5) Sea p primo y sean $n = a_{k-1}p^{k-1} + \dots + a_0$. Demuestra que la potencia máxima de p que divide a $n!$ es:

observación. ↓

$(\lfloor n/p^k \rfloor = 0)$

$$\lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \dots + \lfloor n/p^{k-1} \rfloor$$

[pasa para $k' > k$ también.]

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \dots \cdot 2\cdot 1 = (p\cdot 2p\cdot 3p\cdot 4p \dots \lfloor n/p \rfloor p)(\dots)$$

$\lfloor n/p \rfloor$ es el número de factores.

aquí ya no quedan múltiplos de p, luego nos basta con contar el número de p's aquí

Sin embargo, en:

$$p\cdot 2p\cdot 3p \dots p^2 \dots 2p^2 \dots \lfloor n/p \rfloor p)$$

Solo hemos contado una de esas p's en este primer paso, luego, hay $\lfloor n/p^2 \rfloor$ factores con p dobles.

Usando ese argumento de forma recursiva, vemos que:

número p^2

* hay $\lfloor n/p^3 \rfloor$ factores con 3 p's (ya las he contado 2 veces, nos falta una)

...

* hay $\lfloor n/p^{k-1} \rfloor$ factores con $k-1$ p's

Luego $p\cdot 2p\cdot 3p \dots \lfloor n/p \rfloor p = p^{\sum_{i=1}^{k-1} \lfloor n/p^i \rfloor}(\dots)$

↑ no hay más p's aquí

[
$\lfloor n/p \rfloor = a_{k-1}p^{k-2} + \dots + a_1$

$\lfloor n/p^2 \rfloor = a_{k-1}p^{k-3} + \dots + a_2$

$\vdots$

$\lfloor n/p^{k-1} \rfloor = a_{k-1}$
]

máximo exponente que divide a $n!$ (de p)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k-1} \lfloor n/p^i \rfloor}$$