HOJA DE EJERCICIOS 2: Lógica de predicados EDyL 2015-2016

[Fecha de publicación: 2015/09/30]
[Fecha de entrega: 2015/10/06, 09:00]
[Resolución en clase: 2015/10/06]

NOTA: Incluye explicaciones para tus respuestas. Un ejercicio cuya respuesta es correcta, pero que no incluye explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 1:

Utilizando la constante π, las variables

$p_1, p_2, \ldots$ [dominio: puntos]
$\theta_1, \theta_2, \ldots$ [dominio: ángulos]
$s_1, s_2, \ldots$ [dominio: segmentos]

los predicados

$P(s_1)$ "El segmento s_1 tiene una longitud no nula"
$T(s_1, s_2, s_3)$: "los segmentos s_1, s_2 y s_3 forman un triángulo"

las funciones

$t(p_1, p_2, p_3)$: "triángulo formado por los puntos p_1, p_2, p_3"
$a(s_1, s_2)$: "magnitud del ángulo formado por los segmentos s_1, s_2"
$s(p_1, p_2)$: "Segmento delimitado por los puntos p_1, p_2"
$sum(\theta_1,\theta_2)$: "Ángulo que resulta de sumar los ángulos θ_1, θ_2"

y el predicado de igualdad, escribir FBFs de la lógica de predicados que expresen de manera correcta y lo más literal posible las siguientes frases

(i) Un segmento tiene una longitud no nula cuando los puntos que lo delimitan son distintos.

$$\forall s \, [P(s) \Leftrightarrow \exists \, p_1, p_2 \, (s = s(p_1, p_2) \wedge (p_1 \neq p_2))]$$

(ii) La suma de los ángulos de un triángulo vale π.

$$\forall s_1, s_2, s_3 \, [T(s_1,s_2,s_3) \Rightarrow (sum(sum(a(s_1,s_2), a(s_2,s_3)),a(s_3,s_1)) = \pi)]$$

(iii) Para que tres segmentos formen un triángulo deben estar delimitados por un total de tres puntos diferentes, de forma que el primer segmento está delimitado por los dos primeros puntos, el segundo segmento por los puntos segundo y el tercero y el tercer segmento por los puntos tercero y primero.

$$\forall s_1, s_2, s_3\ [T(s_1,s_2,s_3) \Leftrightarrow$$
$$\exists\ p_1, p_2, p_3\ (s_1 = s(p_1, p_2)) \wedge (s_2 = s(p_2, p_3)) \wedge (s_3 = s(p_3, p_1))$$
$$\wedge\ (p_1 \neq p_2) \wedge (p_2 \neq p_3) \wedge (p_1 \neq p_3)]$$

EJERCICIO 2 [Adaptación de "Introducción a la Lógica Formal", A. Deaño, ej. 81]:
Escribe las siguientes frases sobre geometría plana como FBFs utilizando las siguientes variables, funciones y predicados:

Variables: p,q,... [puntos]
r,s,t,u... [rectas]
θ, ϕ... [ángulos en radianes]

Predicados: Paralelas(<recta-1>,<recta-2>): <recta-1> y <recta-2> son paralelas.

Perpendiculares(<recta-1>,<recta-2>): <recta-1> y <recta-2> son perpendiculares.

Pertenece(<punto>,<recta>): <punto> pertenece a <recta>

Recto(<ángulo>): El ángulo cuyo valor es <ángulo> es recto

Cero(<ángulo>): El ángulo cuyo valor es <ángulo> es cero

Función: ángulo(<recta-1>,<recta-2>):
evalúa al ángulo que forman las rectas <recta-1>,<recta-2>

No se puede utilizar el predicado de igualdad
No olvides utilizar paréntesis para delimitar el ámbito de las variables.

a) "Dos rectas son paralelas cuando no se cruzan en ningún punto" [Ejemplo]

$\forall$r,s [Paralelas(r,s) $\Leftrightarrow$ [$\neg\exists$p (Pertenece(p,r) $\wedge$ Pertenece(p,s))]]

b) Dos rectas son perpendiculares cuando el ángulo que forman es recto (π/2)

$\forall$r,s [Perpendiculares(r,s) $\Leftrightarrow$ Recto(ángulo(r,s))]

c) “Dos rectas que formen un ángulo cero o bien son coincidentes, o bien son paralelas”

$\forall r,s$ [Cero(ángulo(r,s))$\Leftrightarrow$
[$\forall p$(Pertenece(p,r)$\Leftrightarrow$Pertenece(p,s))$\vee$Paralelas(r,s)]

EJERCICIO 3 [Adaptación de "Introducción a la Lógica Formal", A. Deaño, ej. 81]:

Escribe las siguientes frases sobre geometría plana como FBFs utilizando las siguientes variables, funciones y predicados:

Variables:	p,q,…	[puntos]
	r,s,t,u…	[rectas]

Predicados: Paralelas(<recta-1>,<recta-2>): <recta-1> y <recta-2> son paralelas.

Pertenece(<punto>,<recta>): <punto> pertenece a <recta>

Función: perpendicular(<recta>,<punto>): evalúa a la recta perpendicular a <recta> que contiene a <punto>

Se pueden utilizar los predicados de igualdad ($=$) y desigualdad ($\neq$).
No olvides utilizar paréntesis para delimitar el ámbito de las variables.

a) "Dos rectas son paralelas cuando no se cruzan en ningún punto" [Ejemplo]

$$\forall r,s\ [\text{Paralelas}(r,s) \Leftrightarrow [\neg\exists p\ (\text{Pertenece}(p,r) \wedge \text{Pertenece}(p,s))\ ]]$$

b) "Dos rectas no paralelas y diferentes entre sí se cruzan un único punto"

$$\forall r,s\ [[\neg\text{Paralelas}(r,s) \wedge (r \neq s)\ ] \Leftrightarrow [\exists p\ \{\text{Pertenece}(p,r) \wedge \text{Pertenece}(p,s) \wedge [\forall q\ \{(\text{Pertenece}(q,r) \wedge \text{Pertenece}(q,s)) \Rightarrow (q = p)\}]\}]]$$

c) "Dos rectas perpendiculares a dos rectas paralelas dadas, de forma que las perpendiculares sean distintas entre sí, son paralelas"

$$\forall r,s,p,q[\{\text{Paralelas}(r,s) \wedge (\text{perpendicular}(r,p) \neq \text{perpendicular}(s,q))\} \Rightarrow \text{Paralelas}(\text{perpendicular}(r,p), \text{perpendicular}(s,q))]$$

EJERCICIO 4 [adaptado de "Introducción a la Lógica Formal" de A. Deaño]

Traduce a FBF

(i) "Los comunistas apoyan en todos los países todo movimiento revolucionario en contra del orden social y político existente" [traducción 1 de la frase de Marx-Engels, en alemán en el original]

(ii) "Solo un comunista apoyaría en todos los países todo movimiento revolucionario en contra del orden social y político existente" [traducción 2 de la frase de Marx-Engels, en alemán en el original]

Utiliza para ello los predicados

$C(x)$ = "x es comunista"

$P(y)$ = "y es un país"

$R(z)$ = "z es un movimiento revolucionario en contra del orden social y político existente"

$A(x,y,z)$ = "x apoya en y a z"

SOLUCIÓN:

(i) $\forall x,y,z\ [[C(x) \wedge P(y) \wedge R(z)] \Rightarrow A(x,y,z)]$

(ii) $\forall x\ [[\forall y,z\ [(P(y) \wedge R(z)) \Rightarrow A(x,y,z)]] \Rightarrow C(x)]$

EJERCICIO 5:
Consideremos las variables x,y,z,… (dominio: personas), las variables p,q,… (dominio: lugares), y los predicados

At(x,p): x está en p
T(x,y): x está hablando con y

Sin utilizar el predicado de igualdad, formaliza como FBF's en lógica de predicados las siguientes frases en lenguaje natural (b-c)

"Si una persona está hablando con otra, la segunda se encuentra hablando con la primera" [ejemplo]

$$\forall x, y\ [T(x,y)\ \Longrightarrow T(y,x)]$$

a) ¿Por qué no es necesaria la doble implicación en la FBF anterior?

Porque basta renombrar las variables ($x \to y$, $y \to x$) y, dado que ambas están cuantificadas universalmente, permutar sus cuantificadores para obtener la implicación en el sentido opuesto.

$$\forall y\ \forall x\ [T(y,x)\ \Longrightarrow T(x,y)] \equiv \forall x\ \forall y\ [T(y,x)\ \Longrightarrow T(x,y)]$$

b) "Si una persona está hablando con otra, las dos se encuentran en el mismo lugar"

$$\forall x, y[T(x,y)\ \Longrightarrow [\exists p(At(x,p) \wedge At(y,p))]$$

c) "Si una persona está hablando con otra, entonces la segunda se encuentra en el mismo lugar que la primera"

$$\forall x, y, p[(T(x,y) \wedge At(x,p))\ \Longrightarrow At(y,p)]$$

d) Las frases b) y c) no proporcionan la misma información. ¿Qué información sería necesario añadir para que proporcionen la misma información? Expresa esta información como FBF utilizando el predicado de igualdad.

Es necesario especificar que una persona está en algún lugar

$$\forall x \exists p \; At(x,p)$$

y que éste es único.

$$\forall x, p, q[(At(x,p) \wedge At(x,q)) \implies Equal(p,q)]$$

EJERCICIO 6:
Escribe las siguientes frases sobre máquinas de Turing como FBFs utilizando las siguientes variables, funciones y predicados:

Variables:	t, t1, t2,…	[máquinas de Turing]
	d, d1, d2…	[datos]
	a, a1, a2,…	[algoritmos]
	p, p1, p2,…	[problemas]

Predicados:

Universal(<máquina de Turing>): <máquina de Turing> es universal.

Halt(<máquina de Turing>,<datos>): <máquina de Turing> se detiene tras haber procesado el contenido de su cinta (<datos>)

Funciones:

sol(<problema>): evalúa a la solución de <problema>.

comp(<algoritmo o máquina de Turing>, <datos>): evalúa al resultado de aplicar <algoritmo> o <máquina de Turing> a <datos>.

descr(<máquina de Turing>, <datos>): Descripción de <máquina de Turing> junto con el contenido de su cinta (<datos>). Es del tipo [datos]

Se pueden utilizar los predicados de igualdad (=) y desigualdad (≠).
No olvides utilizar paréntesis para delimitar el ámbito de las variables.

a) "Se puede diseñar una máquina de Turing para computar la solución de cualquier problema que pueda ser resuelto mediante la aplicación de un algoritmo sobre unos datos de partida" [Ejemplo]

$$\forall p,d\ [[\exists a\ (sol(p) = comp(a,d))] \Rightarrow [\exists t\ (sol(p) = comp(t,d))]]$$

b) "Una máquina de Turing universal puede simular la acción de cualquier máquina de Turing sobre los datos almacenados en su cinta"

$$\forall u\ [Universal(u) \Rightarrow \forall t,d\ \ [comp(t,d) = comp(u,descr(t,d))]$$

c) "No existe ningún algoritmo que permita determinar si la acción de una máquina de Turing sobre los datos almacenados en su cinta conducirá a un estado de parada (la salida del algoritmo sería +1) o si la máquina seguirá computando sin llegar a detenerse (la salida del algoritmo sería -1)"

$$\neg\exists a\ [\ (\forall t,d\ [Halt(t,d) \Leftrightarrow (comp(a,descr(t,d)) = 1)])$$
$$\wedge\ ((\forall t,d\ [\neg Halt(t,d) \Leftrightarrow (comp(a,descr(t,d)) = -1)])]$$