Cálculo I: Grado en Matemáticas y Doble Grado Mat.-Ing. Informática
**Examen Parcial 1**: 28.10.2016

**SOLUCIONES**

---

**Ej. 1.- Estudiar la convergencia de las series**

$$(a) \sum (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n+1}\right), \qquad (b) \sum 7^{-n}\ \frac{n^2+1}{n^2}, \qquad (c) \sum \frac{3n}{n^3+2n+1}.$$

$(a) \sum (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ : el término general es

$$a_n = (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Cuando $n$ es par, es decir, $n = 2k$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{2k}{2k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2k}{2k+1}\right) = \operatorname{sen} 1 \neq 0.$$

Para $n = 2k+1$,

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2k+1}\right) = -\lim_{k\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right) = -\operatorname{sen} 1 \neq 0.$$

Como el término general no tiende a cero, <u>la serie diverge</u>, y por lo tanto también diverge absolutamente.

$(b) \sum 7^{-n}\ \frac{n^2+1}{n^2}$ : Según el criterio de la raíz, podemos obtener información sobre el comportamiento de la serie $\sum a_n$ al hallar el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Si $r < 1$ sabremos que la serie converge. Si $r > 1$, la serie diverge. Sin embargo, si $r = 1$ este criterio no es concluyente.

Como, en el caso de esta serie,

$$a_n = 7^{-n}\ \frac{n^2+1}{n^2},$$

hallamos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{-n}\ \frac{n^2+1}{n^2}} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^2}}.$$

Calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\log\left(\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^2}}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)}.$$

Como

$$0 \leq \frac{1}{n} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) \leq \frac{\log 2}{n} \to 0,$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)} = e^0 = 1,$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{-n}\ \frac{n^2+1}{n^2}} = \frac{1}{7}.$$

Como es menor que 1, el criterio del límite nos dice que la serie es convergente.

$(c)\sum \frac{3n}{n^3+2n+1}$ : Como el orden de crecimiento de la fracción es del orden de $\frac{1}{n^2}$, cuya serie es convergente, vamos a utilizar el criterio de comparación con respecto a la serie $\sum \frac{1}{n^2}$. Según este criterio, si la serie $\sum b_n$ es convergente, y $a_n \leq b_n$ para todo $n$, entonces la serie $\sum a_n$ también será convergente.

Como

$$n^3 + 2n + 1 \geq n^3$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\frac{3n}{n^3+2n+1} \leq \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la serie $\sum \frac{3}{n^2}$ es convergente, la serie $\sum \frac{3n}{n^3+2n+1}$ también es convergente.

**Ej. 2.- Se define la sucesión $\{a_n\}_n$ por recurrencia: $a_1 = 1$ y $a_n = \sqrt{2a_{n-1}+2}$, $\quad \forall n \geq 2$.**

- **(A) Demostrar las siguientes afirmaciones:**
  - **(i)** $\{a_n\}_n$ **es creciente.**
  - **(ii) Para todo** $n$ **se verifica** $a_n \leq 10$.
  - **(iii)** $\{a_n\}_n$ **es convergente.**

    **Calcular razonadamente su límite.**
- **(B) Si** $a_1 = 100$, **¿qué podría decirse de los apartados anteriores?**

(A.i) Tenemos la sucesión $a_1 = 1$ y $a_n = \sqrt{2a_{n-1}+2}$, veamos que es creciente por inducción, es decir, $P(n) = \{a_{n+1} \geq a_n\}$. En primer lugar, probamos que $P(1)$ es cierto:

$$a_2 = \sqrt{2a_1+2} = \sqrt{2+2} = 2 \geq 1 = a_1.$$

Supongamos ahora que $P(n-1)$ es cierto, es decir, que $a_n \geq a_{n-1}$ (Hipótesis de Inducción) y probemos $P(n)$. Por la definición de $a_{n+1}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n+2} \overset{H.I.}{\geq} \sqrt{2a_{n-1}+2} = a_n.$$

Por inducción, hemos probado que $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto la sucesión es creciente.

(A.ii) Vamos a probar que la sucesión está acotada superiormente por 10 de nuevo por inducción. Ahora $P(n) = \{a_n \leq 10\}$. El primer paso de inducción es claro: $a_1 = 1 \leq 10$.

Supongamos ahora la hipótesis de inducción, $a_n \leq 10$, y probemos que $a_{n+1} \leq 10$. Por la definición de la sucesión,

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 2} \overset{H.I.}{\leq} \sqrt{2 \cdot 10 + 2} = \sqrt{22} \leq \sqrt{25} = 5 \leq 10.$$

Por inducción. $a_n \leq 10$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(A.iii) Por el Teorema de Convergencia Monótona visto en clase, una sucesión creciente y acotada superiormente es convergente. Por los dos apartados vistos anteriormente existe una constante $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Como el límite de una sucesión convergente es único, tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = l$, así que, tomando límites en la definición de la sucesión,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n + 2} = \sqrt{2 \cdot l + 2},$$

es decir,

$$l = \sqrt{2 \cdot l + 2}.$$

De la ecuación

$$l^2 - 2l - 2 = 0$$

obtenemos las soluciones $l = 1 + \sqrt{3}$ y $l = 1 - \sqrt{3}$. Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y $a_1 = 1$, se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$, por lo tanto el límite de la sucesión no puede ser menor que 1. Por lo tanto $l = 1 + \sqrt{3}$.

(B) Si $a_1 = 100$ y $a_n = \sqrt{2a_{n-1} + 2}$ entonces el apartado (i) es falso, ya que

$$a_2 = \sqrt{2a_1 + 2} = \sqrt{200 + 2} \leq \sqrt{225} = 15 \leq 100 = a_1.$$

Por lo tanto la sucesión no puede ser creciente.

El apartado (ii) tampoco es cierto, ya que, como $a_1 = 100$, no se cumple que $a_n \leq 10$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que la sucesión es decreciente y acotada inferiormente, y por lo tanto convergente. Es fácil probar que es decreciente por inducción del mismo modo que probamos el apartado (A.i). Además, como el término de la recurrencia viene dado por una raíz, es claro que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, al ser una sucesión decreciente y acotada inferiormente, es convergente.

Como sólo nos piden discutir los apartados anteriores esto terminaría el ejercicio. Si quisiéramos además hallar el límite, con el mismo argumento de antes llegaríamos a que el límite es $l = 1 + \sqrt{3}$ o $l = 1 - \sqrt{3}$. Como todos los términos de la sucesión son positivos, se tiene que $l \geq 0$, así que sólo puede ser $l = 1 + \sqrt{3}$.

**Ej. 3.- (A) Definir el concepto de límite de una sucesión $\{b_n\}_n$ de números reales.**

**(B) Demostrar que si una sucesión convergente $\{b_n\}_n$ tiene por límite $-2$, existe un $n_0$ tal que $b_n < -1$ para todo $n \geq n_0$.**

**(C) Si $b_n = \dfrac{2n^3 - 6}{n^3 + 1}$, es fácil ver que se tiene $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$. Encontrar entonces, de forma explícita, un índice $N \in \mathbb{N}$ de forma que $|b_n - 2| < 10^{-6}, \quad \forall n \geq N$.**

(A) Una sucesión $\{b_n\}$ tiene límite $l$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \geq N_\varepsilon$ se tiene

$$|b_n - l| < \varepsilon.$$

(B) Por definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_\varepsilon$ tal que para todo $n \geq N_\varepsilon$,

$$|b_n + 2| < \varepsilon.$$

De las propiedades del valor absoluto se sigue que, si $b_n + 2 > 0$ (es decir, $b_n > -2$, la sucesión se aproxima a su límite por la derecha), entonces

$$b_n + 2 < \varepsilon$$

para todo $n \geq N_\varepsilon$, o equivalentemente,

$$b_n < \varepsilon - 2.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo $\varepsilon > 0$, escogiendo en particular $\varepsilon = 1$, tenemos que existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$

$$b_n < -1.$$

El $n_0$ que nos piden será igual a $N_1$.

Por otra parte, si $b_n + 2 < 0$, entonces $b_n < -2 < -1$.

(C) De nuevo por definición, la sucesión $b_n = \dfrac{2n^3 - 6}{n^3 + 1}$ tiene límite 2 si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_\varepsilon$ tal que para todo $n \geq N_\varepsilon$

$$\left| \frac{2n^3 - 6}{n^3 + 1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Vamos a demostrarlo hallando $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ para cada $\varepsilon$. En primer lugar,

$$\left| \frac{2n^3 - 6}{n^3 + 1} - 2 \right| = \left| \frac{-8}{n^3 + 1} \right| = \frac{8}{n^3 + 1} \leq \frac{8}{n^3} \leq \frac{8}{N_\varepsilon^3},$$

ya que estamos suponiendo $n \leq N_\varepsilon$. Entonces si escogemos $N_\varepsilon$ tal que

$$\frac{8}{N_\varepsilon^3} < \varepsilon,$$

se cumpliría que

$$\left| \frac{2n^3 - 6}{n^3 + 1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Tomando un

$$N_\varepsilon > \sqrt[3]{\frac{8}{\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$$

natural, por ejemplo

$$N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right\rfloor + 1,$$

se cumpliría lo anterior.

Si en particular tomamos $\varepsilon = 10^{-6}$ como nos piden en el ejercicio, sabemos que, para todo

$$n > \left\lfloor \frac{2}{\sqrt[3]{10^{-6}}} \right\rfloor + 1 = 201$$

se tiene que

$$\left| \frac{2n^3 - 6}{n^3 + 1} - 2 \right| < 10^{-6}.$$

Es decir, para todo $n > 201$ la sucesión va a estar a una distancia menor que $10^{-6}$ de su límite.

Observad que tal $N_\varepsilon$ no es único. Si tenemos un $N_\varepsilon$ tal que para todo $n > N_\varepsilon$ $|b_n - l| < \varepsilon$, claramente también será cierto para todo $n > N_\varepsilon + 1$, o cualquier número mayor. En la acotación del valor absoluto podríamos haber acotado $\frac{8}{n^3+1}$ por cualquier número mayor, por ejemplo $\frac{8}{n}$, y así hubiésemos obtenido un $N_\varepsilon$ distinto. Observad también que podríamos haber utilizado el Lema que nos dice que existe un $N_\varepsilon$ tal que para todo $n > N_\varepsilon$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Gracias a este Lema sabemos que el índice $N$ que nos piden en el ejercicio existe, pero no nos da un valor explícito.