

## La regla de Bayes simétrica

Supongamos que una moneda cae de cara y que tenemos que decidir si es justa o trucada. La probabilidad de equivocarnos con cada decisión es:

$$y(c)=t \Rightarrow p(\text{error}|c)=p(j|c)$$

$$y(c)=j \Rightarrow p(\text{error}|c)=p(t|c)$$

Diremos que la moneda es justa si la probabilidad de error de esta decisión es menor:

$$p(t|c) < p(j|c)$$

Y viceversa, diremos que la moneda es trucada si la probabilidad de equivocarnos al elegir trucada es menor:

$$p(j|c) < p(t|c)$$

Dicho de otra manera, hemos de tomar la decisión que maximiza la probabilidad posterior.

## La regla de Bayes simétrica

Las fórmulas se simplifican al tener en cuenta que las probabilidades posteriores suman 1:

$$p(j|c) + p(t|c) = 1$$

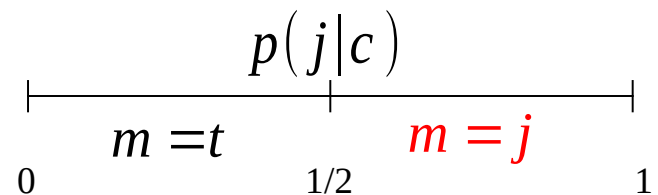
Hemos de decidir que la moneda es justa si:

$$p(j|c) > p(t|c)$$

$$p(j|c) > 1 - p(j|c)$$

$$p(j|c) > \frac{1}{2}$$

En la recta de probabilidad posterior de moneda justa, la frontera de clasificación es simétrica:



## La regla de Bayes asimétrica

Sin embargo, pasar una moneda trucada por justa es más grave que al revés.

- Supongamos un coste  $R$  si pasamos una  $t$  por  $j$
- Supongamos un coste  $R'$  si pasamos una  $j$  por  $t$

En este caso, si  $D=c$  elegiremos la hipótesis que minimice el riesgo (o coste). Es decir:

- Elegimos  $j$  si  $R \cdot P(t|c) < R' \cdot P(j|c)$
- Elegimos  $t$  si  $R \cdot P(t|c) > R' \cdot P(j|c)$

## La regla de Bayes asimétrica

De nuevo, las fórmulas se simplifican al tener en cuenta que las probabilidades a posteriori suman 1:

$$p(j|c) + p(t|c) = 1$$

Hemos de decidir que la moneda es justa si:

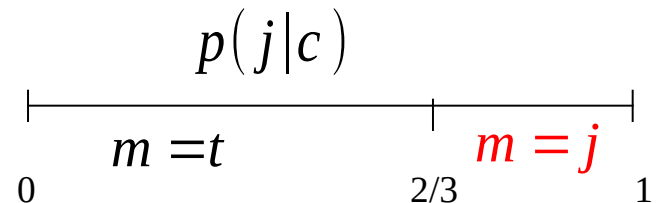
$$p(j|c) > \frac{R}{R'} p(t|c)$$

$$p(j|c) > \frac{R}{R'} (1 - p(j|c))$$

$$p(j|c) > \frac{R}{R + R'}$$

Por ejemplo, si  $R = 2R'$ , la frontera de decisión se desplaza a la derecha:

$$p(j|c) > \frac{2}{3}$$



# Fronteras de decisión con riesgo asimétrico

$$R = R' \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} p(m=j|r=c) \\ \hline m=t \qquad m=j \end{array}$$

$$R = 2R' \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \hline m=t \qquad m=j \end{array}$$

$$R = 3R' \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \hline m=t \qquad m=j \end{array}$$

## La regla de Bayes asimétrica

Supongamos un problema general en el que tenemos que decidir entre dos hipótesis,  $H_1$  y  $H_2$ , a la luz de cierta información  $D$ .

Si al elegir  $H_1$  por error se corre un riesgo  $R$  y al elegir  $H_2$  por error se corre un riesgo  $R'$ .

La regla de Bayes afirma que hemos de elegir  $H_1$  si:

$$p(H_1|D) > \frac{R}{R+R'}$$

y  $H_2$  en caso contrario.

## El problema de las monedas con $R = 3R'$

Para  $R=3R'$  el clasificador debe escoger  $y(r) = j$  cuando:

$$p(m = j | r) > \frac{R}{R + R'} = 0.75$$

Por lo tanto el modelo clasifica todas las monedas como trucadas, tanto si caen de cara como de cruz:

$$p(m = j | r = c) = 0.4 < 0.75$$

$$p(m = j | r = x) = 0.67 < 0.75$$