Problemas de Valor Inicial (PVI)

Matteo Bonforte, Rafael Orive
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Septiembre 2020

Objetivo: Repaso de EDO

- Qué es un problema de valor inicial.
- Condición de Lipschitz y Unicidad,
- Lema de Gronwall.
- Resultado(s) de existencia. Picard (y Peano).
- Problema bien propuesto.

PVI: Problema de Valor Inicial

El marco teórico de los métodos numéricos se va a plantear sobre la siguiente EDO de orden 1 en *forma estándar*

Definition (PVI)

El Problema de Valor Inicial (o Problema de Cauchy) para $Y(t) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), & \text{para todo } t \in [t_0, T] \\ Y(t_0) = Y_0, & \textit{dato inicial } Y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{PVI}$$

donde $f : (t_0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua en $D := (t_0, T) \times \mathbb{R}^d$ y Lipschitz con respecto a la segunda variable.

No todas las EDOs de orden 1 se pueden escribir en forma estándar:

$$\left[Y'(t)\right]^2 = \left[2t + Y(t)\right] Y'(t) - 2t\, Y(t)\,.$$

(E) Encontrar la solución de la EDO en forma no-estándar.

PVI: Problema de Valor Inicial

El marco teórico de los métodos numéricos se va a plantear sobre la siguiente EDO de orden 1 en *forma estándar*

Definition (PVI)

El Problema de Valor Inicial (o Problema de Cauchy) para $Y(t) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), & \text{para todo } t \in [t_0, T] \\ Y(t_0) = Y_0, & \textit{dato inicial } Y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \qquad \text{(PVI)}$$

donde $f : (t_0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua en $D := (t_0, T) \times \mathbb{R}^d$ y Lipschitz con respecto a la segunda variable.

No todas las EDOs de orden 1 se pueden escribir en forma estándar:

$$\left[Y'(t)\right]^2 = \left[2t + Y(t)\right] Y'(t) - 2t\, Y(t)\,.$$

(E) Encontrar la solución de la EDO en forma no-estándar.

PVI: Problema de Valor Inicial

El marco teórico de los métodos numéricos se va a plantear sobre la siguiente EDO de orden 1 en *forma estándar*

Definition (PVI)

El Problema de Valor Inicial (o Problema de Cauchy) para $Y(t) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), & \text{para todo } t \in [t_0, T] \\ Y(t_0) = Y_0, & \textit{dato inicial } Y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} \qquad \text{(PVI)}$$

donde $f : (t_0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua en $D := (t_0, T) \times \mathbb{R}^d$ y Lipschitz con respecto a la segunda variable.

No todas las EDOs de orden 1 se pueden escribir en forma estándar:

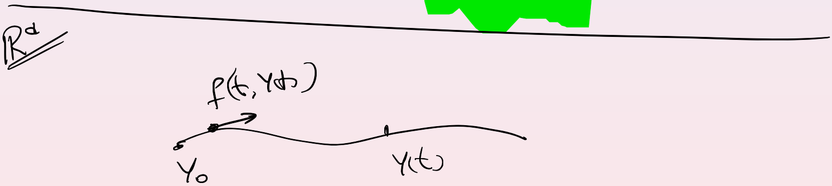
$$\left[Y'(t)\right]^2 = \left[2t + Y(t)\right] Y'(t) - 2t\, Y(t)\,.$$

(E) Encontrar la solución de la EDO en forma no-estándar.

Ecdos en forma no estandar

$$F(Y', Y, t) = 0.$$

y no puedo despejar Y'



Notaciones

El tiempo t siempre se considera en un intervalo $[t_0, T] \subseteq [0, \infty)$.

Recordamos las notaciones vectoriales

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{y tambien} \qquad f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, Y(t)) \\ \vdots \\ f_d(t, Y(t)) \end{pmatrix}$$

donde las componentes son dadas por las funciones

$$Y_k : (t_0, T) \to \mathbb{R} \qquad \text{y también} \qquad f_k : (t_0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,.$$

Notaciones para las derivadas temporales:

$$Y^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} Y(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt}}_{n\text{-veces}} Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_d^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Notaciones

El tiempo t siempre se considera en un intervalo $[t_0, T] \subseteq [0, \infty)$.
Recordamos las notaciones vectoriales

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{y tambien} \qquad f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, Y(t)) \\ \vdots \\ f_d(t, Y(t)) \end{pmatrix}$$

donde las componentes son dadas por las funciones

$$Y_k : (t_0, T) \to \mathbb{R} \qquad \text{y también} \qquad f_k : (t_0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,.$$

Notaciones para las derivadas temporales:

$$Y^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} Y(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt}}_{n\text{-veces}} Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_d^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Notaciones

El tiempo t siempre se considera en un intervalo $[t_0, T] \subseteq [0, \infty)$.
Recordamos las notaciones vectoriales

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{y tambien} \qquad f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, Y(t)) \\ \vdots \\ f_d(t, Y(t)) \end{pmatrix}$$

donde las componentes son dadas por las funciones

$$Y_k : (t_0, T) \to \mathbb{R} \qquad \text{y también} \qquad f_k : (t_0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,.$$

Notaciones para las derivadas temporales:

$$\boxed{\begin{matrix} y \rightsquigarrow Y \\ x \rightsquigarrow t \end{matrix}}$$

NOTAS F.Q.

$$Y^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} Y(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt}}_{n\text{-veces}} Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_d^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1. EDOs de orden n y forma estándar

Las EDOs lineales de orden n se pueden escribir en forma estándar, es decir como un sistema $n \times n$ del primer orden:

$$y^{(n)} + \overbrace{\underset{a_{n-1}(t).}{a_{n-1}} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y}^{f(t,y)} = \underset{c(t)}{c}$$

donde los coeficientes a_k y el lado derecho c pueden ser funciones de t.

Mas en general si tenemos una EDO posiblemente nolineal de orden n:

$$y^{(n)}(t) = g\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big)$$

podemos escribirla en la forma estándar poniendo $y^{(k-1)} = Y_k$ y

$$\begin{cases} Y_1' = y' = Y_2 \\ Y_2' = y'' = Y_3 \\ \vdots \\ Y_n' = y^{(n)} = g\big(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) = g\big(t, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\big) \end{cases}$$

(E) escribir la forma "vectorial" de la f.

Ejemplo 1. EDOs de orden n y forma estándar

Las EDOs lineales de orden n se pueden escribir en forma estándar, es decir como un sistema $n \times n$ del primer orden:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y = c$$

donde los coeficientes a_k y el lado derecho c pueden ser funciones de t. Mas en general si tenemos una EDO posiblemente nolineal de orden n:

$$\underline{y^{(n)}(t)} = g\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

podemos escribirla en la forma estándar poniendo $y^{(k-1)} = Y_k$ y

$$\frac{d}{dt} y^{(k-1)} = y^{(k)}$$

$$\begin{cases} Y_1' = y' = Y_2 \\ Y_2' = y'' = Y_3 \\ \vdots \\ Y_n' = y^{(n)} = g\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = g\left(t, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\right) \end{cases}$$

$$Y' = \underline{f(t, Y)}$$

(E) escribir la forma "vectorial" de la f.

Ejemplo 1. EDOs de orden n y forma estándar

Las EDOs lineales de orden n se pueden escribir en forma estándar, es decir como un sistema $n \times n$ del primer orden:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y = c$$

donde los coeficientes a_k y el lado derecho c pueden ser funciones de t. Mas en general si tenemos una EDO posiblemente nolineal de orden n:

$$y^{(n)}(t) = g\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big)$$

podemos escribirla en la forma estándar poniendo $y^{(k-1)} = Y_k$ y

$$\begin{cases} Y_1' = y' = Y_2 \\ Y_2' = y'' = Y_3 \\ \vdots \\ Y_n' = y^{(n)} = g\big(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) = g\big(t, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\big) \end{cases}$$

(E) escribir la forma “vectorial” de la f.

EDO AUTONOMA

p.tos. crit.

$\dot{x}(t) = f(x)$

no dep explícitamente de t.

$\dot{x}(t) = \underline{a(t)}\, x(t)$

tiene que ser cte

$\dot{x} = -2x$ AUT.

$\dot{x} = \cancel{-2t \cdot x}$

$\dot{x} = \cancel{-2t} + x$

NO AUT. !!

Ejemplo 2. EDOs **NO** Autonomas... en forma Autonoma?

Siendo de la UAM, nos gusta mas la forma Autonoma... pero algunas ecuaciones no la tienen, por ejemplo:

$$y'(t) = g(t, y(t))\,.$$

Se puede escribirla en forma autonoma pagando una dimension mas!

Ponemos $t = Y_1$ e $y = Y_2$

$$\begin{cases} Y_1' = 1 \\ Y_2' = y' = g(t, y(t)) = g(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

(E) Hacer el caso d-dimensional y escribir la forma "vectorial" de f.

Ejemplo 2. EDOs **NO** Autonomas... en forma Autonoma?

Siendo de la UAM, nos gusta mas la forma Autonoma... pero algunas ecuaciones no la tienen, por ejemplo:

$$y'(t) = g(t, y(t))\,.$$

Se puede escribirla en forma autonoma pagando una dimension mas!

Ponemos $t = Y_1$ e $y = Y_2$

$$\begin{cases} Y_1' = 1 \\ Y_2' = y' = g(t, y(t)) = g(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

(E) Hacer el caso d-dimensional y escribir la forma "vectorial" de f.

Ejemplo 2. EDOs **NO** Autonomas... en forma Autonoma?

Siendo de la UAM, nos gusta mas la forma Autonoma... pero algunas ecuaciones no la tienen, por ejemplo:

$$y'(t) = g(t, y(t))\,.$$

Se puede escribirla en forma autonoma pagando una dimension mas!

Ponemos $t = Y_1$ e $y = Y_2$

$$\begin{cases} Y_1' = 1 \\ Y_2' = y' = g(t, y(t)) = g(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

(E) Hacer el caso d-dimensional y escribir la forma "vectorial" de f.

Ejemplo 2. EDOs **NO** Autonomas... en forma Autonoma?

Siendo de la UAM, nos gusta mas la forma Autonoma... pero algunas ecuaciones no la tienen, por ejemplo:

$$y'(t) = g(t, y(t))\,.$$

Se puede escribirla en forma autonoma pagando una dimension mas!
Ponemos $t = Y_1$ e $y = Y_2$

$$\begin{cases} Y_1' = 1 \\ Y_2' = y' = g(t, y(t)) = g(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

(E) Hacer el caso d-dimensional y escribir la forma "vectorial" de f.

$$Y(t) = f(\cancel{t}, Y(t)) = \begin{pmatrix} f_1(Y) \\ f_2(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ g(Y_1, Y_2) \end{pmatrix}$$

La condición de Lipschitz...

...es una condición suficiente para la buena proposición del Problema PVI.

Definition

Dada $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, decimos que es L-Lipschitziana en D (o también Lipschitz con constante $L > 0$ en D) *con respecto a su segunda variable* si existe $L > 0$ t.q. para todos $(t, Y), (t, \hat{Y}) \in D$

$$\|f(t, Y) - f(t, \hat{Y})\| \leq L\|Y - \hat{Y}\| .$$

Se note que $\|\cdot\|$ es una norma cualesquiera de $\mathbb{R}^d$:

1. ¿ Ser Lipschitz depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?
2. ¿ La constante L depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?

(E) Escribir las condiciones de continuidad y Lipschitzianidad en términos de las componentes Y_k y f_k.

...es una condición suficiente para la buena proposición del Problema PVI.

Definition

Dada $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, decimos que es L-Lipschitziana en D (o también Lipschitz con constante $L > 0$ en D) *con respecto a su segunda variable* si existe $L > 0$ t.q. para todos $(t, Y), (t, \hat{Y}) \in D$

$$\|f(t, Y) - f(t, \hat{Y})\| \leq L\|Y - \hat{Y}\| .$$

Se note que $\| \cdot \|$ es una norma cualesquiera de $\mathbb{R}^d$:

1. ¿ Ser Lipschitz depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?
2. ¿ La constante L depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?

(E) Escribir las condiciones de continuidad y Lipschitzianidad en términos de las componentes Y_k y f_k.

La condición de Lipschitz...

...es una condición suficiente para la buena proposición del Problema PVI.

Definition

Dada $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, decimos que es L-Lipschitziana en D (o también Lipschitz con constante $L > 0$ en D) *con respecto a su segunda variable* si existe $L > 0$ t.q. para todos $(t, Y), (t, \hat{Y}) \in D$

$$\|f(t, Y) - f(t, \hat{Y})\| \leq L\|Y - \hat{Y}\|\,.$$

Se note que $\|\cdot\|$ es una norma cualesquiera de $\mathbb{R}^d$:

1. ¿ Ser Lipschitz depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?
2. ¿ La constante L depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?

(E) Escribir las condiciones de continuidad y Lipschitzianidad en términos de las componentes Y_k y f_k.

La condición de Lipschitz...

...es una condición suficiente para la buena proposición del Problema PVI.

Definition

Dada $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, decimos que es L-Lipschitziana en D (o también Lipschitz con constante $L > 0$ en D) *con respecto a su segunda variable* si existe $L > 0$ t.q. para todos $(t, Y), (t, \hat{Y}) \in D$

$$\|f(t, Y) - f(t, \hat{Y})\| \leq L\|Y - \hat{Y}\| .$$

Se note que $\| \cdot \|$ es una norma cualesquiera de $\mathbb{R}^d$:

1. ¿ Ser Lipschitz depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?
2. ¿ La constante L depende de la elección de la norma de $\mathbb{R}^d$?

(E) Escribir las condiciones de continuidad y Lipschitzianidad en términos de las componentes Y_k y f_k.

$\|\cdot\|_a$ $\|\cdot\|_b$ son eq^tes ssi $\exists\, c_1, c_2 > 0$ t.q.

$$c_1 \|x\|_a \le \|x\|_b \le c_2 \|x\|_a \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

si f es Lip. $\|\cdot\|_a$ $\Rightarrow$ es Lip $\|\cdot\|_b$ ($\Leftarrow$ es análogo)

$$\|f(t,y) - f(t,\hat{y})\|_b \le L_f \|y-\hat{y}\|_b \le L_f c_2 \|y-\hat{y}\|_b$$

$L_f^{(a)}$ $L_f^{(b)}$

$$\ge$$

$$c_1 \|f(t,y) - f(t,\hat{y})\|_a$$

$$\|y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

$p=2$ Norma Euclídea

$p \ge 1$

$$\|y\|_\infty = \sup_{1\le k\le d} |y_k|$$

$p=\infty$

$(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$

DIST. $p \in (0,1)$

si $d=1$ son todas iguales

Dibujar Bolas Unitarias en $\|\cdot\|_p$

??

$x_n \to x$ $\|\cdot\|_1$ ssi $x_n \to x$ $\|\cdot\|_{1/2}$

$$y' = \underbrace{e^{-y^2} + \frac{1}{1+t^2}}_{f(t,y)} \qquad (d=1) \quad \|\cdot\|_p = |\cdot|$$

$$|f(t,y) - f(t,\hat{y})| = \left| e^{-y^2} + \cancel{\frac{1}{1+t^2}} - e^{-\hat{y}^2} - \cancel{\frac{1}{1+t^2}} \right|$$

$$\overset{(TVM)}{\leq} \left|-2\xi e^{-\xi^2}\right| \cdot |y - \hat{y}|$$

ξ entre y e $\hat{y}$

WLOG $y \leq \hat{y}$

$\xi \in [y, \hat{y}]$

$\Downarrow$

$$|2\xi e^{-\xi^2}| \leq L$$

¿$L < +\infty$? $\leq \underline{L}\, |y - \hat{y}|$

$$\sup_{\xi \in [y,\hat{y}]} |-2\xi e^{-\xi^2}|$$

$$\underline{\xi \in \mathbb{R}}$$

<u>Ej</u> $e^{-\|y\|^2}$?? $(d > 1)$??

¿ Si y es sol PVI es cierto que $\underline{y \in C^0}$?? / $y \in C^1 \Leftarrow (y' = f \in C^0)$

$$y' = f(t,y)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Grad. Flows} \\ f = \nabla U\end{array}}$$

? f es cont (t, Y) (T. Peano)

Que pasa si f no es cont?

- f sea Lip c.r. a Y –
- f no cont en t –

¿ Saber decir algo de existencia ?

Unicidad de soluciones para PVI

La Lipschitzianidad implica la unicidad de soluciones del PVI, y algo más:

Theorem (Unicidad y Dependencia Continua de los datos)

Sea $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, *continua en* D *y L-Lipschitziana en* D *con respecto a su segunda variable. Sean* $Y, \hat{Y}$ *dos soluciones del PVI* $t \in [t_0, T]$, *con datos iniciales* $Y_0, \hat{Y}_0$. *Entonces para todo* $t \in [t_0, T]$:

$$\|Y(t) - \hat{Y}(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \|Y_0 - \hat{Y}_0\| .$$

Las hipótesis del Teorema, siendo $D := [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$(H_f) \begin{cases} (i) & f \text{ continua en } D \\ (ii) & f \text{ Lipschitziana en } D \text{ con respecto a su segunda variable} \end{cases}$$

también garantizan la existencia, como veremos. (H_f) nos garantiza que el PVI es *un problema bien planteado (en el sentido de Hadamard)*.

Unicidad de soluciones para PVI

La Lipschitzianidad implica la unicidad de soluciones del PVI, y algo más:

Theorem (Unicidad y Dependencia Continua de los datos)

Sea $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continua en D y L-Lipschitziana en D con respecto a su segunda variable. Sean $Y, \hat{Y}$ dos soluciones del PVI $t \in [t_0, T]$, con datos iniciales $Y_0, \hat{Y}_0$. Entonces para todo $t \in [t_0, T]$:

$$\|Y(t) - \hat{Y}(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \|Y_0 - \hat{Y}_0\| .$$

Las hipótesis del Teorema, siendo $D := [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$\boxed{(H_f) \begin{cases} (i) & f \text{ continua en } D \\ (ii) & f \text{ Lipschitziana en } D \text{ con respecto a su segunda variable} \end{cases}}$$

también garantizan la existencia, como veremos. (H_f) nos garantiza que el PVI es *un problema bien planteado (en el sentido de Hadamard)*.

La Lipschitzianidad implica la unicidad de soluciones del PVI, y algo más:

Theorem (Unicidad y Dependencia Continua de los datos)

Sea $f : D \subseteq [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continua en D y L-Lipschitziana en D con respecto a su segunda variable. Sean $Y, \hat{Y}$ dos soluciones del PVI $t \in [t_0, T]$, con datos iniciales $Y_0, \hat{Y}_0$. Entonces para todo $t \in [t_0, T]$:

$$\|Y(t) - \hat{Y}(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \|Y_0 - \hat{Y}_0\| \,.$$

Las hipótesis del Teorema, siendo $D := [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$\boxed{(H_f) \begin{cases} (i) & f \text{ continua en } D \\ (ii) & f \text{ Lipschitziana en } D \text{ con respecto a su segunda variable} \end{cases}}$$

también garantizan la existencia, como veremos. (H_f) nos garantiza que el PVI es *un problema bien planteado (en el sentido de Hadamard)*.

Prueba del Teorema

Sean y e $\hat{y}$ soluciones del (PVI). ~~def~~

$$y(t)-\hat{y}(t) \overset{\text{TFC.I}}{=} y(t_0)-\hat{y}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(y'(s)-\hat{y}'(s)\right)ds \qquad y'=f$$

$$= y(t_0)-\hat{y}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[f(s,y(s))-f(s,\hat{y}(s))\right]ds$$

DES. TRIANG $\|\cdot\|$

$$\|y(t)-\hat{y}(t)\| \le \|y(t_0)-\hat{y}(t_0)\| + \left\|\int_{t_0}^{t}\cdots\right\|$$

$\|\int\sim\| \le \int\|\cdot\|$ $\quad\le \|y(t_0)-\hat{y}(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(s,y)-f(s,\hat{y})\|}_{\le L\|y-\hat{y}\|}\,ds.$

f es Lipschitz $\quad\le \|y(t_0)-\hat{y}(t_0)\| + L\int_{t_0}^{t}\|y(s)-\hat{y}(s)\|\,ds.$

Prueba del Teorema

hemos obtenido: $y_0 \quad \hat{y}_0 \quad t$

$$\underbrace{\|y(t)-\hat{y}(t)\|}_{\frac{g'(t)}{L}} \le \underbrace{\|y(t_0)-\hat{y}(t_0)\| + L\int_{t_0}^{t} \|y(s)-\hat{y}(s)\|\,ds.}_{g(t)}$$

$$\frac{g'(t)}{L} \le g(t)$$

$$g' \le L g \quad \rightsquigarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{g'}{g} \le \int_{t_0}^{t} L$$

debeles hace caso

$$g(t) \le e^{Lt} g_0$$

(Lema Gronwall)

$$\boxed{\|y(t)-\hat{y}(t)\| \le e^{L(t-t_0)} \|y_0-\hat{y}_0\|}$$

QED

Prueba del Teorema

ojo: la cota

$$(\circledast)\quad \|y(t)-\hat{y}(t)\| \le \|y_0-\hat{y}_0\| e^{L(t-t_0)}$$

NO es óptima $\qquad (y_0 = y(t_0))$

$$y' = -\lambda y \qquad \lambda>0.$$

$$y(t)-\hat{y}(t) = e^{-\lambda(t-t_0)}(y_0-\hat{y}_0)$$

cota la $\circledast$ que en este caso tendría $L = |-\lambda| = \lambda$

$y = ax$

$L = a$

Lema de Gronwall - Gronwall Inequality

En la prueba hemos usado un Lema simple pero muy practico:

Lemma (Lema de Gronwall)

Sea $I = [t_0, T)$, *(*$T = +\infty$ *incluido) y sean* $\alpha, \beta, u : I \to \mathbb{R}$ *continuas. Si* $\beta \geq 0$ *y tenemos la desigualdad para todo* $t \in I$*:*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} u(s)\, \beta(s) ds\,,$$

entonces para todo $t \in I$ *tenemos que*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\, e^{\int_s^t \beta(r) dr} \beta(s) ds\,.$$

Si además α *es no-decreciente, tenemos que para todo* $t \in I$

$$u(t) \leq \alpha(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s) ds}\,.$$

Lema de Gronwall - Gronwall Inequality

En la prueba hemos usado un Lema simple pero muy practico:

Lemma (Lema de Gronwall)

Sea $I = [t_0, T)$, *(*$T = +\infty$ *incluido) y sean* $\alpha, \beta, u : I \to \mathbb{R}$ *continuas. Si* $\beta \geq 0$ *y tenemos la desigualdad para todo* $t \in I$*:*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} u(s)\,\beta(s)ds\,,$$

entonces para todo $t \in I$ *tenemos que*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,e^{\int_s^t \beta(r)dr}\beta(s)ds\,.$$

Si además α *es no-decreciente, tenemos que para todo* $t \in I$

$$u(t) \leq \alpha(t)\,e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds}\,.$$

Lema de Gronwall - Gronwall Inequality

En la prueba hemos usado un Lema simple pero muy practico:

Lemma (Lema de Gronwall)

Sea $I = [t_0, T)$, ($T = +\infty$ incluido) y sean $\alpha, \beta, u : I \to \mathbb{R}$ continuas. Si $\beta \geq 0$ y tenemos la desigualdad para todo $t \in I$:

$$U' \leq \alpha + U$$

$$\underbrace{u(t)}_{U'} \leq \alpha(t) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} u(s)\,\beta(s)ds}_{U},$$

entonces para todo $t \in I$ tenemos que

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\, e^{\int_s^t \beta(r)dr} \beta(s)ds\,.$$

Si además α es no-decreciente, tenemos que para todo $t \in I$

$$u(t) \leq \alpha(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds}\,.$$

Theorem (Existencia y Unicidad. (Picard, Lipschitz y Cauchy))

Sea $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continua en D y L-Lipschitziana en D con respecto a su segunda variable. Entonces existe una unica solución del problema PVI en $[t_0, T]$.

Si quitamos la hipótesis de Lipschitzianidad, la unicidad puede fallar (Peine de Peano), pero la continuidad es suficiente para garantizar la existencia local (y a veces la global).

Theorem (Existencia Local (Peano))

Sea $f : K \to \mathbb{R}^d$, continua en $K := [t_0, t_0 + a] \times \overline{B_r(x_0)}$. Sea $M > 0$ t.q.

$$\|f\|_{C^0(K)} = \sup_{(t,Y)\in K} |f(t,Y)| \le M \qquad \text{y definimos} \qquad b = \min\left\{a, \frac{r}{M}\right\}.$$

Entonces existe una solución del problema PVI en $[t_0, t_0 + b]$.

Teoremas de existencia

Theorem (Existencia y Unicidad. (Picard, Lipschitz y Cauchy))

Sea $f : D \subseteq [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continua en D y L-Lipschitziana en D con respecto a su segunda variable. Entonces existe una unica solución del problema PVI en $[t_0, T]$.

Si quitamos la hipótesis de Lipschitzianidad, la unicidad puede fallar (Peine de Peano), pero la continuidad es suficiente para garantizar la existencia local (y a veces la global).

Theorem (Existencia Local (Peano))

Sea $f : K \to \mathbb{R}^d$, continua en $K := [t_0, t_0 + a] \times \overline{B_r(x_0)}$. Sea $M > 0$ t.q.

$$\|f\|_{C^0(K)} = \sup_{(t,Y)\in K} |f(t,Y)| \le M \qquad \text{y definimos} \qquad b = \min\left\{a, \frac{r}{M}\right\}.$$

Entonces existe una solución del problema PVI en $[t_0, t_0 + b]$.

Teoremas de existencia

Theorem (Existencia y Unicidad. (Picard, Lipschitz y Cauchy))

Sea $f : D \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, continua en D y L-Lipschitziana en D con respecto a su segunda variable. Entonces existe una unica solución del problema PVI en $[t_0, T]$.

Si quitamos la hipótesis de Lipschitzianidad, la unicidad puede fallar (Peine de Peano), pero la continuidad es suficiente para garantizar la existencia local (y a veces la global).

Theorem (Existencia Local (Peano))

Sea $f : K \to \mathbb{R}^d$, continua en $K := [t_0, t_0 + a] \times \overline{B_r(x_0)}$. Sea $M > 0$ t.q.

$$\|f\|_{C^0(K)} = \sup_{(t,Y)\in K} |f(t, Y)| \le M \qquad \text{y definimos} \qquad b = \min\left\{a, \frac{r}{M}\right\}.$$

Entonces existe una solución del problema PVI en $[t_0, t_0 + b]$.

Idea de la prueba. Iteración de Picard. Definimos la sucesión de funciones $Y_n(t)$ por recurrencia: sea Y_0 el dato inicial,

$Y_n \xrightarrow[n]{} \overline{Y}$ ← es sol.

$$\begin{cases} Y_n(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \overset{Y_{n-1}}{y_{n-1}}(s))ds \\ Y_0(t) = Y_0 \quad \textit{(la primera funcion es constante, igual al dato inicial)} \end{cases}$$

- Existencia global: Idea de Picard, Lipschitz y Cauchy (y Schwarz): Usar el Teorema de las Aplicaciones Contractivas, o bien el Teorema M de Weierstrass y la Iteración de Picard.
- Existencia local: Idea de Peano (y se dice también de Arzelá) Usar el Teorema de Ascoli-Arzelá y la Iteración de Picard.

Esbozo de la prueba del Teorema

Idea de la prueba. Iteración de Picard. Definimos la sucesión de funciones $Y_n(t)$ por recurrencia: sea Y_0 el dato inicial,

$$\begin{cases} Y_n(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds \\ Y_0(t) = Y_0 \qquad \textit{(la primera funcion es constante, igual al dato inicial)} \end{cases}$$

- Existencia global: Idea de Picard, Lipschitz y Cauchy (y Schwarz): Usar el Teorema de las Aplicaciones Contractivas, o bien el Teorema M de Weierstrass y la Iteración de Picard.
- Existencia local: Idea de Peano (y se dice también de Arzelá) Usar el Teorema de Ascoli-Arzelá y la Iteración de Picard.

Esbozo de la prueba del Teorema

Idea de la prueba. Iteración de Picard. Definimos la sucesión de funciones $Y_n(t)$ por recurrencia: sea Y_0 el dato inicial,

$$\begin{cases} Y_n(t) = Y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds \\ Y_0(t) = Y_0 \qquad \textit{(la primera funcion es constante, igual al dato inicial)} \end{cases}$$

- Existencia global: Idea de Picard, Lipschitz y Cauchy (y Schwarz): Usar el Teorema de las Aplicaciones Contractivas, o bien el Teorema M de Weierstrass y la Iteración de Picard.
- Existencia local: Idea de Peano (y se dice también de Arzelá) Usar el Teorema de Ascoli-Arzelá y la Iteración de Picard.

Falla exist. global

$$y' = y^2 \qquad y^2 \in (0, +\infty)$$

Blow up $\exists\, T \quad y(T) = \pm\infty$

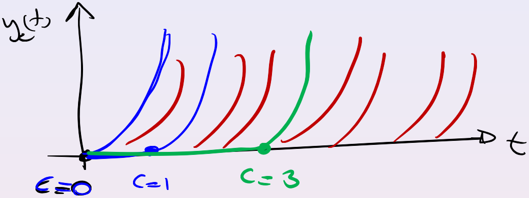
Contraejemplos a la Unicidad (Peano)

- Peine de Peano
- 5 soluciones

falla Lipsch.

- Peine de Peano (Pettine)

$$\begin{cases} y' = y^{\varepsilon} \\ \underline{\underline{y(0) = 0}} \end{cases} \qquad (t_0 = 0)$$



- si $\varepsilon \in (0,1) \Rightarrow f = y^{\varepsilon}$ No es Lipsch en $y=0$ (¿porque?)

$$\forall c \geq 0, \quad y_c(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq c \\ (1-\varepsilon)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} (t-c)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} & t \geq c \end{cases}$$

$$\boxed{y_c(0) = 0}$$

- UNICIDAD FALLA DRAMATICAMENTE!

OJO!

SOLO por $y(0)=0$

- si $\varepsilon \geq 1$ f es LIPSCH y TODO BIEN!!

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4yt^3}{y^2+t^4} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

tiene 5 ramos de sol.

falla unicidad

porque?

$y_1(t) = t^2$

$y_2(t) = -t^2$

$y_3(t) = 0$

$y_4(t) = c - \sqrt{c^2+t^4}$

$y_5(t) = \sqrt{c^2+t^4} - c$

$\forall c > 0$

$\boxed{y(t_0) = y_0}$

$y' = f$

$\exists$, unic., dep cont y_0, y si cambio f

$y' = f(t,y) + \varepsilon \varphi(t,y)$

Ej 7 [NFQ]

$(y = Y)$

$$(PVI)\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \xleftarrow[\varepsilon \to 0]{} (PVI)_\varepsilon \begin{cases} y_\varepsilon' = f(t,y_\varepsilon) + \varepsilon\varphi(t,y_\varepsilon) \\ y_\varepsilon(t_0) = y_{\varepsilon,0}. \end{cases} \quad \varepsilon > 0$$

$$y \longleftarrow y_\varepsilon$$

- Bajo cuales condiciones sobre φ tenemos que cuando $\varepsilon \to 0$, $y_\varepsilon \to y$?
- TFCI para $y_\varepsilon - y$

$$y_\varepsilon(t) - y(t) = y_\varepsilon(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Big(\overbrace{f(t,y_\varepsilon) + \varepsilon\varphi(t,y_\varepsilon)}^{y_\varepsilon'} - \overbrace{f(t,y(t))}^{y'} \Big) dt$$

$(d=1)\ |\cdot| = \|\cdot\|$, $\quad \downarrow$ DES. TRIANG.

$$\|y_\varepsilon(t) - y(t)\| \le \|y_\varepsilon(t_0) - y(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^{t} \cdots\cdots \right\|.$$

$$\|y_\varepsilon(t)-y(t)\| \le \|y_\varepsilon(t_0)-y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f_\varepsilon(s,y_\varepsilon(s))-f(s,y(s))\|}_{\le L_f \|y_\varepsilon(s)-y(s)\|} ds \qquad \underline{\underline{f\ \text{Lip}}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \|\int \cdot\| \le \int \|\cdot\| \\ \|a+b\| \le \|a\|+\|b\| \end{array} \right\} \qquad + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\varphi(s,y_\varepsilon(s))\|}_{(?)} ds.$$

$$\le M(t-t_0) \qquad (M>0)$$

- $\|\varphi\|$ integrable en $(0,T)$ (t_0,T)

$\bigwedge \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

- $\|\varphi\| \le M$ en $[t_0,T]$

$$\underbrace{\|y_\varepsilon(t)-y(t)\|}_{u'/L_f} \underset{\le}{\le} \underbrace{\left(\|y_\varepsilon(t_0)-y(t_0)\| + \varepsilon M(t-t_0)\right)}_{\alpha(t)} + L_f \underbrace{\int_{t_0}^{t} \|y_\varepsilon(s)-y(s)\| ds}_{u(t)}$$

$$u' \le L_f\,\alpha(t) + u \qquad \alpha)$$

Usando Gronwall a no-lear.

$$\|y(t)-y_\varepsilon(t)\| \le \Big(\underbrace{\|y_\varepsilon(t_0)-y(t_0)\|}_{=0}+\varepsilon M(t-t_0)\Big)e^{L_f(t-t_0)}$$

$\downarrow \varepsilon\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\|y(t)-y_\varepsilon(t)\|}_{\approx\delta^2} \le \lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\|y_\varepsilon(t_0)-y(t_0)\|}_{\approx\delta^2}\, e^{L_f(t-t_0)}$$

si $y_\varepsilon(t_0)=y(t_0)$ ✓ $y_\varepsilon(t)\to y(t),\ \forall t\ge t_0$

si $y_\varepsilon(t_0)\ne y(t_0)$

$$\text{PVI.}\begin{cases} y'=f(t,y)+\varepsilon\varphi \\ y(t_0)=Y_0+\delta\eta_0 \end{cases}$$

Ejercicio:

$$Y' = -AY\,[+\varepsilon g(t,Y)]$$

$A > 0$ Caso $d=1$

(A mtx vale también ← Antes hacer $d=1$)

$$Y(t) = e^{-At}Y_0$$

Usando la fórmula de Lagrange Var. Const.

$$\boxed{Y(t) = e^{-At}Y_0 + \varepsilon\int_0^t e^{-(t-s)A}\,g(Y(s))\,ds}$$

idea:

$$\|Y(t)-\hat{Y}(t)\| \le \dots \le \|e^{-At}\|\,\|Y_0-\hat{Y}_0\| + \varepsilon\int_0^t e^{-(t-s)A}\underbrace{\|g(s,Y(s))-g(s,\hat{Y}(s))\|}_{\le L_g\|Y(s)-\hat{Y}(s)\|}\,ds$$

(si g es Lipsch.) $\le L_g\|Y(s)-\hat{Y}(s)\|$

(1-dim)

$$\le \|e^{-At}\|\,\|Y_0-\hat{Y}_0\| + \varepsilon L_g(1-e^{-t})\sup_{0\le s\le t}\|Y(s)-\hat{Y}(s)\|$$

NORMA: $\|Y-\hat{Y}\|_t$

Consideren las iteradas de Picard… y normas $\|\cdot\|_t$ …