Economía y finanzas matemáticas
Optativa del grado en Matemáticas, UAM, 2020-2021
Examen final de la convocatoria extraordinaria, 30 de junio de 2021

Apellidos, nombre:..

Número de DNI/NIE y firma: ....

1	2	3	4	5	6	

Ejercicio 1. Considera un instrumento financiero con flujos $F_0, F_1, F_2, \ldots$ pagaderos en los años $0, 1, 2 \ldots$. Se tiene que $F_j = 1/j^2$ para cada $j \geq 1$ y que F_0 es negativa.

Halla el mayor valor $C > 0$ que permite concluir lo siguiente: si $-C < F_0 < 0$, entonces la ecuación que define la TIR del instrumento tiene una solución positiva. (Justifica adecuadamente tu respuesta).

Ejercicio 2. Se ha pedido prestado un capital C_0 que se va a ir devolviendo (amortizando) a lo largo de un cierto plazo T. Los pagos se producen cada Δt, de manera que $T = N\Delta t$. Al préstamo se le asigna un tipo de interés simple R.

En cada instante $k\Delta t$, llamamos C_k al capital que queda por devolver, Q_k a la cuota que se paga al final del periodo $[(k-1)\Delta t, k\Delta t]$, A_k a la amortización correspondiente al periodo $[(k-1)\Delta t, k\Delta t]$, e I_k a los intereses correspondiente al periodo $[(k-1)\Delta t, k\Delta t]$.

Se plantea un sistema de *amortización constante*: en cada periodo se amortiza una cantidad fija. En tiempo T, por supuesto, se habrá devuelto el préstamo completo.

Obtén una fórmula para la cuota Q_k en cada periodo (en términos únicamente de los datos del contrato: C_0, T, Δt, N y R).

Ejercicio 3. En el siguiente modelo matricial:

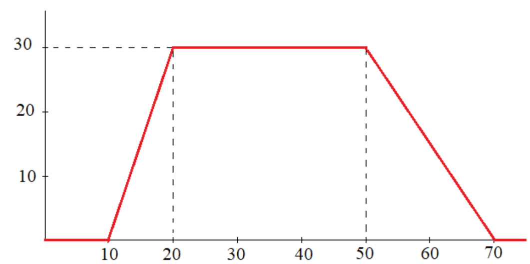
$$\text{precios hoy} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \qquad \text{flujos en } t=1 \to \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array} & \end{array}$$

hay oportunidades de arbitraje. Determina todas las posibles carteras de arbitraje.

Ejercicio 4. La cotización hoy de la acción de TFM es de 42 euros. El tipo de interés (anual, continuo) es del 1 %. Se dispone de los siguientes precios de mercado para calls y puts sobre la acción de TFN con vencimiento 0.5 años:

	call	call	call	put	put	put	put
strike	10	20	30	40	50	60	70
precio	32.05	22.29	13.92	5.83	12.18	20.09	28.94

Halla el precio del instrumento cuyos flujos en tiempo 0.5 años son los que se representan en la siguiente figura (en el eje horizontal, posibles cotizaciones de TFN en 0.5 años):



Justifica tu respuesta. Para los (posibles) argumentos de replicación, se permite comprar/vender fracciones de calls y puts.

Ejercicio 5. Considera el siguiente modelo matricial:

$$\text{precios hoy} \to \begin{pmatrix} 9/8 \\ 0 \\ 6/5 \\ -93/40 \end{pmatrix} \qquad \text{flujos en } t=1 \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -7/2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{array} & \end{array}$$

Comprueba que no hay oportunidades de arbitraje. ¿Qué se puede decir sobre el precio del bono de nominal 1?

Nota: Justifica tus respuestas. Observa detenidamente la matriz de flujos antes de lanzarte a hacer cálculos. Usa fracciones.

Ejercicio 6. En este ejercicio, suponemos válida la fórmula de Black–Scholes

$$c = S\,\Phi(d_+) - K\,e^{-rT}\,\Phi(d_-), \qquad \text{donde} \qquad d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\Big(\frac{S}{Ke^{-rT}}\Big) \pm \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

para el precio c de la call con un subyacente que cotiza hoy a S, vencimiento T y strike K. El tipo continuo anual se denota por r, y la volatilidad del subyacente, por σ.

Se dispone de las dos siguientes fórmulas:

$$\text{(delta)} \quad \frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_+); \qquad \text{(vega)} \quad \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\,\phi(d_+)$$

Se define la "vanna" de la call como la cantidad

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S\,\partial \sigma}.$$

¿Qué debe cumplir el valor de S (fijados los otros cuatro parámetros) para que, simultáneamente, la delta de la opción sea mayor que $1/2$ y la vanna de la opción sea positiva?