Autómatas y Lenguajes

3$^{er.}$ curso

1$^{er.}$ cuatrimestre

Alfonso Ortega: alfonso.ortega@uam.es

UNIDAD 1: Modelos de cómputo y familias de lenguajes

TEMA 1: Preliminares

Discretos vs. continuos

- Los modelos matemáticos utilizados para describir formalmente la realidad, podrían agruparse en:
  - **Continuos**
    - Informalmente, los que consideran que las variables que describen el sistema toman valores de *naturaleza "real"*, es decir, pueden tomar un número infinito de valores distintos, como por ejemplo:
      - El tiempo,
      - La velocidad,
      - La temperatura, etc...
  - **Discretos**
    - Informalmente, los que las consideran como de *naturaleza "entera"* y, en general, *finita*, es decir, pueden tomar un número finito de valores distintos, como por ejemplo:
      - Valores lógicos (cierto, falso)

Modelos matemáticos

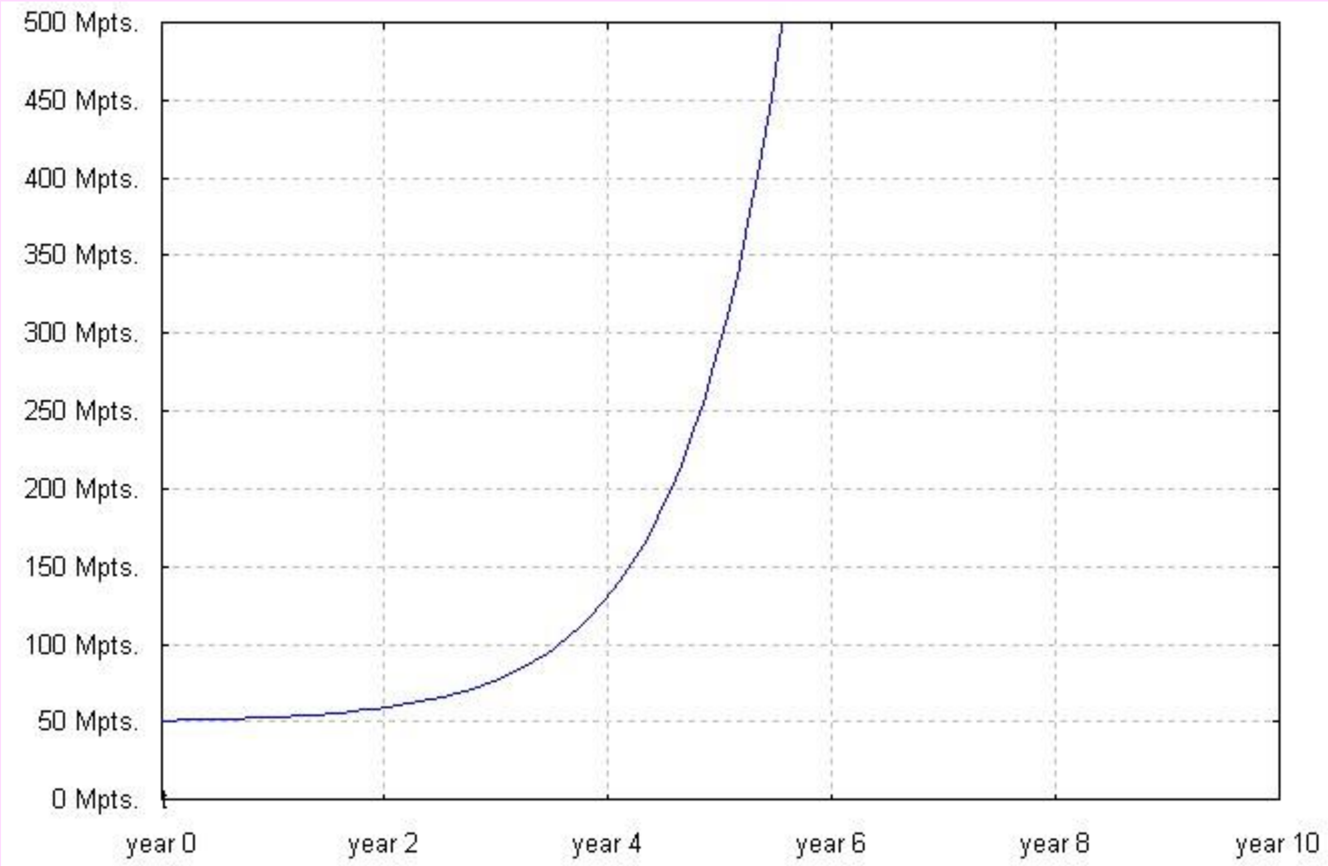
Discretos vs. continuos

- Hay “dominios” en el mundo real expresables con los dos enfoques. Para explicarlo supóngase el siguiente ejemplo sencillo: la relación entre el precio de la vivienda y el tiempo.
- Para ello supóngase el caso de una vivienda de 50 millones de pesetas.
- Imagínese que la dependencia entre el precio y los años viene dada por la siguiente gráfica.

Discretos vs. continuos

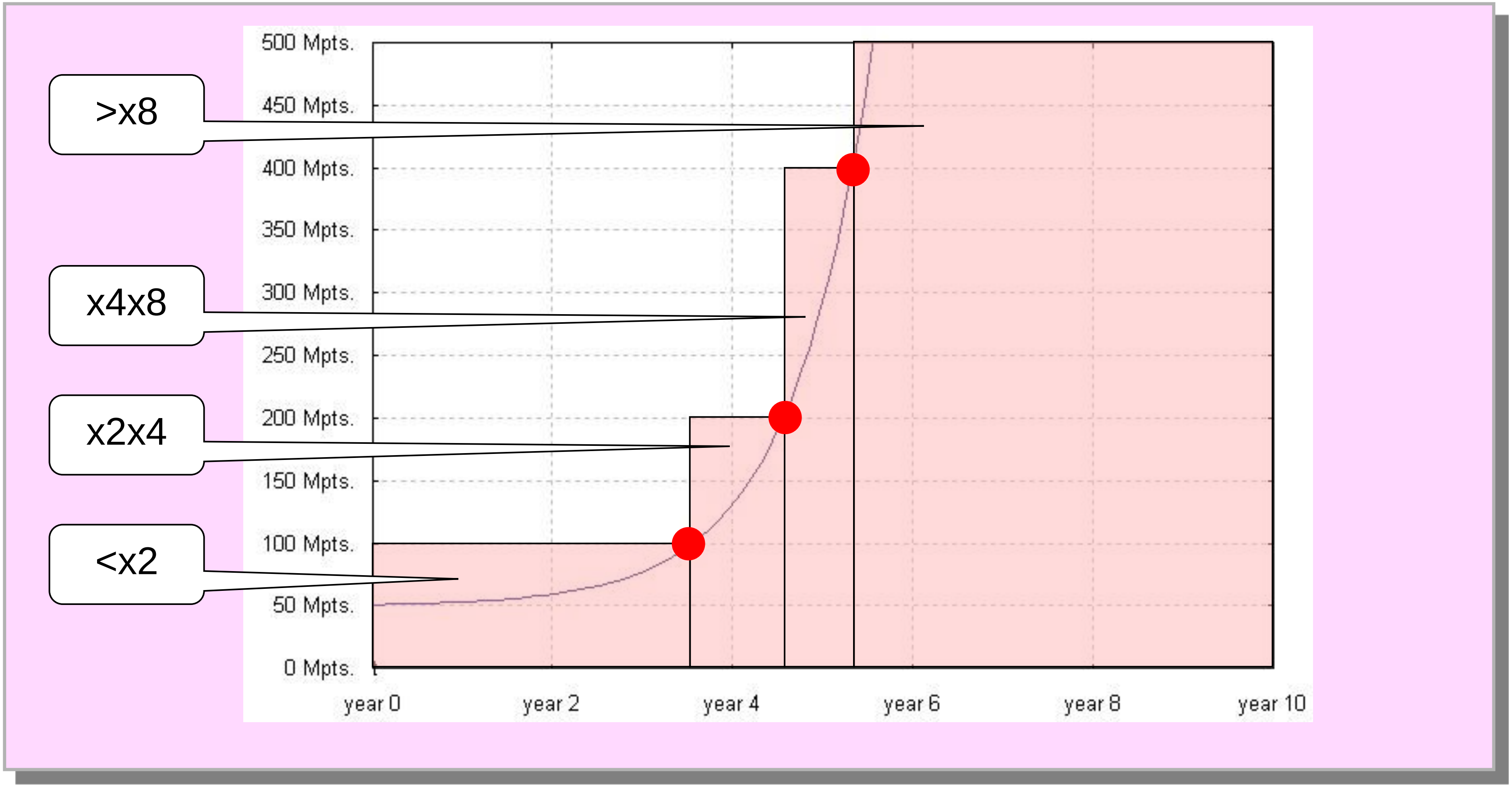
- Podría concluirse el *modelo continuo* del *precio* en función de los años (t)

$$precio(t)=3^t$$



Discretos vs. continuos

- Pero puede que no se necesite saber el precio para cada instante concreto y sea suficiente con la siguiente simplificación:



Discretos vs. continuos

- Con la que se podría concluir el *modelo discreto* como la relación (***concepto previo*** que el alumno debe poseer)

{ (*menos del doble*, *hasta tres años y medio*),

(*entre el doble y el cuádruple*, *entre tres años y medio y cuatro años y medio*),

(*entre el cuádruple y ocho veces*, *entre cuatro años y medio y cinco*),

(*más de ocho veces*, *más de cinco años*)}

Discretos vs. continuos

- Aunque hay dominios en los que sólo parece adecuado el enfoque discreto.
  - Por ejemplo los aspectos simbólicos del lenguaje. El lenguaje es un dominio con muchas facetas, alguna de las cuales tiene que ver con el estudio de las señales físicas que intervienen en él, como el sonido del lenguaje oral.
- Una formalización del idioma español podría comenzar con la enumeración de su alfabeto:

$$\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,\tilde{n},o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$$

- Para definir, a continuación, las palabras como secuencia de letras, etc...

Objetivo del curso

Respecto a los autómatas y lenguajes formales

- Los lenguajes formales están dentro de las técnicas discretas de modelado.
- Una parte importante de estos lenguajes son los de programación de ordenadores.
- Para representarlos formalmente no es suficiente con los conceptos tradicionales de la teoría de conjuntos.
- A lo largo de este curso se estudiarán con detalle los **lenguajes formales**, las **gramáticas** (que son objetos matemáticos para la formalización de los lenguajes) y las relaciones entre ellos.
- Informalmente, se puede entender por **dispositivo de cómputo** aquél que es capaz de recibir una entrada, realizar una operación con su información y producir un resultado.
- A lo largo del curso se estudiarán diferentes dispositivos de este tipo a los que se suele dar el nombre genérico de **autómatas** y también se los relacionará con los lenguajes que son capaces de manipular.

Símbolo

- Los siguientes conceptos son necesarios para el resto del curso:
- **Símbolo**
  - Unidad básica relacionada con lenguajes y gramáticas y que formaliza lo que las letras (o las palabras) representan en los lenguajes naturales.
  - Puede considerarse como un uso especifico del concepto de *elemento* en teoría de conjuntos (***concepto previo*** que el alumno debe poseer).
  - Por ejemplo,
    - si se trata de números, podrían considerarse los siguientes símbolos:

      0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
    - si se trata de valores lógicos, podrían considerarse los siguientes:

      0,1
    - si se trata de palabras del idioma español podrían considerarse los siguientes:

      a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,ñ,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z

Alfabeto

- **Alfabeto**

es un conjunto finito no vacío de símbolos

- **Observaciones**
  - Es, por tanto, un uso específico del concepto de conjunto (***concepto previo*** que el alumno debe poseer) cuando sus elementos son símbolos.
  - La condición de **ser finito** es la más importante característica de los alfabetos.
  - Se obliga a que no sean vacíos porque en las construcciones en las que intervienen no tiene sentido utilizar alfabetos de este tipo.
- **Notación**
  - Para referirse a un alfabeto cualquiera en general, se utilizará el símbolo

$$\Sigma$$

  - En cada caso particular se utilizará la representación más cómoda
- **Ejemplos**
  - El alfabeto de los dígitos en base 10: $\Sigma_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
  - El alfabeto binario: $\Sigma_2 = \{0,1\}$
  - El alfabeto español: $\Sigma_{ñ} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,ñ,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$

Palabra

- **Palabra**

  es una secuencia finita de símbolos tomados de un alfabeto

- **Observaciones**
  - La condición de **ser finito** es la más importante característica de las palabras.
  - También se las suele llamar **cadenas** o **cadenas de símbolos**.

- **Ejemplos**
  - Con el alfabeto de los dígitos en base 10: $\Sigma_{10}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ se pueden formar las siguientes palabras:

    $$101 \quad 034 \quad 0 \quad 8 \quad 99$$

  - Con el alfabeto binario: $\Sigma_2=\{0,1\}$

    $$0 \quad 11101 \quad 1$$

  - Con el alfabeto español: $\Sigma_{ñ} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,ñ,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$

    $$petacas \quad chozas \quad jefe$$

Introducción

- Como ejemplo intuitivo de dispositivo capaz de realizar computaciones considérese una **máquina expendedora de productos** (billetes de tren, zumos, etc.).
- Su comportamiento puede esquematizarse de la siguiente manera:
  - Cuando el cliente llega, en la pantalla de la máquina suele aparecer alguna información irrelevante para el proceso de compra de tabaco, como la hora.
  - Si se pulsa el botón de algún producto antes de haber introducido suficientes monedas para pagarlo, se presenta en la pantalla el precio del producto seleccionado.
  - En estas circunstancias, cuando el valor de las monedas introducidas excede el del producto seleccionado, se muestra un mensaje de producto vendido y se expulsa éste, junto con el cambio, por el orificio habilitado para ello.
  - En cualquier instante puede pulsarse la tecla de recuperación de monedas.
  - Ya sea porque se culmina la venta o porque se anula la operación, la máquina vuelve a comportarse como antes de que el cliente interactuara con ella.
- Resulta claro que, a partir de **una entrada**, (las monedas y la indicación del producto seleccionado) realiza **algún proceso** (calcula si la cantidad introducida es suficiente para pagar el producto, la diferencia entre lo introducido y lo necesario) y **genera alguna salida** (el producto y el cambio)

Estructura

- Aplicando sólo el sentido común, parece necesario que la máquina disponga de los siguientes elementos:
  - **Instrucciones** sobre lo que hacer ante cada entrada.
  - Posibilidad de **cambiar** de **“situación” o estado**:
    - **Inicialmente** está a la espera de interactuar con el cliente y, mientras, muestra información irrelevante
    - Cuando se introduce una moneda acumula el valor de lo introducido
    - Cuando se selecciona un producto tiene que calcular la diferencia entre su precio y el valor introducido y en caso de que sea posible devolver el cambio y el producto.
    - Cuando se aborta la operación, debe volver al estado inicial tras reintegrar al cliente todas sus monedas.
  - Como consecuencia de lo anterior, debe tener algún **lugar donde guardar elementos importantes** para su funcionamiento (las monedas introducidas, el precio de los productos, los propios productos).

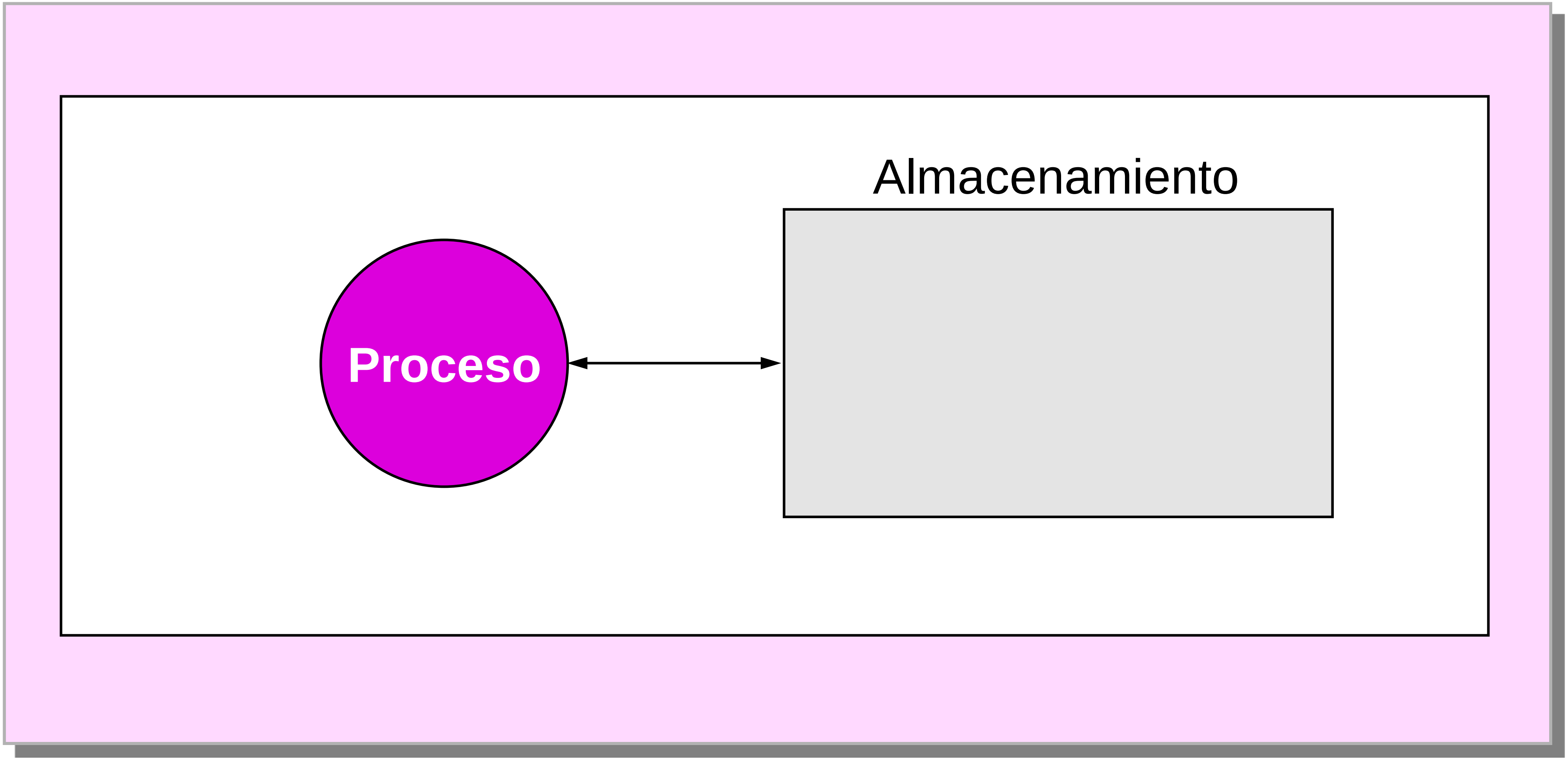
Dispositivos capaces de computar

Estructura

- Un análisis similar es posible para cualquier otro dispositivo.
- Se puede llegar a la conclusión de que la **computación** requiere de dos componentes fundamentales:
  - Capacidad de **almacenamiento**; en el caso anterior, de las monedas introducidas, del precio de los productos, de los propios productos, etc.
  - Capacidad de **proceso**; en el caso anterior, la manera en la que, si se encuentra en un estado, debe transitar a otro en función de la entrada recibida y, posiblemente, generar alguna salida.

Estructura

- A continuación se muestra gráficamente el esquema:

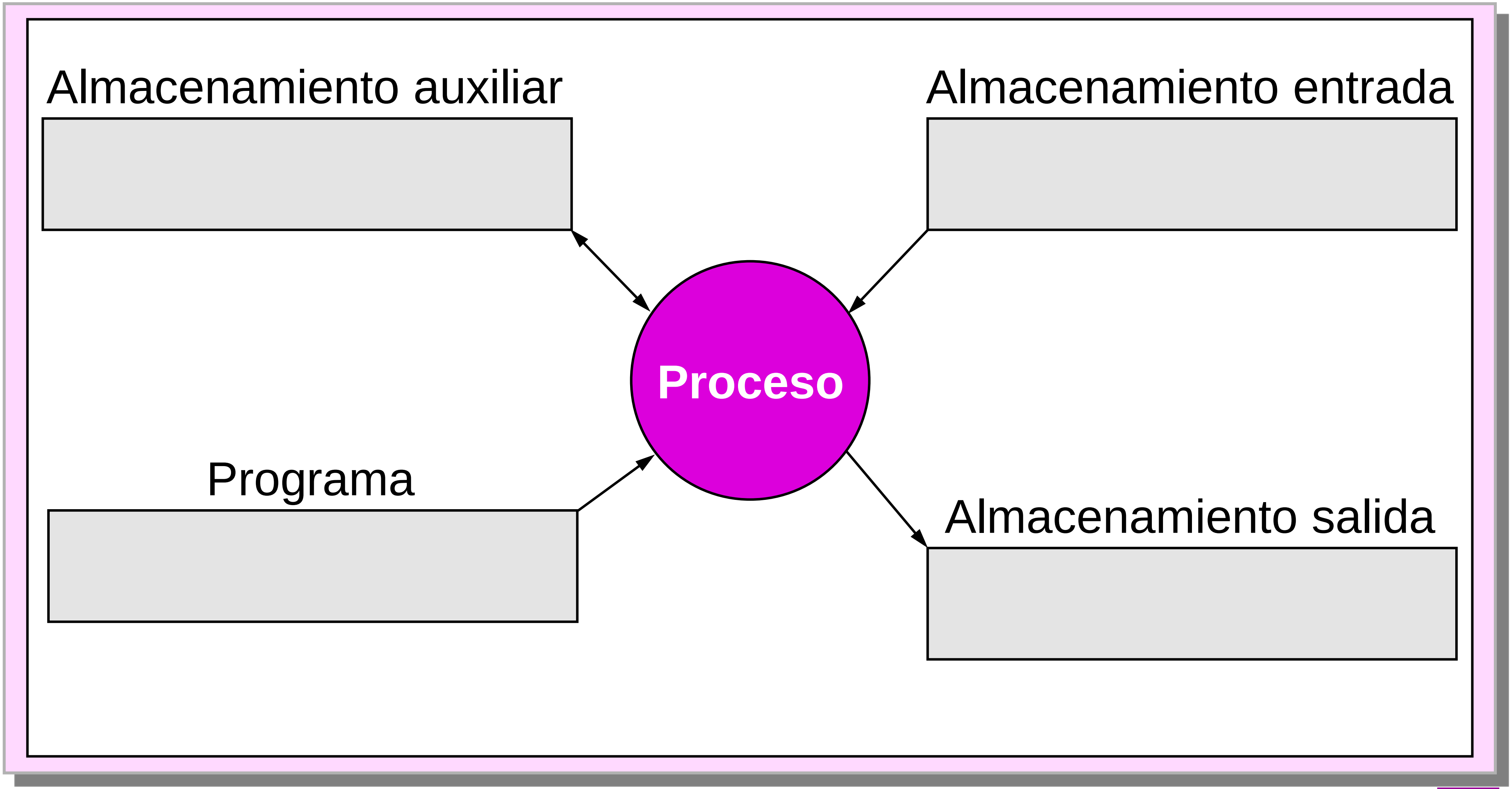


Capacidad de almacenamiento

- En las próximas transparencias se clasificará de manera más detallada (en función sobre todo del tipo de almacenamiento) los dispositivos de cómputo objeto de este curso.
- En el caso más general será necesario poder almacenar:
  - **El programa**, que determina el funcionamiento del dispositivo
  - Sus **datos de entrada**.
  - Posibles **datos auxiliares**.
  - Sus **datos de salida**.

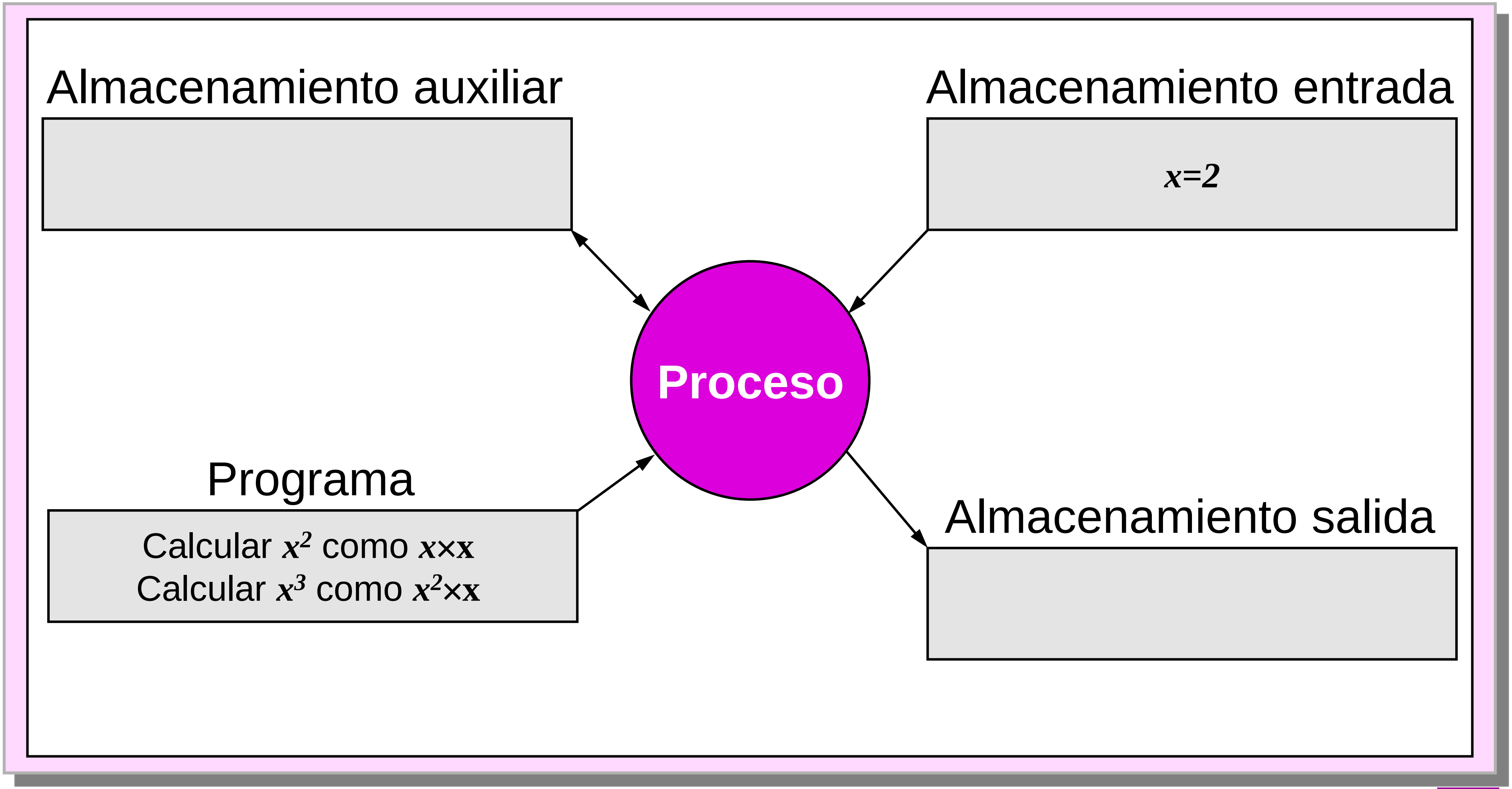
Clasificación según su almacenamiento

- Por ejemplo, si nos imaginamos un dispositivo que calcule $f(x)=x^3$ para $x=2$



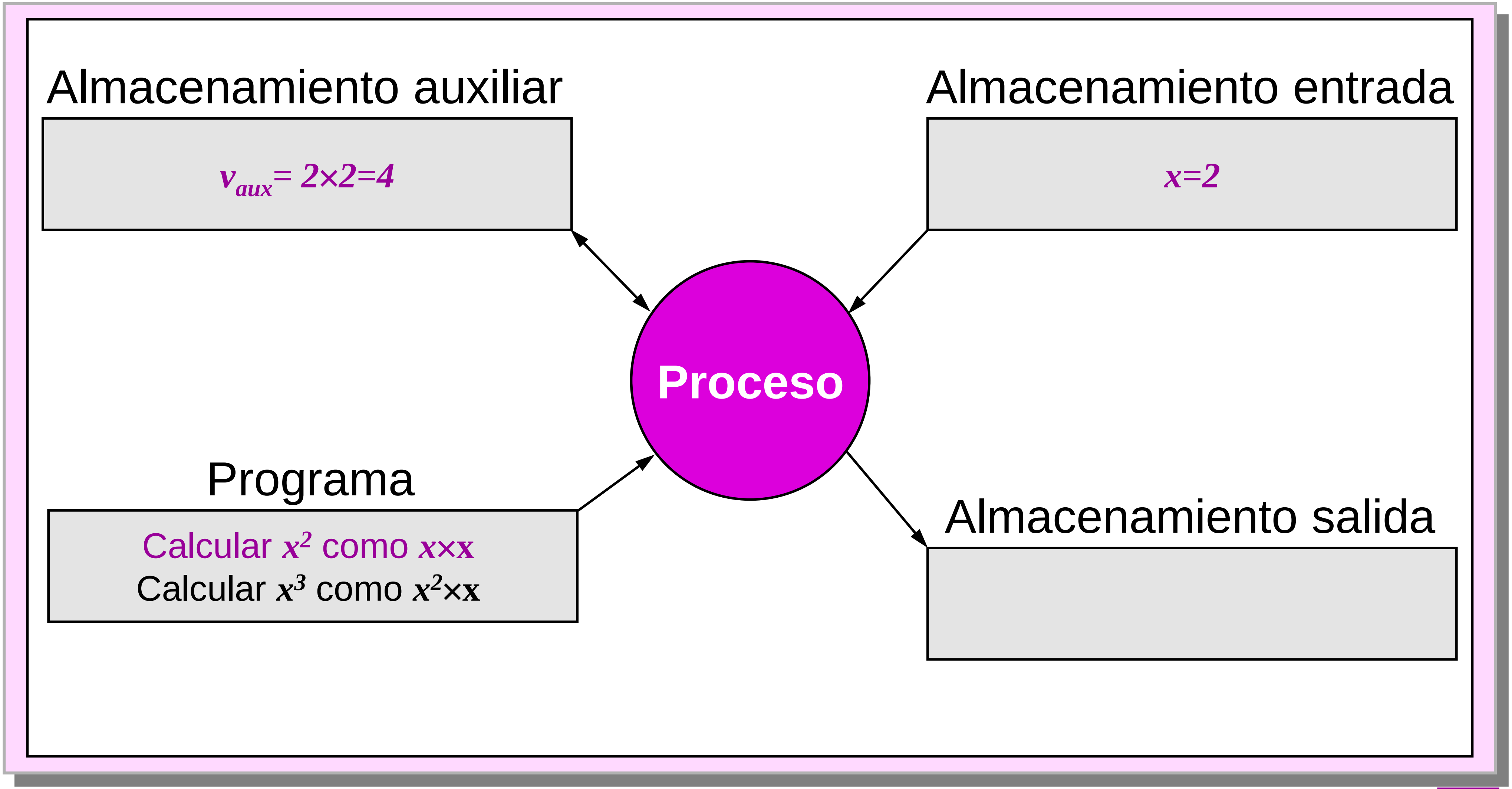
Clasificación según su almacenamiento

- Por ejemplo, si nos imaginamos un dispositivo que calcule $f(x)=x^3$ para $x=2$



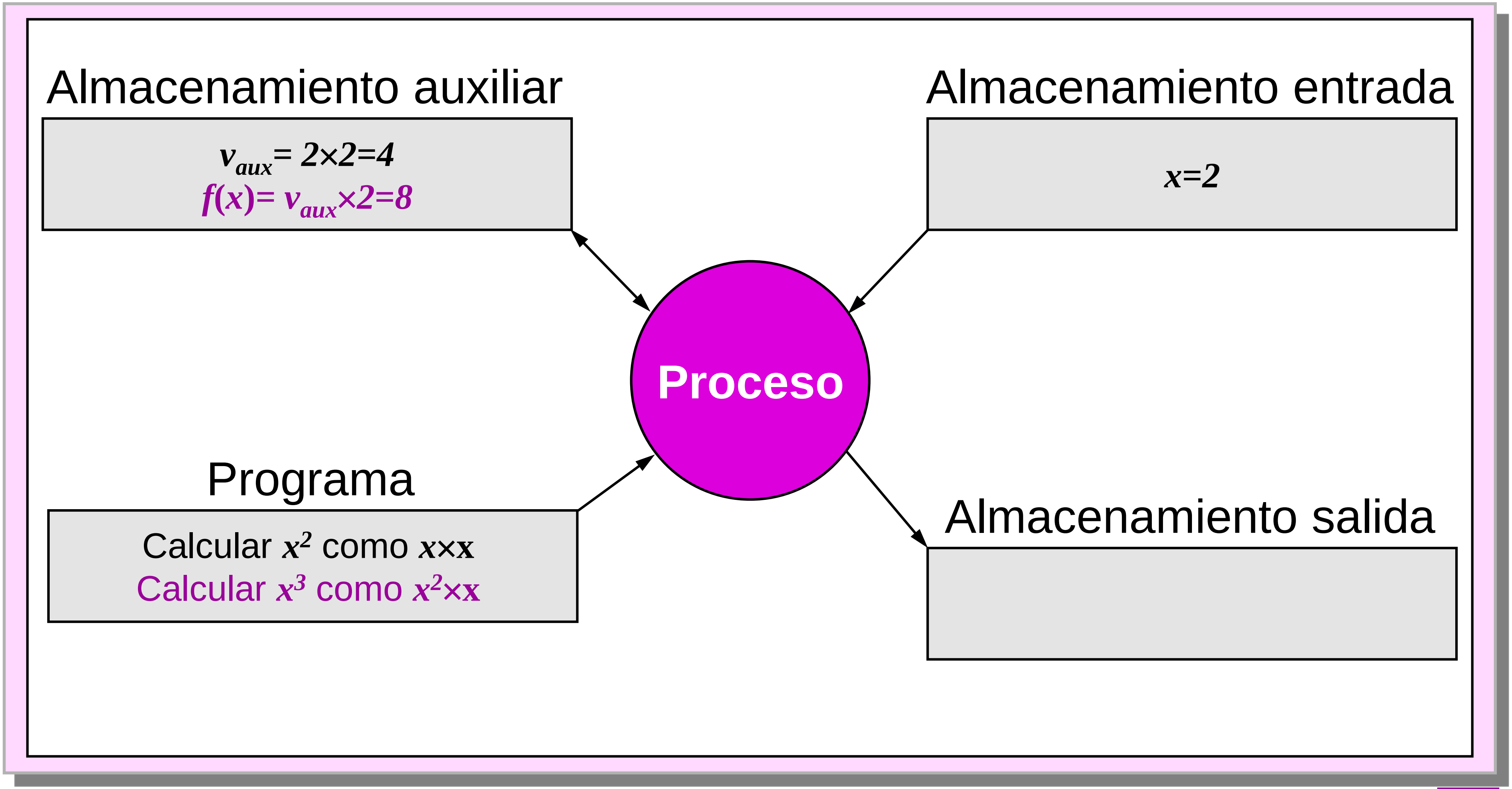
Clasificación según su almacenamiento

- Por ejemplo, si nos imaginamos un dispositivo que calcule $f(x)=x^3$ para $x=2$



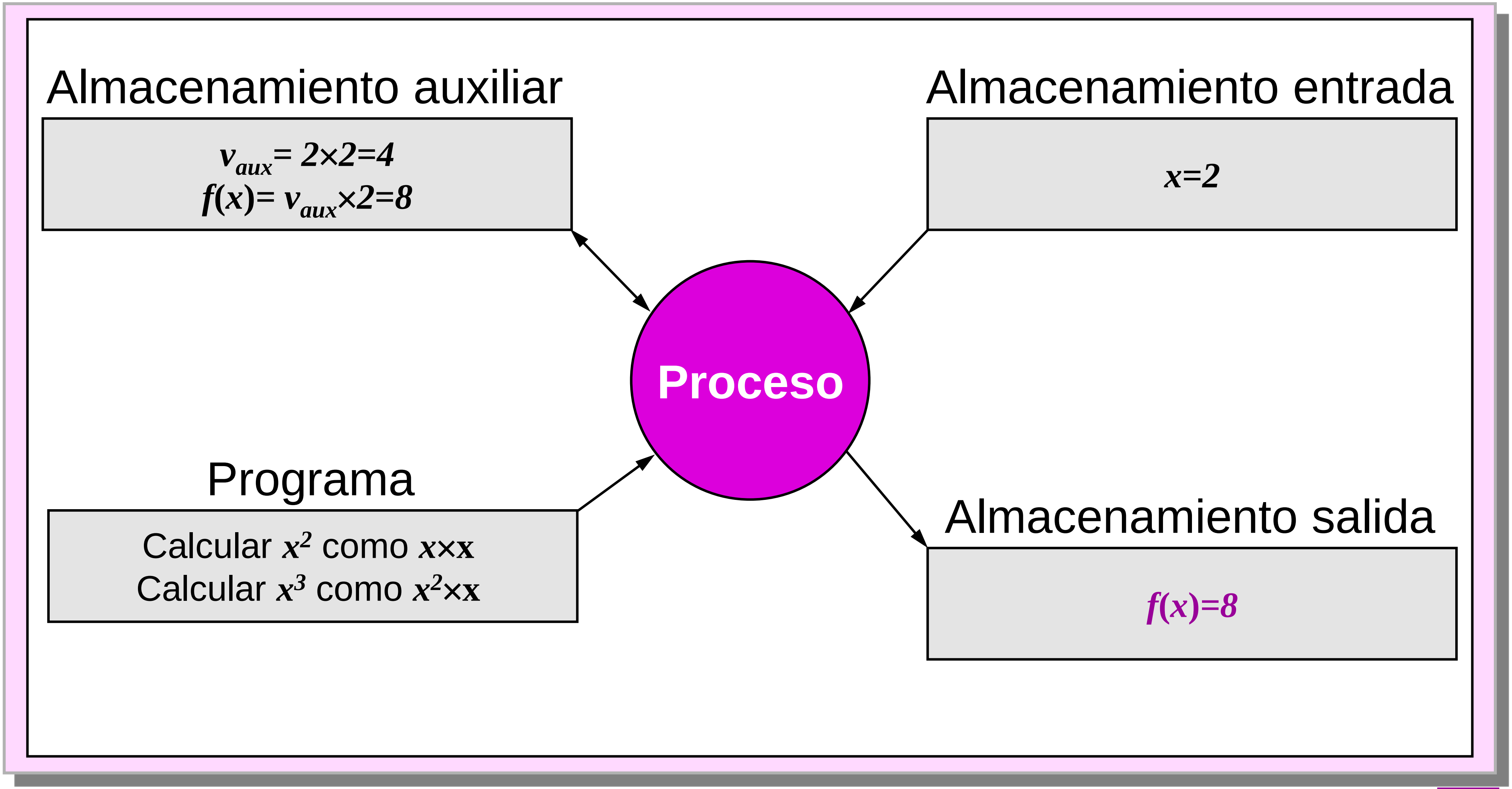
Clasificación según su almacenamiento

- Por ejemplo, si nos imaginamos un dispositivo que calcule $f(x)=x^3$ para $x=2$



Clasificación según su almacenamiento

- Por ejemplo, si nos imaginamos un dispositivo que calcule $f(x)=x^3$ para $x=2$

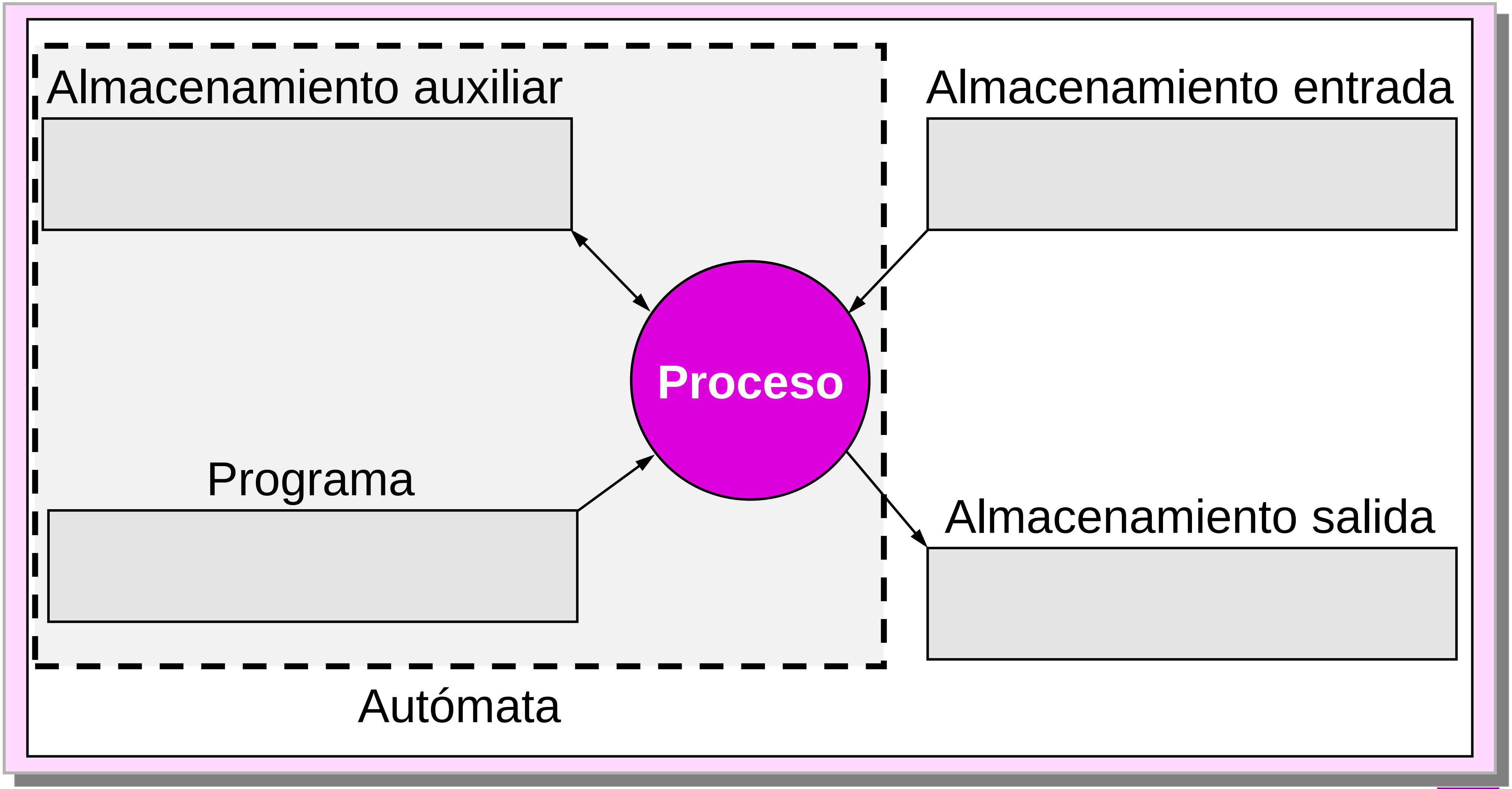


Clasificación según su almacenamiento

- Los autómatas de este curso sólo necesitan almacenar el programa y disponer de cierto almacenamiento auxiliar.
- Dependiendo del almacenamiento auxiliar se estudiarán los siguientes tipos:
  - **Autómatas finitos**
    - No disponen de ningún tipo de memoria auxiliar.
  - **Autómatas a pila**
    - Disponen de una pila auxiliar con las operaciones *push* y *pop*.
- Otros dispositivos fuera del ámbito de este curso pero contenido en otros cursados por el alumno:
  - **Máquinas de Turing**
    - Disponen de una memoria auxiliar compuesta por gran cantidad de espacios capaces de almacenar datos a los que se puede acceder directamente proporcionando la posición que ocupan.
- Observe
  - que las **pilas** tienen más **limitaciones** que las memorias de las máquinas de Turing: sólo puede accederse a la información a través de su **cima** por lo que el **orden** en el que se puede disponer de la información está **limitado**.

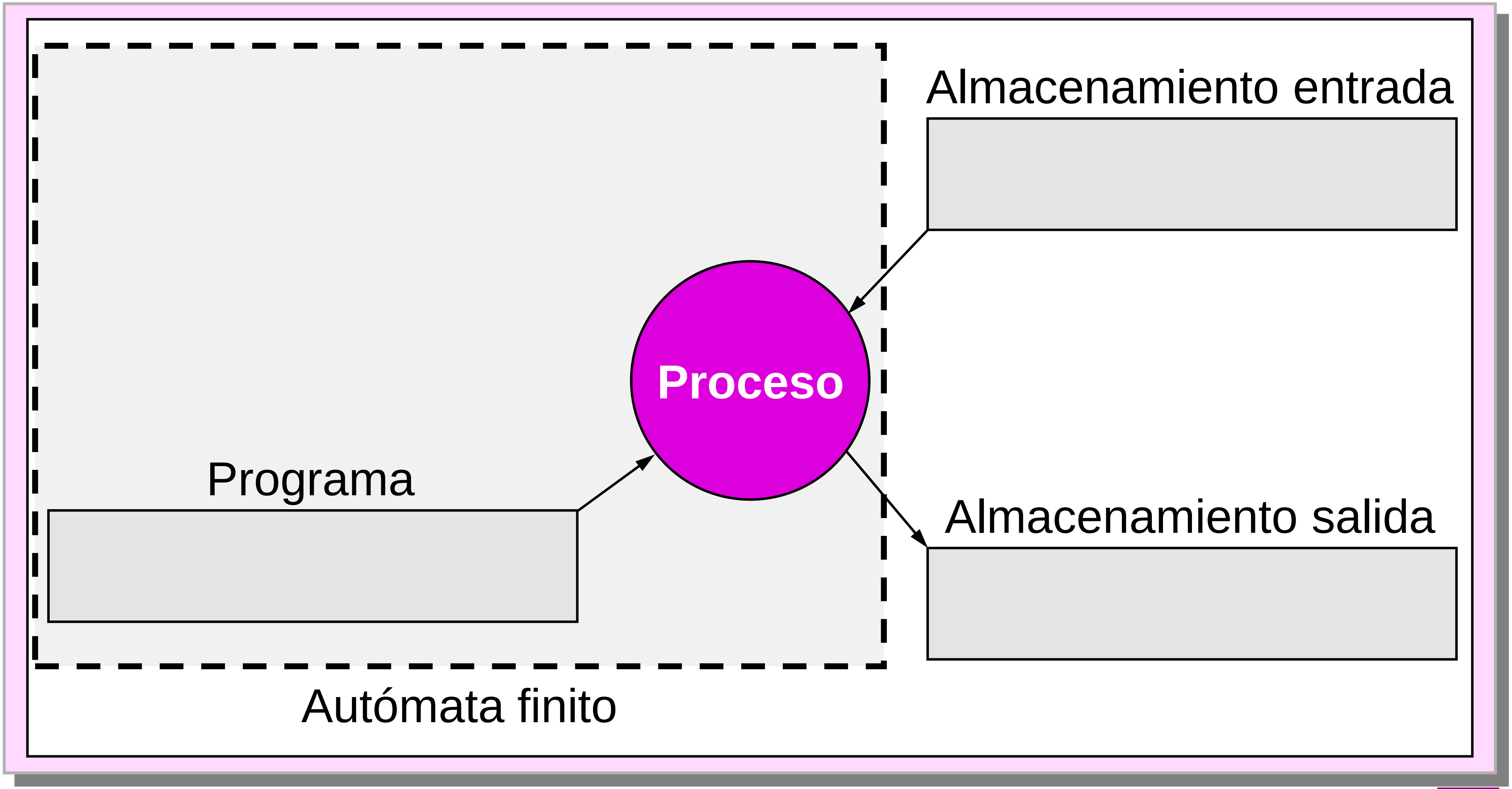
Clasificación según su almacenamiento

- Esquema gráfico de los autómatas de este curso.



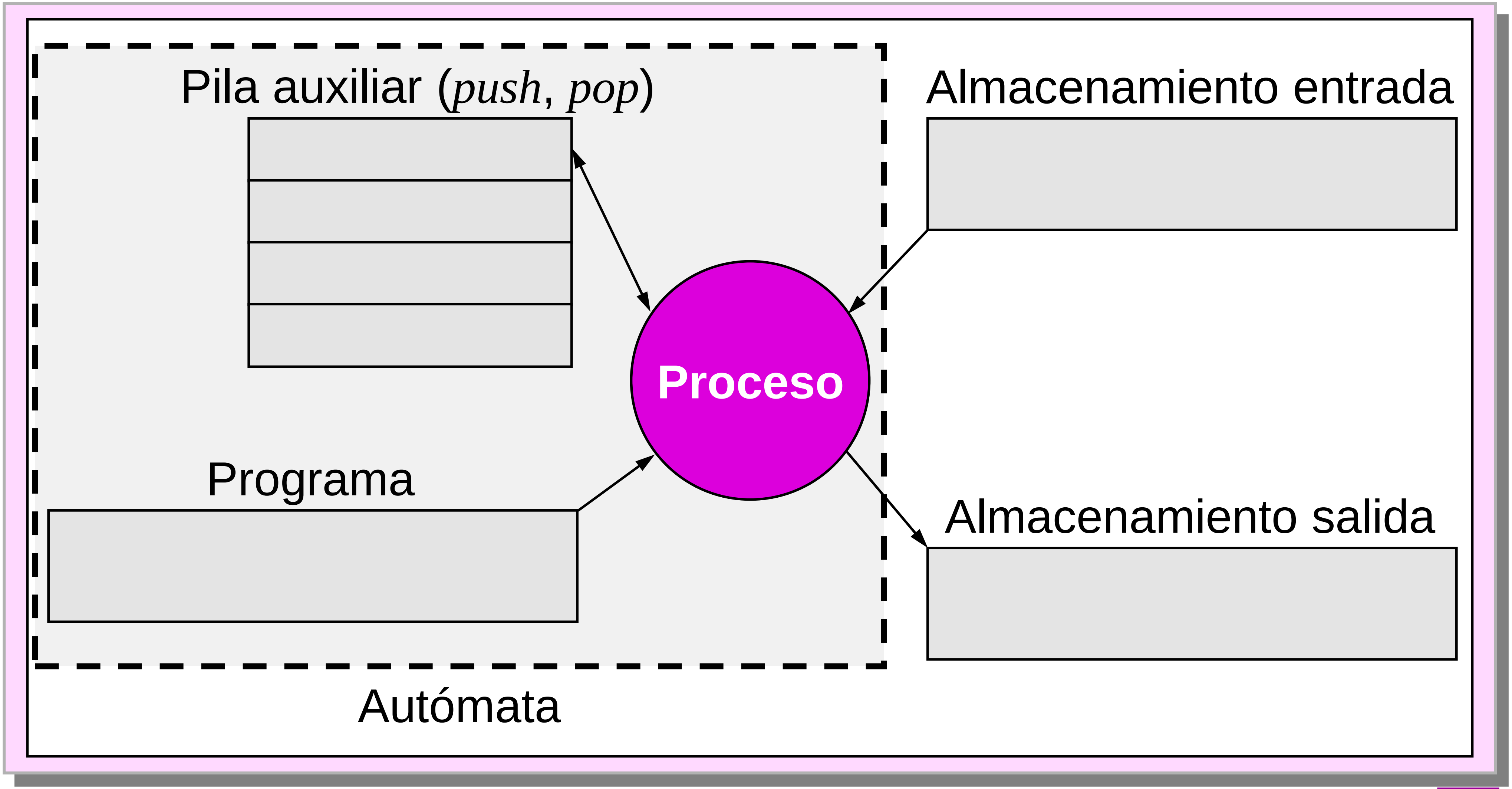
Almacenamiento en los autómatas finitos

- Esquema gráfico de los autómatas finitos.



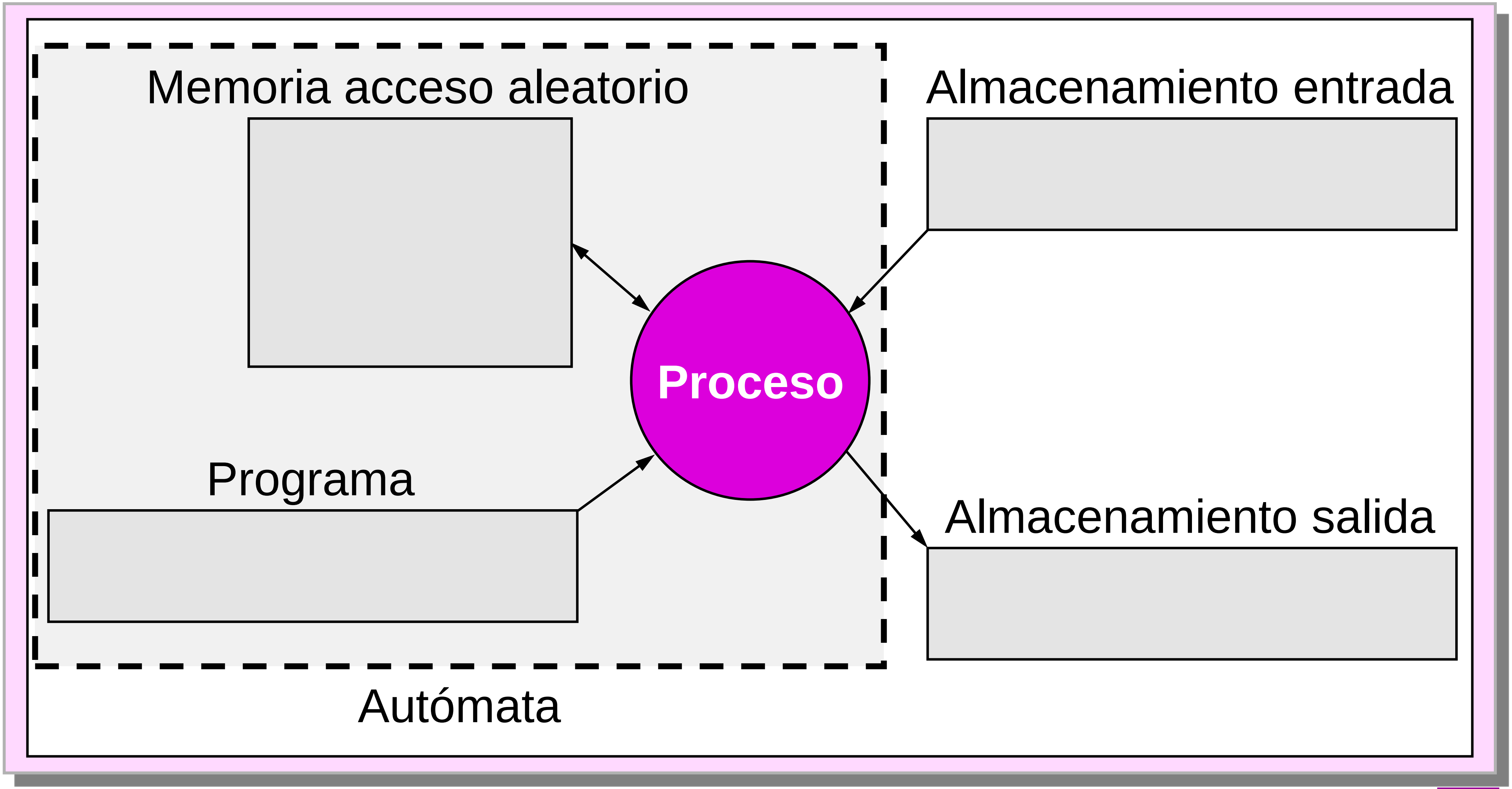
Almacenamiento en los autómatas a pila

- Esquema gráfico de los autómatas a pila.



Almacenamiento en las máquinas de Turing

- Esquema gráfico de las máquinas de Turing.



Clasificación según el determinismo

- Otra de las características que permite clasificar los autómatas es el concepto de *determinismo*.
- Se ha descrito informalmente el funcionamiento de los autómatas objetivo de este curso: transitan de un estado a otro en función de las entradas que reciben del exterior.
- Se llamarán **deterministas** a aquellos autómatas que en un momento dado sólo puedan estar en un estado.
- Se llamarán **no deterministas** a aquellos que puedan estar en más de un estado. Para ello es imprescindible que exista alguna entrada tal que, cuando el autómata se encuentra en cierto estado, pueda transitar a más de una situación diferente.
- A lo largo del curso se verán suficientes ejemplos para que queden claros estos conceptos.
- Todos los tipos de autómata anteriores pueden clasificarse a su vez utilizando este criterio.

Lenguaje universal sobre un alfabeto

- Para completar esta introducción se necesitan algunos conceptos básicos adicionales:

- **Lenguaje universal sobre un alfabeto Σ^***

  es el conjunto de todas las palabras que se pueden formar con símbolos de Σ

- **Notación**
  - El conjunto universal de un alfabeto Σ se representa como

$$\Sigma^*$$

- **Observaciones**
  - La razón de la notación se comprenderá durante el curso.

Lenguajes

- **Lenguaje sobre un alfabeto Σ**

es cualquier subconjunto del lenguaje universal sobre Σ

- **Notación**
  - Por lo tanto, se puede decir de cualquier lenguaje L sobre el alfabeto Σ

$$L \subseteq \Sigma^*$$

Lenguajes

- **Observaciones**
  - Por lo tanto, un lenguaje no es más que un conjunto de palabras.
  - Como en teoría de conjuntos, hay dos maneras muy frecuentemente utilizadas para la definición de conjuntos (***concepto previo*** que el alumno debe poseer):
    - **Mediante la enumeración de sus elementos**:
      - Posible sólo si el conjunto es finito.
      - Por ejemplo: el siguiente lenguaje $L_{ñ1}$.

$$\Sigma_{ñ} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,ñ,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$$

$$L_{ñ1} = \{petacas,\ chozas,\ jefe\}$$

    - **Mediante una propiedad que cumplan todos sus elementos**:
      - Por ejemplo: el siguiente lenguaje L_{par}.

$$\Sigma_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$L_{par} = \{x \in \mathrm{N} \mid x=2k,,\ k \in \mathrm{N}\}$$

Lenguajes y palabras

- **Longitud de una palabra |·|**

es el número de símbolos que tiene

- **Notación**
  - La longitud de cualquier palabra $\alpha \in \Sigma^*$ se representa como

$$|\alpha|$$

- **Palabra vacía λ**

es la única palabra que tiene 0 símbolos

- **Notación y observaciones**
  - La palabra vacía se representa mediante la letra griega lambda minúscula.
  - Se cumple que

$$|\lambda|=0$$

Lenguajes y palabras

- **Observaciones y ejemplos**
  - Considérese el siguiente alfabeto

$$\Sigma_a = \{a\}$$

  - Parece claro que Σ_a^* tiene que incluir todas las palabras de longitud 1 formadas por símbolos a:

$$a \in \Sigma_a^*$$

  - Y también las de longitud 2, 3, etc...

$$\{aa, aaa, \ldots\} \subseteq \Sigma_a^*$$

  - Pero, reflexionando respecto a las posibles longitudes, también se puede formar con símbolos de Σ_a la palabra que no tiene ningún símbolo, es decir:

$$\lambda \in \Sigma_a^*$$

  - Y, por tanto:

$$\Sigma_a^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$$

Lenguajes y palabras

- **Observaciones y ejemplos**
  - Considérese el siguiente alfabeto

$$\Sigma_{ab} = \{a,b\}$$

  - Parece claro que $\Sigma_{ab}{}^*$ tiene que incluir todas las palabras de longitud 1 formadas por símbolos a o b:

$$\{a, b\} \subseteq \Sigma_{ab}{}^*$$

  - Y también las de longitud 2, etc...

$$\{aa, ab, ba, bb\} \subseteq \Sigma_{ab}{}^*$$

  - Pero, reflexionando respecto a las posibles longitudes, también se puede formar con símbolos de Σ_{ab} la palabra que no tiene ningún símbolo, es decir:

$$\lambda \in \Sigma_{ab}{}^*$$

  - Y, por tanto:

$$\Sigma_{ab}{}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, ...\}$$

Lenguajes y palabras

- **Propiedad**
  - Las reflexiones anteriores permiten enunciar la siguiente propiedad

$$\lambda \in \Sigma^* \quad \forall \Sigma$$

  - Es decir

la palabra vacía pertenece al lenguaje universal sobre cualquier alfabeto posible

- **Observaciones**
  - No se va a añadir ninguna demostración formal a la generalización de la justificación informal realizada para los casos anteriores.

Lenguajes y palabras

- Σ^+
  - Motivado por la propiedad que se acaba de ver se define este conjunto de la sguiente manera

$$\Sigma^+=\Sigma^*-\{\lambda\} \quad \forall\Sigma$$

  - Es decir

Es el lenguaje universal excluyendo la palabra vacía

- **Observaciones**
  - Más adelante en el curso se presentará este mismo conjunto desde otro punto de vista que aclarará la notación utilizada para denominarlo

Algunos lenguajes

- **Lenguaje vacío ∅**

es el que no contiene ninguna palabra

- **Observaciones**
  - Corresponde, en lenguajes, al conjunto vacío.

- **Lenguaje {λ}**

es el lenguaje que sólo contiene la palabra vacía (λ)

- **Observaciones**
  - Son dos conjuntos importantes que son diferentes como se deduce del hecho de que tienen distinto cardinal.

$$|\{\lambda\}|=1 \qquad |\varnothing|=0$$

Como reconocedores de lenguajes

- Los **dispositivos** capaces de computar se pueden considerar **reconocedores** de lenguajes:
  - Se considera que la **concatenación de las entradas** que reciben a lo largo de una computación es una **palabra** que se somete al reconocimiento
  - El dispositivo la procesa hasta que la completa
  - La **salida** obtenida tras el proceso se interpreta como **aceptación** de la cadena a un lenguaje **o su rechazo**.
- Puede definirse entonces un **lenguaje** como **el conjunto de palabras que un dispositivo de este tipo acepta**.

Dispositivos capaces de computar

Aplicaciones

- Además de aplicaciones prácticas en muy diferentes áreas de conocimiento (como son las contenidas en este curso relacionadas con el procesamiento de lenguajes), desde el punto de vista teórico (**Informática Teórica**), asociados a estos dispositivos está el estudio de su capacidad, es decir, de **los límites de la computación**.
- Hay dos cuestiones importantes (que no son objeto de este curso):
  - **Decidibilidad**, ¿qué puede hacer un computador?.
    - Se llaman **decidibles**, los problemas que puede resolver un computador
  - **Intratabilidad**, ¿qué puede hacer un computador eficientemente?.
    - Se entiende por **eficientemente** en un tiempo proporcional a alguna función que crezca lentamente con el tamaño de la entrada (objetivo de otras asignaturas de la carrera).
    - Se supone que las **funciones polinómicas** son de crecimiento lento y que las que crecen más rápido que cualquier polinómica (ej. exponenciales) lo hacen con excesiva rapidez
    - Se llaman **tratables**, los problemas que puede resolver eficientemente un computador