PROBLEMAS. HOJA 7. Sistemas Dinámicos, Caos.

1. Sea una ecuación dicreta unidimensional no-lineal $x_{n+1} = f(x_n)$. Supongamos que f es diferenciable y $\{x_0, \ldots, x_d\}$ es una tal que $f(x_d) = x_0$ y $f(x_i) = x_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, d-1$ (órbita periódica de periodo $d+1$). Llamamos a $g = f^{d+1}$. Demostrar que

   i) $\{x_0, \ldots, x_d\}$ son puntos fijos de g.
   Para $i \neq d$, $g(x_i) = f^{d+1}(x_i) = f^d(x_{i+1}) = \cdots = f^{d+1-(d-i)}(x_d) = f^{i+1}(x_d) = f^i(x_0) = \cdots = f(x_{i-1}) = x_i$.
   Finalmente, $g(x_d) = f^{d+1}(x_d) = f^d(x_0) = \cdots = f(x_{d-1}) = x_d$.

   ii) $g'(x_0) = \cdots = g'(x_d) = m$, ¿quién es m con respecto a f?
   Como $g(x_0) = f^{d+1}(x_0)$, entonces aplicando la regla de la cadena repetidas veces

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= f'(x_0)(f^d)'(f(x_0)) = f'(x_0)(f^d)'(x_1) \\ &= f'(x_0)f'(x_1)(f^{d-1})'(f(x_1)) = f'(x_0)f'(x_1)(f^{d-1})'(x_2) = \cdots \\ &= f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_d) = m. \end{aligned}$$

   iii) A este valor $g'(x_0) = m$ se le llama *multiplicador característico* de la órbita periódica y $\lambda = \ln|m|$ es el exponente característico o de Liapunov de la misma. Dependiendo del valor de λ qué tipo de punto crítico es la órbita periódica.

   - Si $\lambda < 0$, entonces $|m| < 1$ y los x_i son puntos atractores de g. La órbita es atractora
   - Si $\lambda > 0$, entonces $|m| > 1$ y los x_i son puntos repulsores de g. la órbita es repulsora

2. Consideremos la ecuación discreta paramétrica

$$x_{n+1} = f(a, x_n) = a - x_n^2, \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

   i) Identificar los puntos críticos $x(a)$. Analizar su estabilidad.
   Raíces de $x^2 + x - a = 0$, entonces:

$$x_1(a) = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}, \qquad x_2(a) = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

   - No hay soluciones cuando $a < -1/4$.
   - Dos soluciones cuando $a > -1/4$.
   - Punto de bifurcación $(a, x(a)) = (-1/4, -1/2)$.

   Estabilidad. $f'(x) = -2x$. Entonces, $f'(x_1(a)) > 1$. $x_1(a)$ siempre es repulsor. Por otro lado,

$$|f'(x_2(a))| < 1 \iff 1 - \sqrt{1+4a} > -1 \iff a \in (-1/4, 3/4).$$

   Entonces en $(3/4, 1/2)$ es otro punto de bifurcación.

   ii) Representar en el plano los puntos $(a, x(a))$. Dibujar con línea continua el trazo de los atractores y con discontinua los repulsores, esto se conoce como *diagrama de bifurcación*.

   iii) Identificar los puntos de bifurcación del plano. Notar que uno de ellos verifica que $f(a, x(a)) = x(a)$ y $f'(x(a)) = 1$. Esto se conoce como *bifurcación tangente*.
   Son dos: $(-1/4, -1/2)$ y $(3/4, 1/2)$.
   Efectivamente, $f(-1/4, -1/2) = -1/2$ y $f_x(-1/4, -1/2) = 1$. En este caso, la función $y = f(-1/4, x) = -1/4 - x^2$ es tangente a $y = x$. Esto es típico de funciones $f(a, x)$ que no tienen cortes con x para $a < a_0$ y dos cuando $a > a_0$, o lo recíproco.

3. Consideremos la ecuación discreta paramétrica

$$x_{n+1} = f(a, x_n) = ax_n - x_n^3, \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

i) Identificar los puntos críticos $x(a)$. Analizar su estabilidad.
Los puntos críticos son las raíces de $(a-1)x - x^3 = 0$. Entonces son:

$$x_1(a) = 0, \qquad x_2(a) = \sqrt{a-1}, \qquad x_2(a) = -\sqrt{a-1}.$$

Para $a \leq 1$ tiene un punto crítico ($x_1(a)$) y para $a > 1$ tiene tres ($x_1(a)$, $x_2(a)$, $x_3(a)$).
Ahora, $f_x(a, x) = a - 3x^2$

- Para $f_x(a, x_1(a)) = a$. $x_1(a)$ es atractor para $a \in (-1, 1)$ y repulsor cuando $|a| > 1$
- Para $f_x(a, x_2(a)) = f_x(a, x_2(a)) = 3 - 2a$. Entonces son atractores para $a \in (1, 2)$ y repulsores para $a > 2$

¿Qué sucede con 0 cuando $a = 1$? Tomo x_0 de modulo menor que 1, entonces $x_1 = x_0(1 - x_0^2)$ y se tiene $|x_1| < |x_0|$. 0 es ESTABLE.

ii) Dibujar el *diagrama de bifurcación* $(a, x(a))$.

iii) Identificar los puntos de bifurcación del plano. Este caso de bifurcación se conoce como *horca* o *tridente*.
Los puntos de bifurcación son (-1,0), (1,0), (2,1) y (2,-1).

4. Sea el sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases} \tag{1}$$

a) Supongamos $r < 1$. Probar que $L(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$ es una función de Lyapunov. Como consecuencia las soluciones del sistema de Lorenz tienden al origen.
Tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{L} &= 2x\sigma(y - x) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma z(xy - bz) \\ &= -2\sigma(x^2 + y^2 - (1 + r)xy) - 2b\sigma z^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\dot{L} < 0$ fuera del origen ya que

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - (1 + r)xy > 0$$

para $(x, y) \neq (0, 0)$. Esto es claramente cierto en el eje y. Ahora, a lo largo de la recta $y = mx$ en el plano xy se tiene

$$g(x, mx) = x^2(1 + m^2 - (1 + r)m).$$

El término cuadrático $m^2 - (1 + r)m + 1$ es positivo para todo m si $r < 1$. Así $g(x, y) > 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) Cuando $r > 1$ ya no es cierto que todas las soluciones tienden al origen. Sin embargo, podemos decir que las soluciones que comienzan lejos del origen al menos se acercan. Sea

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2.$$

Existe ν^* tal que cualquier solución de (1) que comience fuera del elipsoide $V = \nu^*$ finalmente entra en este elipsoide y luego queda atrapado en él para todo el tiempo futuro.

Se calcula

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= 2rx\sigma(y-x) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma(z-2r)(xy - bz) \\
&= -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z^2 - 2rz)) \\
&= -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z-r)^2 - br^2))
\end{aligned}
$$

La ecuación

$$
rx^2 + y^2 + b(z-r)^2 = \nu
$$

define un elipsoide cuando $\nu > 0$ de centro $(0,0,r)$. Cuando $\nu > br^2$ tenemos que $\dot{V} < 0$. Así cuando se elige ν^* suficientemente grande tal que el elipsoide $V(x,y,z) = \nu^*$ contiene estrictamente el elipsoide $rx^2 + y^2 + b(z-r)^2 = br^2$ en su interior, se tiene que $\dot{V} < 0$ para todo $\nu \geq \nu^*$.