Modelización

Adimensionalización

Rafael Orive Illera
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
rafael.orive@uam.es

Noviembre 2019

Magnitudes

Una magnitud es una medida asignada para cada uno de los objetos de un conjunto medible. Las magnitudes se puedes abstraer de objetos del mundo físico o propiedades físicas que son susceptibles de ser medidos. Consideramos

$$mx''(t) = F(t,x), \quad t \in [0,T], \qquad x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0, \tag{1}$$

donde tenemos las magnitudes: t, m, x, F, T, x_0 y v_0.

Llamamos magnitudes elementales aquellas que no se pueden descomponer en otras. En (1) tenemos 3 magnitudes elementales:

$$\{\text{tiempo}\} = L_1,\ \{\text{masa}\} = L_2,\ \{\text{longitud}\} = L_3.$$

Sean $L_1, L_2, \ldots, L_n$ magnitudes elementales.
Una magnitud A tiene dimensión $[A] = L_1^{a_1} L_2^{a_2} \cdots L_n^{a_n}$ si supuesto que $a \in \mathbb{R}$ es la medida de A en el sistema de unidades de $L_1, L_2, \ldots, L_n$ entonces, bajo el cambio de unidades $L_1' = \lambda_1 L_1, \ldots, L_n' = \lambda_n L_n$, la medida de A en el sistema $L_1', L_2', \ldots, L_n'$ es:

$$a' = a \lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \cdots \lambda_n^{a_n}.$$

Proposición: Sean A, B magnitudes tales que $[A] = L_1^{a_1} \cdots L_n^{a_n}$, $[B] = L_1^{ba_1} \cdots L_n^{b_n}$. Sea C otra magnitud dependiente de A y B. Si las medidas a, b, c de estas magnitudes verifican que existe $d, p, q \in \mathbb{R}$ tal que $c = da^p b^q$, entonces

$$[C] = L_1^{a_1 p + b_1 q} \cdots L_n^{a_n p + b_n q}.$$

- Una magnitud A se dice adimensional si $[A] = 1$ $(a_1 = 0, \ldots, a_n = 0)$.

- Dado un conjunto de magnitudes $q_1, \ldots, q_m$ tales que $[q_i] = L_1^{a_{1i}} \cdots L_n^{a_{ni}}$ para $i = 1, \ldots, m$, a la matriz de coeficientes (a_{ji}) con $j = 1, \ldots, n$ se llama matriz de dimensiones del conjunto.

- Una "ley (física)" $f(q_i, \ldots, q_m) = 0$ se dice que es invariante frente al cambio de unidades si $f(q_i', \ldots, q_m') = 0$ para todo cambio de unidades $L_1' = \lambda_1 L_1, \ldots, L_n' = \lambda_n L_n$ y q_i' medida de q_i en el sistema de unidades $L_1', \ldots, L_n'$.

Proposición: *Si $n < m$ y el rango de la matriz de dimensiones es $r \leq n$, entonces existen $m - r$ cantidades adimensionales $\pi_1, \ldots, \pi_{m-r}$ relacionadas con $q_1, \ldots q_m$.*
Demostración: Una magnitud $\pi = q_1^{\alpha_1} \ldots q_m^{\alpha_m}$ es adimensional si resuelve el sistema $A\alpha = 0$ y Teorema de Rouche-Frobenius

Teorema Pi
Sea $f(q_i, \dots, q_m) = 0$ una ley invariante frente a los cambios de unidades. Supongamos $n < m$ y el rango de la matriz de dimensiones es $r \leq n$. Entonces, existen $m - r$ cantidades adimensionales $\pi_1, \dots, \pi_{m-r}$ relacionadas con $q_1, \dots q_m$ y tales que la ley invariante es equivalente a la relación

$$F(\pi_1, \dots, \pi_{m-r}) = 0,$$

para una cierta función $F : \mathbb{R}^{m-r} \to \mathbb{R}$.

Demostración: Suponemos sin perdida de generalidad que las primeras r columnas de la matriz de dimensiones son linealmente independientes. Cada una de las magnitudes $q_{r+1}, \dots, q_m$ es una combinación de $q_1, \dots, q_r$ con lo que obtenemos las $m - r$ magnitudes adimensionales π_j. Así podemos sustituir cada q_{r+j} por π_j y la combinación de $q_1, \dots, q_r$, resultando:

$$\begin{aligned} 0 = f(q_i, \dots, q_m) &= f(q_i, \dots, q_r, \pi_1 q_i^{\alpha_{11}} \cdots, q_r^{\alpha_{1r}}, \dots, \pi_{m-r} q_i^{\alpha_{m-r1}} \cdots, q_r^{\alpha_{m-rr}}) \\ &= G(q_i, \dots, q_r, \pi_1, \dots, \pi_{m-r}) = G(q_i', \dots, q_r', \pi_1, \dots, \pi_{m-r}) \end{aligned}$$

y haciendo el cambio $L_1', \dots, L_n'$ tal que las medidas $q_i' = 1, \dots, q_r' = 1$ identificamos $F(\pi_1, \dots, \pi_{m-r}) = 0$.