1.5. Medidas de Lebesgue-Stieltjes

1. Sea F una función creciente y continua por la derecha y m_F la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada. Mostrar que:

(a) $m_F(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$.

(b) $m_F([a,b)) = F(b^-) - F(a^-)$.

(c) $m_F([a,b]) = F(b) - F(a^-)$.

(d) $m_F((a,b)) = F(b^-) - F(a)$.

2. Sea F una función no decreciente y continua por la derecha. Demostrar que el conjunto $A = \{x : m_F(\{x\}) > 0\}$ es contable. En particular, mostrar que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función creciente tiene medida de Lebesgue cero.

3. Consideramos la función

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Comprobar que F es no decreciente y continua por la derecha.

(b) Consideramos m_F, la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F. Calcular:

(1) $m_F(\{1\})$.

(2) $m_F(\{2\})$.

(3) $m_{\mathrm{F}}((1,3])$.

(4) $m_F((1,3))$.

(5) $m_F([1,3])$.

(6) $m_F([1,3))$.

4. Dar un ejemplo de una función de distribución F (es decir, creciente y continua por la derecha) tal que

$$m_F((a,b)) < F(b) - F(a) < m_F([a,b]),$$

para algÃºn a y b, siendo m_{F} la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F.

5. Sea $F(x)$ la función dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1), \\ 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0), \\ 2 + x^2 & \text{si } x \in [0, 2), \\ 9 & \text{si } x \in [2, \infty). \end{cases}$$

Calcular la medida de Lebesgue-Stieltjes correspondiente a F de los siguientes conjuntos:

(a) $A_1 = \{2\}$.

(b) $A_2 = [-1/2, 3)$.

(c) $A_3 = (-1, 0] \cup (1, 2)$.

(d) $A_4 = [0, 1/2) \cup (1, 2]$.

(e) $A_5 = \{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

1.6. El conjunto de Cantor

6. Sea G el conjunto de los números reales que se pueden representar en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n/5^n, \quad \text{donde } c_n \in \{0,4\} \text{ para todo } n.$$

Probar que $m(G) = 0$. ¿Cuál es el cardinal de G?

7. En general, se puede definir un conjunto tipo Cantor quitando, de cada intervalo que queda en la iteración n-ésima, un intervalo de longitud r^n. Estudiar cómo tiene que ser r para que el conjunto obtenido tenga medida positiva.

8. Demuestra por reducción al absurdo que el conjunto de Cantor no es numerable. Para ello, supongamos que $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ donde cada c_n $(n \geq 1)$ puede ser escrito de forma única en base 3 como

$$c_n = 0, c_1^n c_2^n c_3^n c_4^n \cdots, \quad \text{con} \quad c_i^n \in \{0,2\}, \qquad i = 1, 2, \dots$$

Sugerencia: Usa el *argumento de la diagonal de Cantor* para encontrar un $c \in C - \{c_1, c_2, \dots\}$.

9. Consideramos $F(x) = \log(1+x)$ $(x \geq 0)$, y sea m_F la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F. Calcular $m_F(C)$, donde C es el conjunto de Cantor.
Sugerencia 1: El conjunto de Cantor está contenido en 2^n intervalos de longitud $1/3^n$.
Sugerencia 2: Relacionar la medida m_F con m.