, y el liminf valdrá 1 cuando valga 1 a partir de un cierto n, es. d., cuando pertenezca a todos los A_n a partir de un cierto N fijo, lo que confirma nuestra afirmación previa. ⊛

7) Es fácil ver que la sucesión es: $\mathbb{1}_{\overset{A_1}{[0,1)}}, \mathbb{1}_{\overset{A_2}{[0,\frac{1}{2})}}, \mathbb{1}_{\overset{A_3}{[\frac{1}{2},1)}}, \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{3})}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})} \dots$

Usaremos el resultado anterior para buscar limsup y liminf

$\limsup_n X_{n,k} = \mathbb{1}_{[0,1)}$, ya que $\forall x \in [0,1)$ $\forall N \exists n: x \in A_n \wedge n > N$.

$\liminf_n X_{n,k} = 0$, ya que $\forall x \in [0,1) \forall N \exists n: x \notin A_n \wedge n > N$.

$P(\limsup_n X_{n,k} > \frac{1}{2}) = 1$

$\limsup_n (P(A_{n,k}) > \frac{1}{2}) = 1$

Converge en probabilidad a 0 ya que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: |X_{n,k} - 0| < \varepsilon \; \forall n \geq N$.

Converge en L_∞ ya que esssup $|X_{n,k} - 0| < \infty$, y por tanto también converge en $L_p \; \forall p$, ya que $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q \; \forall p \leq q$.

No converge casi seguro porque $\nexists \lim_n (X_n(\omega) - 0)$

No se puede aplicar el primer lema de Borel-Cantelli ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots = \infty.$$

No se pueden aplicar ni el segundo lema de Borel-Cantelli ni la ley 0-1 de Kolmogorov ya que los $X_{n,k}$ no son independientes.

(15) a) $\exists \{Y_n\} > 0$ v.a's $\sum Y_n < 1$

y $P(\sum Y_n < 1) = 1/2$

$\sum Y_n = \infty$ y $P(\sum Y_n = \infty) = 1/2$

$\boxed{\text{VERDADERO}}$

$$Y_n(w) = \begin{cases} 0 & w \in (0, 1/2) \\ 1 & w \in (1/2, 1) \end{cases}$$

b) $\exists \{Y_n\} > 0$ v.a's $\sum Y_n < 1$

y $P(\sum Y_n < 1) = 1/2$

$\sum Y_n = \infty$ y $P(\sum Y_n = \infty) = 1/2$

$\boxed{\text{FALSO}}$ por Kolmogorov.

ya que si $\sum Y_n < 1$ INDEP $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sum Y_n < 1 \in \mathcal{T} \\ \sum Y_n = \infty \in \Sigma \end{cases}$$ (futuro remoto)

luego $P(\sum Y_n < 1) = \begin{cases} \to 0 \\ \to 1 \end{cases}$

$P(\sum Y_n = \infty) = \begin{cases} \to 0 \\ \to 1 \end{cases}$ pero nunca $1/2$.