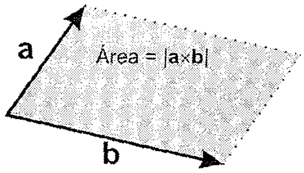
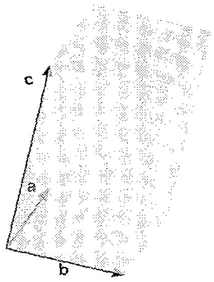
HOJA 1 : TEMA 1

1) a) Demostrar que el módulo del producto vectorial de dos vectores no paralelos **a** y **b** es igual al área del paralelogramo que forman. Usar el resultado anterior para encontrar el área del paralelogramo de vértices (1,0,1), (1,1,1) y (1,2,0). ¿Cuánto valen los tres ángulos del triángulo determinado por los tres vértices?



b) Demostrar que el volumen del paralelepípedo que forman tres vectores no coplanarios **a**, **b** y **c** viene dado por el producto mixto $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Usar este resultado para encontrar el volumen del paralelepípedo de vértices (0,0,0), (-2,0,0), (0,1,1) y (1,-1,1).



2) Una fuerza de 6 Newtons forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje y apuntando a la derecha. La fuerza actúa en contra del movimiento de un objeto que une (1,2) con (5,4).
   a) Hallar la fórmula para el vector fuerza
   b) Hallar el ángulo entre la dirección del desplazamiento y la dirección de la fuerza
   c) Hallar el trabajo realizado por la fuerza como W= **F.D**

3) Hallar (3i-j+k) x (i+2j-k) y dibujarlo. Dibujar también el vector unitario del resultado.

4) Hallar la derivada de las funciones:
   a) $\sqrt[3]{4x^2+5}$
   b) $e^x cosx$
   c) $\frac{x^2}{lnx}$

5) Hallar la integral de las siguientes funciones
   a) $x^2 lnx$
   b) $x^2 sen3x$
   c) $Arc\ sen\ x$
   d) $\frac{lnx}{x}$

6) La fuerza que se ejerce entre dos átomos en una molécula diatómica puede representarse aproximadamente por una función energía potencial del tipo

$$U = U_0\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{x}\right)^{6}\right]$$

con U_0 y a constantes.

a) ¿Para qué valor de x es cero la energía potencial?

b) Calcúlese la dirección de la fuerza ejercida sobre una partícula que se mueve por este potencial, sabiendo que $F=-dU/dx$.
c) ¿Para qué valor de x es mínima la energía potencial?
d) ¿Cuál es el valor mínimo de U?

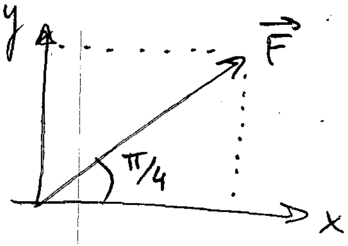
7) Discutir cuál de los siguientes campos es conservativo y en su caso calcular el potencial del que deriva
   a) $F(x,y,z) = (2xyz+\mathrm{sen}x, x^2z, x^2y)$
   b) $F(x,y,z) = (xy, y, z)$
   c) $F(x,y,z) = (6xy, 3x^2-3y^2, 7)$

8) Calcular el flujo del vector $E= (z^2 + x^2)k$ a través del cubo limitado por los planos $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

9) Calcular $\oint \vec{A} d\vec{r}$ a lo largo del círculo de radio unidad para los campos
   a) $A = (1,0)$
   b) $A = (y,-x)$
   c) ¿Cuál de estos campos puede ser conservativo?

HOJA 1 - TEMA 1

2. $|\vec{F}| = 6N$



$\vec{OP} = (5,4) - (1,2) =$

$= (4,2)$

a) $\vec{F}$? $\quad \vec{F} = 6\left(\cos\frac{\pi}{4}, \text{ sen } \pi/4\right) = 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) Ángulo $\overset{\vec{OP}}{\vec{r}}$ y $\vec{F}$?

$\vec{F}.\vec{r} = |\vec{F}|.|\vec{r}|.\cos\theta_{Fr} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{F}.\vec{OP}}{|\vec{F}|.|\vec{OP}|} \Rightarrow$

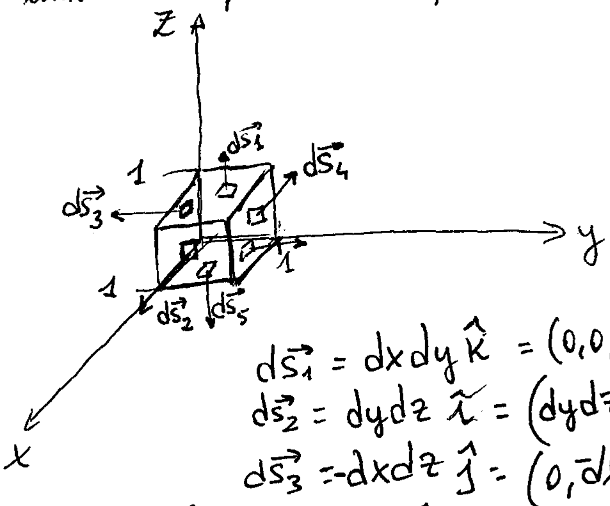
$\vec{r} \to \vec{OP}$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(4,2)}{6\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{40}}$$

$$\theta = \arccos\frac{6}{\sqrt{40}} = 18'43^\circ$$

c) $\vec{W} = \int \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}\vec{r} = 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(4,2) = 6\left(\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{36}{\sqrt{2}}$

8. Calcular el flujo del vector $\vec{E} = (z^2 + x^2)k$ a través del cubo limitado por los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.



$\vec{E} = (0, 0, z^2 + x^2)$

El flujo es paralelo al eje Z, por lo que 4 de las caras del cubo tiene $\phi = 0$ ya que $\cos 90^\circ = 0$

$d\vec{s_1} = dxdy\,\hat{k} = (0,0,dxdy)$
$d\vec{s_2} = dydz\,\hat{\imath} = (dydz,0,0)$
$d\vec{s_3} = -dxdz\,\hat{\jmath} = (0,-dxdz,0)$

$d\vec{s_4} = -dydz\,\hat{\imath} = (-dydz,0,0)$
$d\vec{s_5} = -dxdy\,\hat{k} = (0,0,-dxdy)$
$d\vec{s_6} = dxdz\,\hat{\jmath} = (0,dxdz,0)$

$$\phi_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{6}\phi_{CARA_i} = \sum_{i=1}^{6}\int\vec{E}.d\vec{s_i} = \int\vec{E}\,dxdy\,\hat{k} + \int\vec{E}\,dydz\,\hat{\imath} - \int\vec{E}\,dxdz\,\hat{\jmath} +$$

$$-\int\vec{E}\,dydz\,\hat{\imath} - \int dxdy\,\hat{k} + \int dxdz\,\hat{\jmath} = \int_{S_1}(z^2+x^2)dxdy + 0 + 0 + 0 -$$

$$-\int_{S_5}(z^2+x^2)dxdy + 0 = \int_0^1(1+x^2)dx\int_0^1 dy - \int_0^1(0+x^2)dx\int_0^1 dy =$$

$$= \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \cdot 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \cdot 1 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{1}$$

1. a) $F(x,y,z) = (2xyz + \operatorname{sen} x,\ x^2 z,\ x^2 y)$

$\vec{F}$ es conservativo $\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U \rightarrow U$ función potencial

$\int \vec{F}\, d\vec{r} = \int \vec{\nabla} U\, d\vec{r} = U$;

$\vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$; $F_y = \frac{\partial U}{\partial y}$; $F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$

$$\int F_x\, dx = U \Rightarrow U = \int (2xyz + \operatorname{sen} x)\, dx =$$

$$= 2yz\frac{x^2}{2} - \cos x + q(y,z) =$$

$$= yzx^2 - \cos x + q(y,z)$$

$$\int F_y\, dy = U \Rightarrow U = \int x^2 z\, dy = x^2 yz + r(x,z)$$

$$\int F_z\, dz = U \Rightarrow U = \int x^2 y\, dz = x^2 yz + p(x,y)$$

$$\begin{cases} U = yzx^2 - \cos x + q(y,z) \\ U = x^2 yz + r(x,z) \\ U = x^2 yz + p(x,y) \end{cases}$$

¿puede U existir con estas tres premisas?

$$\boxed{U = yzx^2 - \cos x}$$

b) $\vec{F}(x,y,z) = (xy, y, z)$

$$F_x\, dx = U \Rightarrow U = \int xy\, dx = \frac{x^2}{2}y + q(y,z)$$

$$F_y\, dy = U \Rightarrow U = \int y\, dy = y^2/2 + r(x,z)$$

$$F_z\, dz = U \Rightarrow U = \int z\, dz = z^2/2 + p(x,y)$$

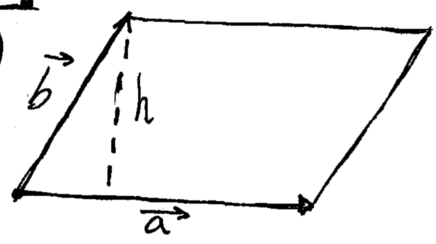
$$\begin{cases} U = \frac{x^2}{2}y + q(y,z) \\ U = \frac{y^2}{2} + r(x,z) \\ U = \frac{z^2}{2} + p(x,y) \end{cases} \Rightarrow U = \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

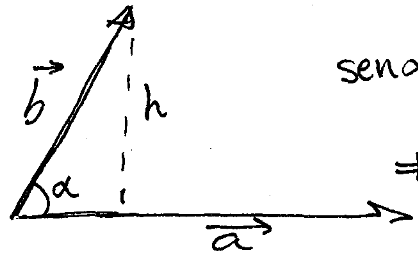
incompatibles

$$\boxed{\nexists\, U}$$

$\boxed{1.}$ ¿$\|\vec{a}\times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot h$?

a)



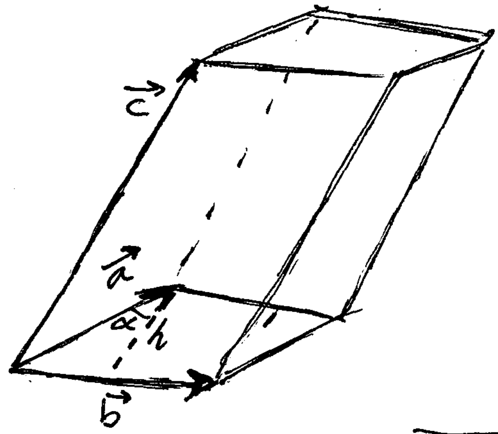


$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{\|\vec{b}\|} \Rightarrow$

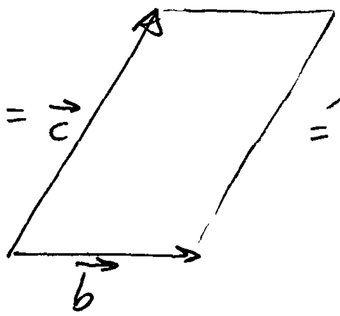
$\Rightarrow \boxed{h = \|\vec{b}\|\cdot \operatorname{sen}}$

Área paralelogramo $= \|\vec{a}\|\cdot h = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot \operatorname{sen}\alpha = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$

b)



$V_{paralepípedo} = V_{CARA_{\vec{b}\vec{c}}} \cdot h$



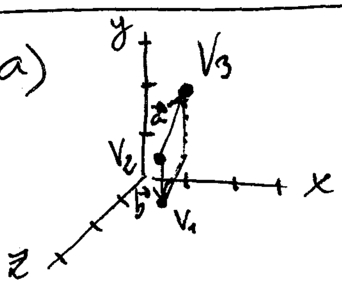
$V_{CARA_{\vec{b}\vec{c}}} = \vec{c}$ $= \|\vec{b}\times\vec{c}\|$ visto apartado a

$\boxed{h = \cos\alpha \cdot \|\vec{a}\|}$

$V_{paralepípedo} = \|\vec{b}\times\vec{c}\|\cdot\|\vec{a}\|\cdot\cos\alpha = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

1. EJERCICIOS NÚMERICOS

a)



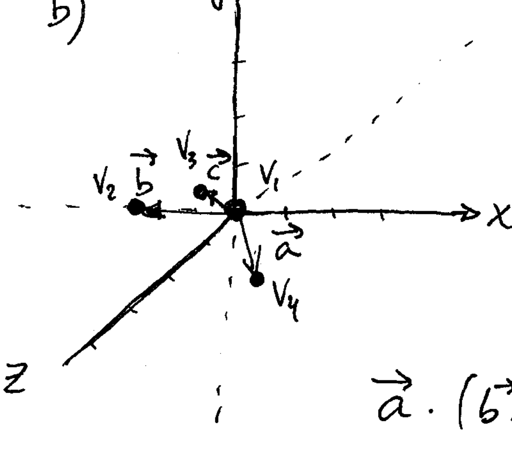
$\vec{a} = \overrightarrow{V_3V_2} = (1,2,0)-(1,1,1) = (0,1,-1)$

$\vec{b} = \overrightarrow{V_1V_2} = (1,1,1)-(1,0,1) = (0,1,0)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\vec{\imath} - 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{\imath}$$

$\Rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\| = 1\ u^2.$

b)



$\vec{a} = \overrightarrow{V_4V_1} = (1,-1,1)-(0,0,0) = (1,-1,1)$

$\vec{b} = \overrightarrow{V_2V_1} = (-2,0,0)$

$\vec{c} = \overrightarrow{V_3V_1} = (0,1,1)$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 0.\vec{k} = 2\vec{\jmath} = (0,2,0)$$

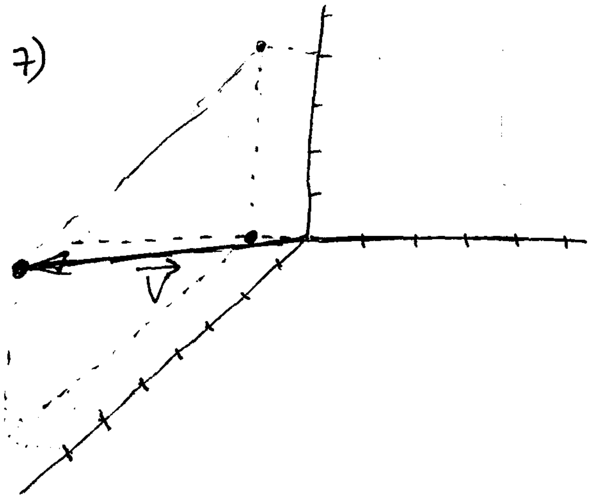
$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (1,-1,1)(0,2,0) = 0 + (-2) + 0 = -2\ u^2$?

$\boxed{3.}$ $(3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}) \times (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})$ y dibujarlo, igual que su unitario.

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 7\vec{k} = (-1, 4, 7)$$

$$\hat{v} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{(-1,4,7)}{\sqrt{1^2+4^2+7^2}} = \frac{(-1,4,7)}{\sqrt{66}} =$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{66}}, \frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\right)$$



$\boxed{4.}$ a) $f(x) = \sqrt[3]{4x^2+5}$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(4x^2+5)^2}} \cdot 8x = \frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2+5)^2}}$$

b) $h(x) = e^x \cos x$

$$h'(x) = e^x \cos x + e^x(-\operatorname{sen} x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

c) $g(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

$$g'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot 1/x}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x}$$

5.c

$$I=\int x^2 \operatorname{sen}3x \, dx \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 \longrightarrow du = 2x\,dx \quad \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \\ dv = \operatorname{sen}(3x)\,dx \Longrightarrow v = \int \operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{-1}{3}\cos(3x) \end{cases}$$

$$I = x^2 \cdot \frac{-1}{3}\cos(3x) - \int \frac{-1}{3}\cos(3x) \cdot 2x\,dx \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{-x^2}{3}\cos(3x) + \frac{2}{3}\underbrace{\int x\cos(3x)\,dx}_{I'}$$

$$\begin{cases} u = x \longrightarrow du = 1\,dx \\ dv = \cos(3x)\,dx \longrightarrow V = \int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) \quad dx \end{cases}$$

$$I' = \frac{x}{3} \cdot \operatorname{sen}(3x) - \int \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) \cdot 1\,dx =$$

$$= \frac{x}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(3x)\,dx =$$

$$= \frac{x}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{9}\int 3\operatorname{sen}(3x)\,dx =$$

$$= \frac{x}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{9} \cdot \cos(3x)$$

$$I = \frac{-x^2}{3}\cos(3x) + \frac{2}{3}\left[\frac{x}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{9} \cdot \cos(3x)\right] =$$

$$= \frac{-x^2}{3}\cos(3x) + \frac{2x}{9}\operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{27}\cos(3x) =$$

$$= \frac{-9x^2+2}{27}\cos(3x) + \frac{2x}{9}\operatorname{sen}(3x) + K$$

$\boxed{5.}$ a) $f(x) = x^2 \ln x$

$$\int f(x) = \int x^2 \ln x \, dx \Rightarrow \begin{cases} u = \ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx \longrightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx =$$

$$= \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{3x^2 - x^3}{9} = \frac{x^2(3-x^2)}{9} + C$$

b) $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(3x)$

$$\int g(x) = \int x^2 . \operatorname{sen}(3x) \, dx$$

$\boxed{5.}$ a) $f(x) = x^2 \ln x$

$$\int f(x) = \int x^2 \ln x \, dx \qquad \begin{cases} u = \ln x \longrightarrow du = 1/x \, dx \\ dv = x^2 dx \longrightarrow v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{x} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx =$$

$$= \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{3x^2 - x^3}{9} = \frac{x^2(3-x^2)}{9} + C$$

b) $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(3x)$

$$\int g(x) = \int x^2 \operatorname{sen}(3x) \, dx \qquad \begin{cases} u = x^2 \\ \end{cases}$$

Vxío m

$\boxed{5.c}$ $\longrightarrow$ en rejo otro folio

d) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$$\int h(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$