- Calcula todas las subextensiones de $E/\mathbb{Q}$ donde

$E = \mathbb{Q}(x^4 - 2)$

Ya calculamos $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$, $|E:\mathbb{Q}| = 8$

Como $\mathbb{Q} \subseteq M = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subseteq E$ y $M/\mathbb{Q}$ no es normal sabemos que $G = Gal(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano ni isomorfo a Q_8 (porque todos los subgps de estos grupos son normales y por el TFTG $Gal(E/M) \leq G$ no es normal)

Por tanto $G \cong D_8$. De hecho calculamos explícitamente todos los elementos de G y sus órdenes (1)

	G	$\sqrt[4]{2}$	i	ord
	τ_1	$\sqrt[4]{2}$	i	1
	τ_2	$-\sqrt[4]{2}$	i	2
$a =$	τ_3	$\sqrt[4]{2}\, i$	i	4
	τ_4	$-\sqrt[4]{2}\, i$	i	4
$b =$	τ_5	$\sqrt[4]{2}$	$-i$	2
	τ_6	$-\sqrt[4]{2}$	$-i$	2
	τ_7	$\sqrt[4]{2}\, i$	$-i$	2
	τ_8	$-\sqrt[4]{2}\, i$	$-i$	2

De hecho, vimos que

$$G = \langle \tau_3, \tau_5 \mid \tau_3^4 = \tau_5^2 = 1, \ \tau_3^{\tau_5} = \tau_3^{-1} = \tau_4 \rangle$$

Escribamos por un momento $\boxed{a = \tau_3, \ b = \tau_5}$

Entonces $G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, \ a^b = a^{-1} \rangle$
$= \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$

También podéis calcular

$Z(G)$ solo con la presentación

a^2 conmuta con a y con b:

- $a^2 a = a a^2$ obvio
- $a^2 b = b b a^2 b = b(ab)^2 = b(a^{-1})^2 = b(a^3)^2 = b a^6 = b a^2$

$b^2 = 1$

así que $a^2 \in Z(G)$

Además podemos comprobar que ningún otro elemento de G conmuta con a y b

luego $a^2 = Z(G)$.

$\boxed{\text{Subgrupos de } G}$

$$1,\ \underbrace{\langle a\rangle}_{\text{cíclico ord } 4},\ \overbrace{\langle a^2\rangle,\ \langle b\rangle,\ \langle ab\rangle,\ \langle a^2 b\rangle,\ \langle a^3 b\rangle}^{\text{de orden } 2},$$

$\langle a\rangle = \langle a^3\rangle$, $\langle a^2\rangle = Z(G)$

Como $\langle a^2\rangle = Z(G)$ podemos formar nuevos subgrupos multiplicando $Z(G)$ por cada uno de los subgrupos de arriba, resultando de orden $4 \cong C_2 \times C_2$

$$\overbrace{\langle b\rangle \times \langle a^2\rangle,\ \langle ab\rangle \times \langle a^2\rangle,\ \langle a^2 b\rangle \times \langle a^2\rangle,\ \langle a^3 b\rangle \times \langle a^2\rangle},$$

¡Son iguales!

¡Son iguales!

$\overbrace{G}^{D_8}$

Podemos dibujar el retículo de subgrupos de G utilizando <u>diagramas de diamante</u>:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G_1 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, equal] & \\ H_1 \arrow[dr, dash] & & M_1 \arrow[dl, dash] \\ & K_1 & \end{tikzcd}$$

indica que

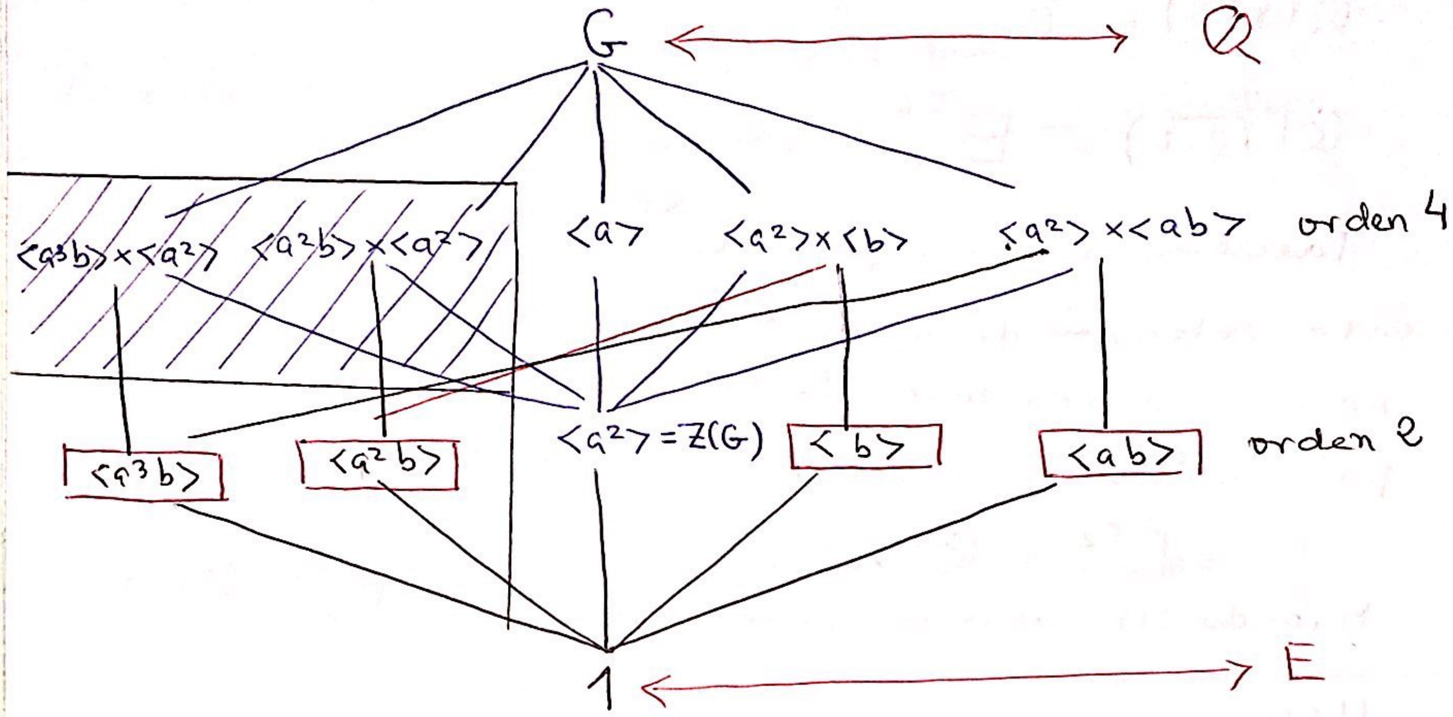
$G_1 = H_1 M_1$

$H_1, M_1 \leq G_1$ y

$K_1 = H_1 \cap M_1$

// si $M_1 \trianglelefteq G_1$

Diagrama de diamante describiendo los subgrupos (como retículo) de D_8



$\square$ no son normales $\Longleftrightarrow$ se corresponden con subextensiones de $E/\mathbb{Q}$ que no definen extensiones normales sobre $\mathbb{Q}$

Recordamos que

$a = \tau_3$	$b = \tau_5$	$ab = \tau_8$
$a^2 = \tau_2$		$a^2b = \tau_7$
$a^3 = \tau_4$		$a^3b = \tau_6$

G tiene 8 subgrupos propios $\xleftrightarrow{\text{TFTG}}$ $E/\mathbb{Q}$ tiene 8 subextensiones propias

Los cuatro subgrupos no normales de G tienen orden 2 $\xleftrightarrow{\text{TFTG}}$ Hay exactamente 4 subextensiones que no definen una extensión normal sobre $\mathbb{Q}$, dos de ellas son: $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,i)$

Observando la tabla (1) es fácil notar que

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) = E^{\tau_5}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,i) = E^{\tau_6}$$

También sabemos que E^{τ_2} es la única extensión de grado 4 de $\mathbb{Q}$ que es normal, o bien mirando en (1) o bien por estas condiciones, es fácil notar que

$$E^{\tau_2} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$$

Mirando (1) también podemos notar que $E^{\tau_3} = \mathbb{Q}(i)$

$H \leq G$	$\lvert H\rvert$	E^H	$[E^H : \mathbb{Q}]$	$E^H/\mathbb{Q}$ normal
1	1	E	8	SÍ
$\langle\tau_6\rangle$	2	$E^{\tau_6} = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,i)$	4	NO
$\langle\tau_7\rangle$	2	E^{τ_7}	4	NO
$\langle\tau_2\rangle$	2	$E^{\tau_2} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$	4	SÍ
$\langle\tau_5\rangle$	2	$E^{\tau_5} = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$	4	NO
$\langle\tau_8\rangle$	2	E^{τ_8}	4	NO
$H_1 = \langle\tau_6\rangle\times\langle\tau_2\rangle$	4	$E^{H_1} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}\,i)$	2	SÍ
$H_2 = \langle\tau_7\rangle\times\langle\tau_2\rangle$	4	E^{H_2}	2	SÍ
$\langle\tau_3\rangle$	4	$E^{\tau_3} = \mathbb{Q}(i)$	2	SÍ
$H_3 = \langle\tau_5\rangle\times\langle\tau_2\rangle$	4	$E^{H_3} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$	2	SÍ
$H_4 = \langle\tau_8\rangle\times\langle\tau_2\rangle$	4	E^{H_4}.	2	SÍ
G	8	$\mathbb{Q}$	1	SÍ

Realmente, los únicos subcuerpos que nos falta describir son E^{τ_7}, E^{τ_8}, E^{H_2} y E^{H_4}.

En estos casos no podemos hacer otra que plantear los distintos sistemas de ecuaciones lineales que aparecen y resolverlos.

$\boxed{E^{\tau_7}}$ Tenemos la $\mathbb{Q}$-base de E

$\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, i, \alpha i, \alpha^2 i, \alpha^3 i\}$ donde $\alpha = \sqrt[4]{2}$

para simplificar la notación. Lo primero es ver cómo actúa τ_7 sobre los elementos de nuestra base:

$$\tau_7 \left| \begin{array}{l} \alpha \to \alpha i \\ \alpha^2 \to -\alpha^2 \\ \alpha^3 \to -\alpha^3 i \\ i \to -i \\ \alpha i \to \alpha \\ \alpha^2 i \to \alpha^2 i \\ \alpha^3 i \to -\alpha^3 \end{array} \right.$$

Buscamos los $x \in E$ $\quad x = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4 i + a_5 \alpha i + a_6 \alpha^2 i + a_7 \alpha^3 i$, $a_j \in \mathbb{Q}$ $j = 0, .., 7$.

tales que $\tau_7(x) = x$

$$\cancel{a_0} + a_1\alpha + \boxed{a_2\alpha^2} + a_3\alpha^3 + \boxed{a_4 i} + a_5 \alpha i + \cancel{a_6 \alpha^2 i} + a_7\alpha^3 i$$
$$\parallel$$
$$\cancel{a_0} + a_1 \alpha i \boxed{-a_2\alpha^2} - a_3\alpha^3 i \boxed{-a_4 i} + a_5\alpha + \cancel{a_6 \alpha^2 i} - a_7\alpha^3$$

$a_0, a_6 \in \mathbb{Q}$; $a_2 = a_4 = 0$

$$\Longleftrightarrow \alpha(a_1 - a_5) + \alpha^3(a_3 + a_7) + \alpha i(a_5 - a_1) + \alpha^3 i(a_7 + a_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_5 \\ a_3 = -a_7 \end{cases}$$

$$E^{Z_7} = \{ a_0 + a_1(\alpha + \alpha i) + a_3(\alpha^3 - \alpha^3 i) + a_6 \alpha^2 i \mid a_0, a_1, a_3, a_6 \in \mathbb{Q} \}$$

$$= \{ a + b\alpha(1+i) + c\alpha^3(1-i) + d\alpha^2 i \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \}$$

$$\beta = \alpha(1+i) = \sqrt[4]{2}(1+i)$$

$$\beta^2 = \alpha^2(-2i) = -2\alpha^2 i$$

$$\beta^3 = \alpha^3(-2i+2) = 2\alpha^3(1-i)$$

$$= \{ a' + b'\beta + c'\beta^2 + d'\beta^3 \mid a', b', c', d' \in \mathbb{Q} \}$$

$$= \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}(1+i))$$

- De forma similar podéis comprobar que

$$E^{Z_8} = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}(1-i)).$$

Nota $\boxed{E^{H_1} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = E^{H_3}}$

así que por el T.F.T.G $\quad H_1 = H_3 = \langle \tau_5\rangle \times \langle \tau_2\rangle = \langle a^2\rangle \times \langle b\rangle$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \parallel$

$\langle \tau_6\rangle \times \langle \tau_2\rangle = \langle a^3 b\rangle \times \langle a^2\rangle$

Con la notación $\quad G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1 , a^b = a^{-1}\rangle$

Vemos que la teoría de Galois nos puede ayudar también a entender la estructura de G.

$$H_1 = H_3 = \langle a^2\rangle \times \langle ab\rangle = \langle a^3 b\rangle \times \langle a^2\rangle \quad \checkmark$$

$(a^2)ab = a^3 b$

También $\quad H_2 = H_4$

$\boxed{E^{H_2}}$

$$E^{H_2} = E^{\langle \tau_7\rangle \times \langle \tau_2\rangle}$$

Basta con describir los elementos de E fijados por τ_7 y τ_2 (como generan H_2 es suficiente)

$$x \in E^{H_2} \iff \begin{cases} \tau_7(x) = x \iff x \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}(1+i)) \\ \tau_2(x) = x \iff x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \end{cases}$$

En principio, calcular $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}(1+i)) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ es complicado; pero podemos tomar $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ e imponer $\tau_7(x) = x$

Una $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ es $\{1, \sqrt{2}, i, \sqrt{2}i\}$

y τ_7 actúa de la siguiente manera

$$\tau_7 \left| \begin{array}{l} \sqrt{2} \to -\sqrt{2} \\ i \to -i \\ \sqrt{2}i \to \sqrt{2}i \end{array} \right.$$

Ya podemos ver que $E^{H_2} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$

también podríamos plantear el sistema

$$\tau_7(a + b\sqrt{2} + ci + d\sqrt{2}i) = a - b\sqrt{2} - ci + d\sqrt{2}i$$

$$\parallel$$

$$a + b\sqrt{2} + ci + d\sqrt{2}i$$

$$\iff \begin{cases} a, d \in \mathbb{Q} \\ b = c = 0. \end{cases}$$

Diagrama diamante correcto: