2.1. Funciones medibles

1. Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset, (-\infty, 0], (0, \infty), \mathbb{R}\}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-\infty, 0], \\ 1, & \text{si } x \in (0, 1], \\ 2, & \text{si } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

(a) ¿Es la función f $\mathcal{F}$-medible?

(b) Describir *todas* las funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$.

2. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $f, g : X \to \mathbb{R}$. Demuestra o encuentra un contra-ejemplo para las siguientes afirmaciones:

(a) Si $|f|$ es medible, entonces f es medible.

(b) Si f^2 es medible, entonces f es medible.

(c) Si $f + g$ es medible, entonces f es medible o g es medible.

(d) Si $f \cdot g$ es medible, entonces f es medible o g es medible.

3. Mostrar que una función real f es medible si y sólo si f^2 y $\{f > 0\}$ son medibles.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función medible tal que f es diferenciable a.e. Mostrar que existe una función medible en $[a, b]$ que es igual a f' a.e.

5. Probar que $f = \sup\{f_i : i \in I\}$ *no* es necesariamente medible aunque cada f_i lo sea.

6. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y $f : X \to [0, \infty]$ una función medible. Probar que existe una sucesión $\{h_n\}$ de funciones simples con soporte (conjunto de puntos donde la función no es cero) de medida finita tal que $0 \leq h_n \uparrow f$. ¿Es esta propiedad cierta si μ no es σ-finita?
Sugerencia: Si h es simple y $K \in \mathcal{F}$, $h1_K$ es simple y su soporte está contenido en K.

2.2. Límites superior e inferior

7. Encontrar $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ en los siguientes casos:

(a) $A_n = A$, si n es par y $A_n = B$, si n es impar.

(b) $A_n = (-2 - 1/n, 1]$, si n es par y $A_n = [-1, 2 + 1/n)$, si n es impar.

(c) $A_n = [0, a_n)$, siendo $a_n = 2 + (-1)^n(1 + 1/n)$.

(d) $A_n \uparrow A$ ó $A_n \downarrow A$.

(e) Los A_n son disjuntos dos a dos.

8. Sean A_n y B_n subconjuntos de X. Demostrar:

(a) $(\text{lím sup}\, A_n) \cap (\text{lím sup}\, B_n) \supset \text{lím sup}(A_n \cap B_n)$.

(b) $(\text{lím sup}\, A_n) \cup (\text{lím sup}\, B_n) = \text{lím sup}(A_n \cup B_n)$.

(c) $(\text{lím inf}\, A_n) \cap (\text{lím inf}\, B_n) = \text{lím inf}(A_n \cap B_n)$.

(d) $(\text{lím inf}\, A_n) \cup (\text{lím inf}\, B_n) \subset \text{lím inf}(A_n \cup B_n)$.

(e) En (a) y (d), las inclusiones opuestas no son ciertas en general.

(f) $\text{lím sup}\, A_n - \text{lím inf}\, A_n = \text{lím sup}(A_n - A_{n+1}) = \text{lím sup}(A_{n+1} - A_n)$.

(g) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$, entonces $A_n \cup B_n \to A \cup B$ y $A_n \cap B_n \to A \cap B$.

9. Probar que $1_{\text{lím inf}\, A_n} = \text{lím inf}\, 1_{A_n}$ y $1_{\text{lím sup}\, A_n} = \text{lím sup}\, 1_{A_n}$.

10. Supongamos que $\mu(\cup A_n) < \infty$. Mostrar que

$$\mu(\text{lím inf}\, A_n) \le \text{lím inf}\, \mu(A_n) \le \text{lím sup}\, \mu(A_n) \le \mu(\text{lím sup}\, A_n).$$

¿En cuál de estas desigualdades se utiliza la hipótesis del enunciado? Encontrar un ejemplo en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ donde los A_n sean intervalos y todas las desigualdades anteriores sean estrictas.

11. Sea μ la medida de contar en $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Construir una sucesión A_n tal que $\text{lím sup}\, A_n = \emptyset$, pero $\text{lím}\, \mu(A_n) \neq 0$.

12. Sean $\{A_n\}$ conjuntos medibles tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Mostrar que

$$\mu(\text{lím sup}\, A_n) = 0\,.$$

En otras palabras, casi todo elemento $x \in X$ pertenece a lo sumo a un número finito de los A_n, esto es, el conjunto de los puntos $x \in X$ que pertenecen a infinitos de los A_n tiene medida cero. Este resultado se conoce como el *Primer lema de Borel-Cantelli*.

13. Supongamos que $\text{lím}\, \mu(A_n) = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$. Mostrar que se verifica $\mu(\text{lím sup}\, A_n) = 0$.
Sugerencia: Tener en cuenta el apartado (f) del problema 47.