PROBABILIDAD II

Grado en Matemáticas

Tema 4
Leyes de los grandes números.

Jesús Munárriz

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
jesus.munarriz@uam.es

1. Momentos y desigualdades.
2. Leyes de los grandes números.

Idea básica: dada una sucesión de v.a.i.i.d. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, esperamos que en algún sentido,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i = E(X_1).$$

Si la convergencia es en probabilidad, hablamos de **leyes débiles** de los grandes números, y si es en casi todo punto, entonces hablamos de **leyes fuertes**. Otra noción de convergencia es en L^p, $1 \leq p < \infty$, la cual implica convergencia en probabilidad, y en general no es comparable a la convergencia casi seguro.

En el tema anterior hemos visto dos leyes fuertes de los grandes números (LFGN) de Kolmogorov, que requieren plena independencia.

En este tema consideramos demostraciones que utilizan la desigualdad de Chebyshev, y por tanto permiten relajar la hipótesis de independencia.

Sea $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una v.a. Se llama:

- **Momento absoluto de orden** $\alpha > 0$**:** $E|X|^\alpha$.
- **Momento absoluto de orden** α **alrededor de** a**:** $E|X - a|^\alpha$.
- **Momento de orden** n**:** EX^n.

Proposición: Sea X una v.a., sea $\alpha > 0$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces $E|X|^\alpha < \infty$ si y solo si $E|X - a|^\alpha < \infty$.

Dem.: ejercicio.

Corolario: Sea $X \in \mathcal{L}_1$ una v.a.. Entonces $Var(X) < \infty$ si y solo si $X \in \mathcal{L}_2$.

Teorema: Desigualdad de Markov

Sea $X \geq 0$ una v.a.. Para todo $\epsilon > 0$, se tiene

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{E}X}{\epsilon}.$$

Corolario

Sea X una v.a. Para todo $\epsilon > 0$ y toda $\alpha > 0$, se tiene

$$P(|X| \geq \epsilon) = P(|X|^\alpha \geq \epsilon^\alpha) \leq \frac{E|X|^\alpha}{\epsilon^\alpha}.$$

Corolario: Desigualdad de Chebyshev

Sea $X \in \mathcal{L}_2$. Para todo $\epsilon > 0$, se tiene

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) = P(|X - EX|^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}.$$

Ley débil de los grandes números de Chebyshev

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en L^2, independientes e idénticamente distribuidas, con media μ y varianza σ^2, y sea $S_n = X_1 + ... + X_n$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Dem: Por la desigualdad de Chebyshev.

Comentarios: la misma demostración permite relajar las hipótesis, reformulando el teorema. Una versión más general también se deduce de la ley fuerte probada en el tema 3 (y en el primer parcial).

Ley débil de los grandes números

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en L^2, con $Cov(X_i, X_j) \leq 0$ para $i \neq j$, que satisface la condición de Kolmogorov

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} < \infty.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Dem: Por la desigualdad de Chebyshev.

Comentario: esencialmente el mismo argumento prueba la convergencia en L^2 a 0.

Convergencia en L^2

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en L^2, con $Cov(X_i, X_j) \leq 0$ para $i \neq j$, que satisface la condición de Kolmogorov

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} < \infty.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i)) = 0 \quad \text{en} \quad L^2,$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i)) \right\|_2 = 0.$$

Dem: ejercicio.

Etemadi probó que la desigualdad de Chebyshev también puede usarse para demostrar leyes de los grandes números con hipótesis más débiles que la independencia.

Ley Fuerte de los Grandes Números de Etemadi, para $X_i \in \mathcal{L}^2$

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $\sup_n E(|X_n|) < \infty$. Si $Cov(X_i, X_j) \leq 0$ para $i \neq j$, y se cumple la condición de Kolmogorov

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} < \infty,$$

entonces para casi todo $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i))(\omega) = 0.$$

Idea de la dem.: escribimos $Y_i := X_i - E(X_i)$, tomamos $r > 1$ y escogemos $N \gg 1$ de modo que para todo $n \geq N$ tenemos $r^{n+1} - r^n > 1$. La función techo $\lceil x \rceil$ denota el menor entero n tal que $x \leq n$.
Aplicamos la desigualdad de Chebyshev y Borel Cantelli 1, NO a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i))(\omega),$$

sino a la subsucesión, con muchos menos términos,

$$\lim_{N\leq n\to\infty} \frac{1}{\lceil r^n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} (X_i - E(X_i))(\omega).$$

Para justificar que basta considerar este tipo de subsucesiones, escindimos las variables en partes positivas Y_i^+ y negativas Y_i^-, reduciendo el problema al caso no negativo.

Por último, para ver que el límite existe c.s., notamos que al ser todas las variables ≥ 0, las oscilaciones al considerar los términos entre $Y^+_{\lceil r^n \rceil}$ y $Y^+_{\lceil r^{n+1} \rceil}$, son pequeñas, usando la acotación uniforme en L^1.

Con argumentos similares Etemadi demostró que usando la desigualdad de Chebyshev y Borel-Cantelli 1 se obtiene la siguiente Ley Fuerte, estrictamente mejor que la de Kolmogorov: basta asumir independencia 2 a 2. Omitimos la dem.

Ley Fuerte de los Grandes Números de Etemadi, para $X_i \in \mathcal{L}^1$

Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes dos a dos, idénticamente distribuidas. Entonces para casi todo $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} X_i(\omega) = E(X_0).$$