Economía y finanzas matemáticas
Cuarto curso, licenciatura en Matemáticas, UAM, 2011-2012

Examen final, 23-5-2012

Nombre y Apellidos ....

1. (2 puntos) Consideramos el siguiente esquema de ahorro: desde hoy (tiempo 0) hasta dentro de 19 años se irán haciendo aportaciones anuales. Hoy ingresamos una cantidad a. El año que viene, el doble, $2a$. Y así sucesivamente, de manera que cada año doblamos la aportación. El gestor del plan de ahorro garantiza una rentabilidad anual simple R. En el año 20 ya no se producen nuevas aportaciones y se rescata el patrimonio ahorrado.

Llamemos C_n al montante acumulado *justo después* de la aportación del año n. Por ejemplo, $C_0 = a$, mientras que $C_1 = a(1+R) + 2a$.

a) Obtén una fórmula (explícita y manejable) para el valor de C_{19}. Deduce la fórmula de C_{20}.

b) Calcula la TIR de este plan de ahorro.

2. (1 punto) Consideramos dos carteras:

$$\text{cartera 1:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{2 calls de strike } K \text{ compradas} \\ \text{2 calls de strike } 2K \text{ vendidas} \end{array} \right\},$$

$$\text{cartera 2:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{1 unidad del subyacente} \\ \text{1 call de strike } 2K \text{ vendida} \end{array} \right\}$$

Todas las opciones vencen en tiempo T. El tipo de interés continuo es R. ¿Cuál de las dos costará más (hoy)?

3. (2 puntos) Considera el siguiente modelo matricial:

$$\text{precios hoy} \to \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{flujos en } t=1 \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array} & \end{array}$$

Determina para qué valores de x no existen oportunidades de arbitraje.

4. (1 punto) Supongamos que los rendimientos R_1 y R_2 de dos activos tienen medias 0, desviaciones típicas $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y matriz de correlaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

donde $-1 \leq \rho \leq 1$. Formamos una cartera con una proporción ω_1 invertida en el primer activo y una proporción ω_2 en el segundo, donde $\omega_1 + \omega_2 = 1$. El rendimiento de la cartera es $R_C = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2$.

¿Podría ocurrir que el riesgo (desviación típica) de la cartera fuera 0? ¿En qué condiciones? ¿Qué información darían esas condiciones sobre las variables R_1 y R_2?

5. (1 punto) Miramos tres tiempos futuros $t_1 < t_2 < t_3$. Disponemos de los valores de

$$\begin{aligned} P(0,t_1), &\quad \text{el descuento de la fecha } t_1; \\ F_s(0,t_1,t_2), &\quad \text{el tipo (simple) implícito para el periodo } t_1 \to t_2; \\ F_c(0,t_2,t_3), &\quad \text{el tipo (continuo) implícito para el periodo } t_2 \to t_3. \end{aligned}$$

Escribe el valor de $P(0,t_3)$ (el descuento de la fecha t_3) en función de estas cantidades.

6. (1 punto) Estamos en el entorno Black–Scholes. Consideramos opciones con vencimiento T y strike K. El tipo de interés continuo es R. El subyacente vale hoy S y su volatilidad es σ. Llamemos c al precio de la call europea, y p al precio de la put. La variación de valor de la call con respecto a la cotización del subyacente (la “delta” de la call) viene dada por

$$\frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_+)\,,$$

donde $d_+ = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{S}{Ke^{-r\tau}}\right) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$ y $\Phi(x)$ es la función de distribución de la normal estándar.

Deduce el valor de la delta de la put, $\frac{\partial p}{\partial S}$, *sin necesidad* de usar la fórmula Black-Scholes de valoración de la put.

7. (1 punto) Modelo matricial con dos escenarios y dos activos básicos: un subyacente S y la cuenta bancaria CB. El subyacente vale hoy S_0 euros. En el tiempo siguiente puede tomar los valores $S_0(1+u)$ y $S_0(1-d)$. El tipo (simple) libre de riesgo para el periodo es del $R\,\%$. Halla la probabilidad de valoración si tomamos al subyacente como numerario.

8. (1 punto) Nuestra cartera vale hoy 100. Los posibles rendimientos a tiempo T vienen dados por $R = \sigma Z$, donde $\sigma = 20\,\%$ y Z es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}\,|x|}.$$

(Nota: la variable Z tiene media 0 y desviación típica 1).

Halla el $\mathrm{Var}_{95\,\%}$ de nuestra cartera.