ALEJANDRO SANTORUM VARELA TAREA 8

$$y_{n+2} - y_n = \frac{2h}{3}\left(f_{n+2} + f_{n+1} + f_n\right)$$

Primer polinomio caract. : $\rho(\xi) = \xi^2 - 1$

Segundo polinomio caract. : $\sigma(\xi) = \frac{2}{3}(\xi^2 + \xi + 1)$

Polinomio de estabilidad : $\Pi(r,z) = \rho(r) - z\sigma(r)$, $z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \Pi(r,z) = r^2 - 1 - \frac{2z}{3}(r^2 + r + 1)$$

Viendo que es complicado analizar las raíces de $\Pi(r,z)$, vamos a utilizar otra técnica:

Las raíces de un polinomio son funciones continuas de sus coeficientes. Por consiguiente, $Fr(D) \subset \mathcal{F}$, donde

$\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C} : \exists$ una raíz de $\Pi(r,z)$ de módulo $1\}$

Si $z \in \mathcal{F}$, existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $0 = \Pi(e^{i\theta}, z) = \rho(e^{i\theta}) - z\sigma(e^{i\theta})$

$$\Rightarrow z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi .$$

$$\Rightarrow z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} = \frac{e^{2i\theta} - 1}{\frac{2}{3}(e^{2i\theta} + e^{i\theta} + 1)} = \frac{\cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta) - 1}{\frac{2}{3}(\cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta) + \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta + 1)} \overset{\text{fórmulas ángulo doble}}{=}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta + 2i\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta - \underbrace{1}_{=\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}}{\frac{2}{3}(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta + 2i\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta + \underbrace{1}_{=\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta})} =$$

$$= \frac{-2\,\mathrm{sen}^2\theta + 2i\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{\frac{2}{3}(2\cos^2\theta + 2i\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)} = \frac{-3\,\mathrm{sen}^2\theta + 3i\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta + 2i\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta} =$$

$$= \frac{3\,\mathrm{sen}\theta\,\overbrace{(i\cos\theta - \mathrm{sen}\theta)}^{= ie^{i\theta}}}{2\cos\theta\underbrace{(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)}_{= e^{i\theta}} + \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta} = \frac{3\,\mathrm{sen}\theta \cdot i \cdot e^{i\theta}}{e^{i\theta}(2\cos\theta + 1)} = \boxed{\frac{3i\,\mathrm{sen}\theta}{2\cos\theta + 1}}$$

Si graficamos $z = \dfrac{3i\,\text{sen}\,\theta}{2\cos\theta + 1}$ ayudándonos de Matlab podemos ver que $\mathcal{F}$ es (aproximadamente) el segmento $(-143i, 143i)$ (compruébese imagen adjunta). Por tanto hay dos posibilidades: $D = \emptyset$ ó $D = \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}$.

Nos basta mirar un punto: sea $z = \frac{-3}{2}$, entonces

$$\Pi\left(r, \tfrac{-3}{2}\right) = r^2 - 1 + r^2 + r + 1 = 2r^2 + r = 0 \iff$$

$$\iff r = \begin{cases} r_1 = \frac{-1}{2} \\ r_2 = 0 \end{cases}$$ Ambas raíces con módulo < 1

Por consiguiente, $z = \frac{-3}{2} \in D$ y $D = \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}$

Finalmente, como $\mathbb{C}^- \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{F} = \mathbb{C} \setminus (-143i, 143i)$

$\Rightarrow$ el método es A-estable.

santorum ▸ Desktop ▸ 5curso ▸ mnedo ▸ Practicas ▸ practica4

Command Window

```
>> t = linspace(0, 2*pi, 200);
>> z = (3*complex(0,1)*sin(t))./(2*cos(t) + 1);
>> plot(z)
>>
```