Topología. Capítulo 2.
Propiedades de los espacios topológicos
Grado de Matemáticas.
Curso 2015-2016

José García-Cuerva

Universidad Autónoma de Madrid

26 de noviembre de 2015

1. **Conexión.**
   - Subespacios conexos de la recta real.
   - Conexión de un producto
   - Espacios conexos por arcos.
2. **Compacidad**
   - ¿Por qué es importante?
   - ¿Cómo funciona en espacios métricos?
   - ¿Cómo se relaciona con la completitud?
   - ¿Qué es un espacio topológico compacto?
   - Compactos de espacios ordenados.
   - Producto de compactos. El teorema de Tychonoff.
   - Compacidad por puntos de acumulación.
   - Compacidad local
3. **Axiomas de separación.**
   - El teorema de Urysohn.
   - El teorema de extensión de Tietze.
   - Espacios completamente regulares.
   - El teorema de metrización de Urysohn

Definición.

Se dice que el espacio topológico X es conexo si y sólo si no es posible expresarlo como unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos. Se dice que el subconjunto A del espacio topológico X es conexo si A, con la topología relativa heredada de X, es conexo.

PROPOSICIÓN.

Sea X un espacio topológico. Entonces

(*a*) X es conexo si y sólo si X no es unión de dos cerrados no vacíos disjuntos.

(*b*) X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de X que son, a la vez, abiertos y cerrados, son $\emptyset$ y X.

(*c*) $A \subset X$ es conexo si y sólo si para cada par de abiertos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U \cup V$ y $U \cap V \cap A = \emptyset$, se tiene que, o bien $A \subset U$ (y $A \cap V = \emptyset$) o bien $A \subset V$ (y $A \cap U = \emptyset$).

(*d*) $A \subset X$ es conexo si y sólo si para cada par de cerrados $F, G \subset X$ tales que $A \subset F \cup G$ y $F \cap G \cap A = \emptyset$, se tiene que, o bien $A \subset F$ (y $A \cap G = \emptyset$) o bien $A \subset G$ (y $A \cap F = \emptyset$).

Ejercicio 1. Ver que $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si A es un intervalo.
Ejercicio 2. Ver que la imagen de un intervalo por una aplicación continua es, también, un intervalo. ¿Qué teorema de Cálculo I se esconde detrás de la afirmación que acabamos de hacer?

TEOREMA.

Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Demostrar que, si X es conexo, entonces $f(X)$ también es conexo.

DEMOSTRACIÓN.

Sean U, V abiertos de Y, tales que $f(X) \subset U \cup V$, $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$. Entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos, $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$ y $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Como X es conexo, o bien es $f^{-1}(U) = \emptyset$, o bien es $f^{-1}(V) = \emptyset$. En el primer caso se tiene $f(X) \subset V$ y $f(X) \cap U = \emptyset$ y, en el segundo, $f(X) \subset U$ y $f(X) \cap V = \emptyset$.
Queda probado que $f(X)$ es conexo.

Proposición.

Sea X un espacio topológico y sea $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ una familia de conexos tales que $\cap_{\alpha \in J} A_\alpha \neq \emptyset$. Entonces $\cup_{\alpha \in J} A_\alpha$ es conexo.

Demostración

Sea $A = \cup_{\alpha \in J} A_\alpha \subset U \cup V$, siendo U y V abiertos tales que $U \cap V \cap A = \emptyset$. Sabemos que $\exists c \in \cap_{\alpha \in J} A_\alpha \subset U \cup V$. Supongamos que $c \in U$. Entonces, para cada $\alpha \in J$, como A_α es conexo, se tendrá que $A_\alpha \in U$ y, en definitiva, $A \subset U$.

Proposición.

Si E es un subconjunto conexo de X, entonces $\overline{E}$ también es conexo.

Demostración.

Si $\overline{E} = F \cup G$ con $F \cap G = \emptyset$, siendo F y G cerrados de $\overline{E}$, como $\overline{E}$ es cerrado, F y G son, también, cerrados en X.
Entonces $E \subset F \cup G$ y $E \cap F \cap G = \emptyset$. Como E es conexo, será $E \subset F$ y $E \cap G = \emptyset$ o $E \subset G$ y $E \cap F = \emptyset$. En el primer caso $\overline{E} \subset F$ y $\overline{E} \cap G = \emptyset$ y en el segundo $\overline{E} \subset G$ y $\overline{E} \cap F = \emptyset$. Así pues, $\overline{E}$ es conexo.

Ejercicio 3. Demostrar que si E es un subconjunto conexo de X y $E \subset S \subset \overline{E}$, entonces S es conexo.

Definición.

Un conjunto totalmente ordenado $(X, \leq)$ con más de un elemento se dice que es un continuo lineal si cumple las dos condiciones siguientes

(1) La propiedad del supremo, que dice que: Todo subconjunto A de X que tenga alguna cota superior, ttiene, de hecho, una cota superior mínima, a la que llamamos supremo.

(2)
$$\forall x, y \in X, \; x < y \Longrightarrow \exists z \in X, \; \ni x < z < y.$$

Teorema.

Si X es un continuo lineal, entonces, tanto X como todos sus intervalos y sus rayos, son conexos con la topología del orden.

Observamos que X, y también cualquier intervalo o rayo de X, son convexos para el orden. Y ya vimos que, para convexos, la topología del orden da igual darla restringiendo el orden que restringiendo la topología del orden de X.
De hecho, lo que vamos a demostrar es que si $Y \subset X$ es un subespacio convexo para el orden, entonces, Y es conexo.
Supongamos que $Y = A \uplus B$, con A y B abiertos no vacíos de Y. Sean $a \in A$ y $b \in B$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a < b$. Como Y es convexo, $[a, b] \subset Y$. Entonces $[a, b] = A_0 \uplus B_0$, donde $A_0 = A \cap [a, b]$ y $B_0 = B \cap [a, b]$. Sea $c = \sup(A_0)$. Vamos a ver que no puede ser cierto ni que $c \in A_0$ ni que $c \in B_0$. Esto será una contradicción; porque, desde luego, $c \in [a, b]$.
Caso 1: Supongamos que $c \in B_0$. Entonces, $c \neq a$, de modo que, o bien $c = b$, o bien $a < c < b$. En todo caso, como B_0 es abierto en $[a, b]$, sabemos que existe $]d, c] \subset B_0$.

Si $c = b$, ya tenemos una contradicción porque d sería una cota superior de A_0 más pequeña que c. Si $c < b$, entonces $]c, b] \cap A_0 = \emptyset$. Se sigue que $]d, b] =]d, c] \cup]c, b]$ tampoco corta a A_0. Y de nuevo tenemos que d es una cota superior de A_0 más pequeña que c.
Caso 2. Supongamos que $c \in A_0$. Entonces $c \neq b$, de modo que, o bien $c = a$, o bien $a < c < b$. Como A_0 es abierto en $[a, b]$, deberá existir algún intervalo $[c, e[\subset A_0$. Pero, entonces, existe $z \in Y$, tal que $c < z < e$. Y, así, $z \in A_0$, lo que contradice el hecho de que c es cota superior de A_0.

COROLARIO.

La recta real $\mathbb{R}$ (con su topología usual) es conexa. Y también lo son todos sus intervalos y sus rayos.

Teorema del valor intermedio.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua del espacio topológico conexo X al espacio Y que suponemos que es un conjunto ordenado en el que hemos dado la topología del orden. Si $a, b \in X$ y el punto $y \in Y$ está situado entre $f(a)$ y $f(b)$, digamos que cumple $f(a) < y < f(b)$, entonces existe $c \in X$ tal que $f(c) = y$.

Demostración.

Los conjuntos

$$A = f(X) \cap \,]\leftarrow, y[\qquad \text{y} \qquad B = f(X) \cap \,]y, \rightarrow[$$

son dos abiertos no vacíos y disjuntos de $f(X)$. En efecto, $a \in A$ y $b \in B$. Si no existe c tal que $f(c) = y$, o sea, si $y \notin f(X)$, entonces resulta que

$$f(X) = A \uplus B.$$

Pero, como X es conexo y f es continua, $f(X)$ es conexo y no se puede poner como unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos.

Ejercicio 4. El cuadrado ordenado I_0^2 es, por definición, el espacio topológico obtenido dando sobre el cuadrado unidad $I^2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ la topología correspondiente al orden lexicográfico. Recordemos que dicha topología es diferente de la restricción a I^2 de la topología dada por el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$. Se pide demostrar que el cuadrado ordenado es un continuo lineal.

Ejercicio 5. Sea X un conjunto bien ordenado. Demostrar que el espacio topológico obtenido dando a $X \times [0,1[$ la topología del orden lexicográfico, es un continuo lineal.

Ejercicio 6. Demostrar que si un espacio métrico X es conexo y tiene, al menos, dos puntos, entonces tiene una cantidad infinita y no numerable de puntos.

PROPOSICIÓN.

Si X e Y son espacios topológicos conexos, entonces $X \times Y$ con su topología producto, es también conexo.

DEMOSTRACIÓN.

Fijemos un punto $b \in Y$ y, para cada $x \in X$, consideremos

$$C_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{b\}).$$

Afirmo que $\forall x \in X,\ C_x$ es conexo. En efecto $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y, y, por lo tanto, es conexo. Análogamente $X \times \{b\}$ es homeomorfo a X y, por lo tanto, es conexo. Por otro lado $(\{x\} \times Y) \cap (X \times \{b\}) \ni (x, b)$. Así llegamos, finalmente, a que cada C_x es conexo.
Pero $X \times Y = \bigcup\limits_{x \in X} C_x$ y, además $\bigcap\limits_{x \in X} C_x \supset X \times \{b\} \neq \emptyset$. LLegamos así a que $X \times Y$ es conexo.

COROLARIO.

Cualquier producto finito de espacios topológicos conexos es conexo.

Basta hacer una inducción sobre el número de factores.

TEOREMA

Cualquier producto de espacios topológicos conexos, es conexo.

Demostración. Hemos de ver que un producto de infinitos espacios topológicos conexos es conexo. Sean $(X_\alpha)_{\alpha\in J}$ infinitos espacios topológicos conexos. Elegimos un punto $a = (a_\alpha)_{\alpha\in J} \in X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.

Luego, para cada subconjunto finito $F \subset J$, definimos

$$X_F = \{x = (x_\alpha)_{\alpha\in J} : \ x_\alpha = a_\alpha \ \forall\alpha \in J \setminus F\}.$$

Ahora vemos que:

- Cada X_F es conexo, ya que es homeomorfo a un producto de una colección finita de espacios topológicos conexos.
- $D = \bigcup_{F \text{ finito } \subset J} X_F$ es conexo, ya que $\bigcap_{F \text{ finito } \subset J} X_F \ni a$.

- D es denso en X. En efecto, si partimos de un $x = (x_\alpha)_{\alpha\in J} \in X$, y consideramos un entorno básico de x, que será de la forma $V = \prod_{\alpha\in J} V_\alpha$ con $V_\alpha = X_\alpha\ \forall\alpha \in J \setminus F$ para un cierto subconjunto finito $F \subset J$, vemos que el punto $y = (y_\alpha)_{\alpha\in J}$ definido mediante

$$y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha \text{ si } \alpha \in F \\ a_\alpha \text{ si } \alpha \notin F \end{cases}$$

  verifica que $y \in V \cap D$.
- $X = \overline{D}$ es conexo, como queríamos demostrar.

Ejercicio 7. Demostrar que el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de las cajas, no es conexo.
Ayuda: Ver que, tanto el conjunto de las sucesiones acotadas como el de las no acotadas, son abiertos en la topología de las cajas.

Sea X un espacio topológico. Definimos una relación entre los puntos de X del modo siguiente:

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists A \text{ conexo } \ni x, y \in A \subset X.$$

Ejercicio 8. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Las clases de equivalencia determinadas en X por la relación $\mathcal{R}$ se llaman componentes conexas. Para cada $x \in X$, la componente conexa $C_x = \mathcal{R}(x)$ que contiene a x, es el máximo conexo que contiene a x. Todo el espacio X se puede poner como una unión disjunta de las diferentes componentes conexas.

Ejercicio 9. Demostrar que las componentes conexas son siempre conjuntos cerrados. ¿Son siempre abiertos? Poner ejemplos.

Ejemplo 1: En $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología que hereda de la usual de $\mathbb{R}$, las componentes conexas son los puntos, que no son abiertos de $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 2: Si el espacio topológico X tiene sólo un número finito de componentes conexas; entonces todas ellas son conjuntos abiertos.

PROPOSICIÓN.

Las componentes conexas del espacio topológico X son todas abiertas si y sólo si todo punto $x \in X$ tiene algún entorno conexo.

DEFINICIÓN.

Se dice que un espacio topológico X es localmente conexo si cada punto $x \in X$ tiene un sistema fundamental de entornos que son todos conexos. Dicho de otro modo: X es localmente conexo si y sólo si para cada abierto A de X y cada $x \in A$, existe V, entorno conexo de x, tal que $V \subset A$.

PROPOSICIÓN.

El espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de los abiertos son abiertas.

Definición.

- Se dice que los puntos x e y de un espacio topológico X se pueden unir por un arco o por un camino si existe una aplicación continua $f : [0,1] \to X$, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.
- Se dice que X es conexo por arcos o conexo por caminos si dos puntos cualesquiera de X se pueden unir por un arco o camino.

Proposición.

- Todo espacio topológico conexo por arcos, es conexo.
- Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, entonces A es conexo por arcos $\Longleftrightarrow$ A es conexo.

Demostración. Supongamos que X es conexo por arcos y sea $x_0 \in X$. Para cada $x \in X$, sea $f_x : [0,1] \to X$ continua tal que $f_x(0) = x_0$ y $f_x(1) = x$. Entonces $X = \bigcup_{x \in X} f_x([0,1])$, que es una unión de espacios conexos con un punto común. Ya sabemos, entonces, que X es conexo.

Por otro lado, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto conexo, fijemos $x_0 \in A$ y consideremos el conjunto $E \subset A$ de todos los puntos $x \in A$ tales que x se puede unir con x_0 por un arco contenido en A. Dado $x \in E$, si tomamos una bola abierta $\mathbf{B}(x, r) \subset A$, podemos unir x_0 con x por un arco cuya imagen está contenida en A y luego unir x por medio de un segmento con cualquier punto de la bola abierta. Uniendo los dos arcos tenemos unido con x_0 cualquier punto de la bola. Esto demuestra que E es abierto en A. De forma análoga se ve que E es cerrado en A y, así, por ser A conexo, llegamos a que $E = A$.

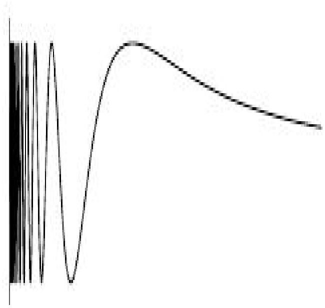
Ejercicio 10. Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es poligonalmente conexo si cada par de puntos de A se pueden unir por una línea poligonal (es decir, una unión finita de segmentos) totalmente contenida en A.
Demostrar que, para un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$A \text{ es conexo} \iff A \text{ es poligonalmente conexo.}$$

Ejercicio 11. Se considera la función

$$\begin{array}{ccc}]0,1] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen} \frac{1}{x} \end{array}$$

y su gráfico $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in]0,1] \; \wedge \; y = f(x)\}$.
Describir simbólicamente el cierre $\overline{E}$ de E y ver que $\overline{E}$ es un compacto conexo que, sin embargo, no es conexo por arcos. Se le suele llamar “la curva seno del topólogo”. Tiene este aspecto:



La curva seno del topólogo

- $\overline{E} = E \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.
- Sea
$$\begin{array}{ccc}]0,1] & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \end{array}$$
  $(]0, 1]$ conexo$) \wedge (g$ continua$) \wedge (E = g(]0, 1]) \Longrightarrow E$ conexo $\Longrightarrow$ $\overline{E}$ conexo.
- $\overline{E}$ es compacto por ser un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$.
- $\overline{E}$ NO es conexo por arcos. En efecto:
  Supongamos que existiera un camino $\varphi : [a, c] \to \overline{E}$ tal que $\varphi(a) = (0, 0)$ y $\varphi(c) \in E$. El conjunto $\{t \in [a, c] : \ \varphi(t) \in \{0\} \times [-1, 1]\} = \varphi^{-1}(\{0\} \times [-1, 1])$ es un cerrado de $[a, c]$, y por tanto, un compacto, ya que $\{0\} \times [-1, 1]$ un cerrado del plano (y, por tanto, de $\overline{E}$) y φ una aplicación continua.

Se sigue que hay un máximo, llamémosle b, tal que $\varphi(b) \in \{0\} \times [-1, 1]$. Entonces la restricción de φ a $[b, c]$ es una aplicación $\psi : [b, c] \to \overline{E}$ que lleva b a algún punto del segmento vertical $\{0\} \times [-1, 1]$ y los demás puntos del intervalo, los lleva a E. Reemplacemos $[b, c]$ por $[0, 1]$ por pura conveniencia y pongamos $\psi(t) = (x(t), y(t))$.

Entonces $x(0) = 0,\ x(t) > 0$ e $y(t) = \operatorname{sen}(1/x(t))$ si $t > 0$.

Vamos a demostrar que existe una sucesión $t_n \to 0$, tal que $y(t_n) = (-1)^n$. Una vez visto esto, tendremos una contradicción, ya que $y(t_n)$ no converge y, por ser ψ continua, su segunda componente también lo es y debería cumplirse $y(t_n) \to y(0)$.

Para encontrar los t_n procedemos como sigue: Dado n elegimos u, con $0 < u < x(1/n)$ tal que $\operatorname{sen}(1/u) = (-1)^n$. Después usamos el teorema del valor intermedio para encontrar t_n con $0 < t_n < 1/n$ tal que $x(t_n) = u$.

Sea X un espacio topológico. Definimos una relación entre los puntos de X del modo siguiente:

$$x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow \exists A \text{ conexo por arcos } \ni x, y \in A \subset X.$$

Ejercicio 12. Demostrar que $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia.

Las clases de equivalencia determinadas en X por la relación $\mathcal{S}$ se llaman componentes conexas por arcos. Para cada $x \in X$, la componente conexa $A_x = \mathcal{S}(x)$ que contiene a x, es el máximo conexo por arcos que contiene a x. Todo el espacio X se puede poner como una unión disjunta de las diferentes componentes conexas por arcos.

Ejemplo 1: La curva seno del topólogo $\overline{E} = E \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ es un espacio conexo; de modo que tiene una única componente conexa. Sin embargo, tiene dos componentes conexas por arcos: E, que es un abierto de $\overline{E}$ y $F = \{0\} \times [-1, 1]$, que es un cerrado de $\overline{E}$.

Ejemplo 2: Un ejemplo donde se aprecia mejor la diferencia que existe entre componentes conexas y componentes conexas por arcos es el que se obtiene quitándole a la curva seno del topólogo $\overline{E}$ los puntos de F cuya segunda coordenada sea racional. Entonces se obtiene un espacio $X = E \cup (F \setminus (\{0\} \times \mathbb{Q}))$. Este espacio X tiene una única componente conexa (ya que ¡es conexo!); pero sin embargo, tiene infinitas componentes conexas por arcos; de hecho, tiene una cantidad infinita no numerable de componentes conexas, a saber: E y cada uno de los puntos de $F \setminus (\{0\} \times \mathbb{Q})$.

DEFINICIÓN.

Se dice que un espacio topológico X es localmente conexo por arcos si cada punto $x \in X$ tiene un sistema fundamental de entornos que son todos conexos por arcos. Dicho de otro modo: X es localmente conexo por arcos si y sólo si para cada abierto A de X y cada $x \in A$, existe V, entorno de x, conexo por arcos, tal que $V \subset A$.

PROPOSICIÓN.

El espacio topológico X es localmente conexo por arcos si y sólo si las componentes conexas por arcos de los abiertos son abiertas.

PROPOSICIÓN.

Si X es un espacio topológico, cada componente conexa por arcos de X está contenida en una componente conexa de X. Si X es localmente conexo por arcos, entonces, la componentes conexas y las componentes conexas por arcos coinciden.

Teorema.

Para $E \subset \mathbb{R}^n$, las tres propiedades siguientes son equivalentes:

(*a*) Toda sucesión $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ de puntos de E tiene una subsucesión que converge a algún punto de E; es decir, existe una sucesión creciente de números naturales $(j_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que la sucesión $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ converge hacia algún punto de E.

(*b*) E es cerrado y acotado. (Que E es acotado significa, simplemente, que existe alguna bola que lo contiene).

(*c*) Todo recubrimiento abierto de E tiene un subrecubrimiento finito. (Un recubrimiento abierto es una familia $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ de abiertos de $\mathbb{R}^n$ que recubre a E, es decir, que cumple que $E \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Decir que el recubrimiento abierto $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ tiene un subrecubrimiento finito quiere decir que existe un subconjunto finito de índices $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} \subset J$, tal que $E \subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_r}$).

DEMOSTRACIÓN: $(c) \Longrightarrow (b)$.

Veamos, primero, que E es cerrado. Si no lo fuera, existiría $a \in E' \setminus E$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea

$$U_j = \complement \overline{\mathbf{B}}\,(a, 1/j) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| > 1/j\}\,.$$

Está claro que $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ es un recubrimiento abierto de E y, sin embargo, no tiene ningún subrecubrimiento finito.
En efecto

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \supset E$$

y, para cualquier subfamilia finita $(U_{j_k})_{k=1}^{r}$, tenemos

$$\bigcup_{k=1}^{r} U_{j_k} = \bigcup_{k=1}^{r} \complement \overline{\mathbf{B}}\,(a, 1/j_k) = \complement \bigcap_{k=1}^{r} \overline{\mathbf{B}}\,(a, 1/j_k) = \complement \overline{\mathbf{B}} \left(a, \min_{1 \le k \le r} 1/j_k\right) \not\supset E.$$

En segundo lugar, veamos que E es acotado. Si no lo fuera, $(\mathbf{B}(0, j))_{j=1}^{\infty}$ sería un recubrimiento abierto de E sin ningún subrecubrimiento finito.

DEMOSTRACIÓN: $(b) \Longrightarrow (a)$.

Puesto que E es acotado, existirá algún intervalo $n-$dimensional

$$P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \;\ni E \subset P.$$

Dividiendo por la mitad cada uno de los intervalos $[a_i, b_i]$, podemos escribir P como unión de 2^n subintervalos $n-$dimensionales

$$P = \bigcup_{r=1}^{2^n} P_r^1.$$

Está claro que nuestra sucesión $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ entrará infinitas veces en alguno de los subintervalos, digamos en el $P_{r_1}^1$. Repitiendo este proceso de subdivisión encontramos una sucesión de intervalos $n-$dimensionales encajados

$$P_{r_1}^1 \supset P_{r_2}^2 \supset \cdots \supset P_{r_k}^k \supset \cdots$$

cada uno con diámetro la mitad del diámetro del anterior y una familia de sucesiones $s^j = (x_k^j)_{k=1}^{\infty}$, todas ellas subsucesiones de nuestra sucesión original, siendo cada s^{j+1} subsucesión de s^j y estando cada s^j contenida en P^j.

Si ahora consideramos la sucesión "diagonal" $s = (x_k^k)_{k=1}^{\infty}$, tenemos una subsucesión de la sucesión original que tiene la particularidad de que, a partir del índice j, sus términos están en P^j. Como el diámetro de P^j tiende a cero para $j \to \infty$, la sucesión s es de Cauchy y, por ser $\mathbb{R}^n$ un espacio métrico completo la sucesión s tendrá límite. Desde luego, como s es subsucesión de la sucesión original, que estaba formada por puntos de E y como E es cerrado, el límite de s será un punto de E. Además, como $\bigcap_{j=1}^{\infty} P_{r_j}^j = \{a\}$, necesariamente $\lim s = a \in E$.

Para completar la demostración del teorema, sólo nos queda probar que (*a*)$\Longrightarrow$(*c*). Y esto es lo que vamos a hacer a continuación.

DEMOSTRACIÓN: $(a) \Longrightarrow (c)$.

Supongamos que $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ es un recubrimiento abierto de E. Lo primero que observamos es que podemos encontrar un subrecubrimiento numerable $(U_{\alpha_j})_{j=1}^{\infty}$. Para ello vemos que cada $x \in E$ pertenece a alguna bola cuyo centro es un punto de coordenadas racionales, cuyo radio es racional y que, además está contenida en algún U_α. La familia de todas estas bolas es numerable y cada una de ellas determina un U_α. Quedándonos sólo con estos U_α, obtenemos el subrecubrimiento numerable $(U_{\alpha_j})_{j=1}^{\infty}$ que buscábamos.

Ahora vamos a ver que el recubrimiento $(U_{\alpha_j})_{j=1}^{\infty}$ tiene un subrecubrimiento finito. En efecto, si esto no fuera cierto, para cada $N \in \mathbb{N}$ podríamos encontrar $x_N \in E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} U_{\alpha_j}$. La sucesión $(X_N)_{N=1}^{\infty}$ tiene sólo un número finito de puntos en cada U_{α_j}.

Pero, como estamos suponiendo que se cumple (a), sabemos que existe una subsucesión $(x_{N_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_{N_k} \to a \in E$. Se sigue que $a \in U_{\alpha_j}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Y esto implica que hay infinitos puntos x_{N_k} que pertenecen a U_{α_j}, lo cual es una contradicción.

DEFINICIÓN.

A los conjuntos que cumplen una y, por tanto, las tres propiedades (*a*), (*b*) y (*c*) del teorema anterior, se les llama compactos. El término fue empleado por primera vez, en 1906, por el matemático francés René Maurice Fréchet(1878-1973). Para Fréchet la definición venía dada por la propiedad (*a*) del teorema; que proviene del teorema de Bolzano-Weierstrass, que ya hemos visto y que establece que toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.

La propiedad (*c*) proviene del teorema de Heine-Borel, que establece la equivalencia de (*c*) y (*b*) para subconjuntos de la recta real. Este resultado lo obtuvieron, en realidad, Heinrich Heine(1821-1881), Emile Borel(1871-1956) y, también, Henri Lebesgue(1875-1941).

Proposición.

Todo conjunto compacto no vacío de números reales, tiene máximo y tiene mínimo; es decir: Si $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ y E es compacto, entonces $\exists m, M \in E \ni \forall x \in E,\ m \leq x \leq M$.

Demostración. Para ver ésto hay que partir de la construcción de los números reales. Si se usa el método de Dedekind, se sigue que, por ser E acotado, tiene supremo e ínfimo y, por ser E cerrado, el supremo y el ínfimo han de pertenecer a E.
Si el método empleado en la construcción es el de los desarrollos decimales; se empieza por suponer, usando una traslación, que E tiene algún número positivo. Como E es acotado, hay una parte entera máxima para todos los números de E, digamos d_0. Luego, entre todos los números de E cuya parte entera es d_0, hay un máximo para la primera cifra después de la coma decimal, etc. Así construimos un número $M = d_0, d_1 d_2 \cdots$, que está en el cierre de E. Como E es cerrado, $M \in E$ y, por construcción, $\forall x \in E,\ x \leq M$. El mínimo es, sencillamente $\min(E) = -\max(-E)$.

Proposición.

La imagen continua de un compacto es compacto; es decir: Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua y $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto

Demostración.

Damos dos demostraciones

(1) Usando la propiedad de Bolzano-Weierstrass: Sea b_j una sucesión de puntos de $f(K)$. Sea, para cada j, $a_j \in K$ tal que $f(a_j) = b_j$. Como K es compacto, existe una subsucesión (a_{j_k}) tal que $a_{j_k} \to a \in K$. Pero, como f es continua, $b_{j_k} = f(a_{j_k}) \to f(a) \in f(K)$.

(2) Usando la propiedad de Heine-Borel: Sea $(V_\alpha)_{\alpha \in J}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$. Como f es continua, para cada $\alpha \in J$, $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ es un recubrimiento abierto de K. Como K es compacto, tendrá un subrecubrimiento finito; es decir, $K \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_r}$. Entonces $f(K) \subset f(U_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f(U_{\alpha_r}) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_r}$.

Corolario.

- Una aplicación continua $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida en un compacto K de $\mathbb{R}^n$, está siempre acotada, es decir

$$\sup_{x \in K} \|f(x)\| < \infty$$

- Una función $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en un compacto K de $\mathbb{R}$, alcanza en K su máximo y su mínimo; es decir, existen $x_0, x_1 \in K$ tales que

$$\forall x \in K,\ f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

Ejercicio 13. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Consideramos los conjuntos

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua}\}$$

y

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K) = \{f : K \to \mathbb{C} : \ f \text{ es continua}\} .$$

Para $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ o $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ definimos

$$\|f\|_u = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

- Demostrar que $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ y $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ son espacios normados con la norma dada por $\| \ \|_u$.
- Ver que, además, son espacios de Banach; es decir, son completos.

En toda esta subsección vamos a suponer que estamos en un espacio métrico (X, d). Las tres caracterizaciones de los compactos de $\mathbb{R}^n$ que dimos al comienzo de la sección, tienen sentido en (X, d) : la (a) de Bolzano-Weierstrass mediante sucesiones, la (b) que sólo requiere que comprobemos si nuestro conjunto es cerrado y acotado y la (c) de Heine-Borel que usa recubrimientos abiertos. La pregunta que queremos contestar ahora es esta:
¿Seguirán siendo equivalentes estas tres propiedades para un subconjunto E del espacio métrico (X, d)?
Mirando las demostraciones, vemos, en primer lugar, que sigue siendo cierto que $(c)\Longrightarrow(b)$; ya que la demostración que dimos no utiliza nada específico de $\mathbb{R}^n$ que no valga en un espacio métrico general.
Sin embargo, las demostraciones que dimos de que $(b)\Longrightarrow(a)$ y de que $(a)\Longrightarrow(c)$ si que usan propiedades específicas de $\mathbb{R}^n$, que no podemos usar cuando trabajamos en un espacio métrico arbitrario.

Así que, para ver si alguna de las implicaciones es cierta o no; no queda otro remedio que buscar una prueba diferente para ver que es cierta o encontrar un contraejemplo para ver que es falsa.
Comenzamos viendo que la implicación $(b) \Longrightarrow (a)$ no es cierta en un espacio métrico general. Vamos a dar dos ejemplos de sucesiones acotadas en espacios métricos, que no tienen ninguna subsucesión convergente:
Ejemplo 1: Sea $\mathbb{X}$ el espacio de Hilbert ℓ^2. Y sea

$$E = \overline{\mathbf{B}}(0,1) = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{\infty} : \ \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2} \leq 1 \right\}.$$

Desde luego E es cerrado y acotado; pero la sucesión formada por los vectores

$$e_n = (x_j)_{j=1}^{\infty} \ \ni x_j = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq n \\ 1 \text{ si } j = n \end{cases},$$

está contenida en E y no tiene ninguna subsucesión convergente, ya que para todo $n \neq m$, $d(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$.

Ejemplo 2: Sea, ahora, $\mathbb{X}$ el espacio de Banach $\mathcal{C}[0,1]$. Y sea

$$E = \overline{\mathbf{B}}(0,1) = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1 \right\}.$$

Desde luego, E es cerrado y acotado; pero la sucesión formada por las funciones $f_n(x) = x^n$, está contenida en E y no tiene ninguna subsucesión que converja en E. En efecto; la convergencia en el espacio X es, ahora, la convergencia uniforme, que, implica, en particular, la convergencia puntual. El límite puntual de la sucesión de funciones f_n es la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

Si la sucesión f_n convergiera uniformemente, tendría que hacerlo a la función f; pero esto no puede ser porque la función f no es uniformemente continua y sabemos que todo límite uniforme de funciones continuas, es continua.

Lo que queda del teorema de caracterización de los compactos de $\mathbb{R}^n$ cuando pasamos a espacios métricos generales, se puede resumir en el enunciado siguiente:

TEOREMA.

Para un conjunto E del espacio métrico (X, d) las condiciones (a) (criterio de Bolzano-Weierstrass) y (c) (criterio de Heine-Borel) son equivalentes y, cualquiera de ellas es suficiente, aunque no necesaria, para que E sea cerrado y acotado.

Demostración. $(c)\Longrightarrow(a)$. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de E no tiene ninguna subsucesión que converja a un punto de E. Entonces, para cada $x \in E$, existe alguna bola abierta centrada en x, $\mathbf{B}_x$, que solo contiene un conjunto finito de puntos de la sucesión. Por la hipótesis (c), se puede cubrir todo E con un número finito de la bolas $\mathbf{B}_x$. Por consiguiente, el conjunto de puntos de la sucesión es finito y esto es una contradicción, ya que un punto se repetiría infinitas veces y así tendríamos una subsucesión convergente.

$(a) \Longrightarrow (c)$. Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ un recubrimiento abierto de E. Vamos a ver que existe $\varepsilon > 0$, tal que para cada $x \in E$, $\mathbf{B}(x, \varepsilon) \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in J$. En efecto, si esto no fuera cierto, tendríamos una sucesión de puntos $x_n \in E$ tales que $\mathbf{B}(x_n, 1/n)$ no está contenida en ningún U_α. Por la hipótesis (a), existiría una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ tal que $x_{n_k} \to a \in E$. Desde luego, para algún $r > 0$ y algún $\alpha \in J$, tenemos $\mathbf{B}(a, r) \subset U_\alpha$. Y, entonces, para k suficientemente grande $\mathbf{B}(x_{n_k}, 1/n_k) \subset \mathbf{B}(a, r) \subset U_\alpha$, lo cual es una contradicción.
Ahora vamos a ir eligiendo puntos $y_n \in E$ de modo que las bolas $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon/3)$ sean disjuntas. Sólo podremos encontrar un número finito de puntos y_n, pues, en caso contrario, la sucesión de los y_n no tendría ninguna subsucesión convergente (ninguna subsucesión sería de Cauchy). Una vez elegida la familia finita de los y_n, vemos que, para cada $x \in E$, $\mathbf{B}(x, \varepsilon/3)$ corta a alguna de las bolas $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon/3)$ y, por lo tanto, se tiene que $\mathbf{B}(x, \varepsilon/3) \subset \mathbf{B}(y_n, \varepsilon)$. Queda visto, entonces, que la colección finita de las bolas $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon)$ es un recubrimiento de E. Si después elegimos, para cada una de estas bolas $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon)$ un $\alpha_n \in J$ tal que $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon) \subset U_{\alpha_n}$, habremos obtenido un subrecubrimiento finito de $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$.

Definición.

Diremos que $E \subset X$ es compacto si cumple (a) y, por lo tanto, también (c).
En otras palabras, el espacio métrico (X, d) es compacto si toda sucesión de puntos de X tiene una subsucesión convergente. Y eso equivale a decir que todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento finito.

Proposición.

Sea f un aplicación continua del espacio métrico (X, d_X) en el espacio métrico (Y, d_Y) y sea $K \subset X$ un compacto. Entonces

(*1*) $f(K)$ es compacto.

(*2*) La restricción de f a K, $f|_K : K \to Y$ es uniformemente continua.

Corolario.

Toda aplicación real continua en un espacio métrico compacto K alcanza sus valores máximo y mínimo en sendos puntos de K.

Demostración. de la Proposición.

(1) Las dos pruebas que dimos para una f entre espacios euclídeos siguen funcionando para una f entre espacios métricos.

(2) Dado $\varepsilon > 0$ y dado $x \in K$, existe una bola abierta centrada en x, $\mathbf{B}(x, \delta_x)$ tal que para cada $y \in \mathbf{B}(x, \delta_x)$, $d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$. Puesto que los $U_x = \mathbf{B}(x, \delta_x/2)$, $x \in K$ forman un recubrimiento abierto de K, existirá un subrecubrimiento finito $U_{x_1}, \cdots, U_{x_m}$.

Si $\delta < \min(\delta_{x_1}/2, \cdots, \delta_{x_m}/2)$ y tenemos dos puntos x, y tales que $d(x, y) < \delta$; será $x \in U_{x_j}$ para algún $j = 1, \cdots, m$.

Entonces $d_X(x, x_j) < \delta_{x_j}/2$ y
$d_X(y, x_j) \leq d_X(y, x) + d_X(x, x_j) < \delta + \delta_{x_j}/2 < \delta_{x_j}$.
Tenemos, por tanto:

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f(x_j)) + d_Y(f(x_j), f(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

PROPOSICIÓN.

Dos normas cualesquiera en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

Demostración. Sea $\mathcal{N}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma. Si llamamos $e_1, e_2, \cdots, e_n$ a los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tenemos, para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\mathcal{N}(e_j) \leq \left\{\max_{1\leq j\leq n} \mathcal{N}(e_j)\right\} \|x\|_1 = K\|x\|_1.$$

Esta desigualdad implica, en particular, que $\mathcal{N}$ es una aplicación continua en $\mathbb{R}^n$ (con su topología usual). De hecho, es Lipschitz (y, por tanto, uniformemente continua) en el espacio métrico $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$.
En efecto:

$$|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x-y) \leq K\|x-y\|_1.$$

En particular, $\mathcal{N}$ alcanzará un mínimo sobre la esfera unidad S_1 de $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$, ya que $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_1 = 1\}$ es cerrado y acotado; y, por tanto, compacto.

Por consiguiente, existirá $x_0 \in S_1$ tal que

$$\mathcal{N}(x) \geq \mathcal{N}(x_0) = k > 0, \ \forall x \in S_1.$$

A partir de aquí, vemos que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \mathcal{N}(x) \geq k\|x\|_1.$$

Hemos llegado, finalmente a que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ k\|x\|_1 \leq \mathcal{N}(x) \leq K\|x\|_1,$$

de forma que queda probado que $\mathcal{N}$ es equivalente a $\| \ \|_1$. Ahora basta invocar la transitividad de la equivalencia de normas para terminar.

COROLARIO.

En un espacio vectorial de dimensión finita, dos normas cualesquiera son equivalentes.

Ejercicio 14. Demostrar que una aplicación lineal entre espacios normados de dimensión finita, es siempre continua.

Hemos visto que todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado; pero que, a diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}^n$, cuando estamos es un espacio métrico arbitrario, estas dos condiciones, no garantizan que el conjunto sea compacto.
Sin embargo, se puede reforzar la condición de ser acotado para garantizar, junto con la completitud, que el conjunto es compacto. La propiedad relevante, que es más fuerte que la acotación, es la siguiente.

DEFINICIÓN.

Diremos que el conjunto $E \subset X$ es un subconjunto totalmente acotado del espacio métrico (X, d) si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número finito de bolas abiertas de radio ε, $\mathbf{B}(x_j, \varepsilon)$, $j = 1, \cdots, m$, tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^{m} \mathbf{B}(x_j, \varepsilon)$.

TEOREMA.

Si K es un cerrado de un espacio métrico completo (X, d), las tres propiedades siguientes son equivalentes

(*i*) K es compacto.

(*ii*) Todo subconjunto infinito $S \subset K$ tiene un punto de acumulación en K.

(*iii*) K es totalmente acotado.

Demostración. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Usando (a) (sucesiones): Por ser S infinito, podemos considerar una sucesión de puntos de S todos distintos. Esta sucesión tendrá una subsucesión convergente a un punto $a \in K$ y a será un punto de acumulación de S.

Usando (c) (recubrimientos): Si ningún punto de K fuera punto de acumulación de S, habría un recubrimiento abierto $\{V_\alpha\}$ de K, tal que cada V_α contiene, a lo sumo, un punto de S. Pero entonces $\{V_\alpha\}$ no puede tener un subrecubrimiento finito, lo cual contradice el hecho de que K es compacto.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Suponiendo que ya hemos elegido $x_1, \cdots, x_n$ puntos de K con $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ si $i \neq j$, elegiríamos $x_{n+1} \in K$ tal que $d(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon\ \forall i = 1, \cdots, n$. Este proceso debe acabar en un número finito de pasos por la hipótesis (*ii*). Las bolas abiertas de radio ε centradas en los puntos $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ de la colección encontrada, cubren K.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Suponemos (*iii*) y probamos (*i*) por reducción al absurdo. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de K que no tiene ningún subrecubrimiento finito. Por (*iii*), K es unión de un número finito de cerrados de diámetro ≤ 1. Uno de estos, digamos K_1 no puede ser cubierto por un número finito de conjuntos de $\mathcal{U}$. Luego ponemos K_1 como unión de un número finito de cerrados de diámetro $\leq 1/2$ y observamos que habrá alguno, digamos K_2, que no puede ser cubierto por un número finito de conjuntos de $\mathcal{U}$. Continuando el proceso obtenemos una sucesión de cerrados $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$, tales que $\mathrm{diam} K_n \leq 1/n$ y ninguno de ellos puede ser cubierto por un número finito de miembros de $\mathcal{U}$.

Si elegimos $x_n \in K_n$, vemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como E es completo, será $x_n \to x \in \bigcap_n K_n$. Por tanto, $x \in V$ para algún $V \in \mathcal{U}$. Pero, entonces, $K_n \subset V$ si n es suficientemente grande, lo cual es una contradicción.

Ejercicio 15. Demostrar la última implicación del teorema anterior usando sucesiones en lugar de recubrimientos.

Ejercicio 16. Dar un ejemplo de conjunto acotado que no sea totalmente acotado.

Proposición.

Para un espacio métrico (X, d), se cumple que

$$X \text{ es compacto} \iff X \text{ es completo y totalmente acotado.}$$

Demostración.

Si X es compacto y tenemos en X una sucesión de Cauchy, tendrá una subsucesión convergente y ya vimos que, para una sucesión de Cauchy, si hay una subsucesión convergente, es que la sucesión original converge. Luego después, aplicando el teorema, resulta que X es totalmente acotado.

Recíprocamente, si X es completo y totalmente acotado, el teorema nos dice que X es compacto.

Definición.

Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{U})$ es compacto si todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento finito.
Un subconjunto $E \subset X$ se dirá que es compacto si el espacio topológico determinado sobre E por los abiertos relativos $U \cap E,\ U \in \mathcal{U}$, es un espacio compacto.

Proposición.

- Todo subconjunto compacto de un espacio separado es cerrado y
- Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto.

Ejercicio 17. Demostrar la última proposición. Demostrar que, de hecho, se cumple esta propiedad más fuerte que la primera afirmación de la proposición: Si $K \subset X$, siendo X un espacio topológico de Hausdorff y K un subconjunto compacto, entonces

$$\forall x \in X \setminus K,\ \exists\ U, V \text{ abiertos } \ni K \subset U,\ x \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Ejemplo. Cuando el espacio no es de Hausdorff, puede haber compactos que no sean cerrados. Un caso extremo es el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$, la recta real con la topología de los complementos finitos. En ella, los únicos cerrados propios son los conjuntos finitos, mientras que cualquier conjunto es compacto.

A veces resulta útil una visión dual de la compacidad, que se obtiene pasando de un recubrimiento abierto $\mathcal{A} = (A_\alpha)_{\alpha\in J}$ a la familia de cerrados $\mathcal{C} = (\complement A_\alpha)_{\alpha\in J}$.

$$\mathcal{A} \text{ es un recubrimiento } \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha = X \Leftrightarrow \bigcap_{\alpha\in J} \complement A_\alpha = \complement\left(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\right) = \emptyset.$$

Así pues, la familia finita de cerrados $C_\alpha = \complement A_\alpha,\ \alpha\in J$, tiene $\bigcap_{\alpha\in J} C_\alpha = \emptyset$.

Así pues, podemos decir que un espacio topológico es compacto si, cada familia $(C_\alpha)_{\alpha\in J}$ de cerrados con $\bigcap_{\alpha\in J} C_\alpha = \emptyset$ tiene alguna subfamilia finita $(C_\alpha)_{\alpha\in F}$ tal que $\bigcap_{\alpha\in J} C_\alpha = \emptyset$. Dicho de otro modo, tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN.

Un espacio topológico es compacto si y sólo si toda familia de cerrados con intersección vacía tiene un subfamilia finita con intersección vacía.

Definición.

Una familia de conjuntos $E_\alpha \subset X,\ \alpha \in J$, se dice que tiene la propiedad de la intersección finita si para cada subfamilia finita $(E_\alpha)_{\alpha\in F}$, donde F es un subconjunto finito de J, se tiene que $\bigcap\limits_{\alpha\in F} E_\alpha \neq \emptyset$.

Proposición.

Un espacio topológico es compacto si y sólo si, para toda familia de cerrados $(C_\alpha)_{\alpha\in J}$ con la propiedad de la intersección finita, se cumple que

$$\bigcap_{\alpha\in J} C_\alpha \neq \emptyset.$$

COROLARIO

Si X es un espacio topológico compacto y tenemos una sucesión decreciente de cerrados no vacíos de X,

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots,$$

entonces $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j \neq \emptyset$.

COROLARIO.

Todo espacio topológico X que sea compacto Hausdorff y que no tenga puntos aislados es, necesariamente, no numerable.

Demostración. Primero vemos el siguiente resultado previo: para cada U abierto no vacío de X y para cada $x \in X$, existe otro abierto no vacío $V \subset U$ tal que $x \notin \overline{V}$.
En efecto, como $U \neq \emptyset$ y como x no es un punto aislado, podemos asegurar que $\exists y \in U \ni y \neq x$. Por ser X de Hausdorff, existirán U_1, U_2, entornos abiertos disjuntos de x e y, respectivamente.

Y basta tomar $V = U_2 \cap U$.
Una vez demostrado el resultado previo, pasamos a ver que X es no numerable. Para ello, dado un conjunto numerable $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} \subset X$, vamos a encontrar un punto de X que no es ninguno de los x_n.
Procedemos del siguiente modo:
Comenzamos aplicando el resultado previo con $x = x_1$ y $U = X$, obteniendo un abierto no vacío $V_1 \subset X$, tal que $x_1 \notin \overline{V_1}$. Después volvemos a usar el resultado previo con $x = x_2$ y $U = V_1$, obteniendo un abierto no vacío $V_2 \subset V_1$, tal que $x_2 \notin \overline{V_2}$. Así seguimos, obteniendo una sucesión de cerrados

$$\overline{V_1} \supset \overline{V_2} \supset \cdots \supset \overline{V_n} \supset \cdots .$$

Sabemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n} \neq \emptyset$ y, como ningún x_n pertenece a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$, llegamos a la conclusión de que hay algún punto en X que no es ninguno de los x_n.

La proposición siguiente ya la hemos demostrado para compactos de la recta real y la demostración que dimos utilizaba propiedades específicas de los números reales. Ahora vamos a ver que el resultado vale, en general, para compactos de cualquier conjunto totalmente ordenado al que le demos la topología del orden.

PROPOSICIÓN.

Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado al que convertimos en espacio topológico dándole la topología del orden. Entonces, todo conjunto compacto no vacío de X tiene máximo y tiene mínimo; o sea:

$$(\emptyset \neq E \subset X) \wedge (E \text{ compacto}) \Longrightarrow \exists m, M \in E \ni \forall x \in E,\ m \leq x \leq M.$$

Demostración. Si E no tuviera máximo, podríamos poner

$$E \subset \bigcup_{a \in E}]\leftarrow, a[.$$

Y, como E es compacto, existirán $a_1, \cdots, a_n \in E$, tales que $E \subset]\leftarrow, a_1[\cup \cdots]\leftarrow, a_n[$. Si a_j es el mayor de todos los a_i, $1 \leq i \leq n$,

resulta, de hecho, $E \subset]\leftarrow, a_j[$, lo cual es absurdo porque $a_j \in E$ y, sin embargo, $a_j \notin]\leftarrow, a_j[$.
Para la existencia del mínimo se puede dar una prueba enteramente análoga.
El siguiente resultado ya lo vimos para aplicaciones entre espacios euclídeos. De las dos demostraciones que dimos, la segunda, que usa recubrimientos, se extiende a aplicaciones continuas entre espacios topológicos arbitrarios.

PROPOSICIÓN.

La imagen continua de un compacto es compacto; es decir: Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y $K \subset X$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto.

Ejercicio 18. Demostrar que si $f : X \to Y$ es una aplicación continua del espacio topológico compacto X sobre el espacio topológico de Hausdorff Y, que es biyectiva, entonces f es, de hecho, un homeomorfismo de X sobre Y.

COROLARIO.

Una función $f : X \to Y$ continua del espacio compacto X al espacio Y, que tiene la topología del orden, alcanza su máximo y su mínimo; es decir, existen $x_0, x_1 \in X$ tales que

$$\forall x \in X,\ f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

DEMOSTRACIÓN.

Por ser f continua y X compacto, se tendrá que $f(X)$ es compacto. Entonces, aplicando lo que hemos visto para compactos en los espacios ordenados, concluimos que $f(X)$ tiene máximo y mínimo.

PROPOSICIÓN.

Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado al que convertimos en espacio topológico dándole la topología del orden. Supongamos, además, que X satisface la propiedad del supremo (es decir: todo subconjunto de X que esté acotado superiormente, tiene supremo, o sea, tiene cota superior mínima). Entonces, todo intervalo cerrado $[a, b] \subset X$, es compacto.

Demostración. Podemos suponer que $a < b$. Consideremos un recubrimiento abierto de $[a, b]$, es decir $[a, b] \subset \bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$.

Primero observamos que

$\forall x \in [a, b[, \ \exists y \in]x, b] \ \ni \ [x, y]$está cubierto por a lo más dos de los A_α.

En efecto, $x \in A_{\alpha_0} \Rightarrow \exists c > x \ \ni \ [x, c[\subset A_{\alpha_0}$. Y, entonces, pueden pasar dos cosas:

- Si $\exists y \ \ni \ x < y < c$, tenemos $[x, y] \subset A_{\alpha_0}$.
- En caso contrario $[x, c] = \{x, c\}$ y, tomando un $\alpha_1 \in J$ tal que $c \in A_{\alpha_1}$, resulta $[x, c] \subset A_{\alpha_0} \cup A_{\alpha_1}$.

El **segundo paso** comienza definiendo

$$C = \{x \in [a, b] : \ [a, x] \text{ está cubierto por un número finito de } A'_\alpha s\}.$$

Como X tiene la propiedad del supremo y C está acotado superiormente (por b, por ejemplo), podemos considerar $d = \sup C$.
Ahora todo lo que hay que hacer es ver que $d \in C$ y que $d = b$.
Desde luego, $C \neq \emptyset$, ya que $a \in C$. Además, por el primer paso, $d > a$, así que $d \in]a, b]$. Sea $\alpha_2 \in J$ tal que $d \in A_{\alpha_2}$. Como A_{α_2} es abierto, $\exists c > a$, tal que $]c, d] \subset A_{\alpha_2}$. Y $c \in C$, pues, en caso contrario c sería cota superior de C. Se sigue que $d \in C$.
Finalmente probamos que $d = b$. En efecto, si fuera $d < b$, por el primer paso, existiría $d' > d$ tal que $[d, d']$ estaría cubierto por, a lo más, dos de los A_α. Esto implicaría que $d' \in C$, lo cual es una contradicción.

LEMA DEL TUBO.

Sean X e Y dos espacios topológicos. Supongamos, además, que Y es compacto. Entonces, si G es un abierto de $X \times Y$ tal que para un cierto $x_0 \in X$ se tiene que $G \supset \{x_0\} \times Y$, siempre existe algún abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y $U \times Y \subset G$. Este abierto $U \times Y$ es el "tubo" que da nombre al lema.

Demostración. Para cada $y \in Y$, como $(x_0, y) \in G$, se sigue que existen dos abiertos $U_y \subset X$ y $V_y \subset Y$ tales que $x_0 \in U_y, \ y \in V_y$ y $U_y \times V_y \subset G$. Como $\{V_y : \ y \in Y\}$ es un recubrimiento de Y e Y es compacto, podemos quedarnos con una colección finita $V_{y_1}, \cdots, V_{y_n}$ que recubra Y, es decir, tal que $V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} = Y$. Se tiene ahora que $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ es un abierto tal que $x_0 \in U$ y, además,

$$U \times Y = U \times \left(\bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j} \right) = \bigcup_{j=1}^{n} (U \times V_{y_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (U_{y_j} \times V_{y_j}) \subset G.$$

Teorema

Si X es Y son dos espacios topológicos compactos; entonces $X \times Y$ con la topología producto es, también, un espacio topológico compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = (A_\alpha)_{\alpha \in J}$ un recubrimiento abierto de $X \times Y$. Fijado $x_0 \in X$, el conjunto compacto $\{x_0\} \times Y$ podrá ser cubierto con un número finito de abiertos $A_{\alpha_1}, \cdots, A_{\alpha_n}$ del recubrimiento $\mathcal{A}$.
Además, si ponemos $G = A_{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{\alpha_n}$ y aplicamos el lema del tubo, podemos encontrar un abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y $U \times Y \subset G$. En particular, $U \times Y$ está cubierto por un número finito de abiertos del recubrimiento $\mathcal{A}$.
Ahora tenemos que, para cada $x \in X$, existe un abierto $U_x \subset X$ tal que $x \in U_x$ y, además, $U_x \times Y$ está recubierto por un número finito de abiertos del recubrimiento $\mathcal{A}$.
Puesto que X es compacto, podemos recubrir X con un número finito de los abiertos U_x obtenidos en el paso anterior. Digamos $U_1, \cdots, U_n$.

Como $X \times Y = \bigcup_{j=1}^{n} (U_j \times Y)$ y cada $U_j \times Y$ queda cubierto con un número finito de abiertos de $\mathcal{A}$, queda demostrado que basta también con un número finito de los abiertos de $\mathcal{A}$ para cubrir todo $X \times Y$.

Se demuestra por inducción que el producto de un número finito de compactos es compacto.

Pero, inmediatamente, surge la pregunta de si el producto de un número infinito de compactos será compacto.
La respuesta positiva a esta pregunta se la debemos al matemático ruso Andrey Nikolayevich Tychonoff (1906-1993); aunque sería más propio decir que lo que le debemos a Tychonoff es la definición correcta, nada intuitiva, de la topología producto de una colección infinita de espacios topológicos.
A continuación daremos una demostración del teorema de Tychonoff basada en una caracterización sorprendente de la compacidad usando subbases, debida al matemático americano James W. Alexander.

Teorema de la subbase de Alexander.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico con una subbase $\mathcal{S}$. Entonces, las dos propiedades siguientes son equivalentes

(1) Todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento finito; es decir, X es compacto.

(2) Todo recubrimiento de X por abiertos de la subbase $\mathcal{S}$ tiene un subrecubrimiento finito.

Demostración. Llamemos $\mathcal{B}$ a la base de la topología formada por las intersecciones de un número finito de conjuntos de $\mathcal{S}$. Claramente, basta demostrar que, si se supone (2), cualquier recubrimiento por conjuntos de $\mathcal{B}$ tiene un subrecubrimiento finito.

Dado un recubrimiento abierto de X, le llamaremos "bueno" si tiene un subrecubrimiento finito y "malo" si no lo tiene.

Vamos a demostrar la parte no trivial del teorema, es decir, que (2) $\Rightarrow$ (1), por reducción al absurdo. Suponemos que todo recubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{S}$ es bueno, mientras que existe algún recubrimiento por abiertos de $\mathcal{B}$ que es malo.

Ordenamos con la inclusión todos los recubrimientos de X por abiertos de $\mathcal{B}$ que sean malos. Se ve inmediatamente que este orden es inductivo (toda cadena tiene cota superior), de modo que se aplica el lema de Zorn para asegurar que existe un elemento maximal $\mathcal{C} = (U_\alpha)_{\alpha \in J}$. Así pues, el recubrimiento $\mathcal{C}$ no tiene un subrecubrimiento finito; pero si le añadimos un nuevo conjunto de la base $\mathcal{B}$, entonces, el recubrimiento si que tiene un subrecubrimiento finito.

Sea $U_\alpha \in \mathcal{C}$. Se tendrá $U_\alpha = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ para ciertos $V_1, V_2, \cdots V_n \in \mathcal{S}$. Afirmo que algún $V_j \in \mathcal{C}$ pues, en caso contrario, para cada $j = 1, \cdots, n$, $\mathcal{C} \cup \{V_j\}$ tiene un subrecubrimiento finito. Esto implica que, para cada $j = 1, \cdots, n$, $X \setminus V_j$ puede ser cubierto por un número finito de conjuntos de $\mathcal{C}$ y, por consiguiente

$X \setminus U_\alpha = X \setminus (V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n) = \bigcup_{j=1}^{n} (X \setminus V_j)$ también puede ser cubierto por un número finito de conjuntos de $\mathcal{C}$, lo cual lleva a que todo X puede ser cubierto por un número finito de conjuntos de $\mathcal{C}$, que es una contradicción. Así queda visto que algún $V_j \in \mathcal{C}$.

Hemos demostrado que, para cada $U_\alpha \in \mathcal{C}$, existe $V_\alpha \in \mathcal{S}$ tal que $U_\alpha \subset V_\alpha$ y $V_\alpha \in \mathcal{C}$. Como los U_α cubren X, los V_α también cubren X. Pero, como los V_α pertenecen a $\mathcal{S}$, bastará con un número finito de ellos para cubrir X y, como los V_α son también miembros de $\mathcal{C}$ obtenemos, en particular, que el recubrimiento $\mathcal{C}$ es bueno, en contra de lo que habíamos supuesto.

TEOREMA DE TYCHONOFF.

Si los espacios topológicos $X_\alpha,\ \alpha \in J$, son todos compactos, entonces el espacio topológico producto $X = \prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$ es, también, compacto.

Demostración. Sea $(U_\beta)_{\beta \in K}$ un recubrimiento de X por abiertos pertenecientes a la subbase natural del producto. Eso quiere decir que, para cada $\beta \in K$, existe $\alpha_\beta \in J$ y existe V abierto en X_{α_β} tal que $U_\beta = \pi_{\alpha_\beta}^{-1}(V)$.
Afirmo que existe algún $\alpha \in J$ tal que $\{\pi_\alpha(U_\beta) :\ \beta \in K \ \ni\ \alpha_\beta = \alpha\}$ es un recubrimiento de X_α. En efecto, en caso contrario, para cada $\alpha \in J$, podríamos encontrar un x_α tal que $x_\alpha \notin \pi_\alpha(U_\beta)$ para ningún U_β con $\alpha_\beta = \alpha$.

Pero entonces, el punto $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ no estaría cubierto por los U_β, lo cual es una contradicción.
Así pues, tomando un α tal que $\{\pi_\alpha(U_\beta) : \ U_\beta \ \ni \ \alpha_\beta = \alpha\}$ es un recubrimiento de X_α, podemos quedarnos con un subrecubrimiento finito $\pi_\alpha(U_{\beta_1}), \ \cdots, \pi_\alpha(U_{\beta_n})$ y los correspondientes $U_{\beta_1}, \ \cdots, U_{\beta_n}$ serían un recubrimiento finito de X que es un subrecubrimiento del recubrimiento original $(U_\beta)_{\beta \in K}$.

PROPOSICIÓN.

$$(X \text{ compacto}) \wedge (X \text{ discreto}) \implies (X \text{ finito}).$$

COROLARIO.

En un espacio topológico compacto, todo subconjunto infinito tiene algún punto de acumulación.

DEMOSTRACIÓN.

Sea X compacto y supongamos que $A \subset X$ no tiene ningún punto de acumulación; es decir, $A' = \emptyset$. Entonces, por una parte

$$A' = \emptyset \implies A \text{ cerrado} \implies A \text{ compacto}.$$

$$\text{Pero además, } A' = \emptyset \implies A \text{ discreto}.$$

Al ser A compacto y discreto, ha de ser finito.

Proposición.

Existe un conjunto bien ordenado no numerable X, tal que $\forall x \in X,\ S_x = \{y \in X :\ y < x\}$ es numerable.

Demostración.

Comenzamos considerando un conjunto Y bien ordenado y no numerable. Luego miramos a

$$Y_1 = \{x \in Y :\ S_x = \{y \in Y_1 :\ y < x\} \text{ es no numerable}\}.$$

Si $Y_1 = \emptyset$, podemos tomar $X = Y$. En caso contrario, sea $\Omega = \min(Y_1)$. Entonces, el conjunto $X = S_\Omega = \{x \in Y_1 :\ x < \Omega\}$ cumple las dos condiciones que queremos.

Observación. Siguiendo con la notación de la demostración última; vemos que $S_\Omega \cup \{\Omega\} = \overline{S_\Omega}$ es compacto, al ser un intervalo cerrado del espacio bien ordenado Y_1. Sin embargo, $X = S_\Omega$ no es compacto; porque si lo fuera, sería cerrado y sabemos que no lo es (Ω es un punto de acumulación de S_Ω).

Proposición

Si X es como en la proposición anterior; es decir, bien ordenado y no numerable con la propiedad de que $\forall x \in X,\ S_x = \{y \in X : \ y < x\}$ es numerable, entonces

- X no es compacto y
- para todo subconjunto numerable $D \subset X$, existe algún $b \in X$ tal que $b \geq d \ \forall d \in D$.

Demostración.

Sea $D = \{d_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Como cada $S_{d_n} = \{x \in X : \ x < d_n\}$ es numerable, será también numerable la unión $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_{d_n}$. Entonces $B = X \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_{d_n} \neq \emptyset$ y basta tomar cualquier $b \in B$.

Sin embargo

PROPOSICIÓN.

El espacio X de las últimas dos proposiciones, es compacto por puntos de acumulación.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $A \subset X$ un conjunto infinito. Sea $D \subset A$ un subconjunto infinito numerable de A. Sabemos que $D \subset [a_0, b]$, donde $a_0 = \min(A)$ y b es algún elemento de X cuya existencia hemos probado en la última proposición. Como $[a_0, b]$ es compacto, se sigue que $D' \neq \emptyset$. Y, por tanto, $A' \neq \emptyset$.

DEFINICIÓN.

Un espacio topológico X se dice que es localmente compacto en un punto $x \in X$, si existe un compacto $K \subset X$ tal que $x \in \overset{\circ}{K}$. Si X es compacto en cada $x \in X$, se dirá, sencillamente, que X es localmente compacto.

Ejemplos.

- $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
- Para cualquier conjunto totalmente ordenado X que tenga la propiedad del supremo, el espacio topológico obtenido dándole a X la topología del orden es localmente compacto.

TEOREMA.

Sea X un espacio topológico no compacto. Entonces X es localmente compacto Hausdorff si y sólo si existe un espacio topológico Y que cumple las tres condiciones siguientes:

(1) X es un subespacio de Y.

(2) $Y \setminus X$ tiene sólo un punto.

(3) Y es compacto Hausdorff.

Además, si Y_1 e Y_2 son dos espacios que cumplen las tres condiciones de arriba, existe un homeomormismo h de Y_1 sobre Y_2, tal que, para todo $x \in X$, $h(x) = x$. Así que, podemos afirmar, que el espacio Y es, esencialmente, único, es decir, único a menos de un homeomorfismo.

Demostración. Paso 1. Vemos, en primer lugar, la unicidad. Sean Y_1 e Y_2 son dos espacios que cumplen las tres condiciones de arriba. Sean $Y_1 \setminus X = \{p\}$ e $Y_2 \setminus X = \{q\}$. Definimos $h : Y_1 \to Y_2$ haciendo $h(x) = x \; \forall x \in X$ y $h(p) = q$. Desde luego h es una biyección de Y_1 sobre Y_2.

Para ver que h es un homeomorfismo, basta ver que para cada abierto U de Y_1, $h(U)$ es un abierto de Y_2 y que, para cada abierto V de Y_2, $h^{-1}(V)$ es un abierto de Y_1. La situación es completamente simétrica; así que, en realidad, basta ver una de estas dos cosas. Tomemos un abierto U de Y_1 y veamos por qué $h(U)$ es un abierto de Y_2.

Hay dos tipos de abiertos: los que no contienen a p y los que si contienen a p.

Si U es un abierto de Y_1 tal que $p \notin U$, tenemos $h(U) = U$. Pero como $U \subset X$, U es abierto en X porque la topología de X es la heredada de Y_1. Pero, como Y_2 es Hausdorff, $\{q\} = \{h(p)\}$ es un cerrado de Y_2 y, por lo tanto, X es abierto en Y_2, de modo que $h(U) = U$ es un abierto de Y_2.

Si U es un abierto de Y_1 tal que $p \in Y_1$, el complementario $C = Y_1 \setminus U$ será un cerrado del compacto Y_1 y, por consiguiente, C es compacto. Así pues, C es un subespacio compacto de X y, por consiguiente, también es un subespacio compacto de Y_2. Como Y_2 es Hausdorff, se sigue que C es cerrado en Y_2. Por lo tanto $h(U) = Y_2 \setminus C$ será un abierto de Y_2.

Paso 2. Veamos que, si existe Y con las tres propiedades del enunciado, entonces X es localmente compacto Hausdorff. Desde luego, X es Hausdorff por ser subespacio de Y, que es Hausdorff. Sólo queda ver que si $x \in X$, entonces X es localmente compacto en x. Si $Y \setminus X = \{p\}$, por ser Y Hausdorff y $x \neq p$, existiran dos abiertos U, V de Y tales que $x \in U$, $p \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. El conjunto $C = Y \setminus V \subset X$ será un cerrado de Y y, por ser Y compacto, también C será compacto. Pero $C \subset X$ y, además $x \in U \subset Y \setminus V = C$. Así queda demostrado que X es localmente compacto en x.

Paso 3. Ahora vamos a ver que, recíprocamente, suponiendo que X es localmente compacto Hausdorff, existe Y con las tres propiedades del enunciado. Lo que haremos es construir Y.
Definimos $Y = X \cup \{p\}$ donde p es un elemento tal que $p \notin X$. En Y consideramos una colección de subconjuntos $\mathcal{T}$ que está formada por conjuntos de dos tipos:

(*a*) Todos los $U \subset X$ tales que U es un abierto de X.
(*b*) Todos los conjuntos $V = Y \setminus C$, donde es un subconjunto compacto de X.

Vamos a ver que $\mathcal{T}$ **es una topología en** Y.

- $\emptyset$ es un conjunto del tipo (a) e Y es un conjunto del tipo (b), así que, queda visto que $\emptyset, Y \in \mathcal{T}$.
- Una unión de conjuntos de $\mathcal{T}$ que sean todos del tipo (a), es un conjunto del tipo (a) y, por lo tanto de $\mathcal{T}$.
  Lo mismo se puede decir de una unión de conjuntos todos del tipo (b), ya que si, para cada $\alpha \in J$, $V_\alpha = Y \setminus C_\alpha$, siendo cada C_α compacto de X, se tiene
  $$\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (Y \setminus C_\alpha) = Y \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha \right)$$
  y, como $C = \bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha$ es un compacto de X, se ve que $\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$ es un conjunto de tipo (b).
  Finalmente si tenemos una colección donde hay conjuntos $U_\alpha, \ \alpha \in J$ de tipo (a), junto con otros $V_\beta = Y \setminus C_\beta, \ \beta \in K$ del tipo (b), resulta un conjunto de tipo (b)
  $$\left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{\beta \in K} (Y \setminus C_\beta) \right) = U \cup (Y \setminus C) = Y \setminus (C \setminus U)$$

- La intersección de dos conjuntos de tipo (a) es, claramente, de tipo (a). Para dos conjuntos de tipo (b), digamos $V_1 = Y \setminus C_1$ y $V_2 = Y \setminus C_2$, resulta

$$V - 1 \cap V_2 = (Y \setminus C_1) \cap (Y \setminus C_2) = Y \setminus (C_1 \cup C_2),$$

que es un conjunto de tipo (b). Y, finalmente, si tenemos un conjunto U de tipo (a) y otro $V = Y \setminus C$ de tipo (b), la intersección será

$$U \cap V = U \cap (Y \setminus C) = U \cap (X \setminus C),$$

que es un conjunto de tipo (a).
Ya tenemos demostrado que $(Y, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. El siguiente paso es demostrar que X **es un subespacio de** $(Y, \mathcal{T})$. Basta probar que si V es un abierto de Y de tipo (b), entonces $X \cap V$ es un abierto de X. En efecto, si $V = Y \setminus C$, entonces

$$V \cap X = (Y \setminus C) \cap X = X \setminus C,$$

que es un abierto de X, ya que el compacto C es cerrado por ser X Hausdorff.

Para ver que Y **es compacto** partimos de un recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de Y y demostramos que tiene un subrecubrimiento finito. En efecto; en primer lugar, tiene que haber en $\mathcal{A}$ algún abierto de tipo (b), $V = Y \setminus C$, pues estos abiertos son los únicos que contienen a p. Si consideramos todos los abiertos de $\mathcal{A}$ distintos de V y hacemos sus intersecciones con X obtenemos una colección de abiertos de X que recubren al compacto C. Sabemos que basta una subfamilia finita para cubrir a C. Si ahora consideramos los abiertos correspondientes del recubrimiento $\mathcal{A}$ junto con V, habremos obtenido un recubrimiento finito de Y por abiertos de $\mathcal{A}$.

Y ya sólo queda probar que Y **es Hausdorff.** Si $x, y \in X$, ya sabemos que existen abiertos U, V de X y, por tanto, de Y, tales que $x \in U,\ y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si $x \in X$ e $y = p \in Y$, sabemos que, por ser X localmente compacto, existen un compacto C de X y un abierto U tales que $x \in U \subset C$. Entonces, tomando $V = Y \setminus C$, tenemos un abierto V de Y tal que $p \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

DEFINICIÓN.

Se llama compactificación de un espacio X no compacto, a cualquier espacio compacto Y tal que X es un subespacio denso de Y.

Lo que hemos hecho ha sido construir, para cada espacio localmente compacto Hausdorff no compacto, una compactificación Y Tal que $Y \setminus X$ tiene un sólo punto. Se dice que Y es la compactificación por un punto o compactificación de Alexandroff de X. El nombre es en honor al matemático ruso Pavel Alexandroff (1896-1982)

Proposición.

Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si y sólo si cada punto de X tiene un sistema fundamental de entornos compactos; es decir, si y sólo si para cada $x \in X$ y cada U entorno de x, existe V entorno de x tal que $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subset U$.

Demostración.

Desde luego, la condición es suficiente para que X sea localmente compacto. Veamos que, también, es necesaria. Podemos suponer que $X \subset Y$ para algún Y compacto Hausdorff. Sea $x \in U \subset X$, con U abierto. $Y \setminus U$ es un cerrado de Y. Se sigue que $Y \setminus U$ es un compacto. Sabemos que, por ser Y compacto Hausdorff, podemos encontrar abiertos W, V de Y, tales que $W \supset Y \setminus U$, $V \ni x$ y $W \cap V = \emptyset$. Se sigue que

$$V \subset Y \setminus W \subset Y \setminus (Y \setminus U) = U \Longrightarrow \overline{V} \subset U.$$

Desde luego $\overline{V}$ es compacto por ser un cerrado del compacto Y.

COROLARIO.

En un espacio localmente compacto Hausdorff, tanto los abiertos como los cerrados son localmente compactos.

COROLARIO.

Un espacio X es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto Hausdorff.

DEFINICIÓN.

Sea X un espacio topológico. Entonces

- Se dice que X es T_0 (o de Kolmogorov) si para cada dos puntos distintos de X, existe un entorno de alguno de ellos que no contiene al otro. Equivale a decir que

$$X \text{ es } T_0 \iff (\forall x, y \in X,\ \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y).$$

- Se dice que X es T_1 (o de Frechet) si para cada dos puntos distintos de X, existe un entorno de cada uno de ellos que no contiene al otro. Equivale a decir que

$$\forall x \in X,\ \overline{\{x\}} = \{x\},$$

  o sea: los puntos son cerrados.
  Evidentemente, cada espacio T_1 es T_0.

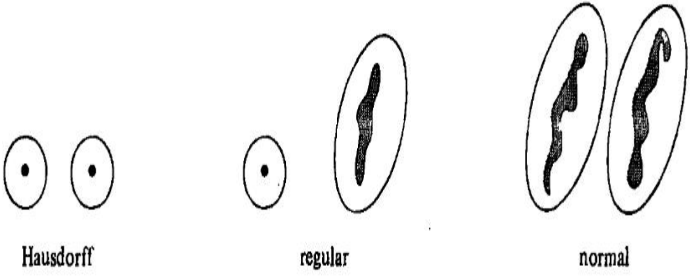
- Se dice que X es T_2 (o de Hausdorff) si para cada dos puntos distintos de X, existen sendos entornos de ellos que no se cortan. O sea

  $$\forall x, y \in X \ni x \neq y, \exists U, V \text{abiertos} \ni (x \in U) \wedge (y \in V) \wedge (U \cap V = \emptyset).$$

  Evidentemente, cada espacio T_2 es T_1.
- Se dice que X es regular si para cada cerrado $E \subset X$ y cada $x \in X \setminus E$, existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$, tales que $E \subset U$ y $x \in V$. Se dice que X es T_3 si es regular y T_1. Evidentemente, cada espacio T_3 es T_2.
- Se dice que X es normal si para cada par de cerrados disjuntos $E, F \subset X$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $E \subset U$ y $F \subset V$. Se dice que X es T_4 si es normal y T_1. Evidentemente, cada espacio T_4 es T_3.

  $$\text{Tenemos } T_4 \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0.$$

La T viene de la palabra alemana “Trennung”, que es “separación”.



Los axiomas de separación.

Ejercicio 19. Si no se pide que los puntos sean cerrados, un espacio normal no tiene por qué ser regular, como demuestra el ejemplo siguiente:
En $\mathbb{R}$ se considera una topología cuyos abiertos son, aparte del vacío y el total, los rayos abiertos $]a, \rightarrow[, \; a \in \mathbb{R}$.
Comprobar que se trata, en efecto, de una topología y que el espacio topológico resultante es normal pero no es regular.

Ejercicio 20. Demostrar que las propiedades T_0, T_1, T_2 y T_3, así como el hecho de ser regular, son hereditarias; en el sentido de que, para cada una de ellas, es cierto que si un espacio la tiene, también la tienen todos sus subespacios.
Ejercicio 21. Demostrar que todo subespacio cerrado de un espacio normal es normal.
Ejercicio 22. Demostrar que la imagen de un espacio normal por una aplicación continua cerrada es un espacio normal.

Los espacios topológicos más utilizados en Análisis y Geometría son los normales. En ese sentido su denominación hace justicia al significado del término "normal" en el lenguaje ordinario.

Teorema.

Todo espacio métrico es T_4.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico. Ya sabemos que es T_2, y, por lo tanto T_1. Se trata, ahora, de ver que es normal. Sean E y F dos subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Para cada $x \in E$, existe $r(x) > 0$ tal que $\mathbf{B}(x, r(x)) \cap F = \emptyset$. Y para cada $y \in F$, existe $r(y) > 0$ tal que $\mathbf{B}(y, r(y)) \cap E = \emptyset$. Si definimos

$$U = \bigcup_{x \in E} \mathbf{B}(x, r(x)/2) \text{ y } V = \bigcup_{y \in F} \mathbf{B}(y, r(y)/2)$$

tenemos abiertos U y V tales que $E \subset U$ y $F \subset V$. Sólo queda demostrar que $U \cap V = \emptyset$. Si esto no fuera cierto, existiría algún $z \in U \cap V$, de modo que tendríamos $x \in E, y \in F$ tales que $d(x, z) < r(x)/2$ y $d(y, z) < r(y)/2$. pero, entonces

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < (r(x) + r(y))/2 \leq \max(r(x), r(y))$$

Se sigue que, o bien $x \in \mathbf{B}(y, r(y))$ o bien $y \in \mathbf{B}(x, r(x))$ y las dos cosas son imposibles.

TEOREMA.

Todo espacio compacto Hausdorff es T_4.

Demostración. Sea X compacto Hausdorff.
Primero vemos que X **es regular.** Para ello vamos a ver cómo se pueden separar con abiertos un conjunto cerrado E y un punto x. Para cada $y \in E$, sean U_y, V_y abiertos tales que $y \in U_y,\ x \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$. Como E es cerrado en el compacto X, E es compacto. Se sigue que, del recubrimiento $\{U_y\}_{y\in E}$ podemos extraer un subrecubrimiento finito $U_{y_1}, \cdots, U_{y_n}$; Es decir, $E \subset U = \bigcup_{j=1}^{n} U_{y_j}$. Si ahora consideramos $V = \bigcap_{j=1}^{n} V_{y_j}$, tenemos sendos abiertos U, V tales que $E \subset U,\ x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
Para probar que X **es normal** hemos de separar con abiertos dos cerados disjuntos E y F.

Primero, como ya sabemos que X es regular, para cada $x \in F$ encontramos abiertos U_x, V_x tales que $E \subset U_x$, $x \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. Luego, puesto que F es compacto por ser cerrado en el compacto X, extraemos un subrecubrimiento finito $V_{x_1}, \cdots, V_{x_m}$ de F del recubrimiento $\{V_x\}_{x \in F}$ y consideramos el abierto $U = \bigcap_{j=1}^{m} U_{x_j}$. Así tenemos sendos abiertos U y $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_{x_j}$ tales que $E \subset U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

TEOREMA.

Todo conjunto totalmente ordenado $(X, \leq)$ es un espacio T_4 cuando se le da la topología del orden.

Demostración. La demostración es muy sencilla si se supone que $(X, \leq)$ es bien ordenado. Si no, se complica un poco. Como sólo vamos a usar este resultado para espacios bien ordenados, damos la demostración sólo para ellos.
Así pues, sea $(X, \leq)$ un conjunto bien ordenado al que convertimos en espacio topológico dándole la topología del orden.
Lo primero que observamos es que todo intervalo de la forma $]x, y]$ es un abierto. Esto es claro si y es el último elemento, o sea, el máximo de X. En caso contrario, $]x, y] =]x, y'[$, donde y' es el sucesor inmediato de y que, al ser X bien ordenado, existe siempre.
Supongamos ahora que E y F son dos cerrados disjuntos de E.
Empezamos tratando el caso en que ni E ni F contienen al mínimo de X. Para cada $a \in E$, existe un abierto $]x_a, a]$ disjunto con F. Aquí es donde usamos que a no es el mínimo de X. Análogamente, para cada $b \in F$ existe un abierto $]y_b, b]$ disjunto de E.

Ahora, todo lo que hay que hacer es demostrar que los conjuntos

$$U = \bigcup_{a \in E}]x_a, a] \qquad \text{y} \qquad V = \bigcup_{b \in F}]y_b, b]$$

son abiertos disjuntos que contienen, respectivamente, a E y F. Lo único que no es obvio es que sean disjuntos. Vamos a probarlo. Si existiera $z \in U \cap V$, se tendría, para algún par $a \in E, b \in F$, que $z \in]x_a, a] \cap]y_b, b]$. Supongamos que $a < b$. Entonces, si $a \leq y_b$ los dos intervalos son disjuntos y, si $a > y_b$, tenemos una contradicción con el hecho de que $]y_b, b]$ es disjunto de E. Si $b < a$ llegamos a una contradicción similar.

Sólo queda por analizar el caso de que alguno de los conjuntos, digamos E, contiene al mínimo a_0 de X. Resulta que $\{a_0\}$ es, a la vez, abierto y cerrado. Por lo que ya hemos visto, existen sendos abiertos disjuntos U y V que contienen respectivamente a $E \setminus \{a_0\}$ y F. Ahora sólo queda tomar $U \cup \{a_0\}$ y V para encontrar los abiertos disjuntos que contienen, respectivamente a E y F.

Como, desde luego, X es T_1, queda probado que es T_4.

LEMA.

Un espacio topológico X es normal si y sólo si para cada subconjunto cerrado $E \subset X$ y cada abierto $W \subset X$ tal que $E \subset W$, existe un abierto $U \subset X$ tal que $E \subset U \subset \overline{U} \subset W$.

DEMOSTRACIÓN.

Si X es normal y el cerrado E y el abierto W satisfacen $E \subset W$, el cerrado $F = X \setminus W$ es disjunto de E, de modo que existen abiertos U y V disjuntos, tales que $U \supset E$ y $V \supset F = X \setminus W$. Pero, entonces, $U \subset X \setminus V \subset X \setminus F = W$. Y, puesto que $X \setminus V$ es cerrado, se sigue que $\overline{U} \subset X \setminus V \subset W$.

Recíprocamente, si la condición se cumple y tenemos dos cerrados disjuntos E y F, entonces $W = X \setminus F$ es un abierto tal que $W \supset E$. Si U es un abierto tal que $U \supset E$ y $\overline{U} \subset W$, entonces U y $V = X \setminus \overline{U}$ son abiertos que cumplen $E \subset U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ejercicio 23. Demostrar que un espacio topológico X es regular si y sólo si para cada punto $x \in X$ y cada abierto $W \subset X$ tal que $x \in W$, existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset W$.

Ejercicio 24. Demostrar que un producto es regular si y sólo si cada uno de los espacios factores es regular.

Ejercicio 25. Demostrar que la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_l$ es normal.

PROPOSICIÓN.

El plano de Sorgenfrey $\mathbb{R}_l^2 = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es normal.

Demostración. Vamos a suponer que es normal y vamos a ver que de esta suposición se deduce una contradicción. Sea $L = \{(x, -x) : \ x \in \mathbb{R}\}$. Sabemos que L es cerrado en $\mathbb{R}_l^2$ y que, como subespacio, tiene la topología discreta. Entonces, cada subconjunto $A \subset L$ será cerrado en L y, por consiguiente, cerrado en $\mathbb{R}_l^2$. Como $L \setminus A$ es también cerrado en $\mathbb{R}_l^2$, se tiene que, para cada subconjunto propio no vacío A de L, se pueden encontrar conjuntos abiertos disjuntos U_A y V_A que contienen a A y a $L \setminus A$ respectivamente. Sea D el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}_l^2$ que tienen coordenadas racionales. Claramente, D es denso en $\mathbb{R}_l^2$.

Definimos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(L) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{P}(D) \\ A & \longmapsto & \theta(A) = \begin{cases} D \cap U_A & \text{si } \emptyset \subsetneq A \subsetneq L \\ \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ D & \text{si } A = L \end{cases} \end{array}.$$

Vamos a demostrar que θ es inyectiva**.**
Si $\emptyset \subsetneq A \subsetneq L$, $\theta(A) = D \cap U_A$ no es ni el vacío (por ser U_A abierto y D denso en $\mathbb{R}^2_l$) ni todo D (por ser $D \cap V_A \neq \emptyset$). Queda por ver que si $\emptyset \subsetneq B \subsetneq L$, y $B \neq A$, entonces $\theta(B) \neq \theta(A)$. Supongamos que $x \in A \setminus B$. Entonces $x \in A \cap (L \setminus B) \subset U_A \cap V_B$. Se sigue que $U_A \cap V_B$ es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^2_l$ y, por lo tanto,
$\emptyset \neq U_A \cap V_B \cap D \subset (D \cap U_A) \setminus (D \cap U_B) \Longrightarrow D \cap U_A \neq D \cap U_B$.
Queda visto que θ es inyectiva**.**
Ahora **vamos a demostrar que** existe $\varphi : \mathcal{P}(D) \longrightarrow L$ inyectiva. Para ver esto, basta darse cuenta de que D tiene el mismo cardinal que los números naturales y L tiene el mismo cardinal que los números reales

Para construir una aplicación inyectiva $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ basta mandar cada $S \subset \mathbb{N}$ al número real $\psi(S) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 10^{-n}$, donde $a_n = 0$ si $n \in S$ y $a_n = 1$ si $n \notin S$. Luego ψ nos da φ componiendo con las biyecciones apropiadas.
La existencia de θ y φ, nos da, inmediatamente, una contradicción; ya que tendríamos

$$\mathcal{P}(L) \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(D) \xrightarrow{\varphi} L.$$

La composición $\varphi \circ \theta$ sería una aplicación inyectiva de $\mathcal{P}(L)$ en L, que, sabemos, que no existe.

La proposición que acabamos de demostrar nos enseña dos cosas:

- Que un espacio regular no siempre es normal y
- Que un producto de espacios normales no siempre es normal.

Ejercicio 26. Demostrar que el "plano de Moore", que estudiamos en el capítulo 1 como ejemplo de espacio separable con un subespacio que no es separable, es un ejemplo de espacio T_3 que no es T_4. Recordemos que el plano de Moore, llamado así en honor del matemático americano Robert Lee Moore (1882-1974) se obtiene dando sobre el semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\}$ una topología en la que los puntos (x, y) con $y > 0$ tienen un sistema fundamental de entornos constituido por las bolas abiertas usuales

$$\mathbf{B}((x, y), r) = \{(z, t) : \ (z - x)^2 + (t - y)^2 < r^2\}, \ 0 < r < y,$$

mientras que, para un punto $(x, 0)$, un sistema fundamental de entornos está formado por los conjuntos

$$\{(x, 0)\} \cup \mathbf{B}((x, r), r), \ r > 0,$$

que resultan de añadir al punto $(x, 0)$ una bola abierta usual tangente a la recta $y = 0$ en $(x, 0)$.

PROPOSICIÓN.

El espacio producto $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ no es normal.

Aparte de proporcionarnos un nuevo ejemplo de espacio regular que no es normal y un nuevo ejemplo de producto de espacios normales que no es normal, como $S_\Omega \times \overline{S_\Omega} \subset \overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ y $\overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$ es normal por ser compacto Hausdorff, lo fundamental que aporta esta proposición es un ejemplo de subespacio no normal de un espacio normal.

COROLARIO.

Un subespacio de un espacio normal no es, necesariamente, normal.

Demostración de la proposición. Como $\overline{S_\Omega}$ es un espacio de Hausdorff, la diagonal $\Delta = \{(x, y) \in \overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega} : \; x = y\}$ es un cerrado de $\overline{S_\Omega} \times \overline{S_\Omega}$. Por lo tanto, en el subespacio $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$, el conjunto

$$E = \Delta \cap (S_\Omega \times \overline{S_\Omega}) = \Delta \setminus \{(\Omega, \Omega)\}$$

es cerrado. También $F = S_\Omega \times \{\Omega\}$ es un cerrado de $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$. Como, además $E \cap F = \emptyset$, si $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ fuera normal, existirían sendos abiertos U, V de $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ tales que $E \subset U, \; F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Vamos a ver que esto lleva a contradicción.

Dado $x \in S_\Omega$, consideramos la "rodaja vertical" $\{x\} \times \overline{S_\Omega}$.

vamos a demostrar ahora que existe β, tal que $x < \beta < \Omega$, tal que $(x, \beta) \notin U$. En efecto, si U contuviera todos los puntos $(x, \beta), x < \beta < \Omega$, entonces (x, Ω) sería punto de acumulación de U, lo cual queda excluido por ser $U \cap V = \emptyset$ y $V \ni (x, \Omega)$.
Sea $\beta(x)$ el punto más pequeño de S_Ω tal que $x < \beta(x) < \Omega$ y $(x, \beta(x)) \notin U$. Ahora definimos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de S_Ω empezando con cualquier x_1 y haciendo $x_{n+1} = \beta(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Puesto que siempre es $\beta(x) > x$, tenemos

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots .$$

El conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es numerable y, por lo tanto, tiene una cota superior en S_Ω. Llamemos c a la cota superior mínima de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, será $x_n \to c$. Pero como $\beta(x_n) = x_{n+1}$, resulta que, también $\beta(x_n) \to c$. entonces

$$(x_n, \beta(x_n)) \to (c, c).$$

Esto es una contradicción; porque $(c, c) \in E \subset U$ y los puntos $(x_n, \beta(x_n))$ pertenecen a $\complement U$, que, puesto que es cerrado, ha de contener a sus puntos de acumulación; en particular, a (c, c).

Ejercicio 27. Demostrar que si un producto de espacios topológicos es normal, entonces, cada factor es, también un espacio normal.

LEMA

Sea X un espacio topológico que cumple la siguiente propiedad: $\forall C, W \subset X$ tales que C es cerrado, W es abierto y $C \subset W$, existen abiertos $W_j,\ j \in \mathbb{N}$ tales que $C \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_j$ y $\forall j \in \mathbb{N},\ \overline{W_j} \subset W$.

Entonces X es normal.

Demostración. Sean E y F dos cerrados disjuntos de X. Empezamos tomando $C = E$ y $W = X \setminus F$; así tenemos un cerrado y un abierto como los del enunciado; de modo que, sabemos que existen abiertos $W_j, j \in \mathbb{N}$ tales que

$$E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_j \quad \text{y } F \cap \overline{W_j} = \emptyset\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

También podemos tomar $C = F$ y $W = X \setminus E$ y encontrar abiertos $V_j,\ j \in \mathbb{N}$ tales que

$$F \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_i \quad \text{y } E \cap \overline{V_j} = \emptyset\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ahora consideramos, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$G_j = W_j \setminus \bigcup_{i \leq j} \overline{V_i}, \text{ y } H_j = V_j \setminus \bigcup_{i \leq j} \overline{W_i}$$

Cada G_j y cada H_j son abiertos y se tiene

$$E \subset U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j, \qquad \text{y} \qquad F \subset V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} H_j.$$

Ahora sólo queda ver que $U \cap V = \emptyset$. Pero

$$G_j \cap V_i = \emptyset \; \forall i \leq j \Longrightarrow G_j \cap H_i = \emptyset \; \forall i \leq j.$$

$$H_j \cap W_i = \emptyset \; \forall i \leq j \Longrightarrow H_j \cap G_i = \emptyset \; \forall i \leq j.$$

Así vemos que para cada $i, j \in \mathbb{N}$, se tiene que $G_j \cap H_i = \emptyset$, de modo que $U \cap V = \emptyset$.

Proposición.

Todo espacio regular que cumpla el segundo axioma de numerabilidad es, de hecho, normal.

Demostración.

Vamos a ver que si X es regular y IIAN, entonces X satisface la condición del lema. En efecto, si $C \subset W$ son un cerrado cotenido en un abierto como en el enunciado del lema, y llamamos $\mathcal{B}$ a una base numerable de abiertos de X, para cada $x \in C$ encontramos un abierto $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset W$. Los U_x cubren C y, como son de una colección numerable, se satisface la condición del lema.

Ejercicio 28. Demostrar que se cumple, de hecho, este resultado algo más fuerte que la proposición: Todo espacio regular de Lindelöff es normal

Ejercicio 29. Demostrar que todo espacio numerable regular es normal.

Ejercicio 30. Se dice que un espacio topológico X es completamente normal si y sólo si para cada par de conjuntos $A, B \subset X$ tales que $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$ existen sendos conjuntos abiertos disjuntos que los contienen. A veces se llama a dos conjuntos como los A y B de arriba separados.

Se pide: Demostrar que para un espacio topológico X, son equivalentes las dos propiedades siguientes

(*a*) X es completamente normal.

(*b*) Todo subespacio $Y \subset X$ es normal.

Ayuda: Para ver que $(b) \Rightarrow (a)$ *considerar el subespacio* $X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Definición.

Un espacio topológico es T_5 si es T_1 y completamente normal.

Desde luego, se tiene: $T_5 \Longrightarrow T_4 \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$.

Ejercicio 31. ¿Cuáles de los siguientes espacios son completamente normales?

(*a*) Un subespacio de un espacio completamente normal.

(*b*) El producto de dos espacios completamente normales.

(*c*) Un conjunto bien ordenado con la topología del orden.

(*d*) Un espacio metrizable.

(*e*) Un espacio compacto Hausdorff.

(*f*) Un espacio regular con base numerable.

(*g*) La recta de Sorgenfrey.

TEOREMA DE URYSOHN.

Sean E y F subconjuntos cerrados y disjuntos de un espacio topológico normal X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$, tal que $f = 0$ en E y $f = 1$ en F.

Demostración. Ponemos $V = X \setminus F$, que es un abierto que contiene a E. Aplicamos el lema de la página 92 para encontrar un abierto $U_{1/2}$ tal que

$$E \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset V.$$

Volvemos a aplicar el lema a las parejas $E \subset U_{1/2}$ y $\overline{U_{1/2}} \subset V$, obteniendo abiertos $U_{1/4}$ y $U_{3/4}$ tales que

$$E \subset U_{1/4} \subset \overline{U_{1/4}} \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset U_{3/4} \subset \overline{U_{3/4}} \subset V.$$

Continuando del mismo modo, construimos, para cada racional diádico $r \in]0, 1[$, un conjunto abierto U_r, tal que, si $0 < r < s < 1$,

$$E \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_s \subset V.$$

Definimos

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in U_r \ \forall r > 0 \text{ y} \\ \sup\{r : x \notin U_r\} \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Evidentemente $0 \leq f \leq 1$, $f = 0$ en E y $f = 1$ en F. Ahora sólo hay que demostrar que f es continua.

Sea $x \in X$. Por conveniencia suponemos que $0 < f(x) < 1$. Los casos $f(x) = 0$ y $f(x) = 1$ son más fáciles. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos racionales diádicos r y s tales que $0 < r, s < 1$ y

$$f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x) + \varepsilon.$$

Entonces $x \notin U_t$ para los racionales diádicos t tales que $r < t < f(x)$, de modo que $x \notin \overline{U_r}$. Por otro lado, $x \in U_s$, de modo que $W = U_s \setminus \overline{U_r}$ es un entorno abierto de x. Si $y \in W$, por la definición de f vemos que $r \leq f(y) \leq s$. En particular $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para cada $y \in W$, de modo que f es continua en x.

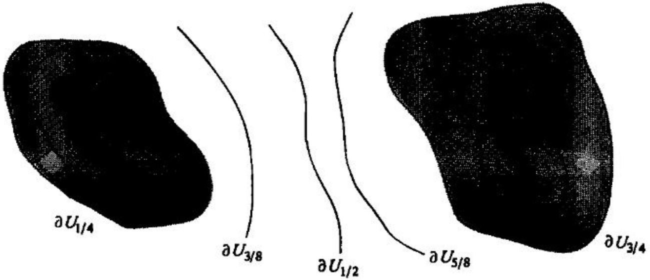


Ilustración de la demostración del teorema de Urysohn.

Ejercicio 32. Demostrar que un espacio topológico X es normal si y sólo si la conclusión del teorema de Urysohn es válida para X.

El teorema de Urysohn es uno de los resultados más profundos que hemos visto. Se debe al matemático ruso Pavel Urysohn(1889-1924).

Ejercicio 33. Sea X el subespacio del plano usual dado por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ (x, y) \neq (0, 0)\};$$

es decir, el semiplano superior menos el origen. Sean
$E = \{(x, y) \in X : \ (x > 0) \wedge (y = 0)\}$ y
$F = \{(x, y) \in X : \ (x < 0) \wedge (y = 0)\}$. Se pide

- Demostrar que E y F son cerrados de X.
- Encontrar una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f = 0$ en E y $f = 1$ en F.

Teorema de extensión de Tietze.

Sea X un espacio topológico normal y sea Y un subconjunto cerrado de X. Sea f una función real, continua y acotada definida en Y. Entonces existe una función real continua y acotada h definida en todo X, cuya restricción a Y coincide con f; es decir, tal que $\forall y \in Y,\ h(y) = f(y)$.

Demostración. Construiremos h mediante un algoritmo iterativo. Para el primer paso definimos:

$$c_0 = \sup_{y \in Y} |f(y)|,$$
$$E_0 = \{y \in Y :\ f(y) \leq -c_0/3\},$$
$$F_0 = \{y \in Y :\ f(y) \geq c_0/3\}.$$

Entonces E_0 y F_0 son cerrados disjuntos de X y, tomando una combinación lineal de la función que da el teorema de Uryshon y una constante, podemos encontrar una función continua g_0 definida en X, tal que $-c_0/3 \leq g_0 \leq c_0/3,\ g_0 = -c_0/3$ en E_0 y $g_0 = c_0/3$ en F_0.

En particular

$$\forall x \in X,\ |g_0(x)| \leq c_0/3 \qquad \text{y} \qquad \forall y \in Y,\ |f(y) - g_0(y)| \leq 2c_0/3.$$

Construimos por inducción una sucesión de funciones $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ que cumplen las condiciones

$$(1) \quad \forall x \in X,\ |g_n(x)| \leq 2^n c_0/3^{n+1},$$
$$\forall y \in Y,\ |f(y) - g_0(y) - \cdots - g_n(y)| \leq 2^{n+1} c_0/3^{n+1}$$

del modo siguiente. Si suponemos ya construidas $g_0, \cdots, g_{n-1}$, aplicamos el primer paso a la función $f - g_0 - \cdots - g_{n-1}$ en lugar de f; es decir, hacemos

$$c_{n-1} = \sup_{y \in Y} |f(y) - g_0(y) - \cdots - g_{n-1}(y)|$$

y obtenemos g_n continua definida en X tal que

$$\forall x \in X,\ |g_n(x)| \leq c_{n-1}/3,$$
$$\forall y \in Y,\ |f(y) - g_0(y) - \cdots - g_n(y)| \leq 2c_{n-1}/3.$$

Como $c_{n-1} \leq 2^n c_0/3^n$, obtenemos (1).

Una vez que tenemos las funciones $(g_n)_{n=0}^{\infty}$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n = g_0 + \cdots + g_n.$$

Si $n \geq m$, tenemos

$$|h_n - h_m| = |g_{m+1} + \cdots + g_n| \leq \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)\frac{c_0}{3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} c_0.$$

Hemos visto que la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas acotadas uniformemente de Cauchy en X. Se sigue que $h_n \to h$ uniformemente en X y, además h es una función continua acotada en X. De hecho

$$|h| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |g_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_0/3^{n+1} = c_0,$$

de modo que la cota de h coincide con la de f.
Por otro lado, la segunda desigualdad de (1) implica que $h(y) = f(y)\ \forall y \in Y$.

El teorema que acabamos de probar se debe a
Heinrich Tietze (1880-1964).

Ejercicio 34. Demostrar que un espacio topológico X es normal si y sólo si la conclusión del teorema de Tietze es válida para X.

Ejercicio 35. Demostrar que en un espacio normal X, cualquier función real continua definida en un subespacio de X se puede extender a una función real continua definida en todo el espacio X.

Ejercicio 36. Obtener el teorema de Urysohn como un corolario del teorema de Tiertze.

DEFINICIÓN.

Cuando dos conjuntos A y B de un espacio topológico X satisfacen la propiedad de que

$$\exists f : X \to [0, 1] \text{ continua } \ni f(A) = \{0\} \text{ y } f(B) = \{1\},$$

se dice que A y B pueden ser separados por una función continua.

Lo que hace el teorema de Urysohn es demostrar que, si podemos separar los cerrados disjuntos de un espacio por abiertos disjuntos; entonces, también podemos separarlos por una función continua.
En este punto uno está tentado de ver si la misma estrategia puede funcionar para los espacios regulares; es decir, uno se pregunta si no será posible separar puntos de cerrados por aplicaciones continuas.
Pero al poco de emprender la búsqueda de la función continua que separe a un punto de un cerrado que no lo contiene, uno se da cuenta de que el axioma de regularidad no es suficiente para completar el algoritmo, pues en el segundo paso, ya necesitamos separar dos cerrados y eso no lo podemos hacer suponiendo sólo la regularidad.

Esta observación nos conduce a la siguiente

DEFINICIÓN.

Diremos que el espacio topológico X es completamente regular si para cada cerrado E de X y cada punto $x \in X \setminus E$, existe una aplicación continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.
A los espacios completamente regulares que son T_1 se les suele llamar espacios de Tychonoff.

Es claro que

$$T_4 \Longrightarrow \text{Tychonoff} \Longrightarrow T_3.$$

Por eso hay quienes llaman a los espacios de Tychonoff $T_{3\frac{1}{2}}$.

Ejercicio 37. Demostrar que

- Un subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular.
- Un producto de espacios completamente regulares es completamente regular.

Ejercicio 38. Demostrar que el plano de Sorgenfrey $\mathbb{R}^2_l$, el plano de Moore Y el espacio $S_\Omega \times \overline{S_\Omega}$ son todos completamente regulares. Esto nos da tres ejemplos bastante sencillos de espoacios $T_{3\frac{1}{2}}$ que no son T_4.
No es tan sencillo construir un espacio T_3 que no sea $T_{3\frac{1}{2}}$. El más sencillo que yo conozco puede verse en este enlace

Teorema de metrización de Urysohn.

Todo espacio T_3 que tenga una base numerable es metrizable.

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio T_3 con una base numerable $\mathcal{B} = \{B_j : j \in \mathbb{N}\}$. Ya sabemos que, entonces, $(X, \mathcal{T})$ es normal. Consideremos todos los pares $P = (B_i, B_j) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ tales que $\overline{B_i} \subset B_j$. Estos pares de abiertos forman un conjunto numerable, así que podemos etiquetarlos con los números naturales obteniendo una sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El teorema de Urysohn nos dice que para cada par $P_n = (B_i, B_j)$, existe una función continua $f_n : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f_n(\overline{B_i}) = 0$ y $f_n(\complement B_j) = 1$. Usamos todas las f_n para definir

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|. \end{array}$$

Primero demostramos que d **es una distancia** en X.

- Desde luego $\forall x, y \in X, \; 0 \leq d(x,y) \in \mathbb{R}$.
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
  Supongamos que $x \neq y$. Como X es T_1, $\{x\}$ e $\{y\}$ son cerrados disjuntos y podemos encontrar abiertos $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ tales que

$$x \in B_i \subset \overline{B_i} \subset B_j \subset \complement\{y\}.$$

  Entonces, el par (B_i, B_j) será uno de los que hemos etiquetadocon los naturales, digamos $(B_i, B_j) = P_k$. Por consiguiente, tenemos la correspondiente función f_k tal que $f_k(\overline{B_i}) = 0$ y $f_k(\complement B_j) = 1$. En particular, como $x \in B_i$ e $y \in \complement B_j$, será $|f_k(x) - f_k(y) = |0 - 1| = 1$. Y, por consiguiente

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(x) - f_n(y)| \geq 2^{-k} > 0.$$

- $\forall x, y \in X, \; d(x,y) = d(y,x)$. Es obvio.
- $\forall x, y, z \in X, \; d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Es consecuencia inmediata de la desigualdad triangular para el valor absoluto.
  Ya hemos demostrado que d es una distancia.

Ahora vamos a ver que **la topología dada por d coincide con $\mathcal{T}$**.

Para ello basta que probemos que, para cada $E \subset X$, si E' denota el conjunto de puntos de acumulación de E en $(X, \mathcal{T})$, entonces, si $p \in X$,

$$p \in E' \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in E \ \ni 0 < d(p, q) < \varepsilon.$$

La demostración es como sigue:

- ($\Rightarrow$) Sea $p \in E'$ y sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-N} < \varepsilon/2$. Por la continuidad de las f_n, para cada $n \leq N$ podemos encontrar $U_n \in \mathcal{T}$ tal que $p \in U_n$ y $\forall x, y \in U_n,\ |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $U = \bigcap_{n=1}^{N} U_n \in \mathcal{T}$. Por ser $p \in E'$, sabemos que existe $q \in E \cap (U \setminus \{p\})$. Como $q \neq p$, ya tenemos $0 < d(p,q)$. Además

$$\begin{aligned}
d(p,q) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(p) - f_n(q)| \\
&= \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}|f_n(p) - f_n(q)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(p) - f_n(q)| \\
&< \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-N} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

- ($\Longleftarrow$) Supongamos que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in E \ \ni 0 < d(p,q) < \varepsilon$. Si $p \notin E'$, existirá $U \in \mathcal{T}$ tal que $p \in U$ y $(U \setminus \{p\}) \cap E = \emptyset$. Entonces podemos encontrar $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ tales que $p \in B_i \subset \overline{B_i} \subset B_j \subset U$. Si $(B_i, B_j) = P_n$, tenemos f_n tal que $|f_n(p) - f_n(y)| = 1\ \forall y \in \complement B_j$. Sea $x \in E$. Si $x = p$, entonces $d(p,x) = 0$. Si $x \neq p$, entonces $x \notin U$. Por lo tanto, $x \notin B_j$. Y esto implica que $d(p,x) \geq 2^{-n}$. Así pues, $\forall x \in E \setminus \{p\},\ d(p,x) \notin]0, 2^{-n}[$. Esto es una contradicción, puesto que siempre es posible elegir ε tal que $0 < \varepsilon < 2^{-n}$. Así queda demostrado que $p \in E'$.