Geometría de Curvas y Superficies. Curso 2016-17.
Universidad Autónoma de Madrid. Departamento de Matemáticas.

Hoja 1

1. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ caminos suaves.

   (a) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es la función escalar definida por $f(t) \equiv \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle$, demuestra que $f'(t) = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle$.

   (b) Si $g : I \to \mathbb{R}^3$ es la función vectorial definida por $f(t) = \alpha(t) \times \beta(t)$, demuestra que $g'(t) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t)$.

   (c) Dada M, matriz constante 3×3, definimos una función vetorial $h : I \to \mathbb{R}^3$ mediante $h(t) = M\alpha(t)$. Demuestra que $h'(t) = M\alpha'(t)$.

2. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^n$ un camino diferenciable que no pasa por el origen. Supongamos que $t_0 \in I$ es tal que $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen. Demuestra que el vector de posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

3. Sea $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^n$ un camino suave, con $0 \in I$. Sea $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ un vector fijado. Demuestra que son equivalentes:

   – α está contenido en un plano afín ortogonal a $\mathbf{c}$. $\rightarrow$ $c \perp v$ $\forall v$ del plano en particular ~~...~~ $c \perp \alpha'(t)\ \forall$ ($\perp$ a todos los tangentes)

   – $\mathbf{c} \cdot \alpha(t)$ es función constante.

   – $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{c}$ para todo t.

4. Sea $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^n$ un camino regular. Demuestra que $\|\alpha(t)\|$ es constante (no nula) si y sólo si $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$ para todo t.

5. (Un nodo). La curva implícita $\{y^2 = x^2(x+1)\}$ es un ejemplo de **cúbica nodal.** Descríbela como unión de dos grafos del tipo $y = \text{función}(x)$ y usa esta descripción para hacer un dibujo de la curva (como subconjunto del plano xy).

   Después, para cada punto (x, y) de la curva con $x \neq 0$ describe x e y como funciones del número $t = y/x$. Comprueba que esto conduce a una parametrización $\alpha(t)$ que recorre toda la curva y explica cómo la recorre. En particular ¿es α inyectiva?

   Comprueba que el vector velocidad $\alpha'(t)$ nunca se anula.

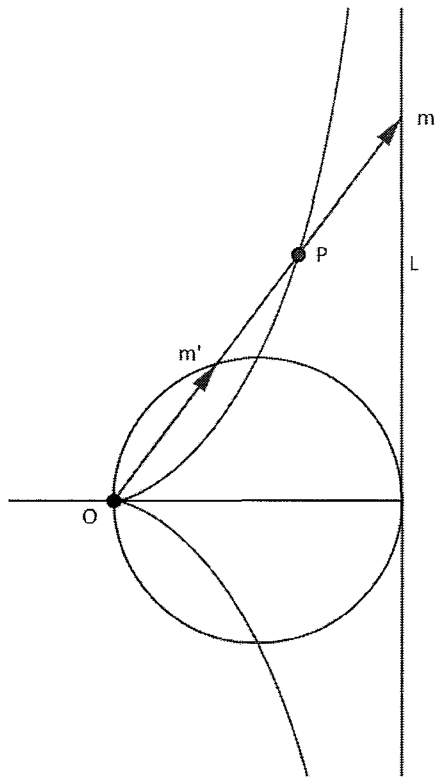
6. (Un tacnodo). Dado el camino $\alpha(t) \equiv \left(t^2 - 1\,,\ t(t^2-1)^2\right)$, comprueba que el vector velocidad $\alpha'(t)$ nunca se anula. Demuestra que la imagen $C = \alpha(\mathbb{R})$ puede darse implícitamente por $C = \{(x,y)\ :\ y^2 = x^4(x+1)\}$ y deduce una descripción de C como unión de dos grafos $\{y = h_i(x)\,,\ -1 \leq x < \infty\}$, $i = 1, 2$. Dibuja C y describe cómo es recorrida por α.

7. (La concoide[1] de Nicómedes). Fijamos $\ell > 0$. Sobre cada recta pasando por $(0,0)$ consideramos tres puntos: el punto M de corte con la recta $\{x = 1\}$ y los dos puntos P_-, P_+ que están a distancia ℓ de M. La concoide de Nicómedes es el lugar geométrico de los puntos $P_\pm$.

   Para el valor $\ell = 1$ traza las dos componentes conexas de la correspondiente concoide mediante parametrizaciones. Esta curva es algebraica, encuentra una ecuación implícita y polinómica para la curva entera y dibújala. Hay un punto donde se anula el gradiente de la ecuación implícita ¿cómo es la curva en ese punto?

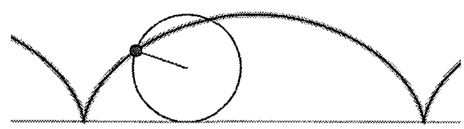
[1] "Concoide" significa "en forma de concha".

8. (La cisoide[2] de Diocles). Sea C la circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$. Sea L la recta tangente a C en el punto $(1, 0)$. Para cada punto $m \in L$, trazamos la recta que lo une con $O = (0, 0)$ y llamamos m' al corte de esa recta con C. La cisoide de Diocles es el lugar geométrico de los puntos P sobre estas rectas con el vector $\vec{Pm}$ igual al vector $\vec{Om'}$.



Traza la cisoide con una parametrización (indicación: primero parametriza L). Halla una ecuación implícita que sea polinómica. La cisoide es un ejemplo de cúbica **cuspidal** porque tiene un "punto áspero" (cúspide) que es justo donde se anula la velocidad de la parametrización y también es donde se anula el gradiente de la ecuación implícita.

9. (La cicloide). Consideramos un disco de radio 1 y marcamos un punto de su borde. Si el disco rueda sin resbalar por una recta horizontal entonces el punto marcado se mueve trazando una curva llamada **cicloide.**



Suponiendo que la recta horizontal es $\{y = -1\}$, demuestra que el siguiente camino parametriza la cicloide:

$$\alpha(t) = \big(t - \operatorname{sen} t \, , \, -\cos t \big) \quad , \quad -\infty < t < \infty \, .$$

Comprueba que la cicloide tiene cúspides, con las puntas hacia abajo, justo en los puntos donde se anula el vector velocidad de la parametrización.

Calcula la longitud del arco de cicloide comprendido entre dos cúspides consecutivas.

[2] *Kissós* significa hiedra en griego. Esta curva se parece al borde de una hoja de hiedra.

10. Encuentra una parametrización por longitud de arco de la siguiente curva:

$$\alpha(t) \equiv \Big(t \ , \ (3/2)\, t^{2/3} \Big) \quad , \quad t > 0\,.$$

Indicación: Observa que $\sqrt{1+t^{-2/3}} = t^{-1/3}\sqrt{t^{2/3}+1}$.

Sea b constante no nula. Halla una parametrización por longitud de arco de la **hélice circular:**

$$\alpha(t) \equiv (\, a \cos t\,,\, a \operatorname{sen} t\,,\, bt)\,.$$

11. **Tractriz:** es la curva que describe un esquiador acuático cuando la lancha remolcadora sigue una línea recta, y la fricción del líquido es tan importante que en vez de la ley de Newton (fuerza = masa · aceleración) se cumple la "ley" de Aristóteles (fuerza = constante · velocidad). Este sería el caso si, por ejemplo, el líquido fuera melaza en vez de agua.

Supongamos que la lancha se mueve por el semieje Oy positivo, que la cuerda de arrastre tiene longitud 1 y que el esquiador parte del punto $(1, 0)$. Sea $\gamma(s) \equiv \big(x(s)\,,\, y(s)\big)$, $0 \leq s < \infty$, la parametrización por longitud de arco de la trayectoria del esquiador, con $\gamma(0) = (1, 0)$. Según la ley de Aristóteles, la cuerda de arrastre es siempre tangente a la trayectoria del esquiador; usa esto para probar que los puntos $\gamma(s) + \gamma'(s)$ yacen sobre el eje y. Esto, junto con ser $\gamma(s)$ parametrización por longitud de arco, da dos EDOs para $x(s), y(s)$ y además tenemos datos iniciales. Resuelve esos dos problemas de dato inicial y halla fórmulas para $x(s), y(s)$ (deja $y(s)$ expresada como una integral).

Haz un dibujo de la tractriz.

12. Sea α curva *regular* en el plano.

(a) Demuestra que α es un segmento de recta si y sólo si todas sus tangentes afines pasan por un mismo punto.

(b) Demuestra que α es un arco de circunferencia si y sólo si todas sus normales afines pasan por un mismo punto.

(Plantea ambas cuestiones como EDOs de primer orden).

13. Sea $\alpha(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un camino suave. Demuestra que la longitud de α es mayor o igual que la distancia espacial entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$.

14. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ un camino diferenciable y $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un movimiento rígido. Demuestra que $\varphi \circ \alpha$ tiene la misma longitud que α.

Geometría de Curvas y Superficies. Curso 2016-17.
Universidad Autónoma de Madrid. Departamento de Matemáticas.

Hoja 2

1. Vuelve a hacer el ejercicio 12 de la Hoja 1, pero ahora haciendo uso del concepto de curvatura de una curva en el plano.

2. Halla una curva plana $\alpha(s)$ parametrizada por longitud de arco y con $k(s) \equiv 1/(1+s^2)$.

3. Sea Γ una curva cerrada simple en el plano, contenida en el disco $\{x^2+y^2 \leq r^2\}$.

   Demuestra que existe un punto $\mathbf{p} \in \Gamma$ con $|k(\mathbf{p})| \geq 1/r$.

   Pista: modifica el disco hasta que Γ toque su borde.

4. Sea α una curva regular plana y β la transformada de α por una homotecia del plano:

$$(x,y) \longmapsto (\, cx \,,\, cy \,)\,,$$

   (aquí c es una constante positiva). Halla la relación entre la curvatura de α y la de β.

5. Sea $(-a,a)$ un intervalo simétrico respecto de 0 y $\alpha(s) : (-a,a) \to \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por longitud de arco. Sea $k_\alpha(s)$ su función curvatura.

   (a) Demuestra que $\beta(\tilde{s}) \equiv \alpha(-\tilde{s})$ es una parametrización por longitud de arco y halla la correspondiente función curvatura $k_\beta(\tilde{s})$.

   (b) Si se verifica $k_\alpha(-s) \equiv k_\alpha(s)$, demuestra que α es simétrica respecto de su normal afín en $s=0$.

   (c) Si se verifica $k(-s)_\alpha \equiv -k_\alpha(s)$, demuestra que α tiene simetría central respecto del punto $\alpha(0)$.

6. Sea $\beta(t)$ una curva regular plana. Para cada constante c, la *curva paralela* correspondiente es la curva β_c definida por $\beta_c(t) \equiv \beta(t) + c\,\mathbf{n}_\beta(t)$. Demuestra que dos curvas planas regulares tienen las mismas normales afines si y sólo cada una es una paralela de la otra.

7. **(Envolvente de una familia de curvas).** Sea $\alpha_\lambda(t)$ una *familia uniparamétrica* de curvas regulares en el plano. Esto quiere decir que λ recorre un intervalo y para cada valor suyo λ_0 la función $t \mapsto \alpha_{\lambda_0}(t)$ es un camino regular en el plano. Se dice que la curva α_λ *depende suavemente del parámetro* λ si la siguiente aplicación:

$$\Phi(t,\lambda) : \big(\text{un abierto del plano } t\lambda\big) \longmapsto \mathbb{R}^2 \quad , \quad \Phi(t,\lambda) \equiv \alpha_\lambda(t)$$

   es suave como función de las dos variables (t,λ). La **envolvente** de esta familia es una curva o sistema de curvas (si es que existe) que toque tangentemente a las α_λ. Vamos a dar un método para calcularla, que requiere tener claros los dos conceptos siguientes:

   – Un **punto singular** de Φ es cualquier (t_0,λ_0) del dominio de Φ donde la matriz jacobiana $D\Phi_{(t_0,\lambda_0)}$ no es invertible.

   – Un **valor singular** de Φ es la imagen por Φ de algún punto singular de Φ.

El método funciona así: si un camino $\beta(u) \equiv \big(t(u), \lambda(u)\big)$ traza el conjunto de puntos singulares (o una parte del mismo), entonces el camino $\gamma(u) \equiv \Phi\big(\beta(u)\big)$ traza la envolvente (o parte de ella). La envolvente queda formada, pues, por valores singulares de Φ.

(a) Halla la envolvente de la siguiente familia de parábolas:

$$\alpha_\lambda(t) \equiv \big(t\,,\,(t-\lambda)^2\big)\,,$$

y haz un dibujo conjunto de la familia y la envolvente. Observa que en este caso Φ no es inyectiva y que la envolvente separa la "zona recubierta dos veces" de la "zona no recubierta" por Φ (esto es lo que el ojo humano ve).

(b) Halla la envolvente de la siguiente familia de cúbicas:

$$\alpha_\lambda(t) \equiv \big(t\,,\,(t-\lambda)^3\big)$$

y haz un dibujo conjunto de la familia y la envolvente. Observa que en este caso Φ es inyectiva, y de hecho *bicontinua,* pero no es un *difeomorfismo* porque tiene valores singulares ¿Cómo ve el ojo humano esta envolvente?

8. Recuerda que, dada una curva plana α, su **evoluta** es el lugar geométrico de sus centros de curvatura. Explica por qué la siguiente parametrización

$$\gamma(t) \equiv \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}\,\mathbf{n}_\alpha(t) \tag{1}$$

traza la evoluta de α, de modo que cada $\gamma(t_0)$ es el centro de curvatura de α correspondiente al valor $t = t_0$.

Suponiendo ahora que $\alpha(t)$ es parametrización por longitud de arco, calcula la derivada $\gamma'(t)$ (usa las ecuaciones de Frenet de α) y demuestra que las normales afines a α son las tangentes afines de su evoluta. Concluye que **la evoluta es la envolvente de las normales afines.**

9. Dada la parábola $\alpha(t) \equiv (t, t^2)$, halla una parametrización para su evoluta por los dos métodos: primero usando la fórmula (1), después como envolvente de las normales afines de α. Comprueba que los dos métodos dan el mismo resultado.

Haz un dibujo conjunto de la parábola y su evoluta (que es una *parábola semicúbica*).

10. **(Construcción de las involutas).** Sea $\alpha(s)$ una curva plana parametrizada por arco. Dada cualquier constante c, demuestra que la curva

$$\beta(s) \equiv \alpha(s) - (s-c)\,\mathbf{t}_\alpha(s)\,,$$

es una trayectoria ortogonal de las tangentes afines de α, es decir que β es una de las *involutas* de α. Comprueba que, al cambiar el valor de c, resultan curvas *paralelas* y explica esto geométricamente mediante el ejercicio 6.

Deduce la construcción de las involutas bobinando o desbobinando un hilo sobre la curva.

11. Sea $\alpha(s)$ una curva plana parametrizada por longitud de arco. Demuestra que las normales afines de α equidistan de un punto fijado si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$k(s) \equiv \pm 1/\sqrt{as+b}\,.$$

12. Halla las involutas de una circunferencia. Relaciona el resultado con las curvas del ejercicio 11.

HOJA 1

1. $I \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ caminos suaves

a) $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle$

Demuestra que $f'(t) = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

$$\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$$

$$f(t) = \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle = \langle (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)), (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)) \rangle =$$

$$= \alpha_1(t)\beta_1(t) + \alpha_2(t)\beta_2(t) + \alpha_3(t)\beta_3(t)$$

Entonces: $f'(t) = \boxed{\alpha_1'(t)\beta_1} + \alpha_1(t)\beta_1'(t) + \boxed{\alpha_2'(t)\beta_2(t)} + \alpha_2(t)\beta_2'(t) + \boxed{\alpha_3'(t)\beta_3(t)} +$

$$+ \alpha_3(t)\beta_3'(t) = \square + \square + \square + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc =$$

$$= \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle \quad \blacksquare$$

b) $g: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g(t) = \alpha(t) \times \beta(t)$

Demuestra que $g'(t) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t)$

$$g(t) = \alpha(t) \times \beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \times (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t) \\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) \end{vmatrix} = \alpha_2(t)\beta_3(t)\vec{\imath} + \alpha_1(t)\beta_2(t)\vec{k} + \beta_1(t)\alpha_3(t)\vec{\jmath} - \beta_1(t)\alpha_2(t)\vec{k} - \beta_2(t)\alpha_3(t)\vec{\imath} - \alpha_1(t)\beta_3(t)\vec{\jmath} =$$

$$= (\alpha_2(t)\beta_3(t) - \alpha_3(t)\beta_2(t))\vec{\imath} + (\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t))\vec{k} +$$

$$+ (\alpha_3(t)\beta_1(t) - \alpha_1(t)\beta_3(t))\vec{\jmath}$$

$$g'(t) = \left(\boxed{\alpha_2'(t)\beta_3(t)} + \alpha_2(t)\beta_3'(t) - \boxed{\alpha_3'(t)\beta_2(t)} - \alpha_3(t)\beta_2'(t)\right)\vec{\imath} +$$

$$+ \left(\boxed{\alpha_1'(t)\beta_2(t)} + \alpha_1(t)\beta_2'(t) - \boxed{\alpha_2'(t)\beta_1(t)} - \alpha_2(t)\beta_1'(t)\right)\vec{k} +$$

$$+ \left(\boxed{\alpha_3'(t)\beta_1(t)} + \alpha_3(t)\beta_1'(t) - \boxed{\alpha_1'(t)\beta_3(t)} - \alpha_1(t)\beta_3'(t)\right)\vec{\jmath} =$$

$$= (\square - \square)\vec{\imath} + (\square - \square)\vec{\jmath} + (\square - \square)\vec{k} + (\bigcirc - \bigcirc)\vec{\imath} + (\bigcirc - \bigcirc)\vec{\jmath} +$$

$$+ (\bigcirc - \bigcirc)\vec{k} = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t) \quad \blacksquare$$

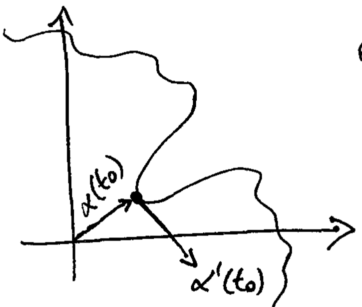
c) M matriz constante 3×3 , $h: I \to \mathbb{R}^3$ $\quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$

$h(t) = M\alpha(t)$. Demostrar que $h'(t) = M\alpha'(t)$.

$$h(t) = M\left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right)^T = \begin{pmatrix} m_{11}\alpha_1(t) + m_{12}\alpha_2(t) + m_{13}\alpha_3(t) \\ m_{21}\alpha_1(t) + m_{22}\alpha_2(t) + m_{23}\alpha_3(t) \\ m_{31}\alpha_1(t) + m_{32}\alpha_2(t) + m_{33}\alpha_3(t) \end{pmatrix}$$

$$h'(t) = \begin{pmatrix} m_{11}\alpha_1'(t) + m_{12}\alpha_2'(t) + m_{13}\alpha_3'(t) \\ m_{21}\alpha_1'(t) + m_{22}\alpha_2'(t) + m_{23}\alpha_3'(t) \\ m_{31}\alpha_1'(t) + m_{32}\alpha_2'(t) + m_{33}\alpha_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \\ \alpha_3'(t) \end{pmatrix} = M\alpha'(t) \quad \blacksquare$$

$\boxed{2.}$



representación en $\mathbb{R}^2$
$n=2$

Como el enunciado nos habla de que $t_0 \in I$ es tal que $\alpha(t_0)$ es el punto más cercano al origen, es decir, minimiza la distancia de $\alpha(t)$ con el origen, definimos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) :=$ distancia al origen de cada punto de $\alpha(t)$.

$$f(t) = \|\alpha(t)\|^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle$$

vale sin el cuadrado, pero el cuadrado facilita la derivación.

$$f'(t) \overset{1.a}{=} \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle \overset{\text{simetría}}{=} 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle$$

Como t_0 es el mínimo de f y f es diferenciable, entonces tenemos que $f'(t_0) = 0 = 2\langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) \rangle \Rightarrow \alpha'(t_0) \perp \alpha(t_0)$ $\blacksquare$

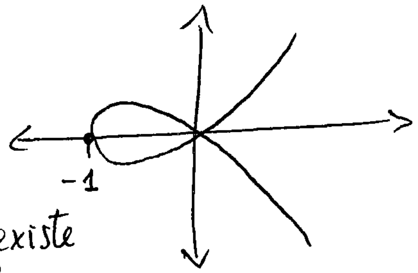
TEORÍA

α es REGULAR si $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

5. Un nodo $\{y^2 = x^2(x+1)\}$ ejemplo de cúbica nodal

a) Describirla como unión de grafos y dibujarla

$y^2 = x^2(x+1) \Rightarrow y = \pm x\sqrt{x+1}$ $\xrightarrow{\text{representamos}}$ estas 2 func.



Notar que si $x<-1 \Rightarrow x+1<0 \Rightarrow \sqrt{x+1}$ no existe en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ no hay puntos (x,y) en la curva con $x<-1$.

b) para cada (x,y) con $x \neq 0$ describe x e y como $t = x/y$. Comprobar que esto conduce a una parametrización $\alpha(t)$ que recorre toda la curva. Explica como la recorre.

$$\frac{y^2}{x^2} = x+1 \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2-1$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{(t^2-1)^2 t^2} = \pm(t^2-1)t$$

Entonces podemos parametrizar la curva como:

$\alpha_+(t) = (t^2-1,\ t^3-t)$ $\longrightarrow$ son dos parametrizaciones

$\alpha_-(t) = (t^2-1,\ -t^3+t)$ $\longrightarrow$ distintas

$\alpha_+(t)$ percorre la curva de "arriba-abajo" y $\alpha_-(t)$ lo hace de "abajo-arriba".

c) ¿Inyectiva? No, (ni α_+ ni α_-) ya que $\alpha_\pm(1) = \alpha_\pm(-1) = (0,0)$

d) Comprobar que el vector velocidad $\alpha'(t)$ nunca se anula.

$\alpha'(t) = (2t,\ 3t^2-1) = (0,0)$ nunca porque $\begin{cases} 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ 3t^2-1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \pm\sqrt{1/3} \end{cases}$ imposible que ambos sean 0.

<u>Adicional</u>: Ver que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2(x+1)\}$ coincide con $\alpha_+(\mathbb{R})$

1.- <u>$C \subset \alpha_+(\mathbb{R})$</u> : Es la construcción de α_+ hecha anteriormente ya que para cada $(x,y) \in C$ hemos encontrado un $t \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y) = (t^2-1,\ t^3-t)$.

Si $(x,y) \in C$ es tal que $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$ punto $(0,0) \Rightarrow$
$\Rightarrow t=1$ es el que da $(0,0) \Rightarrow t$ encontrado para el caso particular de que $x=0$.

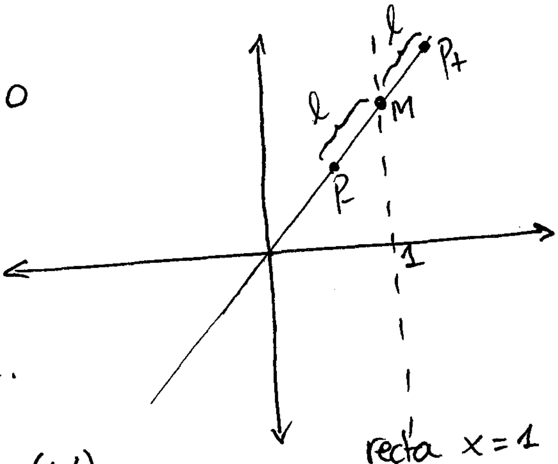
2.- $\underline{\alpha_+(\mathbb{R}) \subset C}$: Llamamos $x = t^2 - 1$ e $y = t^3 - t$.

Nos preguntamos si $(t^3 - t)^2 = (t^2-1)^2(t^2-1+1) = (t^2-1)^2 t^2$

$$\begin{matrix} (t^3-t)^2 \\ \| \\ t^2(t^2-1)^2 \end{matrix} \quad \checkmark$$

7. La concoide de Nicómedes

$l > 0$



$M = (1, t)$ (conjunto de los posibles puntos M)

$\downarrow$

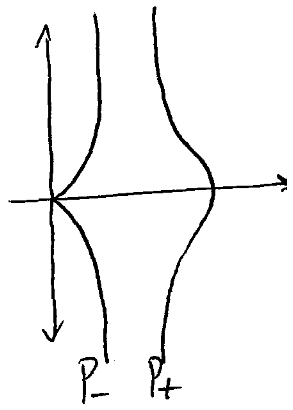
es la intersección de $y = tx$ con $x = 1$.

Tomemos el vector unitario $u = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,t)$

Entonces: $P_+ = M + l.u$ y $P_- = M - l.u$

$$\Rightarrow P_\pm = (1,t) \pm l \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,t) = \left(1 \pm \frac{l}{\sqrt{1+t^2}}\right)(1,t)$$

Para $\underline{l = 1}$: $P_\pm = \left(1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)(1,t) \longrightarrow$ dibujo:



$$\alpha_\pm(t) = \Bigg(\underbrace{1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}_{x(t)}, \underbrace{t\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)}_{y(t)}\Bigg)$$

Tengo que $t = y/x$ si $x \neq 0$

$$x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+(y/x)^2}} \Rightarrow x - 1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + y^2/x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 = (x^2+y^2)(x-1)^2$$

Esto prueba que $\alpha_\pm(\mathbb{R})$ cumple la ecuación implícita anterior.

$$F(x,y) = -x^2 + (x^2+y^2)(x-1)^2 \qquad \boxed{F(x,y) = 0} \leftarrow \text{recuerda}$$

$$\nabla F(x,y) = \left(-2x + 2x(x-1)^2 + (x^2+y^2)2(x-1),\ 2y(x-1)^2\right)$$

Nos preguntamos si se anula el gradiente $\nabla F(x,y)$:

$$\nabla F(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} -2x + 2x(x-1)^2 + (x^2+y^2)2(x-1) = 0 \\ 2y(x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \boxed{y=0}$ ó $\boxed{x=1}$

- caso $y=0$

$$\begin{cases} -2x + 2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1) = 0 \quad (*) \\ -x^2 + x^2(x-1)^2 = 0 \implies x^2(-1+(x-1)^2) = 0 \end{cases}$$

$\nearrow \boxed{x=0}$

$\searrow (x-1)^2 = 1 \to \boxed{x=2}$, $x=0$

$\implies$ posibilidades: $(0,0)$ ✓ ó $(2,0)$ $\downarrow$ no se cumple $(*)$

$\implies$ Se anula en $(0,0)$

- caso $x=1$

$\nabla F(1,y) = (-2,0) \neq (0,0)$

$\implies$ Sólo se anula el gradiente en $(0,0)$, donde la curva tiene un pico.

$\alpha_-'(0) = (0,0)$ Es un punto singular de α_-.

$\longrightarrow P_-$ es la curva con el pico.

TEORÍA

$\alpha(t)$ parametrización de una curva

$\|\alpha'(t)\| = 1 \quad \forall t \in I \implies \alpha(t)$ parametrización por longitud de arc (longitud del arco recorrido)

$$L_{[0,t]}(\alpha) = t$$

TEOREMA: Cualquier curva regular se puede parametrizar por longitud de arco.

$\boxed{10.}$ Encontrar una parametrización por longitud de arco de la curva

$$\alpha(t) = \left(t, \tfrac{3}{2} t^{2/3}\right), \quad t > 0$$

TEORÍA

Si α es regular, el parámetro longitud de arco se calcula:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\|\, dt$$

$$s(t) = \int \|\alpha'(t)\|\, dt = \int \sqrt{1+t^{-2/3}}\, dt \overset{\text{NOTA EJ.}}{=} \int t^{-1/3} \sqrt{t^{2/3}+1}\, dt =$$

cambio variable:

$$u = t^{2/3} + 1 \longrightarrow t = (u-1)^{3/2}$$

$$du = \tfrac{2}{3} t^{-1/3} dt \longrightarrow dt = \frac{3t^{1/3}}{2} du$$

$$= \int \left((u-1)^{3/2}\right)^{-1/3} \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left((u-1)^{3/2}\right)^{1/3} du = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u-1}} \cdot \sqrt{u} \cdot \sqrt{u-1}\, du =$$

$$= \frac{3}{2} \int \sqrt{u}\, du = \frac{3}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = u^{3/2} = \left(t^{2/3}+1\right)^{3/2} + K$$

para cualquier $K \in \mathbb{R}$.

Escojamos $s(t) = \left(t^{2/3}+1\right)^{3/2}$

Calculemos t en función de s:

$$s^{2/3} - 1 = t^{2/3} \iff t = \left(s^{2/3}-1\right)^{3/2}$$

Por tanto, una parametrización por longitud de arco es:

$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \left(\left(s^{2/3}-1\right)^{3/2}, \tfrac{3}{2}\left(s^{2/3}-1\right)\right)$$

TRUCOS:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\cos(2x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

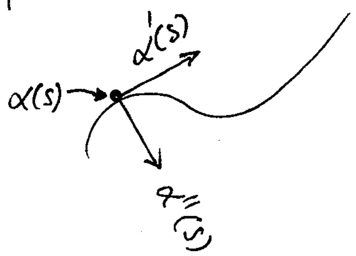
$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

12| α curva regular

b) α arco de circunferencia $\Longleftrightarrow$ todas sus normales afines pasan por un mismo punto.

Supongamos (sin pérdida de generalidad) que α esté parametrizada por arco.



Entonces: $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1 \quad \forall s \in I$

Derivando: $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I$ [1]

→ op. 1 : $\alpha''(s) = 0 \Rightarrow$ la curva es una rect

→ op. 2 : $\alpha''(s) \perp \alpha'(s) \Rightarrow \alpha''(s)$ es normal

Por tanto, la <u>normal afín</u> de α en $\alpha(s)$ es la recta:

$$\lambda \longmapsto \alpha(s) + \lambda \alpha''(s) \quad \text{(para } s \text{ fijado)}$$

Todas las normales afines pasan por un punto p si y solo si $\forall s \in I \quad \exists \lambda$ (ahora λ depende de s) $\in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(s) + \lambda \alpha''(s) = p \quad \forall s \in I$

Tenemos que ver que esto pasa por un arco de circunferencia.

Considero $f(s) = \|\alpha(s) - p\|^2$

$$\text{Entonces: } f'(s) \underset{\text{ej. 1}}{=} \langle \alpha'(s), \alpha(s) - p \rangle \overset{\alpha(s) + \lambda\alpha'(s) = p}{=} \langle \alpha'(s), -\lambda_{(s)} \alpha''(s) \rangle \overset{[1]}{=} 0$$

$\Rightarrow f$ es constante y entonces $\alpha(s)$ es un pedazo de circunferenc ∎

(falta la otra implicación, pero es trivial).

HOJA 2

$\boxed{2.}$ $K(t) = \theta'(t) V_\alpha(t)$

$$\xrightarrow[\text{param. arco}]{} K(s) = \theta'(s)$$

Idea:

$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por arco

$\theta(s) = \measuredangle\theta \; (\mathbb{t}_\alpha(s), (1,0))$

$K_\alpha(s) = \theta'(s) \Rightarrow \theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} K_\alpha(u)\,du$ θ_0 es un poco irrelevante

$$\Rightarrow \alpha'(s) = \mathbb{t}_\alpha(s) \underset{\substack{\uparrow \\ \{e_1, e_2\} \text{ base ortonormal}}}{=} \overbrace{\langle \mathbb{t}_\alpha(s), e_1\rangle}^{\cos\theta(s)} e_1 + \overbrace{\langle \mathbb{t}_\alpha(s), e_2 \rangle}^{\operatorname{sen}\theta(s)} e_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \alpha'(u)\,du$$

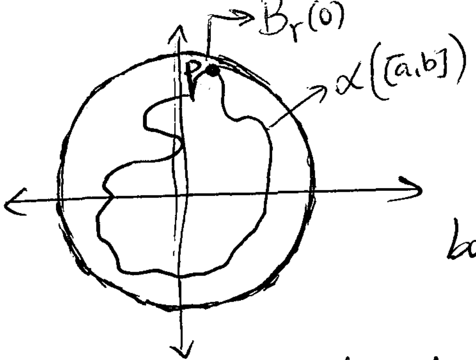
TEORÍA

DEFINICIÓN: Sea $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular con $I = [a,b]$, $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$, $\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Si $\alpha|_{[a,b)}$ es inyectiva, entonces α es una curva CERRADA SIMPLE en $\mathbb{R}^2$.

TEOREMA DE JORDAN: Toda curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$ divide $\mathbb{R}^2$ en dos regiones.

3. Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización por arco de Γ con $\alpha(a) = \alpha(b)$.

$\Gamma = \alpha([a,b]) \subset \overline{B(r)}$



Demostrar que $\exists p \in \Gamma$ tal que $|K(p)| \geq \frac{1}{r}$.

La idea es ir reduciendo el radio de la bola hasta que toque en un punto a α.

Vamos tomando discos centrados en el origen con radios menores que r hasta que para un cierto $r' < r$ la circunferencia de radio r' sea tangente a Γ y esta siga dentro de $\overline{B(r')}$.

$\hookrightarrow$ en $p = \alpha(s_0)$

Consideramos $f(s) = \|\alpha(s)\|^2$. Entonces f tiene un máximo en $s_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(s_0) = 0 \wedge f''(s_0) \leq 0$. [1]

$f'(s) = 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle$

$f''(s) = 2\langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle + 2\overbrace{\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle}^{=1} = 2\left(\langle K_\alpha(s)\, n_\alpha(s), \alpha(s) \rangle + 1 \right)$

$\overset{[1]}{\Rightarrow} K_\alpha(s_0) \langle n_\alpha(s_0), \alpha(s_0) \rangle \leq -1 \Rightarrow |K_\alpha(s_0)| |\langle n_\alpha(s_0), \alpha(s_0) \rangle| \geq 1$

$\Rightarrow |K_\alpha(s_0)| \geq \dfrac{1}{|\langle n_\alpha(s_0), \alpha(s_0) \rangle|} \geq \dfrac{1}{r'} \overset{r > r'}{\geq} \dfrac{1}{r}$

$|\langle n_\alpha(s_0), \alpha(s_0) \rangle| \leq \|n_\alpha(s_0)\| . \|\alpha(s_0)\| = r$
$\|n_\alpha(s_0)\| = 1$, $\|\alpha(s_0)\| = r'$

cauchy-schwarz

$|\langle n_\alpha, \alpha(s_0) \rangle| \leq r'$

7. Para cada $\lambda \in J$, tenemos α_λ curva regular.

Definimos: $\Phi(t,\lambda) = \alpha_\lambda(t)$

La envolvente de $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in I} \equiv \{$valores singulares de $\Phi\}$

a) $\alpha_\lambda(t) = (t, (t-\lambda)^2)$, $t \in \mathbb{R}$

$$D\Phi(t,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(t-\lambda) & 2(\lambda-t) \end{pmatrix}$$

$$\det(D\Phi(t,\lambda)) = 2(\lambda - t) = 0 \iff t = \lambda$$

Puntos singulares: $\{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$

Valores singulares: $\{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$

Importante:

Envolvente $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in I} = \{$valores singulares de $\Phi\}$

b) Sdo aporta la solución $\longrightarrow$ la misma.

8. TEORÍA

α regular plana

El centro de curvatura de α en S_0 es el centro de su circunferencia osculatriz en S_0: $C(t_0) = \alpha(t_0) + \dfrac{1}{K_\alpha(t_0)} \cdot \mathbb{n}_\alpha(t_0)$

$C(t_0)$ $\rightarrow$ centro de curvatura

$\dfrac{1}{K_\alpha(t_0)}$ $\rightarrow$ radio de curvatura

La Evoluta de α se puede parametrizar por:

$\gamma(t) = \alpha(t) + \dfrac{1}{K_\alpha(t)} \mathbb{n}_\alpha(t)$, ya que $\gamma(t_0)$ es el centro de curvatura de α en t_0.

Supongamos α parametrizada por arco:

$\|\alpha'\| = 1$

$\mathbb{t}_\alpha = \alpha'$

$$\gamma'(t) = \alpha'(t) - \frac{K_\alpha'(t)}{K_\alpha(t)^2}\cdot \mathbb{n}_\alpha(t) + \frac{1}{\cancel{K_\alpha(t)}}\cdot\left(-\cancel{K_\alpha(t)}\cdot \mathbb{t}_\alpha(t)\right) = -\frac{K_\alpha'(t)}{K_\alpha(t)^2}\cdot \mathbb{n}_\alpha(t)$$

Las normales afines de α son: para cada $t \in I$, $\alpha(t) + \lambda \mathbb{n}_\alpha(t)$

La tangente afín a γ en t fijado es la recta $\gamma(t) + \lambda \mathbb{t}_\alpha(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

que es la misma que: $\gamma(t) + \lambda\gamma'(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) + \lambda\gamma'(t) = \gamma(t) - \lambda\frac{K_\alpha'(t)}{K_\alpha(t)^2}\mathbb{n}_\alpha(t) =$$

$$\gamma(t) = \alpha(t) + \frac{1}{K_\alpha(t)}\cdot \mathbb{n}_\alpha(t)$$

$= \alpha(t) + \mu \mathbb{n}_\alpha(t)$ con $\mu = \dfrac{1}{K_\alpha(t)} - \lambda \dfrac{K_\alpha'(t)}{K_\alpha(t)^2}$ y esto es una normal afín.

La envolvente de las normales afines es el conjunto de valores críticos de Φ dada por: $\Phi(t,\lambda) = \alpha(t) + \lambda \mathbb{n}_\alpha(t)$

$$D\Phi(t,\lambda) = \begin{array}{cc} \left(\begin{matrix} \alpha'(t) + \lambda \mathbb{n}_\alpha(t) \\ \lambda K_\alpha \mathbb{t}_\alpha \end{matrix} \right| & \left. \mathbb{n}_\alpha \right) \\ \partial_t & \partial_\lambda \end{array} = \Big((1 - \lambda K_\alpha(t) \mathbb{t}_\alpha) \Big| \mathbb{n}_\alpha \Big)$$

Entonces $D\Phi(t,\lambda)$ singular $\iff 1 - \lambda K_\alpha(t) = 0$ porque $\{\mathbb{t}_\alpha, \mathbb{n}_\alpha\}$ es una base

Valores singulares de Φ: $\Phi\left(t, \dfrac{1}{K_\alpha(t)}\right) = \alpha(t) + \dfrac{1}{K_\alpha(t)} \mathbb{n}_\alpha(t)$

para cada t, esto es el centro de curvatura de α en t, que sabemos que parametriza la evoluta.

OJO: β no tiene por qué estar param. por arco

$\boxed{10.}$ α por arco, $c \in \mathbb{R}$ $\beta(s) = \alpha(s) - (s-c)\mathbb{t}_\alpha(s)$

$\beta'(s) = \cancel{\alpha'(s)} - \cancel{\mathbb{t}_\alpha(s)} - (s-c) K_\alpha(s) . \mathbb{n}_\alpha(s)$

La tangente afín de α por s es $\gamma_s(\lambda) = \alpha(s) + \lambda \mathbb{t}_\alpha(s)$

Por tanto $\beta'(s)$ es ortogonal a γ_s

10.b $\quad \alpha(t) \equiv (a\cos t,\ a\,\text{sen}\,t,\ bt)$

$$\alpha'(t) = (-a\,\text{sen}\,t,\ a\cos t,\ b)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2\text{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$S(t) = \int \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,t \implies t = \frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ a\,\text{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$\boxed{5.}$ $\alpha : (-a,a) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ param. arco longitud

$\beta : (-a,a) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta(s) = \alpha(-s)$

a) $\beta'(s) = -\alpha'(-s) \Rightarrow \|\beta'(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1$

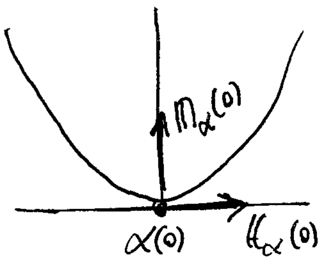
$\mathbf{t}_\beta(s) = -\mathbf{t}_\alpha(-s) \Rightarrow \mathbf{n}_\beta(s) = -\mathbf{n}_\alpha(-s)$

$\mathbf{t}'_\beta(s) = \mathbf{t}'_\alpha(-s) = K_\alpha(-s)\mathbf{n}_\alpha(-s) = -K_\alpha(-s)\mathbf{n}_\beta(s) = K_\beta(s)\mathbf{n}_\beta(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow K_\beta(s) = -K_\alpha(-s)$

b) $K_\alpha(-s) = K_\alpha(s) \Rightarrow \alpha$ simétrica respecto a la normal a $\alpha(0)$.

c) $K_\alpha(-s) = -K_\alpha(s) \Rightarrow \alpha$ simétrica respecto de $\alpha(0)$.



$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{t}_\alpha(0)$ $\mathbf{n}_\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \operatorname{sen}\theta(s) \end{pmatrix}$ ya que $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$

$\theta'(s) = K_\alpha(s)$

apartado b apartado c

K par (© impar) $\Leftrightarrow \theta$ impar (© par) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta \text{ par (© par)} \\ \operatorname{sen}\theta \text{ impar (© par)} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(s) \text{ impar (© impar)} \\ y(s) \text{ par (© impar)} \end{cases}$

b) $\alpha(-s) = \begin{pmatrix} -x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ c) $\alpha(-s) = \begin{pmatrix} -x(s) \\ -y(s) \end{pmatrix}$

[11.] α param. arco longitud

$$\underbrace{\text{Normales afines equidistan de un punto fijo}}_{\displaystyle \langle H_\alpha(s), \alpha(s)-p\rangle = c} \iff K_\alpha(s) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{as+b}}$$

$\varepsilon \in \{-1,$