Teoría de la Integral y de la Medida. 3^{er} **curso de Matemáticas. U.A.M.** **8/01/2020**

Apellidos ______________________ Nombre ______________ DNI ____________ Grupo __

NO OLVIDES PONER TU NOMBRE EN LA HOJA DE ENUNCIADOS; DÉJALA VISIBLE SOBRE LA MESA, JUNTO CON TU D.N.I. Y ENTRÉGALA AL FINAL **TIEMPO: 3 horas.**

1.– Para cada una de las siguientes afirmaciones, demostrarla en caso de que sea cierta o, en caso contrario, dar un contraejemplo que demuestre que es falsa.

(a) Si las funciones $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, son medibles de Lebesgue y para todo $t \in [0,1]$ se cumple que $\lim_{k\to\infty} f_k(t) = 0$ y además sabemos que existe $\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k(t)\, dm$, donde m denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces se cumple que $\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k(t)\, dm = 0$.

(b) Si f no es medible, entonces $|f|$ tampoco es medible.

(c) Si $A, B \subset \mathbb{R}$ son tales que su producto cartesiano $A \times B$ es medible de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ y B es medible de Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces A es medible de Lebesgue en $\mathbb{R}$. ¿Cambia algo si se supone que B tiene medida de Lebesgue positiva?

(a) **FALSO.** Sea $f_k(x) = k(k+1)\chi_{[1/(k+1),1/k]}(x)$, $0 \le x \le 1$. Se tiene que $\forall t \in [0,1]$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t) = 0$ y $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{[0,1]} f_k(t)dm(t) = 1$, de forma que $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k(t)dm(t) = 1 \neq 0$.

(b) **FALSO.** Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \notin \mathcal{L}$ y sea $f = \chi_A - \chi_{\complement A} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ -1 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$ Entonces f no es medible porque $f^{-1}(1) = A \notin \mathcal{L}$; pero $|f| = 1$, constante, que es, desde luego, medible.

(c) **FALSO.** Hay un caso trivial, que debería ser excluido y es cuando $B = \emptyset$. Tomando $A \notin \mathcal{L}$, tenemos $A \times B = \emptyset \in \mathcal{L}^2$. Un caso más interesante se obtiene tomando $B \in \mathcal{L}$ tal que $\lambda(B) = 0$ y $A \notin \mathcal{L}$. Entonces $A \times B \subset \mathbb{R} \times B$ y, dado que $\lambda^2(\mathbb{R} \times B) = \lambda(\mathbb{R})\lambda(B) = \infty \cdot 0 = 0$ y dado que la medida de Lebesgue λ^2 es completa, resulta que $A \times B \in \mathcal{L}^2$, y, sin embargo, $A \notin \mathcal{L}$.

Si $\lambda(B) > 0$; entonces es cierto que $A \times B \in \mathcal{L}^2 \implies A \in \mathcal{L}^1$ porque $A = (A \times B)^y\ \forall y \in B$ y sabemos, por el teorema de Fubini, que para casi todo $y \in B$, en particular, para algún $y \in B$, dado que $\lambda(B) > 0$, $(A \times B)^y \in \mathcal{L}$.

2.– Calcular razonadamente

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n^n}{(n+x)^n x^{1/n}}\, dx.$$

Observación: Puede ser útil tener en cuenta que, para todo $x > 0$, la sucesión $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge de forma monótona creciente a e^x para $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+x)^n x^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n x^{1/n}} = e^{-x}.$$

Además, para $n \geq 2$, se tiene que

$$\frac{n^n}{(n+x)^n x^{1/n}} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n x^{1/n}} \leq x^{-1/2}\chi_{[0,1]} + \frac{1}{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2}\chi_{[1,\infty[} \in L^1.$$

Por consiguiente, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada y concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n^n}{(n+x)^n x^{1/n}}\, dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+x)^n x^{1/n}}\, dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

3.– Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida que no contiene átomos (un átomo es un conjunto $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) > 0$ y tal que para todo $B \subset A$ con $B \in \mathcal{M}$, se cumple que $\mu(B) = 0$ ó $\mu(B) = \mu(A)$). Sea $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) > 0$. Demostrar que

$$\mu(A) = \sup \{\mu(B) : \ B \subset A, \ \mu(B) < \mu(A)\}.$$

Denotamos $\alpha = \sup \{\mu(B) : \ B \subset A, \ \mu(B) < \mu(A)\}$. Como A no es un átomo, existe $B \subset A$ tal que $0 < \mu(B) < \mu(A)$. De la igualdad

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \tag{1}$$

se deduce necesariamente que uno de los dos subconjuntos B, $A \setminus B$ ha de tener medida mayor o igual que $\mu(A)/2$. Por tanto,

$$\mu(A) \leq 2\alpha$$

pero la desigualdad que nos interesa demostrar es $\mu(A) \leq \alpha$. Vamos a razonar por contradicción suponiendo que $\mu(A) > \alpha$. Consideraremos dos casos distintos, según la medida de A sea finita o infinita.

Caso 1: $\alpha < \mu(A) = \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $B_k \subset A$ tal que

$$\alpha - \frac{1}{k} < \mu(B_k) \leq \alpha\,. \tag{2}$$

Si definimos $C_n = \cup_{k=1}^n B_k$ y $C = \cup_n C_n$ es claro que

$$\mu(C) = \lim_n \mu(C_n)\,. \tag{3}$$

Teniendo en cuenta (2) y la definición de C_n

$$\alpha - \frac{1}{n} \leq \mu(B_n) \leq \mu(C_n) \leq \mu(B_1) + \cdots \mu(B_n) < \infty = \mu(A)$$

lo cual implica que, necesariamente,

$$\alpha - \frac{1}{n} \leq \mu(C_n) \leq \alpha \tag{4}$$

y esto, usando (3), nos lleva a que $\mu(C) = \alpha$. Razonamos ahora con $A \setminus C$: como no es un átomo, existe un subconjunto $D \subset A \setminus C$ tal que $0 < \mu(D) < \mu(A \setminus C$, y por tanto $0 < \mu(D) < \infty$. Esto último es lo que de verdad importa ya que, por un lado, tendremos $0 < \mu(C \cup D) < \infty$ y, por otro,

$$\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D) = \alpha + \mu(D) > \alpha$$

en contra de la definición de α.

Caso 2: $\alpha < \mu(A) < \infty$. La idea para llegar a una contradicción en este caso es menos intuitiva. Consideramos $B \subsetneq A$ tal que

$$0 \leq \alpha - \frac{\mu(A) - \alpha}{3} < \mu(B) \leq \alpha\,.$$

Un razonamiento similar al realizado antes con A asegura que existe $C \subsetneq A \setminus B$ tal que

$$\mu(C) \geq \frac{\mu(A \setminus B)}{2} = \frac{\mu(A) - \mu(B)}{2} \geq \frac{\mu(A) - \alpha}{2}\,.$$

Si consideramos el conjunto $B \cup C$ resulta que $B \cup C \subsetneq A$. Además, como $B \cap C = \emptyset$, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \geq \mu(B \cup C) &= \mu(B) + \mu(C) \\ &\geq \alpha - \frac{\mu(A) - \alpha}{3} + \frac{\mu(A) - \alpha}{2} \\ &> \alpha\,. \end{aligned}$$

Existe otra estrategia más sencilla y directa que la anterior para resolver el caso $\mu(A) < \infty$, que consiste en buscar en A subconjuntos que tengan medida pequeña. Así, sus complementarios en A tendrán una medida cercana a $\mu(A)$. Para encontrar estos subconjuntos, hay que observar que la igualdad (1) implica también que uno de los dos conjuntos B, $A \setminus B$ tiene medida menor o igual que $\mu(A)/2$. Llamamos a ese conjunto A_1 y razonamos ahora del mismo modo que con A: como A_1 no es un átomo, existe $A_2 \subsetneq A_1$ tal que

$$0 < \mu(A_2) \leq \frac{\mu(A_1)}{2} \leq \frac{\mu(A)}{2^2}\,.$$

Usando inducción, construimos una sucesión $\{A_n\}$ de subconjuntos de A que satisfacen

$$0 < \mu(A_n) \leq \frac{\mu(A)}{2^n}\,.$$

De estas dos últimas desigualdades se deduce que

$$\mu(A) > \mu(A \setminus A_n) \geq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\mu(A)\,.$$

de donde resulta

$$\sup\{\mu(B) :\; B \subset A,\; \mu(B) < \mu(A)\} \geq \mu(A)\,.$$

4.– Sea

$$f(x,y) = \frac{x^5 y^5 \operatorname{sen}(y^4)}{(x^6 + y^6)^{4/3}}$$

para $0 < x < \infty$, $0 < y < \sqrt[4]{5\pi}$. Demostrar que f es integrable en su dominio de definición $(0,\infty) \times (0, \sqrt[4]{5\pi})$ y calcular su integral.

Para ver que $|f|$ es integrable, estimamos

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^5 y^5}{(x^6+y^6)^{4/3}}$$

y aplicamos el teorema de Fubini (ya que $|f|$ es una función positiva):

$$\begin{aligned}
\iint |f| &\leq \int_0^{\sqrt[4]{5\pi}} y^5 \int_0^\infty \frac{x^5}{(x^6+y^6)^{4/3}}\ dx\, dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{5\pi}} y^5 \left[(x^6+y^6)^{-1/3}\right]_0^\infty\ dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{5\pi}} y^3\ dy < \infty\,.
\end{aligned}$$

Para calcular el valor de la integral también aplicamos el teorema de Fubini (podemos hacerlo porque ahora ya sabemos que f es una función integrable):

$$\begin{aligned}
\iint f &\leq \int_0^{\sqrt[4]{5\pi}} y^5 \operatorname{sen}(y^4) \int_0^\infty \frac{x^5}{(x^6+y^6)^{4/3}}\ dx\, dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{5\pi}} y^5 \operatorname{sen}(y^4) \left[(x^6+y^6)^{-1/3}\right]_0^\infty\ dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{5\pi}} y^3 \operatorname{sen}(y^4)\ dy \\
&= -\frac{1}{8}\left[\cos(y^4)\right]_0^{\sqrt[4]{5\pi}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$