Variable Compleja I CURSO 2019-20, UAM

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS 59, 66 Y 67

convergencia de series

TF Inv.

59) ¿Para qué valores de z convergen las siguientes series? Razone la respuesta, aplicando los criterio adecuados.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nz}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{2^n}$.

SOLUCIÓN. Este ejercicio, conceptualmente, se corresponde con la materia vista antes. La novedad es que ahora tenemos las definiciones de las funciones trigonométricas complejas. También tiene cierta dificultad técnica y por ello podría ser útil para repasar varios resultados y técnicas de cálculo de una variable real. En cuanto a la variable compleja, la clave está en la simple fórmula que usaremos a menudo y que conviene recordar:

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}. \tag{1}$$

La comprobación es muy fácil: escribiendo $z = x + iy$, vemos que

$$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x e^{iy}\right| = \left|e^x\right|\left|e^{iy}\right| = e^x.$$

a) Solución 1. El criterio necesario para la convergencia de series nos dice que, si una serie converge, entonces su término general tiende a cero. Por tanto, si la serie dada es convergente, ha de cumplirse $ne^{-nz} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Es inmediato que esto no es verdad si $x = \operatorname{Re} z \le 0$, puesto que entonces, por la fórmula (1), obtenemos que

$$|ne^{-nz}| = ne^{-nx} = ne^{n|x|} \ge n \to +\infty \qquad n \to \infty.$$

Conclusión: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nz}$ diverge cuando $\operatorname{Re} z \le 0$.

Veamos ahora que la serie converge cuando $x = \operatorname{Re} z > 0$; de hecho, podemos comprobar que en este caso la serie converge absolutamente. Para ello, usaremos el criterio de comparación de series de números positivos y, en concreto, compararemos la serie (con módulos) con una geométrica. No podemos comparar con los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^n$, que es geométrica, porque también tenemos el factor n, que no es una cantidad acotada. De ahí que se nos ocurra la siguiente modificación:

$$|ne^{-nz}| = ne^{-nx} = \frac{n}{e^{nx}} \le \frac{1}{e^{nx/2}}. \tag{2}$$

Puesto que $e^{x/2} > 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{x/2}}\right)^n$$

converge por ser una serie geométrica de razón $1/e^{x/2} < 1$.

Sólo queda justificar la desigualdad en (2). Es cierta porque es equivalente a $n \le e^{nx/2}$, lo cual viene a decir que

$$x \ge \frac{2\log n}{n}.$$

Para cualquier $x > 0$ fijo, esta desigualdad es cierta para todos los valores suficientemente grandes de n ya que el lado derecho tiende a cero cuando $n \to \infty$, luego, para n suficientemente grande, será más pequeño que un $x > 0$ dado. La comparación está justificada.

Un examen detallado de la prueba revela que, de hecho, podemos hacer más de lo que se pide en el ejercicio. Si fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario, para $x \ge \varepsilon$ vemos que

$$ne^{-nx} \le \frac{1}{e^{nx/2}} \le \frac{1}{e^{n\varepsilon/2}},$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n\varepsilon/2}}$ es una serie convergente. Por tanto, el Criterio de mayoración de Weiestrass nos permite deducir que nuestra serie converge uniforme y absolutamente en cualquier semiplano $\{x : x \geq \varepsilon\}$, con $\varepsilon > 0$.

Solución 2. Haciendo el cambio de variable $w = e^{-z}$, la serie se convierte en una serie de potencias de w: $\sum_{n=1}^{\infty} nw^n$, que tiene radio de convergencia $R = 1$, como es fácil comprobar por cualquiera de las dos fórmula habituales. En particular, la serie converge absolutamente cuando

$$|w| = |e^{-z}| = e^{-x} < 1$$

(de nuevo, $z = x + yi$), es decir, cuando $x > 0$, y diverge cuando

$$|w| = |e^{-z}| = e^{-x} > 1,$$

es decir, cuando $x < 0$.
El caso $|w| = 1$, es decir, $x = 0$ se puede comprobar o bien como en la solución anterior o bien directamente, observando que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nw^n$ diverge cuando $|w| = 1$ ya que su término general tiene módulo n y, por tanto, no tiende a cero.

b) Es importante resaltar que no procede una solución con el cambio de variable como en la Solución 2 del problema anterior, puesto que cualquiera de los cambios $w = e^{-z}$ o $w = e^z$ nos daría una serie que contiene potencias tanto positivas como negativas de w, por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2in^2}\left(w^n - \frac{1}{w^n}\right),$$

que ya no sería una serie de potencias.

El análisis que convien llevar a cabo en este apartado es similar a la primera solución del apartado anterior pero algo más delicado. De nuevo, basta con considerar el módulo del término general. Sea

$$S_n(z) = |\operatorname{sen}(nz)| = \left|\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i}\right| = \frac{|e^{inx}e^{-ny} - e^{-inx}e^{ny}|}{2}$$

Veremos que esta vez la convergencia dependerá de si la cantidad $y = \operatorname{Im} z$ es nula o no.
El caso más fácil es $y = 0$ (es decir, $z = x \in \mathbb{R}$). Entonces

$$S_n(z) = \frac{|e^{inx} - e^{-inx}|}{2} = |\operatorname{sen}(nx)|$$

y, por consiguiente,

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}\right| = \frac{|\operatorname{sen}(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Por el Criterio de Weierstrass, la serie converge uniformemente en $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$, puesto que la conocida serie $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge.
Consideremos ahora el caso $y > 0$. Usando la desigualdad triangular inversa, vemos que

$$S_n(z) = \frac{|e^{inx}e^{-ny} - e^{-inx}e^{ny}|}{2} \geq \frac{|e^{-inx}e^{ny}| - |e^{inx}e^{-ny}|}{2} = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2} \geq \frac{e^{ny}}{4}.$$

La última desigualdad es cierta porque es equivalente a $2(e^{ny} - e^{-ny}) \geq e^{ny}$, lo cual es lo mismo que $e^{ny} \geq 2e^{-ny}$, que es a su vez equivalente a $2e^{2ny} \geq 1$, una desigualdad trivialmente cierta. Por tanto,

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}\right| \geq \frac{e^{ny}}{4n^2} \geq 1$$

para n suficientemente grande (intuitivamente, e^{ny} es mucho más grande que n^2 para $y > 0$). Formalmente, esto es consecuencia del siguiente hecho, que es fácil de comprobar usando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{ty}}{4t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{ye^{ty}}{8t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{y^2e^{ty}}{8} = +\infty.$$

Obsérvese que también podríamos haber razonado que, para $y > 0$, tenemos la equivalencia asintótica

$$\frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2} \sim \frac{e^{ny}}{2n^2}, \qquad n \to \infty.$$

(Recordemos que, para dos sucesiones positivas $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$, la notación $x_n \sim y_n$, $n \to \infty$ significa que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.) La conclusión final es que, para $y > 0$, el término general de la serie no tiende a cero, luego la serie es divergente.

El razonamiento es similar cuando $y < 0$, observando que

$$S_n(z) = \frac{|e^{inx}e^{-ny} - e^{-inx}e^{ny}|}{2} \ge \frac{|e^{inx}e^{-ny}| - |e^{-inx}e^{ny}|}{2} = \frac{e^{-ny} - e^{ny}}{2} \ge \frac{e^{-ny}}{4} = \frac{e^{n|y|}}{4}.$$

c) Hasta cierto punto, existen similitudes con el apartado anterior. El caso $y = 0$ es completamente análogo y la conclusión es la misma.

Sin embargo, los dos casos restantes requieren más cuidado y otros argumentos, puesto que el denominador es más grande que antes y eso puede ayudar a la convergencia. Veamos, por ejemplo, el caso $y > 0$:

$$S_n(z) = \frac{|e^{inx}e^{-ny} + e^{-inx}e^{ny}|}{2} \ge \frac{|e^{-inx}e^{ny}| - |e^{inx}e^{-ny}|}{2} = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2} \sim \frac{e^{ny}}{2}, \qquad n \to \infty.$$

Por tanto,

$$\frac{S_n(z)}{2^n} \sim \frac{e^{ny}}{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^y}{2}\right)^n \ge \frac{1}{2}$$

cuando $\frac{e^y}{2} \ge 1$, es decir, cuando $y \ge \log 2$. Para estos valores, la serie será divergente porque su término general no tenderá a cero.

Sin embargo, cuando $0 < y < \log 2$, entonces tendremos

$$S_n(z) = \frac{|e^{inx}e^{-ny} + e^{-inx}e^{ny}|}{2} \le \frac{|e^{-inx}e^{ny}| + |e^{inx}e^{-ny}|}{2} = \frac{e^{ny} + e^{-ny}}{2} \le \frac{e^{ny} + e^{ny}}{2} = e^{ny}.$$

Por tanto,

$$\frac{S_n(z)}{2^n} \le \frac{e^{ny}}{2^n} = \left(\frac{e^y}{2}\right)^n$$

y podemos comparar nuestra serie con una serie geométrica convergente con razón $\frac{e^y}{2} < 1$. Por tanto, en este caso la serie será convergente.

El caso $y < 0$ es análogo. ■

---

66) Sean Ω y D dos dominios en el plano tales que $0, \pm i \notin \Omega$, $f : \Omega \to D$ una función holomorfa y biyectiva y $g : D \to \Omega$ su función inversa. Sabiendo que en cada $w \in D$ se cumple la identidad

$$g'(w) = \frac{g(w)^2 + 1}{g(w)},$$

calcule $f'(z)$, para $z \in \Omega$.

SOLUCIÓN. Para todo $z \in \Omega$ existe $w \in D$ tal que $z = g(w)$ (a saber, $w = f(z)$). Puesto que $0, \pm i \notin \Omega$, se deduce que $z = g(w) \neq 0$ y $z^2+1 = g(w)^2+1 \neq 0$, así que $g'(w)$ es un valor finito y no nulo. Según el Teorema de la función inversa,

$$g'(w) = \frac{g(w)^2+1}{g(w)} = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Despejando $f'(z)$, obtenemos

$$f'(z) = \frac{g(w)}{g(w)^2+1} = \frac{z}{z^2+1}. \qquad \blacksquare$$

---

67) Utilice el teorema de la función inversa para funciones holomorfas para demostrar el siguiente resultado probado ya con otro argumento: si Ω es un dominio plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ (es decir, f sólo toma valores reales), entonces f es idénticamente constante.

SOLUCIÓN. Con el fin de llegar a una contradicción, supongamos lo contrario: que f no es constante. Entonces su derivada no puede ser idénticamente nula (ya que, por un resultado visto en clase, si una función holomorfa en un dominio tiene derivada cero, entonces es constante). Por tanto, existe al menos un punto $a \in \Omega$ con $f'(a) \neq 0$.
El Teorema de la función inversa implica la existencia de un entorno abierto U_a del punto a tal que $f|_{U_a} : U_a \to f(U_a)$ es biyectiva y su función inversa es holomorfa de $f(U_a)$ en U_a. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que U_a y $f(U_a)$ son conexos (si U_a no lo es, podemos tomar sólo la componente conexa que contiene al punto a; luego la imagen de esa componente conexa también es conexa, por ser f una función continua.)
Al ser holomorfas, ambas $f|_{U_a}$ y su inversa local también son continuas. Por tanto, $f|_{U_a}$ es un homeomorfismo local entre U_a y $f(U_a)$. Pero U_a es un abierto de Ω y, por tanto, un abierto de $\mathbb{C}$ mientras $f(U_a) \subset \mathbb{R}$, así que no pueden ser homeomorfos. Contradicción.

¿Por qué no pueden ser homeomorfos los conjuntos U_a y $f(U_a)$? La justificación es sencilla: por un resultado conocido de Topología, si lo fueran y si quitasemos un punto b al conjunto U_a, el conjunto $U_a \setminus \{b\}$ sería homeomorfo a $f(U_a) \setminus \{f(b)\}$ y esto no es posible. En efecto, U_a es un abierto y conexo del plano, luego es un dominio y, por tanto, conexo por caminos, así que el conjunto $U_a \setminus \{b\}$ también sería conexo por caminos y luego conexo. Por otro lado, el conjunto $f(U_a)$ es un conexo y abierto de la recta, luego es un intervalo abierto, así que $f(U_a) \setminus \{f(b)\}$ es unión de dos intervalos disjuntos y, por tanto, no es conexo. $\blacksquare$
