CALCULO I. DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA.

SOLUCIÓN DE LA ENTREGA 3.

---

(1) (1 punto) **Demuestra que la sucesión**

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

es de Cauchy <u>utilizando la definición</u>, no la equivalencia con la convergencia.

Una sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N_ε tal que para todos los $m, n > N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

En este caso, como $m, n > N$,

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$
$$\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}.$$

Escogiendo N tal que

$$\frac{2}{N} < \varepsilon,$$

se tiene que

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m}\right| < \varepsilon$$

para todo $m, n > N$.

(2) (2 puntos) **Demuestra con la definición $\varepsilon - \delta$ que**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

El límite de una función f es l cuando x tiende a x_0, es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

En nuestro caso, dado un $\varepsilon > 0$ buscamos un $\delta = \delta_\varepsilon$ tal que si $0 < |x-1| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < \varepsilon.$$

De $0 < |x-1| < \delta$ se sigue que

$$-\delta < x - 1 < \delta,$$

y como el valor absoluto de un número es siempre mayor que dicho número, en particular

$$|x+1| \geq x+1,$$

se tiene que

$$|x+1| \geq x+1 \geq 2-\delta.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \leq \frac{\delta}{2-\delta}.$$

Escogiendo δ tal que $\frac{\delta}{2-\delta} < \varepsilon$, se cumple que

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < \varepsilon$$

para todo x tal que $0 < |x-1| < \delta$.

(3) (2 puntos) **Dadas dos series convergentes $\sum a_n$ y $\sum b_n$ definimos el producto de series como**

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right),$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Sabemos que, si al menos una de las series es <u>absolutamente convergente</u>, la serie $\sum c_n$ también converge.

Lo que se pide en este ejercicio es que demuestres que esta hipótesis sobre las series no se puede relajar, encontrando dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$, condicionalmente pero no absolutamente convergentes, tales que su producto no sea convergente (no basta con dar el ejemplo de las series, hay que demostrar que su producto no converge).

Sean

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen condicional pero no absolutamente, ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

converge por el criterio de Leibniz, pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

no converge por comparación con la serie armónica. Además, su producto es

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right),$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Como $0 \leq k \leq n$, se tiene que $(k+1)(n-k+1) \leq (n+1)^2$, y por lo tanto

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 = 1.$$

Como el término general de la serie $\sum c_n$ no tiende a cero, la serie diverge.