1. A partir de los primeros ejemplos de espacios vectoriales vistos en clase, decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre los cuerpos especificados:

Sí (a) El conjunto de los polinomios con coeficientes en un cuerpo K, $\mathbb{P}_K[x]$, con la suma, sobre K.

Sí (b) El conjunto de los polinomios de orden menor o igual que n con coeficientes en un cuerpo K, $\mathbb{P}_K^n[x]$, con la suma, sobre K. grad $\vec{0} = -\infty$

Sí (c) Los reales $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$.

Sí (d) Los complejos $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, y sobre $\mathbb{Q}$.

Sí (e) El conjunto $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es una función continua}\}$ con la suma de funciones, sobre $\mathbb{R}$.

Sí (f) El conjunto $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es una función derivable}\}$ con la suma de funciones, sobre $\mathbb{R}$.

NO (g) El conjunto $\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ con la suma, sobre $\mathbb{R}$. El $\vec{0}$ no está ya que la matriz 0 tiene det = 0.

NO (h) El conjunto $\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) : \det(A) = 0\}$ con la suma, sobre $\mathbb{Q}$. No cumple la suma.

Sí (i) El conjunto de las sucesiones de Cauchy de números reales.

Sí (j) El conjunto $\{\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ con la suma de funciones, sobre $\mathbb{R}$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K.

(a) Demuestra que el elemento neutro de V es único. Lo denotaremos por $\vec{0}$.

(b) Demuestra que el opuesto de cada vector $v \in V$ es único. Lo denotaremos por $-v$.

(c) Si denotamos por 0 al elemento neutro de K respecto a la suma, demuestra que para todo $v \in V$ se tiene que $0 \cdot v = \vec{0}$.

(d) Si denotamos por 1 al elemento neutro de K respecto al producto, y por -1 a su opuesto respecto a la suma, demuestra que para todo $v \in V$ se tiene que $-1 \cdot v = -v$.

3. Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $U \subset V$. Entonces U es un subespacio vectorial si y sólo si:

(a) $U \neq \emptyset$;

(b) Para todos $\alpha, \beta \in K$ y para todos $u, v \in U$, se tiene que $\alpha u + \beta v \in U$.

4. Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $\{W_i\}_{i \in I}$ una colección de subespacios vectoriales de V. Demuestra que

$$\bigcap_{i \in I} W_i$$

es de nuevo un subespacio vectorial de V.

5. Decide de manera razonada si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ o no. Da una base cuando lo sean:

Sí (a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

NO (b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, 2y = z + 7\}$

Sí (c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, 2y = z\}$

6. A la vista del ejercicio anterior da una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con $a_{ij} \in K$ sea un subespacio vectorial de K^n.

7. Demuestra si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o no, y da una base cuando lo sean:

(a) $V_1 = \{A \in \mathbb{M}(\mathbb{R})_2 : A = A^t\}$

(b) $V_2 = \{A \in \mathbb{M}(\mathbb{R})_2 : A \text{ es diagonal }\}$

(c) $V_3 = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : a_{11} = 1\}$

8. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$. Se pide

(a) Determinar si el vector $(0, 0, -37, -3)$ pertenece a W.

(b) Determinar para qué valores de α y β el vector $(\alpha, \beta, -37, -3) \in W$.

9. Determina para qué valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ los tres vectores de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (3, 1, -4, 6), \quad v_2 = (1, 1, 4, 4), \quad v_3 = (1, 0, -4, \alpha)$$

son linealmente dependientes.

10. Aprovechando los cálculos del ejercicio 1.ix) de la hoja 1 determina si los vectores $u_1 = (10, -4, 4, 10)$ y $u_2 = (-8, -2, 9, -15)$ pertenecen al subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^4$ generado por $v_1 = (2, 1, 1, 4)$, $v_2 = (-4, -3, 0, -7)$ y $v_3 = (0, 0, -1, -1)$.

11. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Demuestra que dos vectores v_1 y v_2 en $V \setminus \{\vec{0}\}$ son linealmente dependientes si y sólo si existe $k \in K$ tal que $v_2 = kv_1$.

12. Construye una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(2, -2, 3, 1)$ y $(-1, 4, -6, -2)$.

13. Demuestra que si V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, entonces $V = \{\vec{0}\}$, o V es una recta que pasa por el origen, o V es un plano que pasa por el origen o $V = \mathbb{R}^3$.

14. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 =< v_1, v_2, v_3 >$ y $W_2 =< v_4, v_5 >$ con

$$v_1 = (1, -2, -1, 3), \; v_2 = (0, 2, 1, -1), \; v_3 = (-2, 6, 3, -7), \; v_4 = (1, 2, 1, 1), \; v_5 = (2, 0, -1, 1).$$

Halla una base y calcula la dimensión de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$. Comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.

15. Sea $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$.

(a) Demuestra que $B = \{x^3 + 4x, 3x^2 + 4, 6x, 6\}$ es una base de $\mathcal{P}_3$ y calcular las coordenadas de $p(x) = 2 + 2x - x^2 - x^3$ en B.

(b) Sea $W = \{(a - b) + 2ax + bx^2 + (a + 2b)x^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Demuestra que W es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$. Calcular una base de W y un subespacio complementario de W en $\mathcal{P}_3$.

16. Considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demuestra que las funciones $f_1(x) = \cos x$ y $f_2(x) = \sin x$ son linealmente independientes.

17. Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(i) Demuestra que $\mathcal{B}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Da las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$ y en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

18. Sea K un cuerpo conmutativo y V un espacio vectorial sobre K.

(i) Demuestra que existe un único homomorfismo de anillos $\phi : \mathbb{Z} \to K$. (Sugerencia: $\phi(1) = 1$).

(ii) Demostrar que $Ker\phi = (n)$, donde n es el entero no negativo más pequeño en $Ker\phi$. (Sugerencia: Utilizar el algoritmo de Euclides).

(iii) Demostrar que $\phi : \mathbb{Z}/(n) \to K$ induce un homomorfismo inyectivo $\overline{\phi} : \mathbb{Z}/Ker\phi \to K$.

(iv) Demostrar que $\mathbb{Z}/(n)$ no tiene divisores de cero y deducir que o bien $n = 0$ o bien $n = p$, con p primo. (Se dice que K es un **cuerpo de catracterística** p).

(v) Supongamos que K es finito. Demostrar que entonces $p \neq 0$, K es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}/(p)$ y $card(K) = p^n$.

(vi) Comprobar que el anillo cociente $\mathbb{Z}/(2)[X]/(X^2 + X + 1)$ es un cuerpo de característica 2 con 2^2 elementos.

HOJA 2: ESPACIOS VECTORIALES

$\boxed{1.}$

f) $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es una función derivable$\}$ con la suma de funcio sobre $\mathbb{R}$.

f, g son derivables $\Rightarrow f+g$ es derivable

$\lambda . f$ es derivable $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

h) $\{A \in M_n(\mathbb{Q}) : \det(A) = 0\}$ con la suma sobre $\mathbb{Q}$.

Puede ser que $\det A = \det B = 0$, pero $\det(A+B) \neq 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) Conjunto de sucesiones de Cauchy de nº reales $\equiv$ conjunto de suces con límite.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy

$\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy ya que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$; $\lim_{n\to\infty} b_n = l'$

entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l + l'$

$\{\lambda a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy ya que $\lim_{n\to\infty} \{\lambda a_n\}_{n=1}^{\infty} = \lambda . l$

j) conjunto $\{\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ con la suma de funciones sobre $\mathbb{R}$.

$(\alpha_1 \operatorname{sen} x + \beta_1 \cos x) + (\alpha_2 \operatorname{sen} x + \beta_2 \cos x) = (\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{sen} x + (\beta_1 + \beta_2) \cos$

$\lambda(\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x) = (\lambda\alpha) \operatorname{sen} x + (\lambda\beta) \cos x$

2.

c) $0.v + 0.v = (0+0).v = 0.v \Rightarrow 0.v + 0.v = 0.v \Rightarrow \underline{0.v = \vec{0}}$

a) $\vec{0_1}$, $\vec{0_2}$ son dos ceros

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{0_1} + \vec{0_2} = \vec{0_1} \\ \vec{0_1} + \vec{0_2} = \vec{0_2} \end{array}\right. \Rightarrow \vec{0_1} = \vec{0_2}$$

d) $v + (-1).v = 1.v + (-1).v = (1-1).v = 0.v = \vec{0}$

Por tanto $(-1).v$ es el opuesto de v.

$(-1).v = -v$

3. Subespacio vectorial X

Comprobar si $v+w \in X$ para $v,w \in X$; $\lambda \cdot v \in X$ para $\lambda \in \mathbb{K}$. $\Big\}$ $X \neq \emptyset$.

Se puede comprobar "a la vez" $\lambda v + \mu w \in X$ para $v,w \in X$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. $X \neq \emptyset$.

] Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

$\{W_i\}_{i \in I}$ colección de subespacios vectoriales de V.

¿Es $\bigcap_{i \in I} W_i$ de nuevo un subespacio vectorial de V.?

Como $\vec{0} \in W_i$ para todo i, entonces $\vec{0} \in \cap_i W_i \neq \emptyset$.

Tomamos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $v, w \in \cap_i W_i$

Comprobamos que $\lambda v + \mu w \in \cap_i W_i$.

Sea $i \in I$ arbitrario. Como $v, w \in W_i$ que es un espacio vectorial,

enemos $\lambda v + \mu w \in W_i$.

Como $i \in I$ era arbitrario, $\lambda v + \mu w \in \cap_{i \in I} W_i$.

$\boxed{6.}$ ¿Cuándo las soluciones de

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

son un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$?

RESPUESTA: Cuando $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, e.d., cuando el sistema es homogéneo.

Como $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ tiene que ser solución pues $b_1 = \cdots = b_m = 0$.

Si $b_1 = \cdots = b_m = 0$, dadas dos soluciones $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$, tenemos que $(\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$ también es solución.

$\boxed{7.}$ ¿Son subespacios de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? y da una base si lo son

a) $V_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$

$\underbrace{A = A^t}_{\substack{\parallel \\ A \text{ es simétrica}}}$; $\underbrace{B = B^t}_{\substack{\parallel \\ B \text{ es simétrica}}} \Rightarrow (\lambda A + \mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t = \lambda A + \mu B$

Las matrices 2×2 simétricas son de la forma: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

Base: $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ A_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ A_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\parallel \\ A_3}} \right\}$

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3 \Rightarrow$ PRUEBA DE QUE $\{A_1, A_2, A_3\}$ son GENERADOR

Comprobamos ~~que~~ independencia lineal:

$0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Son linealmente independientes.

b) $V_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A \text{ diagonal}\}$

A es de la forma : $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Claramente es espacio vectorial:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \; ; \; \underbrace{A+B}_{\Downarrow \text{ diagonal}} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}$$

Base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $V_3 = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a_{11} = 1\}$

A es de la forma: $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$

No cumple ninguna de las propiedades de subespacio vectorial:

- No está el 0: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- No se cumple con la suma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & d \\ e & f \end{pmatrix} \; ; \; \underbrace{A+B}_{\notin V_3} = \begin{pmatrix} 2 & a+d \\ b+e & c+f \end{pmatrix}$$

- No se cumple con la multiplicación

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \; ; \; \lambda \neq 1$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda a \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda A \notin V_3.$$

$\boxed{8.}$ W subespacio generado por $(1,2,-5,3)$ y $(2,-1,4,7)$.

¿Para qué valores de α, β : $(\alpha, \beta, -37, 3) \in W$?

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -37 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = \alpha \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = \beta \\ -5\lambda_1 + 4\lambda_2 = -37 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5\lambda_1 + 4\lambda_2 = -37 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 = -3 \end{cases} \rightsquigarrow \text{SOLUCIÓN ÚNICA } (\lambda_1, \lambda_2) \rightsquigarrow$$

esta solución única fuerza las soluciones de α y β.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 4 & -37 \\ 3 & 7 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -15 & 4 & -111 \\ 15 & 35 & -15 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -15 & 12 & -111 \\ 0 & 47 & -126 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{-126}{47}$$

$$-15\lambda_1 = -111 - 12\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-111 - 12 \cdot \frac{-126}{47}}{-15} = \frac{247}{47}$$

$$\alpha = \lambda_1 + 2\lambda_2 = -\frac{5}{47}$$

$$\beta = 2\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{620}{47}$$

15. Sea $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$

a) $B = \{ x^3 + 4x,\ 3x^2 + 4,\ 6x,\ 6 \}$ demuestra que B es una base

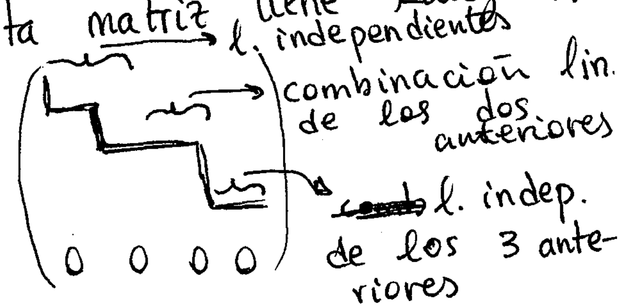
La DIMENSIÓN de un espacio vectorial es el número de elementos que tiene una de sus bases. (Resulta que todas las bases del mismo espacio vectorial tienen el mismo número de elementos).

Si tienes un conjunto con tantos vectores como la dimensión, entonces si generan son base y si son independientes son base.

Comprobamos si son independientes:

$$\begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \end{array}$$

para ver si las columnas son l. independientes podemos ver si esta matriz tiene Rang = 4.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ son linealmente independientes los 4 vectores.

Coordenadas de $p(x) = 2 + 2x - x^2 - x^3$ según B.

$p = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 + \lambda_4 V_4$

$$\begin{matrix} 2 \\ 2x \\ -x^2 \\ -x^3 \end{matrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4x \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 6x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

COORDENADAS

$$\boxed{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(-1, \frac{-1}{3}, 1, \frac{5}{9}\right)}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1/3 \end{cases}$$

$6\lambda_3 = 2 - 4\lambda_1 = 6 \Rightarrow \lambda_3 = 1$

$6\lambda_4 = 2 - 4\lambda_2 = \frac{10}{3} \Rightarrow \lambda_4 = \frac{10/3}{6} = \frac{5}{9}$

$\boxed{11.}$ V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$
Demuestra que V_1 y $V_2 \in V \setminus \{0\}$ son linealmente dependientes si y solo si existe $k \in \mathbb{K}$ tal que $V_2 = kV_1$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $V_2 = kV_1$, entonces $kV_1 - V_2 = 0$ es una combinación lineal no trivial que da 0, luego $\{V_1, V_2\}$ es dependiente.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0$ y $\lambda_1 \neq 0$ ó $\lambda_2 \neq 0$

$V_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} V_1$ (queremos hacer esto)

Hay que ver que $\lambda_2 \neq 0$.

Supongamos que $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot V_1 = 0$ y $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow V_1 = 0$

Contradicción porque sabemos que $V_1 \in V \setminus$

Por lo que $\lambda_2 \neq 0$.

8.| $\mathbb{K}$ cuerpo conmutativo , V e.v. sobre ...

i) HOMOMORFISMO DE ANILLOS :

prop. homomorfismo
$$\begin{cases} \phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b) \Rightarrow \phi(0) = 0 \Rightarrow \phi(-a) = -\phi(a) \\ \phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b) \\ \phi(1) = 1 \end{cases}$$

$\forall a,b \in$ Anillo

- Si $n \geq 1$:

$$\phi(n) = \phi(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{\phi(1)+\cdots+\phi(1)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ veces}}$$

el resultado dependerá de cual sea el 1 del cuerpo.

- Si $n < 0$:

$$\phi(n) = -\phi(|n|) = -\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n \text{ veces}}$$

Comprobaciones:

- $n,m>0$

$$\phi(n+m) = \underbrace{(1+\cdots+1)}_{n \text{ veces}} + \underbrace{(1+\cdots+1)}_{m \text{ veces}} = \underbrace{1+\cdots+1}_{n+m \text{ veces}} = \phi(n+m)$$

- misma regla para $n.m<0$ y $n,m<0$

- $n,m>0$

$$\phi(n.m) = \underbrace{(1+\cdots+1)}_{n \text{ veces}}\underbrace{(1+\cdots+1)}_{m \text{ veces}} = \underbrace{1+\cdots+1}_{n.m \text{ veces}} = \phi(n.m)$$

- misma regla para $n.m<0$ y $m,n<0$

ii) $\mathrm{Ker}\,\phi = \{a \in \mathbb{Z} : \phi(a) = 0\}$ $\quad 0 \in \mathrm{Ker}\,\phi$ (obvio, $\phi(0) = 0$)

Núcleo en alemán

$\Updownarrow$

¿ $\underbrace{(1_K + \cdots + 1_K)}_{a \text{ veces}} = 0$?

n es el entero positivo más pequeño en $\mathrm{Ker}\,\phi$.

$(n) = \{a.n : a \in \mathbb{Z}\}$

ideal generado por n

Identidad de Bezout: Si $a, b \in \mathbb{Z} \wedge c = \mathrm{mcd}(a,b) \Rightarrow c = na + mb$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$

- CASO A: $\mathrm{Ker}\,\phi = (0) = \{0\}$
- CASO B: $\mathrm{Ker}\,\phi \neq (0)$, e.d., existe $a \neq 0$, $a \in \mathrm{Ker}\,\phi$

Observación: si $a \in \mathrm{Ker}\,\phi \Rightarrow -a \in \mathrm{Ker}\,\phi$

si $\phi(a) = 0 \Rightarrow \phi(-a) = -\phi(a) = -0 = 0$

1. $(n) \subset \mathrm{Ker}\,\phi$;
si $a.n \in (n)$, entonces $\phi(an) = \phi(a)\,\phi(n) = \phi(a) . 0 = 0$

2. $\mathrm{Ker}\,\phi \subset (n)$
Por contradicción: supongamos $b \in \mathrm{Ker}\,\phi$, $b \notin (n)$.
Primero, sabemos que $n < b$.
Segundo, sabemos que $\underset{c}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{mcd}}}(n,b) < n$

$c = \alpha n + \beta b$; $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

$\phi(c) = \phi(\alpha)\,\phi(n) + \phi(\beta)\,\phi(b) = \phi(\alpha) . 0 + \phi(\beta) . 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c \in \mathrm{Ker}\,\phi$. contradicción con que n es el entero positivo más pequeño $\in \mathrm{Ker}\,\phi$.

En conclusión, en $\mathrm{Ker}\,\phi$ solo hay múltiplos de (n).

iii) Demostrar que $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ induce un homomorfismo inyectivo

$\overline{\phi}: \underbrace{\mathbb{Z}/\ker\phi}_{\text{notación para } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{K}$ $\qquad \overline{\phi}([a]) = \phi(a)$

Preocupación: $[a]=[b] \Rightarrow \phi(a) = \phi(b)$

($\overline{\phi}$ está bien definida)

Si $[a]=[b]$ entonces $a-b \in (n) = \ker\phi$

$\phi(a) - \phi(b) = \underbrace{\phi(a-b)}_{\text{múltiplo de } (n) \in \ker\phi} = 0$

Inyectivo: queremos ver que $\overline{\phi}([a]) = \overline{\phi}([b]) \Rightarrow [a]=[b]$

$0 = \overline{\phi}([a]) - \overline{\phi}([b]) = \phi(a) - \phi(b) = \phi(a-b)$

$a-b \in \ker\phi = (n) \longrightarrow [a]=[b]$ porque ambos son múltiplos de (n).

iv) Demostrar que $\mathbb{Z}/(n) \equiv \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no tiene divisores de cero y deducir que o bien $n=0$ o bien $n=p$ (p primo).

Divisores de cero: $a,b \neq 0$ tales que $ab=0$

Supongamos que $[a],[b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tales que $[a][b]=[ab]=$

Queremos ver que $[a]=0$ ó $[b]=0$.

$\overline{\phi}([a][b]) = \overline{\phi}([a])\,\overline{\phi}([b]) = \underbrace{\phi(a)}_{\in\mathbb{K}}\,\underbrace{\phi(b)}_{\in\mathbb{K}} = \phi(ab) = \phi(0) = 0$

Entonces $\phi(a)=0$ ó $\phi(b)=0$, por tanto $[a]=[0]$ ó $[b]=[0]$

Si $n=\alpha\beta$, con $\alpha,\beta \neq \pm 1$ pero la clase de $[\alpha][\beta]=[n]=$

Entonces $[\alpha]$, $[\beta] \neq 0$;

v) Supongamos $\mathbb{K}$ es finito. Demostrar que $p \neq 0$, $\mathbb{K}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, y $\text{card}(\mathbb{K}) = p^n$. (p es la característica de $\mathbb{K}$)

- Si $p=0 \Rightarrow 1,\ 1+1 \neq 0,\ 1+1+1 \neq 0 \ \ldots$ sería infinito.

- Espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
  - La suma de vectores de $\mathbb{K}$ es la suma como elementos del cuer
  - El producto por escalares $\lambda \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{K}$

    Definimos $\lambda . v = \bar{\Phi}(\lambda) . v$ (producto en el cuerpo $\mathbb{K}$).

    $\lambda = [a]$, suponemos $a \geq 0$.

    $\lambda . v = \bar{\Phi}([a]) . v = \phi(a) . v = \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{a \text{ veces}} . v = \underbrace{v + \cdots + v}_{a \text{ veces}}$

- ¿$\text{Card}(\mathbb{K}) = p^n$?

  Tomemos una base $v_1, \ldots, v_n$.

  Todo elemento de $\mathbb{K}$ se escribe como $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \text{ tiene } p \text{ posibilidades} \\ \alpha_2 \text{ tiene } p \text{ posibilidades} \\ \vdots \\ \alpha_n \text{ tiene } p \text{ posibilidades} \end{array}\right\} p^n \text{ posibilidades para las coordenadas}$$

VI) Comprobar que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x] / (x^2+x+1)$ - ...

cuerpo de característica 2 con 2^2 elementos.

$K = \{ [p] : p \in \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} [x] \} = (*)$

$[p] = [q]$ si $p-q$ es divisible por x^2+x+1.

$(*) = \{ ax+b : a,b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \}$

coma a,b pueden ser 0 ó 1 hay 4 posibles combinaciones: $a=0, b=0$ ó $a=1, b=0$ ó $a=0, b=1$ ó $a=1, b=1$. $\Rightarrow$ 4 elementos.

$1+1=0 \rightsquigarrow$ característica 2.

Es un cuerpo porque la suma está bien definida y el producto:

$$(ax+b)(a'x+b') = aa'x^2 + (ab'+a'b)x + bb' =$$

$$= (ab'+a'b-aa')x + (bb'-aa') + aa'(x^2+x+1) \equiv$$

$$\equiv (ab'+a'b-aa')x + (bb'-aa') \text{ módulo } x^2+x+1.$$

El inverso multiplicativo?

$x(x+1) = x^2+x$

$x^2+x-(x^2+x+1) = -1 = 1$ en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

12. Construye una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(2,-2,3,1)$ y $(-1,4,-6,-2)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \end{array}$$

bajamos escalera aquí

Base $\{(2,-2,3,1), (-1,4,-6,-2), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

13. $V \subset \mathbb{R}^3$ subespacio vectorial. Dimensión de V:

$\dim V = 0 \longrightarrow V = \{\vec{0}\}$

$\dim V = 1 \longrightarrow V = \langle \vec{v} \rangle = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$ Es una recta que para por $\vec{0}$.

$\dim V = 2 \longrightarrow V = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \{\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}^3\}$

Plano que pasa por $\vec{0}$.

$\dim V = 3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 = V$.

$\boxed{14.}$ Cálculo de la INTERSECCIÓN

$$W_1 = V_1, V_2, V_3 \qquad\qquad W_2 = V_4, V_5$$

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = \lambda_4 V_4 + \lambda_5 V_5$$

sin hacer

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 - \lambda_4 V_4 - \lambda_5 V_5 = 0$$

$$\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3 + \mu_4 V_4 + \mu_5 V_5 = 0$$

$\boxed{16.}$ $\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas} \}$

$f_1(x) = \operatorname{sen} x$

$f_2(x) = \cos x$

son independientes

$$\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \operatorname{sen} x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$x = \pi/2 \rightarrow \lambda_2 = 0$$

14. $W_1 = \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$; $W_2 = \langle V_4, V_5 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V_4 y V_5 forman una base de W

$W_{2_{base}} = \{V_4, V_5\}$

V_3 es combinación lineal de V_1 y V_2, por lo que:

ase $W_1 = \{V_1, V_2\}$

También sabemos que base de $(W_1 + W_2) = \{V_1, V_2, V_5\}$ ya que V_4 también (como V_3) es comb. lineal de los anteriores. Pero V_1, V_2, V_5 son l. indep. $\Rightarrow$ son base de $(W_1 + W_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 = 0 \\ \boxed{\lambda_5 = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{array}\right. \quad (*)$$

$$\boxed{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 + \lambda_4 V_4 + \lambda_5 V_5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = -\lambda_4 V_4 - \lambda_5 V_5}$$

Como $\lambda_5 = 0$ y por (*) sabemos que si le damos a λ_4 un valor existe una ~~única solución~~ $\Rightarrow V_4 \in (W_1 \cap W_2)$.

Como sabemos que $\underbrace{\dim W_1}_{2} + \underbrace{\dim W_2}_{2} = \dim(W_1 \cap W_2) + \underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_{3}$

$? = 1$

como $V_4 \in (W_1 \cap W_2) \Rightarrow V_4$ base de $(W_1 \cap W_2) = \{V_4\}$