

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

PROBLEMAS. Hoja 4

1. Calcular la función de estabilidad de los siguientes métodos:

a) Euler: $y_{n+1} = y_n + hf_n$.

b) Euler implícito: $y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$.

c) Runge, $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_n)$.

d) Trapecio, $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$.

2. Determinar las regiones de estabilidad de los métodos de Euler explícito, Euler implícito, trapecio y Runge.
3. Ver que los métodos Euler explícito y Runge no son A-estables.
4. Ver que los métodos Euler implícito y trapecio son A-estables.

5. **No todos los métodos Runge-Kutta implícitos son A-estables.** Estudiar la esta-

bilidad y orden del método cuyo tablero es
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

6. Si un método Runge-Kutta tiene orden de consistencia p entonces su función de estabilidad satisface

$$R(z) = 1 + z + \cdots + \frac{z^p}{p!} + O(|z|^{p+1}).$$

Para verlo considerar el PVI

$$y' = \lambda y, \quad t \in [0, T], \quad y(0) = 1,$$

y utilizando el método RK, $y_1 = R(\lambda h)y_0$, donde R es la función de estabilidad del método. Así obtenemos el resultado deseado utilizando el orden del residuo.