CÁLCULO 1: 1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 8: la integral de Riemann

1.- Probar que la función $y = [x]$ es integrable en $[0, 5]$ y calcular $\int_0^5 [x]\, dx$.

2.- Sea f una función continua en $[a, b]$, no negativa, y que cumple $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Probar que f es cero en todos los puntos.

3.- Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo $[a, b]$, no integrable, y tal que f^2 sea integrable.

4.- Sea una función continua en $[a, b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de f sobre $[a, b]$ como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

(a) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre [a,b]. Demostrar que $m \leq E(f) \leq M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado: Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c).$$

(c) Supongamos que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Hallar $E(f)$ sobre $[-a, a]$. Sugerencia: interpretar la integral en términos de áreas.

(d) Evaluar $\int_{-a}^a x^7 \operatorname{sen}(x^4)\, dx$.

5.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, 1], \\ x+1 & \text{si} \quad x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Definimos F con $F(0) = 0$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, si $x \in (0, 2]$. Determinar F de forma explícita y probar que es continua en el intervalo $[0, 2]$, aunque f no lo sea.

6.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2) \log(1+t^2)\, dt, \quad G(x) = \int_{x^2}^1 \cos^2 t^2\, dt, \quad H(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log(2\, t^2))\, dt.$$

7.- (*) Encontrar una función f definida y continua en $[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t)\, f(t)\, dt = 6\, x^4.$$

8.- Sea $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 3, \\ x+a & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a a para que exista una función F en $[0, 4]$ con $F'(x) = f(x)$? Encontrar todas las funciones F posibles que cumplan la condición anterior.

9.- Calcular las primitivas siguientes:

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}} dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$ (3) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^{3x}}\, dx$

(4) $\displaystyle\int a^x\, dx$ (5) $\displaystyle\int (\tan x)^2\, dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$

(7) $\displaystyle\int \frac{8x^2 + 6x + 4}{x+1}\, dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

10.- Calcular las primitivas siguientes, usando la fórmula de integración por partes:

$$(1)\ \int x^2 e^x dx \qquad (2)\ \int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx \qquad (3)\ \int (\ln x)^3\,dx$$

$$(4)\ \int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx \qquad (5)\ \int \cos(\ln x)\,dx \qquad (6)\ \int x(\ln(x))^2 dx$$

11.- Calcular las primitivas siguientes, usando el cambio de variables adecuado en cada caso:

$$(1)\ \int e^x \operatorname{sen}(e^x) dx \qquad (2)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad (3)\ \int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$$

$$(4)\ \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \qquad (5)\ \int x\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad (6)\ \int \ln(\cos x)\tan x\,dx$$

12.- Calcular las primitivas siguientes, usando cambios de variable trigonométricos:

$$(1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (3)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(4)\ \int \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad (5)\ \int \sqrt{4+x^2}\,dx \qquad (6)\ \int \sqrt{x^2-4}\,dx$$

13.- Calcular las primitivas siguientes, mediante descomposición en fracciones simples:

$$(1)\ \int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx \qquad (2)\ \int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}\,dx \qquad (3)\ \int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$$

$$(4)\ \int \frac{dx}{x^4+1} \qquad (5)\ \int \frac{x^3+1}{x^2+x+1}\,dx$$

14.- Calcular las primitivas siguientes:

$$(1)\ \int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx \qquad (2)\ \int \frac{dx}{2\,x^2+8} \qquad (3)\ \int \frac{3\,x^2+2\,x-1}{x+2}\,dx$$

$$(4)\ \int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx \qquad (5)\ \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+8}\,dx \qquad (6)\ \int \frac{x^4}{x^2+4}\,dx$$

$$(7)\ \int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx \qquad (8)\ \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (9)\ \int x^2\sqrt{1+x}\,dx$$

$$(10)\ \int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5} \qquad (11)\ \int \frac{x^3}{x^3-3\,x+2}\,dx \qquad (12)\ \int \frac{x}{x^3-x^2+4\,x-4}\,dx$$

$$(13)\ \int \frac{e^x+3\,e^{-x}}{e^{2\,x}+1}\,dx \qquad (14)\ \int \frac{dx}{2+3\,\cos x} \qquad (15)\ \int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$$

$$(16)\ \int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \qquad (17)\ \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} \qquad (18)\ \int \frac{x^5+2\,x+1}{x^4+2\,x^2+1}\,dx$$

$$(19)\ \int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x^2+3)} \qquad (20)\ \int \frac{x}{1+x^4}\,dx \qquad (21)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$$

$$(22)\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (23)\ \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos x} \qquad (24)\ \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$(25)\ \int \frac{dx}{\cos^3 x} \qquad (26)\ \int \log x\,dx \qquad (27)\ \int x\,\log x\,dx$$

$$(28)\ \int x^2\,\operatorname{sen} x\,dx \qquad (29)\ \int x^3\,e^{-2\,x}\,dx \qquad (30)\ \int \cos(2\,x)\,e^{3\,x}\,dx$$

$$(31)\ \int \operatorname{sen}^4 x\,\cos^6 x\,dx \qquad (32)\ \int \operatorname{sen}^3 x\,\cos^6 x\,dx \qquad (33)\ \int \operatorname{sen}(2\,x)\,\cos(5\,x)\,dx$$

$$(34)\ \int \arctan x\,dx \qquad (35)\ \int \left(\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx \qquad (36)\ \int x^2\,\operatorname{arc\,cos} x\,dx$$

15.- (*)

(a) Hallar $\int \tan x\, dx$, $\int \tan^2 x\, dx$. Expresar $\int \tan^n x\, dx$ en términos de $\int \tan^{n-2} x\, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \tan^8 x\, dx$ y para $\int \tan^7 x\, dx$.

(b) Hallar $\int \sec^2 x\, dx$, $\int \sec^3 x\, dx$. Expresar $\int \sec^n x\, dx$ en términos de $\int \sec^{n-2} x\, dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \sec^6 x\, dx$ y para $\int \sec^7 x\, dx$.

16.- (*) Calcular los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \quad r > 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+n)}} \right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\,n+k}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)\,k}{n^3}.$$

17.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

$$(1) \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx \qquad (2) \int_2^\infty \frac{x}{x^2-x-2}\, dx \qquad (3) \int_0^1 \log x\, dx \qquad (4) \int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}\, dx$$

$$(5) \int_2^\infty \frac{dx}{x \log^2 x} \qquad (6) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{4+x^2}\, dx \qquad (7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} \qquad (8) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

18.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(1) \int_1^\infty e^{-x}\, x^\alpha dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (2) \int_0^\infty \frac{dx}{2\,x + (x^3+1)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3) \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(-\log x)^\alpha\, x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (5) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\cosh x}\, dx \qquad (6) \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$$

19.- (*)

(a) Usar la fórmula de integración por partes para demostrar la fórmula de reducción

$$\int x^\alpha\, e^{\beta\, x}\, dx = \frac{1}{\beta}\, x^\alpha\, e^{\beta\, x} - \frac{\alpha}{\beta} \int x^{\alpha-1}\, e^{\beta\, x}\, dx, \quad \textit{para} \quad \alpha > 0, \quad \beta \neq 0.$$

(b) La función Γ se define para $x > 0$ como $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$. Demostrar que se tiene $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Deducir entonces que $\Gamma(n+1) = n!$.

20.-

(a) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 8 - x^2$, $g(x) = x^2$.

(b) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 1/(x^2+1)$, $g(x) = \dfrac{1}{2}|x|$.

(c) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x\, e^{-x}$, $y = x^2\, e^{-x}$ para valores de $x \geq 1$.

(d) Hallar el área limitada por la curva $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$, su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.

21.- Sea $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$, y sea G su función inversa. Hallar $G'(0)$.

22.- (*) Sean f, g continuas, con $f \geq 0$ y g creciente. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = g(a) \int_a^c f(t) dt + g(b) \int_c^b f(t) dt.$$

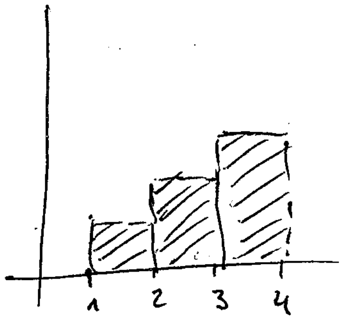
23.- (*) Calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + x - 4}{\cos x + 2}\, dx$$

HOJA 8

$\boxed{1.}$ $f(x) = [x]$ integrable en $[0,5]$ y hallar $\int_0^5 [x]dx$

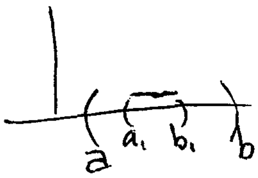
$\boxed{\bullet \int_0^1 \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \text{ no integrable}}$



$$\int_0^5 [x]dx = (2-1).1 + (3-2).2 + (4-3).3 +$$
$$+ (5-4).4 = 10 < \infty$$

$\boxed{2.}$ $f \geq 0$ en $[a,b]$, $\int_a^b f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$

Suponemos que existe un intervalo $[a_1, b_1] \subset [a,b] : f > c \ \forall x \in (a_1, b_1)$



$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx > \int_{a_1}^{b_1} c\,dx =$$
$$= c \int_{a_1}^{b_1} dx = c.(b_1 - a_1) > 0$$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0 \rightarrow$ CONTRADICCIÓN CON LA HIPÓTESIS DEL ENUNCIADO

$\boxed{4.}$ a) $E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

$$\left.\begin{aligned} \max_{x\in[a,b]} f(x) = M \\ \min_{x\in[a,b]} f(x) = m \end{aligned}\right\} \Rightarrow m \leq E(f) \leq M$$

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b M\,dx = \frac{1}{b-a} M \int_a^b dx = \frac{\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}} M =$$

b) TVI f cont. $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(c).$

$\forall u \in [m,M] : \exists c \in (a,b) \quad f(c) = u$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(c)$$

c) $f(-x) = -f(x)$

$$E(f) = \frac{1}{a-(-a)} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{2a}\left[\int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\right] =$$

$x = -dy$
$x = -y$

$$= \frac{1}{2a}\left[-\int_{a}^{0} f(-y)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{2a}\left[\int_{0}^{a} f(-y)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\right] \overset{f \text{ impar}}{=}$$

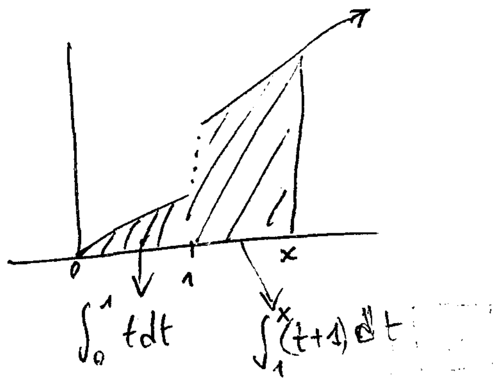
$$= \frac{1}{2a}\left[-\int_{0}^{a} f(y)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{2a}\cdot 0 = 0$$

d) $$\int_{-a}^{a} x^7 \operatorname{sen}(x^4)\,dx \overset{f \text{ impar en intervalo simétrico}}{=} 0$$

$\boxed{5.}$ $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x+1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad ; \quad F(0) = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}, & x \in [0,1] \\ \int_0^1 t\,dt + \int_1^x t+1\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_1^x = \end{cases}$$



$$= \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2} + x - \cancel{\frac{1}{2}} - 1 =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - 1, \quad x \in (1,2]$$

$$\Downarrow$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \in [0,1] \\ \frac{x^2}{2} + x - 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

f: integrable y continua en $[a,b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F'(c) = f(c) \quad , \quad c \in [a,b]$$

Ejercicios 6, 7, 8 → TFC
Ejercicio 9 → Int. inmediato

---

6. Derivar:

$$F(x) = \int_0^{x^2} \underbrace{(\operatorname{sen} t^2) \log(1+t^2)}_{\text{continua}}\,dt$$

$$G(x) = \int_0^x \overbrace{\operatorname{sen} t^2 \log(1+t^2)}\,dt$$

TFC: $G'(x) = f(x) = (\operatorname{sen} x^2) \log(1+x^2)$

$F(x) = G(x^2)$; $F'(x) = G'(x^2)(2x)$

$$F'(x) = 2x(\operatorname{sen} x^4)\log(1+x^4)$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

PARA ESCOGER u SEGUIR ESTA LISTA:

A L P E S

- A → arcos
- L → logaritmos
- P → polinomios
- E → exponenciales
- S → senos, cosenos, tangentes

10. (1) $\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x}_{dv}\, dx$ $\qquad dv = e^x dx \to v = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x\, dx$$ (falta integrar)

(2) $\int e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx)\, dx$ $\qquad dv = \operatorname{sen}(bx) dx \to v = \frac{-1}{b}\cos(bx)$

$$\int e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx)\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax}\cos(bx) + \underbrace{\int \frac{a}{b}\cos(bx) e^{ax}\, dx}_{\text{integramos esto por partes}} =$$

$u = e^{ax} \to du = a e^{ax} dx$

$dv = \frac{a}{b}\cos(bx) \to v = \frac{a}{b^2}\operatorname{sen}(bx)$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax}\cos(bx) + \left[\frac{a^2}{b^2}\operatorname{sen}(bx) e^{ax} - \int \frac{a^2}{b^2}\operatorname{sen}(bx) e^{ax} dx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\, dx + \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\, dx}_{\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx) dx \cdot \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)} = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{sen}(bx) e^{ax} - \frac{1}{b} e^{ax}\cos bx$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\, dx = \frac{1}{1 + a^2/b^2}\left(\frac{a}{b^2}\operatorname{sen}(bx) e^{ax} - \frac{1}{b} e^{ax}\cos(bx)\right)$$

$\boxed{11.}$ (6) $\int \ln(\cos x) \cdot \tan x \, dx$

cambio variable $y = \cos x$

$dy = -\operatorname{sen} x \, dx$

$\int f(t)dt = \int f(x(t)) \, x'(t) \, dt$

$z = \ln y$

$$\int \ln(\cos x) \cdot \underbrace{\tan x \, dx}_{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -dy} = -\int \ln(y) \cdot \frac{1}{y} dy \underset{dz = \frac{1}{y}dy}{\overset{z=\ln y}{=}} -\int z \cdot dz = \frac{-z^2}{2} \overset{z = \ln y}{=}$$

$$= \frac{-\ln^2 y}{2} \overset{y = \cos x}{=} \frac{-\ln^2(\cos x)}{2} + C$$

$\boxed{6.}$ b) $G(x) = \int_{x^2}^{1} \cos^2 t^2 \, dt = \underbrace{\int_0^1 \cos^2 t^2 dt}_{\text{constante}} - \int_0^{x^2} \cos^2 t^2 \, dt$

$G'(x) = -2x \cos^2(x^4)$

c) $H(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log(2t^2)) \, dt$

$H'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x \cdot \cos(\log(2 \operatorname{sen}^4 x)) + e^x \cdot \cos(\log(2 \cdot (-e^x)^2))$

$\boxed{7.}$ Encontrar f tal que: $\int_0^{x^2} (1+t) f(t) \, dt = 6x^4$

Derivamos a ambos lados: $2x(1+x^2) f(x^2) = 24x^3$

$(1+x^2) f(x^2) = 12x^2 \Rightarrow f(x^2) = \frac{12x^2}{1+x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{12x}{1+x} + C$

$c \in \mathbb{R}$

$\boxed{9.}$ 7) $\displaystyle\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} 8x^2+6x+4 & x+1 \\ \hline -8x^2-8x & 8x-2 \\ \quad -2x+4 & \\ \quad\ 2x+2 & \\ \hline \qquad 6 & \end{array}$$

$$\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}\,dx = \int 8x-2 + \int \frac{6}{x+1}\,dx = 4x^2-2x+6\log|x+1|+C$$

$\boxed{12.}$ 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \longrightarrow 1-x^2 = \cos^2 t$

$$\int \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \int \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \int dt = t = \operatorname{arcsen} x$$

$\boxed{\text{FRACCIONES SIMPLES}}$ $\displaystyle\int \frac{P}{Q}\,dx$

1er caso

$Q = (x-x_1)(x-x_2) \text{ —— } (x-x_n)$

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \text{——} + \frac{Z}{x-x_n}$$

2º caso

$Q = (x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2} \text{ —— } (x-x_n)^{n_n}$

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{(x-x_1)^3} + \cdots$$

3er caso

$Q = (x^2+\alpha x+\beta)$

$$\frac{P}{Q} = \frac{Ax+B}{x^2+\alpha x+\beta} + \text{——}$$

15.

a) $\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$

$\int \tan^2 x\, dx = \int 1+\tan^2 x - 1\, dx = \int 1+\tan^2 x\, dx - \int dx = \tan x - x + c$

$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx = \int \tan x(\sec^2 x - 1)\, dx =$

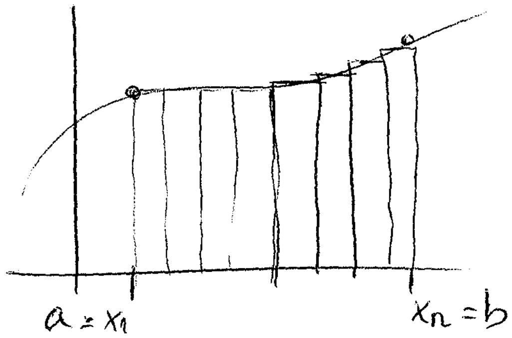
$= \int \tan x \sec^2 x - \tan x\, dx = \int \tan x \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx =$

$= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + c$

$\int \tan^n x = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x\, dx = \int \tan^{n-2} x \cdot (\sec^2 x - 1)\, dx =$

$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x - \tan^{n-2} x\, dx = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx =$

$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \underbrace{\int \tan^{n-2} x\, dx}_{\text{reiteramos el proceso hasta llegar a } \int \tan^3 x\, dx \text{ ó } \int \tan^2 x\, dx \text{ ó } \int \tan x\, dx} + c$



$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$n^{\underline{o}}$ intervales

f cont. en $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_k^*)\, \Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$\boxed{13.}$ 1) ⊛ $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$x=1 \Rightarrow 8 = 4A \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$$x=-1 \Rightarrow -6 = -2C \Rightarrow \boxed{C=3}$$

$$x=0 \Rightarrow -1 = A - B - C = 2-3-B = -1-B \Rightarrow \boxed{B=0}$$

$$\frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$⊛ = \int \frac{2}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = 2\log|x-1| + 3\int (x+1)^{-2}\,dx =$$

$$= 2\log|x-1| - 3(x+1)^{-1} + C$$

---

2) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}\,dx$ ⊛

$$\frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1} = \frac{x^3+x+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$x^3+x+2 = (x^2+1)(Ax+B) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + Ax + B + Cx + D$$

$$\rightarrow \boxed{A=1} \;;\; \boxed{B=0} \;;\; A+C=1 \Rightarrow \boxed{C=0} \quad \boxed{D=2}$$

$$⊛ = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\log|x^2+1| + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+1| + \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\log|x^2+1| + 2\int\frac{1}{1+x^2} - 2\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+1| + 2\arctan x - \underbrace{2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}}_{\text{Integración por partes}}$$

16. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^r + 2^r + \text{—} + n^r}{n^{r+1}}$, $r > 0$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta x = \tfrac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^r}{n^{r+1}} = \lim \sum^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\left(\frac{k}{n}\right)^r$$

$$\Delta x = \frac{1}{n} \qquad f: \; f(x_k^*) = \left(\frac{k}{n}\right)^r \; ; \; x_k^* = \frac{k}{n} \Rightarrow f(x) = x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \text{—} + n^r}{n^{r+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^r}{n^{r+1}} = \int_0^1 x^r\,dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^1 = \frac{1}{r+1}$$

Sin pérdida de generalidad:

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

$$[a,b] = [0,1]$$

$$x_k^* = \frac{k}{n}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{nn}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \text{——} + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}\right) =$$

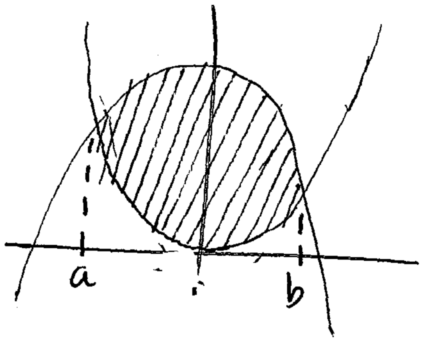
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}}_{f(k/n)} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\sqrt{2}$$

$\boxed{17.}$ 1) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[-2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)\right]_0^R =$

$= \lim_{R\to\infty} \left[-2e^{-\sqrt{R}}(\sqrt{R}+1)+2\right]$

$\boxed{20.}$ a) Área limitada por $f(x) = 8-x^2$ y $g(x) = x^2$



Puntos de corte: 2 y -2.

$2\int_0^2 f(x) - g(x)\,dx =$

$\boxed{21.}$ $F(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt$ $\qquad G = F^{-1}$ hallar $G'(0)$.

$G(F(x)) = x$

$G'(F(x))\,F'(x) = 1 \Rightarrow G'(F(x)) = \dfrac{1}{F'(x)}$

Para $x=0 \Rightarrow F(x) = 0 \Rightarrow G'(0) = \dfrac{1}{F'(0)}$

$F'(x) = e^{-x}$; $F'(0) = 1$

$G'(0) = \frac{1}{1} = 1$

$\boxed{22.}$ f, g cont., $f \geq 0$, g creciente $\Rightarrow \exists c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a)\int_a^c f(t)\,dt + g(b)\int_c^b f(t)\,dt$$

$$F(x) = g(a)\int_a^x f(t)\,dt + g(b)\int_x^b f(t)\,dt$$

T.V.I:

$\forall u \quad F(b) \leq u \leq F(a) \quad \exists c : F(c) = u;$

$$F(a) = 0 + g(b)\int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

$$F(b) = g(a)\int_a^b f(t)\,dt + 0 \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

Llamamos $u = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ y por el T.V.I $\exists c \in [a,b]$ tal que $f(c) = u$.