HOJA DE EJERCICIOS 2: Lógica formal EDyL 2011-2012

[Fecha de publicación: 2011/10/10]
[Fecha de entrega: 2011/10/20, 10:00]
[Resolución en clase: 2011/10/20,21]

Ejercicio 1:

[Adaptado de R. Smullyan, citado en Rosen “Discrete Mathematics”]
En un remoto pueblo hay dos especies de humanoides dotados de lenguaje. La especie de los *verosus* dice siempre la verdad. La especie *falacius* miente siempre que habla. Un forastero visitó tan excepcional lugar y encontró a 2 criaturas parlantes (a las que llamaremos A y B). El forastero le preguntó a A, "De ustedes dos, ¿quién es verosus y quién es falacius?". A esta cuestión respondió A "B es verosus". B adjuntó: "Somos de distinta especie". ¿Es posible determinar de qué especies son A y B utilizando únicamente inferencia? No se puede utilizar razonamiento semiformal en lenguaje natural ni razonamiento basado en casos, ni tablas de verdad.

SOLUCIÓN

A : “A es verosus (dice la verdad)”
¬A: “A es falacius (miente)”

B : “B es verosus (dice la verdad)”
¬B: “B es falacius (miente)”

[Nota: La formalización con 4 átomos
A : “A es verosus”
AA : “A dice la verdad”
B : “B es verosus”
BB : “B dice la verdad”
es excesiva, ya que $(A \Leftrightarrow AA)$, $(B \Leftrightarrow BB)$]

Base de conocimiento

(1) $A \Leftrightarrow B \equiv (B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee B)$
(1.1) $\neg B \vee A$
(1.2) $\neg A \vee B$

(2) $B \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

$B \Rightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv \neg B \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
$\equiv \neg B \vee \neg A$ (2.1)

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \Rightarrow B \equiv \neg[(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)] \vee B \equiv$

$\equiv [\neg (A \wedge \neg B) \wedge \neg (\neg A \wedge B)] \vee B \equiv$

$\equiv [(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)] \vee B \equiv$

$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A) \vee B$

$\equiv \neg A \vee B$ (2.2)

(2.1)+(2.2) [RES on B] $\neg A$ (3)

(3) +(1.1) [RES on A] $\neg B$ (4)

A y B son falacius.

Ejercicio 2:

Consider the text:
"There are only two formats for photos: round and square. Photos are either color or black and white. Let me tell you about the photo I found yesterday. If the photo is square, then it is a black and white picture. If it is round, it is a digital color picture. If the photo is digital or in black and white, then it is a portrait. If it is a portrait, then it is a picture of my friend"

a) Build a knowledge base to represent the statements about the photo the author of the previous text found yesterday.
Use the atoms A,B,C,D,E,F,G

Atom	Elementary statement about the world
A	The photo is in color
B	The photo is in black and white
C	The photo is square
D	The photo is round
E	The photo is digital
F	The photo is a portrait
G	The photo is a picture of my friend

World facts (known to be True in our world)	Wff
1. There are only two formats for Photos: round and square	$\neg D \Leftrightarrow C \equiv (C \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D) \equiv (C \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg C)$
2. Photos are either color or black and white	$\neg B \Leftrightarrow A \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$
3. If the photo is square, then it is a black and white picture.	$C \Rightarrow B$
4. If it is round, it is a digital color picture	$D \Rightarrow (E \wedge A)$
5. If the photo is digital or in black and white, then it is a portrait	$(B \vee E) \Rightarrow F$
6. If it is a portrait, then it is a picture of my friend	$F \Rightarrow G$

b) Using inference, can you answer the author's question: Is the photo I found yesterday the picture of my friend?

By contradiction. We incorporate $\neg G$ to the knowledge base
$\{C \vee D, \neg C \vee \neg D, A \vee B, \neg A \vee \neg B, \neg C \vee B, \neg D \vee E, \neg D \vee A, \neg B \vee F, \neg E \vee F, \neg F \vee G, \neg G\}$

We apply resolution

1. From $\{\neg F \vee G, \neg G\}$ we infer by resolution $\{\neg F\}$
2. From $\{\neg B \vee F, \neg F\}$ we infer by resolution $\{\neg B\}$
3. From $\{\neg E \vee F, \neg F\}$ we infer by resolution $\{\neg E\}$

4. From $\{\neg D \vee E, \neg E\}$ we infer by resolution $\{\neg D\}$
5. From $\{C \vee D, \neg D\}$ we infer by resolution $\{C\}$
6. From $\{\neg C \vee B, C\}$ we infer by resolution $\{B\}$
7. From $\{\neg B, B\}$ we infer by resolution $\{\square\}$ Contradiction

Therefore the photo is a picture of my friend.

Ejercicio 3:

Formaliza las siguientes frases en lógica de predicados, definiendo con anterioridad los predicados y las funciones necesarios y los ámbitos de las variables utilizadas [adaptado de Rosen]

$x, y, z \in R$ (reales)

3.1 “El producto de dos números reales negativos es positivo”

$$\forall x \forall y\ [\text{Negativo}(x) \wedge \text{Negativo}(y) \Rightarrow \text{Positivo}(\text{producto}(x,y))]$$

3.2 “La diferencia de un número real consigo mismo es cero”

$$\forall x\ \text{Igual}(\text{resta}(x,x),0)$$

3.3 “Todos los números reales positivos tienen exactamente dos raíces cuadradas”

$$\forall x\ [\text{Positivo}(x) \Rightarrow \exists z_1 \exists z_2\ [\text{Igual}(x,\text{producto}(z_1,z_1)) \wedge \text{Igual}(x,\text{producto}(z_2,z_2)) \wedge \neg(\text{Igual}(z_1,z_2)) \wedge \forall z_3[\text{Igual}(x,\text{producto}(z_3,z_3)) \Rightarrow (\text{Igual}(z_3,z_1) \vee \text{Igual}(z_3,z_2))]]]$$

3.4 “Un número negativo no tiene una raíz cuadrada que sea un número real”

$$\forall x\ [\text{Negativo}(x) \Rightarrow [\neg\exists z_3\ \text{Igual}(x,\text{producto}(z_3,z_3))]]$$

3.5 “Todos y cada uno de los estudiantes de esta clase se han matriculado exactamente en dos cursos de matemáticas en esta escuela”

$x \in$ {personas}

$c_i \in$ {cursos de matemáticas de esta escuela}

$$\forall x\ \text{EstudianteClase}(x) \Rightarrow [\exists c_1 \exists c_2\ [\text{Matriculado}(x,c_1) \wedge \text{Matriculado}(x,c_2) \wedge \neg\text{Igual}(c_1,c_2) \wedge \forall c_3\ [\text{Matriculado}(x,c_3) \Rightarrow (\text{Igual}(c_3,c_1) \vee \text{Igual}(c_3,c_2))]]]$$

3.6 “Alguien ha visitado todos los países del mundo, excepto Libia”

$x \in \{personas\}$

$p \in \{países\}$

Hay ambigüedad

“Alguien ha visitado todos los países del mundo, excepto Libia, país que no ha visitado”

$$\exists x\ [\forall p\ \ [\neg Igual(p,Libia) \Leftrightarrow Visitado(x,p)]\ ]$$

“Alguien ha visitado todos los países del mundo, excepto Libia, país que no sabemos si ha visitado o no”

$$\exists x\ [\forall p\ \ [\neg Igual(p,Libia) \Rightarrow Visitado(x,p)]\ ]$$

3.7 “Nadie ha escalado todas las montañas del Himalaya”

$x \in \{personas\}$

$m \in \{montañas\}$

$$\neg\exists x\ [\forall m\ [Himalaya(m) \Rightarrow Escalado(x,m)]]$$

3.8 “Todos los actores españoles han estado en una película con Carmen Maura o han actuado en una película con alguien que ha actuado con Carmen Maura”

$x \in \{persona\}$

$$\forall x\ [Actor(x) \wedge Español(x) \Rightarrow [HaActuadoCon(x,CM) \vee \exists y[HaActuadoCon(x,y) \wedge HaActuadoCon(y,CM)]]]$$

Ejercicio 4: Expresa la cuantificación $\exists! x\ P(x)$ "Existe un único x con la propiedad P" utilizando cuantificadores universales, existenciales y conectores de la lógica formal.

SOLUCIÓN:

$$\exists x\ [P(x) \wedge \neg\exists y\ [P(y) \wedge \neg Igual(y,x)]] \equiv$$
$$\exists x\ [P(x) \wedge \forall y\ [P(y) \Rightarrow Igual(y,x)]]$$

Ejercicio 5:

Dada la ontología para árboles

Variables: x,y,z... (dominio: nodos)

Predicados o relaciones: $Raiz^1$, $Interno^1$, $Hoja^1$, $Hijo^2$, $Padre^2$, $Hermano^2$, $Antecesor^2$, $Sucesor^2$

Funciones: $padreDe^1$

Los superíndices indican el número de argumentos que toma la función o predicado correspondiente.

Ejemplo:

- El predicado "Padre(A,B)" toma el valor de verdad *Verdadero* si el nodo "A" es el nodo padre del nodo "B" .
- Suponiendo que A no es un nodo raiz, padreDe(A) representa el objeto para el cual la relación "Padre(padreDe(A),A)" evalúa siempre a *Verdadero,* etc.

Se puede utilizar la relación de igualdad.

Escribe las siguientes frases como FBFs

a) [Ejemplo] $Padre^2$ y $Hijo^2$ son relaciones inversas. Es decir un nodo es el nodo padre de otro nodo si y solo si el segundo nodo es un nodo hijo del primero

$$(\forall x,y)\ [Padre(x,y) \Leftrightarrow Hijo(y,x)]$$

b) Un nodo raíz se caracteriza por no tener un nodo padre.

$$(\forall x)\ [Raiz(x) \Leftrightarrow [\neg(\exists y)\ Padre(y,x)]]$$

c) Si existe, el padre de un nodo dado es único.

$$(\forall x,y,z)\ [[Padre(y,x) \wedge Padre(z,x)] \Rightarrow (y=z)]$$

d) Dos nodos hermanos son dos nodos distintos que tienen un mismo nodo padre.

$$(\forall x,y)\ [Hermano(x,y) \Leftrightarrow [(x \neq y) \wedge (padreDe(x)=padreDe(y))]]$$

e) Un nodo es antecesor de otro nodo si o bien el primer nodo es el padre del segundo nodo o bien el primer nodo es antecesor del padre del segundo nodo.

$(\forall x,y)\ [Antecesor(x,y) \Leftrightarrow [Padre(x,y) \vee Antecesor(x,padreDe(y))]]$