MODELIZACIÓN

TEMA 1 ANÁLISIS DIMENSIONAL

Ley Física

- Ejemplo: $m x''(t) = F(x,t) \qquad t \in [0,T]$

$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = V_0$$

Magnitudes $\longrightarrow \begin{cases} m \text{ (masa)}, & T \\ x \text{ (posición)}, & x_0 \\ F \text{ (fuerza)}, & V_0 \end{cases}$

$\Longrightarrow f(m, x, F, T, x_0, V_0) = 0 \qquad$ (e.d. $m x''(t) - F(x,t) = 0$)

$[m] = M$ (magnitud elemental) masa

$[x] = L$ (magnitud elemental) longitud

$[T] = \tau$ (magnitud elemental) tiempo

$[x_0] = L = [x]$

$[V_0] = L . \tau^{-1}$ Velocidad

$[F] = [m . x''] = M . L . \tau^{-2}$ fuerza

- Mal ejemplo de Ley física: $\begin{cases} v = at \\ x = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v - at = 0 \\ x - \frac{1}{2} a t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow v - at - x + \frac{1}{2} a t^2 = 0$

No es una ley, si hacemos cambio de mediciones no tiene por qué cumplirse.

Estamos mezclando magnitudes distintas, luego NO es una Ley.

Vamos a suponer la existencia de $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$, que son n magnitudes elementales, es decir, que cada L_i es independiente del resto.

DEFINICIÓN: Una magnitud A tiene DIMENSIÓN $L_1^{a_1} \cdot \dots \cdot L_n^{a_n}$ si suponemos que el número real 'a' es una medida de A en el sistema $L_1 \cdots L_n$, entonces si cambiamos a un sistema $L_1' \cdots L_n'$ donde $L_i' = \lambda_i L_i$ entonces la medida de A en $L_1' \cdots L_n'$ es $a' = a\lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}$

Ejemplo (Visto antes) $\longrightarrow$ Ley de Newton

$$[v_0] = (1,-1,0) \qquad \text{en} \quad (L, \tau, M)$$
$$[F] = (1,-2,1)$$

Matriz de dimensiones de la Ley:

$$\begin{array}{c} L \\ \tau \\ M \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \;x_0 & \;v_0 & \;\;T & \;\;F & \;\;m & \;\;x \end{matrix} \end{array}$$

RECUERDO:

$L_1, L_2, \dots, L_n$ magnitudes elementales

A decimos que es una magnitud de dimensión $[A] = L_1^{a_1} \cdot \dots \cdot L_n^{a_n}$ si dado 'a' medida de A en las unidades de $L_1, \dots, L_n$, entonces, bajo el cambio de unidades $L_i' = \lambda_i L_i$, la medida de A en el sistema $L_1', \dots, L_n'$ es $a' = a\lambda_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{a_n}$.

Ejemplo:

$L_1 = \{L\}$ $\quad$ $L_2 = \{T\}$ $\quad$ $[V] = L_1 . L_2^{-1}$

$L_1 = \{m\}$ $\quad$ $L_2 = \{s\}$ $\quad$ $L_1' = \{Km\}$ $\quad$ $L_2' = \{h\}$

$L_1' = \lambda_1 L_1$ $\quad$ $1 . \frac{1}{1000} = L_1'$ $\quad$ $1h = 3600\, s$ $\quad$ $L_2 = 3600\, L_2'$

$L_2' = \lambda_2 L_2$ $\quad$ $1 . \frac{1}{3600} = L_2'$ $\quad$ $1 Km = 1000\, m$ $\quad$ $L_1 = 1000\, L_1'$

$v = 30\, m/s$ $\quad$ $v' = v . \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{3600}\right)^{-1} = 30 . \frac{3600}{1000} = 108\, Km/h$

PROPOSICIÓN: Sean A, B magnitudes tales que:

$$[A] = L_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot L_n^{a_n} \quad y \quad [B] = L_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot L_n^{b_n}$$

Sea C otra magnitud dependiente de A y B tal que si a, b, c son medidas de A, B, C, $\exists\, p, q, d$ tal que $c = d a^p b^q$ con p, q, d independientes de las unidades $L_1, \ldots, L_n$

Entonces $[C] = L_1^{a_1 p + b_1 q} \cdot \ldots \cdot L_n^{a_n p + b_n q}$

demostración

Sean $L_1' = \lambda_1 L_1, \ldots, L_n' = \lambda_n L_n$. Entonces $a' = a \lambda_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{a_n}$
$b' = b \lambda_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{b_n}$

$$c' = d a'^p b'^q = d\left(a \lambda_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{a_n}\right)^p \left(b \lambda_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{b_n}\right)^q =$$
$$= d a^p b^p . \lambda_1^{a_1 p + b_1 q} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{a_n p + b_n q} = c \lambda_1^{a_1 p + b_1 q} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{a_n p + b_n q} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [C] = L_1^{a_1 p + b_1 q} \cdot \ldots \cdot L_n^{a_n p + b_n q} \quad \blacksquare$$

Dados $q_1, \dots, q_m$ magnitudes $[q_i] = L_1 \cdots L_n$

llamamos MATRIZ DE DIMENSIONES a:

nº magnitudes elementales

nº magnitudes del problema

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{m2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}$$

matriz de n filas y m columnas

<u>DEFINICIÓN</u>: Una magnitud Π se dice adimensional si $[\Pi] = 1$.

<u>Ejemplo</u> de la 2ª Ley de Newton:

Teníamos x, x_0, v_0, T, F, m

Una magnitud adimensional es $y = \dfrac{x}{x_0}$

y ahora $y(0) = 1$ (siempre y cuando $x_0 \neq 0$)

$\dot{y}(0) = \dfrac{v_0}{x_0}$ (es una magnitud distinta)

Otro cambio posible es $\tau = \dfrac{t}{T}$ y podemos trabajar con tiempo entre 0 y 1.

$$y' = \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{T}{x_0} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$y'(0) = \frac{T}{x_0} v_0 = \tilde{q} \longrightarrow [\tilde{q}] = 1$$

La ecuación que teníamos era $m\ddot{x} = F$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x_0}{T} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t} = \frac{x_0}{T} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) = \frac{x_0}{T} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{x_0}{T^2} y''$$

$$\frac{m x_0}{T^2} y'' = F \implies y'' = \frac{T^2}{m x_0} F = f$$

$$[f] = [F] \frac{[T]^2}{[m][x_0]} = \frac{[m][x_0]}{[T]^2} \cdot \frac{[T]^2}{[m][x_0]} = 1$$

$$\Rightarrow y'' = f \text{ con } \tau \in [0,1], \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{T \cdot v_0}{x_0} = V_0$$

Hemos escrito la ley con magnitudes adimensionales.

<u>DEFINICIÓN</u>: Una ley $f(q_1,\dots,q_m)=0$ se dice que es INVARIANTE frente al cambio de unidades $L_1' = \lambda_1 L_1, \dots, L_n' = \lambda_n L$ si verifica que $f(q_1',\dots,q_m')=0$ para $q_1',\dots,q_m'$ las medidas de $q_1,\dots,q_m$ en las nuevas unidades.

Una ley es invariante cuando sigue siendo cierta cuando cambio las unidades del problema.

<u>TEOREMA Pi (Backinghan)</u>: Sea $f(q_1,\dots,q_m)=0$ una ley invariante con $q_1,\dots,q_m$ magnitudes con matriz de dimensiones

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tal que $n < m$ y esta matriz es de rango $r \leq n$.

Entonces existen $m-r$ cantidades $\Pi_1,\dots,\Pi_{m-r}$ que van a ser magnitudes adimensionales y tales que la ley invariante es equivalente a una relación $F(\Pi_1,\dots,\Pi_{m-r})=0$.

<u>demostración</u>

1°) Existen $\Pi_1,\dots,\Pi_{m-r}$ magnitudes adimensionales independientes entre tal que $\Pi = q_1^{\alpha_1}\cdots q_m^{\alpha}$

$$A = \begin{array}{c|c} & \\ \begin{matrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{matrix} \end{array}$$

Buscamos $[\Pi]=1$

Por def. tenemos $[\Pi] = \left(L_1^{a_{11}}\cdots L_n^{a_{1n}}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(L_1\cdots L_n\right.$

$= L_1^{\alpha_1 a_{11}+\alpha_2 a_{21}+\dots+\alpha_m a_{m1}} \cdots\cdots L_n^{\alpha_1 a_{1n}+\alpha_2 a_{2n}+\dots+\alpha_m}$

Entonces tenemos:

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_m a_{m1} = 0 \\ \alpha_2 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_m a_{m2} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n a_{1n} + \alpha_n a_{2n} + \dots + \alpha_m a_{mn} = 0 \end{cases}$$

Encontrar las magnitudes adim es resolver un sistema homogén de n ecuacione y m incógnitas

Como la matriz A es de rango r, entonces existen m−r soluciones linealmente independientes. (Teorema Rouche-Frobenius).

2) Caso particular: $m=4 \quad n=2 \quad r=n \quad r=2$

Las dos ecuaciones que tenemos son:

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31} + \alpha_4 a_{41} = 0$$

$$\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{32} + \alpha_4 a_{42} = 0$$

Como el rango es 2, sin pérdida de generalidad, puedo suponer que $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$.

Entonces por Rouche-Frobenius existen $C_{31}, C_{32}, C_{41}, C_{42}$ tales que

$$\alpha_1 = -\alpha_3 C_{31} - \alpha_4 C_{41} \qquad \alpha_3 = 1 \qquad \alpha_4 = 0$$

$$\alpha_2 = -\alpha_3 C_{32} - \alpha_4 C_{42} \qquad \alpha_3 = 0 \qquad \alpha_4 = 1$$

Obtenemos: $\Pi_1 = q_1^{-C_{31}} q_2^{-C_{32}} q_3^{\alpha_3 = 1} q_4^{\alpha_4 = 0} \Rightarrow q_3 = \Pi_1 q_1^{C_{31}} q_2^{C_{32}}$

$\Pi_2 = q_1^{-C_{41}} q_2^{-C_{42}} q_3^{\alpha_3 = 0} q_4^{\alpha_4 = 1} \Rightarrow q_4 = \Pi_2 q_1^{C_{41}} q_2^{C_{42}}$

$$0 = f(q_1, q_2, q_3, q_4) = f(q_1, q_2, \Pi_1 q_1^{C_{31}} q_2^{C_{32}}, \Pi_2 q_1^{C_{41}} q_2^{C_{42}}) =$$

$$= G(q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2)$$

Vamos a hacer desaparecer q_1, q_2 con un cambio de variable:

$$L_1' = \lambda_1 L_1 \longrightarrow q_1' = q_1 \lambda_1^{a_{11}} \lambda_2^{a_{12}} \qquad \Pi_1' = \Pi_1$$

$$L_2' = \lambda_2 L_2 \longrightarrow q_2' = q_2 \lambda_1^{a_{21}} \lambda_2^{a_{22}} \qquad \Pi_2' = \Pi_2$$

$$0 = G(q_1, q_2, \Pi_1, \Pi_2) = G(q_1', q_2', \Pi_1, \Pi_2)$$

$$\begin{matrix} q_1' = 1 \\ q_2' = 1 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} q_1 \lambda_1^{a_{11}} \lambda_2^{a_{12}} = 1 \\ q_2 \lambda_1^{a_{21}} \lambda_2^{a_{22}} = 1 \end{matrix} \; ; \; \begin{matrix} \operatorname{Ln} q_1 + a_{11} \overbrace{\operatorname{Ln} \lambda_1}^{y_1} + a_{12} \overbrace{\operatorname{Ln} \lambda_2}^{y_2} = 0 \\ \operatorname{Ln} q_2 + a_{21} \underbrace{\operatorname{Ln} \lambda_1}_{y_1} + a_{22} \underbrace{\operatorname{Ln} \lambda_2}_{y_2} = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = -\ln q_1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = -\ln q_2 \end{matrix} \Rightarrow \exists\, y_1, y_2$$

$$\Rightarrow 0 = f(q_1, q_2, q_3, q_4) = G(1, 1, \Pi_1, \Pi_2) = F(\Pi_1, \Pi_2)$$

TEMA 2 MODELOS MATRICIALES DISCRETOS

DINÁMICA DISCRETA DE POBLACIONES

$y(K) = \{$ población de elefantes hembras $\}$

$y(K+1) = \{$ los que sobreviven $\} + \{$ las que nacen $\} - \{$ las que emigran $\}$
$+ \{$ las que inmigran $\}$

Número de años $\longrightarrow K$

Tasa de supervivencia $\longrightarrow s$

Tasa de natalidad $\longrightarrow n$

Tasa de emigración $\longrightarrow$ a veces $= 0$

Puntos de inmigración $\longrightarrow$ a veces $= 0$

(por ejemplo si los elefantes son de Bostwana y hay muro anti-migración)

Ejemplo 1 Tasa de natalidad: 30%
Tasa de supervivencia: 80%

$$y(K+1) = 0'8\, y(K) + 0'3\, y(K) = 1'1 \cdot y(K) = a\, y(K)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(K) = a^K y(0)} \qquad a > 1$$

α tasa de crecimiento de población del 1[0]

$$a = 1 + \alpha \qquad \alpha = 0'1 \qquad \lim_{K\to\infty} y(K) = \infty$$

Para controlar a la población y para que no diverja habrá que hacer un holocausto elefantil.

Ejemplo 2: dinamica de población de la mariposa monarca

$$y(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix} \text{ donde } \begin{array}{l} y_1(k) = \{n^{\underline{o}} \text{ de crisálidas}\} \\ y_2(k) = \{n^{\underline{o}} \text{ de mariposas adultas}\} \end{array}$$

K nos indica el periodo de semana en que estamos

Cada semana maduran el 30% de las crisálidas.

Cada semana sobreviven 60% de las adultas

Las crisalidas o se transforman en adultas o se mantienen como crisálidas

Por cada adulta, una oruga se transforma en crisálida

$$\begin{array}{l} y_1(k+1) = 0'7\, y_1(k) + y_2(k) \\ y_2(k+1) = 0'3\, y_1(k) + 0'6\, y_2(k) \end{array} \Rightarrow y(k+1) = A\, y(k) \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0'7 & 1 \\ 0'3 & 0'6 \end{pmatrix}$$

Supongamos que tenemos una población inicial de $y(0) = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y(1) = A\, y(0) = \begin{pmatrix} 1700 \\ 900 \end{pmatrix} \Rightarrow y(2) = A\, y(1) = A^2 y(0)$$

En general, $\boxed{y(k) = A^k y(0)}$

¿Qué pasa con estas poblaciones?

Diagonalización de Jordan: $A = PJP^{-1}$

J es más facil de manejar en algunos estupendos casos es diagonal. $\Rightarrow A^k = PJ^kP^{-1}$

Una condición suficiente es que la matriz sea simétrica

Hay que estudiar el espectro de A (estudiar sus autovalores)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (0'7 - \lambda)(0'6 - \lambda) - 0'3 = \lambda^2 - 1'3\lambda + 0'42 - 0'3$$

$$\Rightarrow \text{raíces: } \begin{array}{l} \lambda_1 = 1'2 \\ \lambda_2 = 0'1 \end{array}$$

Autovector de $\lambda_1 = 1'2$:

$$\begin{pmatrix} -0'5 & 1 \\ 0'3 & -0'6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = 2u_2 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Autovector de $\lambda_2 = 0'1$:

$$\begin{pmatrix} 0'6 & 1 \\ 0'3 & 0'5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{-5}{3} v_2 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) Tenemos un autovector dominante $-0'1 = \lambda_2 < \lambda_1 = 1'2$

DOMINANTE: λ_1 tal que $\lambda_1 > |\lambda_i| \quad i \neq 1$

λ_1 es siempre positivo y autovector de componentes positivas

↳ si $\exists \lambda_i \quad i \neq 1$ tal que $|\lambda_i| \geq \lambda_1$

nuestro modelo es malo.

Si el autovector de λ_1 tiene alguna comp. negativa, el modelo es malo.

$$y(K) = A^K y(0) \qquad y(0) = C_1 u_1 + C_2 u_2 \qquad y(0) \geq 0$$

$$y(K) = A^{K-1} A \cdot y(0) = A^{K-1}(C_1 \lambda_1 u_1 + C_2 \lambda_2 u_2) = C_1 \lambda_1^K u_1 + C_2 \lambda_2^K u_2 =$$

$$= \lambda_1^K \left(C_1 u_1 + C_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^K u_2 \right) \xrightarrow{K \to \infty} \lambda_1^K C_1 u_1 \longrightarrow \infty$$

λ_1 dominante

porque $\lambda_1 > 1$

Si $\lambda_1 < 1 \Rightarrow$ extinción

Si $\lambda_1 > 1 \Rightarrow$ invasión

$$X(K) = \lambda_1^K c_1 u_1 + \lambda_2^K c_2 u_2$$

$$|v| = \sum_i v_i \quad , \quad |u_1| = 1$$

$$\frac{X(K)}{|X(K)|} = \frac{\lambda_1^K c_1 u_1 + \lambda_2^K c_2 u_2}{\lambda_1^K c_1 \underbrace{|u_1|}_{1} + \lambda_2^K c_2 |u_2|} = \frac{c_1 u_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^K c_2 u_2}{c_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^K c_2 |u_2|}$$

A coeficientes positivos ; $X(0)$ componentes positivas

$$\boxed{\lim_{K \to \infty} \frac{X(K)}{|X(K)|} = \frac{c_1 u_1}{c_1} = u_1}$$

(qué pasa si $c_1 = 0$)

$$X(0) = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

$$c_1 u_1^1 + c_2 u_2^1 > 0$$

$$c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 > 0$$

$$\text{si } u_2^2 < 0 \implies c_1 u_1^2 > -c_2 u_2^2$$

- $c_2 = 0 \qquad \underset{0}{\overset{X(0)}{\vee}} = c_1 u_1 \qquad c_1 \neq 0$
- $c_2 > 0 \implies c_1 > 0$
- $c_2 < 0 \implies c_1 u_1^1 > -c_2 u_2^1 \implies c_1 > 0$

Observación: La tasa de crecimiento viene dada por el autovalor dominante, y el estado estacionario (el equilibrio de las distintas clases de la población) viene dado por el autovector del autovalor dominante.

Volvemos al ejemplo anterior:

Buscamos una tasa de supervivencia para las mariposas adulta[s] de tal manera que la población se mantenga estable.

$\begin{pmatrix} 0'7 & 1 \\ 0'3 & \alpha \end{pmatrix}$ Antes teníamos una tasa de superv. del 60% ($\alpha = 0'6$

Buscamos α tal que $\lambda_1 = 1$.

$$P(\lambda) = (0'7-\lambda)(\alpha-\lambda) - 0'3 = \lambda^2 - \alpha\lambda - 0'7\lambda + 0'7\alpha - 0'3 =$$

$$= \lambda^2 - (0'7+\alpha)\lambda + 0'7\alpha - 0'3$$

despejamos α

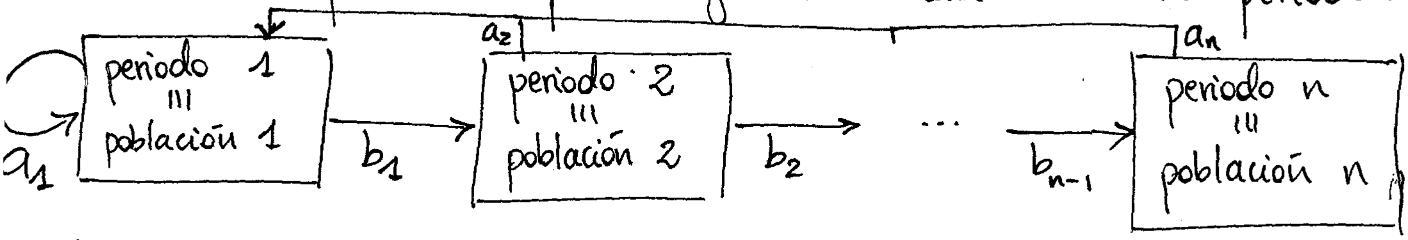
$$\Longrightarrow \lambda = \frac{0'7+\alpha \pm \sqrt{(0'7+\alpha)^2 - 4.(0'7\alpha - 0'3)}}{2} = \ldots = 1$$

$$\Longrightarrow \alpha = 0$$

Hay que matarlas a todas

Modelos de Leslie

Partimos la población por rango de edad en n periodos.



b_i va a ser la tasa de supervivencia de la población i.
a_i va a ser la tasa de descendientes/reproducción de la pob. i.

$y_i(k) = \{n^{\circ}$ de individuos i en la etapa $k\}$

$$y_1(k+1) = a_1 y_1(k) + \cdots + a_n y_n(k)$$
$$y_2(k+1) = b_1 y_1$$
$$\vdots$$
$$y_n(k+1) = b_n y_{n-1}(k)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 \;\; b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1º) Veamos que $\exists \lambda_i > 0$:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & -\lambda & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & b_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & & 0 \\ b_2 & \ddots & \\ 0 & \ddots & b_{n-1} \;\; -\lambda \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & a_n \\ b_2 & -\lambda & 0 \\ 0 & & \ddots \\ \vdots & 0 & -\lambda \\ 0 & & \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1-\lambda)(-\lambda)^{n-1} - b_1 a_2 \begin{vmatrix} -\lambda & & \\ b_3 & \ddots & \\ & b_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} + b_1 b_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ b_3 & -\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & b_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \cdots = (-\lambda)^n + a_1(-\lambda)^{n-1} + b_1 a_2 \lambda^{n-2}(-1)^{n-1} + b_1 b_2 a_3 \lambda^{n-3}(-1)^{n-1} + \cdots$$

$$+ b_1 \cdots b_{n-1} a_n (-1)^{n-1} \implies \boxed{p(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - b_1 a_2 \lambda^{n-2} - b_1 b_2 a_3 \lambda^{n-3} - \cdots - b_1 \cdots b_{n-1} a_n}$$

En conclusión: $p(\lambda) = \lambda^n - (A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n)$

donde $A_1 = a_1$, $A_i = b_1 \cdots b_{i-1} a_i$ $\quad i=2,\dots,n$

1) Existe un autovalor positivo, λ_1: $\left(\begin{array}{c}\text{Si } a_i \neq 0 \\ \text{para algún } i\end{array}\right)$

$p(\lambda)=0 \qquad \lambda^n = A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n$

$\lambda > 0 \qquad 1 = \dfrac{A_1}{\lambda} + \cdots + \dfrac{A_n}{\lambda^n} = q(\lambda)$

i) $\lim_{\lambda\to\infty} q(\lambda) = 0$

ii) $\lim_{\lambda\to 0} q(\lambda) = \infty$

iii) $q'(\lambda) < 0$

Notemos $A_i \geq 0$. Todos los $A_i = 0 \iff a_i = 0 \ \forall i$

$\lim_{k\to\infty} x(k) = 0$, en particular $x(k)=0$

El caso $a_i = 0 \ \forall i$ es trivial (extinción)

La hipótesis de que exista $a_j \neq 0$ para algún i es natural.

$\exists \lambda > 0$ tal que $p(\lambda) = 0 \iff \exists \lambda$ tal que $q(\lambda) = 1$.

Por continuidad de que q esto ocurre.

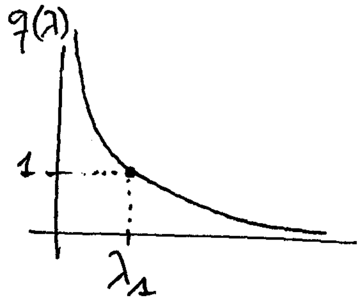
2) Existe un único autovalor positivo

$$q'(\lambda) = \frac{-A_1}{\lambda^2} - \frac{2A_2}{\lambda^3} - \cdots - \frac{nA_n}{\lambda^{n+1}} \quad \forall \lambda \in (0,\infty)$$

$q(\lambda)$ es estrictamente decreciente

λ_1 es tal que $q(\lambda_1) = 1$.

$\forall \lambda > \lambda_1 \quad q(\lambda_1) < 1$ porque $q'(\lambda) < 0$



3) λ_1 es simple

λ_1 no es simple $\iff p'(\lambda_1) = 0$

$p(\lambda) = \lambda^n(1 - q(\lambda)) \quad \forall \lambda \neq 0$

Si λ_1 no es simple $\quad 0 = n\lambda_1^{n-1}(1 - q(\lambda_1)) - \lambda^n q'(\lambda_1)$

$q(\lambda_1) = 1 \qquad 0 = -\lambda^n q'(\lambda_1) \iff q'(\lambda_1) = 0$

pero $q'(\lambda) < 0 \quad \forall \lambda \in (0,\infty)$. Supuesto falso y λ es simple.

4) $\forall \lambda_j$ autovalor de L (matriz de Leslie) tenemos que $|\lambda_j| \leq \lambda_1$.

i) $-\lambda_j > \lambda_1 \qquad \lambda_i < 0$

$$0 = p(\lambda_j) \iff 1 = q(\lambda_i)$$

$$0 = p(\lambda_1) \iff 1 = q(\lambda_1)$$

$$0 = q(\lambda_j) - q(\lambda_1) = A_1\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_1}\right) + A_2\left(\frac{1}{\lambda_j^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}\right) + \cdots + A_n\left(\frac{1}{\lambda_j^n} - \frac{1}{\lambda_1^n}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_1} < 0 \qquad \frac{1}{\lambda_j^2} - \frac{1}{\lambda_1} < 0$$

$q(\lambda_j) - q(\lambda_1) < 0 \implies$ contradicción con que λ_j, λ_1 son raíces de $p(\lambda) = 0$.

ii) Supongamos $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tal que $\mu = |\lambda_j| > \lambda_j$ $\lambda_j = \mu e^{i\theta}$

$$0 = \frac{A_1}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_j} - 1\right) + \frac{A_2}{\lambda_1^2}\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right)^2 - 1\right) + \cdots + \frac{A_n}{\lambda_1^n}\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right)^2 - 1\right)^n$$

$$q(\lambda_j) - q(\lambda_1) = \frac{A_1}{\lambda_1}\left(\alpha e^{i\theta} - 1\right) + \frac{A_2}{\lambda_1^2}\left(\alpha^2 e^{i2\theta} - 1\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{A_n}{\lambda_1^n}\left(\alpha^n e^{in\theta} - 1\right)$$

$$Re\left(\alpha e^{i\theta} - 1\right) < 0$$

$$Re\left(\alpha^2 i e^{i2\theta} - 1\right) < 0$$

$$\cdots$$

$$Re\left(\alpha^n e^{in\theta} - 1\right) < 0$$

$0 = Re(q(\lambda_j) - q(\lambda_1)) < 0$ contradicción y supuesto falso

5) Si existen dos coeficientes a_i contiguos distintos de cero entonces $|\lambda_j| < \lambda_1 \quad \forall j \neq 1 \implies \lambda_1$ es dominant

i) Supongamos que $-\lambda_1$ es autovalor $0 = q(-\lambda_j) - q(\lambda$

$$0 = A_1\left(\frac{-1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1}\right) + 2A_3\left(\frac{-1}{\lambda_1}\right)^3 + \cdots$$

con todos los coeficientes impares y como algún impar es distinto entonces llegamos a que $0 < 0$ #

ii) Supongamos que $\lambda_1 e^{i\theta}$, $\lambda_1 e^{-i\theta}$ son autovalores.

$$1 = q(\lambda_1) = \frac{A_1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{A_n}{\lambda_1^n}$$

$$1 = q(e^{i\theta}\lambda_1) = \frac{A_1}{\lambda_1}e^{-i\theta} + \cdots + \frac{A_n}{\lambda_1^n}e^{-ni\theta}$$

$$1 = q(e^{-i\theta}\lambda_1) = \frac{A_1}{\lambda_1}e^{i\theta} + \cdots + \frac{A_n}{\lambda_1^n}e^{ni\theta}$$

$$q(e^{i\theta}\lambda_1) + q(e^{-i\theta}\lambda_1) - 2q(\lambda_1) = 0$$

$$\shortparallel$$

$$2\frac{A_1}{\lambda_1}\underbrace{(\cos\theta - 1)}_{\leq 0} + \frac{2A_2}{\lambda_1^2}\underbrace{(\cos 2\theta - 1)}_{\leq 0} + \cdots + 2\frac{A_n}{\lambda_1^n}\underbrace{(\cos n\theta - 1)}_{\leq 0} = 0 \quad (*)$$

Tenemos que ver que es falso.

La condición que tenemos es: $\exists a_i, a_{i+1} \neq 0 \iff A_i, A_{i+1} \neq 0$

Para que se cumpla $(*)$ al menos es necesario que

$\cos i\theta - 1 = 0$, $\cos((i+1)\theta) - 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} i\theta = n2\pi \\ (i+1)\theta = m2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \theta = (m-n)2\pi \quad \text{contradicción con } \theta \in (0,\pi)$$

b) Tasa de crecimiento

$p(\lambda) = \lambda^n - A_1\lambda^{n-1} - \cdots - A_n$, donde $A_1 = a_1$, $A_i = a_i b_1 \cdots b_{i-1}$

λ_1 es autovalor dominante

$\lambda_1^n = A_1\lambda_1^{n-1} + \cdots + A_n$

$1 = \frac{A_1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{A_n}{\lambda_1^n}$

Tasa de crecimiento es el número:

$\Lambda = A_1 + \cdots + A_n = a_1 + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}\cdots b_1$

$\Lambda = 1 \iff \lambda_1 = 1$

$\Lambda < 1 \iff 0 < \lambda_1 < 1 \qquad (q(1) < 1 \ , \ q(0) \longrightarrow \infty)$

$\Lambda > 1 \iff \lambda_1 > 1 \qquad (q(1) > 1 \ , \ q(\infty) \longrightarrow 0)$

7) Autovector de λ_1: $(L-\lambda_1 I)=0 \Longrightarrow$ sist. de orden $n-1$

$$\begin{aligned} b_1x_1-\lambda_1x_2&=0 \\ b_2x_2-\lambda_1x_3&=0 \\ &\vdots \\ b_{n-1}x_{n-1}-\lambda_1x_n&=0 \end{aligned}$$

$$x_2=\frac{b_1}{\lambda_1}x_1$$

$$x_3=\frac{b_2}{\lambda_1}x_2=\frac{b_2b_1}{\lambda_1^2}x_1$$

$$x_n=\frac{b_{n-1}}{\lambda_1}x_{n-1}=\frac{b_{n-1}b_{n-2}}{\lambda_1^2}x_{n-2}=\frac{b_{n-1}\cdots b_1}{\lambda_1^{n-1}}x_1$$

$$V=\frac{1}{R}\left(1,\frac{b_1}{\lambda_1},\frac{b_1b_2}{\lambda_1^2},\dots,\frac{b_1\cdots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}\right), \text{ con } R=1+\frac{b_1}{\lambda_1}+\dots+\frac{b_1\cdots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}$$

8) Pregunta: tenemos un dato inicial, vector $x\geq 0$ pero $\vec{x}\neq\vec{0}$.

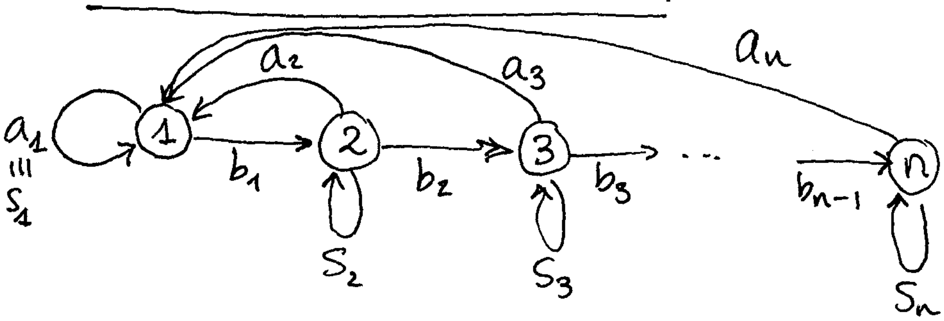
$$\left(\frac{L}{\lambda_1}\right)^k x \longrightarrow V$$

¿Converge?

¿Qué pasa si converge?

Bajo la hipótesis de que λ_1 es dominante

Modelo de Leftkovich



$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & S_2 & & 0 \\ & b_2 & \ddots & \\ 0 & & \ddots\; b_{n-1} & S_n \end{pmatrix}$$

Veremos más adelante los teoremas de:

- Perrón, con matrices $M>0$
- Perrón-Frobenius, con matrices $M\geq 0$.

Ejemplo Perron: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ autovalores $= 0, 2$

Autovectores: $\lambda_1 = 2 \longrightarrow v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0 \longrightarrow w = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\left(\frac{A}{2}\right)^K x$ $\qquad x = av + bw$

$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = x_1$

$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = x_2$ $\Longrightarrow a \neq 0$ $\qquad \boxed{x \geq 0}$

$$0 < \left(\frac{A}{2}\right)^2 x = \frac{2av}{2} + 0.bw = av$$

La convergencia va a ser al autovector del autovalor dominante.

Sea L una matriz de Leslie: $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

$x \geq 0$ (vector) $\quad |x| = \sum x_i \quad \frac{L^K x}{|L^K x|} \xrightarrow[K \to \infty]{} v_1$

donde v_1 es el autovector del autovalor $\lambda_1 > 0$

LEMA: Si $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-i} = 0$ entonces

$x = \sum_{j=i}^{n} x_j e_{n-K}$ $\qquad L^i x = 0$

$p(\lambda) = \lambda^n - A_1 \lambda^{n-1} \cdots A_{n-i} \lambda^i = \lambda^{i+1}(\lambda^{n-i} \cdots)$

$A_K = b_1 \cdots b_{i-1} a_K$

$L e_n = 0$

$L e_{n-1} = b_{n-1} e_n \quad , \quad L^2 e_{n-1} = 0$

$L e_{n-i} = b_{n-i} e_{n-i+1} \quad , \quad L^2 e_{n-i} = b_{n-i+1} b_{n-i} e_{n-i+2} \, ,$

$L^i e_{n-i} = b_{n-2} \cdots b_{n-i} e_n \quad , \quad L^{i+1} e_{n-i} = 0$

Supongamos $x \geqslant 0$ tal que $x \neq \sum_{k=0}^{i} x_k e_{n-k}$

La idea es que el resto de los autovalores verifican que $|\lambda_j| < \lambda_1$, y estos autovalores sabemos que son negativos o complejos.

1) $\mu = -1$, v_1 su autovector $v_1 \neq 0$

$0 \leq L v_1 = -v_1 \implies v_1 = 0$ contradicción

<u>LEMA</u>: Dado v autovector de L con autovalor negativo, entonces v tiene componentes positivas y negativas.

2) Sea v_1 tal que $Lv_1 = -v_1$, v_2 tal que $Lv_2 = -av_2$, $a \in (0,1)$

$0 \leq x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ $\quad$ $0 \leq Lx = -\alpha_1 v_1 - a\alpha_2 v_2 =$

$$= \underbrace{-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2}_{\leq 0} + \underbrace{(1-a)\alpha_2 v_2}_{\geq 0}$$

$\implies \alpha_2 v_2 \geqslant 0$

Tanto $\alpha_2 = 0$ como $v_2 \geqslant 0$ es imposible.

No me hago responsable de la falta de formalización

3) Una matriz negativa del tipo $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$Lv_1 = -v_1$

$Lv_2 = v_1 - v_2$ $\quad$ $L^2 v_2 = Lv_1 - Lv_2 = -v_1 - v_1 + v_2 = -2v_1 + v_2 =$

$$= -2(Lv_2 + v_2) + v_2 = -2Lv_2 + v_2$$

$$(L+I)^2 v_2 = L^2 v_2 + 2Lv_2 + v_2 = 0$$

Supongamos que $\exists\, x \geqslant 0$ tal que $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$0 \leq Lx = -\alpha_1 v_1 + \alpha_2 L v_2 = \underbrace{-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2}_{\geq 0} + \alpha_2 v_1 \implies \alpha_2 v_1 \geqslant 0$

v_1 tiene componentes positivas y negativas $\implies \alpha_2 = 0$

$\implies \alpha_1 = 0 \implies x = 0$

4) $\lambda \in \mathbb{C} \ : |\lambda| = 1 \qquad \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = \lambda \qquad \theta \in (0, \pi)$

$\exists v, w \in \mathbb{R}^n$ tal que la caja de Jordan es $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$Lv = \cos\theta\, v + \text{sen}\,\theta\, w$

$Lw = -\text{sen}\,\theta\, v + \cos\theta\, w$

Supongamos que $v \geq 0 \qquad \underset{\overset{\vee\!/}{0}}{Lv} = \cos\theta\, v + \text{sen}\,\theta\, w$

$$0 \leq L^2 v = (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) v + 2\,\text{sen}\,\theta \cos\theta\, w$$

$$= \cos(2\theta)\, v + 2\,\text{sen}(2\theta)\, w$$

4.1) Supongamos $u \geq 0$:

$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq Lu = v \ , \quad v \geq 0 \implies L^2 u = Lv = -u \geq 0$

Contradicción v, u tienen componentes positivas y negativas

$L^2 u = \cos\theta\, Lu + \text{sen}\,\theta\, Lv = (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) u + 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, v =$

$= \cos(2\theta) u + \text{sen}(2\theta)\, u$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\alpha\cos\beta$

$L^2 v = -\text{sen}\,\theta\, Lu + \cos\theta\, Lv = -2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, u + (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) v$

$= -\text{sen}\, 2\theta + \cos 2\theta\, v$

$L^K u = \cos K\theta\, u + \text{sen}\, K\theta\, v$

$L^K v = -\text{sen}\, K\theta\, u + \cos K\theta\, v$

$0 \leq Lu$; miro el primer coeficiente no nulo de u y miro el signo de ese coeficiente en v : signo$(u,v) = (+, ?$

$\theta > 0 \implies \exists K$ tal que $(\underset{\overset{\vee\!/}{0}}{\cos K\theta}, \underset{\overset{\wedge\!\backslash}{0}}{\text{sen}\, K\theta})$

$0 \leq (L^K x)_i = (\cos h\theta\, u + \text{sen}(h\theta)\, v)_i \leq 0 \qquad$ (contradicción)

$\implies u, v$ no tienen signo

4.2) ...

4.3) Supongamos que existe $x \neq 0$, $x \geqslant 0$ tal que

$$x = x_1 u + x_2 v \qquad x_1^2 + x_2^2 = 1$$
$$x = \cos\alpha\, u + \operatorname{sen}\alpha\, v$$

$$Lx = \cos\alpha\, Lu + \operatorname{sen}\alpha\, Lv = (\cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta)u +$$
$$+ (\cos\alpha\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\alpha\cos\theta)v = \cos(\alpha+\theta)u + \operatorname{sen}(\alpha+\theta)v$$

$$L^K x = \cos(\alpha + K\theta)u + \operatorname{sen}(\alpha + K\theta)v$$

$\exists K > 0$: $\quad 0 < \text{signo}(L^K x)$
$$\| $$
$$\text{signo}(\cos(\alpha+K\theta)v + \operatorname{sen}(\alpha+K\theta)u) < 0.$$

Contradicción

5) $\lambda_1 = e^{i\theta_1} \qquad \lambda_2 = e^{i\theta_2}$

$u_1, v_1 \qquad u_2, v_2$

$$0 \leq x = x_1 u_1 + x_2 v_1 + y_1 u_2 + y_2 v_2 \qquad \big((x_1, x_2) \neq (0,0) \neq (y_1, y_2)\big)$$

$$(x_1,x_2) = a(\cos\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1) \qquad (y_1,y_2) = b(\cos\alpha_2, \operatorname{sen}\alpha_2)$$

$$0 \leq L^K x = a\big(\cos(\alpha_1 + K\theta_1)u_1 + \operatorname{sen}(\alpha_1 + K\theta_1)v_1\big) +$$
$$+ b\big(\cos(\alpha_2 + K\theta_2)u_2 + \operatorname{sen}(\alpha_2 + K\theta_2)v_2\big)$$

$\Longrightarrow$ Contradicción : x tiene diferentes signos.

Conclusión :

Si tengo una base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Si $x \geq 0 \Longrightarrow x = a u_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k u_k$

$$a \geq 0$$

Esto nos asegura $L^k x \geq 0$

$$\frac{L^k x}{|L^k x|} = \frac{a\lambda_1^k u + \sum_{j=2}^{n} x_j L^k v_j}{| \quad '' \quad + \quad '' \quad |} \longrightarrow \frac{a u_1}{|a u_1|} = u_1$$

CADENAS DE MARKOV

Procesos estocásticos $\{X_t\}_{t\in I}$. Si I es un intervalo, entonces tenemos un proceso estocástico continuo. Si es $I = \{1, 2, \dots\}$ conjunto numerable, entonces tenemos un proceso estocástico discreto.

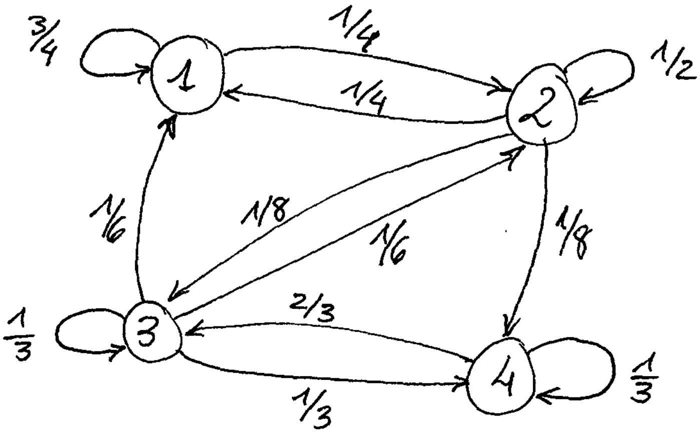
Ejemplo

- Estados: Sol (1), Sol y nubes (2), nublado (3), lluvioso (4)

- $\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=1) = \frac{3}{4}$ $\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=1) = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=2) = \frac{1}{4}$ $\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=2) = \frac{1}{2}$
  $\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=2) = \frac{1}{8}$ $\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=4|X_n=2) = \frac{1}{8}$
- $\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=3) = \frac{1}{6}$ $\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=3) = \frac{1}{6}$
  $\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=3) = \frac{1}{3}$ $\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=4|X_n=3) = \frac{1}{3}$
- $\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=4) = \frac{2}{3}$ $\quad \mathbb{P}(X_{n+1}=4|X_n=4) = \frac{1}{3}$

$X_n \equiv$ estado en el día n

Grafo



Propiedad de Markov (estacionaria) : $\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_0=x_0,\dots,X_n=i) =$

$= \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P_{ij}$

La matriz $P=(P_{ij})$:= la matriz de transición, matriz estocástica ó matriz de cadena de Markov.

$$P=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) =$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1}\in S \mid X_n=i) = 1$$

$\Pi_0 = (1,0,0,0)$

$\Pi_1 = \Pi_0 P = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\right)$

$$\mathbb{P}(X_2=1) = \Pi_2[1] = \mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=1)\cdot \overbrace{\mathbb{P}(X_1=1)}^{\Pi_1[1]} + \mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=2)\cdot \overset{\Pi_1[2]}{\mathbb{P}(X_1=2)} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$\Pi_2 = \Pi_1 P = \Pi_0 P^2$

TEOREMA :

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = (P_n)_{ij} = (P^n)_{ij}$$

demostración

$P_2 = P^2$

$$\mathbb{P}(X_2 = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_2 = j \mid X_1 = k)\, \mathbb{P}(X_1 = k \mid X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_{kj} P_{ik} = (P^2)_{ij}$$

Hacemos inducción: suponemos cierto hasta n-1

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_n = i \mid X_{n-1} = k)\, \mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k \in S} P_{nj} (P_{n-1})_{ik} = \sum_{k \in S} (P^{n-1})_{ik} P_{kj} = P^n_{ij}$$

Observación :

notación de Einstei

π probabilidad de S : $(\pi P)_i = \sum_{k \in S} \pi_k P_{ki} = \pi_k P_{ki}$

$$1 = \sum_{i \in S} (\pi P)_i = \sum_{i \in S} \sum_{k \in S} \pi_k P_{ki} = \sum_{k \in S} \pi_k \underbrace{\sum_{i \in S} P_{ki}}_{= 1} = \sum_{k \in S} \pi_k = 1$$

Pregunta : ¿ $X_n = X_0 P^n \xrightarrow[n \to \infty]{} X$?

ECUACIONES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

$$P = P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

$$\Pi_0 = (P_1, \dots, P_n)$$

$$\Pi_1(1) = \sum_{j=1}^{n} \Pi_0(j) \cdot \mathbb{P}(\Pi_1 = i \mid \Pi_0 = j) = \sum_{j=1}^{n} P_j \cdot \mathbb{P}(\Pi_1 = i \mid \Pi_1 = j)$$ TEOREMA DE PROB TOTAL

$$\Pi_1(i) = \sum_{j=1}^{n} P_j \cdot P_{ji} \qquad \underset{\text{vector fila}}{\Pi_1} = \underset{\text{vector fila}}{\Pi_0} P$$

Observación: trabajamos con vectores fila y el producto es por la izquierda de las matrices

$X_0 = (x_0(j))$ $j = 1, \dots, n$ donde $x_0(j)$ es la cantidad de elementos j

$X_1 = X_0 P$; $X_{n+1} = X_n P = X_{n-1} P P = X_{n-1} P^2 = X_0 P^{n+1}$

Si existe $\lim_{n \to \infty} X_n = X$.

Una de las propiedades que vimos $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1 \longrightarrow$ todas las filas de la matriz suman

$P \geqslant 0$ es de coeficientes no negativos.

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (P.e)(j) = \sum_{i=1}^{n} P_{ji} \cdot 1 \Longrightarrow \lambda = 1 \text{ es autovalor de } P$$

$$\Downarrow$$

$$\det(P - I) = 0$$

$\vec{x}(P - I) = 0$ $\quad \vec{x} P = \vec{x}$ $\quad \vec{x}$ vector fila

fila 1 matriz P

vector canónico 1

las filas son combinaciones lineales $x_1(P_1 - e_1) + x_2(P_2 - e_2) + \cdots$
$+ x_n(P_n - e_n) = 0$

$$(e P)(i) = \sum_{j=1}^{n} P_{ji} \neq 1$$

TEOREMA: Toda cadena de Markov tiene un estado estacionario, es decir, $x = Px$

TEOREMA: Si P es una matriz estocástica. Entonces, el radio espectral es 1, e.d., $\rho(P) = 1$.

Observación 1: ¿Es único el estado estacionario?

No. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $e_1 I = e_1$, $e_2 I = e_2$ $\quad$ $x = xI$

Depende de P

Observación 2: Hay ciclos. Puede haber un vector X tal que $X_n \neq XP$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X = XP^n$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$X_0 = (1,0)$ $\quad$ $X_1 = X_0 A = (0,1)$ $\quad$ $X_2 = X_1 A = X_0 A^2 = (1,0) = X_0$

CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS $i \in \{1, \dots, n\}$:

a) 1 en la diagonal nos dice que $P_{ii} = 1 = \mathbb{P}(X_{n+1} = i \mid X_n = i)$ i es un estado absorbente.

b) La probabilidad de retorno del estado i a si mismo

$f_{ii} = f_i = \mathbb{P}(X_n = i \text{ para algún } n \text{ si } X_0 = i)$

f_{ij} $\quad$ $x_0 = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$

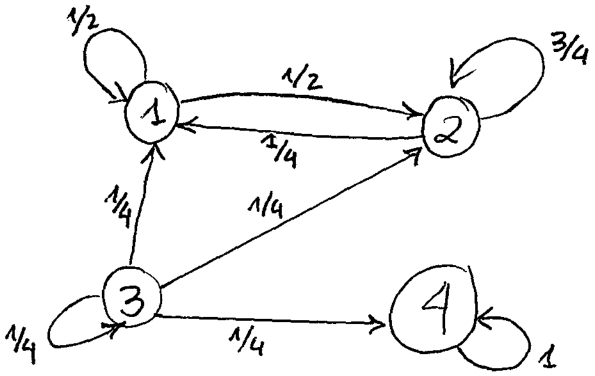
$f_i = 1$, estado recurrente

$f_i < 1$, estado transitivo

c) Un estado j es accesible desde i si y solo si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_{ij}^n = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$. Si además el estado i es accesible desde j (e.d., $P_{ji}^m > 0$), entonces i y j se comunican.

Ejemplo 1

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 \sim 2 \text{ se comunican } [1]$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \to 1 \\ 3 \to 2 \\ 3 \to 4 \end{array}\right\} [3]$$

$P_{44} = 1 \Longrightarrow 4$ es absorbente $[4]$

1, 2, 4 recurrentes $\quad f_1 = f_2 = f_4 = 1$

$$f_3 = \sum P_{ii}^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3} < \infty$$

3 transitivo

Ejemplo 2

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 1 \to 2 & P_{12} > 0 \\ 2 \to 1 & P_{21} > 0 \end{array} \Longrightarrow 1 \sim 2$$

$$\begin{array}{l} 2 \to 3 \\ 3 \to 2 \end{array} \Longrightarrow 2 \sim 3$$

$$\begin{array}{l} 3 \to 4 \\ 4 \to 3 \end{array} \Longrightarrow 3 \sim 4$$

Usando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov: $P^{m+k} = P^m P^k$

$$P_{13}^2 = \sum_k P_{1k} P_{k3} \geq \underset{\overset{\vee}{0}}{P_{12}}\, \underset{\overset{\vee}{0}}{P_{23}} > 0$$

$$P_{31}^2 = \sum_k P_{3k} P_{k1} \geq \underset{\overset{\vee}{0}}{P_{32}}\, \underset{\overset{\vee}{0}}{P_{21}} > 0$$

$$P_{24}^2 \geq P_{23} P_{34} > 0 \qquad P_{41}^3 \geq P_{43} P_{31}^2 > 0$$

$$P_{42}^2 \geq P_{43} P_{32} > 0 \qquad P_{14}^3 \geq P_{31}^2 P_{43} > 0$$

Una única clase de equivalencia $\Longrightarrow$ la cadena de Markov se llama IRREDUCIBLE

PROPOSICIÓN: El estado K es <u>recurrente</u> si $\sum_{n=1} P_{KK}^n = \sum_{n=1} \mathbb{P}(X_n = K | X_0 = K)$ diverge (e.d., si $\sum_{n=1}^{\infty} P_{KK}^n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = K | X_0 = K) = \infty$)

El estado K es <u>transitivo</u> si $\sum_{n=1}^{\infty} P_{KK}^n < \infty$

COROLARIO: K es recurrente, $K \sim j \Longrightarrow j$ es recurrente

<u>demostración</u>

$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n$ Tengo que existe n_1 tal que $P_{kj}^{n_1} > 0$, existe n_2 tal que $P_{jK}^{n_2} > 0$. Por otro lado $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n \geq$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{n_1+n_2+n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_{jK}^{n_2} P_{KK}^{n} P_{Kj}^{n_1} \geq P_{jK}^{n_2} P_{jK}^{n_1} \sum_{n=1}^{\infty} P_{KK}^n = \infty$$

COROLARIO: i es transitivo, j es un estado que se comunica con i. Entonces j es transitivo.

<u>demostración</u>

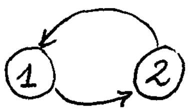
Si $i \sim j$ entonces existe $\begin{cases} n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } P_{ij}^{n_1} > 0 \\ n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } P_{ji}^{n_2} > 0 \end{cases}$

Además, $\infty > \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n_1+n_2+n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{n_1} P_{jj}^{n} P_{ji}^{n_2} \geq$ Chapman-Kolmogorov

$$\geq \underset{\substack{\vee \\ 0}}{P_{ij}^{n_1}} \underset{\substack{\vee \\ 0}}{P_{ji}^{n_2}} \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} P_{jj}^n < \infty \Longrightarrow j \text{ es transitivo.} \blacksquare$$

Periodicidad

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



Un estado i es de PERIODO $a \in \mathbb{N}\setminus\{$
si $P_{ii}^{n} \neq 0 \iff n = ma \quad m \in \mathbb{N}.$ [

$A_1^2 = Id_2$

En A_1, el estado 1 tiene periodo 2

$P_{11}^{2n+1} = 0 \quad P_{11}^{2n} = 1 \implies 1$ es de periodo 2

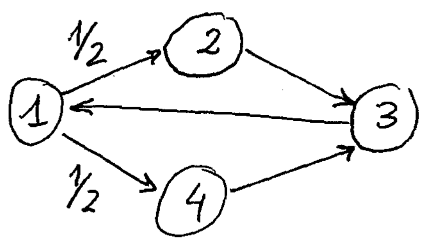
$P_{22}^{2n+1} = 0 \quad P_{22}^{2n} = 1 \implies 2$ es de periodo 2

$P_{12} = 1 > 0 \qquad P_{21} = 1 > 0 \implies 1 \sim 2$

Si no tiene $a \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ que satisfaga [*] entonces el estac
i se llama APERIÓDICO.

Ejemplo:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$(1,0,0,0)\,\mathbb{P} = (0, 1/2, 0, 1/2)$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Hemos visto que $\forall i \quad P_{ii} = 0, \; P_{ii}^2 = 0, \; P_{ii}^3 > 0$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{P}$$

PROPOSICIÓN: Sea i un estado de periodo a e $i \sim j$. Entonces j tiene periodo a.

demostración

Como $i \sim j$ entonces existe $\begin{cases} n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } P_{ij}^{n_1} > 0 \\ n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } P_{ji}^{n_2} > 0 \end{cases}$

Entonces $P_{ii}^{n_1+n_2} = P_{ij}^{n_1} P_{ji}^{n_2} > 0 \Longrightarrow n_1+n_2 \in a\mathbb{N}$ (n_1+n_2 múltiplo de a)

Sea b el periodo del estado j. Entonces $P_{jj}^{n_1+n_2} \geq P_{ji}^{n_2} P_{ij}^{n_1} > 0$

$\Longrightarrow n_1+n_2 \in b\mathbb{N}$

Consideramos $P_{ii}^{n_1+b+n_2} \geq \underset{0}{\underset{\vee}{P_{ij}^{n_1}}} \underset{0}{\underset{\vee}{P_{jj}^{b}}} \underset{0}{\underset{\vee}{P_{ji}^{n_2}}} > 0 \Longrightarrow n_1+b+n_2 \in a\mathbb{Z}$

Entonces $b \in a\mathbb{Z}$ [1]

También $P_{jj}^{n_1+a+n_2} \geq \underset{0}{\underset{\vee}{P_{ji}^{n_2}}} \underset{0}{\underset{\vee}{P_{ii}^{a}}} \underset{0}{\underset{\vee}{P_{ij}^{n_1}}} > 0 \Longrightarrow n_1+a+n_2 \in b\mathbb{Z}$

$\Longrightarrow a \in b\mathbb{Z}$ [2] $\Longrightarrow$ [1] + [2] $\Longrightarrow a = b$. ■

DEFINICIÓN: Π es una distribución de equilibrio (límite) si existe Π_0 distribución inicial tal que $\lim_{n\to\infty} \Pi_0 P^n = \Pi$

$$\Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi_0 P^n = \lim_{n\to\infty} \Pi_0 P^{n+1} = \left(\lim_{n\to\infty} \Pi_0 P^n\right) P = \Pi P$$

Las distribuciones de equilibrio son estados estacionarios.

DEFINICIÓN: Decimos que una cadena de Markov es regular si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P^n_{i,j} > 0 \quad \forall i,j$

TEOREMA DE PERRÓN: Sea una cadena de Markov finita y regular entonces tiene una única distribución límite (equilibrio)

$$\forall \pi_0 \quad \lim_{n \to \infty} \pi_0 P^n = \pi$$

TEOREMA: $P_\infty = \lim_{n \to \infty} P^n$, para matriz P estocástica regular de tamaño d, entonces $P_\infty = \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_d \\ & \vdots & \\ \pi_1 & \cdots & \pi_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$

TEOREMA: Sea cadena de Markov finita e irreducible. Entonces existe una única distribución límite.
(si es finita e irreducible $\Longrightarrow$ es regular)

Ejemplo

Identificar el estado estacionario

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

P es irreducible

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

$\pi P = \pi \qquad \pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{8}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{2}{3}\pi_4 = \pi_3 \\ \frac{1}{8}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_4 = \pi_4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9}\pi_4 \\ \pi_2 = \frac{16}{9}\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{4}{3}\pi_4 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9}\pi_4,\ \frac{16}{9}\pi_4,\ \frac{4}{3}\pi_4,\ \pi_4\right) = \pi_4\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \frac{4}{3}, 1\right) =$$

$$= \left(\frac{24}{61}, \frac{16}{61}, \frac{12}{61}, \frac{9}{61}\right) = \pi$$

TEOREMA: (SUMA DE CÉSARO)

Dado π_0 distribución, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_n}{n+1} = \pi$ tal que $\pi P = \pi$.

TEOREMA: Si P es irreducible $\xRightarrow{(\pi = \pi P)}$ $\pi_k = \frac{1}{\mathbb{E}_k[T_k]}$

donde $T_k = \{\inf n \geq 1 : X_n = k\}$

$$\mathbb{E}_k = \mathbb{E}[T_k] = \mathbb{E}[T_k : X_0 = k]$$

Es el tiempo esperado de llegar a k arrancando en k.

TEOREMA: Sea una cadena de Markov irreducible y tiene una distribución estacionaria. Entonces $\Pi_K = \dfrac{1}{\mathbb{E}_K[T_K]}$.

TEOREMA: Sea una cadena de Markov irreducible aperiódica y tiene distribución estacionaria $(\pi = \pi P)$. Entonces

$$P^n_{jK} \longrightarrow \Pi_K \quad \forall j \in S.$$

PAGE RANK

$$\Pi = \pi(\alpha S + (1-\alpha)E) \quad \text{donde} \begin{cases} \pi = \text{distr. estacionaria} \\ \alpha S + (1-\alpha) E \ \text{matriz} \end{cases}$$

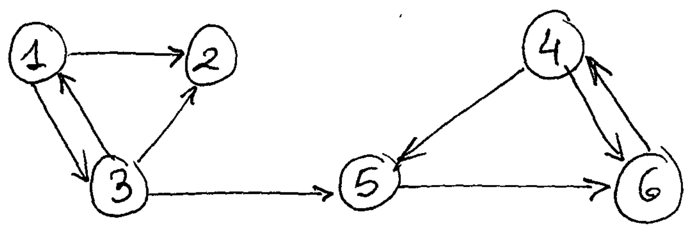
π aporta el ranking de las páginas.

$$r(P_i) = \Pi(P_i) = \sum_{P_j \in B_{P_i}} \frac{\Pi(P_j)}{|P_j|}$$

$B_{P_i} := \{$conjunto de páginas que se enlazan con $P_i\}$

$|P_j| :=$ nº de enlaces que salen de P_j.

Ejemplo:



nodo colgan

$$H = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0} \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi_0 H^n$ con $\Pi_0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ con n nº de página

Definimos el vector de nodos colgantes: $a(K) = \begin{cases} 1 & \text{si } K \text{ colgan} \\ 0 & \text{si } K \text{ colgai} \end{cases}$

$$H + \underbrace{a \cdot \frac{1}{n} e^T}_{\longrightarrow \text{matriz } n\times n} \qquad e^T = (1, \dots, 1)$$

Resultado de aplicar $S = H + a\frac{1}{n}e$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \frac{1}{n} e.e^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \text{ ones}$$

$$\Pi_\alpha = \Pi_\alpha \left(\alpha S + (1-\alpha) E \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \Pi_0 \left(\alpha S + (1-\alpha) E \right)^n = \Pi_\alpha$$

MARKOV CASO INFINITO

$S \in \mathbb{Z} \implies$ caso infinito

La matriz de transición $\mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = p$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = 1-p$$

$X_n = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \qquad S_n = x_0 + \varepsilon(X_1 + \cdots + X_n)$

1) Todos los estados se comunican

Dados $i, j \in \mathbb{Z}$, $\quad n = |j-i| \quad P_{ij}^n > 0 \quad P_{ji}^n > 0$

$\{ P_{ij}^n (X_n = j \mid X_0 = i) , \; P_{ji}^n (X_n = i \mid X_0 = j) \} \in \{ p^n, (1-p)^n \}$

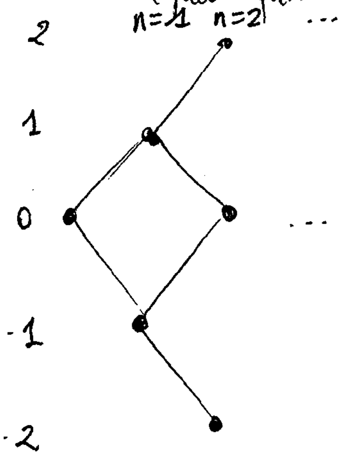
$i = 0 \quad j = 3 \quad P_{ij}^3 = p^3 \quad P_{ji}^3 = (1-p)^3 \implies i \sim j \implies [0] = \mathbb{Z}$

todos los elementos están en una única clase

2) Vamos a clasificar la clase de equivalencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} = \begin{cases} \infty \Rightarrow \text{estado recurrente} \\ c \Rightarrow \text{estado transitorio} \end{cases}$$

vamos a verlo para el (0,0), pero sería igual para otro



$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!} p^n (1-p)^n$$

Fórmula Stirling : $n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!} p^n (1-p)^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{(n^{n+1/2} \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi})^2} p^n (1-p)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} p^n (1-p)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{n^{1/2}\sqrt{\pi}}$$

$f(p) = 4p(1-p)$ $\qquad f'(p) = 4(1-2p)$

$p = \frac{1}{2}$ es un máximo

$f(\frac{1}{2}) = 1$

Sea $a = 4p(1-p)$

$$\forall p \neq \tfrac{1}{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty$$

$\Rightarrow$ para todo $p \neq \frac{1}{2}$, 0 es transitorio

$\Rightarrow$ para $p = \frac{1}{2}$ $\sum P_{00}^{n} \sim \sum \frac{1}{n^{1/2}\sqrt{\pi}} = \infty$, 0 estado recurrente

$\Rightarrow$ para $p \neq \frac{1}{2}$, la cadena de Markov es transitoria

$\Rightarrow$ para $p = \frac{1}{2}$, la cadena de Markov es recurrente $\Rightarrow$ es irreducible

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(0)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}_0[T_0]}$$ $N_n(0) = \{K \leq n$, hemos llegado a 0 K-veces empezando en cero $\}$

Si he avanzado n veces espero haber regresado $\dfrac{n}{\mathbb{E}_0[T_0]}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(0)}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(0)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$ según avanzamos cada vez hay más posibilidades de alejarnos mucho y por lo tanto de regresar de nuevo.

Ahora voy a relacionar la variable espacial con la variable temporal. Llamo h al paso de tiempo y llamo ε al paso espacial. $t = nh$ el tiempo transcurrido y lo que he recorrido puede ser $n\varepsilon \sim c$

$$n = \frac{t}{h}$$

$$\varepsilon = h^{1/2}$$

Las posiciones después de n pasos viene dada por una $B(n, \frac{1}{2}) \sim X_n$

$$V[X_n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^2 \implies \sigma = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Experimento t_0, la partícula está entre $(-\sigma\varepsilon, \sigma\varepsilon) \simeq (-\sqrt{n}\varepsilon, \sqrt{n}\varepsilon)$

$t_0 = nh$, $n = \frac{t_0}{n}$, entonces mi dominio es $\left(-\sqrt{\frac{t_0}{n}}\,\varepsilon, \sqrt{\frac{t_0}{n}}\,\varepsilon\right) \sim \left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{n}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$

Como esta región está identificada $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = K$.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = j-1)\,\mathbb{P}(X_n = j-1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = j+1).\,\mathbb{P}(X_n = j+1)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = j-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = j+1)$$

$$u(t_0, x_0) = \mathbb{P}(X_n = j)$$

$$u(t_0 + h, x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j)$$

$$\mathbb{P}(X_n = j-1) = u(t_0, x_0 - \varepsilon)$$

$$\mathbb{P}(X_n = j+1) = u(t_0, x_0 + \varepsilon)$$

$$u(t_0+h, x_0) = \frac{1}{2}u(t_0, x_0-\varepsilon) + \frac{1}{2}u(t_0, x_0+\varepsilon)$$

$$u(t_0+h, x_0) - u(t_0, x_0) = \frac{1}{2}\Big(u(t_0, x_0-\varepsilon) - 2u(t_0, x_0) + u(t_0, x_0+\varepsilon)\Big)$$

$$u(t_0+h, x_0) - u(t_0, x_0) = \frac{K^2 h}{2\varepsilon^2}\Big(u(t_0, x_0-\varepsilon) - 2u(t_0, x_0) + u(t_0, x_0+\varepsilon)\Big)$$

$$\frac{u(t_0+h, x_0) - u(t_0, x_0)}{h} = \underbrace{\boxed{\frac{K^2}{2}}}_{= c}\left(\frac{u(t_0, x_0-\varepsilon) - 2u(t_0, x_0) + u(t_0, x_0+\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right)$$

$$u(t_0+h, x_0) = u(t_0, x_0) + h\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t}(\tau, x_0) \quad \tau \in (t_0, t_0+h)$$

$$u(t_0, x_0-\varepsilon) = u(t_0, x_0) - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(t_0, x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0, x_0) - \frac{\varepsilon^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_0, x_0) +$$

$$\frac{\varepsilon^4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_0, \tilde{x})$$

$$\tilde{x} \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

$$u(t_0, x_0+\varepsilon) = u(t_0, x_0) + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(t_0, x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0, x_0) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_0, \tilde{\tilde{x}}) \qquad \tilde{\tilde{x}} \in (x_0, \varepsilon+x_0)$$

$$\frac{u(t_0+h, x_0) - u(t_0, x_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) + O(h)$$

$$u(t_0, x_0+\varepsilon) + u(t_0, x_0-\varepsilon) = 2u(t_0, x_0) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0, x_0) + O(\varepsilon^4)$$

$$\frac{u(t_0, x_0+\varepsilon) - 2u(t_0, x_0) + u(t_0, x_0-\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0, x_0) + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) + O(h) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0, x_0) + O(\varepsilon^2) = O(h) \quad h \to 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0, x_0)$$ <u>ecuación del calor</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t c}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4tc}} f(y)\, dy$$

RECUERDO: ESTRUCTURA CURSO

Modelos de poblaciones

- → Modelos discretos lineales multidimensionales ✓
- → Modelos continuos unidimensionales lineales y no lineales.
- → Modelos continuos bidimensionales lineales y no lineales
- → Modelos discretos unidimensionales no lineales

MODELOS CONTINUOS UNIDIMENSIONALES LINEALES Y NO LINEALES

$$\frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{x(t)} = \frac{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}}{x(t)} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \Gamma(t,x) = (\alpha-\beta)\,x($$

$$x(t+h) = x(t) + h(\alpha-\beta)\,x(t) \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

α tasa de nacimiento

β tasa de natalidad

Problema de valor inicial

Modelo de Malthus

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

$a>0 \Rightarrow$ crecimiento exponencial de la población

$a<0 \Rightarrow$ extinción de la población

crecimiento malthusiano

¿Cuánto tiempo para alcanzar el doble de la población?

$$\left.\begin{array}{ll} x' = ax & x(t) = ce^{at} \\ a>0 & \quad \overset{\parallel}{2c} \end{array}\right\} e^{at} = 2 \Rightarrow at = \ln 2 \Rightarrow \boxed{t = \frac{\ln 2}{a}}$$

MODELO LOGÍSTICO

Verhulst, 1838

Existe una cantidad K, capacidad de soporte del medio o capacidad máxima biológica del ecosistema.

Es un modelo descriptivo $r(x) = b(K-x)$ $\qquad \frac{\dot{x}}{x} = r(x,t)$

$\dot{x} = b(K-x)x$ modelo no lineal

$$\frac{\dot{x}}{x(K-x)} = b \Rightarrow \int \frac{\dot{x}}{x(K-x)} = \int b \Rightarrow \int \frac{dx}{x(K-x)} = \int b\,dt \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{K x_0}{x_0 + (K-x_0)e^{-at}}$$

TEOREMA DE PICARD: Sea $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$.

Si f es una función Lipschitz entonces existe una única solución durante un intervalo de tiempo. Si f es globalmente Lipschitz, la existencia es global y la solución es única.

$$x(t) = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) e^{-at}}$$

$x(t) \equiv K$ es una solución estacionaria

$x(0) \equiv 0$ es una solución estacionaria

$f(x_e) = 0$ x_e son puntos de equilibrio

Observaciones:

- Si $x(0) = x_0 << 1 \Longrightarrow x(t) \approx x_0 e^{at} \Rightarrow x(t)$ tiene crecimiento exponencial
- Si $x(0) = K - \delta$, $\delta > 0 \Rightarrow x(t) \approx K - c e^{-at} \Rightarrow$
  $\Rightarrow x(t)$ decae exponencialmente a K
- Si $x(0) = x_0 < 0$ $\exists \tau$ tal que $x_0 + (K - x_0) e^{-a\tau} = 0$