Ej. 1	Ej.2	NOTA

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

Geometría de Curvas y Superficies. Primer parcial. 7 de Marzo de 2019.

Apellidos .... Nombre .... D.N.I. ....

Ejercicio 1.

---

a) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, con respecto a un parámetro t. Supongamos que $\kappa(t) \neq 0$ para todo t, donde $\kappa(t)$ denota la curvatura de α en el valor paramétrico t. Definimos una nueva curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ como

$$\beta(t) = \alpha'(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

a) Demuestra que β es una curva regular y que, si s es una función longitud de arco de β, entonces

$$s'(t) = \kappa(t)$$

b) Demuestra que la curvatura de β es igual a

$$\left(1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde τ denota la torsión de α.

c) Halla el vector binormal de β.

Ejercicio 2.

---

a) Sea S la esfera de centro $(2,1,3)$ y radio $\sqrt{10}$ en $\mathbb{R}^3$.

1) Da una parametrización de un entorno (en S) del punto $p_0 = (2,2,6)$. Escribe la ecuación del plano tangente a S en p_0, y da una base ortogonal de dicho plano.

2) Demuestra que, para todo punto q en el entorno del apartado anterior, la recta que pasa por q y es perpendicular a T_qS (es decir, la *recta normal afín* por q) pasa por el punto $(2,1,3)$. (*Indicación: Si escribes la recta en términos de una parametrización, usa un vector director unitario.*)

b) Sea S una superficie regular, y $\mathbb{X} : U \to S$ una parametrización local. Consideramos una aplicación diferenciable $N : \mathbb{X}(U) \to \mathbb{R}^3$ que asocia, a cada $p \in \mathbb{X}(U)$, un vector unitario normal a S en p.

Demuestra que, para todo $(u,v) \in U$, los vectores $N_u(u,v)$ y $N_v(u,v)$ pertenecen al plano tangente a S en $\mathbb{X}(u,v)$.

c) Sea S una superficie conexa. Supongamos que todas las rectas normales afines a S pasan por un mismo punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Demostrar que S está contenida en una esfera centrada en p_0.

$\boxed{1.}$ α p.a.l. birregular

$\beta(t) = \alpha'(t)$ (y por lo tanto $\underset{\alpha'(t)}{\overset{\parallel}{\beta(t)}} = t_\alpha(t)$ //)

a) $\beta'(t) = t'_\alpha(t) = K_\alpha(t)\, n_\alpha(t)$ con $K_\alpha(t) > 0$

$\Rightarrow \|\beta'(t)\| = K_\alpha \quad \wedge \quad t_\beta(t) = n_\alpha(t)$

por tanto, $S_\beta'(t) = V_\beta(t) = \|\beta'(t)\| = K_\alpha(t)$

b) $t_\beta'(t) = K_\beta(t)\, V_\beta(t)\, n_\beta(t)$

$$\parallel$$

$$n'_\alpha(t) = -K_\alpha(t)\, t_\alpha(t) + \tau_\alpha(t)\, n_\alpha(t) =$$

$$= \sqrt{K_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2}\left(\frac{-K_\alpha(t)}{\sqrt{K_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2}}\, t_\alpha(t) + \frac{\tau_\alpha(t)}{\sqrt{K_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2}}\, b_\alpha(t)\right.$$

$$K_\beta(t)\, V_\beta(t) = \sqrt{K_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2} \Rightarrow K_\beta(t) = \frac{1}{K_\alpha(t)}\sqrt{K_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{\tau_\alpha(t)^2}{K_\alpha(t)^2}}$$

$$n_\beta(t) = \frac{-K_\alpha(t)}{\sqrt{K_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2}}\, t_\alpha(t) + \frac{\tau_\alpha(t)}{\sqrt{K_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2}}\, b_\alpha(t)$$

c) $b_\beta(t) = t_\beta(t) \times n_\beta(t) = n_\alpha(t) \times \left(\frac{-K_\alpha}{\sqrt{K^2 + \tau^2}}\, t_\alpha(t) + \frac{\tau_\alpha}{\sqrt{K^2+\tau^2}}\, b_\alpha(t)\right) =$

$$= \frac{K_\alpha(t)}{\sqrt{K_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2}}\, b_\alpha(t) + \frac{\tau_\alpha(t)}{\sqrt{K_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2}}\, t_\alpha(t)$$

$\boxed{2.}$ a) $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad r = \sqrt{10}$ $\qquad P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid u^2+v^2 < 10 \right\}$$

$$\mathbb{X} : \mathcal{U} \longrightarrow S \qquad \mathbb{X}(u,v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{10-u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \mathbb{X}(0,1)$$

$$\mathbb{X}_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{10-u^2-v^2}} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{X}_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{10-u^2-v^2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X}_u(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{X}_v(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

opción 1 : producto vectorial $\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v$

opción 2 : $f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 - 10 = 0 \qquad S = f^{-1}(0)$

$$\nabla f(x,y,z) = 2(x-2, y-1, z-3) = q - \text{centro}$$

$$q - c = \sqrt{10}\, N \qquad c = q - \lambda N$$

b) $N : \mathbb{X}(\mathcal{U}) \longrightarrow S^2 \qquad N(u,v) = \dfrac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v (u,v)}{\| \mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v (u,v) \|}$

$\langle N(u,v), N(u,v) \rangle = 1$ ($N(u,v)$ unitario)

$2 \langle N_u(u,v), N(u,v) \rangle = 0 \implies N_u(u,v) \in T_{\mathbb{X}(u,v)} S$

$2 \langle N_v(u,v), N(u,v) \rangle = 0 \implies N_v(u,v) \in T_{\mathbb{X}(u,v)} S$

c) S $\exists p / \forall q \in S$ $N(q) \perp T_pS$ $\|N(q)\| = 1$

$\exists \lambda(q) \in \mathbb{R}$ tal que $p = q + \lambda(q) N(q)$

$\Rightarrow p - q = \lambda(q) N(q) \Rightarrow \lambda(q) = \langle p - q, N(q) \rangle$

Dado $q \in S$ sea $\mathbb{X}: \mathcal{U} \to S$ p.r. con $q \in \mathbb{X}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}$ conexo.

$$\lambda(u,v) = \langle p - \mathbb{X}(u,v), N(u,v) \rangle$$

$$\lambda_u(u,v) = -\langle \cancelto{0}{\mathbb{X}_u(u,v), N(u,v)} \rangle + \langle p - \mathbb{X}(u,v), N_u(u,v) \rangle =$$

$$= \lambda(u,v) \langle N(u,v), N_u(u,v) \rangle = 0$$

$$\lambda_v(u,v) = -\langle \cancelto{0}{\mathbb{X}_v(u,v), N(u,v)} \rangle + \langle p - \mathbb{X}(u,v), N_v(u,v) \rangle =$$

$$= \lambda(u,v) \langle N(u,v), N_v(u,v) \rangle = 0$$

$$f(u,v) = \mathbb{X}(u,v) + \lambda(u,v) N(u,v) = p$$

$$f_u(u,v) = \mathbb{X}_u(u,v) + \lambda_u(u,v) N(u,v) + \lambda(u,v) N_u(u,v) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 0 = \langle f_u(u,v), N(u,v) \rangle = \lambda_u(u,v) \\ 0 = \lambda_v(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(u,v) = \lambda \text{ constante en } \mathcal{U}$$

$$d(\mathbb{X}(u,v), p) = \|p - \mathbb{X}(u,v)\| = |\lambda|$$

Consideramos $d: S \to \mathbb{R}$
$d(q) = \|q - p\| = r$

$g(u,v) = \frac{1}{2} \|\mathbb{X}(u,v) - p\|^2$ [1] $g_u(u,v) = \langle \mathbb{X}_u(u,v), \mathbb{X}(u,v) - p \rangle =$

$= \lambda(u,v) \langle \mathbb{X}_u(u,v), N(u,v) \rangle = 0$

[2] $g_v(u,v) = \dots = 0$ [1]+[2] $\Rightarrow$ $g(u,v) = \frac{1}{2} r^2$ constante

$\exists\, X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ talque $X(U) \subset S$

$\exists\, \lambda : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable t.q.

$$\left\{ p = X(u,v) + \lambda(u,v)\, N(u,v) \right.$$

prod. escalar con N

$$\begin{cases} 0 = X_u + \lambda_u N + \lambda N_u \\ 0 = X_v + \lambda_v N + \lambda N_v \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} \lambda_u = 0 \\ \lambda_v = 0 \end{matrix}\right\} \lambda = \text{cte}$$

$$\|X - p\| = |\lambda(u,v)|$$

Otra forma (por Jaime)

Fijado $p \in \mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(q) = \frac{1}{2}\|q-p\|^2 = \frac{1}{2}\langle q-p, q-p\rangle$

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular

S está contenida en una esfera de centro $p \iff f|_S$ es constante

$\iff \forall q \in S \quad \forall w \in T_pS \quad 0 = Df(q)\,w = \langle w, q-p\rangle \iff$

$\iff q-p \in T_pS^{\perp} \ \forall q \in S \iff \forall q \in S$ p pertenece al vector normal a S en q.