HOJA DE EJERCICIOS 1: Lógica proposicional EDyL 2012-2013

[Fecha de publicación: 2012/09/xx]
[Fecha de entrega: 2012/09/27, 10:00]
[Resolución en clase: 2012/09/27]

EJERCICIO 1:
Transforma las siguientes FBFs a forma normal conjuntiva indicando las reglas de equivalencia utilizadas. Una vez en FNC, determina cuáles son UNSAT, tautologías o SAT sin ser tautología.

[(p⇒q)∧(q⇒r)] ⇒ ¬p [elimina implicación]
≡ ¬[(¬p∨q)∧(¬q∨r)]∨¬p [leyes de De Morgan]
≡ [¬(¬p∨q)∨¬(¬q∨r)]∨¬p [De Morgan + elim. doble negación]
≡ (p∧¬q)∨(q∧¬r)∨¬p [Distributiva]
≡ (p∨q∨¬p)∧(p∨¬r∨¬p)∧(¬q∨q∨¬p)∧(¬q∨¬r∨¬p) [elimina tautologías]
≡ (¬q∨¬r∨¬p)

[SAT, pero no tautología]

¬p∨(¬(¬q∧(p⇔¬q)) ⇒ p) [elimina doble implicación]
≡ ¬p∨(¬[¬q∧(p⇒¬q)∧(¬q⇒p)]⇒p) [elimina implicación]
≡ ¬¬[¬q∧(¬p∨¬q)∧(¬¬q∨p)]∨p∨¬p [elimina tautología]
≡ {}

[tautología]

EJERCICIO 2: Utilizando tablas de verdad, determinar

(1) Determinar el número de interpretaciones posibles

(2) Determinar el número de interpretaciones que son modelo

(3) Poner un ejemplo de una interpretación que es modelo

de las siguientes fórmulas

	Nº de interpretaciones	Nº de modelos	Ejemplo de modelo
$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)] \Rightarrow \neg p$	**8**	**7**	**p=F, q = F, r = F**
$\neg(\neg q\wedge(p\Leftrightarrow\neg q)) \Rightarrow \neg p$	**4**	**3**	**p=F, q = F**

p	**q**	**r**	**$p\Rightarrow q \equiv \neg p\vee q$**	**$q\Rightarrow r \equiv \neg q\vee r$**	**$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$**	**$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)] \Rightarrow \neg p \equiv (\neg q\vee\neg r\vee\neg p)$**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**

p	**q**	**$p\Leftrightarrow\neg q$**	**$\neg q\wedge(p\Leftrightarrow\neg q)$**	**$\neg(\neg q\wedge(p\Leftrightarrow\neg q)) \Rightarrow \neg p$**
F	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**F**

EJERCICIO 3:
Cuatro amigos han sido identificados como sospechosos de haber organizado la ocupación de un hotel abandonado en el centro de la ciudad

Carlos dice: "Alicia no lo hizo"
Diana dice: "Yo lo hice"
Alicia dice: "Juan no lo hizo"
Juan dice: "Carlos miente"

Sabiendo que sólo uno de ellos miente ¿puedes determinar si lo hizo Diana?

La adivinanza se puede resolver mediante cualquier método de demostración válido (por prueba directa, mediante refutación, etc.).
No se puede emplear razonamiento semiformal, tablas de verdad o razonamiento por casos. Se debe utilizar únicamente inferencia, incluyendo resolución. Identifica la regla de inferencia empleada en cada paso.

SOLUCIÓN:

A: Alicia lo hizo	AA: Alicia dice la verdad
J: Juan lo hizo	JJ: Juana dice la verdad
C: Carlos lo hizo	CC: Carlos dice la verdad
D: Diana lo hizo	DD: Diana dice la verdad

Carlos dice: "Alicia no lo hizo"	$CC \Leftrightarrow \neg A$	$\equiv (CC \Rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \Rightarrow CC)$
Diana dice: "Yo lo hice"	$DD \Leftrightarrow D$	$\equiv (DD \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow DD)$
Alicia dice: "Juan no lo hizo"	$AA \Leftrightarrow \neg J$	$\equiv (AA \Rightarrow \neg J) \wedge (\neg J \Rightarrow AA)$
Juan dice: "Carlos miente"	$JJ \Leftrightarrow \neg CC$	$\equiv (JJ \Rightarrow \neg CC) \wedge (\neg CC \Rightarrow JJ)$

Sólo uno de ellos miente

$\neg AA \Leftrightarrow (JJ \wedge CC \wedge DD) \equiv [\neg AA \Rightarrow (JJ \wedge CC \wedge DD)] \wedge [(JJ \wedge CC \wedge DD) \Rightarrow \neg AA]$

$\neg JJ \Leftrightarrow (AA \wedge CC \wedge DD) \equiv [\neg JJ \Rightarrow (AA \wedge CC \wedge DD)] \wedge [(AA \wedge CC \wedge DD) \Rightarrow \neg JJ]$

$\neg CC \Leftrightarrow (JJ \wedge AA \wedge DD) \equiv [\neg CC \Rightarrow (JJ \wedge AA \wedge DD)] \wedge [(JJ \wedge AA \wedge DD) \Rightarrow \neg CC]$

$\neg DD \Leftrightarrow (JJ \wedge CC \wedge AA) \equiv [\neg DD \Rightarrow (JJ \wedge CC \wedge AA)] \wedge [(JJ \wedge CC \wedge AA) \Rightarrow \neg DD]$

(1)	$CC \Rightarrow \neg A$	$\equiv \neg CC \vee \neg A$
(2)	$\neg A \Rightarrow CC$	$\equiv A \vee CC$
(3)	$DD \Rightarrow D$	$\equiv \neg DD \vee D$
(4)	$D \Rightarrow DD$	$\equiv \neg D \vee DD$
(5)	$AA \Rightarrow \neg J$	$\equiv \neg AA \vee \neg J$
(6)	$\neg J \Rightarrow AA$	$\equiv J \vee AA$

(7) $JJ \Rightarrow \neg CC \equiv \neg JJ \vee \neg CC$

(8) $\neg CC \Rightarrow JJ \equiv CC \vee JJ$

(9.1) $\neg AA \Rightarrow (JJ \wedge CC \wedge DD)$

(9.2) $(JJ \wedge CC \wedge DD) \Rightarrow \neg AA$

(10.1) $\neg JJ \Rightarrow (AA \wedge CC \wedge DD)$

(10.2) $(AA \wedge CC \wedge DD) \Rightarrow \neg JJ$

(11.1) $\neg CC \Rightarrow (JJ \wedge AA \wedge DD)$

(11.2) $(JJ \wedge AA \wedge DD) \Rightarrow \neg CC$

(12.1) $\neg DD \Rightarrow (JJ \wedge CC \wedge AA)$

(12.2) $(JJ \wedge CC \wedge AA) \Rightarrow \neg DD$

Vamos a demostrar que Diana lo hizo (D)
Construimos una base de conocimiento que incluya las FBFs anteriores y además la negación de la meta ($\neg D$)

$\neg D$ (13)

Modus ponens([3] + [13]) $\neg DD$ (14)

Modus ponens([12.1] + [14]) $JJ \wedge CC \wedge AA$

JJ (15) CC (16) AA (17)

Modus ponens([7] + [15]) $\neg CC$ (18)

Resolucion [(16) + (18)] $\square$ (contradicción)

Luego Diana lo hizo.

EJERCICIO 4: Vamos a determinar si las especificaciones para un sistema de reservas en la red son compatibles utilizando lógica formal.

"Se pueden efectuar reservas si y sólo si el sistema está en modo de uso normal. Si el sistema está en modo de uso normal, el servidor está encendido. Ha habido una interrupción del servicio de red o el servidor está apagado. Si no se pueden hacer reservas, se ha producido una interrupción del servicio de red. No ha habido una interrupción del servicio de red."

4.1 Identificad los átomos y su denotación.
4.2 Formulad la base de conocimiento.
4.3 Determinad mediante inferencia si la base de conocimiento es satisfacible. **No se puede emplear razonamiento semiformal, tablas de verdad o razonamiento por casos**. Se debe utilizar únicamente inferencia, incluyendo resolución. Identifica la regla de inferencia empleada en cada paso.
4.4 Interpretando el resultado de 4.3, responded a la cuestión planteada.

SOLUCIÓN:

4.1 R: "Se pueden efectuar reservas"
N: "El sistema está en modo de uso normal"
E: "El servidor está encendido"
I: "Se ha producido una interrupción del servicio de red"

4.2 Base de conocimiento

- "Se pueden efectuar reservas si y sólo si el sistema está en modo de uso normal".
  $R \Leftrightarrow N \equiv (R \Rightarrow N) \wedge (N \Rightarrow R) \equiv (\neg R \vee N) \wedge (\neg N \vee R)$

- "Si el sistema está en modo de uso normal, el servidor está encendido".
  $N \Rightarrow E \equiv \neg N \vee E$

- "Ha habido una interrupción del servicio de red o el servidor está apagado".
  $I \vee \neg E$

- "Si no se pueden hacer reservas, se ha producido una interrupción del servicio de red".
  $\neg R \Rightarrow I \equiv R \vee I$

- "No ha habido una interrupción del servicio de acceso de red."
  $\neg I$

Base de conocimiento (FNC)

[1] $R \Leftrightarrow N \equiv (R \Rightarrow N) \wedge (N \Rightarrow R) \equiv (\neg R \vee N) \wedge (\neg N \vee R)$
[1.1] $\neg R \vee N$
[1.2] $\neg N \vee R$

[2] $N \Rightarrow E \equiv \neg N \vee E$
[3] $I \vee \neg E$
[4] $\neg R \Rightarrow I \equiv R \vee I$
[5] $\neg I$

4.3 Resolución

Res on I	[3]+[5]:	$\neg E$	[6]
Res on I	[4]+[5]:	R	[7]
Res on E	[2]+[6]:	$\neg N$	[8]
Res on N	[1.1]+[7]:	N	[9]

Res on N [8]+[9]: $\square$ Base de conocimiento UNSAT

4.4 Dado que la base de conocimiento es UNSAT, las especificaciones son para el sistema son incompatibles.

EJERCICIO 5 [R+N, exercise 7.9] Considera el texto

"si el unicornio es mítico, es inmortal, pero si no es mítico, entonces es un mamífero mortal. Si el unicornio es o inmortal o un mamífero, entonces tiene cuernos. El unicornio es mágico si tiene cuernos"

A partir de este texto, ¿se puede determinar si el unicornio es mítico? ¿si es mágico? ¿si tiene cuernos?

SOLUTION:

(1) Define the atoms

Atom	Elementary statement about the world
A	The unicorn is mythical
B	The unicorn is immortal
C	The unicorn is a mammal
D	The univorn is magical
E	The unicorn is horned

(2) Build the knowledge base Δ

wff	Known world facts (True in our world)
$A \Rightarrow B$	If the unicorn is mythical, then it is immortal
$\neg A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$	if it is not mythical, then it is a mortal mammal
$(B \vee C) \Rightarrow E$	If the unicorn is either immortal or a mammal, then it is horned
$E \Rightarrow D$	The unicorn is magical if it is horned."

Convert wff's in Δ to CNF

Wff	wff in CNF
$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
$\neg A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$	$(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$
$(B \vee C) \Rightarrow E$	$(\neg B \vee E) \wedge (\neg C \vee E)$
$E \Rightarrow D$	$\neg E \vee D$

(3) Apply inference with sound inference rules

Δ
(1) $\neg A \vee B$
(2) $A \vee \neg B$
(3) $A \vee C$
(4) $\neg B \vee E$
(5) $\neg C \vee E$
(6) $\neg E \vee D$

Theorem	Inference rule applied
(7) $B \vee C$	(1)+(3) [Resolution]
(8) $B \vee E$	(5)+(7) [Resolution]
(9) E	(4)+(8) [Resolution + elimination of repeated literals]
(10) D	(6)+(9) [Resolution]

Since $\Delta \vdash E$, and the inference rules are sound, then $\Delta \models E$, which means that if the KB Δ has value *True* then E (The unicorn is horned) also has *True.*

Since $\Delta \vdash D$, and the inference rules are sound, then $\Delta \models D$, which means that if the KB Δ has value *True* then D (The unicorn is magical) also has *True.*

We conclude that the unicorn is magical and horned.
Nothing can be said on whether the unicorn is mythical.