CYN. Capítulo IV: Relaciones de orden
Primer Curso de Matemáticas, 2017-18

José García-Cuerva

Universidad Autónoma de Madrid

14 de marzo de 2017

1 Relaciones binarias

2 Relaciones de orden
- Ejemplos de relaciones de orden
- Orden total
- Máximo y mínimo
- Elementos maximales y minimales
- Cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo
- Buen orden

3 El lema de Zorn

4 El Principio de la buena ordenación

5 Equivalencia entre el lema de Zorn, el teorema de Zermelo y el axioma de elección
- Prueba del lema de Zorn a partir del axioma de elección

Definición

Una relación binaria en el conjunto X es una relación de X en X, es decir, un subconjunto $\mathcal{R}$ de $X \times X$. Ponemos $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Propiedades

Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria en X, es decir, $\mathcal{R} \subset X \times X$.

- Se dice que $\mathcal{R}$ es REFLEXIVA si $\forall x \in X,\ x\mathcal{R}x$, o, en otras palabras, si $\mathcal{R} \supset \Delta = \{(x, x) :\ x \in X\}$, la "diagonal"de $X \times X$.
- Se dice que $\mathcal{R}$ es SIMÉTRICA si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, o, en otras palabras, si $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R}$, que equivale a $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$ $(\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} = (\mathcal{R}^{-1})^{-1} \subset \mathcal{R}^{-1})$
- Se dice que $\mathcal{R}$ es ANTISIMÉTRICA si $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$, es decir, si $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset \Delta$.
- Se dice que $\mathcal{R}$ es TRANSITIVA si $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$, es decir, si $\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$.

Definición

Una relación de orden en el conjunto X es una relación binaria en X que sea REFLEXIVA, ANTISIMÉTRICA y TRANSITIVA.

Proposición

$\mathcal{R} \subset X \times X$ es una relación de orden $\Leftrightarrow \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \Delta \;\wedge\; \mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$.

Demostración

Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden, será antisimétrica, luego $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset \Delta$. Además, como $\mathcal{R}$ es reflexiva, $\Delta \subset \mathcal{R}$ y $\Delta = \Delta^{-1} \subset \mathcal{R}^{-1}$. En definitiva $\Delta \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$, y tenemos $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \Delta$. Por otro lado, como $\mathcal{R}$ es transitiva, $\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$. Pero, como $\mathcal{R}$ es reflexiva,
$(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, x) \in \mathcal{R} \wedge (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}^2$. Así pues, $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$.
El recíproco es inmediato pues
$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \Delta \wedge \mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \Rightarrow \Delta \subset \mathcal{R} \wedge \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset \Delta \wedge \mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$

1. Si U es un conjunto, consideramos la relación de inclusión en el conjunto $X = \mathcal{P}(U)$, dada por $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B,\ A, B \in X = \mathcal{P}(U)$.
2. En $X = \mathbb{R}$, se define el orden habitual partiendo de la descomposición $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \uplus \{0\} \uplus \mathbb{R}_+$, donde $\mathbb{R}_+$ denota el conjunto de los números reales positivos y $\mathbb{R}_- = -\mathbb{R}_+$ el de los negativos. Se define $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+ \uplus \{0\},\ a, b \in \mathbb{R}$.
3. En $X = \mathbb{Z}$ se define la relación de divisibilidad del modo siguiente: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a|b$(se dice que "$a$ divide a b")$\Leftrightarrow b = ca$ para algún $c \in \mathbb{Z}$.
4. En $X = \mathbb{R}^2$, se define el orden "lexicográfico"u orden del diccionario de la forma siguiente:

$$(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2);\ (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

5. Si $(X, \mathcal{R})$ es un conjunto ordenado y $A \subset X$, se define la restricción $\mathcal{R}|_A$ de $\mathcal{R}$ a A como $a\mathcal{R}|_A b \Leftrightarrow a\mathcal{R}b,\ a, b \in A$. Desde luego $(A, \mathcal{R}|_A)$ es un conjunto ordenado.

DEFINICIÓN

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{R}$ una relación de orden en X. A veces diremos, en este caso, que el par $(X, \mathcal{R})$ es un conjunto ordenado. Diremos que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total o lineal y también que $(X, \mathcal{R})$ es un conjunto totalmente ordenado o linealmente ordenado si $\forall x, y \in X,\ x\mathcal{R}y \ \vee \ y\mathcal{R}x$, o, en otras palabras, si $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = X \times X$.

De los 4 ejemplos de relaciones de orden que dimos en la página anterior, sólo el 2^0 y el 4^0 son totales. En efecto

- En cuanto haya, al menos, dos elementos distintos $a, b \in U$, la relación de inclusión en $\mathcal{P}(U)$ no es un orden total, ya que $\{a\} \not\subset \{b\}$ y $\{b\} \not\subset \{a\}$
- Tampoco es un orden total la relación de divisibilidad de los enteros (no. 3). Por ejemplo $3 \nmid 5 \ \wedge \ 5 \nmid 3$.

Máximo y mínimo

Definición

Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado. Entonces

- Se dice que $a \in X$ es máximo si $\forall x \in X, x\mathcal{R}a$.
- Dado $A \subset X$, se dice que $a \in A$ es máximo de A si $\forall b \in A,\ b\mathcal{R}a$.
- Se dice que $b \in X$ es mínimo si $\forall x \in X, b\mathcal{R}x$.
- Dado $A \subset X$, se dice que $b \in A$ es mínimo de A si $\forall a \in A,\ b\mathcal{R}a$.

Máximo de $A \subset X$ es lo mismo que máximo del conjunto ordenado $(A, \mathcal{R}|_A)$, donde $\mathcal{R}|_A$ es la restricción de $\mathcal{R}$ a A, que es una relación de orden en A. Lo mismo puede decirse del mínimo de $A \subset X$.

Proposición

Si hay máximo, es único. Y lo mismo sucede para el mínimo.

Demostración

a máximo $\wedge a'$ máximo $\Rightarrow a'\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}a' \Rightarrow a = a'$.

Elementos maximales y minimales

Definición

Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado. Entonces

- Se dice que $a \in X$ es un elemento maximal si $\nexists x \in X \ni a\mathcal{R}x \wedge a \neq x$, en otras palabras, si $a\mathcal{R}x, x \in X \Rightarrow x = a$.
- Se dice que $b \in X$ es un elemento minimal si $\nexists x \in X \ni x\mathcal{R}b \wedge b \neq x$, en otras palabras, si $x\mathcal{R}b, x \in X \Rightarrow x = b$.

Proposición

- Cuando hay máximo, éste es el único elemento maximal.
- Cuando hay mínimo, éste es el único elemento minimal.

Demostración

Si a es máximo y $x \in X$, se tiene que $x\mathcal{R}a$. Entonces, $a\mathcal{R}x \Rightarrow x = a$, de modo que a es maximal. Por otro lado, si a' es maximal, se tiene que, por ser a máximo, $a'\mathcal{R}a$ y, entonces, por ser a' maximal, $a' = a$.

Ejemplos

1. Sea $X = \mathbb{N}_{30} = \{1, 2, 3, \cdots, 30\}$ con la relación de divisibilidad, es decir: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y$. En el conjunto ordenado $(X, \mathcal{R})$ tenemos que:
   - No hay máximo.
   - Son maximales $16, 17, 18, \cdots, 30$, quince elementos en total.
   - Hay mínimo, el 1.
2. Sea $X = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ también con la relación de divisibilidad. Entonces, en $(X, \mathcal{R})$
   - No hay ni mínimo ni máximo.
   - Son minimales el 2 y el 3.
   - Son maximales el 8 y el 12.
3. Sea X la colección de todos los subconjuntos PROPIOS de $\{1, 2, 3\}$ con la relación de inclusión, es decir: $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. En este conjunto ordenado
   - $\emptyset$ es el mínimo.
   - No hay máximo. Y
   - $\{1, 2\}, \{2, 3\}$ y $\{1, 3\}$ son los elementos maximales.

DEFINICIÓN

Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado y sea $A \subset X$.

- Se dice que $a \in X$ es COTA SUPERIOR de A si $\forall x \in A,\ x\mathcal{R}a$.
- Se dice que $b \in X$ es COTA INFERIOR de A si $\forall x \in A,\ b\mathcal{R}x$.
- Si el conjunto de todas las cotas superiores de A tiene un mínimo, a éste se le llama COTA SUPERIOR MÍNIMA o SUPREMO, que se denota por $sup(A)$ (en inglés l.u.b., o sea, "least upper bound"). Naturalmente, como es el mínimo de un conjunto, si el supremo existe, es único.
- Si el conjunto de todas las cotas inferiores de A tiene un máximo, a éste se le llama COTA INFERIOR MÁXIMA o ÍNFIMO, que se denota por $inf(A)$ (en inglés g.l.b., o sea, "greatest lower bound"). Naturalmente, como es el máximo de un conjunto, si el ínfimo existe, es único.

- Sea $X = \mathcal{P}(U)$ para algún conjunto U. En X consideramos la relación de inclusión. Entonces para $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(U), \ \mathcal{A} \neq \emptyset$, claramente
    - $sup(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.
    - $inf(\mathcal{A}) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$.
    - ¿Que ocurre si $\mathcal{A} = \emptyset$? Desde luego, $sup(\emptyset) = \emptyset$ y $inf(\emptyset) = X$. Parece razonable definir $\bigcup_{A \in \emptyset} A = \emptyset$ y $\bigcap_{A \in \emptyset} A = X$.
- En $\mathbb{N}$ con la relación de divisibilidad, cualquier conjunto finito $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ tiene supremo e ínfimo. Las cotas superiores son los múltiplos comunes. Siempre hay, al menos, uno: $a_1 a_2 \cdots a_n$. Entre todos hay uno mínimo, el mínimo común múltiplo (m.c.m.). Así pues: $sup(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}) = m.c.m.(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Las cotas inferiores son los divisores comunes. Siempre hay, al menos, uno que es el 1. Y el conjunto de cotas inferiores tiene siempre un máximo, que es el máximo común divisor (m.c.d.). Así pues: $inf(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}) = m.c.d.(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

- En $(\mathbb{R}, \leq)$, sea $A =]0, 1[$. El conjunto de las cotas superiores de A es $[1, \rightarrow [$, que tiene un mínimo que es 1, de modo que $sup(A) = 1$. El conjunto de las cotas inferiores de A es $] \leftarrow, 0]$, que tiene un máximo que es 0, con lo que $inf(A) = 0$. Sabéis (Cálculo I) que si un conjunto $E \neq \emptyset$ de números reales es acotado superiormente, o sea, si tiene alguna cota superior, entonces tiene supremo y si es acotado inferiormente, entonces tiene ínfimo. Esta es una propiedad fundamental de los números reales que se conoce como principio del supremo y equivale a la completitud.
- Sea $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R})$, donde $\mathcal{R}$ denota el orden lexicográfico. El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1 \ \wedge \ 0 < y < 1\}$ tiene como cotas superiores todos los puntos del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 1\}$ Pero este conjunto no tiene mínimo. Así A es un conjunto acotado superiormente que no tiene supremo.

DEFINICIÓN

Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto ordendo. Se dice que la relación $\mathcal{R}$ es un buen orden o que $(X, \mathcal{R})$ es un conjunto bien ordenado si $\forall A \subset X \ni A \neq \emptyset$, A tiene mínimo o, como se dice también, "primer elemento".

PROPOSICIÓN

BUEN ORDEN $\Rightarrow$ ORDEN TOTAL; pero el recíproco NO ES CIERTO.

DEMOSTRACIÓN

Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto bien ordenado. Sean $x, y \in X$. Por ser $\mathcal{R}$ un buen orden, el conjunto $\{x, y\}$ ha de tener mínimo. Si es x, será $x\mathcal{R}y$ y si es y, será $y\mathcal{R}x$. En definitiva, $(X, \mathcal{R})$ es totalmente ordenado. Para ver que el recíproco no es cierto, podemos considerar el orden usual de los enteros. Este orden es total; pero no es un buen orden. Por ejemplo, el conjunto total $\mathbb{Z}$ carece de primer elemento.

Definición

Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado.

- Se llama CADENA a cualquier subconjunto ordenado $(A, \mathcal{R}_A)$, $A \subset X$, tal que la restricción $\mathcal{R}_A$ del orden $\mathcal{R}$ a A es un ORDEN TOTAL. Así que "cadena"será una forma rápida de decir "subconjunto totalmente ordenado".
- Diremos que el conjunto ordenado $(X, \mathcal{R})$ es INDUCTIVO si en X toda cadena tiene alguna cota superior.

Lema de Zorn

Sea $X \neq \emptyset$ un CONJUNTO ORDENADO INDUCTIVO. Entonces, X tiene algún ELEMENTO MAXIMAL.

Al final de este capítulo veremos que el lema de Zorn es equivalente al axioma de elección. Pero antes, vamos a dar algunos ejemplos de la utilización del Lema de Zorn.

APLICACIONES DEL LEMA DE ZORN I

PROPOSICIÓN

Si S es un conjunto que tiene, al menos, dos elementos, entonces $\exists f : S \to S$ biyectiva tal que $f(x) \neq x \ \forall x \in S$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $X = \{(A, f) \ni \emptyset \neq A \subset S \wedge f : A \to A$ biyectiva $\ni f(x) \neq x \forall x \in A\}$.
En X definimos la relación $(A, f) \prec (B, g) \Leftrightarrow A \subset B \wedge g$ extiende f.
$(X, \prec)$ es ordenado inductivo. En efecto, si $\{(A_\alpha, f_\alpha)\}_\alpha$ es una cadena, se obtiene una cota superior considerando $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ y $h : A \to A$ dada por $h(a) = f_\alpha(a)$ si $a \in A_\alpha$. ¿Por qué está h bien definida? Aplicando el Lema de Zorn, se obtiene que hay algún elemento maximal $(A, f) \in X$.
$S \setminus A$ no puede tener más de un elemento, porque si disponemos de dos elementos distintos para añadir a A obteniendo B, es fácil encontrar $(B, g) \in X \ni, (A, f) \underset{\neq}{\prec} (B, g)$. Así $A = S$ o $S = A \cup \{a\}$ y, en ambos casos, tenemos $f : S \to S$ como queríamos.

Aplicaciones del Lema de Zorn II

Proposición

Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(E)$ la colección formada por todos los conjuntos de elementos linealmente independientes.
Entonces, para $S \in \mathcal{Y}$,
S es base $\Leftrightarrow$ S es maximal en el conjunto ordenado $(\mathcal{Y}, \subset)$.

Demostración

Si S es base y $x \in E \setminus S$, como $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_j, \ \lambda_j \in \mathbb{K}, s_j \in S$, $S \cup \{x\}$ ya no es un conjunto de elementos linealmente independientes.
Recíprocamente, si S es maximal y $x \in E \setminus S$, $S \cup \{x\}$ ya no es un conjunto de elementos linealmente independientes y eso conduce a una expresión de x como combinación lineal de elementos de S, de modo que S es un sistema de generadores linealmente independientes, es decir, una base.

En el capítulo anterior vimos que todo espacio vectorial finitamente generado tiene base. Ahora extendemos el resultado a cualquier espacio vectorial con ayuda del Lema de Zorn.

TEOREMA

Todo espacio vectorial tiene alguna base.

DEMOSTRACIÓN

Sea E un $\mathbb{K}-$espacio vectorial. Hay que demostrar que el conjunto $\mathcal{Y}$ formado por todos los conjuntos de elementos linealmente independientes de E tiene un elemento maximal respecto a la relación de orden de inclusión. El lema de Zorn nos asegura la existencia de dicho elemento maximal si probamos que $(\mathcal{Y}, \subset)$ es un conjunto no vacío, ordenado inductivo. Desde luego $\mathcal{Y} \neq \emptyset$, ya que para cualquier $x \in E \setminus \{0\},\ \{x\} \in \mathcal{Y}$. Para ver que $(\mathcal{Y}, \subset)$ es inductivo, consideramos una cadena $\{S_\alpha\}_\alpha \subset \mathcal{Y}$ y hemos de ver que dicha cadena tiene alguna cota superior. Todo lo que tenemos que hacer es darnos cuenta de que $S = \bigcup_\alpha S_\alpha \in \mathcal{Y}$. Pero esto es consecuencia de ser $\{S_\alpha\}_\alpha$ cadena.

Teorema de Zermelo

Todo conjunto $X \neq \emptyset$ admite un buen orden.

Demostración

Dado $X \neq \emptyset$, sea $\mathcal{X} = \{(A, \mathcal{R}) : \emptyset \neq A \subset X \wedge \mathcal{R}$ buen orden en $A\}$. $\mathcal{X} \neq \emptyset$ ¿Por qué? Definimos para $(A, \mathcal{R}), (B, \mathcal{S}) \in \mathcal{X}$ $(A, \mathcal{R}) \prec (B, \mathcal{S}) \Leftrightarrow A \subset B \wedge \mathcal{S}|_A = \mathcal{R}, \wedge (x \in A \wedge y \in B \setminus A) \Rightarrow x\mathcal{S}y$. $\prec$ es un orden en $\mathcal{X}$(fácil). Veamos que $(\mathcal{X}, \prec)$ es inductivo. Sea $\mathcal{K} = \{(A_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)\}_\alpha \subset \mathcal{X}$ una cadena. Sea $A = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$. Dados $a, a' \in A$, $\exists \alpha \ni a, a' \in A_\alpha$. Definimos $a\mathcal{R}a' \Leftrightarrow a\mathcal{R}_\alpha a'$. ¡$\mathcal{R}$ está bien definida y es un orden en A por ser $\mathcal{K}$ cadena! Queda ver que es un buen orden. $\emptyset \neq B \subset A \Rightarrow \exists \alpha \ni B \cap A_\alpha \neq \emptyset$. Sea b el mínimo de $B \cap A_\alpha$ en $\mathcal{R}_\alpha$. Entonces b es el mínimo de B en $(A, \mathcal{R})$ ¿Por qué? Desde luego $(A, \mathcal{R})$ es cota superior de $\mathcal{K}$. El lema de Zorn garantiza que existe un elemento maximal $(C, \mathcal{U})$ en $\mathcal{X}$ y, claramente, $C = X$.

Recordemos el Axioma de elección

Para cada conjunto $X \neq \emptyset$ existe una FUNCIÓN DE ELECCIÓN $\varphi : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$, tal que $\forall A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\},\ \varphi(A) \in A$.

Teorema

Son equivalentes: El Lema de Zorn (ZO), el Principio de la buena ordenación (Teor. de Zermelo)(BO) y el Axioma de elección (AE).

Demostración

Hemos visto $(\mathrm{ZO}) \Rightarrow (\mathrm{BO})$. Veamos $(\mathrm{BO}) \Rightarrow (\mathrm{AE})$. Sea $X \neq \emptyset$. Suponiendo(BO), construimos una función de elección haciendo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ A & \mapsto & \varphi(A) = min(A). \end{array}$$

Queda por ver $(\mathrm{AE}) \Rightarrow (\mathrm{ZO})$, que es la parte más delicada.

A. DE ELECCIÓN $\Rightarrow$ L. DE ZORN

DEFINICIÓN

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Dada $\psi : \mathcal{P}(X) \to X$, se dice que $\mathcal{F}$ es una torre para ψ ($\psi-$torre), si se cumplen las tres condiciones siguientes:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- Si $\{A_\alpha : \alpha \in J\} \subset \mathcal{F}$ es una cadena, entonces $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{F}$ y
- Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A \cup \{\psi(A)\} \in \mathcal{F}$.

PROPOSICIÓN

$\{\mathcal{F}_\beta\}_{\beta \in I}$ familia de $\psi-$torres, $\Rightarrow \bigcap_{\beta \in I} \mathcal{F}_\beta$ es $\psi-$torre.

COROLARIO

Toda $\psi-$torre contiene una (sub-)$\psi-$torre mínima, la intersección de todas las (sub-)$\psi-$torres.

LEMA BÁSICO

Si $\mathcal{F}$ es una $\psi-$torre, entonces existe algún $A \in \mathcal{F}$ tal que $\psi(A) \in A$.

Lo demostramos después. Ahora lo suponemos y probamos (ZO). Sea $(X, \prec)$ ordenado inductivo. Veamos (AE) $\Rightarrow$ $\exists$el. maximal en X. Sea $\mathcal{F} = \{A \text{ cadena de } X\} \cup \{\emptyset\}$. $\forall A$, cadena, sea a_A cota superior (!aquí usamos (AE)!)y sea $T_A = \{x \in X \ : \ (a_A \underset{\neq}{\prec} x)\}$. Veremos (por contradicción) que $\exists A$ cadena $\ni$ $T_A = \emptyset$. Para dicha A, a_A es maximal en X. Si $\forall A, \ T_A \neq \emptyset, \exists c : \mathcal{P}(X) \to X \ni \forall A$ cadena, $c(A) \in T_A$. (¡usamos (AE) otra vez!) $\mathcal{F}$ es una $c-$torre ($\emptyset \in \mathcal{F}$. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es cadena en $\mathcal{F}$, vemos que $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{F}$ pues si $a, b \in \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$, $\exists \alpha, \beta \in J, \ni \ a \in A_\alpha, b \in A_\beta$. $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ cadena de $\mathcal{F}$, $\Rightarrow$, digamos, $A_\alpha \supset A_\beta$. Así $a, b \in A_\alpha$ y $a \prec b \vee b \prec a$ con lo que $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{F}$. Finalmente, si $A \in \mathcal{F}$ veamos que $A \cup \{c(A)\} \in \mathcal{F}$. Pero $a \in A \Rightarrow a \prec a_A \prec c(A)$.) Ahora, usando el lema, $\exists A \in \mathcal{F}$ tal que $c(A) \in A$. Como a_A es cota superior de A, $c(A) \prec a_A$. Pero $a_A \underset{\neq}{\prec} c(A)$

Esta contradicción demuestra que algún $T_A = \emptyset$, c. q. d..

El lema básico dice que si $\mathcal{F}$ es una $\psi-$torre, entonces $\exists A \in \mathcal{F} \ni \psi(A) \in A$. Sabemos que $\mathcal{F}$ tiene una (sub)-$\psi-$torre mínima $\mathcal{M}$. Lo que vamos a ver es que

PROPOSICIÓN

$\mathcal{M}$ es una cadena respecto a la inclusión.

Veamos por qué, una vez que hayamos probado la Proposición, el lema básico se sigue fácilmente. Basta tomar $A = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$. Por ser $\mathcal{M}$ $\psi-$torre y cadena, la segunda propiedad de las torres nos da que $A \in \mathcal{M}$. Además, la tercera propiedad de las torres implica que $A \cup \{\psi(A)\} \in \mathcal{M}$. Pero entonces, $A \cup \{\psi(A)\} \subset A$, de donde $\psi(A) \in A$, que es lo que queríamos demostrar. Ahora sólo queda probar la Proposición.

Demostración de la Proposición

Definición

$M \in \mathcal{M}$ se llamará conjunto medio si $\forall M' \in \mathcal{M},\; M' \subset M \vee\; M \subset M'$.

$\mathcal{M}$ cadena $\Leftrightarrow\; \forall M \in \mathcal{M}$ es conj. medio. Probamos esto en dos pasos.

Primer Paso

$M \in \mathcal{M}$ conjunto medio $\;\Rightarrow\; \forall M' \in \mathcal{M},\; M' \subset M \vee M \cup \{\psi(M)\} \subset M'$.

Demostración

Sea $\mathcal{G}_M = \{M' \in \mathcal{M} \ni \ M' \subset M \vee \ M \cup \{\psi(M)\} \subset M'\}$. Veremos que $\mathcal{G}_M$ es $\psi-$torre. Pero $\mathcal{G}_M \subset \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es mínima. Así pues, $\mathcal{G}_M = \mathcal{M}$ y habríamos terminado. $\emptyset \in \mathcal{G}_M$ pues $\emptyset \subset M$. Si $\{M_\alpha\}_\alpha \subset \mathcal{G}_M$ es una cadena, $\forall \alpha, M_\alpha \subset M \vee \exists \alpha \ni \ M \cup \{\psi(M)\} \subset M_\alpha$. Así pues $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha \subset M \vee M \cup \{\psi(M)\} \subset \bigcup\limits_\alpha M_\alpha$, e. d., $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha \in \mathcal{G}_M$. Finalmente, sea $M' \in \mathcal{G}_M$. Si $M \cup \{\psi(M)\} \subset M'$, entonces $M \cup \{\psi(M)\} \subset M' \cup \{\psi(M')\}$. En caso contrario será $M' \subset M$. Como M es conj. medio, $M' \cup \{\psi(M')\} \subset M \vee M \subset M' \cup \{\psi(M')\}$. En el primer caso, ya tendríamos que $M' \ cup\{\psi(M')\} \in \mathcal{G}_M$. Veamos que pasa en el segundo caso. Tenemos $M' \subset M \subset M' \cup \{\psi(M')\}$. Se sigue que, o bien es $M = M'$ o bien $M = M' \cup \{\psi(M')\}$. Si se da la primera alternativa, resulta $M \cup \{\psi(M)\} \subset M' \cup \{\psi(M')\}$ y si se da la segunda, $M' \cup \{\psi(M')\} \subset M$. En todo caso $M' \cup \{\psi(M'\} \in \mathcal{G}_M$. Esto termina la demostración de que $\mathcal{G}_M$ es $\psi-$torre y el paso I está completo.

Paso II

Cada $M \in \mathcal{M}$ es un elemento medio.

Demostración

Para demostrar II consideramos $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M} \ : \ M \text{ es medio}\}$.
Probaremos que $\mathcal{G}$ es $\psi-$torre y así tendremos que $\mathcal{G} = \mathcal{M}$, lo que completará la demostración.
Desde luego, $\emptyset \in \mathcal{G}$. Sea $\{M_\alpha\}_\alpha$ una cadena en $\mathcal{G}$. Si $M \in \mathcal{M}$, como cada M_α es medio, o bien $\forall \alpha, M_\alpha \subset M$, o bien $\exists \alpha$ tal que $M \subset M_\alpha$.
Entonces. o bien $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha \subset M$, o bien $M \subset \bigcup\limits_\alpha M_\alpha$. Así pues, $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha \in \mathcal{G}$.
Finalmente, sea $M \in \mathcal{G}$. Hemos de ver que $M \cup \{\psi(M)\} \in \mathcal{G}$, o sea, que $M \cup \{\psi(M)\}$ es medio. Tomemos $M' \in \mathcal{M}$. Como M es medio, el paso I nos dice que, o bien $M' \subset M$, (y, por lo tanto, $M' \subset M \cup \{\psi(M)\}$) o bien $M \cup \{\psi(M)\} \subset M'$. Así queda visto que $M \cup \{\psi(M)\}$ es medio.