TEORÍA DE LA INTEGRAL Y LA MEDIDA

José García Cuerva
jose.garcia-cuerva@uam.es

LIBROS:

Folland. "Real Analysis"
Rudin. "Análisis real y complejo"
Stein & Shakarchi. "Real Analysis"

NOTA: $\boxed{\text{máx}\left\{0'3 * \text{Parcial} + 0'7 * \text{Final} \,,\, \text{Final}\right\}}$

CAPÍTULO 1 | MEDIDA

1. Introducción
2. Álgebras y σ-álgebras
   - Conjuntos de Borel
   - Conjuntos bien ordenados, números ordinales
   - Generación de $\sigma(\mathcal{E})$ a partir de $\mathcal{E}$
   - σ-álgebra producto
   - Semiálgebras y álgebras generadas por ella
3. Medidas
   - Medidas completas
   - Construcción de medidas: Caratheodory
   - La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$
   - Medidas de Borel en $\mathbb{R}$
   - Medidas de Lebesgue-Stieltjes
4. Conjunto de Cantor

INTRODUCCIÓN

Recordemos la integral de Riemann:

Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Para cada partición $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ del intervalo $[a,b]$ definimos:

- La suma superior: $S(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$ con $M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $1\leq i\leq n$
- La suma inferior: $I(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$ con $m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $1\leq i\leq n$
- Integrales suma superior e inferior, respectivamente:

$$\overline{\int_a^b} f\,dx=\inf_P S(P,f) \quad , \quad \underline{\int_a^b} f\,dx=\sup_P I(P,f)$$

Diremos que f es INTEGRABLE RIEMANN en $[a,b]$ $(f\in\mathcal{R}) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \overline{\int_a^b} f\,dx=\underline{\int_a^b} f\,dx.$$

Queremos medir conjuntos cualesquiera. Buscamos $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tal que:

i) σ-aditividad: $A_1, A_2, \dots$ sucesión infinita numerable de conjuntos disjuntos, entonces: $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots$

ii) μ debe ser invariante por traslaciones, rotaciones y traslaciones

iii) Normalización: $\mu(Q) = 1$ con $Q = [0,1]^n$

Este programa resulta imposible: no existe una aplicación definida en todo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaga estas 3 propiedades. (Contraejemplo por Giuseppe Vitali).

Si se reemplaza la σ-aditividad por aditividad finita también resulta imposible (contraejemplo por Banach-Tarski).

ÁLGEBRAS Y σ-ÁLGEBRAS

DEFINICIÓN: Sea $X \neq \emptyset$. Un ÁLGEBRA de subconjuntos de X es una colección no vacía $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones finitas:
para cada familia finita $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

ii) $\mathcal{A}$ es cerrada por complementarios:
para cada $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \equiv \complement A \equiv X \setminus A \in \mathcal{A}$.

DEFINICIÓN: Sea $X \neq \emptyset$. Una σ-ÁLGEBRA de subconjuntos de X es una colección no vacía $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple las dos propiedades siguientes:

i) $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones infinito-numerables: para cada familia finito-numerable $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow$
$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

ii) $\mathcal{A}$ es cerrada por complementarios: para cada $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

DEFINICIÓN: Dada una familia cualquiera $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, se llama ÁLGEBRA (resp. σ-ÁLGEBRA) GENERADA por $\mathcal{F}$ a la intersección de todas las álgebras (resp. σ-álgebras) de subconjuntos de X que contienen a $\mathcal{F}$. De otra forma, es la MÍNIMA álgebra (resp. σ-álgebra) que contiene a $\mathcal{F}$.
Se denota por $\sigma(\mathcal{F})$ a la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$.

LEMA: $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F}) \iff \mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F})$

DEFINICIÓN: Dado un espacio métrico, o con más generalidad, espacio topológico podemos considerar su topología τ_X, que es la familia de todos los subconjuntos abiertos de X.
Llamamos σ-ÁLGEBRA DE BOREL DE X a la σ-álgebra generada por la colección τ_X de los conjuntos abiertos de X. Se le suele denotar por $\mathcal{B}_X$ y a sus conjuntos se les llama conjuntos de Borel de X. Tenemos pues
$$\mathcal{B}_X = \sigma(\tau_X).$$

PROPOSICIÓN: Cada una de las siguientes familias de subconjuntos de la recta real $\mathbb{R}$ genera la σ-álgebra de Borel de la recta $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

a) Intervalos abiertos: $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

b) Intervalos cerrados: $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

c) Intervalos semiabiertos: $\mathcal{E}_3 = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

$$\mathcal{E}_4 = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$$

d) Rayos abiertos: $\mathcal{E}_5 = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$

$$\mathcal{E}_6 = \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$$

e) Rayos cerrados: $\mathcal{E}_7 = \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$

$$\mathcal{E}_8 = \{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\}$$

DEFINICIÓN: Llamaremos ESPACIO MEDIBLE a un par $(X,\mathcal{A})$ formado por un conjunto no vacío X y una σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

DEFINICIÓN: Sea una familia de conjuntos no vacíos $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y suponemos que para cada $\alpha \in \Lambda$ nos dan una σ-álgebra $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{P}(X_\alpha)$. En otras palabras, tenemos una colección $(X_\alpha,\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de espacios medibles.

En el producto cartesiano $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ consideramos la σ-ÁLGEBRA PRODUCTO $\bigotimes_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{A}_\alpha$, que es por definición la σ-álgebra de subconjuntos de X generada por la colección de conjuntos $\{\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) : A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha,\ \alpha\in\Lambda\}$, donde π_α son las proyecciones

$$X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} X_\alpha$$
$$\bar{x} = (\bar{x}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \longmapsto \bar{x}_\alpha$$

Diremos que $\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{A}_\alpha\right)$ es el ESPACIO MEDIBLE PRODUCTO.

DEFINICIÓN: Diremos que una familia de conjuntos $S \subset \mathcal{P}(X)$ es una SEMIÁLGEBRA si y solo si cumple las siguientes propiedades:

i) $\emptyset \in S$.

ii) Si $E, F \in S \Longrightarrow E \cap F \in S$.

iii) Si $E \in S \Longrightarrow E^c$ es unión finita disjunta de $\underbrace{\text{'miembros'}}_{\text{conjuntos}}$ de S.

TEOREMA: Si $S \subset \mathcal{P}(X)$ es una semiálgebra, el álgebra generada por S, que denotaremos por $\mathcal{A}(S)$ coincide exactamente con la colección $\mathcal{C}(S)$ de los subconjuntos de X que se pueden poner como unión de alguna familia finita de conjuntos pertenecientes a S y disjuntos dos a dos.

MEDIDAS

DEFINICIÓN: Dado un espacio medible $(X, \mathcal{M})$, se le llama MEDIDA en $(X, \mathcal{M})$ a cualquier aplicación $\mu: \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ que cumpla las dos propiedades siguientes:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- para cada sucesión $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ de conjuntos de $\mathcal{M}$ disjuntos dos a dos se cumple que $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$

Esta segunda propiedad se conoce como σ-aditividad o aditividad completa. Se dice que μ es σ-aditiva o completamente aditiva.

DEFINICIÓN: Un espacio medible $(X, \mathcal{M})$ junto con una medida definida en él, se conoce como ESPACIO DE MEDIDA $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Los conjuntos de $\mathcal{M}$ se llaman medibles y se miden con la medida μ.

VARIAS PEQUEÑAS DEFINICIONES: Sea μ una medida en $(X, \mathcal{M})$.

i) Se dice que μ es una MEDIDA FINITA, o que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un ESPACIO DE MEDIDA FINITO si $\mu(X) < \infty$.
En el caso particular de que $\mu(X) = 1$, se dice que μ es una MEDIDA DE PROBABILIDAD o que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un ESPACIO DE (MEDIDA DE) PROBABILIDAD.

ii) Si $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ donde $E_j \in \mathcal{M}$ $\forall j$ y $\mu(E_j) < \infty$ $\forall j$, se dice que μ es una MEDIDA σ-FINITA o que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un ESPACIO DE MEDIDA σ-FINITO. En general, si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ donde $E_j \in \mathcal{M}$ $\forall j$ y $\mu(E_j) < \infty$ $\forall j$, se dice que E es σ-FINITO para μ.

iii) Si para cada $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{M}$ con $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$, se dice que μ es una MEDIDA SEMIFINITA o que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un ESPACIO DE MEDIDA SEMIFINITO.

TEOREMA: Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.

a) MONOTONÍA: Si $E, F \in \mathcal{M}$ y $E \subset F \Rightarrow \mu(E) < \mu(F)$.
Además, si $\mu(F) < \infty \Rightarrow \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

b) SUBADITIVIDAD: Si $E_j \in \mathcal{M}$ $\forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$

c) CONTINUIDAD POR ABAJO / CONTINUIDAD INFERIOR: Si $E_j \in \mathcal{M}$ $\forall j \in \mathbb{N}$ y $E_j \subset E_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j)$. Abrev: $E_j \uparrow E \Rightarrow \mu(E_j) \uparrow \mu(E)$.
Se dice que μ es continua inferiormente en E.

d) CONTINUIDAD POR ARRIBA / CONTINUIDAD SUPERIOR: Si $E_j \in \mathcal{M}$ $\forall j \in \mathbb{N}$, $E_{j+1} \subset E_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$ y $\mu(E_1) < \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j)$. Abrev: $(E_j \downarrow E) \wedge \mu(E_1) < \infty \Rightarrow \mu(E_j) \downarrow \mu(E)$ y se dice que es continua inferiormente en E.

DEFINICIÓN: Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.
Si $E \in \mathcal{M}$ tiene $\mu(E) = 0$, diremos que E es un conjunto μ-NULO, o simplemente NULO si no hay ambigüedad posible.
Si una proposición sobre $x \in X$ es verdadera salvo para algún x en algún conjunto nulo, diremos que es cierta para CASI TODO PUNTO, o en CASI TODO X o en μ-CASI TODO PUNTO.

DEFINICIÓN: Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Diremos que es COMPLETO o que μ es COMPLETA si y sólo si cada vez que tengamos un conjunto μ-nulo E y $F \subset E$, se verifica que $F \in \mathcal{M}$ y F es también un conjunto μ-nulo.
μ completa $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{M}$ incluye todos los subconjuntos de conjuntos nulos.

T^ma de completación

TEOREMA: Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Llamemos $\mathcal{N}$ a la familia de los conjuntos μ-nulos y sea $\overline{\mathcal{M}}$ tal que:
$\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}$ y $F \subset N$ para algún $N \in \mathcal{N}\}$. Entonces $\overline{\mathcal{M}}$ es una σ-álgebra y existe una única extensión $\bar{\mu}$ de μ tal que $\bar{\mu}$ es completa en $\overline{\mathcal{M}}$.

MEDIDAS EXTERIORES

DEFINICIÓN: Una MEDIDA EXTERIOR en un conjunto X es una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ que cumple las siguientes propiedades:

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) Si $E_1 \subset E_2 \Longrightarrow \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$

iii) $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)$

Próximamente enunciaremos el teorema de Caratheodory, que a partir de una medida exterior nos permitirá obtener una medida completa definida en una cierta σ-álgebra contenida en $\mathcal{P}(X)$.

La clave del éxito del método de Caratheodory es que, mientras definir directamente una medida no es fácil, la construcción de una medida exterior es siempre sencilla, como afirma la siguiente proposición.

<u>PROPOSICIÓN</u>: Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{E}$. Supongamos que $\varphi: \mathcal{E} \longrightarrow [0,\infty]$ satisface $\varphi(\emptyset) = 0$ y definimos $\forall A \in \mathcal{P}(X)$:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(F_j) : (F_j \in \mathcal{E} \ \forall j \in \mathbb{N}) \wedge \left(A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\right)\right\}$$

Entonces μ^* es una medida exterior en X.

<u>DEFINICIÓN</u>: Sea μ^* una medida exterior en X. Se dice que $E \subset X$ es μ^*-MEDIBLE si:

$$\forall A \subset X, \ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Es decir: la medida exterior de cualquier conjunto se reparte bien entre E y su complementario.

<u>TEOREMA DE CARATHEODORY</u>: Dada una medida exterior μ^* en X, la colección $\mathcal{M}$ de los subconjuntos de X que son μ^*-medibles es una σ-álgebra y $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ (restricción de μ^* a $\mathcal{M}$) es una medida μ, que, además, es completa.

Nuestras primeras aplicaciones del T^{ma} de Caratheodory van a ser con el objetivo de extender medidas desde álgebras a σ-álgebras.

<u>DEFINICIÓN</u>: Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra de subconjuntos de X. Llamaremos PREMEDIDA sobre $\mathcal{A}$ a cualquier aplicación $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ que sea σ-aditiva, es decir, que cumpla las siguientes propiedades:

- $\mu_0(\emptyset) = 0$
- Si $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ es una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos pertenecientes a $\mathcal{A}$ para la cual se tiene que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, entonces $\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$.

En particular, una premedida es finitamente aditiva ya que uno puede coger $A_j = \emptyset$ para j grande. Y por tanto, monótona.
Para las premedidas tienen sentido las nociones de "finita" y "σ-finita", que se definen exactamente igual que para las medidas.
Lo único que le falta a una premedida para ser una medida es estar definida en una σ-álgebra.
A continuación, vamos a ver como, usando el T^{ma} de Caratheodory se extiende cualquier premedida definida en un àlgebra $\mathcal{A}$ a una medida de la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.

PROPOSICIÓN: Sea μ_0 una premedida definida sobre el álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X. Entonces, si para cada $E \subset X$ definimos: $\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) : (A_j \in \mathcal{A} \ \forall j \in \mathbb{N}) \wedge (E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)\right\}$ [1] resulta que μ^* es una medida exterior sobre X que, además, cumple las dos propiedades siguientes:

a) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$

b) Todo conjunto perteneciente a $\mathcal{A}$ es μ^*-medible.

TEOREMA: Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra y sea μ_0 una premedida definida en $\mathcal{A}$. Llamaremos $\mathcal{M}$ a la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ (e.d., $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$). Entonces:

a) Existe una medida μ en $\mathcal{M}$ cuya restricción a $\mathcal{A}$ es μ_0. Concretamente $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$, donde μ^* esta por [1]

b) Si ν es otra medida en $\mathcal{M}$ que es extensión de μ_0, se verifica que $\nu(E) \leq \mu(E)$ $\forall E \in \mathcal{M}$, con igualdad cuando $\mu(E) < \infty$.

c) Si μ_0 es σ-finita, μ es la única medida que extiende μ_0 a $\mathcal{M}$.

LA MEDIDA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}$

Ya hemos llegado al punto culminante de este capítulo: la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Se trata de conseguir una medida, que extienda a los conjuntos de una σ-álgebra lo más grande posible, la idea de longitud de intervalo.

Empecemos con la semiálgebra:

$$S_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a<b\} \cup \{(-\infty,b],\ b\in\mathbb{R}\} \cup \{(a,\infty),\ a\in\mathbb{R}\}$$

En esta semiálgebra es fácil dar una función de conjunto que asigne a cada intervalo su longitud: definimos μ_1

$$(*)\ \mu_1((a,b]) = b-a \ , \quad \mu_1((-\infty,b]) = \mu_1((a,\infty)) = \mu_1(\mathbb{R}) = \infty \ , \quad \mu_1(\emptyset) = 0$$

Si conseguimos extender μ_1 al álgebra $\mathcal{A}(S_1)$ generada por S_1 de manera que la extensión sea σ-finita, el T^ma^ de Caratheodory nos daría una medida en una σ-álgebra que contendría a la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}(S_1)$, que es, precisamente, la σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$.

Para realizar la extensión vemos que μ_1 es aditiva en S_1.
Sabiendo esto, nos será útil el siguiente teorema.

<u>TEOREMA</u>: Sea $\mu : S \longrightarrow [0,\infty]$ una función de conjunto aditiva definida en una semiálgebra $S \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces existe una única $\nu : \mathcal{A}(S) \longrightarrow [0,\infty]$ aditiva que extiende μ al álgebra $\mathcal{A}(S)$, e.d., $\forall S \in S\ \ \nu(S) = \mu(S)$.
Además, si μ es σ-aditiva $\Longrightarrow \nu$ es también σ-aditiva.

Como consecuencia del último teorema, lo único que nos queda para tener asegurada la existencia de la medida de Lebesgue, e.d., la extensión de la longitud (*) anterior a una medida en la σ-álgebra de Borel $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ es la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN: La función de conjunto μ_1 dada en (*) es σ-aditiva en la semiálgebra S_1 definida anteriormente.

Después de la demostración del teorema, hay que recordar que, puesto que hemos usado el T^{ma} de Caratheodory para extender ν_1, el resultado final será una medida completa, a la que llamaremos m_1 o m cuando no haya confusión, que es lo que propiamente llamaremos MEDIDA DE LEBESGUE en $\mathbb{R}$.

Esta medida m_1 estará definida en la σ-álgebra de los conjuntos ν_1^*-medibles. Esta σ-álgebra la designaremos por $\mathcal{L}_1$ ó $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, y a sus conjuntos MEDIBLES DE LEBESGUE.

Obs: $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

A ν_1^* le llamaremos MEDIDA EXTERIOR DE LEBESGUE y la denotaremos por m^* ó λ^*.

Medidas de Borel en $\mathbb{R}$

El procedimiento utilizado para definir la medida de Lebesgu se puede generalizar para definir cualquier medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ que sea finita sobre compactos.

<u>Motivación</u>: Sea μ medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ finita. A μ le podemos asociar una función $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiendo $F(x) = \mu((-\infty, x]) \forall$
Podemos recuperar μ a partir de F:

$$\mu((a,b]) = \mu((-\infty,b] \setminus (-\infty,a]) = \mu((-\infty,b]) - \mu((-\infty,a]) = F(b) - F(a)$$

Entonces, nuestro objetivo es empezar con F para construir la medida $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$, definida en la semiálgebra S

<u>PROPIEDADES</u> de F que proviene de una medida de Borel finita μ:

- <u>CRECIENTE</u>: $x < y \Longrightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Longrightarrow F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq$
  $\leq F(y) = \mu((-\infty, y])$
- <u>CONTINUA POR LA DERECHA</u>: Si $x_j \downarrow x$ se tiene que:

$$(-\infty, x] = \bigcap_{j=1}^{\infty} (-\infty, x_j] \Longrightarrow F(x) = \mu((-\infty, x]) =$$
$$= \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} (-\infty, x_j]\right) = \lim_{j \to \infty} \mu((-\infty, x_j]) = \lim_{j \to \infty} F(x_j)$$

<u>TEOREMA</u>: Sea $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ creciente continua por la derecha. Existe una única medida de Borel m_F en $\mathbb{R}$ tal que $m_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Si $G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra función creciente cont. der. $\Longrightarrow (m_F = m_G \Longleftrightarrow F - G$ es const.$)$. Recíprocamente, si μ es cualquier medida de Borel localmente finita en $\mathbb{R}$, y definimos:

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\mu((x,0)) & \text{si } x < 0 \end{cases} \Longrightarrow F \text{ creciente, cont. der. y } \mu = m_F.$$

Tras la demostración del teorema anterior (no recogida pero instructiva), obtenemos la medida de Borel m_F asociada a F. Esta nos da algo más ya que el último paso, donde se usa el teorema de Caratheodory para extender la premedida ν_F desde el álgebra $\mathcal{A}(S_1)$, nos permite obtener una medida completa λ_F definida en la σ-álgebra $\mathcal{M}_F$ de los conjuntos medibles para la medida exterior ν_F^* definida a partir de ν_F mediante:

$$\nu_F^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \nu_F(A_j) : (A_j \in \mathcal{A}(S_1)\ \forall j \in \mathbb{N}) \wedge \left(E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right\}$$

A la medida $\lambda_F = \nu_F^*\big|_{\mathcal{M}_F}$ se le llama MEDIDA DE LEBESGUE-STIELGES asociada a F.

A partir de la definición de ν_F^* y del hecho de que los conjuntos de $\mathcal{A}(S_1)$ son uniones finitas de intervalos semiabiertos vemos que $\forall E \subset \mathcal{M}_F$, $\lambda_F(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j)-F(a_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]\right\}$

<u>Obs</u>: Deberíamos llamar a la medida completa de Lebesgue λ_1 (o λ), ya que es un caso particular de medida de Lebesgue-Stieltjes.

La notación m_1 (o m) deberíamos reservarla para la medida de Lebesgue restringida a $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

A continuación vamos a estudiar las propiedades de regularidad de las medidas de Lebesgue-Stieltjes, que son muy útiles y se aplican, en particular, a la medida de Lebesgue.

μ a partir de ahora será la medida de Lebesgue-Stieltjes.

Estará asociada a la función F creciente y cont. der.

$\mathcal{M}_\mu$ será como llamaremos a la σ-álgebra donde está μ.

Lo fundamental:

$$\forall E \in \mathcal{M}_\mu, \ \mu(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j, b_j]) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]\right\}$$

<u>LEMA</u>: Podemos reemplazar los intervalos semiabiertos por abiertos

$$\forall E \in \mathcal{M}_\mu, \ \mu(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j, b_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right\}$$

<u>TEOREMA</u>: $\forall E \in \mathcal{M}_\mu, \ \mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \wedge U \text{ abierto}\} =$

$$= \sup\{\mu(K) : K \subset E \wedge K \text{ compacto}\}$$

<u>TEOREMA</u>: Para $E \subset \mathbb{R}$, las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $E \in \mathcal{M}_\mu$

b) $E = V \setminus N_1$ donde V es un G_δ, o sea, una intersección numerable de abiertos, y $\mu(N_1) = 0$.

c) $E = H \cup N_2$, donde H es un F_σ, o sea, una unión numerable de cerrados, y $\mu(N_2) = 0$.

TEOREMA: Si $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, entonces:

- $\forall s \in \mathbb{R}$, $E+s \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ y $\lambda(E+s) = \lambda(E)$
- $\forall r \in \mathbb{R}$, $rE \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ y $\lambda(rE) = |r|\lambda(E)$

Ejemplo interesante: Conjunto de Cantor: conjunto compacto totalmente inconexo sin puntos aislados con cardinal igual al de los reales (continuo) pero con medide de Lebesgue nula. [Más información en las diapositivas $\longrightarrow$ FUNCIÓN CANTOR-LEBESGUE]

CAPÍTULO 2 | INTEGRAL

1. Funciones medibles
2. Integración de funciones no negativas

FUNCIONES MEDIBLES

DEFINICIÓN: Sean $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles y sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-MEDIBLE si y solo si $\forall E \in \mathcal{N}$ $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

PROPOSICIÓN: Si $\mathcal{N}$ es generada por $\mathcal{E}$ $(\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E}))$, entonces $f: X \longrightarrow Y$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-medible $\Longleftrightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ $\forall E \in \mathcal{E}$.

DEFINICIÓN: Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Entonces:

- Diremos que una función real $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{M}$-MEDIBLE si es una aplicación $(\mathcal{M}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$-medible.
- Diremos que una función compleja $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathcal{M}$-MEDIBLE si es una aplicación $(\mathcal{M}, \mathbb{B}_{\mathbb{C}})$-medible.
- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice LEBESGUE-MEDIBLE $\Longleftrightarrow$ es $(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$-medible y se dice que es BOREL-MEDIBLE si es $(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$-medible.
- Análogo con $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$:

  LEBESGUE-MEDIBLE $\Longleftrightarrow (\mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \mathbb{B}_{\mathbb{C}})$-medible

  BOREL-MEDIBLE $\Longleftrightarrow (\mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{B}_{\mathbb{C}})$-medible.

PROPOSICIÓN: Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea $f: X \to \mathbb{R}$ una función real. Entonces, las siguientes prop. son equivalentes

a) f es $\mathcal{M}$-medible.

b) $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.

c) $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([a, \infty)) = \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$.

d) $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, a)) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M}$.

e) $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, a]) = \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$.

PROPOSICIÓN: Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y supongamos que, para cada $\alpha \in J$ tenemos un espacio medible $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$. Podemos formar el espacio medible producto $(Y, \mathcal{N})$ donde $Y = \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha$ y $\mathcal{N} = \bigotimes_{\alpha \in J} \mathcal{N}_\alpha$. También tenemos las apl. coordenadas $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$ $\forall \alpha \in J$.

Entonces $f: X \to Y$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-medible $\iff$

$\iff \forall \alpha \in J$, $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$-medible.

COROLARIO: $f: X \to \mathbb{C}$ es $\mathcal{M}$-medible $\iff Re(f)$ y $Im(f)$ son $\mathcal{M}$-medibles.

DEFINICIÓN: Diremos que $f: X \to \overset{\mathbb{R} \cup \{\infty\}}{\overset{\parallel}{\overline{\mathbb{R}}}}$ es $\mathcal{M}$-medible si es $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-medible.

PROPOSICIÓN: Si $f, g : X \to \mathbb{C}$ son $\mathcal{M}$-medibles, entonces también son $\mathcal{M}$-medibles $f+g$ y fg.

PROPOSICIÓN: Si f_j con $j \in \mathbb{N}$ es una sucesión de funciones medibles de $(X, \mathcal{M})$ en $\overline{\mathbb{R}}$, entonces las funciones

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x) \qquad g_2(x) = \sup_j f_j(x)$$

$$g_3(x) = \lim_{j \to \infty} \sup f_j(x) = \overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(x) \qquad g_4 = \lim_{j\to\infty} \inf f_j(x) = \underline{\lim_{j\to\infty}} f_j(x)$$

son todas medibles. también vale para una suc. de func. complejas

Además si $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ existe $\forall x \in X \Rightarrow f$ es medible.

COROLARIO: Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ son medibles $\Rightarrow \max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son medibles.

DEFINICIÓN: Dada $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ definimos:

- PARTE POSITIVA: $f^+(x) = \max(f(x), 0)$
- PARTE NEGATIVA: $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$

Obs: $f^+, f^- \geq 0$

Obs: $f = f^+ - f^-$ y además f medible $\Rightarrow f^+$ y f^- medibles.

Obs: $|f| = f^+ + f^-$ y además f medible $\Rightarrow |f|$ medible.

DEFINICIÓN: $f: X \to \mathbb{C}$, su DESCOMPOSICIÓN POLAR es:

$$f = (\operatorname{sgn} f)|f| \quad \text{donde} \quad \operatorname{sgn} z = \begin{cases} z/|z| & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

DEFINICIÓN: Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Para cada $E \subset X$ se define la FUNCIÓN CARACTERÍSTICA χ_E de E mediante:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

FUNCIÓN INDICADORA EN T^a PROBABILIDAD

$$\chi_E(x) \equiv \mathbb{1}_E(x)$$

DEFINICIÓN: Una FUNCIÓN SIMPLE en un espacio medible $(X,\mathcal{M})$ es una combinación lineal finita con coef. complejos de funciones características de conjuntos medibles, e.d.:

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \quad \text{con} \quad a_j \in \mathbb{C} \ \text{ y } \ E_j \in \mathcal{M} \ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

TEOREMA: Sea $(X,\mathcal{M})$ un espacio medible. Entonces:

a) Si $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ es medible, existe una sucesión $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ de funciones simples tales que $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \cdots \leq f$, $\varphi_n \longrightarrow f$ puntualmente y $\varphi_n \longrightarrow f$ uniform. en cualquier conjunto en el que f sea acotada.

b) Si $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible, existe una sucesión $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ de funciones simples tales que $0 \leq |\varphi_0| \leq |\varphi_1| \leq \cdots \leq |f|$, $\varphi_n \longrightarrow f$ puntualmente y $\varphi_n \longrightarrow f$ uniform. en cualquier conjunto en el que f sea acotada.

PROPOSICIÓN: Sea $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

a) La medida μ es completa.

b) Si f es medible y $f=g$ en casi todo punto respecto a μ, se sigue que g es medible.

c) Si f_n es medible para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f_n \longrightarrow f$ en casi todo punto con respecto a μ, se sigue que f es medible.

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES NO NEGATIVAS

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida que mantendremos fijo en toda la sección.

Llamaremos $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ al espacio formado por todas las funciones $f: X \longrightarrow [0, \infty]$ que sean medibles.

Vamos a empezar integrando las funciones simples pertenecientes a $\mathcal{L}^+$. Está claro que si tenemos una función simple $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, su integral debería ser $\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$. Pero aquí tenemos una dificultad: la función simple φ puede describirse de varias maneras como comb. lineal de funciones características. Tenemos que escoger una representación.

DEFINICIÓN: $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{C}$ función simple.

$(a_j)_{j=1}^{n}$ los valores distintos que toma y si para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ $E_j = \varphi^{-1}(a_j)$, llamaremos REPRESENTACIÓN CANÓNICA o ESTÁNDAR de φ a la expresión $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$.

Por ejemplo, si φ toma el valor 0, su representación canónica contiene $0 \cdot \chi_{\varphi^{-1}(0)}$.

La representación canónica de φ se caracteriza porque los a_j son todos distintos y los E_j forman una partición de X, e.d., disjuntos y $X = \biguplus_{j=1}^{\infty} E_j$

Ahora podemos definir la INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN SIMPLE como

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

DEFINICIÓN: Si $\varphi \geq 0$ es una función simple y $A \in \mathcal{M}$, como $\varphi\chi_A$ es, también, una función simple de $\mathcal{L}^+$, tiene sentido definir: $\int_A \varphi\, d\mu = \int_A \varphi = \int_A \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_X \varphi\chi_A\, d\mu$

PROPOSICIÓN: $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k)$

PROPOSICIÓN: Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^+$ funciones simples. Entonces:

a) $\forall c \geq 0$, $\int_X c\varphi\, d\mu = c\int_X \varphi\, d\mu$

b) $\int_X (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu + \int_X \psi\, d\mu$

c) $\varphi \leq \psi \Longrightarrow \int_X \varphi\, d\mu \leq \int_X \psi\, d\mu$

d) La aplicación $A \longmapsto \int_A \varphi\, d\mu$ es medida en $\mathcal{M}$.

DEFINICIÓN: Para $f \in \mathcal{L}^+$ definimos:

$$\int_X f\, d\mu = \sup\left\{ \int_X \varphi\, d\mu : \varphi \text{ simple tal que } 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

TEOREMA (de la CONVERGENCIA MONÓTONA): Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones $\mathcal{L}^+$ que es monótona creciente, e.d., que cumple que $\forall j \in \mathbb{N}$, $f_j \leq f_{j+1}$, y si $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, entonces $\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$

TEOREMA: Si $(f_n)_{n=1,\dots}$ es una sucesión finita o infinita de funciones $\mathcal{L}^+$ y si $f=\sum_n f_n$, entonces:

$$\int_X f\,d\mu = \sum_n \int_X f_n\,d\mu, \text{ e.d., } \int_X \sum_n f_n\,d\mu = \sum_n \int_X f_n\,d\mu$$

PROPOSICIÓN: Si $f\in\mathcal{L}^+$, entonces $\int_X f\,d\mu = 0 \iff f=0$ en casi todo punto respecto a μ.

COROLARIO: Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{L}^+$ que crecen en casi todo punto a $f\in\mathcal{L}^+$, entonces:

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

LEMA (de Fatou): Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{L}^+$, entonces $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

COROLARIO: Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{L}^+$ y sea $f\in\mathcal{L}^+$. Supongamos que $f_n\longrightarrow f$ en casi todo punto con respecto a μ. Entonces $\int_X f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

PROPOSICIÓN: Si $f\in\mathcal{L}^+$ y $\int_X f\,d\mu<\infty$, entonces $\{x\in X : f(x)=\infty\}$ es un conjunto nulo respecto a μ y $\{x\in X: f(x)>0\}$ es σ-finito respecto a μ.

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES COMPLEJAS

Definición: Para $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definimos $\overbrace{f^+(x) = (f(x))^+}^{\text{parte positiva}}$ y $\underbrace{f^-(x) = (f(x))^-}_{\text{parte negativa}}$. Desde luego, si f es medible, ya sabemos que f^+ y f^- lo son.

Proposición: $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se cumple:

i) $f = f^+ - f^-$

ii) Si $f = g - h$ con $g, h \geq 0$, entonces $f^+ \leq g$ y $f^- \leq h$.

iii) $|f| = f^+ + f^-$

iv) Si $f \leq g \Longrightarrow (f^+ \leq g^+) \wedge (f^- \geq g^-)$

Definición: $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, definimos la integral como

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

si al menos una de las integrales del segundo miembro es finita.

Si ambas son finitas diremos que f es INTEGRABLE y, si además, f toma solo valores reales, escribiremos $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{M}, \mu)$. Si no hay dudas, $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu)$

Para $E \in \mathcal{M}$, la integral sobre E se define considerando el espacio de medida relativo $(E, \mathcal{M}|_E, \mu|_E)$.

Proposición: Para f medible real, $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff \int_X |f| d\mu < \infty$

Proposición: Para toda $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ (en general para toda f medible con integral) se tiene que $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$.

Definición: Sea $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Diremos que f es integrable y escribiremos $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ si y solo si $Re(f)$ y $Im(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.
En este caso, definiremos la integral de f mediante

$$\int_X f d\mu = \int_X Re(f) d\mu + \int_X Im(f) d\mu$$

⊛ Para f medible compleja, $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff \int_X |f| d\mu < \infty$.

Proposición:

a) Si $f \in \mathcal{L}^1$, entonces $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es σ-finito.

b) Si $f, g \in \mathcal{L}^1$, entonces:

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M} \iff \int_X |f - g| d\mu = 0 \iff f = g \text{ en casi todo pto}$$

Esta proposición muestra que si dos funciones son iguales salvo por conjuntos de medida cero, sus integrales coinciden. Esto nos lleva a definir $L^1(\mu)$, que es el conjunto de clases de equivalencia de funciones definidas en casi todo punto e integrables. $f \sim g \iff f = g$. c.t.pto.

Convergencia en $L^1(\mu)$:

$$f_n \to f \iff \int |f_n - f| \longrightarrow 0$$

TEOREMA (de CONVERGENCIA DOMINADA):

Sean $f_n \in L^1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, tales que:

a) $f_n \longrightarrow f$ en casi todo punto, y

b) $\exists\, g \geq 0 \in L^1(\mu)$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ c.t. pto.

Entonces $f \in L^1$ y $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$.

TEOREMA: Sean $f_j \in L^1$ $\forall j \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X |f_j| \, d\mu < \infty$.

Entonces:

a) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge en c.t. pto. a una función $f \in L^1$.

b) $\int_X f \, d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j \, d\mu$

c) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge a f en L^1, e.d.,

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{\infty} f_j \right\|_1 = \int_X \left| f - \sum_{j=1}^{\infty} f_j \right| \longrightarrow 0 \quad \text{para } n \to \infty.$$

En particular, c) implica que L^1 es un espacio de Banach, e.d., un espacio normado completo.

α

TEOREMA: Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Se cumple que:

a) Si f es integrable Riemann, entonces f es medible Lebesgue (e integrable en $[a,b]$ puesto que es acotada) y $\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx$, es decir, las integrales de Riemann y de Lebesgue coinciden.

b) f es integrable Riemann si y solo si el conjunto de puntos de $[a,b]$ donde f no es continua tiene medida de Lebesgue cero.

PRODUCTO DE ESPACIO DE MEDIDA

Dados dos espacios de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ queremos construir un espacio de medida producto. Ya conocemos $X \times Y$ y $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, de modo que sólo nos queda especificar lo que ha de ser la medida producto.

[...] $\longrightarrow$ diap. Cuerva

DEFINICIÓN: Dados dos espacios de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ y dado un conjunto $E \subset X \times Y$, definiremos, para cada $x \in X$, la x-sección de E, a la que llamaremos E_x, mediante $E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\} \subset Y$; y para cada $y \in Y$, definiremos la y-sección de E, a la que llamaremos E^y, mediante $E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\} \subset X$

PROPOSICIÓN:

a) Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, entonces $E_x \in \mathcal{N}$ $\forall x \in X$ y $E^y \in \mathcal{M}$ $\forall y \in Y$.

b) Si f es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-medible, entonces f_x es $\mathcal{N}$-medible $\forall x \in X$ y f^y es $\mathcal{M}$-medible $\forall y \in Y$.

TEOREMA: Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, entonces las funciones:

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow [0,\infty] \\ x &\longmapsto \nu(E_x) \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} Y &\longrightarrow [0,\infty] \\ y &\longmapsto \mu(E^y) \end{aligned}$$

son medibles en X e Y respectivamente y

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$$

TEOREMA DE FUBINI-TONELLI

TEOREMA DE TONELLI: Si $f \in \mathcal{L}^+(X \times Y)$, entonces las funciones $g(x) = \int_Y f_x\, d\nu$ y $h(y) = \int_X f^y\, d\mu$ están en $\mathcal{L}^+(X)$ y $\mathcal{L}^+(Y)$ respectivamente y:

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

TEOREMA DE FUBINI: Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces $f_x \in L^1(\nu)$ c.t. pto. $x \in X$ con respecto a μ, $f^y \in L^1(\mu)$ c.t. pto. $y \in Y$ con resp. a ν. Además las funciones definidas en c.t. pto $g(x) = \int_Y f_x\, d\nu$ y $h(y) = \int_X f^y\, d\mu$ están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente y:

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

TEOREMA DE FUBINI-TONELLI PARA MEDIDAS COMPLETAS

Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos completos y sea $(X\times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ el completado del espacio de medida producto $(X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}, \mu\times\nu)$. Si f es $\mathcal{L}$-medible y, o bien es $f\geq 0$ (caso a) o bien $f\in L^1(\lambda)$ (caso b), entonces f_x es $\mathcal{N}$-medible para casi todo x, f^y es $\mathcal{M}$-medible para casi todo y y, en el caso b, también f_x y f^y son integrables para casi todo x e y respectivamente. Además, las aplicaciones $x \longmapsto \int_Y f_x\, d\nu$ e $y \longmapsto \int_X f^y\, d\mu$ son medibles y, en el caso b, también integrables y:

$$\int_{X\times Y} f\, d\lambda = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x)$$

LA INTEGRAL DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^n$

<u>DEFINICIÓN</u>: La medida de Lebesgue λ^n en $\mathbb{R}^n$ es la completación de la medida producto $\underbrace{m\times m\times\cdots\times m}_{n \text{ factores}}$ en $\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\cdots\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n \text{ factores}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ o lo que es lo mismo, la completación de la medida producto $\underbrace{\lambda\times\lambda\cdots\times\lambda}_{n \text{ factores}}$ en $\underbrace{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\times\cdots\times\mathcal{L}_{\mathbb{R}}}_{n \text{ factores}}$. A la σ-álgebra en la que está definida λ^n la denotaremos por $\mathcal{L}^n$ o $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ y si $E\in\mathcal{L}^n$, diremos que E es un conjunto medible de Lebesgue o Lebesgue medible en $\mathbb{R}^n$. A veces denotaremos la restricción de λ^n a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}^n$, que no es otra que $\underbrace{m\times\cdots\times m}_{n \text{ factores}}$ por m^n.

Y tal como hacíamos en el caso $n=1$, pondremos $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ en lugar de $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda^n$.

TEOREMA (regularidad de λ^n): Sea $E \in \mathcal{L}^n$. Entonces:

a) $\lambda(E) = \inf\{m(U) : E \subset U,\ U \text{ abierto}\} = \sup\{m(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$

b) $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \setminus N_2$, donde A_1 es un F_σ, A_2 es un G_δ y $\lambda(N_1) = \lambda(N_2) = 0$.

c) Si $\lambda(E) < \infty$, se tiene que $\forall \varepsilon > 0$, existe una colección finita $(R_j)_{j=1}^{N}$ de rectángulos disjuntos, cuyos lados (o factores) son intervalos, tales que $\lambda\left(E \,\Delta\, \bigcup_{j=1}^{N} R_j\right) < \varepsilon$.

TEOREMA: Si $f \in L^1(\lambda^n)$ y $\varepsilon > 0$, existe una función simple $\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{R_j}$, donde cada R_j es un producto de intervalos 1-dimensionales, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi| \, d\lambda^n < \varepsilon$. Además, existe g, continua con soporte compacto, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| \, d\lambda^n < \varepsilon$.

TEOREMA: La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones. En concreto, si para cada $a \in \mathbb{R}^n$ definimos $\tau_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mediante $\tau_a(x) = x + a$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

a) $\forall E \in \mathcal{L}^n$, $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ y $\lambda(\tau_a(E)) = \lambda(E)$.

b) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es Lebesgue-medible, entonces $f \circ \tau_a$ también es Lebesgue-medible. Y si, además, $f \geq 0$ o $f \in L^1(\lambda)$, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \tau_a) \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda$.

CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL DE LEBESGUE

TEOREMA: Sea $T \in GL(n, \mathbb{R})$. Se cumple que:

a) Si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es Lebesgue medible, también lo es $f \circ T$. Y si además, $f \geq 0$ o $f \in L^1(\lambda)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T(x)\, dx$$

b) Si $E \in \mathcal{L}^n$, entonces $T(E) \in \mathcal{L}^n$ y $\lambda(T(E)) = |\det(T)|\lambda(E)$

COROLARIO: La medida de Lebesgue es invariante por rotaciones.

TEOREMA: Sea un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sea $G: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo C^1. Se cumple que:

a) Si $f: G(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ es Lebesgue medible, entonces $f \circ G$ es Lebesgue medible en Ω. Y si, además, $f \geq 0$ o $f \in L^1(G(\Omega), \lambda)$, entonces $\int_{G(\Omega)} f(x)dx = \int_\Omega f \circ G(x) \cdot |\det D_x G|\, dx$

b) Si $E \subset \Omega$ y $E \in \mathcal{L}^n$, entonces $G(E) \in \mathcal{L}^n$ y $\lambda(G(E)) = \int_E |\det D_x G|\, dx$.