Doble Titulación. Álgebra Lineal. Curso 2016/2017

Hoja 7

1. Determinar en cada caso una base de $\mathbb{R}^2$ (o de $\mathbb{C}^2$) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen.

a)$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, c)$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, d)$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

e)$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, f)$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, g)$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Soluciones:(vectores y valores propios)

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1$

b)$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1, \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1$

c)$\left\{\begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1+i\sqrt{2}, \left\{\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1-i\sqrt{2}$

d)$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2$

e)$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2, \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 3$

f)$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow i, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -i$

g)$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow i, \left\{\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -i$

2. Resolver la misma cuestión que en el ejercicio anterior para las matrices

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix},\ \text{b)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ \text{c)}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ \text{y d)}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluciones:(vectores y valores propios)

$$\text{a)}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 7,\ \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -4,$$

$$\text{b)}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1,\ \left\{\begin{pmatrix} \frac{4}{5}-\frac{3}{5}i \\ 1 \\ \frac{2}{5}+\frac{6}{5}i \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1+3i,\ \left\{\begin{pmatrix} \frac{4}{5}+\frac{3}{5}i \\ 1 \\ \frac{2}{5}-\frac{6}{5}i \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1-3i$$

$$\text{c)}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 6,\ \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2$$

$$\text{d)}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -2,\ \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 4,\ \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2$$

3. Sea A una matriz cuadrada real.

a) Demostrar que si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ : \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ : \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio con valor propio $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ : \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$ lo es con valor propio $\overline{\lambda}$.

b) Demostrar que el e.v. $V = \left\langle X = \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ : \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^n$ es A-invariante y calcular la matriz de $A_{|V}$ respecto de esta base. Se obtendrá $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ **(forma canónica real)**

c) Encontrar la forma canónica real en los casos anteriores 1)c,f,g y 2)b

HOJA 7: DIAGONALIZACIÓN

$\boxed{2.}$

a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = A$

• POLINOMIO CARACTERÍSTICO: $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & -3 \\ 3 & -3-\lambda & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & -3 \\ 3 & -3-\lambda & -1 \\ 0 & -4-\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \overset{\boxed{\lambda_1 = -4}}{-(4+\lambda)} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & -3 \\ 3 & -3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4+\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(4+\lambda)\left[-(5-\lambda)(2+\lambda) - 18\right] =$

$= (4+\lambda)\left[(5-\lambda)(2+\lambda) + 18\right] = (4+\lambda)\left[10 - \lambda^2 + 3\lambda + 18\right] = (4+\lambda)(28 + 3\lambda - \lambda^2)$

$\lambda = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+4.28}}{-2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{121}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 11}{-2} =$ $\nearrow \boxed{\lambda_2 = -4}$ $\searrow \boxed{\lambda_3 = 7}$

$\boxed{p(\lambda) = -(4+\lambda)^2(7-\lambda)}$

$\boxed{\text{Valores propios} = \text{autovalores} = \{7, -4\}}$

• Bases de $N(A - 7I)$ y $N(A + 4I)$

$+4I) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N(A+4I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Base de $N(A+4I) = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$-7I) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 3 & -10 & -1 \\ -3 & -1 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow N(A-7I) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & -10 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -10 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Base de $N(A-7I) = \left\{ V_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A = P.D.P^{-1} \quad ; \quad \underset{\text{autovalores}}{D} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \underset{\text{autovectores}}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{BC}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= M_{CC}(A) \\ D &= M_{BB}(A) \end{aligned}} \quad \boxed{P = M_{BC}}$$

POLINOMIO MÍNIMO: $m_A(\lambda) = (\lambda - 7)(\lambda + 4)$

NOTAS SOBRE POLINOMIO MÍNIMO

polinomio característico: $p(\lambda) = \prod_{k=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ $\quad \lambda_k$ distintos

Nos gustaría que $\dim(N(A - \lambda_k I)) = n_k$

A veces esto no ocurre $\to$ Jordan.

$\dim(N(A - \lambda_k I)) < \dim(N(A - \lambda_k I)^2) < \dots < \dim(N(A - \lambda_k I)^{m_k}) = n_k$

paras | más pro | po

exponente de $(\lambda - \lambda_k)$ en el pol. mínimo

Polinomio mínimo $m(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$

Si A diagonaliza: $m(A) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{1}$

HOJA 7A / 8

1.

i) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

• Polinomio característico $\quad p(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4-\lambda & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= -(2+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 2+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2+\lambda)^4$$

Autovalores: $\boxed{\lambda = -2}$

• Base de $N(A+2I)$

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N(A+2I) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} 4 \text{ incógnitas} \\ 2 \text{ ecuaciones} \end{array}\right\} \dim = 2$$

$$\text{Base de } N(A+2I) = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(A+2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N(A+2I)^2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Base de $N(A+2I)^2 =$
$= \{V_1, V_2 \; ; \; V_3 = (0,0,0,1)\}$

3 vectores no son suficientes

$(A+2I)^3 = 0$; $V_4 = (0,0,1,0)$ puesto a ojo. l. independiente con V_1, V_2, V_3

Base de $N(A+2I)^3 = \{V_1, V_2 \; ; \; V_3 \; ; \; V_4 = (0,0,1,0)\}$

- Ahora toca el paso de "tirar para atrás".

$(A+2I)V_4 = (2,3,1,0) = W_1 \in N(A-2I)^2$

$(A+2I)W_1 = (1,1,0,0) = W_2 (= V_2$ en este caso$)$

$\operatorname{Ker}(A+2I)^3 \setminus \operatorname{Ker}(A+2I)^2$ — V_4

$\operatorname{Ker}(A+2I)^2 \setminus \operatorname{Ker}(A+2I)$ — W_1

$\operatorname{Ker}(A+2I)$ — V_1 — $V_2 = W_2$

$$J = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} AW_2 & AW_1 & AV_4 & AV_1 \end{array} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} W_2=V_2 & W_1 & V_4 & V_1 \end{array} \end{array}$$

Base de Jordan $= \{W_2 = V_2 \; , \; W_1 \; , \; V_4 \; , \; V_1\}$

2. BOSQUE MADERERO

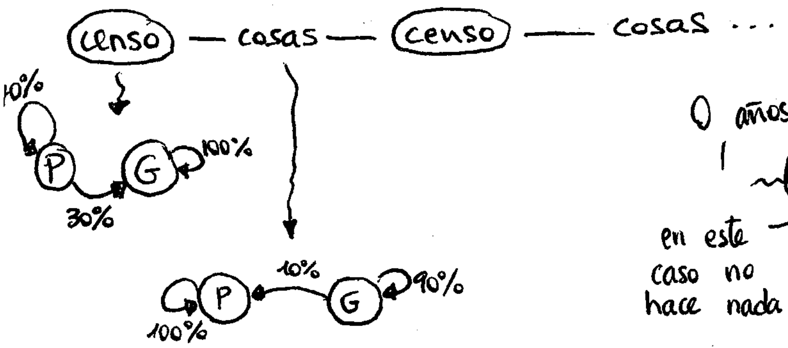
Cada 5 años $\rightarrow$ censo $\rightarrow$ 30% pequeños pasan a ser grandes

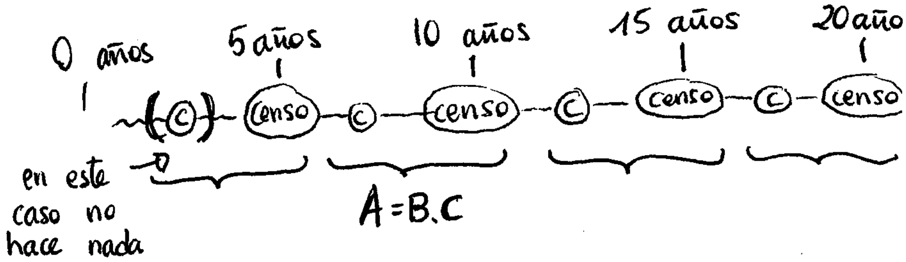
entre censos $\rightarrow$ 10% grandes se cortan y se plantan pequeños

Al principio $\begin{cases} \text{pequeños} = 1000 \\ \text{grandes} = 0 \end{cases}$ ¿En 20 años? $\rightarrow$ justo después del censo

NOTACIÓN $\rightarrow$ X_n = pequeños, $\rightarrow$ Y_n = grandes (después del n-ésimo censo)

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{pmatrix}$$





CENSO

$$\underset{\text{después}}{\begin{pmatrix} P_d \\ G_d \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0'7 & 0 \\ 0'3 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \underset{\text{antes}}{\begin{pmatrix} P_a \\ G_a \end{pmatrix}}$$

COSAS

$$\begin{pmatrix} P_d \\ G_d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0'1 \\ 0 & 0'9 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} P_a \\ G_a \end{pmatrix}$$

$A = B.C$; A^4 ?? $\quad A = \begin{pmatrix} 0'7 & 0 \\ 0'3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0'1 \\ 0 & 0'9 \end{pmatrix}$

$A = P.D.P^{-1}$; $A^2 = P.D.\cancel{P^{-1}.P}.D.P^{-1} = P.D^2.P^{-1}$; $A^n = P.D^n.P^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} A^n = P. \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} . P^{-1} = P. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . P^{-1}$$

CASOS GENERALES

$\boxed{1.}$ F) $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 & 3 \\ -4 & 2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow J = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} W_0 & \underset{e_1}{\overset{\shortparallel}{V_4}} & W_1 & W_2 \end{matrix} \end{array}$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^4$$

$\operatorname{Ker}(A - 0.I) = \operatorname{Ker} A = \{v_1, v_2, v_3\}$

$\operatorname{Ker} A^2 = \mathbb{R}^4$, $A^2 = 0$ $\to$ Cogemos $V_4 \notin \operatorname{Ker} A$ (indep. con V_1, V_2, V_3)

por ejemplo, $V_4 = e_1$

- Tiramos pa' tras

$$A.V_4 = W_0 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\underline{V_4 = e_1}$

$\underline{W_0}$ $\underline{W_1}$ $\underline{W_2}$

Ahora vuelvo a $\operatorname{Ker} A$, tomo $W_1, W_2 \in \operatorname{Ker} A$ indep. con W_0

$\{W_0, W_1, W_2\}$ base de $\operatorname{Ker} A$.

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base Jordan} = \{W_0, V_4, W_1, W_2\}$$

$\boxed{m(\lambda) = \lambda^2}$ $\to$ "tamaño de la caja más grande con el autovalor λ".

c)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow J = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} V_1 & w & V_4 & V_2 \end{matrix} \end{array}$$

Base de Jordan

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda-4)^2$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$\mathrm{Ker}(A - 0.I) = \mathrm{Ker}\,A = \langle V_1, V_2 \rangle$ $\qquad$ $\underline{V_1}$ $\underline{V_2}$

$\boxed{\lambda = 4}$

$\mathrm{Ker}(A - 4.I) = \langle V_3 \rangle$ $\qquad$ $\underline{V_4}$

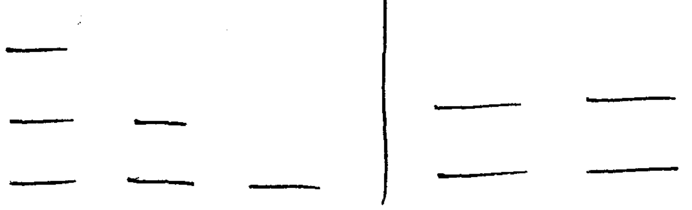
$\mathrm{Ker}(A - 4.I)^2 = \langle V_3, V_4 \rangle \qquad V_4 \notin \mathrm{Ker}(A - 4.I)$ $\qquad$ $\underline{W}$

$W = (A - 4I)V_4$

$$\boxed{m(\lambda) = \lambda(\lambda - 4)^2}$$

MATRIZ INVENTADA POR ESTE DIBUJO

$\lambda = 0$ | $\lambda = i$



$$J = \begin{array}{cccccccccc}
w_2 & w_0 & v_6 & w_3 & w_1 & w_4 & y_1 & x_3 & y_2 & x_4 \\
\end{array}$$

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc|c|cc|cc}
0 & 1 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & & & & & \\
\hline
 & & & & & 0 & & & & \\
\hline
 & & & & & & i & 1 & & \\
 & & & & & & 0 & i & & \\
\hline
 & & & & & & & & i & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & i
\end{array}\right)$$

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^6 (\lambda - i)^4}$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$\mathrm{Ker}\,A = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\mathrm{Ker}\,A^2 = \langle v_1, v_2, v_3 \,;\, v_4, v_5 \rangle$

$\mathrm{Ker}\,A^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \,;\, v_4, v_5 \,;\, v_6 \rangle$

v_6		
w_0	w_1	
w_2	w_3	w_4

$w_0 = A.v_6$

$w_1 \in \langle v_4, v_5 \rangle$ independiente con w_0

$w_2 = A.w_0$

$w_3 = A.w_1$

$w_4 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ indep. con w_2, w_3

$\boxed{\lambda = i}$

$\mathrm{Ker}(A - iI) = \langle x_1, x_2 \rangle$

$\mathrm{Ker}(A - iI)^2 = \langle x_1, x_2 ; x_3, x_4 \rangle$

$y_1 = (A - iI)\, x_3$

$y_2 = (A - iI)\, x_4$

x_3	x_4
y_1	y_2

$\boxed{m(\lambda) = \lambda^3 (\lambda - i)^2}$ POLINOMIO MÍNIMO