



Figure 1: Modelo M/G/1.

Ejercicio 2-4

Se quiere diseñar un servidor de emisión de certificados en Internet para que sea capaz de atender una media de 10 peticiones por segundo siguiendo un proceso de Poisson con un tiempo medio de respuesta de 0.1s. Sabiendo que el programa de generación del certificado es siempre el mismo, independientemente del cliente, y requiere la ejecución de 10.000 instrucciones de código máquina, calcular la potencia de ordenador (en MIPS) necesaria para su ejecución, suponiendo despreciable cualquier otra carga en el mismo.

- La arquitectura descrita en el enunciado puede verse en la Figura 1.
- Se trata de un modelo **M/G/1** puesto que:
 - Llegadas de Poisson con tasa $\lambda = 10s^{-1}$.
 - Tiempo de servicio constante. El programa de generación del certificado es siempre el mismo, independientemente del cliente. Por tanto, tiempo de servicio **NO EXPONENCIAL**. En particular, el modelo es un **M/D/1** (D=deterministic).
 - 1 servidor.
 - Tamaño de cola infinito.
 - Número muy grande de clientes, de modo que el número de peticiones pendientes de servicio no afecta al ritmo de llegada de nuevas peticiones.

1 Potencia del ordenador (en MIPS) para la ejecución

Además, de la tasa de llegadas proporcionada en el enunciado ($\lambda = 10s^{-1}$), se nos dice que el servidor debe ser capaz de dar un tiempo medio de respuesta de 0.1s. Es decir, el tiempo medio de estancia en el sistema (o latencia) debe ser $W = 0.1$.

Vamos a calcular la tasa de servicio μ del servidor para determinar el número de peticiones al segundo que debe atender y, posteriormente, obtendremos la potencia en MIPS teniendo en cuenta que cada una de estas peticiones requiere la ejecución de 10.000 instrucciones de código máquina. Para ello, debemos conocer los momentos de primer y segundo orden de la variable aleatoria S que representa el tiempo de servicio. El momento de primer orden es la esperanza de la variable aleatoria y, por tanto, el tiempo medio de servicio T_S , $\mathbb{E}[S] = T_S =$

$1/\mu$. Precisamente es μ lo que necesitamos calcular. El momento de segundo orden, $\mathbb{E}[S^2]$, lo vamos a obtener sabiendo que se trata de un tiempo de servicio constante y por tanto su varianza es 0:

$$\mathbb{E}[S^2] = V[S] + (\mathbb{E}[S])^2 = 0 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}.$$

Aplicando el Teorema de Little, sabemos que $W = L/\lambda$. Por tanto, usando la ecuación para calcular el número medio de clientes L en el modelo M/G/1 se tiene:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda^2 \mathbb{E}[S^2]}{2(1-\rho)} + \rho}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda^2 \cdot \frac{1}{\mu^2}}{2(1-\rho)} + \rho}{\lambda} = \frac{\frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho}{\lambda} = 0.1$$

Despejando ρ de la ecuación anterior y sustituyendo $\lambda = 10s^{-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho &= W\lambda = 0.1 \cdot 10 = 1 \Rightarrow \rho^2 - 4\rho + 2 = 0 \\ \rho &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos $\rho = 3.41$ o $\rho = 0.586$. El caso $\rho = 3.41$ queda descartado puesto que en estado estacionario el factor de utilización del servidor no puede ser mayor que 1. Usando ahora $\rho = \lambda/\mu$:

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{10}{0.586} = 17.07 \text{ peticiones/s}.$$

Por tanto, la potencia del ordenador deberá ser:

$$17.07 \text{ peticiones/s} \times 10000 \text{ instrucciones/petición} = 170710 \text{ instrucciones/s} \approx 0.17 \text{ MIPS}.$$