Ejercicio: Fijada la sucesión de términos no negativos $\{a_m\}_m$, consideramos en $X = \mathbb{Z}$ la σ-álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ y la medida μ dada por $\mu(A) = \sum_{m\in A} a_m, \forall A \subset \mathbb{Z}$. Sea $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$.

El presente ejercicio tiene como objetivo probar la igualdad **(I):** $\int_{\mathbb{Z}} f\,d\mu = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\,a_m$.[1]

Para ello

a) Probar la igualdad **(I)** para funciones simples. *Indicación*: hacerlo primero para la función característica de un conjunto y luego aplicar las propiedades de la integral.

SOL: Si $A \subset \mathbb{Z}$ y $s(x) = \chi_A(x)$, se tiene

$$\int s\,d\mu \overset{def.}{=} \mu(A) \overset{def.}{=} \sum_{m\in A} a_m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi_A(m)\,a_m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} s(m)\,a_m.$$

En general, si $s(x) = \sum_{j=1}^N c_j\chi_{Aj}(x)$ es una función simple arbitraria,

$$\int s\,d\mu \overset{def.}{=} \sum_{j=1}^N c_j\mu(A_j) \overset{(anterior)}{=} \sum_{j=1}^N c_j \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi_{Aj}(m)\,a_m = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^N c_j\chi_{Aj}(m)\,a_m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} s(m)\,a_m.$$

q.e.d.

b) Encontrar una sucesión creciente de funciones positivas simples que converjan a f; i.e., $0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_k \le s_{k+1} \le \ldots$, con $\lim_{k\to\infty} s_k(m) = f(m), \forall m \in \mathbb{Z}$.

SOL: (corregido) Si llamamos $A_m = \{m\}$, se tiene $f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\chi_{Am}(x)$. Definimos

$$s_k(x) = \sum_{m=-k}^{k} f(m)\chi_{Am}(x), \quad \text{es decir,} \quad s_k(x) = f(x)\chi_{[-k,k]}(x).$$

Entonces, s_k es simple, $\forall k$, y la sucesión $\{s_k\}_k$ es creciente (porque $s_{k+1}(x) - s_k(x) = f(k+1)\chi_{Ak+1}(x) + f(-(k+1))\chi_{A-(k+1)}(x) \ge 0$), Además, fijado $x \in \mathbb{R}$, se tiene $s_k(x) = f(x), \forall k \ge |x|$. En particular, $\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$. **q.e.d.**

c) Usar un teorema de convergencia y los apartados anteriores para terminar la demostración de **(I)**.

SOL: Finalmente se tiene $\int f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int s_k\,d\mu \lim_{k\to\infty} \sum_{m=-k}^{k} f(m)\,a_m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\,a_m$, donde

- la primera igualdad se debe al TCM
- la segunda viene del apartado b)
- la tercera viene de la definición de serie convergente (de términos positivos)

q.e.d.

[1] En particular, si $a_m = 1, \forall m$, se tiene $\int_{\mathbb{Z}} f\,d\mu = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)$ y, si $\mu = \delta_{m_0}$, entonces $\int_{\mathbb{Z}} f\,d\delta_{m_0} = f(m_0)$