Examen final <u>TOPOLOGÍA</u> 11-01-2016

1) $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}_\alpha$ es una topología

$\mathcal{T}_\alpha$ top en $X \Rightarrow \mathcal{T}_\alpha \supset \mathcal{S}$.

$\checkmark$ · $\emptyset, X \in \mathcal{T}_\alpha \ \forall \alpha \Rightarrow \emptyset, X \in \mathcal{T}$

· $G_j \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall \alpha \ G_j \in \mathcal{T}_\alpha \Rightarrow$

$\forall \alpha \ \bigcup G_j \in \mathcal{T}_\alpha \Rightarrow \bigcup G_j \in \mathcal{T}$

· $G_1, G_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall \alpha \ G_1, G_2 \in \mathcal{T}_\alpha$

$\Rightarrow \forall \alpha \ G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_\alpha \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$

$G \in \mathcal{T} \Leftrightarrow G = \bigcup \bigcap_{fin} A_j$

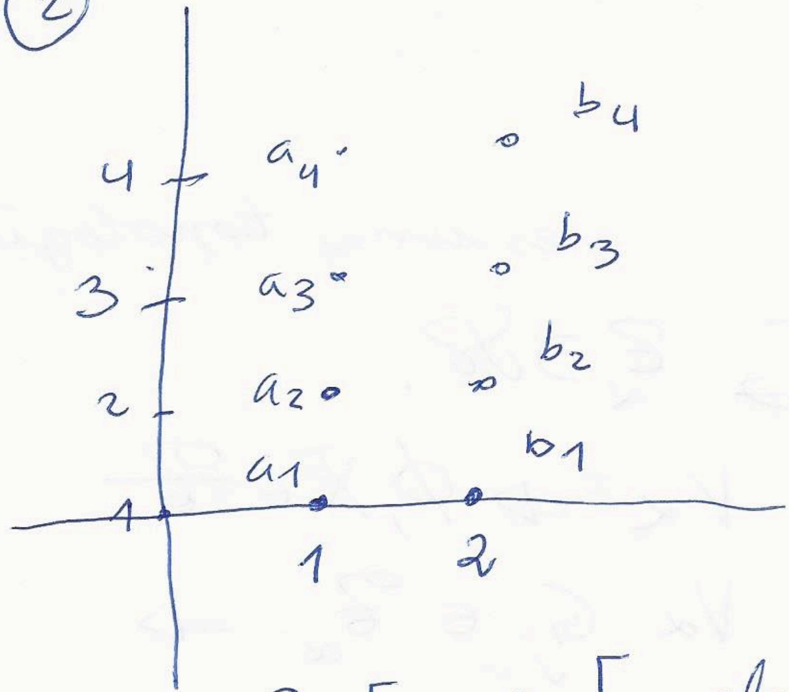
$A_j \in \mathcal{S}$.

b) $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall G \in \mathcal{T}$

$\exists B_j \in \mathcal{B} \ j \in J \Rightarrow G = \bigcup_{j \in J} B_j$

$\mathcal{S}$ es subbase $\Leftrightarrow \mathcal{T}$ es la mínima topología que contiene a $\mathcal{S}$.

(2)



$\{a_1\} = [a_1, a_2[$ abierto

$\{a_n\} =]a_{n-1}\ \ a_{n+1}[$ abierto

$n > 1$

$\{b_1\}$ no es abierto

Si A es un abierto $\ni$ $A \ni b_1$

entonces $A \supset]a_n, b_2[$ para algún n

Para $n > 1$ $\{b_n\} =]b_{n-1}, b_{n+1}[$ abierto.

b) $a_n \to b_1$

$\{]a_n, b_2[\}$ es un sist fund de entorno

$n \in \mathbb{N}$.

examen final <u>TOPOLOGÍA</u> 11-01-2016-

3

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

COMPACTO HAUSDORFF

CONTINUA
SOBREYECTIVA.

$g \circ f$ continua $\Rightarrow$ g continua

Sea C un cerrado de Z

$(g \circ f)^{-1}(C)$ es un cerrado de X

$= f^{-1}(g^{-1}(C)) \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(C))$ es compacto

Como f es sobre

$$g^{-1}(C) = \underset{\text{continua}}{f}\Big\{\underbrace{f^{-1}(g^{-1}(C))}_{\text{compacto}}\Big\} \text{ compacto}$$

Como Y es Hausdorff $g^{-1}(C)$ es cerrado ✓

4) $x \sim y \iff \nexists \; X = A \uplus B \ni x \in A \quad y \in B$

ab.

a) $x \sim x \quad \forall x \in X$

$x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$

Supongamos $x \not\sim z$ $\quad X = A \uplus B$

ab.

$x \in A$, $z \in B$.

Entonces $y \in A$ ó $y \in B$.

Si $y \in A$ $\quad y \not\sim z$

Si $y \in B$ $\quad x \not\sim z$.

Hemos visto

$$(x \not\sim z) \Rightarrow (x \not\sim y) \vee (y \not\sim z)$$

o sea $\neg \{ (x \sim y) \wedge (y \sim z) \}$.

b) Si x e y están contenidos en un conexo C $\; x, y \in C$, $x \sim y$ pues en caso contrario tendríamos

$$C = (C \cap A) \uplus (C \cap B)$$

Examen final TOPOLOGÍA 11-01-2016-

c) Sea X localmente conexo
Sea G un abierto de X y
sea E una componente conexa
de G. Si $x \in E \subset G$, sabemos
que $\exists\, V$ conexo $\ni$ $x \in V \subset G$
Entonces $V \subset E$. Así que E es
abierto.
Recíprocamente si los componentes
conexas de los abiertos son abiertas
dado V entorno de x, digamos,
abierto, la componente conexa
de V que contiene a x será
un abierto conexo, de modo
que todo entorno de x contiene
un entorno conexo.

d) Si en una casicomponente hubiera
dos componentes conexas, tendríamos
puntos x ~~x~~ y en la misma
casicomponente.

(5) $X \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} Y \overset{g_1}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} Z \Rightarrow g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$

$f_1 \simeq f_2 \quad g_1 \simeq g_2$

$X \times I \xrightarrow{F} Y \qquad F(x,0) = f_1(x)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad F(x,1) = f_2(x)$

$Y \times I \xrightarrow{G} Z \qquad G(y,0) = g_1(y)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad G(y,1) = g_2(y)$

$$X \times I \xrightarrow{F \times id} Y \times I \xrightarrow{\quad G \quad} Z$$

$$(x,t) \longmapsto (F(x,t),t) \longrightarrow G(F(x,t),t)$$

$$G(F(x,0),0) = G(f_1(x),0) = g_1(f_1(x))$$

$$G(F(x,1),1) = G(f_2(x),1) = g_2(f_2(x))$$

$\blacksquare$