
PROBABILIDAD II **Primer examen casero** CURSO 2019/20

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI:

INSTRUCCIONES: Pueden usarse libros, apuntes, internet, y la calculadora. NO PUEDE CONSULTARSE NADA RELATIVO AL EXAMEN CON NINGUN SER HUMANO DISTINTO DEL INSTRUCTOR. SI PESE A TODO SE REALIZA TAL CONSULTA, DEBERA INDICARSE CON QUIEN O QUIENES. Las respuestas deberán enviarse por correo electrónico a mi cuenta de la UAM, el dia 25 de Marzo (o antes).

I) (10 puntos) Probar la Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov, para $X_i \in \mathcal{L}^2$: sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con varianzas finitas, las cuales satisfacen la condición de Kolmogorov

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} < \infty.$$

Entonces para casi todo $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i))(\omega) = 0.$$

Comentario: la prueba está en las transparencias, se pide completar los detalles. Por ejemplo, si se usa el lema de Kronecker o un caso especial, incluir la demostración, si se afirma que un proceso estocástico es una martingala, verificarlo, etc.

II) (10 puntos) Lanzamos un dado equilibrado de 4 caras. Sea $W = 1$ si sale 1, $W = 2$ si sale un número mayor o igual a 2. Si $W = 1$, lanzamos un dado equilibrado de 6 caras hasta que sale un 5, y contamos el número de lanzamientos efectuados (incluyendo el del 5). Si $W = 2$, lanzamos el dado de 6 caras una vez y apuntamos el número obtenido. Finalmente, sea Y el resultado de este experimento aleatorio.
a) Hallar $E(Y|W)$. b) Hallar $E(Y)$.

III) (10 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (indicando claramente la opción elegida): "$X_n \to X$ en probabilidad si y solo si $\lim_n E\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) = 0$."

IV) (10 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (indicando claramente la opción elegida): "si X e Y son variables aleatorias en $L^1(P)$, tales que para toda $t \in \mathbb{R}$ se verifica $P(X \leq t) < P(Y \leq t)$, entonces $E(Y) < E(X)$."

V) (10 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (indicando claramente la opción elegida): "si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de v.a.'s independientes, tales que para todo $n \geq 1$, $E(X_n) = 0$ y $E|X_n| = 1$, entonces $P(\liminf_n X_n < 0) > 0$."