CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2016-2017. **HOJA 6.**

1) Sea m un número impar no divisible por 5.

a) Demostrar que el desarrollo decimal de $1/m$ es periódico y que dicho periodo es de longitud un divisor de $\phi(m)$.

Por ejemplo $1/11 = 0.0909\ldots$ y $2 \mid \phi(11)$; $1/13 = 0.076923076923\ldots$ y $6 \mid \phi(13)$.

(Sugerencia: Al hacer la división larga el primer resto es 1, ¿cuándo vuelve a aparecer?).

b) Demostrar que si $1/n$ tiene periodo $n-1$ entonces n es primo. Encontrar algún número con esta propiedad.

c)* Demostrar que si $1/p$ con $p > 2$ primo tiene periodo $p-1$ entonces las cifras decimales en los lugares k y $k + (p-1)/2$ siempre suman 9.

2) Demostrar dados dos números reales x e y tales que $x < y$ que existe un racional q tal que $x < q < y$.

3) Demostrar dados dos números racionales x e y tales que $x < y$ que existe un irracional t tal que $x < t < y$.

4) Hallar la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

$$a)\ \frac{1-i}{1+i} \qquad b)\ \frac{(3-i)(2+i)}{3+i} \qquad c)\ \frac{(2-i)^2}{(3-i)^2} \qquad d)\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$

5) Expresar en forma polar:

$$a)\ 1+i \qquad b)\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad c)\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad d)\ -2-2i$$

6) Calcular

$$a)\ \exp(2011\pi i) \qquad b)\ \exp(\pi i/2) \qquad c)\ \exp(\pi 3^{2011} i/2) \qquad d)\ \exp(-\pi i/4)$$

7) Hallar para qué numeros complejos z y w de módulo 1 se cumple $z + w = 2$. ¿Cuándo se cumple $z + w = 1$ con z y w de módulo 1?

8) Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números:

$$a)\ 1+i \qquad b)\ 2-i \qquad c)\ 8-6i \qquad d)\ -8-15i \qquad e)\ 15-8i$$

9) Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:

a) $z^2 + 3iz - 3 + i$

b) $2z^2 + 4z + 2 + i$

c) $z^2 + (2+3i)z - 7/2 - 7i$

d) $z^2 + (5+i)z + 17i/4$

10) a) Demostrar la identidad

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\operatorname{sen}(x/2)}$$

para x que no sea múltiplo entero de 2π.

Sugerencia: Es la suma parcial de una progresión geométrica.

b) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $N \in \mathbb{N}$, $\left|\operatorname{sen}(2N+1)x\right| \leq (2N+1)\left|\operatorname{sen} x\right|$.

11) Utilizando las ideas del ejercicio anterior, demostrar que para todo $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2N}\right) \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{N}\right) = 1.$$

12) Calcular los diferentes valores de:

$$a)\ \sqrt[3]{-8} \qquad b)\ \sqrt[3]{-i} \qquad c)\ \sqrt[4]{16i} \qquad d)\ (1+i)^n + (1-i)^n \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

13) Dado $n > 1$, demostrar que la suma de todas las raíces n-ésimas de 1 es cero.
Sugerencia: Comprobar que esa suma no cambia al multiplicar por cualquiera de ellas.

14) Sea $z = 2e^{2\pi i/5} + 1 + 2e^{-2\pi i/5}$. Utilizando que $\sum_{k=1}^{5} e^{2\pi k i/5} = 0$ (por el problema anterior), probar que $z^2 = 5$. Deducir de ello una expresión para $\cos(2\pi/5)$, que utiliza sólo raíces cuadradas de números naturales.

15) a) Demostrar que si dos enteros positivos n y m son suma de dos cuadrados, entonces su producto también lo es. *Sugerencia:* $|x+iy|^2 = x^2 + y^2$.

b) Usando que $13 = 2^2 + 3^2$ y $29 = 2^2 + 5^2$, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $377 = a^2 + b^2$.

16) Denotemos con $\mathrm{Im}(z)$ la parte imaginaria de z. Probar las fórmulas

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{c^2 + d^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{|z-i|^2}{\mathrm{Im}(z)} + 2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

para $z = (ai + b)/(ci + d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 1$.

17) a) Demostrar que la función $f(z) = (z-i)/(z+i)$ establece una biyección entre

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

b) Demostrar que la función $f(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$ con $a \in \mathbb{C}$ y $|a| < 1$ nos da una biyección de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$.

HOJA 6

$\boxed{7.}$ a) $|z| = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1$

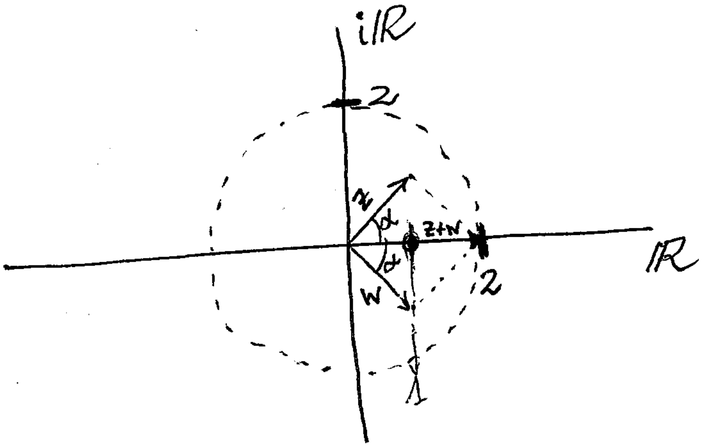
$|w| = 1 \Rightarrow |w| = \sqrt{c^2+d^2} = 1 \Rightarrow c^2+d^2 = 1$

$z + w = 2 = a+bi + c+di \quad \begin{cases} a+c = 2 \Rightarrow a = 2-c \\ b+d = 0 \Rightarrow b = -d \end{cases}$

$\begin{cases} (2-c)^2 + (-d)^2 = 1 \Rightarrow 4-4c+\underbrace{c^2+d^2}_{1} = 1 \Rightarrow 4-4c+1 = 1 \Rightarrow 4c = 4 \Rightarrow \boxed{c=1} \\ c^2+d^2 = 1 \end{cases}$

$\boxed{a = 1}$

$\boxed{b = 1-1 = 0}$ $\boxed{d = 0}$



b) Igual que 7.a)

$\boxed{2.}$ $x-y>0 \Rightarrow \exists n \quad n > \frac{1}{x-y} \Rightarrow x-y > \frac{1}{n}$

$[ny] \leq ny < [ny]+1$

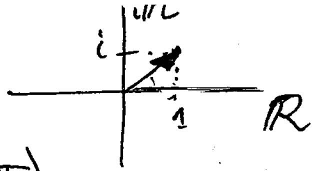
$\Downarrow$

$\frac{[ny]}{n} \leq y < \frac{[ny]+1}{n}$

$x = \underbrace{y}_{\geq \frac{[ny]}{n}} + \underbrace{x-y}_{> \frac{1}{n}} > \frac{1}{n} + \frac{[ny]}{n} = \frac{1+[ny]}{n} > y$

$\boxed{5.}$

a) $w = 1 + i \quad ; \quad |w| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$



$w = |w| . (\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha) \Rightarrow w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

$w = |w|\, e^{i\theta} = \sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad ; \quad |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$z = 1 .\, e^{i .\, \text{arcsen} \frac{-\sqrt{3}}{2}}$

$\boxed{4.}$

c) $\frac{(2-i)^2}{(3-i)^2} = \frac{4-4i-1}{9-6i-1} = \frac{3-4i}{8-6i} = (3-4i)\left(\frac{8+6i}{8^2+(-6)^2}\right) =$

$= \frac{(3-4i)\,(8+6i)}{64+36} = \frac{24+18i-32i+24}{100} = \frac{48-14i}{100}$

$\boxed{9.}$

c) $z^2 + (2+3i)z - \frac{7}{2} - 7i = 0$

$z = \frac{-2-3i \pm \sqrt{-5+12i+14+28i}}{2} = \frac{-2-3i \pm \overbrace{\sqrt{9+40i}}^{=\,a+bi}}{2}$

$(a+bi)^2 = 9+40i \Rightarrow a^2-b^2+2abi = 9+40i \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 9 \\ 2abi = 40i \Rightarrow 2a = \frac{40}{b} \Rightarrow a = 20/b \end{cases}$

$\left(\frac{20}{b}\right)^2 - b^2 = 9 \Rightarrow (b^2)^2 + 9b^2 - 400 = 0$

$b^2 = \frac{-9 \pm \sqrt{81+1600}}{2} = \frac{-9 \pm 41}{2}$ $\to -25$ (NO VÁLIDA) $\to 16$

$\boxed{b = \sqrt{16} = \pm 4} \qquad \boxed{a = \pm 5}$

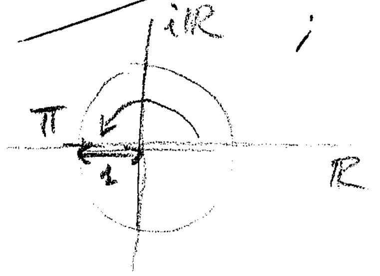
$$z = \frac{-2-3i \pm (5+4i)}{2} = \begin{cases} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i \\ = \frac{-7}{2} - \frac{7}{2} i \end{cases}$$

$\boxed{6.}$

a) $\exp(2011\pi i) = 1 e^{2011\pi i}$

$|z| = 1$; 2011π como 2011 es impar $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2011\pi \equiv \pi$



$-\pi$

$\boxed{12.}$

a) $\sqrt[3]{-8} =$

$z^3 = -8 = |z| e^{i\theta \cdot 3} =$