ALEJANDRO SANTORUM VARELA

TAREA 9

$$\xi = y_n + \frac{h}{12}\left(5f\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right) - f(t_n + h, y_{n+1})\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left(f(t_n + h, y_{n+1}) + 3f\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right)\right)$$

Primero calculamos el tablero de Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

Necesitamos

$$A = \begin{pmatrix} 5/12 & -1/12 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la función de estabilidad:

$$R(z) = 1 + z b^T (I - zA)^{-1} e = 1 + z\left(3/4 \quad 1/4\right)(I - zA)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + z\left(\frac{3}{4} \quad \frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 - \frac{5z}{12} & \frac{z}{12} \\ \frac{-3z}{4} & 1 - \frac{z}{4} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + z \cdot \frac{-z + 6}{z^2 - 4z + 6} = 1 + \frac{-z^2 + 6z}{z^2 - 4z + 6} =$$

$$= \frac{z^2 - 4z + 6 - z^2 + 6z}{z^2 - 4z + 6} = \frac{2z + 6}{z^2 - 4z + 6} = \frac{p(z)}{q(z)} \quad z \in \mathbb{C}$$

Calculamos los polos de q:

$$q(z) = 0 \iff z^2 - 4z + 6 = 0 \iff \begin{cases} z_1 = 2 - i\sqrt{2} \\ z_2 = 2 + i\sqrt{2} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Re(z_1) = 2 > 0 \\ Re(z_2) = 2 > 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

Comprobamos que $|R(it)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$:

$$|R(it)| = \left| \frac{2it + 6}{(it)^2 - 4it + 6} \right| = \left| \frac{2it + 6}{-t^2 - 4it + 6} \right|$$

$\Rightarrow$ queremos ver que $|2it + 6| \leq |6 - t^2 - 4it| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2t)^2 + 6^2 \leq (6 - t^2)^2 + (-4t)^2 \Leftrightarrow$$

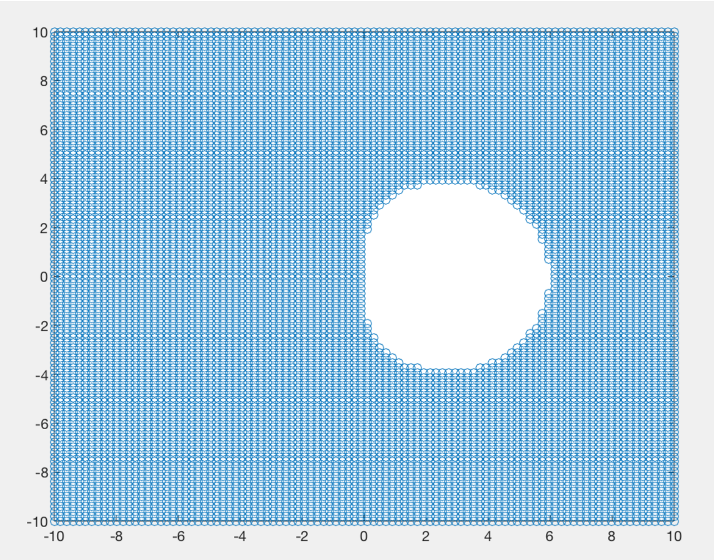
$$\Leftrightarrow \cancel{4t^2} + \cancel{36} \leq \cancel{36} - \cancel{12}t^2 + t^4 + \cancel{16}t^2 \Leftrightarrow \boxed{t^4 \geq 0} \checkmark$$

se cumple $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Por un lema visto en clase sabemos que el método es A-estable.

Ahora se muestra la gráfica de la región de estabilidad (zona de puntos azules). La frontera de la región de estabilidad es la frontera entre la zona azul y la zona blanca (conjunto de puntos que no cumplen la condición de pertenecer a la región de estabilidad).

Gráfica hecha con la evaluación de una malla de 100 x 100 puntos



Gráfica hecha con la evaluación de una malla de 1000 x 1000 puntos