CALCULO I. DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA.

SOLUCIÓN DE LA ENTREGA 6.

(1) (1 punto) **Sea f una función continua en** $[0,1]$. **Halla el límite**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} t f(t)\, dt}{x^3}$$

en función de f.

Este límite es una indeterminación $\frac{0}{0}$, así que podemos aplicar L'Hôpital. Como el integrando $tf(t)$ es una función continua, aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo para obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} t f(t)\, dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 f(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2xf(x)}{3}.$$

Como f es continua en 0, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) < \infty$, luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{2xf(x)}{3} = \frac{2f(0)}{3} \lim_{x\to 0} x = 0.$$

(2) (2 puntos) **Utiliza una partición de** $[0,1]$ **y las sumas de Riemann de la función** $f(x) = e^x$ **para hallar el límite**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Reescribimos el límite como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}.$$

Si tomamos la partición del intervalo $[0,1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n}$ y $x_k = \frac{k}{n}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$$

con $f(x) = e^x$. Como vimos en clase,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 e^x\, dx.$$

Por lo tanto, el límite que buscamos es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \int_0^1 e^x\, dx = e - 1.$$

(3) (2 puntos) **La función** Γ **se define para** $x > 0$ **como**

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dx.$$

Utiliza la integración por partes para demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ **y prueba por inducción que** $\Gamma(n+1) = n!$. **(Por esta última propiedad se dice que la función** Γ **es una versión continua del factorial).**

Por la definición de la función Γ,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dx.$$

Integrando por partes,

$$\int_0^\infty t^x e^{-t} dx = [-t^x e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dx.$$

Como

$$[-t^x e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} = \lim_{t\to\infty} -t^x e^{-t} + 0^x e^{-0} = 0,$$

tenemos que

$$\Gamma(x+1) = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dx = x\Gamma(x),$$

para todo $x > 0$. Ahora probamos por inducción que, si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$. Si $n = 0$,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dx = \int_0^\infty e^{-t} dx = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} = 1 = 0!,$$

como queríamos probar. Supongamos ahora que $\Gamma(n) = (n-1)!$, y veamos que $\Gamma(n+1) = n!$. Por lo que acabamos de ver, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, que por la hipótesis de inducción es igual a

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!,$$

y con esto terminamos la prueba por inducción.