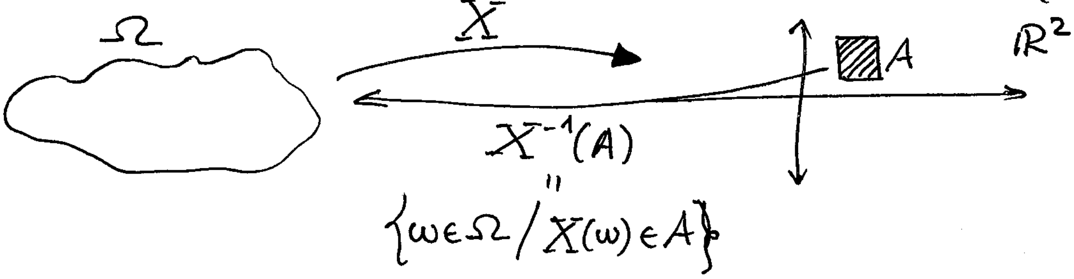
VECTORES ALEATORIOS

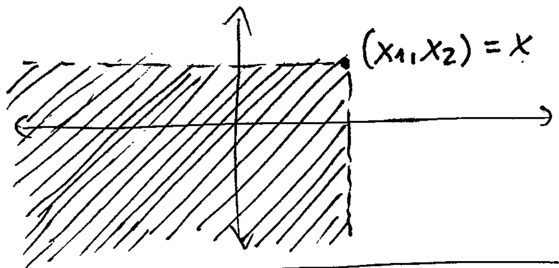
DEFINICIÓN: Un vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $X^{-1}(A) \in S$, donde $(\Omega, S, \mathbb{P})$ es el espacio de probabilidad.

DEFINICIÓN: Se puede definir $\mathbb{P}_X$ sobre $\mathbb{R}^n$ defenido por el vector aleatorio X como, $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A))$



DEFINICIÓN: Se define la función de distribución de X como $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F_X(x) := \mathbb{P}_X((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n))$

$F_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$



$(X_1, \dots, X_n) = X$ vector aleatorio	X variable aleatoria
$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $X^{-1}(A) \in S$, $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$	$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $X^{-1}(A) \in S$, $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$
$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$
$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$ $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$	$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$, $\forall x \in \mathbb{R}$

PROPIEDADES (VARIABLES ALEATORIAS)

$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ tal que:

1. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

2. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

3. F_X es continua desde la derecha.

4. F_X es monótona creciente.

PROPIEDADES (VECTORES ALEATORIOS)

$F_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ tal que:

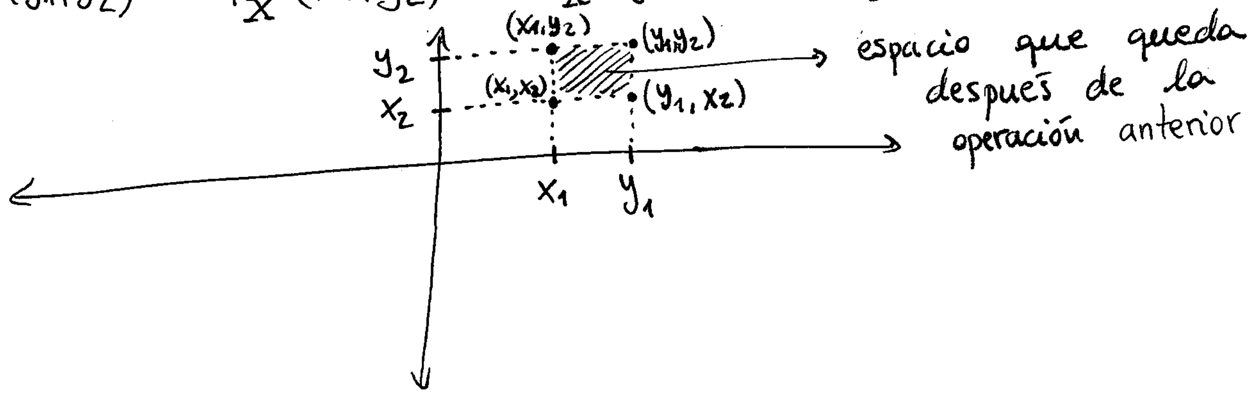
1. $\lim_{\forall i : x_i \to \infty} F_X(x) = 1$, con $x = (x_1, \dots, x_n)$

2. $\lim_{\exists i \; x_i \to -\infty} F_X(x) = 0$

3. F_X es continua por la derecha en cualquier componente x_i, en todos los puntos de $\mathbb{R}^n$.

4. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} y_1 \geq x_1 \\ y_2 \geq x_2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_X(y_1, y_2) - F_X(x_1, y_2) - F_X(y_1, x_2) + F_X(x_1, x_2) \geq 0$$



TEOREMA: $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ función de Ω a valores en $\mathbb{R}^n$. X es un vector aleatorio $\Leftrightarrow$ X_i es una variable aleatoria $\forall i = 1, \dots, n$.

demostración

$\boxed{\Rightarrow}$ Fijo i en $1, \dots, n$ $\quad X_i^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{S}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\overset{\shortparallel}{X^{-1}(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times (-\infty, x] \times \cdots \times \mathbb{R}) \in \mathcal{S}}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Fijo $x \in (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ¿$X^{-1}((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) \in \mathcal{S}$? $=$

$= \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}((-\infty, x_i]) \in \mathcal{S}$

VECTORES ALEATORIOS DISCRETOS

Los vectores aleatorios discretos son vectores aleatorios que toman una cantidad finita o numerable de valores.

Ejemplo: "lanzamiento de dos dados" $= \Omega$

(X, Y) vector aleatorio discreto el definido por:

$X =$ "exito dado 1" y $Y =$ "exito dado 2"

$$(X, Y) \in \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$$

Un vector aleatorio $(X_1, X_2, \dots, X_n) = X$ discreto está caracterizado por su función de masa conjunta, que es la función:

$$P_X(x_{i1}^1, x_{i2}^2, \dots, x_{in}^n) = \mathbb{P}(X_1 = x_{i1}^1, X_2 = x_{i2}^2, \dots, X_n = x_{in}^n)$$

$x_{ik}^i \in \mathbb{R}$

Una función de masa conjunta verifica:

1) $P_X(x_{i1}^1, \dots, x_{in}^n) \in [0,1] \xrightarrow{\text{dim } 2} P_X(x_i, y_j) \in [0,1] \ \forall x_i, y_j$

2) $\sum_{x_i} \sum_{y_j} P_X(x_i, y_j) = 1$

En el ejemplo de los dados:

$$P_X(i,j) = \mathbb{P}(X=i,\ Y=j) = 1/36 \qquad \forall i,j = 1,\dots,6$$

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

<u>Ejemplo 2</u>: Ω = "lanzamiento de dos dados"

$(X,Z) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido como: X = "exito dado 1

Z = "maximo entre dado 1 y dado

Z \ X	1	2	3	4	5	6
1	1/36	0	0	0	0	0
2	1/36	2/36	0	0	0	0
3	1/36	1/36	3/36	$\circledast$ 0	0	0
4	1/36	1/36	1/36	4/36	0	0
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36

$\boxed{\circledast = \mathbb{P}(X=4,\ Z=3) = P_{(X,Z)}(4,3}$

$\mathbb{P}(X=1,Z=1) = \underline{\mathbb{P}(Z=1|X=1)} \cdot \underline{\mathbb{P}(X}$
$= 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

$\mathbb{P}(X=1,Z=2) = \underline{\mathbb{P}(Z=2|X=1)} \cdot \underline{\mathbb{P}(X=1}$
$= 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

$\mathbb{P}(X=2,Z=1) = \mathbb{P}(Z=1|X=2) \cdot \mathbb{P}(X=2) = 0 \cdot 1/6 = 0$

$\mathbb{P}(X=2,Z=2) = \mathbb{P}(Z=2|X=2) \cdot \mathbb{P}(X=2) = 2/6 \cdot 1/6 = 2/36$

$\mathbb{P}(X=3,Z=3) = \mathbb{P}(Z=3|X=3) \cdot \mathbb{P}(X=3) = 3/6 \cdot 1/6 = 3/36$

$\vdots$

$\mathbb{P}(X=6,Z=6) = \mathbb{P}(Z=6|X=6) \cdot \mathbb{P}(X=6) = 6/6 \cdot 1/6 = 6/36$

Si (X, Y) es un vector aleatorio, entonces X e Y son variables aleatorias.

$$P_X(x_i) = \sum_{y_j} P_{(X,Y)}(x_i, y_j)$$

$$P_Y(y_j) = \sum_{x_i} P_{(X,Y)}(x_i, y_j)$$

Entonces:

$P_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = 1/6$ (suma elemtos columna 1).

$P_X(2) = \mathbb{P}(X=2) = 1/6$ (suma elementos columna 2).

$\vdots \qquad \vdots$

$P_X(6) = \mathbb{P}(X=6) = 1/6$ (suma elementos columna 6).

$P_Z(1) = \mathbb{P}(Z=1) = 1/36$ (suma elementos fila 1).

$P_Z(2) = \mathbb{P}(Z=2) = 3/36$ (suma elementos fila 2).

$\vdots \qquad 5/36, \ 7/36, \ 9/36$

$P_Z(6) = \mathbb{P}(Z=6) = 11/36$ (suma elementos fila 6).

<u>DEFINICIÓN</u>: La DISTRIBUCIÓN de X CONDICIONADA a $Y = y_j$ viene definida por la función de masa condicionada:

$$P_{X|Y=y_j}(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \frac{P_{(X,Y)}(x_i, y_j)}{P_{(Y)}(y_j)}$$

En el <u>ejemplo 1</u>: $P_{X|Y=j}(i) = \dfrac{P_{(X,Y)}(i,j)}{P_{(Y)}(j)} = \dfrac{1/36}{1/6} = 1/6 = P_X(i)$

En el <u>ejemplo 2</u>: $P_{X|Z=j}(i) = \dfrac{P_{(X,Z)}(i,j)}{P_{(Z)}(j)} \Rightarrow$ Si $i=4$, $j=2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{P_{(X,Y)}(4,2)}{P_{(Z)}(2)} = \frac{0}{3/36} = 0 \neq P_X(4) = 1/6$$

Sea $(X,Y):\Omega \to \mathbb{R}^2$ un vector aleatorio discreto, entonces

la MEDIA es:

$$\mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{x_i} x_i \cdot \mathbb{P}(X=x_i) \\ \sum_{y_i} y_i \cdot \mathbb{P}(Y=y_i) \end{bmatrix}$$

Sea $(X,Y):\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un vector aleatorio discreto, entonces la VARIANZA es: no existe la varianza del vector, solo la de sus componentes.

$$Var(X),\ Var(Y) \qquad \left[Var(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\right]$$

La COVARIANZA de X con Y:

$$Cov(X,Y) = \underbrace{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))\cdot(Y-\mathbb{E}(Y))\right)}_{=}$$

Si X,Y son discretos $\Rightarrow \displaystyle\sum_{x_i}\sum_{y_j}(x_i-\mathbb{E}(X))(y_j-\mathbb{E}(Y)) \cdot \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$

La CORRELACIÓN de X con Y es:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}} \in [-1,1]$$

- Si $Cov(X,Y)=0$ entonces X y Y son <u>incorrelados</u>.
  $\Rightarrow Corr(X,Y)=0$

- Si $Cov(X,Y) >> 0$ implica que entre X e Y hay una relación directa.

- Si $Cov(X,Y) << 0$ implica que entre X e Y hay una relación inversa.

MATRIZ DE COVARIANZAS DE UN VECTOR ALEATORIO $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$\underset{\text{simétrica}}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underbrace{Cov(X_1,X_1)}_{Var(X_1)} & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & \underbrace{Cov(X_2,X_2)}_{Var(X_2)} & \cdots & Cov(X_2,X_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Cov(X_n,X_1) & Cov(X_n,X_2) & \cdots & \underbrace{Cov(X_n,X_n)}_{Var(X_n)} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{simétrica}}{\rho} = \begin{bmatrix} \overbrace{Corr(X_1,X_1)}^{=1} & Corr(X_1,X_2) & \cdots & Corr(X_1,X_n) \\ Corr(X_2,X_1) & \overbrace{Corr(X_2,X_2)}^{=1} & \cdots & Corr(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & 1 & \\ Corr(X_n,X_1) & Corr(X_n,X_2) & \cdots & \underbrace{Corr(X_n,X_n)}_{=1} \end{bmatrix}$$

VECTORES ALEATORIOS CONTINUOS

Un vector aleatorio es CONTINUO cuando tama valores en $\mathbb{R}^n$ y su $\mathbb{P}_X$ (distribución) está definida por una función de densidad conjunta: $f_{(X,Y)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1.- $f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2.- $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\, dxdy = 1$

- La $\mathbb{P}_X$ está definida por $f_{(X,Y)}$ significa ? → el profesor no se expresa muy bien

Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\, dxdy$

- $f_X(x)$, que es la densidad marginal de X del vector (X,Y), es igual a $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)} f(x,y)\, dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$

⇒ Para $(X_1, X_2, \dots, X_n)$:

$$f_{X_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{n-1} f_{(X_1,\dots,X_n)}(x, y_2, \dots, y_n)\, dy_2 \cdots dy_n$$

- $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx \quad , \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

La distribución CONDICIONADA de X condicionado a $Y=y$

$$x \in \mathbb{R}, \quad f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$$

La COVARIANZA se define como:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) \cdot f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\,dy$$

INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

DEFINICIÓN: Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sobre (Ω, S) son INDEPENDIENTES si $\forall B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$.

1. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(B_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i^{-1}(B_i))$

2. $\mathbb{P}_{\underset{(X_1,\ldots,X_n)}{\overset{\parallel}{X}}}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{X_i}(B_i)$

Por la 2ª, como $F_X(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{P}_X((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n])$ y $F_{X_i}(x_i) = \mathbb{P}_{X_i}((-\infty, x_i])$, entonces si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes $\Rightarrow F_X(x_1,\ldots,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$. Además, si X es discreto, la independencia es equivalente $P_X(x_1,\ldots,x_n) = P_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot P_{X_n}(x_n)$ y si X es continua, entonces:

$$f_X(x_1,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n) \qquad f_X(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F_X(x_1,\ldots,x_n)$$

TEOREMA: Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son independientes, entonces

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(X_n)$$

demostración (si X_i son continuas) $\xrightarrow{\text{record.}}$ $\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) \cdot f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots d}$

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \dots X_n) = \iint_{\mathbb{R}^n} \cdots \int x_1 x_2 \cdots x_n \cdot f_{(X_1 \dots X_n)}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x_1 f_{X_1}(x_1) dx_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} x_2 \cdot f_{X_2}(x_2) dx_2 \cdot \ldots \cdot \int_{\mathbb{R}} x_n \cdot f_{X_n}(x_n)\, dx_n =$$

$$= \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(X_n) \qquad \square$$

TEOREMA: Si X e Y son independientes, entonces X e Y son incorreladas $\big(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) = 0\big)$.

demostración

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \overset{\text{indep}}{=} \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 \qquad \square$$

Observación: X e Y incorreladas $\not\Longrightarrow$ X e Y independientes.

Contraejemplo:

Sea (X,Y) un vector aleatorio discreto con función de masa conjunta $f_{(X,Y)}$ definida por:

Y \ X	-1	0	1	
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \underbrace{\mathbb{E}(XY)} - \underset{0}{\mathbb{E}(X)}\, \underset{0}{\mathbb{E}(Y)}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x_i, y_j} x_i y_j\, \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = 0 \quad \underline{\text{Incorrelados}}$$

$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = 0$ $\neq$ $\Rightarrow$ X e Y <u>no</u> son independientes

$\mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=1) = 1/4 \cdot 1/4 = 1/16$

TEOREMA: Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ vector aleatorio

a) $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i) + b$, $a_i, b \in \mathbb{R}$

b) $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{V}(X_i)$ si X_i son independientes

demostración

a) $$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}^n} X_i \cdot f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n + b \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n}_{=1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} X_i\, dx_i \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n}_{f_{X_i}(x_i)} + b =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i) + b \qquad \square$$

b) $$\mathbb{V}\left(\sum a_i X_i + b\right) = \mathbb{E}\left(\left[\sum a_i X_i + \cancel{b} - \sum a_i \mathbb{E}(X_i) - \cancel{b}\right]^2\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\left[\sum a_i (X_i - \mathbb{E}(X_i))\right]^2\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 (X_i - \mathbb{E}(X_i))^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j (X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j))\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{i<j} a_i a_j \cdot \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{=0} = \sum a_i^2 \mathbb{V}(X_i) \qquad \square$$

MODELOS DE PROBABILIDAD

MODELOS DISCRETOS

1.- MODELO DE BERNOULLI $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$X : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$$

fracaso (0), éxito (1)

$$\mathbb{P}(X=1) = p \in (0,1)$$

$$\mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

$$\mathbb{E}(X) = 1 . p + 0.(1-p) = p$$

$$\mathbb{V}(X) = (1-p)^2 . p + (0-p)^2 (1-p) = (1-p)\left[(1-p)p + p^2\right] = p(1-p)$$

$$\text{Std}(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{p(1-p)}$$

2.- MODELO BINOMIAL $X \sim \text{Bin}(n; p)$

X = "nº éxitos en n pruebas de Bernoulli(p) independientes"

$$X : \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} . p^k . (1-p)^{n-k} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k . \binom{n}{k} p^k . (1-p)^{n-k}$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad , \quad X_k \sim \text{Bernoulli}(p)$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n . p$$

X_i independientes

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + \cdots X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = n . p(1-p)$$

$$\text{Std}(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{n . p(1-p)}$$

3.- MODELO DE POISSON $\quad X \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad \lambda > 0$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad n \to \infty,\ p \to 0 \text{ tal que } n.p \to \lambda > 0,\ \lambda \neq \infty$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p \to 0 \\ np \to \lambda}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \lim \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\, n^k} (np)^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \lim \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \right)}_{\substack{\text{tiende a } 1 \\ \text{cuando } n \to \infty}} (np)^k \frac{(1-p)^n}{\underbrace{(1-p)^k}_{\text{tiende a } 1}} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim (1-p)^n = \frac{\lambda^k}{k!} \lim \Big(1 - \underbrace{\frac{\lambda}{n}}_{\simeq p}\Big)^n = \boxed{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \underline{\lambda = \lim np}$$

$$V(X) = \underline{\lambda = \lim \underbrace{np}_{\to \lambda} \underbrace{(1-p)}_{\to 1}}$$

$$\text{Std}(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}$$

- Si $X \sim \text{Bin}(n; p)$ con $n \geq 30$, $p \leq 0'1$
  $\Rightarrow$ puedo aproximar $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda = np$

4.- MODELO DE LA GEOMÉTRICA $\quad X \sim \text{Geométrica}(p)$

X = " nº de fracasos antes de obtener el primer éxito en pruebas de Bernoulli(p) ".

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^k \cdot p \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^k p = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^k p =$$

$$= p \begin{bmatrix} (1-p) + & & \\ +(1-p)^2 + & (1-p)^2 + & \\ +(1-p)^3 + & (1-p)^3 + & (1-p)^3 + \\ & \dots & \end{bmatrix} =$$

sumamos las "columnas"

$$= p \left[\frac{1-p}{\cancel{1}-(\cancel{1}-p)} + \frac{(1-p)^2}{\cancel{1}-(\cancel{1}-p)} + \frac{(1-p)^3}{\cancel{1}-(\cancel{1}-p)} + \dots \right] = (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \dots$$

$$= \frac{1-p}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{p}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\text{Std}(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

5. – BINOMIAL NEGATIVA $X \sim BinNeg(p,r)$ $r \in \mathbb{N}$

X = "nº fracasos obtenidos antes de obtener el r-ésimo éxito"

$X : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_r) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}(X_i) = \frac{r(1-p)}{p}$$

donde X_i = "nº fracasos obtenidos entre el $(i-1)$ésimo y el i-ésimo éxito." $X_i \sim$ Geométrica(p)

6. – HIPERGEOMÉTRICA $X \sim$ Hipergeométrica$(\underset{\text{nº total}}{N}; \underset{\text{nº éxitos}}{D}; \underset{\text{nº extracciones}}{n})$

$N \in \mathbb{N}$, $D \in \{0, \ldots, N\}$

X = "nº de éxitos obtenidos en n observaciones sin reemplazamiento de la población, donde D es el número de éxitos y N-D es el número de fracasos

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad k = \max\{0, n-(N-D)\}, \ldots, \min\{n, D\}$$

Observación: Si D y $N-D >> n$, entonces tomar "con" o "sin" reemplazamiento no cambia mucho las cosas $\Rightarrow$

$\Rightarrow X \sim$ Binomial$(n; \overbrace{\frac{D}{N}}^{=p})$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n), \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{si éxito en la } i\text{-ésima observación} \\ 0 & \text{si fracaso en la } i\text{-ésima observación} \end{cases}$$

$X_i \sim$ Bernoulli$\left(\frac{D}{N}\right)$

¿$\mathbb{E}(X_2) = D/N$? → demostración

$$\mathbb{E}(X_2) = 1 \cdot \mathbb{P}(X_2=1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X_2=0) = \mathbb{P}(X_2=1) = \mathbb{P}(X_2=1|X_1=1) \cdot \mathbb{P}(X_1=1) +$$

$$+ \mathbb{P}(X_2=1|X_1=0) \cdot \mathbb{P}(X_1=0) = \frac{D-1}{N-1} \cdot \frac{D}{N} + \frac{D}{N-1} \cdot \frac{N-D}{N} = \frac{D^2 - D + DN - D^2}{N(N-1)} =$$

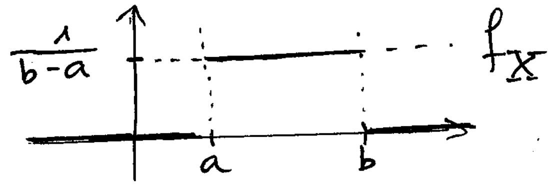
$$= \frac{D(N-1)}{N(N-1)} = \frac{D}{N}$$

$$\mathbb{V}(X) = n \cdot \frac{D}{N} \cdot \frac{N-D}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

MODELOS CONTINUOS

1.- $X \sim \text{Uniforme}(a,b) \qquad a<b \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} , & x \in (a,b) \\ 0 , & x \notin (a,b) \end{cases}$$

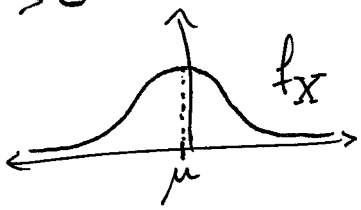


$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot f_X(x) dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2.- $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma) \quad ; \quad \mu \in \mathbb{R} \; ; \; \sigma > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$



$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

PROPIEDADES DE LA NORMAL:

i) Si $X \sim N(\mu; \sigma) \Rightarrow Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

demostración:

jacobiano transform

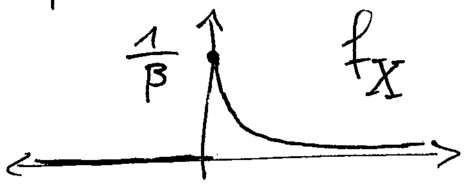
$$f_Z(z) = f_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(z) = f_X(\sigma z + \mu)\sigma =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\cancel{\sigma} z + \cancel{\mu} - \cancel{\mu})^2}{2\cancel{\sigma^2}}} \cdot \cancel{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$\ldots$ Si $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), \ldots, X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$ y X_i son independientes $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \,;\, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$

3.- $X \sim$ Exponencial (β) , $\beta > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} , & x > 0 \\ 0 , & x \leq 0 \end{cases}$$



$\mathbb{E}(X) = \beta$

$\mathbb{V}(X) = \beta^2$

La exponencial es la única distribución que "no tiene memoria", es decir:

$$\mathbb{P}(X \geq x+h \mid X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq h) \quad , \quad x, h > 0$$

$$\Longleftrightarrow X \sim \text{Exp}(\beta)$$

MODELO DE PROBABILIDAD EN $\mathbb{R}^n$

• $d=2$, $\mathbb{R}^2$

La distribución Normal en $\mathbb{R}^2$ es la distribución con función de densidad conjunta con parámetros $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\rho \in (-1,1)$

$$f_{(X,Y)}(x,y) := \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2} \cdot \sigma_1 \sigma_2} \cdot e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2}\right.}$$

PROPIEDADES: ▸ X e Y son Normales con:

$\mathbb{E}(X) = \mu_1$ $\qquad$ $\mathbb{E}(Y) = \mu_2$

1. $\mathbb{V}(X) = \sigma_1^2$ $\qquad$ $\mathbb{V}(Y) = \sigma_2^2$

$1+2$

2. $Cov(X,Y) = \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \iff Corr(X,Y) = \rho$

$$\begin{cases} \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \\ \boxed{-} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

▸ Si $\rho = 0 \Rightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} =$

$= f_X(x) \cdot f_Y(y)$

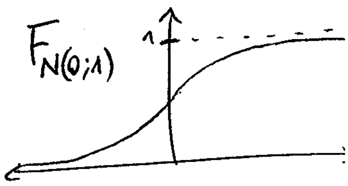
▸ Si X e Y son marginales de una Normal en $\mathbb{R}^2$, entonces, X e Y son independientes $\iff$ son incorreladas.

* TCL - TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, $\mathbb{E}(X_i)=\mu$, $\mathbb{V}(X_i)=\sigma^2$ finitos.

Entonces:

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{en distribución}} N(0;1)$$



Aplicaciones:

a) Si $n \geq 30$, TCL $\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

b) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu; \sigma\sqrt{n})$ si $n \geq 30$.

* LGN - LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Bajo las mismas hipótesis del TCL.

Entonces:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{en distribución}} \mu$$