Ecuaciones diferenciales

Lista 5 — 2ºM/3ºDG, Curso 2018-19

1. Para cada una de las sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ siguientes, determínar (si existe) el límite puntual de la sucesión en el conjunto o conjuntos indicados, y comprobar si la convergencia es uniforme.

a) $f_n(x) = \exp(-n\,x^2)\,,\quad$ sobre $[-1,1]\,.$

b) $f_n(x) = x^{1/n}\,,\quad$ sobre $[0,1]\,.$

c) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}\quad$ en $[0,1-\varepsilon]$, en $[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$, y en $[1+\varepsilon,\infty)$.

d) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le n \\ x-n & \text{si } x \ge n \end{cases}\quad$ en cada $[a,b]$ y en $\mathbb{R}\,.$

e) $f_n(x) = \dfrac{n\,x}{1+n^2\,x^2}\quad$ en $[-1,1]$ y en $[1,\infty)$.

f) $f_n(x) = x^{-n}e^x\quad$ en $(1,\infty)$.

2. Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$, dada por $f_n(x) = n^2\,x\,e^{-nx^2}$
a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.
b) Comprobar que a pesar de que converge puntualmente a una función integrable, y que cada f_n es integrable, se tiene $\lim \int_0^1 f_n = \infty$.

3. Probar que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = x\,e^{-nx^2}$ converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$ y que $f_n'(x)$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$, pero que $\{f_n'\}$ no converge uniformemente en ningún intervalo que contenga a 0.

4. Encontrar una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja uniformemente a f en $[0,\infty)$ para las que existan los límites $\lim \int_0^{\infty} f_n$ y $\int_0^{\infty} f$ pero no coincidan.

5. Sea $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$ en $\mathbb{R}$.
a) Estudiar a qué función converge puntualmente la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y si la convergencia es uniforme.
b) Describir la función $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(k!x)$.

6. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones dadas por $f_n(x) = x^2 + 1/n$ y $g_n(x) = (nx)^{-1}$.
a) Demostrar que ambas convergen uniformemente en $[1,\infty)$ y sin embargo la sucesión de término general $f_n g_n$ no lo hace.
b) Demostrar que a pesar de que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función f, $\{f_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a f^2.

7. Sea la sucesión de término general $f_n(x) = x/(1+n\,x^2)$. Comprobar que converge uniformemente a cierta f en $\mathbb{R}$ y que se se verifica $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ para cualquier $x \neq 0$ pero no para $x = 0$.

8. Encontrar una sucesión de funciones derivables en $(-1,1)$ que converja uniformemente a $f(x) = |x|$.

9. Considerar la ecuación lineal

$$x' + a(t)x = 0,$$

donde $a(t)$ es una función continua y periódica de periodo T.
a) Demostrar que si $x(t)$ es solución, entonces $y(t) = x(t+T)$ también lo es.
b) Demostrar que existe una constante C tal que $x(t+T) = Cx(t)$ para todo t.
c) Encontrar la condición que debe satisfacer $a(t)$ para que existan soluciones de periodo T, o de periodo $2T$.
d) Si $a(t)$ es constante, calcular su valor para que existan soluciones periódicas de periodo $2T$.

10. Considerar la ecuación lineal con $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$

$$x' = rx + b(t),$$

Donde b es una función periódica continua de período $T > 0$.
a)Sea $r < 0$, demostrar que la aplicación $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(\xi) = x(T, \xi),$$

donde $x(t, \xi)$ es la solución de la ecuación con dato inicial $x(0) = \xi$, tiene un único punto fijo ξ_0 . Sea $r > 0$, demostrar lo mismo considerando la aplicación $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $F(\xi) = x(-T, \xi)$. Demostrar en ambos casos que la solución $x(t, \xi_0)$ es una función periódica de período T.
b) Demuéstrese que si $r < 0$ la solución periódica obtenida es asintóticamente estable (cualquier solución de la ecuación converge a ella si $t \to +\infty$).

11. Considerar la ecuación lineal con

$$x' = a(t)x + b(t),$$

Donde a y b son función periódicas continuas de período $T > 0$.
a) Demostrar que que si una solución $x(t)$ cumple que $x(0) = x(T)$, estonces es periódica.
b) Demostrar que si $\alpha = \int_0^T a(s)ds \neq 0$ entonces existe una única solución periódica
b) Demuéstrese que si $\alpha < 0$ la solución periódica obtenida es asintóticamente estable (cualquier solución de la ecuación converge a ella si $t \to +\infty$).