UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

GRADO EN CC. MATEMÁTICAS, GRUPO 721, 2018-2019

Ejercicios 15 a 18

15. Sea (X, d) un espacio métrico.

A. Demostrar que para todo par $a, b \in X$ con $a \neq b$ existen entornos de a y de b que son disjuntos.

B. Demostrar que todo subconjunto finito de X es cerrado en (X, d).

C. Sean $A \subset X$ y a un punto de acumulación de A. Demostrar que para todo entorno U de a el conjunto $U \cap A$ contiene un número infinito de puntos.

16. Dados un espacio métrico (X, d), $a \in X$ y $r > 0$ definimos la *bola-abierta* de centro a y radio r mediante

$$B(a, r) = \{\, x \in X \,:\, d(x, a) < r \,\}$$

y la *bola-cerrada* mediante

$$C(a, r) = \{\, x \in X \,:\, d(x, a) \leq r \,\}$$

A. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Demostrar que el conjunto de puntos de adherencia de $B(a, r)$ coincide con $C(a, r)$.

B. En E definimos una métrica mediante

$$\rho(x, y) = \text{máx}\{\, 1, \|x - x\| \,\}.$$

1. Demostrar que los subconjuntos abiertos de $(E, \|\cdot\|)$ y de (E, ρ) son los mismos.

2. Comprobar que el conjunto de puntos de adherencia de $B(a, r)$ en (E, ρ) es distinto de $C(a, r)$.

17. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Decimos que una función

$$p : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

es una *seminorma en E* cuando satisaface

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y),$$
$$p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x),$$

para todos los $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

A. Demostrar que toda seminorma satisface:

1. $p(0)=0$.

2. $p(x-y) \geq |p(x)-p(y)|$. En particular $p(x) \geq 0$.

B. Dado $r>0$, consideramos el conjunto

$$M = \{ \, x \in E \, : \, p(x) \leq r \, \} .$$

Obsérvese que $0 \in M$. Demostrar:

1. M es convexo.

2. Todos los $x \in M$ y $|\lambda| \leq 1$ satisfacen $\lambda x \in M$.

3. Para cada $x \in E$ existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{1}{\lambda} x \in M$.

4. $$p(x) = \text{ínf} \, \{ \, \lambda r \; : \quad \lambda > 0 \, , \, \frac{1}{\lambda} x \in M \, \} .$$

C. Demostrar que $Z = \{ \, x \in E \; : \; p(x) = 0 \, \}$ es un subespacio vectorial de E . Considérese el espacio vectorial cociente E/Z . Para cada clase de equivalencia X en este espacio ponemos

$$N(\mathrm{X}) = p(x)$$

donde $x \in E$ es cualquier representante de la clase X . Demostrar que esta función $N(\cdot)$ está bien definida en E/Z y que es una norma en este espacio vectorial.

18. Considérese una función $f \, : \, [0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ para demostrar:

1. Si f es continua en $[0\,,+\infty)$ y $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L \in \mathbb{R}$ entonces f es uniformemente continua en $[0\,,+\infty)$.

2. Si f es continua en $[0\,,+\infty)$ y tiene una asíntota, entonces f es uniformemente continua en $[0\,,+\infty)$.

3. Si f es uniformemente continua en $[0\,,+\infty)$ entonces existen constantes $A\,,B>0$ tales que

$$|f(x)| \leq A\,|x| + B\,, \qquad \text{para todo } x \geq 0\,.$$

4. Si f es acotada, entonces existe una función cóncava $\omega(t)$, de los $t \geq 0$, tal que

$$|f(x)-f(y)| \leq \omega(|x-y|)\,, \qquad \text{para todos los } x\,,y \geq 0\,.$$