Sección 4.1

---

1. Para cada uno de los métodos explícitos siguientes, demostrar que si f satisface las hipótesis H_f, entonces la correspondiente función de incremento satisface las hipótesis (H_{MN}).

   (a) Predictor-corrector Euler/Trapecio, (3.3)–(3.4).
   (b) Euler modificado, (3.5).
   (c) Regla del punto medio, (3.7).

Solución. (a) La función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \frac{1}{2}\Big(f(x_n, y) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\Big).$$

Al tratarse de una composición de funciones continuas, es obviamente continua. También es inmediato ver que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$. Así que sólo queda comprobar que ϕ_f es Lipschitz con respecto a la variable y_n.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| &\leq \tfrac{1}{2}\|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\
&\tfrac{1}{2}\|f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) - f(x_n + h, \hat{y}_n + hf(x_n, \hat{y}_n))\| \\
&\leq \tfrac{L}{2}\|y_n - \hat{y}_n\| + \tfrac{L}{2}\|y_n + hf(x_n, y_n) - \big(\hat{y}_n + hf(x_n, \hat{y}_n)\big)\| \\
&\leq \tfrac{L}{2}\|y_n - \hat{y}_n\| + \tfrac{L}{2}\|y_n - \hat{y}_n\| + \tfrac{Lh}{2}\|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\
&\leq \left(L + \tfrac{L^2 h}{2}\right)\|y_n - \hat{y}_n\| \leq \left(L + \tfrac{L^2 h_0}{2}\right)\|y_n - \hat{y}_n\|
\end{aligned}$$

para todo $h \in (0, h_0)$. Por tanto, podemos tomar $L_{\phi_f} = L + \frac{L^2 h_0}{2}$.

(b) La función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right).$$

Al tratarse de una composición de funciones continuas, es obviamente continua. También es inmediato ver que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$. Así que sólo queda comprobar que ϕ_f es Lipschitz con respecto a la variable y_n.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \\
&\quad \leq \|f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2} f(x_n, y_n)) - f(x_n + \tfrac{h}{2}, \hat{y}_n + \tfrac{h}{2} f(x_n, \hat{y}_n))\| \\
&\quad \leq L\|y_n + \tfrac{h}{2} f(x_n, y_n) - \big(\hat{y}_n + \tfrac{h}{2} f(x_n, \hat{y}_n)\big)\| \\
&\quad \leq L\|y_n - \hat{y}_n\| + \tfrac{Lh}{2}\|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\
&\quad \leq \left(L + \tfrac{L^2 h}{2}\right)\|y_n - \hat{y}_n\| \leq \left(L + \tfrac{L^2 h_0}{2}\right)\|y_n - \hat{y}_n\|
\end{aligned}$$

para todo $h \in (0, h_0)$. Por tanto, podemos tomar $L_{\phi_f} = L + \frac{L^2 h_0}{2}$.

(c) La función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) = 2f(x_n + h, y_{n+1}).$$

Al tratarse de una composición de funciones continuas, es obviamente continua. También es inmediato ver que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$. Así que sólo queda comprobar que ϕ_f es Lipschitz con respecto a la variable y_n.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h)\| \\
&\quad \leq 2\|f(x_n + h, y_{n+1}) - f(x_n + h, \hat{y}_{n+1})\| \leq 2L\|y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos tomar $L_{\phi_f} = 2L$.

---

2. Para cada uno de los métodos implícitos siguientes, demostrar que si f satisface las hipótesis H_f, entonces la correspondiente función de incremento está bien definida para h pequeño y satisface las hipótesis $(\mathrm{H}_{\mathrm{MN}})$.

   (a) Método de Euler implícito, (3.12).

(b) Método RK de colocación de parámetro $c_1 = 1/2$, (3.13).

Solución. Empezamos probando un resultado general que puede ser útil al estudiar métodos implícitos.

Dada $\phi_0 \in C\left([a,b] \times \mathbb{R}^{kd} \times [0,\infty)\right)$, definimos una sucesión $\{\phi_n\}$ mediante

$$\phi_{n+1} = G(\phi_n),$$

para una cierta función de iteración G. Si G es continua y contractiva en $L^\infty(K)$ para un cierto $K \subset [a,b] \times \mathbb{R}^{kd} \times [0,\infty)$, entonces existe un único punto fijo de G, y este punto fijo, que se puede obtener como límite $\phi = \lim \phi_n$, es una función continua en K. En efecto, si

$$\|G(\phi) - G(\hat{\phi})\|_{L^\infty(K)} \leq L\|\phi - \hat{\phi}\|_{L^\infty(K)}$$

para algún $L < 1$, entonces, para todo $m \geq n$,

$$\|\phi_m - \phi_n\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{L^n}{1-L}\|\phi_1 - \phi_0\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{L^n}{1-L}C_K.$$

Así, la sucesión es uniformemente de Cauchy en la norma de la convergencia uniforme. Por tanto existe el límite y es continuo. La unicidad es consecuencia inmediata de la contractividad.

Lo interesante del resultado es que la misma cuenta que sirve para probar que la función de incremento ϕ_f está bien definida para $h \leq h_0$ demuestra que la ϕ_f es continua en ese rango de valores de h.

(a) Para el método de Euler implícito la función de incremento es un punto fijo de la aplicación

$$G(\phi) = f(x_n + h, y_n + h\phi).$$

Por consiguiente,

$$\|G(\phi) - G(\hat{\phi})\| \leq L_f h\|\phi - \hat{\phi}\|.$$

Así pues, si $h \leq h_0 \leq 1/L_f$, siendo L_f una constante de Lipschitz para f con respecto a y en norma infinito, entonces la función G es contractiva en norma infinito en cualquier subconjunto compacto K de

$[a,b] \times \mathbb{R}^d \times [0,h_0]$. Por consiguiente G tiene un único punto fijo que es continuo en $[a,b] \times \mathbb{R}^d \times [0,h_0]$.

En cuanto a la contractividad, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\phi_f(x_n,y_n;h) - \phi_f(x_n,\hat{y}_n;h)\| \\
&\qquad \le \|f(x_n+h, y_n + h\phi_f(x_n,y_n;h)) - f(x_n+h, \hat{y}_n + h\phi_f(x_n,\hat{y}_n;h))\| \\
&\qquad \le L_f\|y_n - \hat{y}_n\| + L_f h\|\phi_f(x_n,y_n;h) - \phi_f(x_n,\hat{y}_n;h)\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $h \le h_0 < 1/L_f$, tenemos que

$$\|\phi_f(x_n,y_n;h) - \phi_f(x_n,\hat{y}_n;h)\| \le \frac{1}{1-L_f h_0}\|y_n - \hat{y}_n\|,$$

y la función de incremento satisface la condición de Lischitz deseada con $L_{\phi_f} = \frac{1}{1-L_f h_0}$.

Finalmente, es trivial comprobar que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$.

(b) Este método no es ni más ni menos que la regla implícita del punto medio. Su función de incremento es un punto fijo de la aplicación

$$G(\phi) = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\phi).$$

Por consiguiente,

$$\|G(\phi) - G(\hat{\phi})\| \le \frac{L_f h}{2}\|\phi - \hat{\phi}\|.$$

Así pues, si $h \le h_0 \le 2/L_f$, siendo L_f una constante de Lipschitz para f con respecto a y en norma infinito, entonces la función G es contractiva en norma infinito en cualquier subconjunto compacto K de $[a,b] \times \mathbb{R}^d \times [0,h_0]$. Por consiguiente G tiene un único punto fijo que es continuo en $[a,b] \times \mathbb{R}^d \times [0,h_0]$.

En cuanto a la contractividad, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\phi_f(x_n,y_n;h) - \phi_f(x_n,\hat{y}_n;h)\| \\
&\le \|f(x_n+\tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}\phi_f(x_n,y_n;h)) - f(x_n+\tfrac{h}{2}, \hat{y}_n + \tfrac{h}{2}\phi_f(x_n,\hat{y}_n;h))\| \\
&\le L_f\|y_n - \hat{y}_n\| + \tfrac{L_f h}{2}\|\phi_f(x_n,y_n;h) - \phi_f(x_n,\hat{y}_n;h)\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $h \leq h_0 < 2/L_f$, tenemos que

$$\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \leq \frac{1}{1 - \frac{L_f h_0}{2}} \|y_n - \hat{y}_n\|,$$

y la función de incremento satisface la condición de Lischitz deseada con $L_{\phi_f} = \frac{1}{1-\frac{L_f h_0}{2}}$.

Finalmente, es trivial comprobar que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$.

Sección 4.2

---

1. Consideramos un método de un sólo paso con $|\alpha_0| > 1$. Demostrar que no es 0-estable. *Indicación:* Aplicárselo a un problema con $f = 0$ y valores de arranque $y_0 = 0$ e $\hat{y}_0 = h$.

Solución. Estamos ante un método de la forma

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\phi_f(x_n, y_n; h).$$

Si $f = 0$, entonces $\phi_f = 0$, y el método se reduce a la recurrencia $y_{n+1} = -\alpha_0 y_n$, cuya solución generel es $y_n = (-\alpha_0)^n y_0$. Consideramos dos soluciones distintas de esta recurrencia (en ambos casos sin ningún tipo de perturbación), $y_n = 0$, $\hat{y}_n = h(-\alpha_0)^n$. Se tiene que $|y_0 - \hat{y}_0| = h$, y que $\max_{1\leq n\leq N} |y_n - \hat{y}_n| = h|\alpha_0|^N$. Si el método fuera 0-estable se tendría entonces que existe una constante C tal que $h|\alpha_0|^N \leq Ch$, lo que es obviamente falso si $|\alpha_0| > 1$.

---

2. Probar que la regla del trapecio no es convergente de orden 3.

Solución. Consideramos el problema

$$y'(x) = \frac{x^2}{2}, \qquad y(0) = 0,$$

cuya solución es $y(x) = x^3/3!$. La solución numérica producida por la regla del trapecio satisface la recurrencia

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(\frac{x_n^2}{2} + \frac{x_{n+1}^2}{2}\right),$$

es decir

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h^3}{4}(2n^2 + 2n + 1).$$

Es fácil comprobar que la solución general de esta recurrencia viene dada por

$$y_n = K + \frac{n^3 h^3}{3!} - \frac{n h^3}{12},$$

siendo K una constante arbitraria. Si tomamos como valor de arranque $y_0 = 0$, lo que supone que $|y(x_0) - y_0| = 0$, entonces $K = 0$, y se tiene que

$$\max_{1 \le n \le N} |y(x_n) - y_n| = \frac{bh^2}{12} \neq O(h^3).$$

Por consiguiente, el método no es de orden 3.

---

3. Consideramos el problema de valor inicial $y'(x) = \int_0^{y(x)} e^{-s^2}\, ds$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 1$. Suponiendo que no se comete ningún error en el valor de arranque, $y_0 = y(x_0)$, determinar un valor h_0 que garantice un error menor que 10^{-3} al resolver el problema con $0 < h \le h_0$ por medio de:

   (a) el método de Euler implícito;

   (b) la regla del trapecio.

Solución. Tanto el método de Euler implícito como la regla del trapecio son métodos de un paso. Por consiguiente, en ambos casos

$$|y(x_n) - y_n| \le \mathrm{e}^{L(x_n - x_0)} \left(|y(x_0) - y_0| + (x_n - x_0) \max_{0 \le n \le N-1} \frac{|R_n|}{h} \right).$$

Como estamos suponiendo que no se comete ningún error en el valor de arranque, y teniendo en cuenta que $x_n - x_0 \le b - a = 1$, se tiene que

$$|y(x_n) - y_n| \le \mathrm{e}^{L} \max_{0 \le n \le N-1} \frac{|R_n|}{h}.$$

Para estimar la constante de Lipschitz con respecto a y de la función del lado derecho usamos el Teorema del Valor Medio. Se tiene que

$$|f(x,y) - f(x,\hat{y})| = \left| \int_0^y \mathrm{e}^{-s^2}\, ds - \int_0^{\hat{y}} \mathrm{e}^{-s^2}\, ds \right| = \mathrm{e}^{-\xi^2} |y - \hat{y}| \le |y - \hat{y}|$$

para algún valor ξ intermedio entre y e $\hat{y}$. Por consiguiente, podemos tomar $L = 1$.

Queda por tanto tan sólo estimar el residuo. Esta es la parte en la que hay diferencia entre los dos métodos.

(a) Usando desarrollos de Taylor se obtiene fácilmente que el residuo del método de Euler implícito satisface

$$\begin{aligned}
R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \\
&= y(x_n + h) - y(x_n) - hy'(x_n + h) \\
&= \left(\tfrac{1}{2}y''(\overline{\xi}_n) - y''(\overline{\eta}_n)\right) h^2,
\end{aligned}$$

donde $\overline{\xi}_n$ y $\overline{\eta}_n$ son puntos intermedios, $\overline{\xi}_n, \overline{\eta}_n \in [x_n, x_{n+1}]$. Por consiguiente,

$$\max_{0\le n\le N-1} \frac{|R_n|}{h} \le Ch, \qquad C = \frac{3}{2} \max_{x\in[a,b]} |y''(x)|.$$

Toca entonces estimar la derivada segunda. Para ello derivamos la ecuación, y obtenemos que

$$y''(x) = \mathrm{e}^{-y^2(x)} y'(x).$$

Nótese que $y'(x) > 0$ para todo $x > 0$. En efecto, $y'(0) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-s^2}\,ds > 0$. Sea $\bar{x}$ el primer punto a la derecha de 0 en el que se anula y'. En ese punto, $y(\bar{x}) > y(0) = 1$, y por consiguiente $0 = y'(\bar{x}) = \int_0^{y(\bar{x})} \mathrm{e}^{-s^2}\,ds > 0$, una contradicción. Como consecuencia se tiene que $y'' > 0$ y que

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-s^2}\,ds = y'(0) \le y'(x) \le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}/2.$$

Esta estimación de y' permite a su vez estimar y. En efecto, si la integramos en $(0, x)$ se obtiene que

$$y'(0)\,x < y(x) - 1 \le \frac{\sqrt{\pi}}{2} x.$$

Por lo tanto, si $x \in [0, 1]$, se tiene que $1 \le y(x) \le 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En cuanto a la derivada segunda, usando que $y' > 0$ se tiene que

$$0 < y''(x) \le e^{-y(0)^2} y'(x) \le \frac{\sqrt{\pi}}{2\mathrm{e}}.$$

Poniendo todo junto, obtenemos que:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{3\sqrt{\pi}}{4\mathrm{e}} h_0$$

para todo $h \leq h_0$. Para que el error esté con seguridad dentro del margen estipulado basta con que

$$h_0 \leq \frac{4\mathrm{e} \cdot 10^{-3}}{3\sqrt{\pi}}.$$

(b) Sabemos que el residuo de la regla del trapecio verifica que

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{|R_n|}{h} \leq Ch^2, \qquad C = \frac{5}{12} \max_{x \in [a,b]} |y'''(x)|.$$

Toca entonces estimar la derivada tercera. Derivando la EDO una vez más se tiene que,

$$y'''(x) = -\mathrm{e}^{-y^2(x)} 2y(x)(y'(x))^2 + \mathrm{e}^{-y^2(x)} y''(x).$$

Usando las estimaciones ya obtenidas tenemos que

$$-2\left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\frac{\pi}{4} \leq -2y(x)(y'(x))^2 + y''(x) \leq -2(y'(0))^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\mathrm{e}}.$$

Por consiguiente, $|-2y(x)(y'(x))^2 + y''(x)| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\frac{\pi}{2}$. Como por otra parte $\mathrm{e}^{-y^2(x)} \leq \mathrm{e}^{-y^2(0)} = 1/\mathrm{e}$, se obtiene finalmente que

$$|y'''(x)| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

Llegamos así a

$$|y(x_n) - y_n| \leq \mathrm{e}\left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\frac{\pi}{2\mathrm{e}}\frac{5}{12} h_0^2$$

para todo $h \leq h_0$. Para que el error esté con seguridad dentro del margen estipulado basta con que

$$h_0 \leq \left(\frac{48 \cdot 10^{-3}}{5\pi\left(2 + \sqrt{\pi}\right)}\right)^{1/2}.$$

---

4. Consideramos un método de un paso con $\alpha_0 = -1$. Sean $\{u_n\}_{n=0}^N$ y $\{v_n\}_{n=0}^N$ satisfaciendo (4.5), con ϕ_f verificando las hipótesis ($\mathrm{H_{MN}}$). Demostrar que existe una constante $K > 0$ tal que

$$\max_{0\le n\le N} \|u_n - v_n\| \ge K \max_{0\le n\le N} \left\| u_0 - v_0 + h\sum_{j=0}^{n-1} (\delta_j - \gamma_j) \right\|.$$

Concluir de lo anterior que si existe un problema de valor inicial tal que $R_n = Ch^{p+1}$, con una constante C independiente de n, entonces el método no puede tener orden de convergencia mayor que p. Como aplicación, demostrar que el método de Euler modificado no es convergente de orden 3.

Solución. Restando las ecuaciones para u_n y v_n tenemos que

$$u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n + h\left(\phi_f(x_n, u_n; h) - \phi_f(x_n, v_n; h)\right) + h\left(\delta_n - \gamma_n\right).$$

Iterando esta recurrencia se llega a

$$u_n - v_n = u_0 - v_0 + h\sum_{j=0}^{n-1} \left(\phi_f(x_j, u_j; h) - \phi_f(x_j, v_j; h)\right) + h\sum_{j=0}^{n-1} \left(\delta_j - \gamma_j\right).$$

Usando ahora que $\|a + b\| \ge \|a\| - \|b\|$, y que

$$\begin{aligned} h\left\| \sum_{j=0}^{n-1} \left(\phi_f(x_j, u_j; h) - \phi_f(x_j, v_j; h)\right) \right\| &\le Lh\sum_{j=0}^{n-1} \|u_j - v_j\| \\ &\le LhN \max_{0\le n\le N} \|u_n - v_n\| \le L(b-a) \max_{0\le n\le N} \|u_n - v_n\|, \end{aligned}$$

llegamos a

$$\begin{aligned} \max_{0\le n\le N} \|u_n - v_n\| \ge \; & \max_{0\le n\le N} \left\| u_0 - v_0 + h\sum_{j=0}^{n-1} (\delta_j - \gamma_j) \right\| \\ & -L(b-a) \max_{0\le n\le N} \|u_n - v_n\|, \end{aligned}$$

y de ahí inmediatamente al resultado deseado, con $K = 1/(1+L(b-a))$.

Tomando $u_n = y(x_n)$, $\delta_n = R_n/h$, $v_n = y_n$, $\gamma_n = 0$, se obtiene que

$$\max_{0\le n\le N} \|y(x_n) - y_n\| \ge K \max_{0\le n\le N} \left\| y(x_0) - y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} R_n \right\|.$$

Si existe un PVI tal que $R_n = Ch^{p+1}$, tomando $y_0 = y(x_0)$ para ese problema se tiene que

$$\max_{0\le n\le N} \|y(x_n) - y_n\| \ge KCNh^{p+1} = KC(b-a)h^p \ne O(h^{p+1}),$$

y el método es a lo sumo convergente de orden p.

Ahora aplicamos el resultado al método de Euler modificado. Para este método se tiene un residuo

$$R_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2} f(x_n, y(x_n))\right).$$

Veamos cuál es el desarrollo (hasta orden 2) del término “difícil”,

$$\begin{aligned}
f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y(x_n) + \tfrac{h}{2} y'(x_n)\right) &= \underbrace{f(x_n, y(x_n))}_{y'(x_n)} \\
&+ \tfrac{h}{2} \underbrace{\left(f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{J=1}^{d} f_{y^J}(x_n, y(x_n))(y^J)'(x_n) \right)}_{y''(x_n)} \\
&+ \tfrac{h^2}{8} \Big(f_{xx} + 2 \textstyle\sum_{J=1}^{d} f_{xy^J} (y^J)'(x_n) \\
&\qquad + \textstyle\sum_{J,L=1}^{d} f_{y^J y^L} (y^J)'(x_n)(y^L)'(x_n) \Big) (x_n + \tfrac{\xi}{2}, y(x_n) + \tfrac{\xi}{2} y'(x_n)).
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
R_n = y'''(\overline{\eta}_n)\tfrac{h^3}{3!} - \tfrac{h^3}{8} \Big(& f_{xx} + 2 \textstyle\sum_{J=1}^{d} f_{xy^J} (y^J)'(x_n) \\
& + \textstyle\sum_{J,L=1}^{d} f_{y^J y^L} (y^J)'(x_n)(y^L)'(x_n) \Big) (x_n + \tfrac{\xi}{2}, y(x_n) + \tfrac{\xi}{2} y'(x_n)).
\end{aligned}$$

Esto demuestra por una parte que $\max_{0\le n\le N-1} \|R_n\|/h = O(h^2)$, y el método es por tanto convergente con orden al menos 3 (recordemos que es 0-estable, pues es un método de un paso con $\alpha_0 = -1$). Por otra parte, si consideramos el problema

$$y'(x) = \frac{x^2}{2}, \qquad y(0) = 0,$$

se tiene que $R_n = h^3(\frac{1}{3!} - \frac{1}{8}) = \frac{h^3}{24}$, por lo que podemos asegurar, empleando el resultado probado unos párrafos más arriba, que el método no tiene orden de convergencia superior a 2.

---

5. Intentar obtener un resultado análogo al del problema anterior para métodos de más de una paso.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_j(u_{n+j} - v_{n+j})\\ &\quad = h(\phi_f(x_n, u_n, \dots, u_{n+k-1}; h) - \phi_f(x_n, v_n, \dots, v_{n+k-1}; h))\\ &\qquad + h(\delta_n - \gamma_n).\end{aligned}$$

Por una parte,

$$\|\sum_{j=0}^{k} \alpha_j(u_{n+j} - v_{n+j})\| \leq \sum_{j=0}^{k} |\alpha_j| \max_{0\leq n\leq N} \|u_n - v_n\|.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}&\|h(\phi_f(x_n, u_n, \dots, u_{n+k-1}; h) - \phi_f(x_n, v_n, \dots, v_{n+k-1}; h)) + h(\delta_n - \gamma_n)\|\\ &\quad \geq \|h(\delta_n - \gamma_n)\| - hL_\phi \textstyle\sum_{j=0}^{k-1} \|u_{n+j} - v_{n+j}\|\end{aligned}$$

Así pues,

$$\max_{0\leq n\leq N} \|u_n - v_n\| \geq \frac{h}{\sum_{j=0}^{k} |\alpha_j| + h_0 L_\varphi} \max_{0\leq n\leq N-k} \|\delta_n - \gamma_n\|.$$

Si $R_n = Ch^{p+1}$, $C \neq 0$, esto dice que

$$\max_{0\le n\le N} \|y(x_n) - y_n\| \geq Ch^{p+1}.$$

El método no puede tener por tanto orden mayor que $p+1$.

Este resultado no es óptimo, pero no hemos conseguido nada mejor (de momento).

Sección 4.3

1. Decidir si los siguientes métodos son consistentes y en caso afirmativo determinar el orden de consistencia.

   (a) Predictor-corrector Euler/Trapecio, (3.3)–(3.4).

   (b) Regla de Simpson,
   $$y_{n+2}-y_n=\frac{h}{3}(f(x_n,y_n)+4f(x_{n+1},y_{n+1})+f(x_{n+2},y_{n+2})). \tag{4.11}$$

   (c) Fórmula BDF de dos pasos,
   $$y_{n+2}-\frac{4}{3}y_{n+1}+\frac{1}{3}y_n=\frac{2}{3}hf(x_{n+2},y_{n+2}). \tag{4.12}$$

   (d) Método de colocación de parámetro $c_1 = 1/2$, (3.13).

Solución. (a) Por un lado tenemos que $\sum_{j=0}^{1}\alpha_j = 0$ y que $\sum_{j=0}^{1} j\alpha_j = 1$. Por otro lado, la función de incremento del método está dada por
$$\phi_f(x_n,y_n;h)=\frac{1}{2}\Big(f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+hf(x_n,y_n))\Big).$$
Así pues,
$$\begin{aligned}\phi_f(x,y(x);0) &= \tfrac{1}{2}\Big(f(x,y(x))+f(x,y(x))\Big)\\ &= f(x,y(x))=\sum_{j=0}^{1} j\alpha_j f(x,y(x)).\end{aligned}$$
Por tanto, el método es consistente.

Para estudiar el orden de consistencia tenemos que considerar el residuo,
$$R_n=\underbrace{y(x_n+h)}_{F(h)}$$
$$-\left(\underbrace{y(x_n)+\frac{h}{2}\Big(f(x_n,y(x_n))+f(x_n+h,y(x_n)+hf(x_n,y(x_n)))\Big)}_{G(h)}\right).$$

Supongamos que $f \in C^1$ (y por tanto que $y \in C^2$). Entonces, por un lado

$$F(h) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(\overline{\xi}_n)}{2}h^2.$$

Por otro,

$$\begin{aligned} G(h) &= y(x_n) + \tfrac{h}{2}\Big(f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) + O(h)\Big) \\ &= y(x_n) + y'(x_n)h + O(h^2) \end{aligned}$$

Por consiguiente, $R_n = O(h^2)$, y el método es consistente de orden al menos 1.

Supongamos ahora que $f \in C^2$ (y por tanto que $y \in C^3$). Entonces, por un lado

$$F(h) \;=\; y(x_n) + y'(x_n)h + \tfrac{y''(x_n)}{2}h^2 + \tfrac{y'''(\overline{\xi}_n)}{3!}h^3.$$

Por otro,

$$G(h) = y(x_n) + \frac{h}{2}\Big(\underbrace{y'(x_n) + f(x_n + h, y(x_n) + hy'(x_n))}_{g(h)}\Big).$$

Puesto que

$$\begin{aligned} g(0) &= 2y'(x_n), \\ g'(0) &= f_x(x_n, y(x_n)) + \textstyle\sum_{J=1}^{d} f_{y^J}(x_n, y(x_n))(y^J)'(x_n) = y''(x_n), \\ g''(h) &= f_{xx}(x_n + h, y(x_n) + hy'(x_n)) \\ &\quad +2\textstyle\sum_{J=1}^{d} f_{xy^J}(x_n + h, y(x_n) + hy'(x_n))(y^J)'(x_n) \\ &\quad + \textstyle\sum_{J,L=1}^{d} f_{y^J y^L}(x_n, y(x_n))(y^J)'(x_n)(y^L)'(x_n), \end{aligned}$$

se concluye que

$$R_n = h^3\left(\frac{y'''(\overline{\xi}_n)}{3!} - \frac{g''(\overline{\theta})}{4}\right),$$

donde $\overline{\theta} \in [0, h]$. Concluimos que $R_n = O(h^3)$, y el método es consistente de orden al menos 2.

Para ver que el método no es consistente de orden 3, se lo aplicamos al PVI

$$y'(x) = x^2/2, \quad x \in [0, b], \qquad y(0) = 1.$$

Es inmediato comprobar que $f_{xx} = 1$, $f_{xy^J} = 0$, $f_{y^J y^L} = 0$, y por consiguiente que $g''(h) = 1$. Como por otra parte $y'''(x) = 1$, concluimos que

$$R_n = h^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4} \right) \neq O(h^4),$$

y por tanto el método no es consistente de orden 3.

(b) Por un lado tenemos que $\sum\limits_{j=0}^{2} \alpha_j = 0$ y que $\sum\limits_{j=0}^{2} j\alpha_j = 2$. Por otro lado, la función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) =$$

$$\tfrac{1}{3}(f(x_n, y_n) + 4f(x_n + h, y_{n+1}) + f(x_n + 2h, y_n + h\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h)).$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \phi_f(x, y(x), y(x); 0) &= \tfrac{1}{3}(f(x, y(x)) + 4f(x, y(x)) + f(x, y(x)) \\ &= 2f(x, y(x)) = \sum_{j=0}^{1} j\alpha_j f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Por tanto, el método es consistente.

Para ver el orden de consistencia del método estudiamos su residuo,

$$R_n = y(x_{n+2}) - y(x_n) - \frac{h}{3}(y'(x_n) + 4y'(x_{n+1}) + y'(x_{n+2})).$$

Si $f \in C^1$, entonces

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n) + y'(x_n)h + \tfrac{y''(\overline{\xi}_n)}{2}h^2 - y(x_n) \\ &\quad - \tfrac{h}{3}(y'(x_n) + 4y'(x_n) + 4y''(\overline{\eta}_n)h + y'(x_n) + 2hy''(\overline{\zeta}_n)) \\ &= O(h^2), \end{aligned}$$

y el método es al menos de orden 1.

Si $f \in C^2$, entonces

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n) + y'(x_n)h + \tfrac{y''(x_n)}{2}h^2 + \tfrac{y'''(\bar{\xi}_n)}{3!}h^3 - y(x_n) \\ &\quad -\tfrac{h}{3}\Big(y'(x_n) + 4y'(x_n) + 4y''(x_n)h + 4\tfrac{y'''(\bar{\eta}_n)}{2}h^2 \\ &\quad +y'(x_n) + y''(x_n)2h + \tfrac{y'''(\zeta_n)}{2}4h^2\Big) \\ &= O(h^3), \end{aligned}$$

y el método es al menos de orden 2.

Para ver que el método no es consistente de orden 3, se lo aplicamos al PVI

$$y'(x) = x^2/2, \quad x \in [0, b], \qquad y(0) = 1,$$

cuya solución verifica que $y'''(x) = 1$. Sustituyendo en el desarrollo que acabamos de obtener para el residuo, se llega a

$$R_n = h^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{3!}h^3 \neq O(h^4),$$

y el método no tiene orden de consistencia 3.

(c) Por un lado tenemos que $\sum\limits_{j=0}^{2} \alpha_j = 0$ y que $\sum\limits_{j=0}^{2} j\alpha_j = 2/3$. Por otro lado, la función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) = \frac{2}{3}f(x_n + 2h, \frac{4}{3}y_{n+1} - \frac{1}{3}y_n + h\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h)).$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \phi_f(x, y(x), y(x); 0) &= \tfrac{2}{3}f(x, \tfrac{4}{3}y(x) - \tfrac{1}{3}y(x)) \\ &= \tfrac{2}{3}f(x, y(x)) = \sum_{j=0}^{1} j\alpha_j f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Por tanto, el método es consistente.

Para ver el orden de consistencia del método estudiamos su residuo,

$$R_n = y(x_{n+2}) - \frac{4}{3}y(x_{n+1}) + \frac{1}{3}y(x_n) - \frac{2}{3}hy'(x_{n+2}).$$

Si $f \in C^1$, entonces

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n) + y'(x_n)2h + \tfrac{y''(\bar{\xi}_n)}{2}(2h)^2 \\ &\quad -\tfrac{4}{3}\left(y(x_n) + y'(x_n)h + \tfrac{y''(\bar{\eta}_n)}{2}h^2\right) + \tfrac{1}{3}y(x_n) \\ &\quad -\tfrac{2h}{3}(y'(x_n) + y''(\bar{\zeta}_n)2h) = O(h^2), \end{aligned}$$

y el método es al menos de orden 1.

Si $f \in C^2$, entonces

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n) + y'(x_n)2h + \tfrac{y''(x_n)}{2}(2h)^2 + \tfrac{y'''(\bar{\xi}_n)}{3!}(2h)^3 \\ &\quad -\tfrac{4}{3}\left(y(x_n) + y'(x_n)h + \tfrac{y''(x_n)}{2}h^2 + \tfrac{y'''(\bar{\eta}_n)}{3!}h^3\right) + \tfrac{1}{3}y(x_n) \\ &\quad -\tfrac{2h}{3}(y'(x_n) + y''(x_n)2h + \tfrac{y'''(\bar{\zeta}_n)}{2}(2h)^2) = O(h^3), \end{aligned}$$

y el método es al menos de orden 2.

Para ver que el método no es consistente de orden 3, se lo aplicamos al PVI

$$y'(x) = x^2/2, \quad x \in [0, b], \qquad y(0) = 1,$$

cuya solución verifica que $y'''(x) = 1$. Sustituyendo en el desarrollo que acabamos de obtener para el residuo, se llega a

$$R_n = h^3\left(\frac{8}{3!} - \frac{4}{3\cdot 3!} - \frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{9}h^3 \neq O(h^4),$$

y el método no tiene orden de consistencia 3.

(d) Por un lado tenemos que $\sum_{j=0}^{1}\alpha_j = 0$ y que $\sum_{j=0}^{1} j\alpha_j = 1$. Por otro lado, la función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\phi_f(x_n, y_n; h)).$$

Así pues,

$$\phi_f(x, y(x); 0) = f(x, y(x)) = \sum_{j=0}^{1} j\alpha_j f(x, y(x)).$$

Por tanto, el método es consistente.

En cuanto al orden de consistencia, es fácil darse cuenta de que este método es en realidad la regla del punto medio implícita,

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right).$$

Este método se estudia como miembro de una cierta familia (los llamados θ-métodos) en el problema 4 de esta misma sección, y se demuestra que tiene orden de consistencia 2.

---

2. Determinar qué condiciones deben cumplir las constantes α y β para que el método

$$y_{n+1} = y_n + \alpha hf(x_n, y_n) + \beta hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

sea: (i) consistente; (ii) consistente de orden al menos uno; y (iii) consistente de orden al menos dos. ¿Es consistente de orden 3 para alguna elección de α y β?

Solución. (i) La primera de las condiciones de consistencia se satisface para cualquier valor de los parámetros, $\sum_{j=0}^{1} \alpha_1 = 1-1 = 0$. En cuanto a la segunda, dado que

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \alpha f(x_n, y_n) + \beta f(x_n + h, y_n + h\phi_f(x_n, y_n; h)),$$

se tiene que

$$\phi_f(x, y(x); 0) = (\alpha + \beta)f(x, y(x)),$$

y la segunda condición de consistencia se cumplirá, y por tanto el método será consistente, si y sólo si $\alpha + \beta = 1$ (nótese que $\sum_{j=0}^{1} j\alpha_j = 1$).

(ii) Supongamos que $f \in C^1$ (lo que implica que $y \in C^2$). Entonces, si

$\alpha + \beta = 1$,

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n + h) - y(x_n) - h(\alpha y'(x_n) + \beta y'(x_n + h)) \\ &= y(x_n) + y'(x_n)h + \tfrac{y''(\bar{\xi}_n)}{2} h^2 \\ &\quad - y(x_n) - h\Big(\alpha y'(x_n) + \beta(y'(x_n) + hy''(\overline{\eta}_n))\Big) \\ &= \left(\tfrac{y''(\bar{\xi}_n)}{2} - \beta y''(\overline{\eta}_n)\right) h^2 = O(h^2). \end{aligned}$$

Así pues, si $\alpha + \beta = 1$, el método no es sólo consistente, sino que también es consistente de orden 1.

(iii) Supongamos ahora que $f \in C^2$ (lo que implica que $y \in C^3$). Entonces, si $\alpha + \beta = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n) + y'(x_n)h + \tfrac{y''(\xi_n)}{2} h^2 + \tfrac{y'''(\xi_n)}{3!} h^3 \\ &\quad - y(x_n) - h\Big(\alpha y'(x_n) + \beta(y'(x_n) + hy''(x_n) + h^2 \tfrac{y'''(\overline{\eta}_n)}{2})\Big) \\ &= \left(\tfrac{1}{2} - \beta\right) y''(\xi_n) h^2 + \left(\tfrac{y'''(\xi_n)}{3!} - \beta \tfrac{y'''(\overline{\eta}_n)}{2}\right) h^3, \end{aligned}$$

y R_n no es una $O(h^3)$ para todo PVI a menos que $\beta = 1/2$ (para comprobarlo basta tomar un PVI tal que $y''(x) = 1$). Así que el método es consistente de orden 2 si y sólo si $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$.

Veamos que el método no es consistente de orden 3 para ninguna elección de los parámetros. De serlo para alguna tendría que ser para $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$. Ahora bien, en este caso

$$R_n = \left(\frac{y'''(\xi_n)}{3!} - \frac{y'''(\overline{\eta}_n)}{4}\right) h^3.$$

Si consideramos un PVI con $y'''(x) = 1$, se tiene entonces que

$$R_n = \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4}\right) h^3 \neq O(h^4),$$

y el método no es de orden 3.

---

3. Considérese el método

$$y_{n+1} = y_n - \frac{5}{2}hf(x_n, y_n) + \frac{7}{2}hf(x_n + \frac{h}{7}, y_n + \frac{h}{7}f(x_n, y_n)).$$

(a) Escribir la función de incremento ϕ_f y comprobar que cumple las hipótesis ($\mathrm{H_{MN}}$).

(b) Decidir si es consistente y, en caso afirmativo, hallar el orden de consistencia.

Solución. (a) La función de incremento del método es

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = -\frac{5}{2}f(x_n, y_n) + \frac{7}{2}f(x_n + \frac{h}{7}, y_n + \frac{h}{7}f(x_n, y_n)).$$

Es obvio que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$, y también que si f es continua, ϕ_f también lo es, en todas sus variables. De manera que sólo queda comprobar que ϕ_f es Lipschitz respecto a la variable y_n. Veamos que también se cumple. Esto será consecuencia de que f es Lipschitz respecto a y (con constante L). En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\phi(x_n, y_n; h) - \phi(x_n, \hat{y}_n; h)\| &\leq \frac{5}{2}\|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\
&\quad + \tfrac{7}{2}\|f(x_n + \tfrac{h}{7}, y_n + \tfrac{h}{7}f(x_n, y_n)) - f(x_n + \tfrac{h}{7}, \hat{y}_n + \tfrac{h}{7}f(x_n, \hat{y}_n))\| \\
&\leq \tfrac{5L}{2}\|y_n - \hat{y}_n\| + \tfrac{7L}{2}\left(\|y_n - \hat{y}_n\| + \tfrac{hL}{7}\|y_n - \hat{y}_n\|\right) \\
&\leq \left(6L + \tfrac{L^2h_0}{2}\right)\|y_n - \hat{y}_n\|
\end{aligned}$$

para todo $h \in (0, h_0]$.

(b) Para este método el residuo satisface

$$R_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hg(h),$$

$$g(h) = -\frac{5}{2}y'(x_n) + \frac{7}{2}f\left(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7}y'(x_n)\right).$$

Supongamos que $f \in C^2([a,b]\times \mathbb{R}^d)$, y por tanto que $y \in C^3([a,b])$. Por un lado tenemos que

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(\overline{\xi}_n)}{6}h^3.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
g'(h) &= \frac{7}{2}\Big(\frac{1}{7}f_x\big(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7}y'(x_n)\big) \\
&\quad + \frac{1}{7}\sum_{J=1}^{d} f_{y^J}\big(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7}y'(x_n)\big)(y^J)'(x_n)\Big) \\
g''(h) &= \frac{7}{2}\Big(\frac{1}{7^2}f_{xx}\big(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7}y'(x_n)\big) \\
&\quad + \frac{2}{7^2}\sum_{J=1}^{d} f_{xy^J}\big(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7}y'(x_n)\big)(y^J)'(x_n) \\
&\quad + \frac{1}{7^2}\sum_{J,L=1}^{d} f_{y^J y^L}\big(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7}y'(x_n)\big)(y^J)'(x_n)(y^L)'(x_n)\Big).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
g(0) &= -\frac{5}{2}y'(x_n) + \frac{7}{2}f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n), \\
g'(0) &= \frac{1}{2}\left(f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{J=1}^{d} f_{y^J}(x_n, y(x_n))(y^J)'(x_n)\right) = \frac{y''(x_n)}{2},
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
g(h) &= g(0) + g'(0)h + \frac{g''(\overline{\theta}_n)}{2}h^2 \\
&= y'(x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}h + \frac{h^2}{28}\Big(f_{xx}\big(x_n + \frac{\overline{\theta}_n}{7}, y(x_n) + \frac{\overline{\theta}_n}{7}y'(x_n)\big) \\
&\quad + 2\sum_{J=1}^{d} f_{xy^J}\big(x_n + \frac{\overline{\theta}_n}{7}, y(x_n) + \frac{\overline{\theta}_n}{7}y'(x_n)\big)(y^J)'(x_n) \\
&\quad + \sum_{J,L=1}^{d} f_{y^J y^L}\big(x_n + \frac{\overline{\theta}_n}{7}, y(x_n) + \frac{\overline{\theta}_n}{7}y'(x_n)\big)(y^J)'(x_n)(y^L)'(x_n)\Big).
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned} R_n &= h^3\Big(\tfrac{y'''(\bar\xi_n)}{6} - \tfrac{1}{28}\Big(f_{xx}\big(x_n+\tfrac{\overline{\theta}_n}{7}, y(x_n)+\tfrac{\overline{\theta}_n}{7}y'(x_n)\big) \\ &\quad +2\sum_{J=1}^{d} f_{xy^J}\big(x_n+\frac{\overline{\theta}_n}{7}, y(x_n)+\frac{\overline{\theta}_n}{7}y'(x_n)\big)(y^J)'(x_n) \\ &\quad +\sum_{J,L=1}^{d} f_{y^Jy^L}\big(x_n+\frac{\overline{\theta}_n}{7}, y(x_n)+\frac{\overline{\theta}_n}{7}y'(x_n)\big)(y^J)'(x_n)(y^L)'(x_n)\Big)\Big). \end{aligned}$$

Por consiguiente, si $f\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^d)$, se tiene que

$$\tau = \max_{0\le n\le N} \|R_n\|/h = O(h^2),$$

y el orden de consistencia del método es al menos 2.

Para ver que el método no tiene un orden de consistencia mayor, consideramos el PVI

$$y'(x) = x^2/2, \qquad y(0)=0.$$

Nótese que $f\in C^\infty$ para este problema, y que sin embargo

$$\tau = \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{28}\right)h^2 \neq O(h^3).$$

Por consiguiente el método no tiene orden de consistencia 3.

---

4. Repetir el ejercicio anterior para el método

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n+(1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta)y_{n+1}),$$

donde $\theta\in[0,1]$.

Solución. (a) La función de incremento del método es

$$\phi_f(x_n,y_n;h) = f(x_n+(1-\theta)h, y_n+(1-\theta)h\phi_f(x_n,y_n;h)).$$

Obsérvese que el método sólo es explícito cuando $\theta = 1$.

Continuidad. El valor de la función de incremento se puede obtener por iteración de punto fijo,

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \lim_{k\to\infty} \phi_f^{[k]}(x_n, y_n; h),$$

$$\phi_f^{[k]}(x_n, y_n; h) = F(\phi_f^{[k-1]}(x_n, y_n; h)),$$

donde la función de iteración está dada por

$$F(\phi) = f(x_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h\phi)$$

Por cierto, la función F será contractiva, y por tanto definirá un único punto fijo, si $Lh(1-\theta) < 1$.

Por ser f una función continua, si $\phi_f^{[k-1]}$ es una función continua, la función $\phi_f^{[k]} = F(\phi_f^{[k-1]})$ también lo será, pues es composición de funciones continuas.

Tomamos como iterante inicial $\phi_f^{[0]} = 0$. Todas las funciones $\phi_f^{[k]}$ son entonces continuas, pero el límite no tiene por qué serlo. Sí lo será si la convergencia es uniforme.

Observamos que $\phi_f^{[k]} = \sum_{j=1}^{k}(\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]})$. Si la serie converge uniformemente sobre compactos, la sucesión $\{\phi_f^{[k]}\}_{k=1}^{\infty}$ también lo hará, y el límite será una función continua. Ahora bien,

$$\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| = \|F(\phi_f^{[j-1]}) - F(\phi_f^{[j-2]})\| \leq L_f h(1-\theta)\|\phi_f^{[j-1]} - \phi_f^{[j-2]}\|.$$

Iterando está relación, concluimos que

$$\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| \leq (L_f h(1-\theta))^{j-1}\,\|\phi_f^{[1]}\|.$$

Pero

$$\phi_f^{[1]}(x_n, y_n; h) = f(x_n + (1-\theta)h, y_n).$$

Por ser f continua, está acotada sobre compactos. Así pues, para cada subconjunto compacto K de $[a,b] \times \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$, existe una constante M_K tal que $\|\phi_f^{[1]}(x_n, y_n; h)| \leq M_K$ si $(x_n, y_n; h) \in K$. Concluimos que sobre cada compacto $\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| \leq M_K\,(L_f h(1-\theta))^{j-1}$. Como la serie $\sum_{j=1}^{\infty}(L_f h(1-\theta))^j$ es convergente, tenemos, por el criterio M de

Weierstrass, que la convergencia es uniforme sobre K. Esto implica que ϕ_f es continua sobre K. Como el compacto K es arbitrario, concluimos que ϕ_f es una función continua de sus argumentos si $L_f h(1-\theta) < 1$.

Lipschitz respecto a y_n. Aplicando la desigualdad triangular y la condición de Lipschitz para f,

$$\begin{aligned}&\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \\ &\qquad \le L_f\|y_n - \hat{y}_n\| + L_f h(1-\theta)\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\|.\end{aligned}$$

Por consiguiente, para cualquier $h_0 < 1/(L_f(1-\theta)$ se tiene que

$$\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi(x_n, \hat{y}_n; h)\| \le \frac{L_f}{1 - L_f h_0(1-\theta)}\|y_n - \hat{y}_n\|, \qquad 0 < h < h_0.$$

Así pues, la función ϕ_f es Lipschitz con respecto a su variable y_n con constante $L_{\phi_f} = \frac{L_f}{1-L_f h_0(1-\theta)}$.

$f \equiv 0 \Rightarrow \phi_f \equiv 0$. Se sigue inmediatamente de la ecuacion que define (implícitamente) ϕ_f.

(b) Para este método el residuo satisface

$$\begin{aligned}R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hg(h), \\ g(h) &= f(x_n + (1-\theta)h, \theta y(x_n) + (1-\theta)y(x_n + h))\end{aligned}$$

Supongamos que $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^d)$, y por tanto que $y \in C^2([a,b])$. Por un lado tenemos que

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = y'(x_n)h + \frac{y''(\xi_n)}{2}h^2.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}g'(h) = (1-\theta)\Big(&f_x\big(x_n + (1-\theta)h, \theta y(x_n) + (1-\theta)y(x_n+h)\big) \\ &+ \sum_{J=1}^{d} f_{y^J}\big(x_n + (1-\theta)h, \theta y(x_n) + (1-\theta)y(x_n+h)\big)(y^J)'(x_n+h)\Big).\end{aligned}$$

Puesto que

$$g(0) = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n),$$

obtenemos que

$$R_n = h^2\Big(\tfrac{y''(\xi_n)}{2} - (1-\theta)\big(f_x\big(x_n+(1-\theta)\overline{s}_n, \theta y(x_n)+(1-\theta)y(x_n+\overline{s}_n)\big)$$

$$+\sum_{J=1}^{d} f_{y^J}\big(x_n+(1-\theta)\overline{s}_n, \theta y(x_n)+(1-\theta)y(x_n+\overline{s}_n)\big)(y^J)'(x_n+\overline{s}_n)\Big).$$

Por consiguiente, si $f \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}^d)$, se tiene que

$$\tau = \max_{0\le n\le N} \|R_n\|/h = O(h),$$

y el orden de consistencia del método es al menos 1.

Si $\theta \neq 1/2$ el orden de consistencia es 1. En efecto, si consideramos el PVI

$$y'(x) = x, \qquad y(0) = 0,$$

cuyo lado derecho es C^∞, se tiene que

$$\tau = \left(\frac{1}{2} - (1-\theta)\right) h^2 \neq O(h^2),$$

y el orden de consistencia del método no puede ser superior a 1.

A continuación veremos que si $\theta = 1/2$ entonces se tiene un orden de consistencia mejor, 2. Suponemos que $f \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^d)$, y por tanto que $y \in C^3([a,b])$. Podemos tomar ahora un término más en los desarrollos de Taylor. Por un lado tenemos que

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(\overline{\xi}_n)}{6}h^3,$$

y que

$$g'(0) = \frac{1}{2}\left(f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{J=1}^{d} f_{y^J}(x_n, y(x_n))(y^J)'(x_n)\right) = \frac{y''(x_n)}{2}.$$

Por otro lado,

$$g''(h) = \frac{1}{4}\Big(f_{xx}\big(x_n+\frac{h}{2}, \frac{y(x_n)+y(x_n+h)}{2}\big)$$

$$+2\sum_{J=1}^{d} f_{xy^J}\big(x_n+\frac{h}{2}, \frac{y(x_n)+y(x_n+h)}{2}\big)(y^J)'(x_n+h)$$

$$+\sum_{J,L=1}^{d} f_{y^Jy^L}\big(x_n+\frac{h}{2}, \frac{y(x_n)+y(x_n+h)}{2}\big)(y^J)'(x_n+h)(y^L)'(x_n+h)\Big).$$

Así pues,

$$R_n = h^3\Big(\frac{y'''(\overline{\xi}_n)}{6} - \frac{1}{8}\Big(f_{xx}\big(x_n + \frac{\overline{s}_n}{2}, \frac{y(x_n)+y(x_n+\overline{s}_n)}{2}\big)$$

$$+2\sum_{J=1}^{d} f_{xy^J}\big(x_n + \frac{\overline{s}_n}{2}, \frac{y(x_n)+y(x_n+\overline{s}_n)}{2}\big)(y^J)'(x_n+\overline{s}_n)$$

$$+\sum_{J,L=1}^{d} f_{y^J y^L}\big(x_n + \frac{\overline{s}_n}{2}, \frac{y(x_n)+y(x_n+\overline{s}_n)}{2}\big)(y^J)'(x_n+\overline{s}_n)(y^L)'(x_n+\overline{s}_n)\Big)\Big).$$

Por consiguiente,

$$\tau = O(h^2),$$

y el método tiene orden de consistencia al menos 2.

Para ver que el método no tiene un orden de consistencia mayor, consideramos el PVI

$$y'(x) = x^2/2, \qquad y(0) = 1.$$

Nótese que $f \in C^\infty$ para este problema, y que sin embargo

$$\tau = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) h^2 \neq O(h^3).$$

Por consiguiente el método no tiene orden de consistencia 3.

Sección 4.4

1. Comprobar que los autovalores de la matriz compañera del primer polinomio característico son precisamente las raíces de dicho polinomio.

Solución. La matriz compañera del polinomio mónico $\rho(\lambda) = \lambda^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \lambda^j$ es

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_{k-1} & -\alpha_{k-2} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veremos, por inducción, que el polinomio característico de esta matriz es $p_A(\lambda) = (-1)^k \rho(\lambda)$, y por tanto que las raíces de $p_A(\lambda)$ y $\rho(\lambda)$ coinciden.

Así pues, queremos demostrar que

$$p_A := \det(A - \lambda I_k) = (-1)^k \rho(\lambda).$$

Empezamos por el caso $k = 1$. En este caso se tiene que

$$p_A = -\alpha_0 - \lambda = (-1)(\lambda + \alpha_0) = \rho_1(\lambda).$$

Supongamos ahora que el resultado es cierto para $k-1$. Para probar que es cierto para k desarrollamos el determinante a lo largo de la última columna,

$$\det(A-\lambda I_k) = (-1)^k \alpha_0 \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda \begin{pmatrix} -\alpha_{k-1}-\lambda & -\alpha_{k-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

El primer determinante es 1, y el segundo, por la hipótesis de inducción,

$$(-1)^{k-1}\left(\lambda^{k-1}+\alpha_{k-1}\lambda^{k-2}+\ldots\alpha_2\lambda+\alpha_1\right).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_k) &= (-1)^k\alpha_0 - \lambda(-1)^{k-1}\left(\lambda^{k-1}+\alpha_{k-1}\lambda^{k-2}+\ldots\alpha_2\lambda+\alpha_1\right) \\ &= (-1)^k\left(\lambda^k+\textstyle\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j\lambda^j\right), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

---

2. Comprobar que la condición necesaria y suficiente para que todas las potencias de una matriz tengan norma uniformemente acotada es que todos sus autovalores tengan módulo menor o igual que uno y aquellos que tengan módulo uno sean simples.

Solución. Trabajaremos con la norma infinito. El resultado para otras normas se sigue de la equivalencia de las normas.

Sea J la forma canónica de Jordan de la matriz A, y sea P la correspondiente matriz (tal vez compleja) de paso. Se tiene que $A = PJP^{-1}$, y por tanto que $A^n = PJ^nP^{-1}$. Así pues, las potencias de A permanecen todas acotadas si y sólo si las potencias de J también lo hacen.

Debido a la estructura de la forma canónica de Jordan, se puede considerar por separado cada una de las cajas J_λ que la componen. Si un autovalor tiene multiplicidad m, entonces el bloque de Jordan correspondiente (de dimensión $m \times m$) viene dado por

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + R,$$

donde los elementos de la matriz $(m \times m)$ R son

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1,\ 1 \le i \le m, \\ 0, & j \ne i+1. \end{cases}$$

Se tiene por tanto que

$$J_\lambda^n = (\lambda I + R)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \lambda^{n-j} R^j.$$

Las potencias de la matriz R satisfacen

$$(R^k)_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+k, \\ 0, & j \ne i+k. \end{cases}$$

Por consiguiente

$$J_\lambda^n = \begin{cases} \binom{n}{k} \lambda^{n-k}, & 0 \le k \le \text{mín}(n,m) \\ 0, & j \ne i+k. \end{cases}$$

Es entonces evidente que si un autovalor tiene módulo mayor que 1 o hay alguna raíz de módulo 1 múltiple, entonces la norma infinito de la potencia n-ésima del correspondiente bloque de Jordan tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Veamos el recíproco. Si un autovalor tiene módulo menor que uno, entonces está claro que la norma infinito de la potencia n-ésima del correspondiente bloque de Jordan se va a 0 con n. Si un autovalor, λ, tiene módulo 1, pero es simple, entonces $\|J_\lambda^n\|_\infty = |\lambda|^n = 1$. Combinando toda esta información concluimos inmediatamente el resultado.

---

3. Determinar si son 0-estables: (a) la regla de Simpson, (4.11); y (b) la fórmula BDF de 2 pasos, (4.12).

Solución. (a) El primer polinomio característico del método es $\rho(\zeta) = \zeta^2 - 1$. Sus raíces son $\zeta = \pm 1$. Son ambas de módulo 1, pero son simples. Así pues, se cumple la condición de la raíz, y por tanto el método es 0-estable.

(b) El primer polinomio característico del método es $\rho(\zeta) = \zeta^2 - \frac{4}{3}\zeta + \frac{1}{3}$. Sus raíces son $\zeta_1 = 1$ y $\zeta_2 = \frac{1}{3}$. Se cumple así la condición de la raíz, y por tanto el método es 0-estable.

---

4. Consideramos la familia de métodos

$$y_{n+3}+(2\alpha-3)y_{n+2}-(2\alpha-3)y_{n+1}-y_n = h\alpha\big(f(x_{n+2}, y_{n+2})+f(x_{n+1}, y_{n+1})\big),$$

donde α es un parámetro real. Estudiar para qué valores de α es 0-estable.

Solución. Para estudiar la 0-estabilidad consideramos el primer polinomio característico, $\rho(\zeta) = \zeta^2 + (2\alpha - 3)\zeta^2 - (2\alpha - 3)\zeta - 1$. Se ve inmediatamente que $\rho(1) = 0$. Así que dividimos ρ por $\zeta - 1$,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2\alpha-3 & 3-2\alpha & \text{-1} \\ 1 & & 1 & 2\alpha-2 & 1 \\ \hline & 1 & 2\alpha-2 & 1 & 0. \end{array}$$

Toca por tanto calcular las raíces de $\zeta^2 + (2\alpha - 2)\zeta + 1$. Son

$$\zeta_\pm = 1 - \alpha \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 1}.$$

Tenemos tres casos:

(i) $(\alpha - 1)^2 - 1 > 0$, es decir, $\alpha > 2$ o $\alpha < 0$. Si $\alpha > 2$, entonces $\zeta_- < -1$ y no se cumple la condición de la raíz. Si $\alpha < 0$, entonces $\zeta_+ > 1$ y tampoco se cumple la condición de la raíz.

(ii) $(\alpha - 1)^2 = 1$, es decir, $\alpha = 2$ o $\alpha = 0$. Si $\alpha = 2$, entonces $\zeta_\pm = -1$, y si $\alpha = 0$, entonces $\zeta_\pm = 1$. En ninguno de los dos casos se cumple la condición de la raíz.

(iii) $(\alpha - 1)^2 < 1$, es decir, $\alpha \in (0, 2)$. En este caso se tiene

$$\zeta_\pm = (1 - \alpha) \pm i\sqrt{1 - (1 - \alpha)^2}.$$

Por tanto, $|\zeta_\pm|^2 = (1-\alpha)^2 + (1-(1-\alpha)^2) = 1$. Si bien estas raíces tienen módulo 1, son distintas, y también distintas de $\zeta_1 = 1$. Por consiguiente se cumple la condición de la raíz.

Resumiendo, el método es 0-estable si y sólo si $\alpha \in (0, 2)$.

---

5. Extender la prueba del teorema 4.6 al caso vectorial, $d > 1$.

Solución. Basta con repetir la prueba del caso escalar sustituyendo A por $A \otimes I$, donde el producto de Kronecker $B \otimes C$ de dos matrices $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le m_1}$ y $C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le m_2}$ es la matriz $m_1 m_2 \times m_1 m_2$ que por bloques se escribe como

$$B \otimes C = \begin{pmatrix} b_{11}C & b_{12}C & \cdots & b_{1m_1}C \\ b_{21}C & b_{22}C & \cdots & b_{2m_1}C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m_1 1}C & b_{m_1 2}C & \cdots & b_{m_1 m_1}C. \end{pmatrix}$$

Sección 4.5

---

1. Estudiar si es convergente la *regla implícita del punto medio*,

$$y_{n+1} = y_n + hf\big(x_n + \frac{h}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\big).$$

Solución. Es inmediato ver que el método es 0-estable (se trata de un método de un paso con $\alpha_0 = -1$). Por otra parte,

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\phi_f(x_n, y_n; h)\right).$$

Por consiguiente, $\phi_f(x, y(x); 0) = f(x, y(x))$. Dado que $\sum_{j=0}^{1} \alpha_j = 0$ y que $\sum_{j=0}^{1} \alpha_j = 1$, concluimos que el método es consistente.

Como el método es consistente y 0-estable, el Teorema de Equivalencia nos garantiza que es convergente.

---

2. Repetir el problema anterior para el par predictor-corrector AB2/AM2,

$$\begin{aligned} y_{n+2}^* &= y_{n+1} + \tfrac{h}{2}(3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)), \\ y_{n+2} &= y_{n+1} + \tfrac{h}{12}(5f(x_{n+2}, y_{n+2}^*) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)). \end{aligned}$$

Solución. El método se puede escribir como

$$y_{n+2} - y_{n+1} = h\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h),$$

$$\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) = \tfrac{1}{12}\Big(5f\big(x_n + 2h, y_{n+1} + \tfrac{h}{2}(3f(x_n + h, y_{n+1}) - f(x_n, y_n))\big)$$

$$+8f(x_n + h, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)\Big).$$

Se tiene por tanto que $\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 0$, $\sum_{j=0}^{2} j\alpha_j = 1$ y $\phi_f(x, y(x), y(x); 0) = (5 + 8 - 1)f(x, y(x))/12 = f(x, y(x))$. Por consiguiente el método es consistente.

Por otra parte, las raíces del primer polinomio característico, $\rho(\zeta) = \zeta^2 - \zeta$, son $\zeta_1 = 1$ y $\zeta_2 = 0$. Se cumple por tanto la condición de la raíz, y el método es 0-estable. Como también es consistente, como vimos más arriba, es convergente.

---

3. Consideramos la familia de métodos

$$y_{n+3}+(2\alpha-3)y_{n+2}-(2\alpha-3)y_{n+1}-y_n = h\alpha\big(f(x_{n+2}, y_{n+2})+f(x_{n+1}, y_{n+1})\big),$$

donde α es un parámetro real. Estudiar para que valores de α es convergente.

Solución. Ya vimos en el problema 4.4.4 que el método es 0-estable si y sólo si $\alpha \in (0, 2)$. Así que sólo queda estudiar la consistencia.

Por un lado tenemos que

$$\sum_{j=0}^{3} \alpha_j = -1 - (2\alpha - 3) + (2\alpha - 3) + 1 = 0.$$

Por otro,

$$\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}; h) = \alpha\big(f(x_n + 2h, y_{n+2}) + f(x_n + h, y_{n+1})\big).$$

Por consiguiente, $\phi_f(x, y(x), y(x), y(x); 0) = 2\alpha f(x, y(x))$. Dado que $\sum_{j=0}^{3} j\alpha_j = -(2\alpha - 3) + 2(2\alpha - 3) + 3 = 2\alpha$, se tiene que

$$\phi_f(x, y(x), y(x), y(x); 0) = \sum_{j=0}^{3} j\alpha_j f(x, y(x)),$$

y el método es consistente para todo α.

Concluimos por tanto que el método es convergente si y sólo si $\alpha \in (0, 2)$.

---

4. Construir todos los métodos convergentes de orden 2 de la forma

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \alpha h, y_n + \alpha h f(x_n + \beta h, y_n + \beta h f(x_n, y_n))).$$

Comprobar que ninguno tiene orden de convergencia 3. ¿Tiene alguno orden de convergencia 3 para el problema $y' = y$ en $[0, b]$, $y(0) = 1$?

Solución. Estamos ante un método de Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \alpha & \alpha & & \\ \beta & 0 & \beta & \\ \hline & 0 & 0 & 1. \end{array}$$

Es inmediato ver que es 0-estable (se trata de un método de un paso con $\alpha_0 = -1$). Por otra parte, $\phi_f(x, y(x); 0) = f(x, y(x))$, asi que el método también es consistente, y por tanto convergente.

Para ver para qué valores de α y β el método es consistente de orden 3, calculamos el residuo para funciones del lado derecho $f \in C^2$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) \\
&\quad -hf(x_n + \alpha h, y(x_n) + \alpha h f(x_n + \beta h, y(x_n) + \beta h f(x_n, y(x_n)))) \\
&= y'(x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + O(h^3) - h\Big(\underbrace{f(x_n, y(x_n))}_{y'(x_n)} \\
&\quad + h\alpha \underbrace{\Big(f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{J=1}^{d} f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \Big)}_{y''(x_n)} + O(h^2)\Big) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) y''(x_n) h^2 + O(h^3).
\end{aligned}$$

Así pues, el método será al menos de orden 2 si y sólo $\alpha = 1/2$.

Veamos que no es de orden 3 para ninguna elección de β. Para ello consideramos el problema

$$y'(x) = x^2/2, \qquad y(0) = 0,$$

cuya solución es $y(x) = x^3/6$. Para este problema el residuo resulta ser, con $\alpha = 1/2$,

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{(x_n+h)^3}{6} - \frac{x_n^3}{6} - \frac{h(x_n+(h/2))^2}{2} \\
&= \frac{x_n^3 + 3x_n^2 h + 3x_n h^2 + h^3}{6} - \frac{x_n^3}{6} - \frac{h(x_n^2 + h + (1/4))}{2} \\
&= h^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right).
\end{aligned}$$

Por consiguiente $\tau = h^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) \neq O(h^3)$, y el método no es consistente de orden 3. Este mismo ejemplo demuestra que el método no es convergente de orden 3.

Veamos que, sin embargo, sí hay una elección de β que hace que el método sea consistente (y convergente) de orden 3 para el problema $y' = y$, $y(0) = 1$. En efecto, para este problema $y^{(n)}(x) = y(x)$, y se tiene que

$$\begin{aligned}
R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Big(y(x_n) + \alpha h\big(y(x_n) + \beta h y(x_n)\big)\Big) \\
&= y(x_n)\Big(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\Big) + \frac{y(\overline{\xi}_n)}{24}h^4 - y(x_n)\Big(h + \alpha h^2 + \alpha\beta h^3\Big) \\
&= y(x_n)\left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) h^2 + \left(\frac{1}{6} - \alpha\beta \right) h^3 \right) + \frac{y(\overline{\xi}_n)}{24} h^4.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el método será de orden 3 para este problema si y sólo si $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/3$.

---

5. Al aplicar el método numérico

$$y_{n+2} + \alpha y_{n+1} + \beta y_n = h\phi(x_n, y_n, y_{n+1}; h)$$

al problema $y'(x) = f(x, y(x))$, $x \in [a, b]$, $y(a) = \eta$, se obtiene una aproximación numérica de la solución del problema $y'(x) = 2f(x, y(x))$, $x \in [a, b]$, $y(a) = \eta$. Si $\phi(x, y(x), y(x); 0) = f(x, y(x))$, ¿cuánto valen α y β?

Solución. El método no es consistente con la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$, sino con la ecuación $y'(x) = 2f(x, y(x))$. Por consiguiente,

$$\phi_f(x, y(x), y(x); 0) = \sum_{j=0}^{2} j\alpha_j 2f(x, y(x)) = (2 + \alpha)2f(x, y(x)).$$

Pero sabemos que $\phi(x, y(x), y(x); 0) = f(x, y(x))$. Por lo tanto,

$$(2 + \alpha)2 = 1.$$

Por otra parte, $0 = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j = 1 + \alpha + \beta$. Concluimos que $\alpha = -3/2$ y $\beta = 1/2$.

Sección 4.6

1. Supongamos que los errores de evaluación de ϕ_f están acotados por ε y los de redondeo por μ. Consideramos un método 0-estable con orden de consistencia p. Sea C una constante tal que $\tau \leq Ch^p$ y sea $\{\hat{y}_n\}$ la solución numérica producida por el ordenador. Dar una cota para el error $\max\limits_{k\leq n\leq N} \|y(x_n) - \hat{y}_n\|$ y obtener el valor de h que minimiza dicha cota.

Solución. La 0-estabilidad implica que existe una constante K tal que

$$\max_{k\leq n\leq N} \|y(x_n) - \hat{y}_n\| \leq$$
$$K\left(\max_{0\leq n\leq k-1} \|y(x_n) - \hat{y}_n\| + \max_{0\leq n\leq N-k} \left\|\frac{R_n}{h} - \left(\varepsilon_n + \frac{\mu_n}{h}\right)\right\|\right),$$

donde los μ_n son errores de redondeo y los ε_n errores de evaluación de ϕ_f. Sabemos que el error en el cáculo de los valores de arranque es como mucho μ, que $|\mu_n| \leq \mu$ y que $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$. Por otra parte, por ser el método de orden p, existe una constante C tal que $\max_{0\leq n\leq N-k} \|R_n\|/h \leq Ch^p$. Juntando toda esta información deducimos que

$$\max_{k\leq n\leq N} \|y(x_n) - \hat{y}_n\| \leq K \underbrace{\left(\mu + Ch^p + \varepsilon + \frac{\mu}{h}\right)}_{g(h)}.$$

La función $g(h)$ alcanza su mínimo en

$$\bar{h} = \left(\frac{\mu}{Cp}\right)^{1/(p+1)},$$

lo que produce una cota para el error dada por

$$\max_{k\leq n\leq N} \|y(x_n) - \hat{y}_n\| \leq K\left(\mu + \varepsilon + C^{1/(p+1)}\mu^{p/(p+1)}p^{-p/(p+1)}(1+p)\right).$$

---

2. Consideramos el método $y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n = hf(x_n, y_n)$, que es 0-estable y satisface la condición de consistencia (4.9), pero no la condición de consistencia (4.8). Estudiar cómo se comporta el error.

Solución. Un cálculo sencillo muestra que

$$R_n = \frac{1}{2}y(x_n) + h(y'(\bar{\xi}_n) - y'(x_n)) = \frac{1}{2}y(x_n) + o(h).$$

Restando la recurrencia de la solución numérica de la recurrencia satisfecha por la solución teórica se tiene que

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{2}(y(x_n) - y_n) + R_n,$$

y por tanto que

$$y(x_n) - y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (y(x_0) - y_0) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j R_{n-1-j}.$$

El primer sumando es una $o(1)$ si $y(x_0) - y_0 = o(1)$. En cuanto al segundo sumando, tiene dos contribuciones,

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j o(h).$$

El segundo de estos términos se va a 0 con h,

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j o(h)\right| \leq Nh\frac{o(h)}{h} = o(1).$$

En cuanto al primero, es el que da problemas. Se tiene que

$$\min_{x\in[a,b]} y(x)\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \leq \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \leq \max_{x\in[a,b]} y(x)\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j,$$

es decir,

$$\min_{x\in[a,b]} y(x)\left(1 - 2^{-n}\right) \leq \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \leq \max_{x\in[a,b]} y(x)\left(1 - 2^{-n}\right).$$

Por consiguiente, si $\min_{x\in[a,b]} y(x) > 0$, se tiene que

$$\min_{x\in[a,b]} y(x) \leq \frac{1}{2} \max_{0\leq n\leq N} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \leq \max_{x\in[a,b]} y(x),$$

y el error del método, si bien permanece acotado, no se va a 0 con h.

De forma análoga, si $\max_{x\in[a,b]} y(x) < 0$, se tiene que

$$\min_{x\in[a,b]} |y(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{0\leq n\leq N} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \right| \leq \max_{x\in[a,b]} |y(x)|,$$

y también en este caso el error del método, si bien permanece acotado, no se va a 0 con h.

En resumen, el error del método vendrá dado por el tamaño de la solución.

---

3. Aplicamos la Regla del Trapecio (resolviendo los problemas implícitos tanto mediante el método de Newton como mediante iteración de punto fijo) al problema (4.18), pidiendo una tolerancia poco exigente, concretamente 10^{-2}, en las iteraciones de Newton/punto fijo. Se obtienen los diagramas de eficiencia que aparecen representados en la Figura 1.

   ¿Puedes explicar el brusco cambio que experimenta el diagrama de la Regla del Trapecio-Newton cuando el número de evaluaciones de función es aproximadamente 2500? ¿Y por qué no se da una situación parecida para la Regla del Trapecio-punto fijo?

Solución. Para valores de h grandes el iterante inicial no es demasiado bueno, y es necesario hacer más de una iteración de Newton, que es bastante costosa. Al disminuir h, el iterante inicial es cada vez mejor, y llega un momento en que no hay que hacer más que una iteración de Newton (siempre se hace al menos una). Al pasar de dos iteraciones de Newton a una se produce una disminución del trabajo computacional notable. En el caso de usar iteración de punto fijo el ahorro al pasar de una dos iteraciones a una no es tan grande.

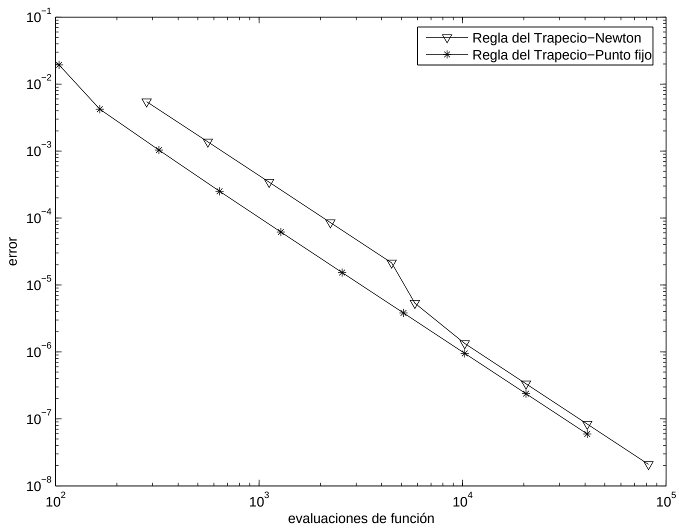

Figura 1: Diagramas de eficiencia para la Regla del Trapecio (con Newton y punto fijo) aplicada al Problema 1, con una tolerancia para las iteraciones igual a 10^{-2}.

4. Sea $f \in C^2$. Demostrar que el error global del método de Euler admite un desarrollo asintótico de la forma

$$y(x_n) - y_n = d(x_n)h + O(h^2),$$

siendo $d \in C^2([a,b])$ la solución del problema

$$d'(x) = \sum_{J=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial y^J}(x, y(x))d^J(x) + \frac{1}{2}y''(x), \qquad d^J(0) = 0, \ J = 1, \ldots, d.$$

Indicación. Si definimos $y_n^* := y_n + d(x_n)h$, la sucesión $\{y_n^*\}$ es la solución numérica producida por el método de un paso cuya función de incremento es

$$\phi_f^*(x_n, y_n^*; h) = f(x_n, y_n^* - d(x_n)h) + d(x_n + h) - d(x_n).$$

El residuo de dicho método es una $O(h^3)$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
y^*_{n+1} &= y_{n+1} + d(x_{n+1})h \\
&= y_n + hf(x_n, y_n) + d(x_{n+1})h \\
&= y^*_n - d(x_n)h + hf(x_n, y_n) + d(x_{n+1}) \\
&= y^*_n + h\phi^*_f(x_n, y^*_n; h),
\end{aligned}$$

donde

$$\phi^*_f(x_n, y^*_n; h) = f(x_n, y^*_n - d(x_n)h) + d(x_n + h) - d(x_n).$$

Si calculamos el desarrollo de Taylor del residuo de este nuevo método, tenemos que

$$\begin{aligned}
R^*_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - \phi^*_f(x_n, y(x_n); h) \\
&= y(x_n) + hy'(x_n) + h^2 \tfrac{y''(x_n)}{2} + O(h^3) \\
& \quad -y(x_n) - h\Big(\underbrace{f(x_n, y(x_n))}_{y'(x_n)} \\
& \quad \underbrace{-h \sum_{J=1} f_{y^J}(x_n, y(x_n)) d^J(x_n)}_{d'(x_n) - \frac{1}{2} y''(x_n)} + hd'(x_n) + O(h^2)\Big) \\
&= O(h^3).
\end{aligned}$$

Así, puesto que el nuevo método es 0-estable,

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y^*_n\| = O(h^2),$$

o lo que es lo mismo,

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n - d(x_n)h\| = O(h^2),$$
