3. MODELOS UNIDIMENSIONALES

MALTHUS

La tasa de cambio de la población se determina en función de la tasa de nacimiento β y la tasa de defunciones μ.

$x' = (\beta - \mu)x$ con $x(0) = x_0$ dato inicial

Solución : $x(t) = e^{rt} \cdot x_0$ con $r = \beta - \mu$

- Si $r > 0$ crecimiento exponencial
- Si $r = 0$ la población no cambia
- Si $r < 0$ la población se extingue

$R_0 = \frac{\beta}{\mu}$ (basic reproductive number) captura esta bifurcación.

MODELO LOGÍSTICO

La tasa de crecimiento solo depende del tamaño de la población
Consideramos K = capacidad máxima del ecosistema ; la tasa de
crecimiento $r(x) = b(K-x)$ decrece cuando x se hacerca al
nivel de saturación hasta que se hace cero.

$$x' = bx(K-x) = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad \text{con} \quad a = bK$$

Solución : $$x(t) = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-at}}$$

HARVESTING

Nuevo factor: harvesting (cosechar)

~~$x' = f(x) - h$~~ con h constante

$$x' = x(1-x) - h$$

Raíces de $x(1-x) - h = 0 \Longrightarrow x_\pm = (1 \pm \sqrt{1-4h})/2$

- $h < 1/4$ dos raíces y son puntos hiperbólicos
  - x_- repulsor (fuente)
  - x_+ atractor (pozo)
- $h = \frac{1}{4}$ una raiz. No es hiperbólico. Es inestable
- $h > 1/4$ raíces no reales, sin puntos de equilibrio

* Si la tasa de cosecha es menor que $\frac{1}{4}$ y la población inicial es mayor que x_- la población sobrevive.

* Si la tasa de cosecha es mayor que $\frac{1}{4}$ la especie se extingue en poco tiempo.

DELO SCHEEFER

iponemos que el crecimiento de la población sigue un modelo logístic ay caza controlada limitada por el número de individuos.

$' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex$ cambio de variables $y = \frac{x}{K}$; $\tau = rt$; $h = \frac{E}{r}$

$= y(1-y) - hy \xrightarrow{\text{ptos. críticos}} 0$ y $1-h$

- $h = \frac{E}{r} > 1$ La población se extingue en tiempo finito.
- $h = 1$ se produce bifurcación $y(t) = \dfrac{y_0}{y_0 t + 1}$
- $h < 1$, dos equilibrios: 0, $1-h$
  - $1-h$ es pto. hiperbólico atractor
  - 0 es inestable

(*) Solución explícita diapositivas

LOGÍSTICA + DEPREDACIÓN (Spuce Budworm)

$$N' = r_p N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - p(N) \quad \text{con} \quad p(N) = \frac{BN^2}{A^2+N^2}$$

tasa de depredación

* Si la población es pequeña la tasa de depredación es casi 0 porque los depredadores buscan otras presas.
* La depredación no puede ser muy grande. Hay una cota superior de cuantas polillas pueden ser cazadas.
* $p'(N) = \dfrac{2A^2NB}{(A^2+N^2)^2} > 0$ la tasa de depredación siempre aumenta.
* $p''(N) = \cdots \Longrightarrow N = \dfrac{A}{\sqrt{3}}$ pasa de aceleración positiva a negativa.

Cambio de escala: $u = \dfrac{N}{A}$; $\tau = \dfrac{Bt}{A}$; $r = \dfrac{A r_p}{B}$; $q = \dfrac{K}{A}$

Ec. logística: $\dfrac{du}{d\tau} = u' = ru\left(1 - \dfrac{u}{q}\right) - \dfrac{u^2}{1+u^2} = u\left(r\left(1-\dfrac{u}{q}\right) - \dfrac{u}{1+u^2}\right)$

Ptos. bifurcación $(r,q) = \left(\dfrac{2u^3}{(1+u^2)^2}, \dfrac{2u^3}{u^2-1}\right)$

4. SISTEMAS DE EDO's

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \qquad F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad F(x,y) = (f(x,y),\, g(x,y))$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Autovalores de A

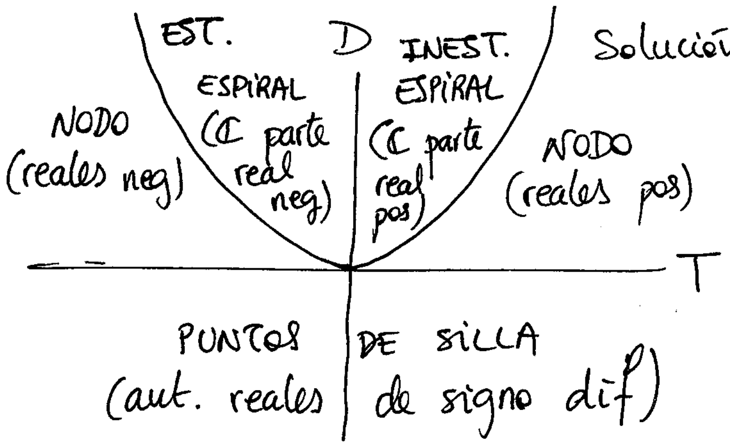
→ dos reales $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Solución: $\left.\begin{array}{l} x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0 \\ y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0 \end{array}\right\}$ el comportam. depende del signo

→ complejos $\lambda = a + i\varphi$, $\bar{\lambda} = a - i\varphi$

Solución: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(\varphi t) & -\mathrm{sen}(\varphi t) \\ \mathrm{sen}(\varphi t) & \cos(\varphi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

centro o foco



⊛ En el eje vertical positivo: centros (imaginarios puros)

⊛ En la gráfica: nodos impropios (raíces dobles)

LINEALIZACIÓN

Si $F(x_\infty, y_\infty) = 0 \implies P_\infty = (x_\infty, y_\infty)$ pto. crítico

$$A = DF(x_\infty, y_\infty) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_\infty, y_\infty) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_\infty, y_\infty) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_\infty, y_\infty) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_\infty, y_\infty) \end{pmatrix}$$

Tma. Poincare-Bendixon: si una trayectoria permanece en una región acotada en la que no hay puntos críticos entonces converge a una trayectoria periódica límite.

Tma: una trayectoria cerrada rodea necesariamente a un punto crítico del sistema.

Tma. Criterio de Bendixon: Si en una región $div(F) \neq 0$, entonces el sistema $x' = F(x)$ no tiene trayectorias cerradas

INTEGRALES PRIMERAS

Una función $E: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (no constante) es una integral primera del sistema si $E(x(t), y(t))$ es constante, es decir:

$$\frac{dE(x(t), y(t))}{dt} = 0$$

Ocurre en sist. conservativos y se asocia a la energía a lo largo de la trayectoria

FUNCIONES DE LIAPUNOV

$E: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot f + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot g$$

Si E es def. positiva, $E(P_\infty) = 0$, $\frac{dE}{dt}$ es semidef. neg.
$\Longrightarrow P_\infty$ es estable

Si $\frac{dE}{dt}$ es def. neg $\Longrightarrow P_\infty$ es asint. estable.

$F = (f, g)$

Admite un hamiltoniano $\iff$ $\operatorname{div}(F) = f_x + g_y = 0$

H si $F = \nabla^{\perp} H = (H_y, -H_x)$

Un hamiltoniano es una integral primera

(*) Si no admite hamiltoniano $\Longrightarrow$ factores integrantes

Sistema conserv. $\equiv$ admite $\underbrace{\text{integral primera}}$

no pueden ser:

- asint. estables
- inestables
- ciclos

$\Longrightarrow$ CENTRO ESTABLE

5. EPIDEMIOLOGÍA

[Un saco de cosas inútiles]

$S_0 =$ susceptibles iniciales

Tma. del Umbral de la Epidemiología

Sea $S_0 = \rho + \nu \quad (\nu > 0)$ con $\frac{\nu}{\rho} << 1$

Sea $I_0 << 1$ (infectados iniciales)

Entonces, el número de infectados finalmente es aprox. 2ν.

6. DINÁMICA DE POBLACIONES

Durante la guerra se pesca menos. ¿Por qué esto beneficia más a las presas que a los predadores?

$x(t) \equiv$ nº presas en tiempo t. (sigue modelo Malthus en ausen[cia] de depredadores con tasa $a>0$)

$y(t) \equiv$ nº depredadores en tiempo t.

(sin presas desaparecerán, decrecen con tasa $c>0$)

Los encuentros x, y benefician a los depredadores con tasa $b>0$. tasa $d>0$ y disminuyen a las presas con

$$\begin{cases} x' = ax - bxy = x(a-by) = f(x,y) \\ y' = -cy + dxy = y(-c+dx) = g(x,y) \end{cases}$$

Puntos críticos: $X_0 = (0,0)$ $\quad X_1 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

$X_0 = (0,0)$ es un pto. de silla

$X_1 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ es un centro (autovalores $\pm i\sqrt{ac}$)

Teoma de Liapunov no nos dice nada

Apunta a la posible existencia de trayectorias cerradas

Tma. Principio de Volterra: Una pesca moderada $\varepsilon < a$ aumenta el número de peces, decrece el número de tiburones

7.1 MODELOS DISCRETOS UNIDIMENSIONALES NO LINEALES

$$x(n+1) = f(x(n)) \xrightarrow[\text{continuo}]{\substack{\text{para relacionar}\\ \text{con caso}}} x(n+1) = x(n) + \tilde{f}(x(n))$$

Ecuación logística discreta: $y(n+1) = (1+a)\,y(n) - \frac{a}{k}(y(n))^2$

Ec. logística discreta normalizada: $x(n+1) = (1+a)\,x(n)\,(1-x(n))$

Notación: $f^n = f \circ \dots \circ f$ n veces

$\gamma(x_0) := \{ x_n,\ n \in \mathbb{N} : x_n = f^n(x_0) \} = \bigcup_{k \geq 0} f^k(x_0)$

↑ órbita de x_0 y $x_0 :=$ semilla de la órbita.

Puntos fijos: $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Dan lugar a órbitas constantes y a equilibrios.

Puntos periódicos: $f^n(x_0) = x_0$ y $f^k(x_0) \neq x_0$ $k < n$

⊛ Los puntos críticos son los puntos fijos

Tma. de Linealización

Si $|f'(\bar{x})| < 1 \implies \bar{x}$ atractor

Si $|f'(\bar{x})| > 1 \implies \bar{x}$ repulsor

$|f'(\bar{x})| = 1$ no nos dice nada

7.2 CAOS

La teoría del caos tiene tres ingredientes:

1. Movimiento oscilante: órbita periódica u órbita cuasiperiódica cuando $t \to \infty$.
2. Determinismo: el comportamiento irregular, en dimensión finita, surge de la no linealidad (no del azar)
3. Sensibilidad a las condiciones: un leve cambio en las condiciones iniciales produce comportamientos diferentes pasado un tiempo suficientemente largo.

Los sistemas caóticos se caracterizan por ser modelizables mediante un sistema dinámico que posee un atractor Λ.

Este se caracteriza por:

1. Λ es un conjunto de $\mathbb{R}^n$ compacto e invariante
2. Existe un abierto $U \supseteq \Lambda$: $\forall x \in U \quad \phi_t(x) \in U$ y
$$\bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_t(U)} = \Lambda .$$
3. Transitividad. Dados $y_1, y_2 \in \Lambda$ y U_j entornos de y_j, hay una solución que empieza en U_1 y luego pasa por U_2.

Dentro de los atractores se define como atractor extraño cuando el atractor exhibe dependencia sensible de las condiciones iniciales.

El más famoso es el atractor de Lorenz

8.1 CÁLCULO DE VARIACIONES

El cálculo de variaciones nos permite encontrar los mínimos y los máximos de estos problemas dentro de un conjunto infinito de soluciones.

$f :=$ densidad, depende de x, y, y'.

$J :=$ funcional $\qquad J[y] = \int_a^b f(x,y,y')\,dx$

Condiciones de frontera $\quad y(a) = y_a \;,\; y(b) = y_b$

ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

$$\frac{\delta[J]}{dy} = 0 \iff \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0}$$

Si $f(x,y,y') = f(y,y')$ (lagrangiano autónomo) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f - y' f_{y'} \text{ es constante}}$

Obs: $f - y' f_{y'}$ es una integral primera (EDOs).

Si $f(x,y,y') = f(x,y')$ (y es cíclica) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0}$$

LEMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

Si $M, \eta \in C[a,b]$ y además $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Entonces si $\int_a^b M(x)\eta(x)\,dx = 0 \quad \forall \eta \in C^1[a,b] \Rightarrow M \equiv 0$ en $[a,b]$.

Obs: Si $M \in C[a,b]$ y si $\int_a^b M(x)\eta'(x)\,dx = 0 \quad \forall \eta \in C^1[a,b]$ y $\eta(a) = \eta(b) = 0 \Rightarrow M(x) \equiv C$ en $[a,b]$.