TEMA 1 ARITMÉTICA FINANCIERA

1.- VALOR TEMPORAL DEL DINERO

Sustitución del trueque → más cómodo
Moneda → estándar, fiable, certificado
Patrón oro → 1ª Guerra Mundial (Breton-Woods)

El tiempo es clave: "1 € hoy no vale lo mismo que 1 € dentro de un año".

Capital M, lo prestamos durante un periodo (ej: 1 año)

$M \xrightarrow{\text{tiempo}} M + \text{intereses}$ tipo de interés

$M \longrightarrow M + M \cdot r = M(1+r)$

Comentario 1: Papel de la inflacción (IPC)

Tasa de inflacción → I
Tipo de interés → r

Tenemos una unidad de una cierta mercancía, que hoy cuesta 100. Dentro de un año costará $100(1+I)$.

→ Vendemos mercancía → recibimos 100
→ prestamos a un año → dentro de un año recibimos $100(1+r)$
→ ahora podemos comprar $\frac{1+r}{1+I}$ unidades de mercancía

$$1 \longmapsto \frac{1+r}{1+I} = \boxed{1 + \text{TIPO REAL}}$$

tipo nominal

tasa inflacción

A partir de ahora, ignoraremos inflacción.

Comentario 2: Tipos de interés negativos

¿Los intereses no eran compensación?
→ Coste de almacenaje

A partir de ahora, ignoraremos intereses negativos.

Comentario 3: Recuento de tiempo

En muchas ocasiones: período 0 — T
se devengan intereses, con un cierto tipo de interés.
En finanzas, la unidad básica es el año. ¿Bisiestos? ¿3 meses?

→ Se establecen convenios de fechas.
→ 30/360
→ real/real [...]
→ real/360

A partir de ahora, ignoraremos el conv. de fechas.

Comentario 4: Magnitud de tipos de interés.

r, tipo anual del orden 2%, 3%, ...

usura → tipos fuera de mercado
→ condiciones leoninas

1% → 0'01
1'23% → 0'0123

↳ puntos básicos ‰ 0'01%
0'0001
bps/pbs
"pipos"

Ejemplo: "alza del 1% en los tipos"

3% → 4% (absoluta)
3% → 3'03% (relativa) } ¿cuál?

alza de 10 pipos: 3% → 3'03% claramente

2.- Reglas de capitalización

Contrato en el que se prescriben pagos de intereses sobre un capital. Se especifican:

- → unidad de tiempo τ (1 año, trimestral, ...)
- → tipo de interés R (ó r) (%, tantos por 1, ...) asociado τ.
- → frecuencia de capitalización m. (habitualmente divisor de 12) (quizá $m = \infty$)

$0 \quad \underbrace{\quad}_{\frac{\tau}{m} := \Delta t} \quad \tau \quad 2\tau$

$$t = 0 \longrightarrow C \text{ (capital inicial)}$$

$$t = \frac{\tau}{m} \longrightarrow C\left(1 + \frac{R}{m}\right) = C\left(1 + R\frac{\Delta t}{\tau}\right)$$

$$t = 2\frac{\tau}{m} \longrightarrow C\cdot\left(1 + \frac{R}{m}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$t = \tau \longrightarrow C\cdot\left(1 + \frac{R}{m}\right)^m$$

$$\vdots$$

$$t = 2\tau \longrightarrow C\cdot\left(1 + \frac{R}{m}\right)^{2m}$$

Ejemplos:

1. 3% anual, composición anual $\longrightarrow \tau = 1, \; m = 1$

   C — 1: $C(1'03)$ — 2: $C(1'03)^2$ ...

2. 2'5% semestral, frec. semestral $\longrightarrow \tau = \frac{1}{2}, \; m = 1$

   $m = 1$

   C — $1/2$: $C(1'025)$ — 1: $C(1'025)^2$

3. Tengo 900€. Quiero 1000€ dentro de dos años. ¿tipo interés?

   a) anual, frec. anual

   $900 \quad 900(1+R) \quad 900(1+R)^2 = 1000 \longrightarrow R = 5'409\%$

   b) anual, frec. semestral

   $900 \quad 900\left(1+\frac{R}{2}\right) \cdots \quad 900\left(1+\frac{R}{2}\right)^4 = 1000 \longrightarrow R = 5'338\%$

   c) semestral, frec. mensual

   $900 \quad 900\left(1+\frac{R}{6}\right)^6 \cdots \quad 900\left(1+\frac{R}{6}\right)^{24} = 1000 \longrightarrow R = 2'64$

4 Capitalización continua τ, m R

$$1 \longrightarrow \left(1+\frac{R}{m}\right)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} e^R$$

En general

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & t \\ 1 & \longrightarrow & e^{\boxed{Rt}} \end{array}$$

Rt → tipo continuo

Comentarios

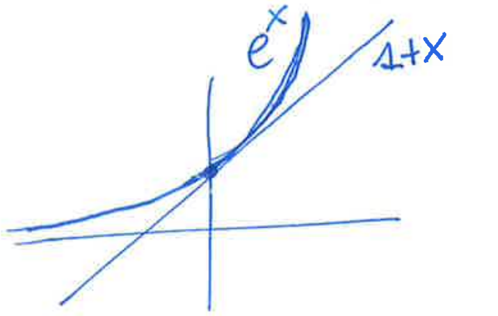
- → los tipos continuos son muy matemáticos son buenos para modelos, cómodos pero no son de mercado (no se usan).
- → se "componen" bien

$$\underbrace{0 \xrightarrow{R1} 1 \xrightarrow{R2} 2}_{¿R?}$$

cont.: $1 \longrightarrow e^{R_1} \longrightarrow e^{R_1+R_2} = e^{\overbrace{2\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)}^{=R}}$

simple: $1 \longrightarrow 1+R_1 \longrightarrow (1+R_1)(1+R_2) = (1+\tilde{R})^2$ despejamos $\tilde{R}$ (difícil)

Comparación:



$$1+R \leq \left(1+\frac{R}{m}\right)^m \leq e^R$$

$$\begin{cases} e^x \geq 1+x, & x\in\mathbb{R} \\ (1+x)^n \geq 1+nx & \forall n\geq 1 \\ \text{(Bernoulli)} & \forall x \geq -1 \end{cases}$$

$R_{simple} > R_{continuo}$ (a igual capitalización)

3.- TASA ANUAL EQUIVALENTE (TAE)

AER
annual equivalent rate

¿Cómo comparar reglas de capitalización?

Medida homogénea para comparar.

Regla de capitalización, miras a 1 año.

$C \longmapsto C\cdot\alpha$ ← incluye comisiones

$C \longmapsto C\cdot(1+\text{TAE})$

Ejemplo 1: $R = 3\%$, anual/anual
$\tau = 1 \quad m = 1$

$1 \longmapsto 1+R$
$ \parallel$
 TAE

Ejemplo 2: $R = 2'5\%$ semestral/semestral
$\tau = 1/2 \quad m = 1$

$0 \quad 1/2 \quad 1$

$C \longmapsto C.1'025 \longmapsto C(1'025)^2 = C(1+\text{TAE})$

Ejemplo 3: $900 \longrightarrow 1000$ € en 2 años

3 reglas de capitalización → R_1, R_2, R_3

¿mismo TAE?

Ejemplo 4: R tipo continuo

$$e^R - 1 = \text{TAE} \Longrightarrow R = \ln(1+\text{TAE})$$

Ejemplo 5: Depósito naranja a 3 meses

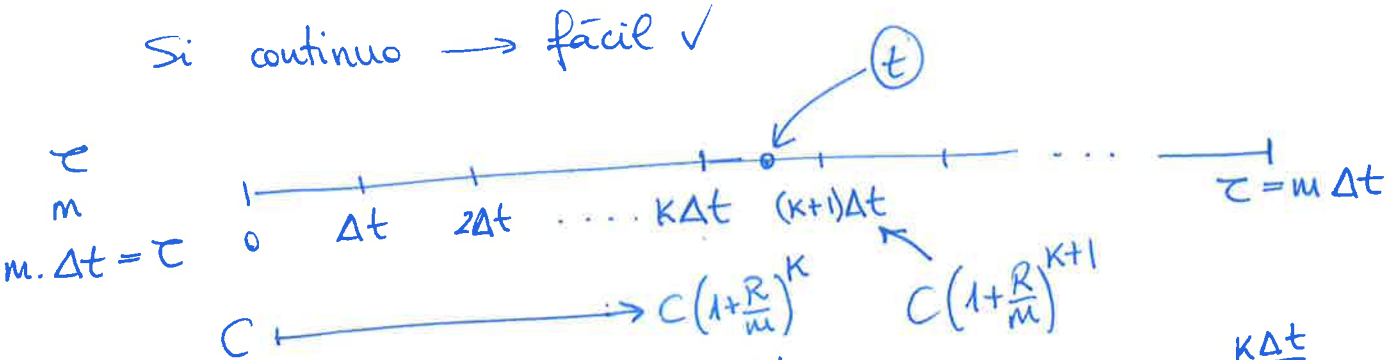
TAE = 2%

¿R tipo nominal anual? $\tau = 1$, $m = 4$

$$1 \longrightarrow 1+\frac{R}{4}$$
$$\hookrightarrow \left(1+\frac{R}{4}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{R}{4}\right)^4 = 1 + \text{TAE}$$

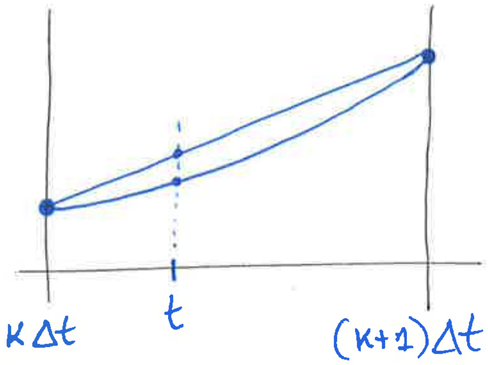
4.- FECHAS INTERMEDIAS

Si continuo $\longrightarrow$ fácil ✓



$$C\left(1+\frac{R}{m}\right)^K = C\left(1+R\frac{\Delta t}{\tau}\right)^{\frac{K\Delta t}{\Delta t}} = C\left(1+R\frac{\Delta t}{\tau}\right)^{m\frac{K\Delta t}{\tau}}$$

$$C\left(1+\frac{R}{m}\right)^{K+1} = \cdots = C\left(1+R\frac{\Delta t}{\tau}\right)^{m\frac{(K+1)\Delta t}{\tau}}$$



Lineal: $C\left(1+\frac{R\Delta t}{\tau}\right)^K\left(1+R\frac{t-K\Delta t}{\tau}\right)$

Exponencial: $C\left(1+R\frac{\Delta t}{\tau}\right)^{m\frac{t}{\tau}}$

5.- Un par de CÁLCULOS ÚTILES (fórmulas)

a) Suma de una progresión geométrica:

$b \neq 0, \quad M < N$

$$b^M + b^{M+1} + \cdots + b^N = \sum_{j=M}^{N} b^j = \begin{cases} N-M+1 & \text{si } b=1 \\ \frac{P-UR}{1-R} = \frac{b^M - b^{N+1}}{1-b}, & b \neq 1 \end{cases}$$

Casos particulares:

a.1) $b \neq 1$ $\quad \sum_{j=1}^{N} b^j = \frac{b-b^{N+1}}{1-b} \qquad \sum_{j=0}^{N} b^j = \frac{1-b^{N+1}}{1-b}$

a.2) $|b| < 1$ $\quad \sum_{j=0}^{\infty} b^j = \frac{1}{1-b} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} b^j = \frac{b}{1-b}$

a.3) $b = \frac{1}{1+R}$ $\quad \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{1+R}\right)^j = \frac{\frac{1}{1+R}-\left(\frac{1}{1+R}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{1-R}} = \underbrace{\frac{1}{R}\left(1-\frac{1}{(1+R)^N}\right)}_{\text{notación}} := a_{\overline{N|}R}$

b) Ec. en recurrencia lineal de primer orden

$$(c_n)_{n=0}^{\infty}$$

$$\begin{cases} c_0 & \\ c_n = \alpha c_{n-1} + \beta, & n \geq 1 \end{cases} \qquad \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$$

Iteración:

$$c_n = \alpha c_{n-1} + \beta = \alpha(\alpha c_{n-2} + \beta) + \beta =$$

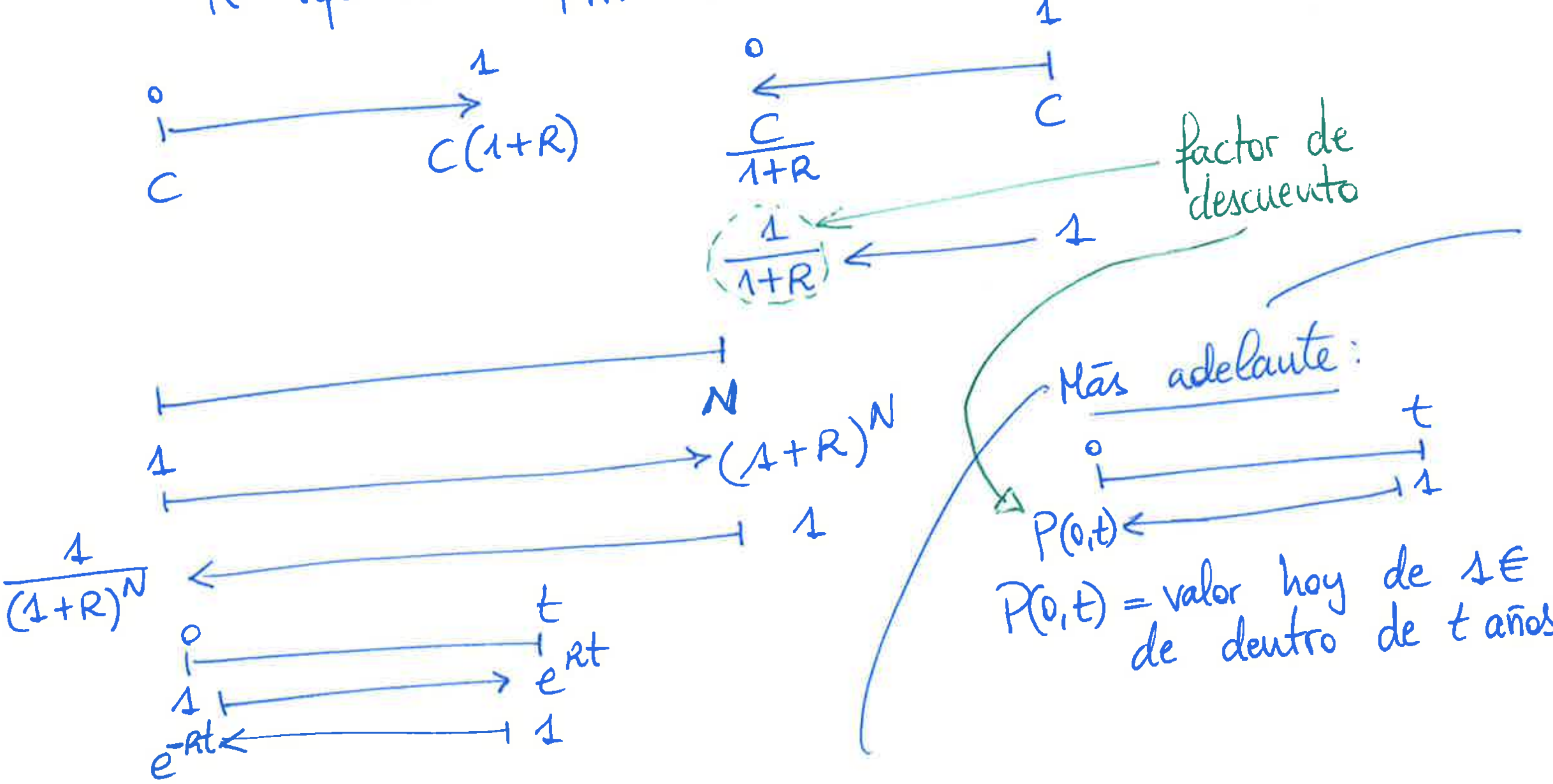
$$= \alpha^2 c_{n-2} + \alpha\beta + \beta = \alpha^3 c_{n-3} + \alpha^2\beta + \alpha\beta + \beta =$$

$$= \cdots = \alpha^n c_0 + \beta \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j =$$

$$= \begin{cases} c_0 + \beta n, & \text{si } \alpha = 1 \\ \underbrace{c_0 \alpha^n + \beta \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}_{= \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha^n\left(c_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)}, & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

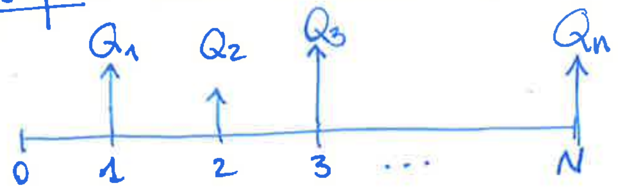
6. – DESCUENTOS / VALORES ACTUALES

R tipo anual $\begin{cases} \tau = 1 \\ m = 1 \end{cases}$

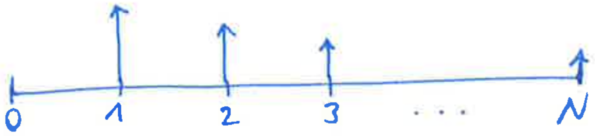


$P(0,t)$ = valor hoy de 1€ de dentro de t años

Ejemplo: valor actual de rentas futuras



R tipo anual



$$V_{actual} = \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j}{(1+R)^j}$$

- Si $Q_j = Q$: $V_{actual} = Q \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(1+R)^j} = Q \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+R)^N}}{R} \equiv Q \cdot a_{\overline{N}|R}$

- Si $Q_j = Q$, renta diferida:

$$V_{actual} = Q \sum_{j=M}^{N} \frac{1}{(1+R)^j} = Q\left[a_{\overline{N}|R} - a_{\overline{N-1}|R}\right]$$

- Renta vitalicia, $Q = cte.$, $N = \infty$

$$V_{actual} = Q \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+R)^j} = \frac{Q}{R}$$

Ejemplo: Bono (bond) con cupones (coupons)

Nominal $\longrightarrow$ 100

Cupón $\longrightarrow$ 3% sobre nominal　　　Tipo R

Vencimiento $\longrightarrow$ N años

$$V_{actual} = Nom. Q \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(1+R)^j} + \frac{Nom}{(1+R)^N} = (\star)$$

$V_{actual} = Nom$

¿Cuál sería el cupón para que el bono esté "a la par"?

$Nom = (\star)$

Ejemplo: En general

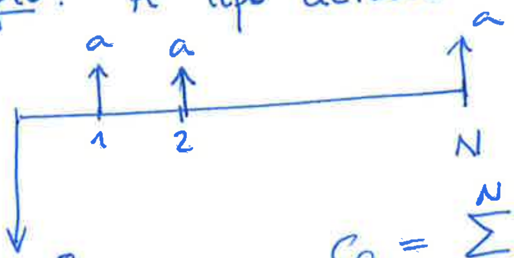
flujos Q_1 — Q_N

en tiempos t_1 — t_N (en años)

R tipo anual

$$V_{actual} = \sum_{j=1}^{N} Q_j \frac{1}{(1+R)^{t_j}}$$

Ejemplo: R tipo actual



¿C_0?

$$C_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{a}{(1+R)^j} = \frac{a}{R}\left(1 - \frac{1}{(1+R)^N}\right)$$

Análisis alternativo: $C_0, C_1, \dots, C_N$ — queremos que esto sea cero

$$C_n = C_{n-1}(1+R) - a \qquad n \geq 1$$

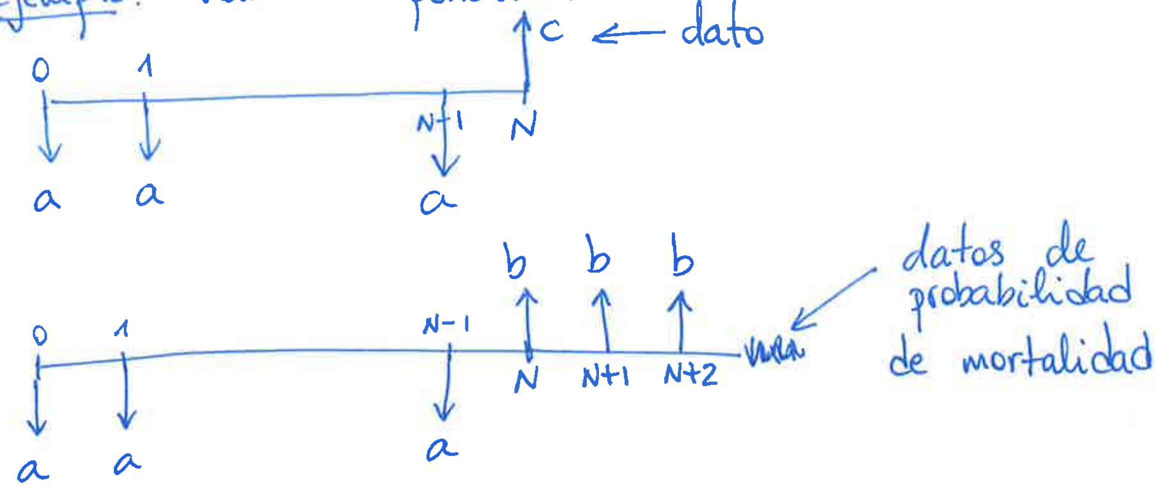
$\Downarrow$ recurrencia de primer orden

$$C_n = C_0(1+R)^n - a\,\frac{1-(1+R)^n}{-R} \qquad n \geq 1$$

$\Downarrow$

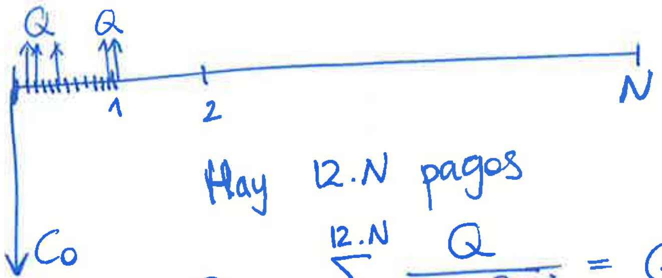
$$C_N = C_0(1+R)^N + a\,\frac{1-(1+R)^N}{R} = 0 \longrightarrow \text{despejamos } C_0$$

Ejemplo: Plan de pensiones



7.- HIPOTECA: "Sistema francés de amortización" (cuota fija)

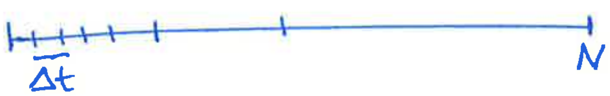
- Se toma prestado C_0
- Se acuerda un plazo de N años.
- Frecuencia de pago de intereses m $(m=12)$
- R tipo anual



Hay $12 \cdot N$ pagos

$$C_0 = \sum_{j=1}^{12 \cdot N} \frac{Q}{\left(1+\frac{R}{12}\right)^j} = Q\, a_{\overline{12N}|R/12}$$

Análisis general



$C_n :=$ capital pendiente de amortizar en mes n

$Q_n :=$ cuota del mes n

$$\longrightarrow \begin{cases} I_n = \text{destinada a intereses} \\ A_n = \text{destinada a amortización} \end{cases}$$

Datos: C_0, N, m, R

$$\begin{cases} C_n = C_{n-1}\left(1+\frac{R}{12}\right) - Q_n, & n \geq 1 \\ C_0 \leftarrow \text{dato} \end{cases}$$

De la cuota Q_n $\left\{ \begin{array}{l} I_n = C_{n-1}\frac{R}{12} \\ A_n = Q_n - \frac{R}{12}C_{n-1} \end{array} \right.$

$C_{12N} \equiv 0$

<u>CASO 1</u>: Cuota fija $Q_n = Q$. ¿ A_n, I_n, C_n ?

$$C_n = C_0(1+R)^n - Q\frac{1-\left(1+\frac{R}{12}\right)^n}{1-\left(1+\frac{R}{12}\right)} = C_0(1+R)^n - Q\frac{12}{R}\left(1-\left(1+\frac{R}{12}\right)^n\right)$$

$C_{12N} \equiv 0 \longrightarrow$ despejas Q = fórmula de antes

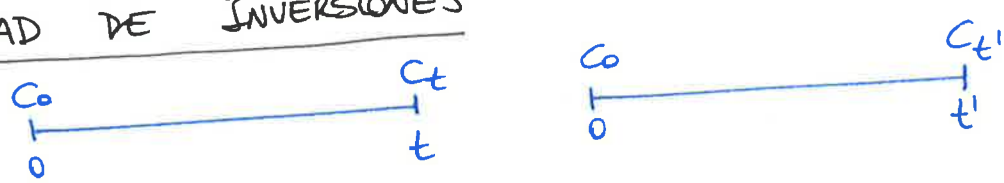
Fórmulas para $\begin{cases} I_n = \frac{R}{12}C_{n-1} \\ A_n = Q - I_n \end{cases}$

<u>CASO 2</u>: (ejercicio hecho en Excel) $\quad A_n = \underset{C_0/12N}{\overset{\shortparallel}{A}}$ (amortización fija)

¿ Q_n, I_n, C_n ?

8.- RENTABILIDAD DE INVERSIONES

Inversión



Rentabilidad "R" $\longrightarrow$ tiene que ver con C_0, C_t, t

Dos medidas naturales (sirven para comparar):

- Rentabilidad simple: $R_s = \frac{1}{t}\left(\frac{C_t - C_0}{C_0}\right) \longleftrightarrow C_t = C_0(1+R_s t)$
- Rentabilidad continua: $R_c = \frac{1}{t}\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right) \longleftrightarrow C_t = C_0 e^{R_c t}$

<u>Comentarios</u>:

1. $R_c < R_s$
2. Carteras $\longrightarrow$ dos inversiones $\left\{ \begin{array}{l} C_0 \longrightarrow C_T \text{ en tiempo } T: \quad R_C = \frac{1}{T}\left(\frac{C_T - C_0}{C_0}\right) \\ D_0 \longrightarrow D_T \text{ en tiempo } T: \quad R_D = \frac{1}{T}\left(\frac{D_T - D_0}{D_0}\right) \end{array} \right.$

Cartera $\longrightarrow$ inversión C + inversión D

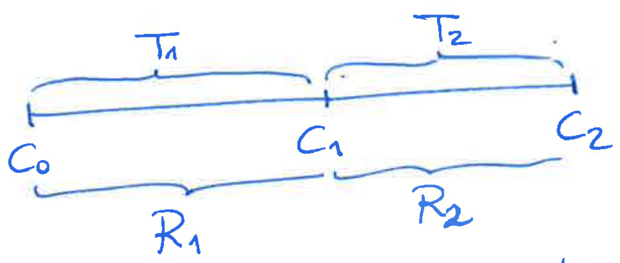
$$R_{\text{cartera}} = \frac{1}{T}\left[\frac{C_T + D_T - C_0 - D_0}{C_0 + D_0}\right] = \underbrace{\frac{C_0}{C_0+D_0}}_{\text{pesos}} R_C + \underbrace{\frac{D_0}{C_0+D_0}}_{\text{pesos}} R_D$$

Con rentabilidades continuas

$$R_C = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{C_T}{C_0}\right) \qquad R_D = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{D_T}{D_0}\right)$$

$$R_{\text{cartera}} = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{C_T + D_T}{C_0 + D_0}\right) = \text{ups!}$$

Dos plazos:

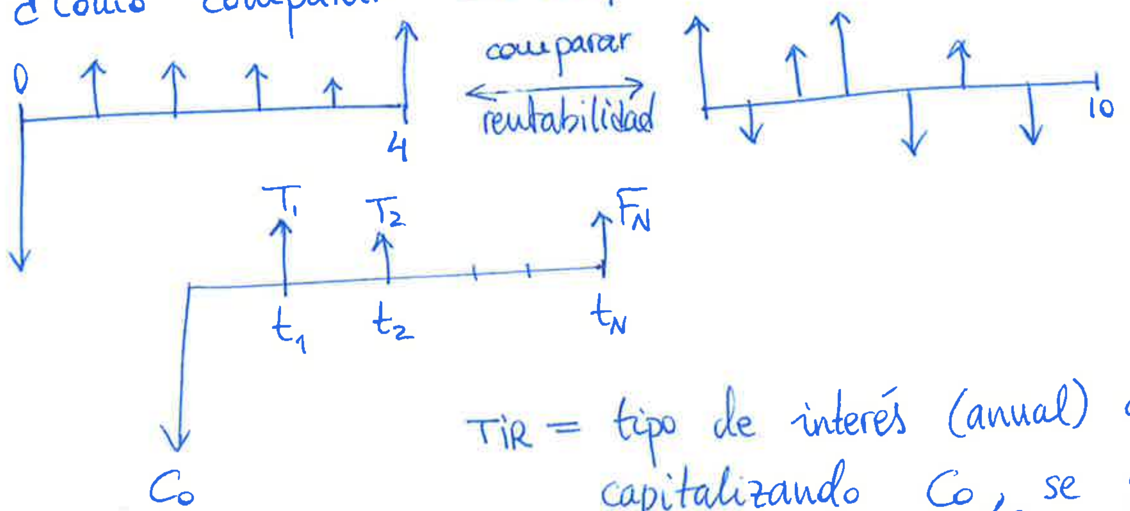


$$R_1 = \frac{1}{T_1}\ln\left(\frac{C_1}{C_0}\right) \qquad R_2 = \frac{1}{T_2}\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

$$R = \frac{1}{T_1+T_2}\underbrace{\ln\left(\frac{C_2}{C_0}\right)}_{\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\cdot\frac{C_1}{C_0}\right)} = \cdots = \underbrace{\frac{T_1}{T_1+T_2}}_{\text{pesos}} R_1 + \underbrace{\frac{T_2}{T_1+T_2}}_{\text{pesos}} R_2$$

9.— TASA INTERNA DE RENDIMIENTO (TIR/IRR)

¿Cómo comparar dos esquemas de inversión?



TIR = tipo de interés (anual) al que, capitalizando C_0, se generan exactamente los flujos $F_1, \dots, F_N$ en tiempos $t_1, t_2, \dots, t_N$.

$$C_0 \xmapsto[t_1]{} C_0(1+TIR)^{t_1} \begin{cases} \nearrow F_1 \\ \searrow C_1 = C_0(1+TIR)^{t_1} - F_1 \end{cases}$$

$$C_1 \xmapsto[t_2]{} C_1(1+TIR)^{t_2-t_1} \begin{cases} \nearrow F_2 \\ \searrow C_2 = C_1(1+TIR)^{t_2-t_1} - F_1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$C_N \longmapsto C_{N-1}(1+TIR)^{t_N - t_{N-1}} - F_N \equiv 0$$ le pedimos esto

TIR es tal que $\displaystyle C_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{F_j}{(1+TIR)^{t_j}}$

TIR ≡ tipo (anual) con el que, descontando los flujos, se tiene el valor inicial.

- → la definición es indirecta
- → TIR es el cero de una función $\displaystyle f(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{F_j}{(1+x)^{t_j}} - C_0$

grado $N \Rightarrow$ solver/numérico

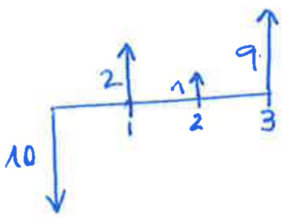
<u>Definición general</u>

Ingresos $F_1, \dots, F_N$ en tiempos $t_1, \dots, t_N$

Gastos $G_1, \dots, G_M$ en tiempos $s_1, \dots, s_M$

TIR sería tal que $\displaystyle \sum_{j=1}^{N} \frac{F_j}{(1+TIR)^{t_j}} = \sum_{j=1}^{M} \frac{G_j}{(1+TIR)^{s_j}}$

Ejemplo 1 :



TIR = x

Hay que resolver : $\displaystyle 10 = \frac{2}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{9}{(1+x)^3}$

se podría hacer a mano pero... ⟶ numérico

10. – CÁLCULOS ACTUARIALES

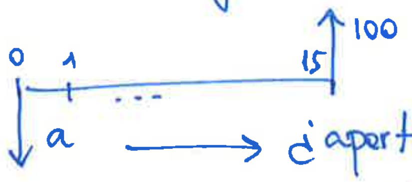
→ Seguros de vida, pensiones, siniestros, etc.

→ Probabilidad, grandes números, TLC...

Ejemplo 1: tenemos 50 años

queremos recibir 100 € a los 65 años.

entidad garantiza $R = 3\%$ anual



→ ¿aportación hoy?

a) Cada uno por su cuenta:

$$a_{solo} = \frac{100}{(1+R)^{15}} = 64'19 \text{ €}$$

b) N personas (N grande)

Enfoque "mutua"

Sólo reciben los supervivientes.

Miramos tablas de mortalidad → probabilidad de sobrevivir 15 años si tenemos 50

→ $\underline{90\%}$.

Para N grande → suponemos que las leyes de los grandes números se cumplen exactamente.

A vencimiento, la entidad pagaría $N \cdot 0'9 \cdot 100$

$$\cancel{N} \cdot a_{mutua} = \frac{\cancel{N} \cdot 0'9 \cdot 100}{(1+R)^{15}} \longrightarrow a_{mutua} = 57'76 \text{ €}$$

Recordatorio

$X_1, \ldots, X_N$ var. aleatorias (pagos a los mutualistas $X_i = \begin{cases} 0 & \text{con } p \\ 100 & \text{con } 1-p \end{cases}$)

$Z_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \longrightarrow$ pago total

$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_i) \underset{\text{"iguales"}}{=} N.\mu$ ← media común

$V(Z_N) \underset{\text{si incorr.}}{=} \sum_{i=1}^{N} V(X_i) \underset{\text{si iguales}}{=} N\sigma^2$

Si todo i.i.d. $\longrightarrow$ todo OK

¿Cómo es Z_N? $\longrightarrow$ ups

N pequeño

N grande, X_i son "idénticas"
X_i son independientes

TLC $\quad \dfrac{Z_N - \mathbb{E}(Z_N)}{\sigma(Z_N)} \overset{d}{\approx} \mathcal{N}(0,1)$

Volvemos al ejemplo: $X = \begin{cases} 100 & \text{con } 90\% \\ 0 & \text{con } 10\% \end{cases}$

$\mathbb{E}(X) = 90 \qquad V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1000 - 810 = 190$

$Z_N = X_1 + \cdots + X_N$ pago total

$\mathbb{E}(Z_N) = N.90 \qquad V(Z_N) = N.\sigma^2 \qquad \sigma(Z_N) = \sigma\sqrt{N}$

Cálculo:

$$\mathbb{P}\left(Z_N > a_{mutua} \cdot N. (1+R)^{15}\right) = 1\%$$

$$\mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\frac{Z_N - 90N}{\sigma\sqrt{N}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)} > \underbrace{\frac{a_{mutua} \cdot N \cdot (1+R)^{15} - 90N}{\sigma\sqrt{N}}}_{(\star)}\Bigg) = 1\%$$

$$\Longrightarrow 1\% = 1 - \Phi(\star)$$

$$\frac{a_{mutua} \cdot N \cdot (1+R)^{15} - 90N}{\sigma\sqrt{N}} = \Phi^{-1}(99\%) \approx 2'3263$$

$$\hookrightarrow a_{mutua} = 58'21 \text{ €} \quad \left(\begin{array}{l} \text{con } N = 1000 \\ R = 3\% \end{array} \right)$$

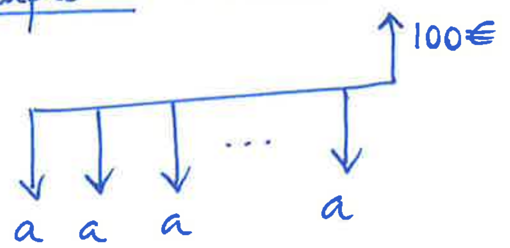
Comentario sobre hipótesis:

- $\rightarrow$ N "grande", bueno
- $\rightarrow$ idénticas — Lyapunov / Lindeberg-Feller
- $\rightarrow$ independencia

$$X_i = \begin{cases} 100, & 90\% \\ 0, & 10\% \end{cases} \qquad X_1, \dots, X_N \text{ correlación } 100\%$$

$$Z_N = \sum X_i = \begin{cases} 100N, & 90\% \\ 0, & 10\% \end{cases} \qquad \times$$

Ejemplo 2: Mutua de ahorro



R garantizado

a) Individual:

$$a(1+R) + a(1+R)^2 + \dots + a(1+R)^{15} = 100 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sum_{j=1}^{15} (1+R)^j}$$

b) Mutua: N individuos

Datos: Π_j = prob. de estar vivo tras j años si hoy tienes 50 años.

j	0	1		15
π_j	100%	99'5%	...	0

C_k = capital acumulado hasta año k.

$C_0 = N.a = \pi_0 . N . a$

$C_1 = C_0(1+R) + \pi_1 N a$

$\vdots$

$C_{14} = C_{13}(1+R) + \pi_{14} \cdot N \cdot a$

$C_{15} = C_{14}(1+R)$

Por otro lado, $C_{15} = 100 . N . \pi_{15}$

$$\Rightarrow C_{15} = N . a . \sum_{j=1}^{14} \pi_j (1+R)^{15-j} = 100 . N . \pi_{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\uparrow \atop a_{mutua}}{a} = 100 . \frac{1}{\sum_{j=0}^{15} \frac{\pi_j}{\pi_{15}} (1+R)^{15-j}}$$

Comparar con $a_{solo} = 100 . \frac{1}{\sum_{j=1}^{15} (1+R)^j}$

Ejemplo 3 : Seguro de vida a plazo

- Tienes 50 años
- Si mueres hoy y los 80 años tus herederos reciben 100 €
- se aporta $\underline{a}$ cada año

posibles fechas de pago (pagas a final de año si no mueres)

→ si vivo pagas a

→ si no, familia recibe 100

① Enfoque individual

¿ prima a ? $a = 100$, cada año !

② Enfoque mutua

N, grande
Leyes de los grandes números se cumplen exactamente
R, rentabilidad anual

Datos:

Π_j = prob. de que un ind. 50 años siga vivo tras j años

$j = 0, \dots, 30.$

$\delta_0 = 0$, δ_j = prob. de fallecer entre $50+j-1$ y $50+j$

$j = 1, \dots, 30.$

$\delta_j = \Pi_{j-1} - \Pi_j$

C_k = valor del fondo justo después de año k.

$$C_0 = N.a.\Pi_0$$

$$C_1 = C_0(1+R) - N.\delta_1.100 + N.a.\Pi_1 =$$

$$= C_0(1+R) + N(a\Pi_1 - 100\delta_1)$$

$$\vdots$$

$$C_k = C_{k-1}(1+R) + N(a\Pi_k - 100\delta_k)$$

$$\vdots$$

$$C_{29} = C_{28}(1+R) + N(a\Pi_{29} - 100\delta_{29})$$

$$C_{30} = C_{29}(1+R) - 100N\delta_{30}$$

$$C_{29} = N\sum_{j=0}^{29}(a\Pi_j - 100\delta_j)(1+R)^{29-j}$$

$$C_{30} = N\sum_{j=0}^{29}(a\Pi_j - 100\delta_j)(1+R)^{30-j} - 100N\delta_{30}$$

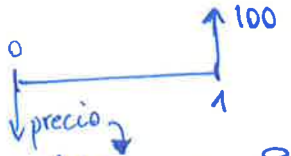
$$C_{30} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a = 100\,\frac{\sum_{j=0}^{30}\delta_j(1+R)^{30-j}}{\sum_{j=0}^{29}\Pi_j(1+R)^{30-j}} \approx 0'5\,€$$

11.- CURVA CUPÓN CERO. TIPOS IMPLÍCITOS

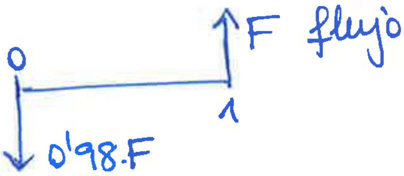
Ejemplo: En el mercado se negocia un bono (sin cupones) a 1 año de nominal 100



Se cotiza a 98 €

Esto quiere decir que 1 € de dentro de un año vale hoy 0'98 €. $\Rightarrow$ 0'98 es el factor de descuento.

¿Por qué?



Hay un contrato que promete un flujo de F euros dentro de un año.

Precio es x ⟵ debe ser $x = 0'98.F$

demostración

→ Si fuera $x < 0'98.F$

Para facilitar el cálculo, supongamos $x = 0'95.F$

Formamos cartera:

	hoy	1 año
compro 1 contrato	pago $0'95.F$	recibo F
vendo $\frac{0'95}{0'98} \cdot \frac{F}{100}$ unidades de bono	recibo $\frac{0'95}{0'98} \cdot \frac{F}{100} \cdot 98$	pago $\frac{0'95}{0'98} \cdot \frac{F}{100} \cdot 100$
NETO	0	$F\left(1 - \frac{0'95}{0'98}\right) > 0$

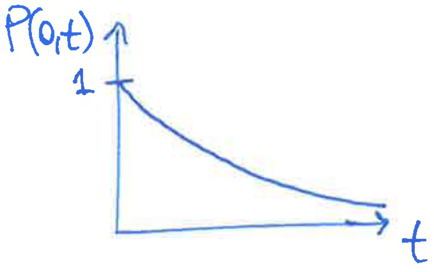
¡oportunidad de arbitraje!

→ Si fuera $x > 0'98F$: $\Rightarrow$ $x = 1'2F$.

Cálculo análogo.

Suponiendo que se negociarán en el mercado bonos como a todos los plazos t, tendríamos descuentos a todos los plazos:

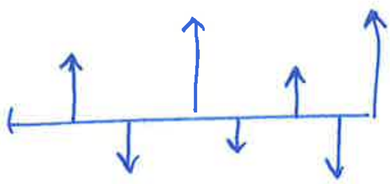
$$t \longmapsto P(0,t) \qquad t > 0$$



En la práctica:

- No se negocian tantos bonos con estas características.
- Hay otros instrumentos (depósitos, FRAS, swaps, etc.) de los que se pueden deducir esos factores de desc.
  → + interpolación

tecnología + artesanía



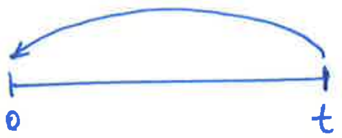
valorar por descuento de flujos

A) Traducción a tipos de interés (Spot)

SIMPLES

↙

$R_s(0,t)$



$$P(0,t) = \frac{1}{1 + t\,R_s(0,t)} \iff \boxed{R_s(0,t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{P(0,t)} - 1\right)}$$

CONTINUOS

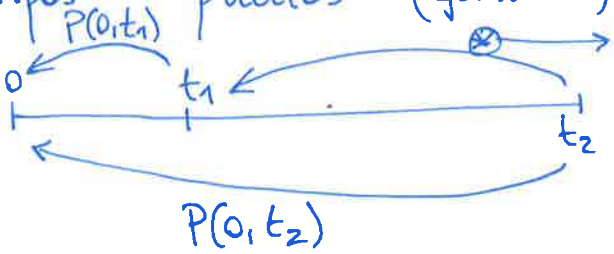
↙

$R_c(0,t)$

$$P(0,t) = e^{-t R_c(0,t)} \iff \boxed{R_c(0,t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{P(0,t)}\right)}$$

<u>Obs</u>: $R_s(0,t) > R_c(0,t)$

B) Tipos implícitos (forward)



$\otimes \longrightarrow$ factor de descuento

Notación:

$$\boxed{P(0,t_1,t_2) \overset{t_1<t_2}{=} \frac{P(0,t_2)}{P(0,t_1)}} \qquad P(0,0,t) = P(0,t)$$

factor de descuento implícito

Traducción a tipos:

$\boxed{\text{SIMPLE}}$ $\quad F_S(0,t_1,t_2)\ :\ F_S(0,0,t) = R_S(0,t)$

$$F_S(0,t_1,t_2) = \frac{1}{1+t_1R_S(0,t_1)}\left[\frac{t_2R_S(0,t_2)-t_1R_S(0,t_1)}{t_2-t_1}\right]$$

$$1 \longrightarrow (1+t_1R_S(0,t_1)) \longrightarrow (1+t_1R_S(0,t_1))(1+(t_2-t_1)F_S(0,t_1,t_2))$$

$t_1 \qquad t_2$

$$\|$$

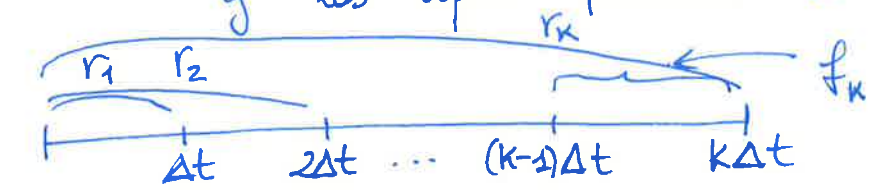
$$1 + t_2R_S(0,t_2)$$

despejamos $F_S(0,t_1,t_2)$

$\boxed{\text{CONTINUO}}$ $\quad F_C(0,t_1,t_2) \longrightarrow R_C(0,t_1),\ R_C(0,t_2)$

$$F_C(0,t_1,t_2) = \frac{t_2R_C(0,t_2)-t_1R_C(0,t_1)}{t_2-t_1}$$

Ejemplo: Relación entre tipos interés (spot) y los tipos forward (caso continuo)



notación

$$f_K = F_c(0, (K-1)\Delta t, K\Delta t)$$

$$r_K = R_c(0, K\Delta t)$$

Diccionario (de $r_K \longrightarrow f_K$):

$$f_K = \frac{K\Delta t \cdot r_K - (K-1)\Delta t \cdot r_{K-1}}{\Delta t} = K r_K - (K-1) r_{K-1}$$

Diccionario (de $f_K \longrightarrow r_K$):

$$f_K + f_{K-1} = K r_K - (K-1) r_{K-1} + (K-1) r_{K-1} - (K-2) r_{K-2} =$$

$$= K r_K - (K-2) r_{K-2}$$

$$f_K + f_{K-1} + f_{K-2} = K r_K - (K-3) r_{K-3}$$

$$\vdots$$

$$f_K + \cdots + f_2 = K r_K - 1 \cdot \underbrace{r_1}_{= f_1}$$

$$\boxed{r_K = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} f_j}$$

r_K es el promedio de los forward.

TEMA 2 INSTRUMENTOS FINANCIEROS

- Instrumento financiero : bonos, acciones, opciones o derivados
- Variable financiera : índice, tipo de interés, IPC, inflación...

NIVEL 0 { Bonos (renta fija) ← precios no fijos
Acciones (renta variable)

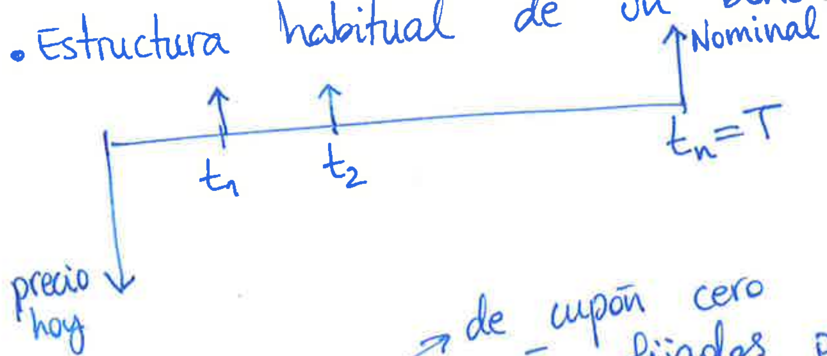
→ Bono: contrato entre dos partes { emisor (vende)
tenedor (compra)

- El **emisor** del bono necesita financiación.
  Habitualmente : estados, comunidades autónomas, empresas
  Recibe dinero **ahora** y paga intereses.
- El **tenedor** del bono : inversores { fondos de inversión
  fondos de pensión
  compañías de seguros
  particulares

  Paga ahora y recibe intereses.

Fondo de pensiones noruego (Oil fund)
200 000 € por hab. y hay 5 millones de noruegos
→ 1 billón de euros.

- Estructura habitual de un bono:



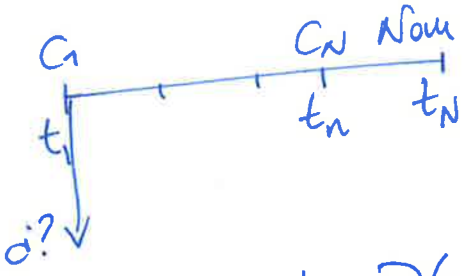
- Existen bonos
  → de cupón cero
  → cupón fijados pero variables
  → perpetuos
  → FRN (floating rate note)
  cupón = euribor + 0'5 %
  → convertibles

- ¿Renta fija? No, tiene riesgo. (de precio, de crédito...)
  ¿De qué depende el precio?
  → estructura del contrato
  → percepción de riesgo de impago

- Caso español: Tesoro

Letras del Tesoro → 1000 €
→ 3, 6, 9, 12 meses
→ se emiten "al descuento"

Bonos y obligaciones → 1000 €
→ 3, 5 años (bonos)
40, ..., 50 años (obligaciones)
→ cupones anuales.



Si dispusiéramos de $P(0,t)$, entonces:

$$\text{precio} \underset{\text{debe}}{=} \boxed{\sum_{j=1} C_j P(0,t_j) + \text{Nom}.\, P(0,t_N)} \quad (\star)$$

Si no fuese ese precio → oportunidad de arbitraje

→ si precio < (★):

vendo bonos cupón cero — nom. C_1, venc. t_1
⋮
nom Nom + C_N, venc. t_N

↓

Recibo (★)

puedo comprar bono (y me sobra)

↓

flujo de cartera es 0.

→ si precio > (★): [...]

NIVEL 0 (cont.)

→ Acción: título por el que se es propietario de un cierto porcentaje de una empresa.
Dan derecho a participar en el gobierno de la empresa.
Derecho a recibir dividendos sobre los beneficios.
Derechos en caso de quiebra (después de los acreedores).

El precio de las acciones se cotiza. Notación:
S_0, cotización hoy
S_t, cotización en tiempo t

Generalmente, a S_t se le da un modelo estocástico.

NIVEL 1: Contratos a plazo (forward contracts)
Es un acuerdo (¡compromiso!) entre dos partes para comprar/vender un cierto bien en un tiempo futuro a un determinado precio de compraventa, que se fija hoy.
(quizá requiera un pago por adelantado (upfront) hoy).

Ejemplos:
1) Agricultor, aceitunas. Precio hoy 100 €.
La cosecha es en 3 meses.
Acuerdo precio de venta para $T = 3$ meses.
Por ejemplo, 95€.
Si en $T = 3$ meses → precio aceitunas 80 €, OK ✓
→ precio aceitunas 110 €, ups ✗

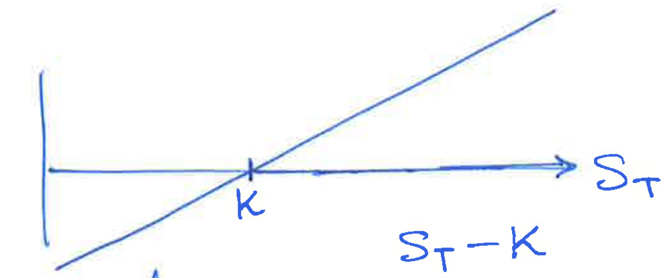
2) Divisa, FX (foreign exchange)
Una empresa pagará 1M USD dentro de 1 año.
Tipo de cambio hoy: 1 € = 1'2 USD.
Acuerdo con un banco: empresa compra 1M USD a 1'3 USD/€ en $T = 1$ año.

3) Tipos de interés.

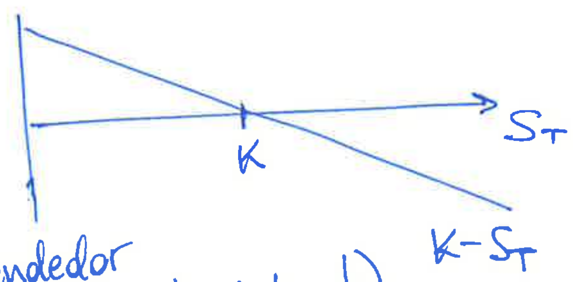
Necesitaré 1M € dentro de un año para devolverlos un año después. Tipo hoy ⟶ 0'4 % (simple, anual).
Acuerdo para fijar $R = 0'6\,\%$.

- Flujo (payoff) del contrato

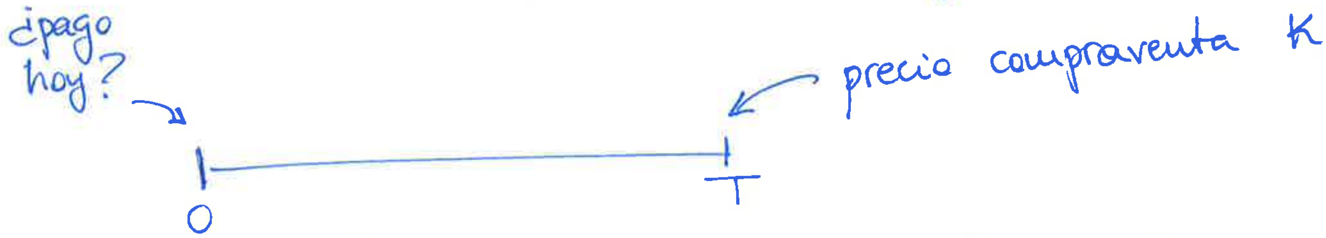
conocidos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vencimiento } T \\ \text{precio compraventa } K \\ S_0, \text{ precio del bien hoy} \\ ¿S_T?, \text{ precio del bien en } T. \end{array} \right.$



comprador
(posición larga/long)



vendedor
(posición corta/short)



habitual: fijar K para que pago hoy = 0

Hipótesis
- sin costes de transacción
- sin impuestos
- sin oportunidades de arbitraje (hipótesis básica)
- se conoce $P(0,T)$ ← quizás se escribe e^{-rT}

Datos
- T ⟶ plazo
- S_0 ⟶ precio bien hoy
- K ⟶ precio compraventa

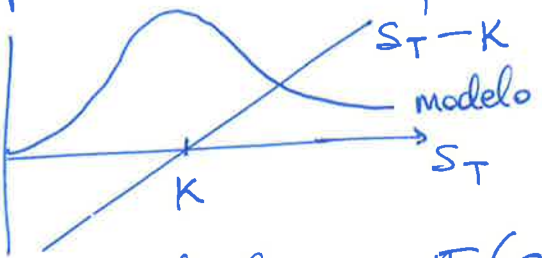
Objetivo: dado $K \longrightarrow$ ¿pago hoy?

Establecer K para que pago hoy 0

$\longrightarrow$ posible enfoque (tentador):

El flujo del contrato es $S_T - K$

Proponer un modelo probabilista para S_T



Calculamos $\mathbb{E}(S_T - K)$ "flujo medio"

$$\boxed{\text{precio hoy} = P(0,T) \cdot \mathbb{E}(S_T - K)}$$

Problema: ¿quién pone el modelo?

$\longrightarrow$ Enfoques reales:

(1) Contrato forward sobre bienes de inversión (acciones, materias primas, ...)

A) Caso sencillo: el bien no genera ingresos/gastos entre 0 y T.

Analizamos primero la cuestión de fijar K $= F_0$ para que precio hoy $= 0$

$$\boxed{F_0 = S_0 \cdot \frac{1}{P(0,T)}} \longrightarrow S_0 \text{ capitalizado}$$

Argumento:

$\hookrightarrow$ si $F_0 > S_0 \dfrac{1}{P(0,T)}$

hoy: 1. pido S_0 € prestados
2. compro el bien
3. Entro en fwd como vendedor

coste $= 0$

en T: 1. vendo el bien a precio F_0.
2. Devuelvo $S_0 \cdot \dfrac{1}{P(0,T)}$

oportunidad arbitraje $\leftarrow$ ¡gano diferencia!

RECUERDO

0 — T

¿precio? (en 0)

precio compraventa K del bien que se compra/vende (en T)

1) Hallar K para que precio hoy = 0

$K = F_0$

$$F_0 = S_0 \cdot \frac{1}{P(0,T)}$$

S_0: cotización del bien hoy

Argumento: no arbitraje

$\rightarrow F_0 > S_0 \frac{1}{P(0,T)}$

Mercado $\begin{cases} \text{bien} \\ \text{dinero} \\ \text{contrato forward} \end{cases}$

$\rightarrow F_0 < S_0 \frac{1}{P(0,T)}$

hoy	en tiempo T
- pido prestada acción	- recibo $S_0 \frac{1}{P(0,T)}$
- vendo S_0	
- presto a plazo T	- compro el bien a precio F_0
- entro en es fwd (precio hoy 0, y precio compraventa F_0) como comprador.	- la devuelvo → sobra!!
coste = 0	

2) Segundo caso, general

0 — T

¿precio? (en 0)

K, dato (en T)

Mercado $\begin{cases} \text{bien} \\ \text{bono } B_T \end{cases}$

Argumento: replicación + no arbitraje

Caso general

$0 \longrightarrow T$

¿precio? (en 0) — K, dato (en T)

Mercado $\begin{cases} \text{bien} \\ \text{bono } B_T \end{cases}$

Argumento: replicación + no arbitraje

Hoy

- vendo K unidades de B_T
- compro 1 unidad del bien

$\hookrightarrow$ coste $= K\,P(0,T) - S_0$

$\quad\;\; /\!/$

precio del contrato fwd

en tiempo K

- pago K
- vendo el bien $\rightarrow S_T \rightarrow$

$\rightarrow S_T - K$ = flujo de la cartera =

= flujo del contrato fwd

Conclusión:

$$\boxed{\text{precio forward}_K = K\,P(0,T) - S_0}$$

obs: Si buscas K tal que precio $= 0$:

$$K_{esp} = F_0 = S_0 \frac{1}{P(0,T)}$$

Ejemplo: comprar oro en $T = 1$ año.

cotización $S_0 = 100$ €/onza

tipo de interés anual continuo $r = 2\%$

a plazo 1 año.

$\nearrow$ precio compraventa si no hay pago hoy:

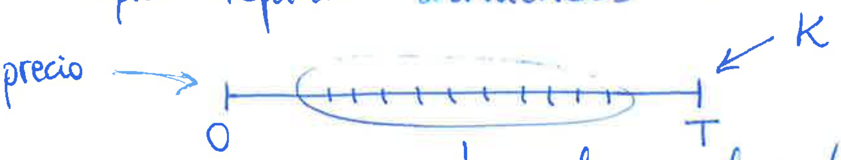
$$K_{esp} = F_0 = 100 \cdot e^{2\% \cdot 1} = \_\_\_\_ \text{ lo que de.}$$

$\searrow$ precio compraventa si $K = 110$.

$$\text{precio forward}_{K=110} = 110 \cdot e^{2\% \cdot 1} - 100 > 0$$

$$\text{precio forward}_{K=90} = 90 \cdot e^{2\% \cdot 1} - 100 < 0$$

B) El bien produce pagos intermedios: una acción que reparte dividendos entre 0 y T.



↳ el poseedor del bien recibe pagos.

Llamamos I = valor hoy de esos flujos

- Caso 1: encontrar $K = F_0$ para que precio hoy sea 0.

$$F_0 = (S_0 - I)\frac{1}{P(0,T)}$$

$$\text{Si} \quad F_0 > \frac{S_0 - I}{P(0,T)}$$

Hoy	en tiempo T
- pido S_0 prestado a plazo T.	- devuelvo $S_0/P(0,T)$
- compro acción, entro en fwd como vendedor (precio hoy 0, precio compraventa F_0)	- de la acción he recibido $I/P(0,T)$
	- vendo acción a precio F_0.

↳ sobra dinero!

Ejemplo: Bien con gastos intermedios

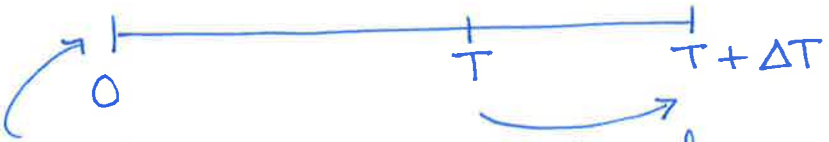
u = valor hoy de esos gastos > 0

$$F_0 = (S_0 + u)\frac{1}{P(0,T)}$$

Ejercicio: Si el dato es K, ¿precio?

DEFINICIÓN: FORWARD RATE AGREEMENT (FRA)

Contrato que permite asegurarse un tipo de interés (que se fija hoy) para prestar / pedir prestado un cierto nominal en un tiempo futuro a cierto plazo.



¿precio?

K tipo de interés a prestar en este plazo.

Datos: T, $T+\Delta T$
nominal
tipo de interés K ⟶ simple y anual

→ una parte paga en $T+\Delta T$ intereses sobre el nominal con tipo K.

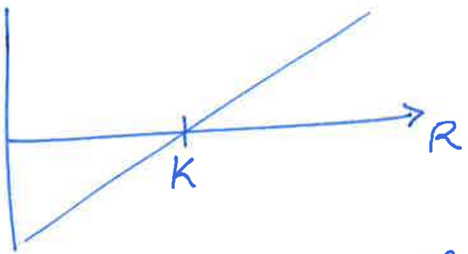
→ la otra parte paga en $T+\Delta T$ intereses sobre el nominal con tipo $R_s(T, T+\Delta T)$.

miramos el tipo de mercado (simple, anual) que $T+\Delta T$ se aplica a plazo ΔT
⟶ $R_s(T, T+\Delta T)$
↑
desconocida

¿pago por adelantado en función de K?

¿K para que pago hoy $= 0$?

Flujo / Payoff en un FRA (desde el punto de vista de la parte que paga fijo K y recibe variable R)



$$\text{Nom.}\,\Delta T \cdot R - \text{Nom.}\,\Delta T \cdot K = \boxed{\text{Nom.}\,\Delta T\,(R-K)}$$

en tiempo $T+\Delta T$

¿cuánto cuesta hoy?

Usos

- como apuesta
- tenemos 100 € para prestar en $T=1$, hasta $T+\Delta T = 3/2$

opción 1: espero a $T=1$

observo $R_S(1, 3/2)$

presto en tiempo $\frac{3}{2}$, recibo $100 \cdot \left(1+\frac{1}{2} R_S(1,\frac{3}{2})\right)$

problema, desconozco $R_S(1, 3/2)$

opción 2: (usamos FRA) digamos que el FRA con precio hoy $=0$ tiene $K=F$.

- entro hoy en FRA recibiendo fijo
- al llegar a $T=1$, presto los 100 € al tipo $R_S(1, 3/2)$
- En $T+\Delta T = 3/2$, recibo $100\left(1+\frac{1}{2}R_S(1,3/2)\right)$

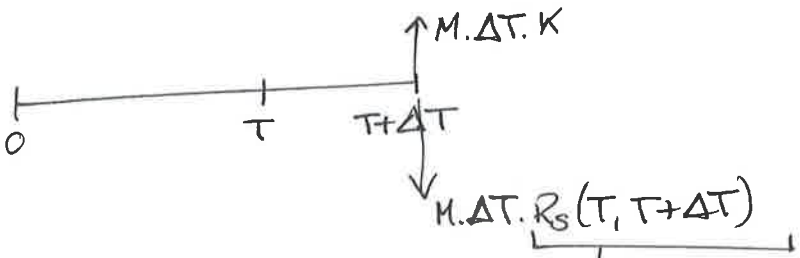
el FRA me paga $100 \cdot \frac{1}{2}\left(F - R_S(1, 3/2)\right)$

---

recibo $\underbrace{100 \cdot \left(1+\frac{1}{2}F\right)}_{\text{sin incertidumbre}}$

$\Rightarrow$ he prestado a tipo fijo (F) !

RECUERDO :



flujo: $M.\Delta T(R-K)$ en $T+\Delta T$

$\underbrace{R_S(T, T+\Delta T)}$ → desconocido

T
$T+\Delta T$
Nominal $= M$
Tipo del FRA $= K$

Mercado: Bonos cupón cero B_T y $B_{T+\Delta T}$, nominal 1

Sus precios hoy $P(0,T)$ y $P(0,T+\Delta T)$.

Argumento: replicación + ausencia de oportunidad de arbitraje.

Hoy

- Formamos cartera:
  - Compramos B_T de nominal M.
  - Vendemos $B_{T+\Delta T}$ de nominal $M(1+\Delta T \cdot K)$

En tiempo T

- Recibimos M € del bono, que prestamos $T \to T+\Delta T$ a tipo de interés de mercado: $R_s(T, T+\Delta T)$

En tiempo $T+\Delta T$

- Recibimos $M \cdot (1+R_s(T,T+\Delta T) \cdot \Delta T)$
- Pagamos $M \cdot (1+\Delta T \cdot K)$

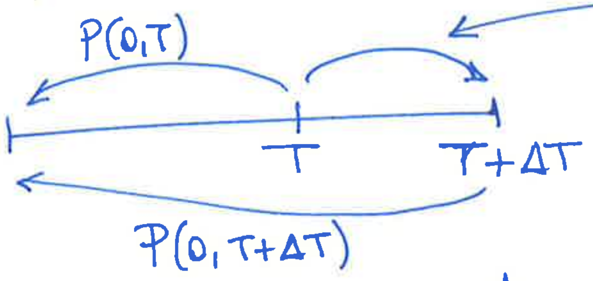
$M \cdot \Delta T (R_s(T,T+\Delta T) - K)$

Como los flujos coinciden, sus precios hoy deben coincidir.

¿Coste cartera? $\boxed{M P(0,T) - M(1+K \cdot \Delta T) \cdot P(0,T+\Delta T)}$ PRECIO FRA

Si queremos precio FRA $=0$, despejamos K de antes:

$$K_{especial} = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{P(0,T)}{P(0,T+\Delta T)} - 1\right) \equiv F_s(0,T,T+\Delta T)$$



$$\frac{1}{P(0,T)}(1+\Delta T \cdot F_s) = \frac{1}{P(0,T+\Delta T)}$$

El tipo implícito (fwd) para $T \to T+\Delta T$ es justamente el que hace que el FRA valga 0 hoy.

Nota: Hoy en día esto ya no es así. Los FRAs son los instrumentos de mercado (no los bonos)

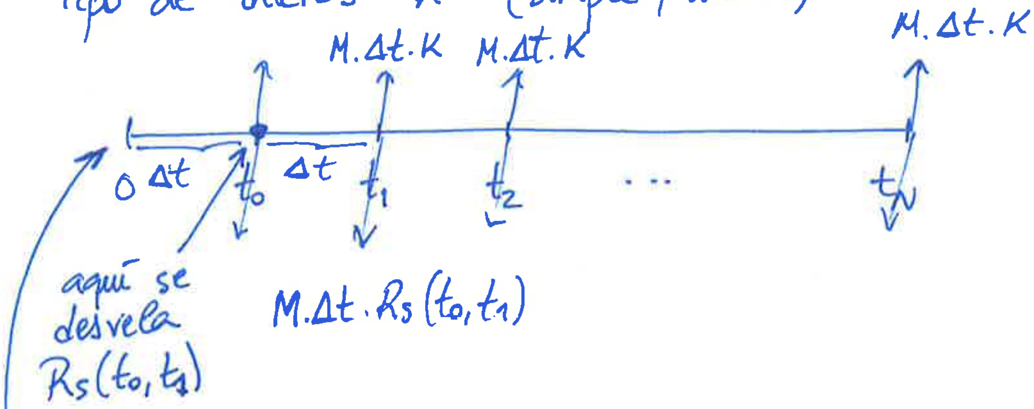
$\hookrightarrow$ de aquí se sacan los tipos implícitos.

DEFINICIÓN: SWAPS

Nominal $= M$

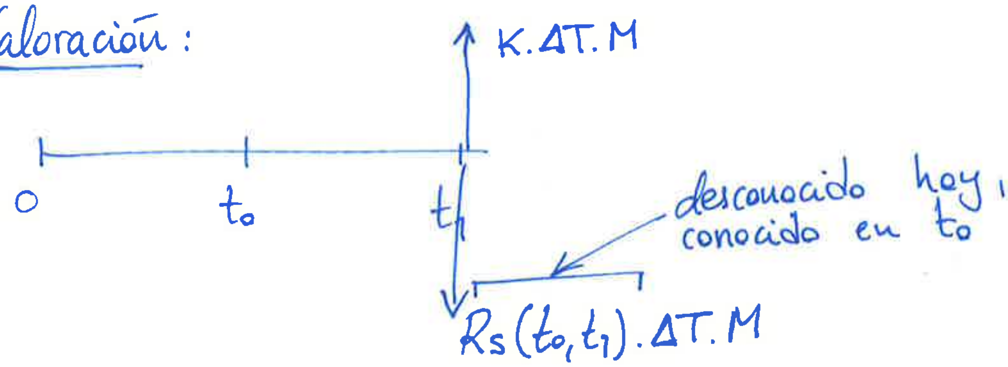
Fechas $= t_0, t_1, \dots, t_N$ habitualmente equiespaciados (ΔT)

Tipo de interés K (simple, anual)



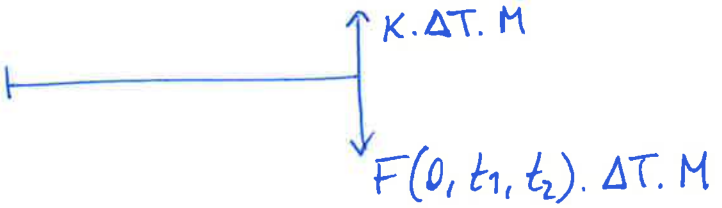
¿precio hoy? O bien, ¿K para que precio hoy $= 0$?

Valoración:



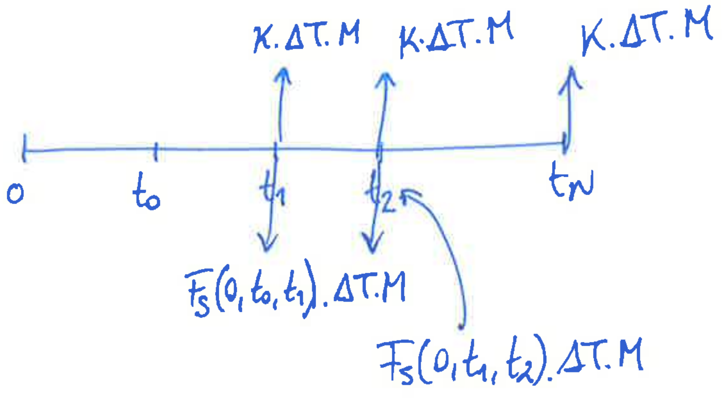
Recibimos fijo y pagamos variable

Añadimos FRA para el periodo $t_0 \longrightarrow t_1$ con coste 0, recibiendo variable y pagando fijo $F(0, t_1, t_2)$



ahora todo es conocido
ya no hay incertidumbre

En general
- $\longrightarrow$ swap (recibiendo fijo)
- $\longrightarrow$ cadena de FRAs (pagando fijo) con coste 0 correspondiente



Valoración pata fija:

$$M.\Delta T.K.\sum_{j=1}^{N} P(0,t_j)$$

Valoración pata variable

$$\boxed{M.\Delta T.\sum_{j=0}^{N-1} F_S(0,t_j,t_{j+1}).P(0,t_{j+1})} =$$

magia

$$= M.\cancel{\Delta T}.\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{\cancel{\Delta t}}\left(\frac{P(0,t_j)}{P(0,t_{j+1})}-1\right)P(0,t_{j+1}) =$$

$$= M.\sum_{j=0}^{N-1}\left(P(0,t_j)-P(0,t_{j+1})\right) =$$

$$= \boxed{M\left(P(0,t_0)-P(0,t_N)\right)}$$

Si queremos tipo K para precio 0:

$$\boxed{K_{especial} = \frac{1}{\Delta T}\cdot\frac{P(0,t_0)-P(0,t_N)}{\sum_{j=1}^{N}P(0,t_j)}}$$

tipo swap $(0, t_0, t_1, \dots, t_N)$

DEFINICIÓN: OPCIONES CALLS/PUTS EUROPEAS

Son contratos que dan derecho a comprar/vender un bien a cierto precio en cierto plazo.

CALL (opción de compra): el poseedor de la call tiene derecho a comprar un cierto subyacente. → precio hoy > 0
- → en tiempo T
- → a precio K

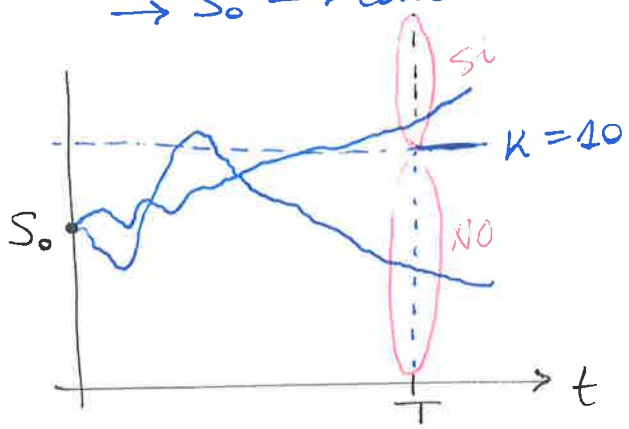
PUT (opción de venta): " .... " vender un cierto subyacente.

Hay dos puntos de vista en cada:

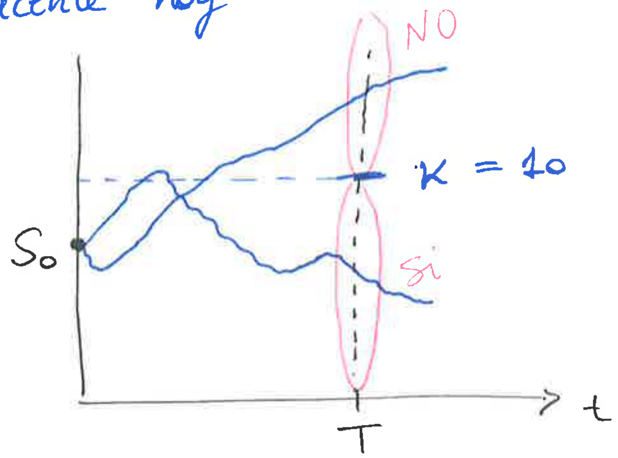
		en T	hoy
call	→ posición larga (compra call)	compra subyacente en T a precio K si quiere	pagará prima
	→ posición corta (vende call)	vende ..... si se lo piden	recibirá prima
put	→ posición larga (compra put)	venderá .... si quiere	pagará prima
	→ posición corta (vende put)	comprará ...... si se lo piden	recibirá prima

Datos: $\boxed{\begin{matrix} K \\ T \end{matrix}}$ contrato de la opción

→ S_0 → cotización del subyacente hoy



CALL



PUT

Usos financieros

1. Como seguro.

Tengo 10000 acciones de TFN (telefónica)

Cotización hoy 3'8 €

Mi cartera hoy vale 38000 €.

Miedo a qué ocurrirá en 1 año.

Querríamos asegurarnos un precio de venta de 4 €.

La put → 1 año, → K = 4 € cuesta 0'3 €

Compro 10000 puts ⟶ gasto 3000 €

⋮ pasa 1 año

- $S_{1\,año} = 5$ €
  - → sin seguro: cartera 50000 € — 32% ↑
  - → con seguro: cartera 50000 € − 3000 € = 47000 € — 24% ↑

- $S_{1\,año} = 2'7$ €
  - → sin seguro: cartera 27000 € — −29% ↓
  - → con seguro: cartera 40000 € − 3000 € = 37000 € — −3% ↓

- $S_{1\,año} = 1'2$ €
  - → sin seguro: cartera 12000 € — −68% ↓
  - → con seguro: cartera 40000 € − 3000 € = 37000 € — −3% ↓

2. Apalancamiento/especulación

TFN hoy 3'8€

Tenemos 38000 €

Creo que va a subir

Estrategia 1: compro 10000 acciones

Estrategia 2: la call con $K = 5€$ y $T = 1$ año

Compro 76000 calls de éstas.

- $S_{1\,año} = 6€$
  - Estr. 1: 60000 € 58% ↑
  - Estr. 2: $76000\,(6-5) = 76000$ € 100% ↑
- $S_{1\,año} = 10€$
  - Estr. 1: 100 000 € 163% ↑
  - Estr. 2: $76000\,(10-5) = 380000$ 900% ↑
- $S_{1\,año} = 4'5€$
  - Estr. 1: 45000 € 18% ↑
  - Estr. 2: 0€ (lo pierdes todo) −100% ↓

Valoración de calls/puts

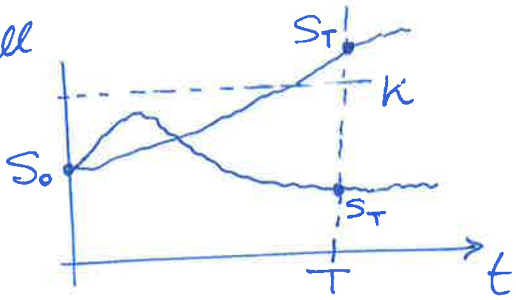
- vencimiento (maturity) : T
- precio de compraventa (strike) : K
- subyacente : S $\to$ S_0, cotización hoy (dato)
  $\to$ S_T, cotización en T. $\to$ r = tipo continuo a plazo T
- precios de call/put $\to$ C y P

$$1 \longmapsto e^{rT}$$
$$e^{-rT} \longleftarrow 1$$
$$P(0,T)$$

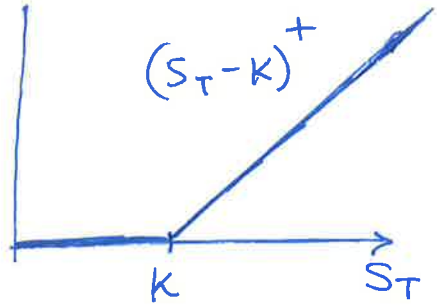
¿Flujos?

Call

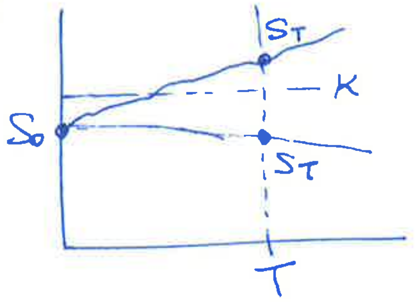
para el poseedor



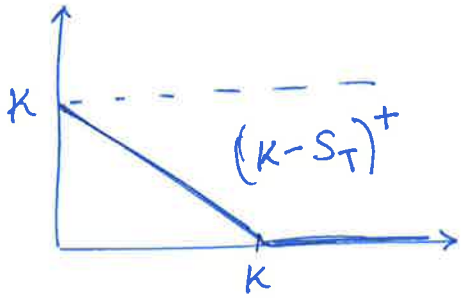
dibujo alternativo $\longrightarrow$



Put



dibujo alternativo $\longrightarrow$



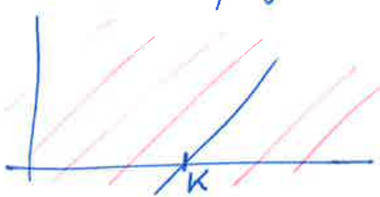
Obs 1 : $P, C > 0$ (flujos son ≥ 0)

Obs 2 : ¿será posible replicar los flujos de la $\begin{cases}\text{call}\\ \text{put}\end{cases}$ con $\begin{cases}\text{subyacente}\\ \text{dinero}\end{cases}$. Es decir, formar cartera

α unidades de subyacente
β unidades de dinero $\longrightarrow$ de manera que pase lo que pase (sea cual sea el nivel S_T) la cartera pague exactamente lo que paga la call.

flujos de la cartera en T.

$$\alpha S_T + \beta e^{rT} \overset{?}{=} (S_T - K)^+$$

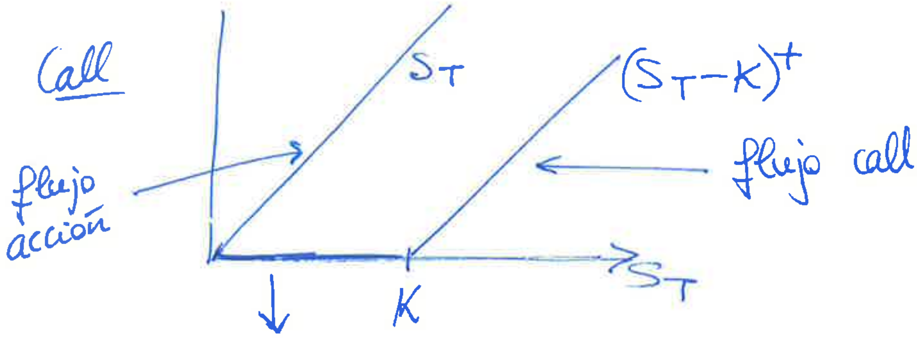


NO

Para valorar call/put (determinar C y P) necesitamos un modelo para S_T (de hecho, modelo sobre S_t $t \in (0,T]$).

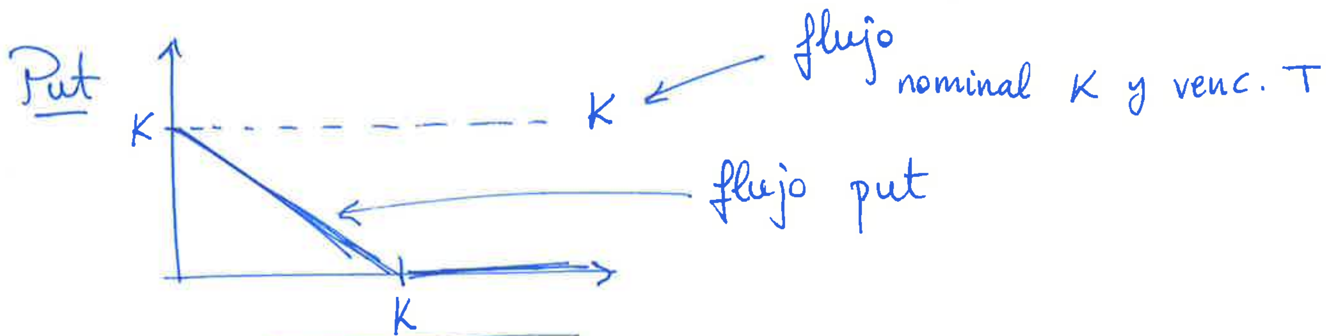
¿Quién lo pone? ¿Cómo conciliar puntos de vista?

Obs 3: cotas superiores



$$\downarrow$$

$$\boxed{C \leq S_0}$$



$$\boxed{P \leq K \cdot e^{-rT}}$$

$$0 \leq C \leq S_0$$
$$0 \leq P \leq Ke^{-rT}$$

Obs 4: cotas inferiores $\quad C, P > 0$

Formamos cartera $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ call, strike } K \text{ y venc. } T \\ Ke^{-rT} \text{ dinero} \end{array} \right.$ $\quad (S_T-K)^+ + K$ $\quad \xrightarrow{S_T>K} S_T \qquad \xrightarrow{S_T<K} K$

¿flujo en T?

$\downarrow$

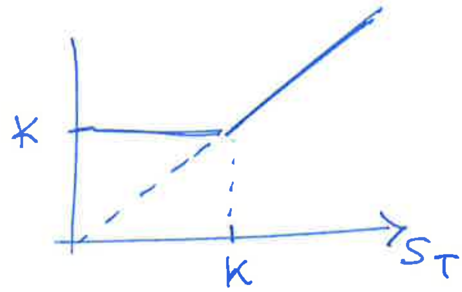
$\geq$ flujo del subyacente S_T

$\Downarrow$

coste formar cartera $\geq S_0$

$\parallel$

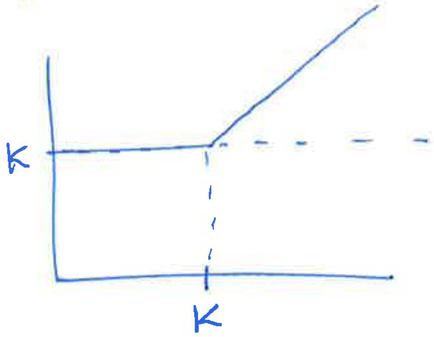
$C + Ke^{-rT}$



$$\boxed{C \geq S_0 - Ke^{-rT}}$$

Put $\quad p \geq 0$

$$\text{cartera} \begin{cases} \text{put} \\ \text{acción} \end{cases} \longrightarrow \overset{\text{flujo en } T}{(K-S_T)^+ + S_T} = \begin{cases} K & \text{si } S_T < K \\ S_T & \text{si } S_T > K \end{cases}$$



flujos cartera $\geq$ flujo del bono cupón cero nom. K y venc. T

$\Big\downarrow$ no arbitraje

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT} \Longrightarrow \boxed{p \geq Ke^{-rT} - S_0}$$

$$\begin{cases} c \geq (S_0 - Ke^{-rT})^+ \\ p \geq (Ke^{-rT} - S_0)^+ \end{cases} \Longrightarrow (S_0 - Ke^{-rT})^+ \leq c \leq S_0$$

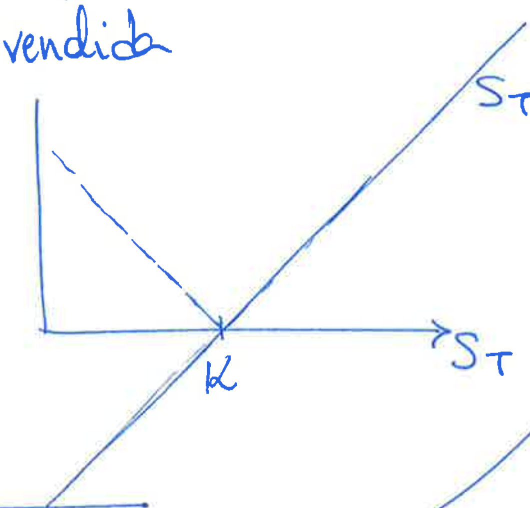
Obs 5: paridad call / put

C y P no son independientes

Argumento:

$$\text{cartera} \begin{cases} \text{call comprada} \\ \text{put vendida} \end{cases}$$

¿flujo?



$S_T - K$, flujo del fwd

$$\boxed{c - p = S_0 - Ke^{-rT}}$$

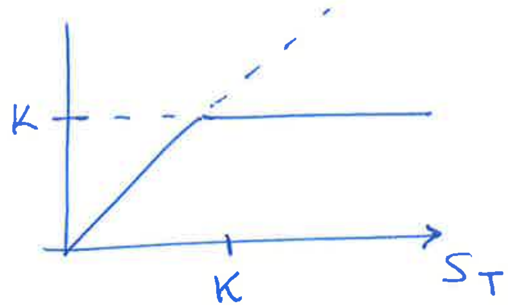
Alternativo:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{put}\\ +\\ \text{acción}\end{array}\right. \longleftarrow \left\{\begin{array}{l}\text{call}\\ Ke^{-rT}\ \text{dinero}\end{array}\right.$$

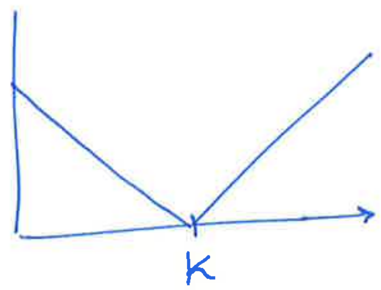
mismos flujos

---

① acción comprada
call K vendida $\longrightarrow S_T - (S_T - K)^+$



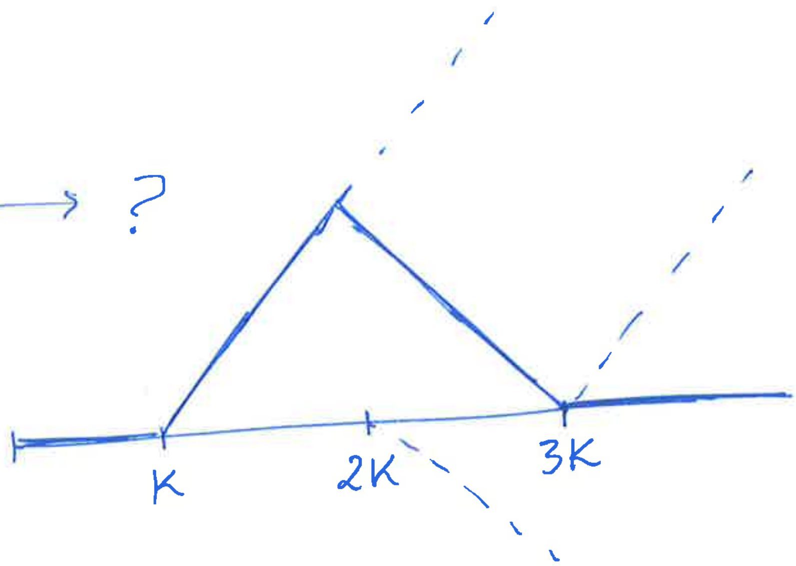
② Call comprada K
put comprada K
↓
fórmula



③ Call comprada K_1
Call vendida K_2 $\Big\} \longrightarrow$?

④ Acción comprada
Put comprada K_1
Call vendida K_2 $\Big\} \longrightarrow$?

⑤ 1 call comprada K
2 call vendidas $2K$
1 call comprada $3K$



TEMA 3 FUNDAMENTOS DE VALORACIÓN DE INSTRUMENTOS FINANZAS

Instrumento financiero

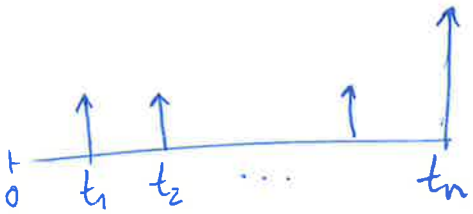
→ Contrato entre dos partes

→ Se estipulan una serie de flujos en fechas futuras (generalmente en función de otras variables finanzas)

Esos flujos suelen ser inciertos → montantes, → fechas de pago

Ejemplos

- Bono con cupones



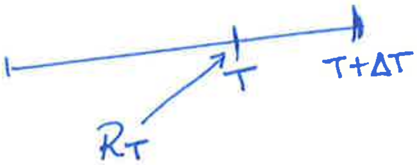
- Forward

flujo en T es $S_T - K$

- Call

flujo en T $(S_T - K)^+$

- FRA

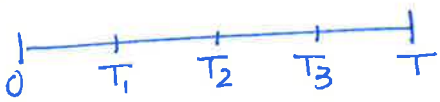


flujo en $T+\Delta T$

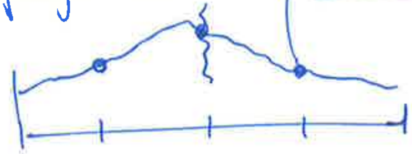
Nom. $\Delta T (R_T - K)$

tipo simple de mercado que se observará en T

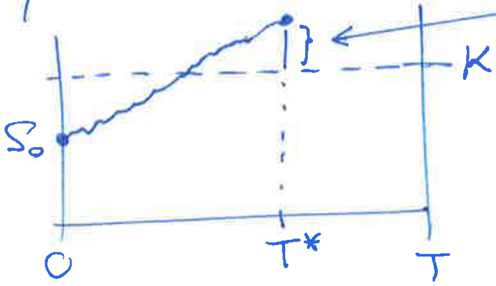
- Opción call asiática



flujo en T $\left(\dfrac{S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3} + S_{T_4}}{4} - K\right)^+$



- Opción call americana



me vale como beneficio → ejerzo derecho en cualquier instante.

flujo: $(S_{T^*} - K)^+$

T^* la "decide" el poseedor de la call

Valorar un instrumento financiero es determinar su precio hoy.
"Debería" ser un "equivalente cierto" de esos flujos futuros/inciertos
En cierto sentido, dar precio es "eliminar" el riesgo.

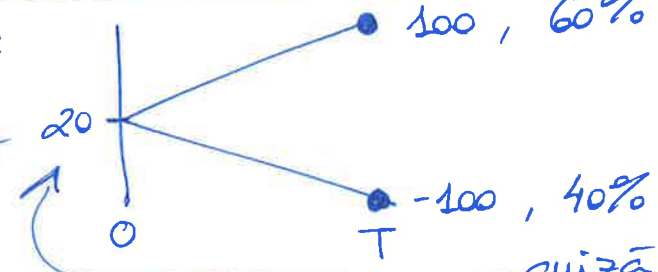
Dos factores $\to$ tiempo —— ccc
$\to$ incertidumbre —— modelo prob.?
—— mercado + gestión?

Idea natural: digamos que el flujo del instrumento en T depende del nivel S_T de un subyacente $S \to$ cierta función $g(S_T)$

Digamos que S_T (modelo) puede tomar un conjunto de valores con ciertas "probs".

$$\boxed{\text{precio} = \sum_{K,\text{valores}} g(K) \cdot \mathbb{P}(S_T = K) \qquad \text{quizá } P(0,T)}$$

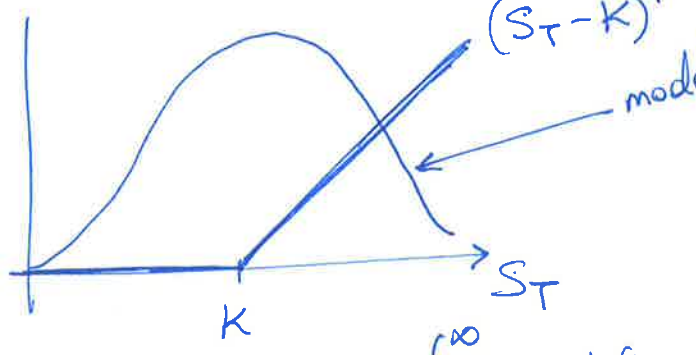
Dos ejemplos:



$100 \cdot 0'6 + (-100) \cdot 0'4 = 20$ ← quizá descontado $P(0,T)$

¿qué significa este 20?

Call



modelo para $S_T \to f_{S_T}(x)$ ← func. de densidad

$$\text{precio} = P(0,T) \int_0^\infty (x-K)^+ f_{S_T}(x)\, dx$$

¿qué significa esto?

1.- PARADIGMA ACTUARIAL

Digamos que X (var. aleat.) representa el flujo del instrumento en cuestión. El experimento aleatorio que describe X se puede repetir, en condiciones idénticas, e independientemente, muchas veces.

Por ejemplo: X es el premio en juego de azar.

X pago por un seguro, con muchos asegurados, todos "iguales", y con decisiones independientes.

$X_1, \dots, X_n$ son v.a. iid clones de X

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$
$$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$$
$$\sigma(X) = \sigma$$

Interesa:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \quad , \quad Z_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

siempre

$$\mathbb{E}(S_n) = n\mu \qquad \mathbb{E}(Z_n) = \mu$$
$$\mathbb{V}(S_n) = n\sigma^2 \qquad \mathbb{V}(Z_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$
$$\sigma(S_n) = \sqrt{n}\cdot\sigma \qquad \sigma(Z_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si n grande, $Z_n \approx$ cte. $= \mu$

¿Cómo son S_n y Z_n? Difícil, salvo $n \to \infty$.

Ej: $X_1, \dots, X_n \sim \text{Ber}(p) \longrightarrow S_n \sim \text{Bin}(n,p)$

$U_1, \dots, U_n \sim \text{Unif}[0,1] \longrightarrow S_n$?? $n=2$, $n=3$

$X_1, \dots, X_n \sim$ dados regulares

$$X = \begin{cases} 1 & 1/6 \\ \vdots & \vdots \\ 6 & 1/6 \end{cases}$$

¿ $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{100} = 321)$?

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

$$\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

Ejemplo: dado regular, 1000 veces

$$X = \begin{cases} 1 & 1/6 \\ \vdots & \vdots \\ 6 & 1/6 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 3'5 \\ V(X) &= 2'92 \\ \sigma(X) &= 1'71 \end{aligned}$$

esperas 3500: $\mathbb{P}(3300 \leq \text{suma total} \leq 3700)$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{3300-3500}{\cdots} \leq \frac{\text{suma} - 3500}{1'71 \cdot \sqrt{1000}} \leq \frac{3700-3500}{\cdots}\right) \approx$$

$$\approx \mathbb{P}(-3'7 \leq N(0,1) \leq 3'7) = 99'979\%$$

Otro ejemplo: seguros

$$X = \begin{cases} 0 \,, & 70\% \\ 10 \,, & 25\% \\ 100 \,, & 5\% \end{cases} \qquad \begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 7'5 \\ V(X) &= \cdots \\ \sigma(X) &= 21'65 \end{aligned}$$

1000 asegurados $\longrightarrow$ esperas 7500 €

$$\mathbb{P}(\text{pago total} \geq 1000 \cdot \text{prima}) \leq 0'1\%$$

Hipótesis: $\longrightarrow$ independencia

$\longrightarrow$ idénticas

$\longrightarrow$ n grande

casi nunca se cumplen en el contexto financiero

2.- PARADIGMA DE VALORACIÓN POR REPLICACIÓN / NO ARBITRAJE

Palabras clave →
- mercado
- valoración relativa
- carteras
- replicación
- no arbitraje
- interpolación

- ¿Cómo se valora una casa?
- ¿Cuál es la montaña más alta del mundo?

  Everest 8848 m (nivel del mar)

  Mauna Kea

  Chimborazo

  Kilimanjaro

Ejemplo: tiempo 0 — tiempo T

Mercado → dos activos → dinero, subyacente

Objetivo: valorar otro activo

Dos estados en T → up, down

tiempo 0	tiempo T (up)	tiempo T (down)	
1	1'1	1'1	dinero
10	12	7	activo ↳ incertidumbre
?	5	−3	

UP / DOWN

Asignamos probabilidades → p a up, → 1−p a down.

$$? \leftarrow \text{precio} = \frac{1}{1'1}\left(5p - 3(1-p)\right)$$

Alternativo: cartera $\begin{cases} \alpha \text{ de dinero} \\ \beta \text{ de activo} \end{cases}$

paga en T → si up: $\alpha \cdot 1'1 + \beta \cdot 12 = 5$

→ si down: $\alpha \cdot 1'1 + \beta \cdot 7 = -3$

buscamos α y β.

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{-71}{5 \cdot 1'1} \approx -12'91 \; ; \; \beta = \frac{8}{5}$$

esta cartera replica, pase lo que pase, los flujos del contrato.

Coste de esa cartera $= \frac{8}{5} \cdot 10 - 12'91 \cdot 1 = 3'09$ €

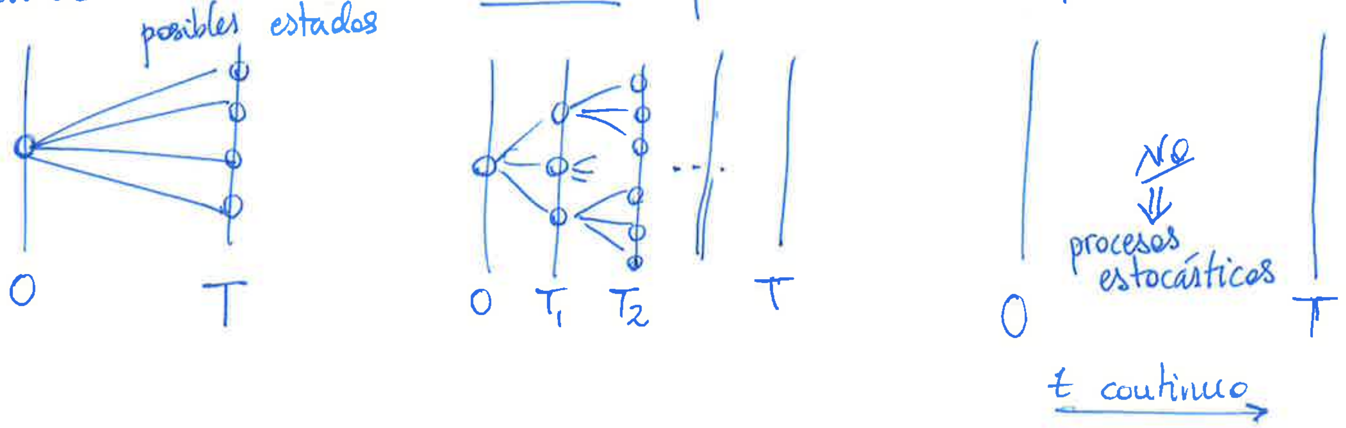
tentación: precio contrato

¡Por cierto! Si tomas $p = 79'98\%$, entonces:

$$3'09 = \frac{1}{11'1}\left[5p + 3(1-p)\right]$$

¿significado?

(*) Vamos a diseñar modelos para valorar opciones



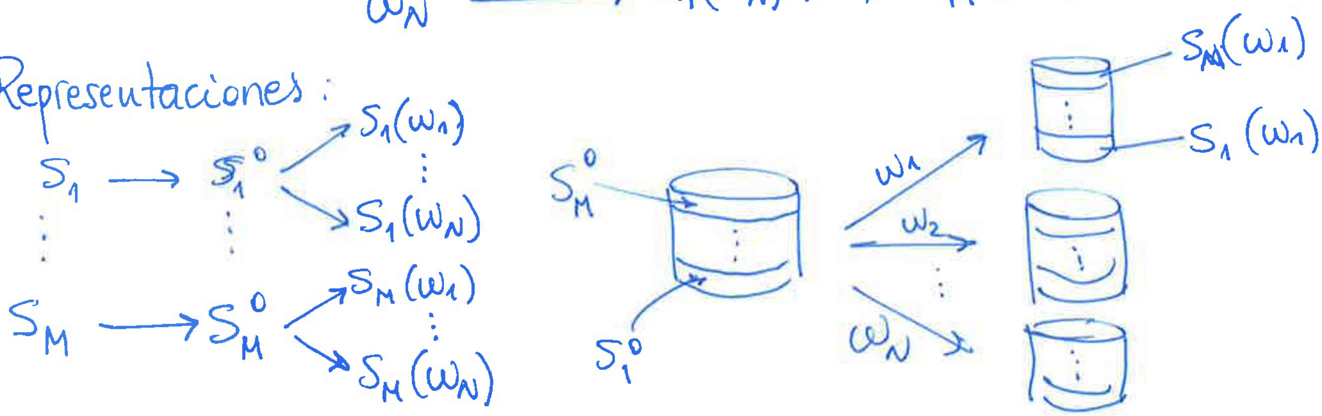
(A) MODELO MATRICIAL $t=0$, $t=1$, tiempos

- Mercado: $S_1, \dots, S_M$ activos básicos
  - → conocemos sus precios hoy $S_1^0, \dots, S_M^0$
  - → podemos formar carteras con ellos
- Proponemos que hay escenarios, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

  En escenario $\omega_1 \longrightarrow S_1(\omega_1), \dots, S_M(\omega_1)$

  $\vdots$

  " " $\omega_N \longrightarrow S_1(\omega_N), \dots, S_M(\omega_N)$
- Representaciones:



Aunque la mejor representación sería:

$$\begin{array}{ccc} & \text{precios hoy} & t=1 \\ \to S_1 & \begin{pmatrix} S_1^0 \\ \vdots \\ S_M^0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \omega_1 \text{ ——— } \omega_N \\ \begin{pmatrix} S_1(\omega_1) & \cdots & S_1(\omega_N) \\ \vdots & S_j(\omega_K) & \end{pmatrix} \end{array} \\ \to S_M & & \end{array}$$

matriz de los posibles flujos de los activos básicos

• Carteras: $\underset{\text{cartera}}{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_M) \in \mathbb{R}^M$

$$\to V_\lambda^0 = \sum_{j=1}^M \lambda_j S_j^0$$

$$\to V_\lambda(\omega_K) = \sum_{j=1}^M \lambda_j S_j(\omega_K)$$

$K = 1, \dots, N$

Instrumento general

$$X \longrightarrow (X(\omega_1), \dots, X(\omega_N)) \in \mathbb{R}^N$$

Objetivo: calcular X^0

Carteras de réplica (de X)

$\hookrightarrow$ calcular $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ tales que

$$V_\lambda(\omega_K) = \sum_{j=1}^M \lambda_j S_j(\omega_K) = X(\omega_K) \qquad K = 1, \dots, N$$

Esto es un sist. lineal de ecuaciones

En $\omega_1 \longrightarrow \lambda_1 S_1(\omega_1) + \cdots + \lambda_M S_M(\omega_1) = X(\omega_1)$

$\vdots$

En $\omega_N \longrightarrow \lambda_1 S_1(\omega_N) + \cdots + \lambda_M S_M(\omega_N) = X(\omega_N)$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} S_1(\omega_1) & \cdots & S_M(\omega_1) \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{pmatrix}}_{N \times M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\omega_1) \\ \vdots \\ X(\omega_N) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ no solución

$\hookrightarrow$ sol. única

$\hookrightarrow$ infinitas soluciones

Supongamos que encontramos $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_M^*)$ de réplica de X.

Coste de cartera $= \sum_{j=1}^{M} \lambda_j s_j^0$, "debería ser" X^0

Pero se necesita hipótesis financiera.

DEFINICIÓN: Oportunidad de arbitraje en este esquema, es una cartera $(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \lambda$ tal que

$$\begin{cases} V_\lambda^0 = \sum^{M} \lambda_j s_j^0 = 0 \\ V_\lambda(\omega_K) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j s_j(\omega_K) \geq 0 & \text{todo } K = 1, \dots, N \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad > 0 & \text{algún } K. \end{cases}$$

¿Existen? ¿Cómo encontrarlas?

- Hipótesis básica: No hay oportunidad de arbitraje: AOA

  → consecuencia: ley de precio único.

Si X es replicable, entonces todas las carteras de réplica tienen el mismo coste.

$\Rightarrow$ A X le asignamos precio (X) = coste común de esas carteras