Variable Compleja I CURSO 2019-20

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 1 DE PROBLEMAS

Los números complejos: operaciones algebraicas y propiedades básicas

1) Realice las operaciones con números complejos indicadas abajo, calculando explícitamente las partes real e imaginaria del resultado:

a) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}$, **b)** $(i-\sqrt{2})^2$, **c)** $\dfrac{1}{(3+2i)^2}$, **d)** $(1+i\sqrt{3})^3$.

2) Calcule los valores

a) $|(2-i)(1+i)^4|$, **b)** $\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{4-3i}\right|$, **c)** $\sum_{k=1}^{2020} i^k$.

3) Compruebe la identidad $|1+z\overline{w}|^2+|z-w|^2=(1+|z|^2)(1+|w|^2)$, para todo z, $w\in\mathbb{C}$.

4) Demuestre la *identidad de Lagrange*: si $z_1, z_2, \dots, z_n$ y $w_1, w_2, \dots, w_n$ son números complejos, entonces

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\Big)-\Big|\sum_{j=1}^{n}z_j\,w_j\Big|^2=\sum_{1\le i<j\le n}\big|z_i\,\overline{w_j}-z_j\,\overline{w_i}\big|^2.$$

¿Qué consecuencia tiene esta identidad?

5) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $a,b\in\mathbb{C}$ y $z\in\mathbb{C}\setminus\{-\overline{(a/b)}\}$ con $|z|=1$, entonces se cumple $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=1$.

b) Si $|a|<1$, entonces $|z|<1$ es equivalente a $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$.

6)a) Demuestre que las raíces de la ecuación cuadrática z^2+z+4 no pueden estar en el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}}=\{z:\ |z|\le 1\}$, sin calcular dichas soluciones.

b) Demuestre que si $|a|<1$ y $|z|<1$, entonces $1-\overline{a}z\neq 0$ y observe su relevancia en el ejercicio anterior.

Representación polar. Fórmula de de Moivre

7) Sea $z=x+yi\neq 0$ un número complejo. Compruebe que su argumento principal $\operatorname{Arg} z$, elegido en el intervalo $(-\pi,\pi]$, puede expresarse mediante la siguiente fórmula:

$$\operatorname{Arg} z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{si } x>0,\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi, & \text{si } x<0 \text{ e } y\ge 0,\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi, & \text{si } x<0 \text{ e } y<0,\end{cases}$$

8) Utilice las representaciones polares de $1+i$ y $1+i\sqrt{3}$ para calcular el valor de $\cos\frac{5\pi}{12}$.

9) Calcule los valores de

a) $(1+i)^{14}$, • **b)** $(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12})^{20}$.

10) Calcule los valores de

• **a)** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{401}$, **b)** $\left(\frac{1}{1-i}\right)^{2020}+\left(\frac{1}{1+i}\right)^{2020}$, • **c)** $(1+i)^n+(1-i)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

11) Demuestre que:

a) $\operatorname{sen}(3x)=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

• **b)** Para cualquier $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$ se cumple que

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}.$$

Raíces complejas

12) Calcule todos los valores de

a) $\sqrt[4]{-16}$, **b)** $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, **c)** $\sqrt[4]{1-i}$, **d)** $(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{1/3}$.

13) Demuestre que si ζ es una solución de $z^n=\mu$ (con $\mu\in\mathbb{C}$ fijo), entonces todas las soluciones son $\zeta\omega_0,\zeta\omega_1,\zeta\omega_2,\dots,\zeta\omega_{n-1}$, donde $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_{n-1}$, son las raíces n-ésimas de la unidad. Después encuentre razonadamente las soluciones de $z^6-8=0$.

14) En este ejercicio, consideraremos sólo el *valor principal de la raíz cuadrada*, definido como $\sqrt[(p)]{z}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$ cuando $z=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$ con $-\pi<\theta\le\pi$. Claramente, $(\sqrt[(p)]{z})^2=z$. Demuestre que las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $az^2+bz+c=0$, con $a\neq0$, son

$$z=\frac{-b\pm\sqrt[(p)]{b^2-4ac}}{2a}.$$

15) Resuelva (en $\mathbb{C}$) la ecuación $\overline{z}=z^{n-1}$, donde $n\in\mathbb{N}$.

16) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $z\neq1$ entonces $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

b) Si $\omega\neq1$ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n=0,\qquad 1+2\omega+3\omega^2+\cdots+n\omega^{n-1}=\frac{n}{\omega-1}.$$

c) Si $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\neq0$, entonces

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right),$$

y

$$\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}2\theta+\cdots+\operatorname{sen}n\theta=\frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\operatorname{sen}(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Ayuda: Use el apartado a) con $z=e^{i\theta}$.

$\boxed{\text{HOJA 1}}$

$\boxed{1.}$ a) $\frac{1}{i}+\frac{1}{1+i} = \frac{(1+i)+i}{i(1+i)} = \frac{1+2i}{i-1} = \frac{(1+2i)(i+1)}{i^2-1^2} =$

$= \frac{i+1+2i^2+2i}{-2} = \frac{-1+3i}{-2} = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

b) $(i-\sqrt{2})^2 = (i-\sqrt{2})(i-\sqrt{2}) = -1-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i+2 = -1-2\sqrt{2}i+2$

$= 1-2\sqrt{2}i$

c) $\frac{1}{(3+2i)^2} = \frac{1}{(3+2i)(3+2i)} = \frac{1}{9+6i+6i+4(-1)} = \frac{1}{5+12i} =$

$= \frac{5-12i}{169} = \frac{5}{169}-\frac{12}{169}i$

d) $\underbrace{(1+i\sqrt{3})^3}_{z} = \xrightarrow{\text{opción 1}}$ multiplicar como un loco

$\xrightarrow{\text{opción 2}} |z|=\sqrt{4}=2 \; ; \; Arg(z) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow z^3 = \left[2.\left(\cos\frac{\pi}{3}+ i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 = 2^3.\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{3}\right) =$

$= 8(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) = -8$

$\boxed{2.}$ a) $|\underbrace{(2-i)}_{z_1}\underbrace{(1+i)}_{z_2}{}^4|$

$z_1 = (2-i) \Rightarrow |z_1| = \sqrt{5}$

$z_2 = (1+i) \Rightarrow |z_2| = \sqrt{2} \Rightarrow |z_2|^4 = 4$

$\Rightarrow |z_1.z_2^4| = \sqrt{5}.4 = 4\sqrt{5}$

b) $\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{4-3i}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{16+9}} = \frac{2}{5}$

c) $\sum_{k=1}^{2020} i^k = \underbrace{\underset{i}{i}+\underset{-1}{i^2}+\underset{-i}{i^3}+\underset{1}{i^4}}_{0} + \underbrace{\cdots + i^8}_{0} + \cdots + \underbrace{\cdots + i^{2020}}_{0} = 0$

3.| Comprobar $\underbrace{|1+z\bar{w}|^2+|z-w|^2}_{I_1} = \underbrace{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}_{I_2}$ $\forall z,w\in\mathbb{C}$

$$I_1 = (1+z\bar{w})(1+\bar{z}w) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = 1+\cancel{z\bar{w}}+\cancel{\bar{z}w}+z\bar{z}w\bar{w}+z\bar{z}-\cancel{z\bar{w}}-$$

$$-\cancel{w\bar{z}}+w\bar{w} = 1+|z|^2+|w|^2+|z|^2|w|^2$$

$$I_2 = 1+|z|^2+|w|^2+|z|^2|w|^2 \quad // \ \blacksquare$$

1.| Demostrar Identidad de Lagrange : $z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_n\in\mathbb{C}$

$$\underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right) - \left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right|^2}_{S_1} = \underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} |z_i\bar{w}_j - z_j\bar{w}_i|^2}_{} = S_2$$

Primero respondemos a la pregunta: ¿qué consecuencia tiene esta id.?

Como $|z_i\bar{w}_j - z_j\bar{w}_i|^2 \geq 0 \implies S_1 \geq 0 \implies \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right) \geq \left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right|^2$

Si aplicamos $\sqrt{\cdot}$ obtenemos la des. Cauchy-Schwarz en $\mathbb{C}^n$.

Ahora demostremos la identidad: $S_1 = S_2 \implies$

$$\implies \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |w_j|^2\right)}_{\tilde{S}_1} = \underbrace{\left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} |z_i\bar{w}_j - z_j\bar{w}_i|}_{\tilde{S}_2}$$

$$\tilde{S}_1 = \sum_{i=j}^n |z_i w_j|^2 + \sum_{i\neq j}^n |z_i w_j|^2 = \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^n |z_i w_i|^2}}_{(\star)} + \sum_{1\le i<j\le n} |z_i w_j|^2 + |z_j w_i|^2$$

Ahora veamos que $\tilde{S}_2$ es igual a lo anterior:

$$\tilde{S}_2 = \underbrace{\left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right|^2}_{P_1} + \underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} |z_i\bar{w}_j - z_j\bar{w}_i|^2}_{P_2}$$

$$P_1 \equiv \left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right|^2 = (z_1w_1+\dots+z_nw_n)(\bar{z}_1\bar{w}_1+\dots+\bar{z}_n\bar{w}_n) = \sum_{1\le i,j\le n} z_i w_i \bar{z}_j \bar{w}_j = \sum_{1\le i,j\le n} z_i\bar{z}_j w_i\bar{w}_j =$$

$$= \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^n |z_i|^2 |w_i|^2}}_{(\star\star)} + \sum_{1\le i<j\le n} z_i\bar{z}_j w_i\bar{w}_j + z_j\bar{z}_i w_j\bar{w}_i$$

$(\star) = (\star\star) \implies$ podemos obviarlo

Por tanto, todo consiste en probar:

$$\underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq n} |z_i w_j|^2 + |z_j w_i|^2}_{\overset{\shortparallel}{S_3}} = \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i \bar{z}_j w_i \bar{w}_j + z_j \bar{z}_i w_j \bar{w}_i}_{\overset{\shortparallel}{S_4}} + \sum_{1\leq i<j\leq n} |z_i \bar{w}_j - z_j \bar{w}_i|^2$$

Vamos a desarrollar $\sum_{1\leq i<j\leq n} |z_i \bar{w}_j - z_j \bar{w}_i|^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (z_i \bar{w}_j - z_j \bar{w}_i)(\bar{z}_i w_j - \bar{z}_j w_i)$

Mutiplicando obtenemos:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \left[(z_i \bar{w}_j)(\bar{z}_i w_j) + (z_j \bar{w}_i)(\bar{z}_j w_i) - (z_i \bar{w}_j)(\bar{z}_j w_i) - (\bar{z}_i w_j)(z_j \bar{w}_i)\right] =$$

$$= \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i \bar{z}_i w_j \bar{w}_j + z_j \bar{z}_j w_i \bar{w}_i}_{\text{esto es justamente } S_3 \text{ porque:}} - \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i \bar{z}_j w_i \bar{w}_j + \bar{z}_i z_j \bar{w}_i w_j}_{\overset{\shortparallel}{S_4}}$$

$$S_3 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (\bar{z}_i w_j)(z_i \bar{w}_j) + (\bar{z}_j w_i)(z_j \bar{w}_i) = \sum_{1\leq i<j\leq n} z_i \bar{z}_i w_j \bar{w}_j + z_j \bar{z}_j w_i \bar{w}_j \quad \blacksquare$$

$\boxed{5.}$ a) $a, b \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{-(\frac{\bar{a}}{\bar{b}})\}$ con $|z| = 1 \Longrightarrow \left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = 1$

$$|az+b| \overset{?}{=} |\bar{b}z+\bar{a}| \iff |az+b|^2 = |\bar{b}z+\bar{a}|^2 \iff$$

$$\iff (az+b)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b}) \overset{?}{=} (\bar{b}z+\bar{a})(b\bar{z}+a) \iff$$

$$\iff |a|^2|z|^2 + |b|^2 + a\bar{b}z + b\bar{a}\bar{z} = |b|^2|z|^2 + |a|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z}$$

Como $|z| = 1$: $|a|^2 + |b|^2 + a\bar{b}z + b\bar{a}\bar{z} = |b|^2 + |a|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z} \quad \blacksquare$

b) $|a|<1$, entonces $|z|<1 \Longleftrightarrow |1-\bar{a}z|$

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|<1 \Leftrightarrow |z-a|<|1-\bar{a}z| \Leftrightarrow (z-a)(\bar{z}-\bar{a})<(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2+|a|^2-\cancel{a\bar{z}}-\cancel{\bar{a}z} < 1+|a|^2|z|^2 \cancel{-\bar{a}z}\cancel{-a\bar{z}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2+|a|^2 < 1+|a|^2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2(1-|a|^2) < 1-|a|^2 \Leftrightarrow$$

$$\underset{|a|<1}{\Leftrightarrow} |z|^2 < \frac{1-|a|^2}{1-|a|^2} \Leftrightarrow |z|^2<1 \Longleftrightarrow |z|<1$$

∎

$\boxed{5.}$ a) Las raíces de z^2+z+4 no pueden estar en el disco unidad cerrado $\mathbb{D}=\{z: |z|<1\}$ (sin calcularlas).

b) Si $|a|<1$ y $|z|<1 \Longrightarrow 1-\bar{a}z\neq 0$

a) $z^2+z+4=0 \Longrightarrow z^2+z=-4 \Longrightarrow |z^2+z|=|-4|=4$

Pero $|z^2+z|\leq |z|^2+|z| \leq 1+1=2$

Entonces $\longrightarrow$ por un lado $|z^2+z|=4$ $\longrightarrow$ por otro lado $|z^2+z|\leq 2$ $\Big\}$ contradicción

b) $$|1-\bar{a}z| \geqslant \big||1|-|\bar{a}z|\big| = |\underbrace{1-|a||z|}_{\vee\, 0}| = 1-|a||z| \underset{\substack{\text{imposible que}\\ \text{sea cero}\\ |a|<1 \text{ y } |z|<1}}{>} 0$$

∎

9. Calcular:

a) $(1+i)^{14} \equiv z^{14}$

$$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow z^{14} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4},\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^{14} = (\sqrt{2})^{14}\left(\cos\frac{14\pi}{4},\ \operatorname{sen}\frac{14\pi}{4}\right)$$

b) $$\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)^{20} = \left(\cos\frac{20\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{20\pi}{12}\right) = \cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$$

10. Calcular:

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{401} \equiv \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{401}$

$z_1 = 1+i \to \operatorname{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4}$, $|z_1| = \sqrt{2}$

$z_2 = 1-i \to \operatorname{Arg}(z_2) = \frac{7\pi}{4}$, $|z_2| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{401} = i^{401} = i^{400}\cdot i = i$$

b) $$\underbrace{\left(\frac{1}{1-i}\right)^{2020}}_{\equiv z_1^{2020}} + \underbrace{\left(\frac{1}{1+i}\right)^{2020}}_{\equiv z_2^{2020}}$$

$$z_1 = (1-i)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4},\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = (1+i)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\pi}{4},\ \operatorname{sen}\frac{-\pi}{4}\right)$$

) $$(1+i)^n + (1-i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) + (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{-n\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{-n\pi}{2}\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{\pi n}{4} + \cos\frac{\pi n}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cdot\cos\frac{\pi n}{4}$$

11. Demostrar:

a) $\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{Im}((\cos x + i\operatorname{sen}x)^3) = \operatorname{Im}(\cos^3 x + 3\cos^2 x \cdot i\operatorname{sen}x -$

$- 3\cos x\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x) = 3\cos^2 x\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}^3 x =$

$= 3(1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}^3 x = (3 - 3\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}^3 x =$

$= 3\operatorname{sen}x - 3\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}^3 x = 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x$

b) $\forall \theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\tan(n\theta)}{1-i\tan(n\theta)}$

FORMA 1:

Llamamos $a = 1 + i\tan\theta$ y $b = 1 - i\tan\theta$

$|a| = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$ $\qquad$ $|b| = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$

$\arg(a) = \arctan(\tan\theta) = \theta$ $\qquad$ $\arg(b) = \arctan(-\tan\theta) = \arctan(\tan(-\theta))$
$= -\theta$

Entonces $\frac{a}{b} = \frac{1/\cos\theta}{1/\cos\theta}(\cos(2\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta)) = \cos 2\theta + i\operatorname{sen}2\theta$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \cos(2n\theta) + i\operatorname{sen}(2n\theta)$ [*]

Cogemos $c = 1 + i\tan(n\theta)$ y $d = 1 - i\tan(n\theta)$, hacemos lo mism
y vemos que da [*].

FORMA 2:

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta}\right)^n = \left(\frac{1+i\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{1-i\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}\right)^n = \left(\frac{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}\right)^n \overset{\text{de Moivre}}{=} \frac{\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta)}{\cos(n\theta) - i\operatorname{sen}(n\theta)} =$$

$$= \frac{1+i\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\cos(n\theta)}}{1-i\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\cos(n\theta)}} = \frac{1+i\operatorname{tg}(n\theta)}{1-i\operatorname{tg}(n\theta)}$$

cos(n