HOJA 5

61.

a) $\log e = \ln|e| + i\arg e = 1 + (\text{Arg}\, e + 2k\pi)i \quad k \in \mathbb{Z}$

$= 1 + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\log(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = 0 + (\text{Arg}(-i) + 2k\pi)i \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $\log(\sqrt{3}+i) = \ln|\sqrt{3}+i| + (\text{Arg}(\sqrt{3}+i) + 2k\pi)i \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Arg}(\sqrt{3}+i) = \alpha \quad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$\Rightarrow \log(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i \quad k \in \mathbb{Z}$

d) $(1-i)^4 = 4e^{-\pi i}$, de modo que $\log(1-i)^4 = \log(4e^{-\pi i}) =$

$= \ln 4 + i\arg(e^{-\pi i}) = \ln 4 + i(-\pi + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z} =$

$= \ln 4 + (2k-1)\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$

__Recuerdo__: $\log(1-i)^4 \neq 4\log(1-i)$

62.

a) $\log i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i \quad k\in\mathbb{Z} \Rightarrow i^{\sqrt{3}} = e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i\cdot\sqrt{3}} \quad k\in\mathbb{Z}$

Obs: $i^{\sqrt{3}}$ tiene infinitos valores

b) $\log 2 = \ln 2 + 2k\pi i \,, \quad k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 2^{-(1+i)} = e^{(\ln 2 + 2k\pi i)(-1-i)} = e^{-\ln 2 + 2k\pi + (-\ln 2 - 2k\pi)i} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2k\pi} \cdot e^{-(\ln 2)i} = \frac{1}{2}\cdot e^{2k\pi}\left(\cos(\ln 2) - i\,\mathrm{sen}(\ln 2)\right) \quad k\in\mathbb{Z}$$

obs: en este caso hay infinitos valores, con módulos acotados

c) $2^{\pi i} = e^{(\log 2)\pi i} = e^{(\ln 2 + 2k\pi i)\pi i} = e^{-2k\pi^2} e^{(\ln 2)\pi i} \quad k\in\mathbb{Z}$

obs: de nuevo infinitos valores pero con único arg principal: $(\ln 2)\pi$

d) $(1-i)^i = e^{(\log(1-i))i} = e^{\left[\ln\sqrt{2} + \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i\right]i} = e^{\pi/4 - 2k\pi} e^{\ln\sqrt{2}\, i}$

En todas los ejemplos anteriores, las potencias estaban en una recta que pasa por el origen, o en una circunferencia centrada en el origen.

63.

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 2$$

Razonamos de forma similar al Ej. 2 de los apuntes.
Primero multiplicamos por $2e^{iz}$: $e^{2iz} + 1 = 4e^{iz}$.
Escribimos $w = e^{iz}$ y tenemos $w^2 - 4w + 1 = 0$ cuyas soluciones son $w = \frac{4+\sqrt{16-4}}{2}$, $w = \frac{4-\sqrt{12}}{2}$

$$e^{iz} = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3} \quad , \quad e^{iz} = 2-\sqrt{3}$$

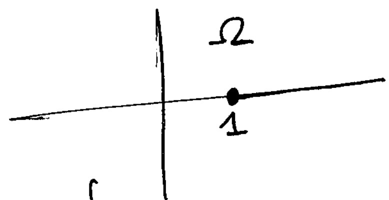
$iz = \log(2+\sqrt{3}) = \ln(2+\sqrt{3}) + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, de donde

$$\begin{cases} z = 2k\pi - i\ln(2+\sqrt{3}) \\ z = 2k\pi - i\ln(2-\sqrt{3}) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

64. $f(z) = \log(1-z)$; si $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$, entonces

a) el logaritmo principal $\log z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ es derivable en G y $\log'(z) = \frac{1}{z}$. Por tanto, si definimos $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1-z \in G\}$

$1-z \in G \iff -z \in G-1 \iff z \in 1-G \ (=\Omega)$



$$f'(z) = \frac{-1}{1-z} = \frac{1}{z-1} \quad \text{(regla de la cadena)}$$

b) $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$; ahora $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : e^z + 1 \in G\}$

$e^{\operatorname{Re}(z)} \cdot e^{i\operatorname{Im}(z)} \in -1+G \iff$

$e^z + 1 \in G \iff e^z \in -1+G \iff$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{x + (\pi + 2k\pi)i : k \in \mathbb{Z}, x \geq 0\} = \Omega$

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(e^z + 1\right)^{-1/2} \cdot e^z$$

Hemos considerado la raíz cuadrada asociada al logaritmo principal : $\sqrt{z} = e^{(\ln|z| + i\operatorname{Arg} z)\frac{1}{2}}$

lo mismo que c) $f(z) = \operatorname{sen}\sqrt{z} \in \mathcal{H}(G)$, $f'(z) = (\cos\sqrt{z})\frac{1}{2} z^{-1/2}$

d) $f(z) = z^{2z} = e^{(\log z)2z} \in \mathcal{H}(G)$, $f'(z) = 2z^{2z} + z^{2z} \cdot 2\log z$

<u>obs</u> : $\log z$ es el logaritmo principal.