TOPOLOGÍA. UAM, 15 de junio de 2016

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

GRUPO: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6	TOTAL
1 puntos	2 puntos	2 punto	1 puntos	2 puntos	2 puntos	10

1. Sea X un especio topológico.

(a) Define con precisión qué es la **frontera** $Fr(A)$ de un conjunto $A \subset X$.

(b) Define con precisión el significado de las frases que siguen. Pon algún ejemplo.

- X es **conexo**.
- X es **contractible**.
- X es **simplemente conexo**.

Solución.

(a) $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$. En otras palabras

$$x \in Fr(A) \iff \forall V \text{ entorno de } x,\ (V \cap A \neq \emptyset) \wedge (V \cap \complement A \neq \emptyset).$$

(b)

- $$X \text{ es conexo } \iff \nexists \text{ abiertos } A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \ni X = A \biguplus B.$$

  La notación $X = A \biguplus B$ ("unión disjunta") significa que $X = A \bigcup B$ y, además, $A \bigcap B = \emptyset$. La usaremos sistemáticamente para abreviar.
- X es contractible si y sólo si X es homotópicamente equivalente a un punto.
- X es simplemente conexo si y sólo si su grupo fundamental es el grupo trivial.

Puesto que un espacio contractible es simplemente conexo y un espacio simplemente conexo es conexo, un ejemplo de espacio contractible, como un disco o un espacio euclídeo, vale como ejemplo de los tres tipos de espacios.

La esfera de dimensión 2 es un ejemplo de espacio simplemente conexo no contractible y un toro es un ejemplo de espacio conexo que no es simplemente conexo.

2. Sean X e Y espacios topológicos. Se considera el conjunto producto cartesiano $X \times Y$ y las proyecciones

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

(a) Describe la topología producto sobre $X \times Y$ mediante una subbase utilizando las proyecciones y explica cuál es la correspondiente base.

(b) Demuestra que las proyecciones son aplicaciones **continuas**. Demuestra que las proyecciones llevan cada abierto del producto a un abierto; es decir, que son aplicaciones **abiertas**.

(c) Demuestra que si Y es **compacto**, entonces π_1 lleva cerrados a cerrados, es decir, es una aplicación **cerrada**. ¿Es esto cierto, en general, aunque Y no sea compacto?

Solución.

(a) Una subbase es

$$\Sigma = \left\{\pi_1^{-1}(A) = A \times Y : \ A \text{ abierto de } X\right\} \cup \left\{\pi_2^{-1}(B) = X \times B : \ B \text{ abierto de } Y\right\}.$$

Y la base correspondiente es

$$\mathcal{B} = \left\{\pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) = (A \times Y) \cap (X \times B) = A \times B : \ A \text{ abierto de } X, \ B \text{ abierto de } Y\right\}$$

(b) $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ es continua porque $\forall A$ abierto de X, $\pi_1^{-1}(A)$ es abierto de $X \times Y$.

$\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ es continua porque $\forall B$ abierto de Y, $\pi_2^{-1}(B)$ es abierto de $X \times Y$.

Un abierto G de $X \times Y$ será de la forma $G = \bigcup_{j \in \mathcal{A}} (A_j \times B_j) \ \ni A_j$ es abierto de X y B_j es abierto de Y, $\forall j \in \mathcal{A}$. Para G de esta forma, se tiene

$$\pi_1(G) = \pi_1\left(\bigcup_{j \in \mathcal{A}} (A_j \times B_j)\right) = \bigcup_{j \in \mathcal{A}} \pi_1(A_j \times B_j) = \bigcup_{j \in \mathcal{A}} A_j, \text{ que es un abierto de } X$$

y

$$\pi_2(G) = \pi_2\left(\bigcup_{j \in \mathcal{A}} (A_j \times B_j)\right) = \bigcup_{j \in \mathcal{A}} \pi_2(A_j \times B_j) = \bigcup_{j \in \mathcal{A}} B_j, \text{ que es un abierto de } Y.$$

(c) Sea C un cerrado de $X \times Y$. Para ver que $\pi_1(C)$ es cerrado en X, vamos a ver que $\complement\pi_1(C)$ es abierto. Sea $x \in \complement\pi_1(C)$. Puesto que

$$x \in \complement\pi_1(C) \Longleftrightarrow \{x\} \times Y \subset \complement C,$$

dado $x \in \complement\pi_1(C)$, para cada $y \in Y$, tenemos que $(x, y) \notin C$, de modo que, por ser C cerrado, existirán abiertos $A_y \subset X \ni A_y \ni x$ y $B_y \subset Y \ni B_y \ni y$ y $A_y \times B_y \subset \complement C$.

Desde luego, $Y \subset \bigcup\limits_{y \in Y} B_y$. Pero, por ser Y compacto, existirán $y_1, \cdots, y_n$ tales que $Y \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_{y_j}$. Si ahora tomamos $A = \bigcap\limits_{j=1}^{n} A_{y_j}$, A será un abierto de X, tal que $A \ni x$ y, además

$$A \times Y \subset \bigcup_{j=1}^{n}(A \times B_{y_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{n}(A_{y_j} \times B_{y_j}) \subset \complement C.$$

Por lo tanto $\forall z \in A$, $\{z\} \times Y \subset \complement C$, de donde se sigue que $z \in \complement\pi_1(C)$; es decir, el abierto A cumple $x \in A \subset \complement\pi_1(C)$. Así queda visto que $\complement\pi_1(C)$ es abierto y, por consiguiente, $\pi_1(C)$ es cerrado.

Cuando Y no es compacto, no es cierto, en general, que C cerrado implique $\pi_1(C)$ cerrado.

Lo demuestra el ejemplo siguiente: Sea $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el conjunto $C = \{(x, 1/x) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. C es cerrado. En efecto

$$\complement C = \left(\bigcup_{a>0}]-a, a[\times]-1/a, 1/a[\right) \bigcup \left(\bigcup_{a>0}]a, \rightarrow[\times]1/a, \rightarrow[\right) \bigcup \left(\bigcup_{a>0}]\leftarrow, -a[\times]\leftarrow, -1/a[\right).$$

Y, sin embargo, $\pi_1(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que no es cerrado.

3. Sean X e Y espacios topológicos. Para cada aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se considera su gráfico que es, por definición, el conjunto $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : \; f(x) = y\}$.

(a) Demuestra que, si Y es un espacio **separado de Hausdorff**, entonces se cumple que

$$f \text{ continua} \Longrightarrow \Gamma_f \text{ es cerrado en } X \times Y.$$

(b) Demuestra que si Y es un espacio **compacto**, entonces se cumple que

$$\Gamma_f \text{ es cerrado en } X \times Y \Longrightarrow f \text{ continua.}$$

(c) ¿Se puede quitar en el punto anterior la hipótesis de que Y sea compacto? Razona tu respuesta.

Solución.

(a) Si Y es Hausdorff, vamos a ver que Γ_f es cerrado demostrando que $\complement\Gamma_f$ es abierto.

Sea $(x, y) \in \complement\Gamma_f$. Entonces $y \neq f(x)$. Como Y es Hausdorff, $\exists U, V$ abiertos de Y tales que $U \ni y$, $V \ni f(x)$ y $U \cap V = \emptyset$.

Por ser f continua, $\exists W$, abierto de X tal que $f(W) \subset V$.

Entonces, $(W \times U) \cap \Gamma_f = \emptyset$, ya que, si $(a, b) \in W \times U$, entonces $f(a) \in V$ y $b \in U$, de modo que, puesto que $U \cap V = \emptyset$, tenemos $f(a) \neq b$, es decir $(a, b) \notin \Gamma_f$.

(b) Sea C un cerrado de Y. Si demostramos que $f^{-1}(C)$ es, siempre, cerrado, habremos visto que f es continua.

Pero $f^{-1}(C) = \pi_1 \left(\Gamma_f \cap (X \times C)\right)$. En efecto $(x, y) \in \Gamma_f \cap (X \times C) \Longleftrightarrow (f(x) = y) \wedge (y \in C)$. Así pues $x \in f^{-1}(C) \Longleftrightarrow f(x) \in C \Longleftrightarrow x \in \pi_1(\Gamma_f \cap (X \times C))$.

Por el apartado c) del problema anterior, si Y es compacto, la proyección π_1 es una aplicación cerrada. Así pues, si Γ_f es cerrado, $\Gamma_f \cap (X \times C)$ será cerrado, como intersección de dos cerrados y, finalmente, $f^{-1}(C) = \pi_1(\Gamma_f \cap (X \times C))$ será cerrado.

(c) No se puede quitar. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1/x \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

tiene gráfico cerrado y no es continua.

---

4. Sea X un espacio topológico y sea $G \subset X$. Demuestra que

$$G \text{ es abierto } \iff \forall A \subset X,\ G \cap \overline{A} \subset \overline{G \cap A}.$$

Solución. Sea G abierto y $x \in G \cap \overline{A}$. $\forall V$ abierto tal que $V \ni x$, puesto que $V \cap G$ es un entorno de x, se tendrá que $V \cap G \cap A \neq \emptyset$. Se sigue que $x \in \overline{G \cap A}$.
Recíprocamente, si sabemos que $\forall A \subset X,\ G \cap \overline{A} \subset \overline{G \cap A}$; se tendrá, en particular, tomando $A = \complement G$, que $G \cap \overline{\complement G} \subset \overline{G \cap \complement G} = \emptyset$. Pero, como $G = \mathring{G} \uplus \overline{\complement G}$, se sigue que $G = \mathring{G}$, abierto.

---

5. Sea X un espacio topológico.

(a) Demuestra que si X es conexo y A es un subconjunto propio no vacío de X, entonces $Fr(A) \neq \emptyset$.

(b) Demuestra que si F es un subconjunto conexo de X, entonces se cumple la implicación:

$$(A \subset X) \wedge (F \cap A \neq \emptyset) \wedge (F \cap \complement A \neq \emptyset) \Longrightarrow F \cap Fr(A) \neq \emptyset.$$

(c) Demuestra que si A es un subconjunto de un espacio topológico conexo X, entonces:

$$Fr(A) \text{ conexo } \Longrightarrow \overline{A} \text{ es conexo.}$$

Solución.

(a) $X = \mathring{A} \uplus Fr(A) \uplus \mathring{\complement A}$. Si $Fr(A) = \emptyset$, como X es conexo, se tendrá que, o bien es $\mathring{A} = \emptyset$, o bien es $\mathring{\complement A} = \emptyset$.

Si $\mathring{A} = \emptyset$, entonces $X = \mathring{\complement A} = \complement A \Longrightarrow A = \emptyset$, que es una contradicción.

Del mismo modo, si $\mathring{\complement A} = \emptyset$, será $X = \mathring{A} = A \Longrightarrow \complement A = \emptyset$, también contradicción.

(b)

$$X = \mathring{A} \biguplus Fr(A) \biguplus \mathring{\complement A} \Longrightarrow F = (F \cap \mathring{A}) \biguplus (F \cap Fr(A)) \biguplus (F \cap \mathring{\complement A}).$$

Si $F \cap Fr(A) = \emptyset$, entonces, por ser F conexo, o bien es $F \cap \mathring{A} = \emptyset$ o bien es $F \cap \mathring{\complement A} = \emptyset$. Si $F \cap \mathring{A} = \emptyset$, se tiene que $F = F \cap \mathring{\complement A} \Longrightarrow F \subset \mathring{\complement A} \subset \complement A \Longrightarrow F \cap A = \emptyset$, contradicción. Y si $F \cap \mathring{\complement A} = \emptyset$, se tiene que $F = F \cap \mathring{A} \Longrightarrow F \subset \mathring{A} \subset A \Longrightarrow F \cap \complement A = \emptyset$, contradicción.

(c) Si $\overline{A}$ no fuera conexo, sería $\overline{A} = \underbrace{(\overline{A} \cap U)}_{\neq \emptyset} \uplus \underbrace{(\overline{A} \cap V)}_{\neq \emptyset}$, para ciertos abiertos U, V. Entonces $Fr(A) = (Fr(A) \cap U) \uplus (Fr(A) \cap V)$. Como $Fr(A)$ es conexo, será $Fr(A) \cap U = \emptyset$ o $Fr(A) \cap V = \emptyset$. Supongamos, SPDG, que $Fr(A) \cap U = \emptyset$. Entonces $Fr(A) \subset V$ y $\overline{A} \cap U = \mathring{A} \cap U$. Se sigue que $X = \overline{A} \uplus \mathring{\complement A} = (\overline{A} \cap U) \uplus (\overline{A} \cap V) \uplus \mathring{\complement A} = (\mathring{A} \cap U) \uplus (V \cup \mathring{\complement A})$, contradicción.

---

6. Sea X un espacio topológico.

(a) Demuestra que X es contractible si y sólo si la aplicación identidad $id_X : X \ni x \mapsto x \in X$ es homotópica a una aplicación constante.

(b) Demuestra que se cumple

$$X \text{ contractible} \implies X \text{ simplemente conexo.} \tag{1}$$

¿Es cierta la implicación recíproca de (1)? Razona tu respuesta.

(c) Demuestra que X es contractible si y sólo si toda aplicación continua de X en un espacio topológico cualquiera Y o de un espacio topológico cualquiera Y en X es homotópica a una constante.

(d) Demuestra que si Y es contractible, entonces X es homotópicamente equivalente a al producto $X \times Y$.

Solución.

(a) Si X es contractible, tenemos

$$X \xrightarrow{f} \{x\} \xrightarrow{g} X \ \ni g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$

y $g \circ f$ es una aplicación constante ($\forall a \in X, g(f(a)) = g(x)$).

Recíprocamente, si $\mathrm{id}_X \simeq c$, constante; será

$$X \xrightarrow{f} \{c\} \xrightarrow{j} X \text{ con } j(c) = c$$

y $c = j \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.

(b) Si X es contractible, será, como al principio del punto anterior, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \Longrightarrow g_\star \circ f_\star = \mathrm{id}$; de modo que los grupos de homotopía $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(x, x) = 0$ son isomorfos. Y esto es, justamente, que X sea simplemente conexo.

El recíproco no es cierto. Por ejemplo, la esfera de dos dimensiones S^2 es un espacio simplemente conexo no contractible.

(c) Si X es contractible y tenemos una aplicación continua $X \xrightarrow{f} Y$; como la identidad id_X es homotópica a una constante, componiendo resulta que $f = f \circ \mathrm{id}_X \simeq f \circ \mathrm{const} = \mathrm{const}$.

El recíproco es obvio pues la identidad en X es un caso particular de aplicación $X \xrightarrow{f} Y$.

El caso de aplicaciones $Y \longrightarrow X$ se trata igual que el anterior componiendo por el otro lado.

(d) Si Y es contractible, tenemos, para un punto c, $Y \xrightarrow{f} c \xrightarrow{j} Y$ con $j \circ f \simeq \mathrm{id}_Y$. Pero, entonces, también tenemos $X \times Y \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times f} X \times c \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times j} X \times Y$, con $(\mathrm{id}_X \times j) \circ (\mathrm{id}_X \times f) = \mathrm{id}_X \times (j \circ f) \simeq \mathrm{id}_{X \times Y}$. Podemos sustituir estas aplicaciones por $X \times Y \xrightarrow{\pi_1} X \xrightarrow{g} X \times Y$, donde $g(x) = (x, c)$.