T.I.M.
(Teoría de la Integral y de la Medida)
Grado de Matemáticas
Capítulo 1: Medida.

José García-Cuerva

Universidad Autónoma de Madrid.

27 de octubre de 2019

Recordemos la definición de la integral de Riemann:

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Para cada partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, definimos

- la suma superior
$$\mathcal{S}(P, f) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ donde } M_j = \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x),\ 1 \leq j \leq n,$$
- la suma inferior
$$\mathcal{I}(P, f) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ donde } m_j = \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x),\ 1 \leq j \leq n$$
- y las integrales superior e inferior, dadas, respectivamente por
$$\overline{\int_a^b} f dx = \inf_P \mathcal{S}(P, f), \qquad \underline{\int_a^b} f dx = \sup_P \mathcal{I}(P, f)$$
con inf y sup sobre todas las particiones de $[a, b]$.

Al ser f acotada, existen dos números m, M tales que $\forall x \in [a, b],\ m \leq f(x) \leq M$. Por lo tanto, para cualquier partición P,

$$m(b-a) \leq \mathcal{I}(P, f) \leq \mathcal{S}(P, f) \leq M(b-a).$$

Esto garantiza la existencia de las integrales superior e inferior y se puede ver (**Ejercicio 1**) que

$$\underline{\int_a^b} f dx \leq \overline{\int_a^b} f dx.$$

Definición.

Diremos que la función f es integrable Riemann en el intervalo $[a, b]$ y escribiremos $f \in \mathcal{R}$ si y sólo si sus integrales inferior y superior coinciden. Llamaremos a ese valor común integral de Riemann de f sobre $[a, b]$ y lo escribiremos como

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f dx.$$

Aunque la integral que hemos denominado “de Riemann” fue introducida por primera vez por el matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), la definición que hemos dado es una modificación debida al francés Gaston Darboux (1842–1917).

Aunque la integral de Riemann es suficiente para abordar con rigor una porción significativa del Análisis Matemático, tiene serias limitaciones que aconsejan buscar una herramienta más eficaz.

Esta herramienta es la integral de Lebesgue, desarrollada por el matemático francés Henri Leon Lebesgue (1875–1941).

Lebesgue introdujo su integral en su Tesis Doctoral, que con el título “Intégrale, longueur, aire” presentó en París en 1902.

En una conferencia pronunciada en Copenhague en 1926, Lebesgue da una explicación sencilla de su nueva integral, que compara con la de Riemann. Afirma que la diferencia básica consiste en que, en vez de dividir el dominio de la función como hace Riemann, él divide el rango de valores que toma la función.

Compara este proceso con la contabilidad de un comerciante, que puede ir sumando sus ingresos según le llegan, como hace Riemann o, en vez de eso, agrupar los billetes que obtiene según su valor. Este segundo procedimiento sería el de Lebesgue.
Donde Riemann utiliza sumas del tipo

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}),$$

Lebesgue se ve obligado a tomar sumas del tipo

$$\sum_{j=1}^{n} y_j m(E_j),$$

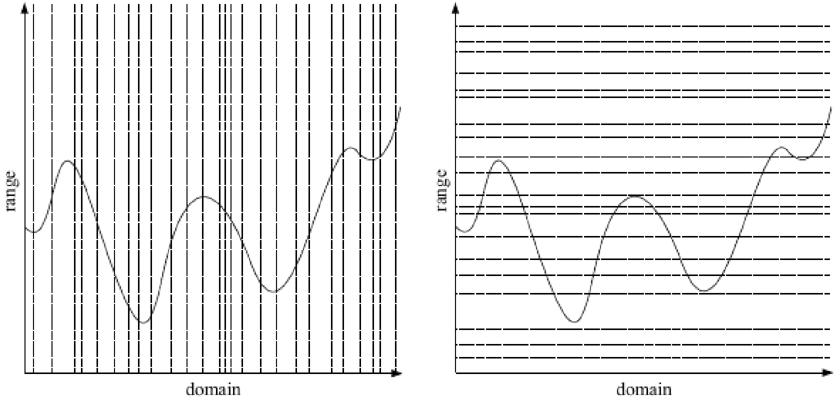
donde $E_j = \{x \in [a,b] : y_{j-1} < f(x) \leq y_j\}$.

Aquí $m(E_j)$ debería ser la medida del conjunto E_j. Si E_j es un intervalo, la medida es su longitud. Pero si uno aspira a considerar funciones más generales que las continuas y monótonas a trozos, los E_j ya no son intervalos y uno tiene que estar preparado para medir conjuntos más generales.

De hecho esta definición abre la puerta a integrar funciones definidas en espacios más generales que la recta, siempre que sepamos medir una clase amplia de sus subconjuntos.

Así pues, antes de introducir la integral general de Lebesgue tenemos que abordar el problema de la medida; en otras palabras, tenemos que hacer Teoría de la Medida.

En la página siguiente vemos un dibujo que ilustra ese famoso comentario de Lebesgue en que analiza la diferencia básica entre las integrales de Riemann y de Lebesgue.



En la siguiente transparencia se puede leer una traducción literal de la explicación de Lebesgue:

Lebesgue hablando sobre su integral.

Los Geómetras del siglo XVII consideraban la integral de $f(x)$ —el término integral no se había inventado aún, pero esto no tiene ninguna importancia— como la suma de una infinidad de indivisibles cada uno de ellos siendo la ordenada, positiva o negativa, de $f(x)$. Y bien, nosotros simplemente hemos agrupado los indivisibles de tamaño comparable; hemos hecho, como se dice en álgebra, la reunión, la reducción de los términos semejantes. Se puede decir que, con el método de Riemann, se intentaba sumar los indivisibles tomándolos en el orden suministrado por la variación de x, se procedía como lo haría un comerciante desorganizado que contara monedas y billetes según fueran cayendo estos en sus manos; en cambio nosotros procedemos como el comerciante metódico que dice:

tengo $m(E_1)$ monedas de 1 corona lo que hace $1 \cdot m(E_1)$,

tengo $m(E_2)$ monedas de 2 coronas lo que hace $2 \cdot m(E_2)$,

tengo $m(E_3)$ monedas de 5 coronas lo que hace $5 \cdot m(E_3)$,

etc. . . , así tengo en total:

$$S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \cdots .$$

Ambos procedimientos conducirán al comerciante, sin ninguna duda, al mismo resultado ya que, por muy rico que éste sea, no hay más que un número finito de billetes que contar; pero para nosotros que tenemos que sumar una infinidad de indivisibles, la diferencia entre los dos métodos es capital.

"Sobre el desarrollo de la noción de integral"
H. Lebesgue, conferencia en Copenhague 1926.

¿Es posible medir todos los conjuntos?

Deseamos construir una aplicación μ que a cada $A \subset \mathbb{R}^n$ le asigne un valor $\mu(A) \in [0, \infty]$, la medida de A. Queremos que μ preserve la medida de los conjuntos que sabemos medir (por ejemplo, los productos de intervalos).

Pregunta: ¿Qué propiedades debería satisfacer μ?

(i) $\sigma-$aditividad o aditividad numerable: Si $A_1, A_2, ...$ es una sucesión finita o numerable de conjuntos disjuntos dos a dos:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Por cierto: ¿Por qué no pedir, simplemente, aditividad?

(ii) μ debe ser invariante por traslaciones, rotaciones y reflexiones: Si A es congruente con B (A puede ser trasformado en B mediante traslaciones, rotaciones y reflexiones), entonces $\mu(A) = \mu(B)$.

(*iii*) Normalización: Para el cubo unidad $Q = [0,1]^n$, debe ser $\mu(Q) = 1$.

Este programa resulta imposible: no existe ninguna aplicación definida en todo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaga las tres propiedades anteriores. Para verlo utilizaremos el ejemplo siguiente que se debe al matemático italiano Giuseppe Vitali (1875–1932):

En $\mathbb{R}$ definimos la siguiente relación de equivalencia: Si $x, y \in \mathbb{R}$, diremos que x está relacionado con y y escribiremos $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales.

Mediante esta relación de equivalencia, $\mathbb{R}$ queda dividido en clases de equivalencia que son conjuntos disjuntos y el axioma de elección nos permite considerar un conjunto S que tiene un único elemento en cada clase de equivalencia. Podemos suponer que $S \subset [0,1[$.

Para cada $x \in [0,1[$, existirá un único $s \in S$ tal que $x \sim s$, es decir, $x - s \in \mathbb{Q}$. De hecho $x - s \in]-1,1[\cap \mathbb{Q}$. Así que tenemos

$$[0,1[\subset \biguplus_{r \in]-1,1[\cap\mathbb{Q}} (S + r) \subset]-1,2[$$

Si existiera μ con las tres propiedades anteriores, tendríamos

$$1 = \mu([0,1[) \leq \mu\left(\biguplus_{r\in]-1,1[\cap\mathbb{Q}} (S+r)\right)$$
$$= \sum_{r\in]-1,1[\cap\mathbb{Q}} \mu(S+r) \leq \mu(]-1,2[) = 3.$$

pero esto es imposible porque todos los números $\mu(S+r)$ serían iguales y la suma sólo podría ser 0 o ∞.
Hemos usado una propiedad que se sigue de ser $\mu \geq 0$ y la $\sigma-$aditividad. Es el hecho de que, si un conjunto está contenido en otro, su medida no es mayor que la de este último.

Si se reemplaza la aditividad numerable por la aditividad finita; también resulta un conjunto de propiedades incompatibles. Inspirándose en el ejemplo de Vitali, S. Banach (1892–1945) y A. Tarski (1901–1983) encontraron lo que se conoce como la paradoja de Banch-Tarski. Lo que demostraron, es que, dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^d$, con $d \geq 3$, que tengan interior no vacío, existen descomposiciones finitas $A = \biguplus_{j=1}^{n} A_j, \; B = \biguplus_{j=1}^{n} B_j$ tales que, para cada $j = 1, \cdots, n$, A_j y B_j son congruentes. Si se piensa que A es el sol y B un guisante, se aprecia bien lo paradójico que resulta para la intuición.

El siguiente artículo contiene una exposición elemental de la paradoja de Banach-Tarski:

Karl Stomberg, "The Banach-Tarski paradox", *American Mathematical Monthly*, vol. 86 (1979) 151–161.

Álgebras y $\sigma-$Álgebras

Definición.

Sea $X \neq \emptyset$. Un álgebra de subconjuntos de X es una colección no vacía $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple las dos propiedades siguientes:

(*i*) $\mathcal{A}$ es cerrada o estable por uniones finitas, lo cual quiere decir que para cada familia finita $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$, se tiene que $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.

(*ii*) $\mathcal{A}$ es cerrada o estable por complementarios; lo cual quiere decir que, para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $\complement A \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 2: Demostrar que un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es

(i) cerrada por intersecciones finitas; es decir que para cada familia finita $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$, se tiene que $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$ y

(ii) cerrada por diferencias; es decir, que para cada $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 3: Demostrar que cualquier álgebra de conjuntos de X siempre contiene a X y a $\emptyset$.

Ejercicio 4: Demostrar que para ver que una familia no vacía de subconjuntos de X es un álgebra, es suficiente comprobar que es cerrada por intersecciones finitas y por complementos.

Definición.

Sea $X \neq \emptyset$. Una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X es una colección no vacía $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple las dos propiedades siguientes:

(i) $\mathcal{A}$ es cerrada o estable por uniones infinito-numerables, lo cual quiere decir que para cada familia infinito-numerable $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$, se tiene que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

(ii) $\mathcal{A}$ es cerrada o estable por complementarios; lo cual quiere decir que, para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $\complement A \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 5: Demostrar que una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es cerrada por intersecciones infinito-numerables; es decir, que para cada familia infinito-numerable $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$, se tiene que $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ y

Ejercicio 6: Demostrar que toda $\sigma-$álgebra es álgebra.

Ejercicio 7: Demostrar que un álgebra es $\sigma-$álgebra si y sólo si es estable por uniones numerable disjuntas.

Ejemplos de álgebras y $\sigma-$álgebras.

Los ejemplos más sencillos de $\sigma-$álgebras de subconjuntos de X son $\{\emptyset, X\}$ y $\mathcal{P}(X)$.

Ejercicio 8: Demostrar que la colección de los subconjuntos de X que, o bien son finitos, o bien tienen complemento finito (estos últimos se llaman cofinitos) forman un álgebra de subconjuntos de X.

Ejercicio 9: Demostrar que la colección de los subconjuntos de X que, o bien son numerables (es decir, finitos o infinito-numerables), o bien tienen complemento numerable (estos últimos se llaman conumerables) forman una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X.

Ejercicio 10: Demostrar que si $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ es una familia arbitaria de álgebras (respectivamente $\sigma-$álgebras), la intersección

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathcal{A}_\alpha$$

vuelve a ser un álgebra (respectivamente, una $\sigma-$álgebra).

Definición.

Dada una famila cualquiera $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, se llama álgebra (respectivamente $\sigma-$álgebra) generada por $\mathcal{F}$ a la intersección de todas las álgebras (respectivamente $\sigma-$álgebras) de subconjuntos de X que contienen a $\mathcal{F}$. Por el ejercicio último, coincide con la mínima álgebra (respectivamente $\sigma-$álgebra) de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{F}$.
A partir de ahora, denotaremos por $\sigma(\mathcal{F})$ a la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{F}$.

Ejercicio 11: Demostrar que, dadas dos familias $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, se tiene que

$$\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F}) \Longleftrightarrow \mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F}).$$

Definición.

Dado un espacio métrico, o, con más generalidad, un espacio topológico, podemos considerar su topología τ_X que es, por definición, la familia de todos los subconjuntos abiertos de X. Por definición, se llama $\sigma-$álgebra de Borel de X (en honor del matemático francés E. Borel (1871–1976)) a la $\sigma-$álgebra generada por la colección τ_X de los conjuntos abiertos de X. A la $\sigma-$álgebra de Borel de X se la suele denotar por $\mathcal{B}_X$ y a sus conjuntos se les llama conjuntos de Borel de X. Tenemos, pues:

$$\mathcal{B}_X = \sigma(\tau_X).$$

Entre los conjuntos de Borel se encuentran los que son intersección numerable de abiertos, que se llaman G_δ's o los que son unión numerable de cerrados, que se llaman F_σ's. Así podemos generar toda una escala de conjuntos de Borel, como las uniones numerables de G_δ's, que se llaman $G_{\delta\sigma}$'s o las intersecciones numerables de F_σ's, que se llaman $F_{\sigma\delta}$'s

Proposición.

Cada una de las siguientes familias de subconjuntos de la recta real $\mathbb{R}$ genera la $\sigma-$álgebra de Borel de la recta $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

1) La familia de los intervalos abiertos
$\mathcal{E}_1 = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$
2) La familia de los intervalos cerrados
$\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$
3) Cada una de las familias de intervalos semiabiertos
$\mathcal{E}_3 = \{]a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ y $\mathcal{E}_4 = \{[a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$
4) Cada una de las familias de rayos abiertos
$\mathcal{E}_5 = \{]a, \rightarrow [: a \in \mathbb{R}, a < b\}$ y $\mathcal{E}_6 = \{] \leftarrow, a[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$
5) Cada una de las familias de rayos cerrados
$\mathcal{E}_7 = \{[a, \rightarrow [: a \in \mathbb{R}, a < b\}$ y $\mathcal{E}_8 = \{] \leftarrow, a] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Es decir: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3) = \sigma(\mathcal{E}_4) = \sigma(\mathcal{E}_5) = \sigma(\mathcal{E}_6) = \sigma(\mathcal{E}_7) = \sigma(\mathcal{E}_8)$.

Demostración: Ejercicio 12:
La definición no constructiva que hemos dado para $\sigma(\mathcal{E})$, la $\sigma-$álgebra generada por la familia de conjuntos $\mathcal{E}$, es suficiente para casi todo lo que vamos a hacer con ella este curso.
Sin embargo, parece natural aspirar a entender cómo podemos generar explícitamente los conjuntos de $\sigma(\mathcal{E})$ a partir de los de $\mathcal{E}$.
Para entender bien esto son necesarias unas nociones básicas de números ordinales, o lo que es lo mismo, de conjuntos bien ordenados.
Vamos a ver esas nociones básicas a continuación; pero lo primero es apreciar la dificultad básica que complica la construcción de todos los conjuntos de $\sigma(\mathcal{E})$ a partir de los de $\mathcal{E}$.
Empecemos ingenuamente. Si nos dan una colección $\mathcal{E}$ de subconjuntos de un cierto conjunto X, llamemos $\mathcal{E}_1$ a $\mathcal{E} \cup \{\complement E, E \in \mathcal{E}\}$. Ahora, por inducción, para $j > 1$, llamemos $\mathcal{E}_j$ a la familia de aquellos conjuntos tales que ellos o sus complementarios son unión numerable de conjuntos de $\mathcal{E}_{j-1}$. Consideremos $\mathcal{E}_\omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_j$.

Si esta colección fuera una $\sigma-$álgebra, sería igual a $\sigma(\mathcal{E})$. Pero ¿Por qué habría de ser una $\sigma-$álgebra? Desde luego, es una colección cerrada por complementario; pero, si tomamos $E_j \in \mathcal{E}_j \setminus \mathcal{E}_{j-1}$ ¿qué razón hay para pensar que $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{E}_\omega$?
Ante esta dificultad tendríamos que empezar de nuevo y esto requiere que manejemos los números ordinales. A continuación hacemos una introducción rápida para aquellos que no los han visto antes o no los recuerdan completamente

Conjuntos bien ordenados, Números ordinales.

Definiciones.

Sea X un conjunto bien ordenado. Eso quiere decir que todo subconjunto no vacío de X tiene un mínimo o primer elemento. Así pues, si $A \subset X$ es un subconjunto no vacío de X, el mínimo de A es, desde luego, su cota inferior máxima, lo que se suele llamar el ínfimo de A y se denota como $\inf A$.
Por otro lado, si A está acotado superiormente, o sea, si tiene alguna cota superior, entre todas las cotas superiores hay una mínima, que se conoce como el supremo de A y se denota por $\sup A$.
Para cada $x \in X$ llamaremos segmento inicial de x al conjunto

$$I_x = \{y \in X : y < x\}$$

Los elementos de Ix se dice que son los que preceden a x o los predecesores de x.

El Principio de inducción que se estudia en Conjuntos y Números es equivalente al hecho de que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un conjunto bien ordenado. El Principio de Inducción tiene una extensión a cualquier conjunto bien ordenado, que se conoce como

Principio de inducción Transfinita.

Sea X un conjunto bien ordenado. Si $A \subset X$ tiene la propiedad de que

$$\forall x \in X,\ I_x \subset A \Longrightarrow x \in A,$$

entonces $A = X$.

Demostración.

Si $A \subsetneqq X$, sea $x = \inf(X \setminus A)$. Entonces $I_x \subset A$ pero $x \notin A$.

Proposición.

Sea X un conjunto bien ordenado y sea $A \subset X$. Entonces $\bigcup_{x \in A} I_x$ es, o bien un segmento inicial, o bien todo X.

Demostración.

Sea $J = \bigcup_{x \in A} I_x$. Si $J \subsetneqq X$, sea $b = \text{ínf}(X \setminus J)$. Si existe $y \in J$ tal que $y > b$, sería $y \in I_x$ para algún $x \in A$. Y, por consiguiente, $b \in I_x$, que es una contradicción con la definición del ínfimo. Por tanto, $J \subset I_b$. Y, desde luego, es claro que $I_b \subset J$.

Proposición.

Sean X e Y dos conjuntos bien ordenados. Entonces, o bien X es orden-isomorfo a Y, o bien X es orden-isomorfo a un segmento inicial de Y o bien Y es orden-isomorfo a un segmento inicial de X.

Demostración.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los isomorfismos de orden cuyos dominios son segmentos iniciales de X o el propio X y cuyos recorridos o rangos son segmentos iniciales de Y o el propio Y.
$\mathcal{F} \neq \emptyset$, ya que contiene, al menos, la aplicación única $f : \{\text{ínf}\, X\} \to \{\text{ínf}\, Y\}$.
Puesto que los miembros de $\mathcal{F}$ son subconjuntos de $X \times Y$, podemos ordenar $\mathcal{F}$ por la inclusión. Se comprueba fácilmente que este orden es inductivo, de modo que se puede aplicar el lema de Zorn y concluir que existe un elemento maximal f. Digamos que f tiene dominio A y rango B. Si $A = I_x$ y $B = I_y$, entonces $A \cup \{x\}$ y $B \cup \{y\}$ son, de nuevo, segmentos iniciales de X e Y y f se puede extender haciendo $f(x) = y$, lo que contradice su maximalidad. Por consiguiente, o bien es $A = X$, o bien es $B = Y$, o bien se cumplen ambas cosas, que es lo que queríamos demostrar.

Proposición.

Existe un conjunto bien ordenado no numerable Ω tal que, para cada $x \in \Omega$, I_x es numerable. Si Ω' es otro conjunto con las mismas propiedades, entonces Ω y Ω' son orden-isomorfos.

Demostración.

Desde luego, existen conjuntos bien ordenados no numerables por el principio de la buena ordenación (o de Zermelo), que es una versión del Axioma de Elección. Sea X uno de estos conjuntos, bien ordenado y no numerable. Entonces, o bien cumple lo que queremos, o bien podemos encontrar en X un elemento x_0, que es el mínimo de todos los $x \in X$ para los que I_x es no numerable. En ese caso, podemos tomar $\Omega = I_{x_0}$. Si Ω' es otro conjunto con las mismas propiedades de Ω, entonces Ω' no puede ser orden-isomorfo a ningún segmento inicial I_x de Ω. Y al revés tampoco, ya que Ω y Ω' son no numerables y, sin embargo, sus segmentos iniciales son numerables. Así que, no cabe otra posibilidad que la de que Ω y Ω' sean orden-isomorfos.

Ω es el conjunto de los ordinales numerables. En él es básico que

Proposición.

Todo subconjunto numerable de Ω tiene alguna cota superior.

Demostración.

Si $A \subset \Omega$ es numerable, $\bigcup_{x \in A} I_x$ es numerable y, por lo tanto, no puede ser todo Ω. Como vimos en la proposición que sigue al principio de inducción transfinita, existirá algún $y \in \Omega$ tal que $\bigcup_{x \in A} I_x = I_y$. Así pues, y es una cota superior de A.

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales se identifica con un subconjunto de Ω del modo siguiente. Se define una inclusión $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \Omega$ por inducción, haciendo $f(1) = \inf \Omega$ y $f(j+1) = \inf(\Omega \setminus \{f(1), \cdots, f(j)\})$. Se ve inmediatamente que f es un isomorfismo de orden de $\mathbb{N}$ sobre I_ω, donde ω es el primer elemento de Ω cuyo segmento inicial I_ω es infinito.

Se acostumbra añadir un elemento ω_1 al final de Ω, obteniendo el conjunto ordenado $\Omega^\star = \Omega \cup \{\omega_1\}$ en el que ω_1 es el último elemento. Cada elemento de $\Omega^\star$ se identifica con su segmento inicial. Así $\Omega = I_{\omega_1}$ se identifica con ω_1 y se habla de Ω como del primer ordinal no numerable. Del mismo modo, ω, el primer ordinal infinito-numarable se identifica con $\mathbb{N}$

Generación de $\sigma(\mathcal{E})$ a partir de $\mathcal{E}$ por inducción transfinita.

Retomemos el proceso de generación explícita de $\sigma(\mathcal{E})$ a partir de $\mathcal{E}$.
Ya teníamos definidas las colecciones $\mathcal{E}_j$, $j = 1, 2, \cdots$ y la $\mathcal{E}_\omega$, correspondiente al primer ordinal numerable ω.
Lo que hacemos ahora es continuar asignando a cada ordinal numerable $\alpha \in \Omega$ una colección $\mathcal{E}_\alpha$ de subconjuntos de X.
Lo hacemos por inducción transfinita:

- Si α tiene un predesor inmediato, digamos β, entonces definimos $\mathcal{E}_\alpha$ a partir de $\mathcal{E}_\beta$ exactamente como definimos $\mathcal{E}_{j+1}$ a partir de $\mathcal{E}_j$ para $j = 1, 2, \cdots$. Es decir: $\mathcal{E}_\alpha$ es la colección de subconjuntos de X tales que, ellos o sus complementos son unión de una familia numerable de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{E}_\beta$.
- Y si α no tiene predecesor inmediato, procedemos como cuando definimos $\mathcal{E}_\omega$. Es decir: $\mathcal{E}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_\beta$.

Proposición.

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{E}_\alpha,$$

donde Ω es el conjunto de los ordinales numerables.

Demostración.

Se demuestra por inducción transfinita que $\forall\alpha \in \Omega,\ \mathcal{E}_\alpha \subset \sigma(\mathcal{E})$ y, por consiguiente, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} \mathcal{E}_\alpha \subset \sigma(\mathcal{E})$.

Para ver inclusión en sentido contrario sólo tenemos que demostrar que $\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} \mathcal{E}_\alpha$ es $\sigma-$álgebra. Esto es consecuencia de la última proposición del repaso que hicimos de los números ordinales.

En efecto, si tenemos una familia numerable $E_j \in \mathcal{E}_{\alpha_j},\ j = 1, 2, \cdots$ y $\alpha = \sup_{j=1,2,\cdots} \alpha_j$, entonces $\forall j = 1, 2, \cdots,\ E_j \in \mathcal{E}_\alpha$ y, por consiguiente $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{E}_\beta$, donde β es el sucesor de α en Ω.

Ejercicio 13: Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra infinita. Demostrar que

(*a*) $\mathcal{A}$ contiene una sucesión infinita de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos.

(*b*) $\mathrm{card}(\mathcal{A}) \geq 2^{\aleph_0}$.

(*Sugerencia: ¿Cuántos átomos puede tener $\mathcal{A}$? Se dice que un conjunto $A \in \mathcal{A}$ es un átomo de $\mathcal{A}$ si es no vacío y no tiene ningún subconjunto propio que pertenezca a $\mathcal{A}$, aparte del vacío*).

Ejercicio 14:

(*a*) Demostrar que, si $\aleph_0 \leq \mathrm{card}(\mathcal{E}) \leq 2^{\aleph_0}$, entonces $\mathrm{card}(\sigma(\mathcal{E})) = 2^{\aleph_0}$.

(*b*) Demostrar que, en particular, $\mathrm{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = 2^{\aleph_0}$.

Definición.

Llamaremos espacio medible a un par $(X, \mathcal{A})$ formado por un conjunto no vacío X y una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X.

Definición.

Sea una familia de conjuntos no vacíos $(X_\alpha)_{\alpha\in J}$ y supongamos que, para cada $\alpha \in J$, nos dan una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{P}(X_\alpha)$. En otras palabras, tenemos una colección $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\in J}$ de espacios medibles. En el producto cartesiano $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ consideraremos la $\sigma-$álgebra producto $\bigotimes\limits_{\alpha\in J} \mathcal{A}_\alpha$, que es, por definición, la $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X generada por la colección de conjuntos

$$\{\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) : \ A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \ \alpha \in J\},$$

donde las π_α son las proyecciones

$$\begin{array}{rcl} X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha & \xrightarrow{\pi_\alpha} & X_\alpha \\ x = (x_\alpha)_{\alpha\in J} & \longmapsto & x_\alpha. \end{array}$$

Diremos que $(\prod_{\alpha\in J} X_\alpha, \bigotimes\limits_{\alpha\in J} \mathcal{A}_\alpha)$ es el espacio medible producto de los espacios medibles $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\in J}$.

Ejercicio 15: Sea $(X_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios medibles. Demostrar que $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ coincide con la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos

$$\left\{\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n :\; A_n \in \mathcal{A}_n\right\}.$$

En particular, para el caso de dos espacios medibles $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$, el espacio medible producto $(X, \mathcal{M}) \times (Y, \mathcal{N}) = (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ tiene como $\sigma-$álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ la $\sigma-$álgebra generada por todos los conjuntos $A \times B$, donde $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{N}$. A estos productos $A \times B, A \in \mathcal{M},\; B \in \mathcal{N}$ se les suele llamar rectángulos medibles.

Ejercicio 16: Supongamos que, dada la familia de espacios medibles $(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in J}$, resulta que, para cada $\alpha \in J$, sabemos que $\mathcal{A}_\alpha$ es la $\sigma-$álgebra generada por una cierta familia de subconjuntos de X_α, a la que llamamos $\mathcal{E}_\alpha$.

(a) Demostrar que, entonces, la $\sigma-$álgebra producto $\bigotimes_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha$ está generada por la familia $\mathcal{F}_1 = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : \; E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \; \alpha \in J\}$.

(b) Ver que, si, además, J es numerable y, para cada $\alpha \in J, \; X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$, entonces $\bigotimes_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha$ está generada por la familia $\mathcal{F}_2 = \left\{\prod_{\alpha \in J} E_\alpha : \; E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \; \alpha \in J\right\}$.

Ejercicio 17: Sean $X_1, \cdots, X_n$ espacios métricos y sea $X = \prod_{j=1}^n X_j$ equipado con la métrica producto.

(a) Demostrar que $\bigotimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$.

(b) Demostrar que, si para cada $j = 1, \cdots, n, \; X_j$ es separable (o sea, que X_j tiene un subconjunto denso numerable), entonces $\bigotimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$.

Junto a las $\sigma-$álgebras y las álgebras, necesitamos introducir familias más generales a las que vamos a llamar semiálgebras. Folland las llama "familias elementales", un nombre que inspira todavía menos que el de semiálgebras.

Aunque, en abstracto, pueda parecer una noción técnica retorcida, la encontraremos natural cuando presentemos los ejemplos básicos, como son los de las familias de intervalos semiabiertos de $\mathbb{R}$.

Lo que hace útil a una semiálgebra es la descripción sencilla del álgebra que genera. La complicación esencial que hemos visto al discutir la generación de las $\sigma-$álgebras nos ayudará a apreciar mejor la descripción sencilla del álgebra generada por una semiálgebra.

Definición.

Diremos que una familia de conjuntos $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ es una semiálgebra si y sólo si cumple las tres propiedades siguientes:

- $\emptyset \in \mathcal{S}$.
- $E, F \in \mathcal{S} \Longrightarrow E \cap F \in \mathcal{S}$.
- $\forall E \in \mathcal{S}$, $\complement E$ es unión de una colección finita de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{S}$ y disjuntos dos a dos.

Desde luego, cualquier álgebra es semiálgebra; pero hay ejemplos importantes de semiálgebras, que resultan muy útiles para construir medidas.

Ejercicio 18: Demostrar que son semiálgebras estas dos familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ (intervalos semiabiertos):

$$\mathcal{S}_1 = \{\emptyset,\ \mathbb{R}\} \cup \{]a,b] :\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\} \\ \cup \{]\leftarrow, b],\ b \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, \rightarrow [,\ a \in \mathbb{R}\}.$$

y

$$\mathcal{S}_2 = \{\emptyset,\ \mathbb{R}\} \cup \{[a,b[:\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\} \\ \cup \{]\leftarrow, a[,\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{[b, \rightarrow [,\ b \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema.

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ es una semiálgebra, el álgebra generada por $\mathcal{S}$, que denotaremos por $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ coincide exactamente con la colección $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ de los subconjuntos de X que se pueden poner como unión de alguna familia finita de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{S}$ y disjuntos dos a dos.

Demostración. Desde luego, como $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ es un álgebra y $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \supset \mathcal{S}$, se sigue de la definición de álgebra, que $\mathcal{C}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{S})$.
Para probar el contenido opuesto, basta ver que $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ es un álgebra. Sabemos que para comprobar que una familia no vacía de conjuntos es un álgebra, es suficiente ver que es cerrada por intersecciones finitas y complementos. Y esto es lo que vamos a hacer a continuación:

- Si $A = \biguplus_{j=1}^{n} S_j,\ S_j \in \mathcal{S}$ y $B = \biguplus_{k=1}^{m} R_k,\ R_k \in \mathcal{S}$, entonces $A \cap B = \biguplus_{j,k} S_j \cap R_k \in \mathcal{S}$.
- Y si $A = \biguplus_{j=1}^{n} S_j,\ S_j \in \mathcal{S}$, por la definición de semiálgebra, será, para cada $j = 1, \cdots, n$, $\complement S_j = \biguplus_{k=1}^{n_j} S_{jk}$, con $S_{jk} \in \mathcal{S}$. Entonces $\complement A = \bigcap_{j=1}^{n} \complement S_j = \bigcap_{j=1}^{n} \left(\biguplus_{k=1}^{n_j} S_{jk} \right) = \biguplus_{k_1, \cdots, k_n} (S_{1k_1} \cap \cdots \cap S_{nk_n}) \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$.

Definición.

Dado un espacio medible $(X, \mathcal{M})$, se llama medida en $(X, \mathcal{M})$ a cualquier aplicación

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$$

que cumpla las dos condiciones siguientes:

- $\mu(\emptyset) = 0$ y
- para cada sucesión $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ de conjuntos de $\mathcal{M}$ **disjuntos dos a dos** se cumple que

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Esta segunda propiedad se conoce como **aditividad numerable**, **aditividad completa** o $\sigma-$**aditividad**. Se dice que μ es **numerablemente aditiva**, **completamente aditiva** o $\sigma-$**aditiva**.

Definición.

Un espacio medible $(X, \mathcal{M})$ junto con una medida definida en él, es lo que se conoce como espacio de medida.
En otras palabras; un espacio de medida es una terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ formada por

- Un conjunto X,
- una $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X y
- Una medida μ definida en $\mathcal{M}$.

Los conjuntos de $\mathcal{M}$ se llaman medibles y se miden con la medida μ.

Ejercicio 19: Demostrar que una medida $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ es siempre finitamente aditiva, lo cual quiere decir que, para cada familia finita $E_1, \cdots, E_n$ de conjuntos medibles, o sea, de $\mathcal{M}$, y disjuntos dos a dos

$$\mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n).$$

Definiciones.

Sea μ una medida en $(X, \mathcal{M})$. Entonces

- Se dice que μ es una medida finita, o que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida finito si $\mu(X) < \infty$.
- En el caso particular de que sea $\mu(X) = 1$, se dice que μ es una medida de probabilidad o que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de (medida de) probabilidad.
- Si $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ donde $\forall j,\ E_j \in \mathcal{M}$ y $\mu(E_j) < \infty$, se dice que μ es una medida $\sigma-$finita o que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida $\sigma-$finito. En general si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, donde $\forall j,\ E_j \in \mathcal{M}$ y $\mu(E_j) < \infty$, se dice que E es $\sigma-$finito para la medida μ.
- Si para cada $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = \infty$ existe $F \in \mathcal{M}$ con $F \subset E$ y $0 < \mu(F) < \infty$, se dice que μ es una medida semifinita o que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida semifinito.

Ejemplos

(*1*) Sea $X \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{M}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X. A cualquier función $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ le podemos asociar una función $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ haciendo $\forall E \in \mathcal{M}$

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x).$$

Ejercicio 20: Demostrar que μ es una medida. Recordar primero qué significa exactamente la suma que aparece en la definición de μ. Se dice que la medida μ está asociada al peso f.

Ejercicio 21: Sea μ la medida en la $\sigma-$álgebra $\mathcal{P}(X)$ asociada al peso f. Demostrar que

- μ es semifinita si y sólo si $f(x) < \infty \ \forall x \in X$ y
- μ es $\sigma-$finita si y sólo si μ es semifinita y, además el conjunto $\{x \in X : \ f(x) > 0\}$ es numerable.

Hay dos casos particulares de la definición anterior que merece la pena señalar, ambos para $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$.

- Si $f(x) = 1 \ \forall x \in X$, la medida μ asociada asigna a cada conjunto finito su cardinal y a cada conjunto infinito, simplemente ∞. Esta medida μ recibe el nombre de medida contadora.
- Si, para un cierto punto $x_0 \in X,\ f(x_0) = 1$ y $\forall x \neq x_0,\ f(x) = 0$, la correspondiente μ se llama medida de Dirac (en honor de Paul Dirac) o masa puntual en x_0 y se suele denotar como δ_{x_0}. Asigna a cada conjunto E el valor 1 si $x_0 \in E$ o el valor 0 si $x_0 \notin E$.

(2) Sea X un conjunto no numerable y sea $\mathcal{M}$ la $\sigma-$álgebra de los subconjuntos de X que, o bien son numerables o bien son conumerables. Definimos μ sobre $\mathcal{M}$ haciendo $\mu(E) = 0$ para los conjuntos numerables y $\mu(E) = 1$ para los conumerables.

Ejercicio 22: Demostrar que la μ definida más arriba (ejemplo 2) es, en efecto, una medida.

(3) sea X un conjunto infinito y sea $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Definimos $\mu(E) = 0$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito.

Ejercicio 23: Demostrar que la μ del ejemplo 3 es finitamente aditiva; pero no completamente aditiva; de modo que, en general, no es una medida.

Ejercicio 24: Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar las siguientes propiedades:

(*a*) Si $E, F \in \mathcal{M}$ y $E \subset F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$ (**monotonía**). Y, si además, $\mu(F) < \infty$, entonces, $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

(*b*) Si $E_j \in \mathcal{M}$ $\forall j \in \mathbb{N}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ (**subaditividad**).

(*c*) Si $E_j \in \mathcal{M}$ $\forall j \in \mathbb{N}$ y, además $E_j \subset E_{j+1}$ $\forall j \in \mathbb{N}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$ (**continuidad por abajo o continuidad inferior**). A veces se abrevia esta propiedad poniendo, simplemente $E_j \uparrow E \Longrightarrow \mu(E_j) \uparrow \mu(E)$. Y se dice que μ es continua inferiormente en E.

(*d*) Si $E_j \in \mathcal{M}\ \forall j \in \mathbb{N}$ y, además $E_j \supset E_{j+1}\ \forall j \in \mathbb{N}$ y $\mu(E_1) < \infty$, entonces $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$ (**continuidad por arriba o continuidad superior**). A veces se abrevia esta propiedad poniendo, simplemente $(E_j \downarrow E) \wedge (\mu(E_1) < \infty) \Longrightarrow \mu(E_j) \downarrow \mu(E)$. Y se dice que μ es continua superiormente en E.

Discutir con algún ejemplo si en (d) podemos eliminar la hipótesis de que sea $\mu(E_1) < \infty$.

En el ejercicio siguiente se presenta una generalización del anterior y recíprocos de las últimas afirmaciones de éste.

Ejercicio 25: Para cualquier función de conjunto $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty]$ definida en un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ diremos que

- μ es aditiva si $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(\biguplus_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$ para cualquier familia finita de conjuntos $A_j \in \mathcal{C}$ disjuntos dos a dos, para la que sea $\biguplus_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{C}$.
- μ es $\sigma-$aditiva (completamente aditiva o numerablemente aditiva) si $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(\biguplus_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para cualquier familia infinita numerable de conjuntos $A_j \in \mathcal{C}$ disjuntos dos a dos, para la que sea $\biguplus_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$.
- μ es continua inferiormente en $E \in \mathcal{C}$ si $E_j \uparrow E \Rightarrow \mu(E_j) \to \mu(E)$.
- μ es continua superiormente en $E \in \mathcal{C}$ si $(E_j \downarrow E) \wedge (\exists j_0 \ni \mu(E_j) < \infty \forall j > j_0) \Rightarrow \mu(E_j) \to \mu(E)$.

Sea $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$, una función de conjunto aditiva, definida en el álgebra $\mathcal{A}$. Se pide demostrar las implicaciones siguientes:

(*a*) Si μ es $\sigma-$aditiva, entonces μ es continua; lo cual quiere decir que es continua inferior y superiormente en E, $\forall E \in \mathcal{A}$.

(*b*) Si μ es continua inferiormente en E, $\forall E \in \mathcal{A}$, entonces, μ es $\sigma-$aditiva.

(*c*) Si μ es **finita** y continua superiormente en $\emptyset$, entonces μ es $\sigma-$aditiva. ¿Por qué necesitamos pedir en este apartado que μ sea finita?

Ejercicio 26: Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida semifinito. Demostrar que si $E \in \mathcal{M}$ tiene $\mu(E) = \infty$, entonces $\forall c > 0, \ \exists A \in \mathcal{M}$ tal que $A \subset E$ y $c < \mu(A) < \infty$.

Definición.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.

- Si $E \in \mathcal{M}$ tiene $\mu(E) = 0$, diremos que E es un conjunto $\mu-$nulo o, simplemente, nulo, si no hay ambigüedad posible.
- La subaditividad de la medida implica que la unión numerable de conjuntos $\mu-$nulos es un conjunto $\mu-$nulo.
- Sea $P(x)$ una proposición (o más propiamente, una función proposicional) que se formula para $x \in X$. Si existe un conjunto $\mu-$nulo E tal que $P(x)$ es cierta $\forall x \in X \setminus E$, diremos que $P(x)$ es cierta para casi todo punto de X o, incluso, si queremos precisar más, en casi todo punto de X con respecto a μ o, en $\mu-$ casi todo punto. Abreviaremos "casi todo" por c. t., en la estela de otros idiomas que hacen lo mismo (almost everywhere, en inglés, se abrevia por a. e. y presque partout, en francés, se abrevia por p. p.)

Si E es $\mu-$nulo y $F \subset E$, pueden ocurrir dos cosas: que sea $F \in \mathcal{M}$, en cuyo caso F es también $\mu-$nulo, o bien que sea $F \notin \mathcal{M}$.

Esta segunda situación se puede presentar. Basta considerar la medida 0 sobre la $\sigma-$álgebra trivial formada por $\emptyset$ y X. Más adelante veremos ejemplos menos triviales.

A veces supone una leve complicación. Merece la pena dar un nombre a las medidas o los espacios de medida en los que esta complicación no se presenta. Lo hacemos en la siguiente transparencia y también contamos cómo solventar la complicación que supone.

Definición.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Diremos que es completo, o que la medida μ es completa si y sólo si, cada vez que tengamos un conjuto $\mu-$nulo E y un subconjunto $F \subset E$, se verifica que $F \in \mathcal{M}$, de modo que F es, también un conjunto $\mu-$nulo.

A continuación vamos a ver que cualquier medida puede extenderse a una medida completa en una $\sigma-$álgebra mayor.

Teorema de completación.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Llamemos $\mathcal{N}$ a la familia de los conjuntos $\mu-$nulos y sea $\widetilde{\mathcal{M}} = \{E \cup F : \; E \in \mathcal{M} \text{ y } F \subset N \text{ para algún } N \in \mathcal{N}\}$. Entonces $\widetilde{\mathcal{M}}$ es una $\sigma-$álgebra y existe una única extensión $\widetilde{\mu}$ de μ a una medida completa en $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Demostración.

- Que $\widetilde{\mathcal{M}}$ es cerrado por uniones numerables es una consecuencia inmediata de que tanto $\mathcal{M}$ como $\mathcal{N}$ lo son.
- Sea $E \cup F \in \widetilde{M}$, donde $E \in \mathcal{M}$ y $F \subset N \in \mathcal{N}$. Podemos suponer que $E \cap N = \emptyset$. Si no fuera así, podríamos poner $F \setminus E$ en lugar de F y $N \setminus E$ en lugar de N. Entonces $E \cup F = (E \cup N) \cap (\complement N \cup F)$, de forma que $\complement(E \cup F) = \complement(E \cup N) \cup (N \setminus F)$. Como, desde luego, $\complement(E \cup N) \in \mathcal{M}$ y $N \setminus F \in \mathcal{N}$, queda claro que $\complement(E \cup F) \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Ya tenemos visto que $\widetilde{\mathcal{M}}$ es $\sigma-$álgebra.
- Para extender la medida ponemos, para $E \cup F \in \widetilde{\mathcal{M}}$ como arriba, $\widetilde{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Si tenemos dos representaciones $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$ con $E_j \in \mathcal{M}$ y $F_j \subset N_j$ $N_j \in \mathcal{N}$ para $j = 1, 2$, se tiene que $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, de modo que $\widetilde{\mu}$ está bien definida.
- Comprobar que $\widetilde{\mu}$ es una medida completa en $\widetilde{\mathcal{M}}$ y que es la única medida completa en $\widetilde{\mathcal{M}}$ que extiende μ es pura rutina (**Ejercicio 27**).

Medidas exteriores

Definición

Una medida exterior en un conjunto X es una aplicación $\mu^\star : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ que cumple las tres condiciones siguientes:

(i) : $\mu^\star(\emptyset) = 0$,

(ii) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mu^\star(E_1) \leq \mu^\star(E_2)$ y

(iii) : $\mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(E_j)$.

Cualquier medida en $\mathcal{P}(X)$ es una medida exterior en X; pero, lo interesante es la idea contenida en el teorema de C.Caratheodory (1873–1950), que nos permite obtener, a partir de cualquier medida exterior, una medida completa, definida en una cierta $\sigma-$álgebra contenida en $\mathcal{P}(X)$.

La clave del éxito del método de Caratheodory es que, mientras definir directamente una medida no resulta fácil mas allá de unos pocos casos simples, la construcción de una medida exterior es siempre sencilla, como afirma la siguiente proposición.

Proposición

Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{E}$. Supongamos que $\varphi : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ satisface $\varphi(\emptyset) = 0$ y definamos $\forall A \in \mathcal{P}(X)$

$$(1) \quad \mu^\star(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(F_j) : (F_j \in \mathcal{E} \ \forall j \in \mathbb{N}) \wedge \left(A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \right) \right\}.$$

Entonces, $\mu^\star$ es una medida exterior en X.

Demostración

(**Ejercicio 28**)

Ejercicio 29: En un espacio métrico (X, d), fijados $\alpha > 0$ y $\delta > 0$, definimos $\forall A \subset X$,

$$(2) \qquad \mathcal{H}_\alpha^\delta(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mathcal{D}F_k)^\alpha : \; A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \text{ con } \mathcal{D}F_k \leq \delta\right\}.$$

(a) Demostrar que $\mathcal{H}_\alpha^\delta$ es una medida exterior en X.

(b) Demostrar $\forall A \subset X$, $\exists \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(A)$.

(c) Ver que, si llamamos $m_\alpha^\star(A)$ al límite del punto anterior, entonces $m_\alpha^\star$ es una medida exterior en X, a la que podemos llamar medida exterior $\alpha-$dimensional de Hausdorff.

Definición

Sea $\mu^\star$ una medida exterior en X. Se dice que $E \subset X$ es $\mu^\star-$medible si

$$(3) \qquad \forall A \subset X, \; \mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E) + \mu^\star(A \cap \complement E).$$

Es decir, la medida exterior de cualquier conjunto se reparte bien entre E y su complemento.
Desde luego, basta probar $\geq$ en (3), ya que $\leq$ es verdad por ser $\mu^\star$ medida exterior.

Teorema de Caratheodory

Dada una medida exterior $\mu^\star$ en X, la colección $\mathcal{M}$ de los subconjuntos de X que son $\mu^\star-$medibles es una $\sigma-$álgebra y $\mu^\star|_{\mathcal{M}}$, la restricción de $\mu^\star$ a $\mathcal{M}$, es una medida μ, que, además, es completa.

Demostración

($1^{\underline{0}}$) $\mu^\star(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}$. En particular, $\emptyset \in \mathcal{M}$.

($2^{\underline{0}}$) $E \in \mathcal{M} \Rightarrow \complement E \in \mathcal{M}$. En particular, $X \in \mathcal{M}$.

($3^{\underline{0}}$) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ y $A \subset X$,
$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap E_1) + \mu^\star(A \cap \complement E_1) = \mu^\star(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^\star(A \cap E_1 \cap \complement E_2) + \mu^\star(A \cap \complement E_1 \cap E_2) + \mu^\star(A \cap \complement E_1 \cap \complement E_2)$. El último sumando es $\mu^\star(A \cap \complement(E_1 \cup E_2))$ y la suma de los otros tres es $\geq \mu^\star(A \cap (E_1 \cup E_2))$, de modo que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$.

($4^{\underline{0}}$) Si, como en el punto anterior, $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ y, además $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, tomando $A = E_1 \cup E_2$, resulta $\mu^\star(E_1 \cup E_2) = \mu^\star(E_1) + \mu^\star(E_2)$.

(5º) Queda por ver que $\mathcal{M}$ es cerrada por uniones numerables y que $\mu^\star$ es numerablemente aditiva en $\mathcal{M}$. Así tenemos una medida $\mu = \mu^\star|_{\mathcal{M}}$, que, por el punto (1) es, necesariamente, completa.

Basta considerar una sucesión de conjuntos de $\mathcal{M}$ disjuntos dos a dos. Sean $\{E_j\}_{j=1}^\infty$. Definimos, para $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{M}$ y $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Para $A \subset X$ se tiene

$\mu^\star(G_n \cap A) = \mu^\star((G_n \cap A) \cap E_n) + \mu^\star((G_n \cap A) \cap \complement E_n) =$
$\mu^\star(E_n \cap A) + \mu^\star(G_{n-1} \cap A) = \cdots = \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(E_j \cap A)$. Como $G_n \in \mathcal{M}$,

$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap G_n) + \mu^\star(A \cap \complement G_n) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(E_j \cap A) + \mu^\star(A \cap \complement G)$.

Haciendo $n \to \infty$, $\mu^\star(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(E_j \cap A) + \mu^\star(A \cap \complement G) \geq$
$\mu^\star(A \cap G) + \mu^\star(A \cap \complement G) \geq \mu^\star(A)$. Así $G \in \mathcal{M}$ y, además, tomando $A = G$, tenemos $\mu^\star(G) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(E_j)$.

Definición.

Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra de subconjuntos de X. Llamaremos premedida sobre $\mathcal{A}$ a cualquier aplicación $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ que sea $\sigma-$aditiva, es decir, cumpla las dos propiedades siguientes:

- $\mu_0(\emptyset) = 0$ y
- si $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ es una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos pertenecientes a $\mathcal{A}$ para la cual se tiene que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j).$$

Añadiendo a una familia finita de conjuntos disjuntos pertenecientes a $\mathcal{A}$ infinitas copias de $\emptyset$, se ve inmediatamente que una premedida es siempre finitamente aditiva. Y, por tanto, monótona.

Para las premedidas tienen sentido las nociones de “finita” y “$\sigma-$finita”, que se definen exactamente igual que para las medidas.

Lo único que le falta a una premedida para ser una medida es estar definida en una $\sigma-$álgebra. A continuación vamos a ver cómo, usando el teorema de Caratheodory, cualquier premedida definida en un álgebra $\mathcal{A}$ se extiende a una medida en la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{A}$.

Proposición.

Supongamos que μ_0 es una premedida definida sobre el álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X. Entonces, si para cada $E \subset X$ definimos

$$(4) \quad \mu^\star(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(A_j) : (A_j \in \mathcal{A},\ \forall j \in \mathbb{N}) \wedge \left(E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right\},$$

resulta que $\mu^\star$ es una medida exterior sobre X que, además, cumple las dos propiedades siguientes:

(a) $\mu^\star|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ y

(b) Todo conjunto perteneciente a $\mathcal{A}$ es $\mu^\star-$medible.

Demostración. La definición (4) de $\mu^\star$ es un caso particular de (1), de modo que ya sabemos que nuestra $\mu^\star$ es medida exterior. Ahora vamos a verificar que cumple (a) y (b).

(a) Sea $E \in \mathcal{A}$. Puesto que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ donde $A_1 = E$ y $A_j = \emptyset \ \forall j \geq 2$, es cierto que $\mu^\star(E) \leq \mu_0(E)$.

Para probar la desigualdad en sentido opuesto partimos de cualquier familia $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ con $A_j \in \mathcal{A} \ \forall j \in \mathbb{N}$ y $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ y observamos que, poniendo $B_1 = E \cap A_1$ y, para cada $n \geq 2, \ B_n = E \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right)$ tenemos una familia $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{A}$ y disjuntos dos a dos tales que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, de modo que, por la definición y las propiedades de las premedidas

$$\mu_0(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_j).$$

Por lo tanto $\mu_0(E) \leq \mu^\star(E)$.

(*b*) Sea $E \in \mathcal{A}$ y tomemos un conjunto cualquiera $B \subset X$. Hemos de ver que la medida exterior de B se reparte bien entre E y su complemento. Y nos vale con la desigualdad opuesta a la que ya tenemos por definición.

Sabemos que, para todo $\varepsilon > 0$, existen $B_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$ tales que $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \mu^\star(B) + \varepsilon$. pero entonces, dado que μ_0 es aditiva en $\mathcal{A}$, resulta

$$\begin{aligned}\mu^\star(B) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) & \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap E) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap \complement E) \\ & \qquad \geq \mu^\star(B \cap E) + \mu^\star(B \cap \complement E).\end{aligned}$$

Teorema.

Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra y sea μ_0 una premedida definida en $\mathcal{A}$. Llamemos $\mathcal{M}$ a la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{A}$, es decir, a la que sistemáticamente hemos designado por $\sigma(\mathcal{A})$. Entonces

(a) Existe una medida μ en $\mathcal{M}$ cuya restricción a $\mathcal{A}$ es μ_0. Concretamente $\mu = \mu^\star|_{\mathcal{M}}$, donde $\mu^\star$ está definida por (4).

(b) Si ν es otra medida en $\mathcal{M}$ que es extensión de μ_0, se verifica que

$$\nu(E) \leq \mu(E)\; \forall E \in \mathcal{M}, \text{ con igualdad cuando } \mu(E) < \infty.$$

(c) Si μ_0 es $\sigma-$finita, μ es la única medida que extiende μ_0 a $\mathcal{M}$.

Demostración.

(*a*) Vimos en la proposición anterior cómo μ_0 se extiende a una medida exterior $\mu^\star$ en $\mathcal{P}(X)$. El Teorema de Caratheodory nos da una medida completa en la $\sigma-$álgebra de los conjuntos que son $\mu^\star-$medibles y, de nuevo la proposición anterior, garantiza dicha $\sigma-$álgebra contiene a $\mathcal{A}$ y, por consiguiente, a $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$. Así obtenemos $\mu = \mu^\star|_{\mathcal{M}}$.

(b) Si $E \in \mathcal{M}$ y $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ con $A_j \in \mathcal{A}\ \forall j \in \mathbb{N}$, tenemos

$\nu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$. Por lo tanto $\nu(E) \leq \mu(E)$.

Para $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, resulta

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu(A).$$

Si $\mu(E) < \infty$, podemos elegir los A_j de manera que sea $\mu(A) < \mu(E) + \varepsilon$. Se sigue que $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$ y, por consiguiente

$$\begin{aligned}\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) &= \nu(E) + \nu(A \setminus E)\\ &\leq \nu(E) + \mu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \varepsilon.\end{aligned}$$

puesto que ε es arbitrario, obtenemos $\mu(E) \leq \nu(E)$, que, junto con lo que ya teníamos, completa la demostración de que $\mu(E) = \nu(E)$.

(c) Si μ_0 es $\sigma-$finita, podemos poner $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, donde $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ es una colección de conjuntos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos y con $\mu_0(A_j) < \infty \; \forall j \in \mathbb{N}$.

Entonces, para cualquier $E \in \mathcal{M}$,

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap A_j) = \nu(E).$$

por consiguiente, $\nu = \mu$.

Ejercicio 30: Sea $\mu^\star$ una medida exterior en X y sean A_j, $j \in \mathbb{N}$, conjuntos $\mu^\star-$medibles disjuntos dos a dos. Demostrar que, entonces,

$$\forall E \subset X,\ \mu^\star\left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(E \cap A_j).$$

Ejercicio 31: Sean $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra, $\mathcal{A}_\sigma$ la colección de las uniones de sucesiones de conjuntos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ la colección de intersecciones de sucesiones de conjuntos de $\mathcal{A}_\sigma$. Supongamos que μ_0 es una premedida en $\mathcal{A}$ y que $\mu^\star$ es la medida exterior asociada a μ_0, dada por (4). Demostrar que

(a) $\forall E \subset X$ y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ y $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon$.

(b) Si $\mu^\star(E) < \infty$, entonces E es $\mu^\star-$medible si y sólo si existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset B$ y $\mu^\star(B \setminus E) = 0$.

(c) Si μ_0 es $\sigma-$finita, no hace falta en (b) que sea $\mu^\star(E) < \infty$.

Ejercicio 32: Sean μ_0 una premedida finita en $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mu^\star$ la medida exterior asociada a μ_0, dada por (4). Para cada $E \subset X$ definimos la medida interior de E mediante $\mu_\star(E) = \mu_0(X) - \mu^\star(\complement E)$. Demostrar que, entonces, E es $\mu^\star-$medible si y sólo si $\mu^\star(E) = \mu_\star(E)$.
Sugerencia: Utilizar el ejercicio anterior.

Observación: Históricamente, a partir de Lebesgue, las primeras definiciones de conjunto medible eran como la del ejercicio 32. Se daba un instrumento para medir por fuera (medida exterior), uno para medir por dentro (medida interior) y cuando ambos instrumentos daban el mismo resultado, se decía que el conjunto era medible. Lo que hizo Caratheodory fue basar toda la teoría en la medida exterior, de manera que medir por dentro resultaba innecesario. El valor del ejercicio 32 es reconciliar la teoría de Caratheodory con su origen histórico que está más ligado a la intuición.

Solución del ejercicio 30:

$$\mu^\star(E \cap (\biguplus_{j=1}^{\infty} A_j)) = \mu^\star(E \cap (\biguplus_{j=1}^{\infty} A_j) \cap A_1) + \mu^\star(E \cap (\biguplus_{j=1}^{\infty} A_j) \cap \complement A_1)$$

$$= \mu^\star(E \cap A_1) + \mu^\star(E \cap (\biguplus_{j=2}^{\infty} A_j)) = \cdots \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(E \cap A_j) \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \mu^\star(E \cap (\biguplus_{j=1}^{\infty} A_j)) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(E \cap A_j).$$

Solución del ejercicio 31:

(a) Por la definición (4) de $\mu^\star$, sabemos que existen $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon$. Entonces

$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\sigma$ y

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon.$$

(*b*) Sabemos, por el punto anterior, que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $A_n \supset E$ y $\mu^\star(A_n) \leq \mu^\star(E) + 1/n$. Si ahora tomamos $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, tenemos $B \supset E,\ B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ y $\mu^\star(B) \leq \mu^\star(A_n) \leq \mu^\star(E) + 1/n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $\mu^\star(B) = \mu^\star(E)$. Si E es $\mu^\star-$medible con $\mu^\star(E) < \infty$, tenemos

$$\mu^\star(E) = \mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap E) + \mu^\star(B \cap \complement E) = \mu^\star(E) + \mu^\star(B \setminus E).$$

De aquí se sigue, por ser $\mu^\star(E) < \infty$, que $\mu^\star(B \setminus E) = 0$. Recíprocamente, si $\mu^\star(B \setminus E) = 0$, como B es $\mu^\star-$medible, sabemos que, para cada $S \subset X,\ \mu^\star(S) = \mu^\star(S \cap B) + \mu^\star(S \cap \complement B) \geq \mu^\star(S \cap E) + \mu^\star(S \cap \complement B)$. Pero $S \cap \complement E \subset (S \cap \complement B) \cup (B \setminus E) \Longrightarrow \mu^\star(S \cap \complement E) \leq \mu^\star(S \cap \complement B) + \mu^\star(B \setminus E) = \mu^\star(S \cap \complement B)$. Así pues, tenemos $\mu^\star(S) \geq \mu^\star(S \cap E) + \mu^\star(S \cap \complement E)$, de modo que E es $\mu^\star-$medible. Observamos que, para esta última parte, no hemos usado $\mu^\star(E) < \infty$.

(c) Si μ_0 es $\sigma-$finita, podemos poner $X = \biguplus_{n=1}^{\infty} X_n$ con $X_n \in \mathcal{A}$ y $\mu_0(X_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $E \subset X$ $\mu^\star-$medible. Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $X_n \supset A_n \supset E \cap X_n$ y $\mu^\star(A_n) \leq \mu^\star(E \cap X_n) + 2^{-n}\varepsilon$. Entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ cumple que $\mu^\star(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(\mu^\star(E \cap X_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \mu^\star(E) + \varepsilon$. Si luego tomamos una sucesión $\varepsilon_j \downarrow 0$, y, para cada ε_j consideramos el correspondiente $A_j \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $A_j \supset E$ y $\mu^\star(A_j) \leq \mu^\star(E) + \varepsilon_j$, tomando $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ tenemos $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $\mu^\star(B) = \mu^\star(E)$ y, además, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu^\star(B \cap X_n) = \mu^\star(E \cap X_n)$. Se sigue que, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu^\star((B \setminus E) \cap X_n) = 0$ y, por consiguiente, $\mu^\star(B \setminus E) = 0$.

Solución del ejercicio 32: Si E es $\mu^\star-$medible

$$\mu_0(X) = \mu^\star(X) = \mu^\star(X \cap E) + \mu^\star(X \cap \complement E) = \mu^\star(E) + \mu^\star(\complement E).$$

Por tanto

$$\mu^\star(E) = \mu_0(X) - \mu^\star(\complement E) = \mu_\star(E).$$

Recíprocamente; si suponemos que $\mu^\star(E) = \mu_\star(E)$, vamos a usar el apartado (b) del ejercicio anterior para ver que E es $\mu^\star-$medible.
Vamos a buscar $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $B \supset E$ y $\mu^\star(B \setminus E) = 0$.
Por el momento, sabemos que $\exists B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $B \supset E$ y $\mu(B) = \mu^\star(B) = \mu^\star(E)$. Y también sabemos que $\exists C \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $C \supset \complement E$ y $\mu(C) = \mu^\star(C) = \mu^\star(\complement E)$.
Pero, entonces, $\complement C \subset E$ y, como C es medible

$$\mu(\complement C) = \mu_0(X) - \mu^\star(C) = \mu_0(X) - \mu^\star(\complement E) = \mu_\star(E) = \mu^\star(E).$$

Resulta que

$$B = \complement C \biguplus (B \setminus \complement C) \Longrightarrow \mu(B) = \mu(\complement C) + \mu(B \setminus \complement C).$$

Y, como $\mu(B) = \mu(\complement C) = \mu^\star(E)$, se sigue que $\mu(B \setminus \complement C) = 0$.

Finalmente

$$B \setminus E \subset B \setminus \complement C \Longrightarrow \mu^\star(B \setminus E) \leq \mu^\star(B \setminus \complement C) = \mu(B \setminus \complement C) = 0.$$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Ya hemos llegado al punto culminante de este capítulo, que es la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
Se trata de construir una medida, que extienda a los conjuntos de una $\sigma-$álgebra lo más grande posible, la idea de longitud de un intervalo.
Podemos empezar con la semiálgebra

$$(5)\quad \mathcal{S}_1 = \{\emptyset,\ \mathbb{R}\} \cup \{]a,b] :\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\} \\ \cup \{]\leftarrow, b],\ b \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, \rightarrow [,\ a \in \mathbb{R}\}.$$

de los intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha de $\mathbb{R}$. En esta semiálgebra es fácil dar una función de conjunto que asigne a cada intervalo su longitud. Basta definir

$$(6)\quad \mu_1(]a,b]) = b - a, \\ \mu_1(]\leftarrow, b]) = \mu_1(]a, \rightarrow [) = \mu_1(\mathbb{R}) = \infty,\ \mu_1(\emptyset) = 0.$$

Si conseguimos extender esta función de conjunto μ_1 al álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$ generada por $\mathcal{S}_1$ de manera que la extensión sea $\sigma-$finita, el teorema de Caratheodory nos daría una medida en una $\sigma-$álgebra que contendría a la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$, que es, precisamente, la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$.

Para realizar la extensión comenzamos observando que μ_1 es aditiva en $\mathcal{S}_1$ (**Ejercicio 33**).

Y hacemos una pausa para estudiar los aspectos generales de la extensión de una función de conjunto aditiva μ definida en una semiálgebra general $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ al álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ generada por ella.

Teorema.

Sea $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$ una función de conjunto aditiva definida en la semiálgebra $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces existe una única $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \longrightarrow [0, \infty]$ aditiva que extiende μ al álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ generada por $\mathcal{S}$, es decir, que cumple que $\forall S \in \mathcal{S},\ \nu(S) = \mu(S)$.
Además, si μ es $\sigma-$aditiva; se sigue que ν es, también, $\sigma-$aditiva.

Demostración. Supongamos que μ se pudiera extender a $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ conservando la aditividad. Dado un conjunto $E \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, sabemos que existe una familia finita de conjuntos $(S_j)_{j=1}^{n}$ pertenecientes a $\mathcal{S}$ y disjuntos dos a dos, tales que $E = \biguplus_{j=1}^{n} S_j$. Entonces, necesariamente habría de ser

$$\nu(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(S_j). \tag{7}$$

La idea es darle la vuelta a este proceso y empezar definiendo ν mediante (7).

Para que esta idea nos lleve a alguna parte, tenemos que ver, en primer lugar, que la definición (7) es buena. Es decir, que si tenemos

$$E = \biguplus_{j=1}^{n} S_j = \biguplus_{k=1}^{m} R_k, \tag{8}$$

donde tanto $(S_j)_{j=1}^n$ como $(R_k)_{k=1}^m$ son familias de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{S}$ y disjuntos dos a dos; entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(S_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(R_k).$$

Pero, a partir de (8), tenemos

$$\forall j = 1, \cdots, n, \; S_j = \biguplus_{k=1}^{m} S_j \cap R_k \text{ y } \forall k = 1, \cdots, m, \; R_k = \biguplus_{J=1}^{n} R_k \cap S_j.$$

Estas dos últimas fórmulas son expresiones de un conjunto de la semiálgebra $\mathcal{S}$ como uniones finitas disjuntas de conjuntos de $\mathcal{S}$. Por lo tanto, aplicando la aditividad de μ, obtenemos

$$\forall j = 1, \cdots, n,\ \mu(S_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(S_j \cap R_k) \text{ y}$$

$$\forall k = 1, \cdots, m,\ \mu(R_k) = \sum_{J=1}^{n} \mu(R_k \cap S_j).$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(S_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \mu(S_j \cap R_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{J=1}^{n} \mu(R_k \cap S_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(R_k).$$

Queda, así, demostrado que (7) es una buena definición. A continuación demostramos que la ν definida por (7) es aditiva en $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Supongamos que $E \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ y que $E = \biguplus_{j=1}^{n} E_j$ donde $(E_j)_{j=1}^{n}$ es una familia de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ y disjuntos dos a dos. Para cada $j = 1, \cdots, n$, será $E_j = \biguplus_{k=1}^{m_j} S_{jk}$, con $S_{jk} \in \mathcal{S}$. Entonces $E = \biguplus_{j=1}^{n} \biguplus_{k=1}^{m_j} S_{jk}$. Se sigue que $\nu(E) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \mu(S_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} \nu(E_j)$.

Con la definición que hemos dado, la unicidad es evidente.

Queda por ver, finalmente, que si μ es $\sigma-$finita en $\mathcal{S}$, entonces la extensión (única) ν de μ es $\sigma-$finita en $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. El argumento es una modificación de la prueba de la aditividad.

Supongamos que $E \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ y que $E = \biguplus_{j=1}^{\infty} E_j$ donde $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ es una familia de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ y disjuntos dos a dos. Para cada $j = 1, \cdots, \infty$, será $E_j = \biguplus_{k=1}^{m_j} S_{jk}$, con $S_{jk} \in \mathcal{S}$. Por otra parte, tendremos $E = \biguplus_{\ell=1}^{m} R_\ell$, con $R_\ell \in \mathcal{S}$. Tenemos

$$(9) \qquad \forall \ell = 1, \cdots, m, \qquad R_\ell = \biguplus_{j=1}^{\infty} \biguplus_{k=1}^{m_j} R_\ell \cap S_{jk}$$

y también

$$(10) \qquad \forall j = 1, \cdots, \qquad E_j = \biguplus_{\ell=1}^{m} \biguplus_{k=1}^{m_j} R_\ell \cap S_{jk}.$$

A partir de (9), que expresa un conjunto de $\mathcal{S}$ como unión disjunta de una colección numerable de conjuntos de $\mathcal{S}$ obtenemos, usando la $\sigma-$aditividad de μ en $\mathcal{S}$, que

$$\forall \ell = 1, \cdots, m, \quad \mu(R_\ell) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} \mu(R_\ell \cap S_{jk}).$$

Y a partir de (10), por la definición de ν,

$$\nu(E_j) = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} \mu(R_\ell \cap S_{jk}).$$

Finalmente, llegamos a

$$\nu(E) = \sum_{\ell=1}^{m} \mu(R_\ell) = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_j} \mu(R_\ell \cap S_{jk})$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} \mu(R_\ell \cap S_{jk}) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).$$

Como consecuencia del último teorema, lo único que nos queda para tener asegurada la existencia de la medida de Lebesgue; es decir, la extensión de la longitud (6) a una medida en la $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es demostrar que

Proposición.

La función de conjunto μ_1 dada por (6) es σ-aditiva en la semiálgebra $\mathcal{S}_1$ definida en (5).

Demostración. Supongamos que $]a,b] = \biguplus_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j]$. Hemos de ver que $b - a = \mu_1(]a,b]) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(]a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$.

La desigualdad $b - a \geq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$ es muy fácil de establecer:

Puesto que $\forall n \in \mathbb{N},\ ]a,b] = \left(\biguplus_{j=1}^{n}]a_j, b_j] \right) \uplus \left( ]a,b] \setminus \biguplus_{j=1}^{n}]a_j, b_j] \right)$

y ya sabemos que μ_1 tiene una extensión aditiva única ν_1 al álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$, podemos usar ν_1 para obtener

$$b - a = \nu_1(]a, b]) \geq \nu_1 \left(\biguplus_{j=1}^{n}]a_j, b_j] \right) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Y como esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$b - a \geq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j).$$

Para probar la desigualdad opuesta vamos a utilizar la noción topológica de compacidad. Tomamos un numero positivo arbitrario, suficientemente pequeño ε y observamos que

$$[a + \varepsilon, b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j + 2^{-j}\varepsilon[.$$

La compacidad de los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ nos asegura que, para algún $n \in \mathbb{N}$,

$$[a+\varepsilon, b] \subset \bigcup_{j=1}^{n}]a_j, b_j + 2^{-j}\varepsilon[.$$

De aquí se sigue que

$$]a+\varepsilon, b] \subset \bigcup_{j=1}^{n}]a_j, b_j + 2^{-j}\varepsilon].$$

Y, usando de nuevo la función de conjunto aditiva ν_1 en el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ llegamos a

$$\begin{aligned} b - a - \varepsilon = \nu_1(]a+\varepsilon, b]) &\leq \sum_{j=1}^{n} \nu_1(]a_j, b_j + 2^{-j}\varepsilon]) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j + 2^{-j}\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \varepsilon \end{aligned}$$

Ahora basta hacer $\varepsilon \to 0$, para concluir que $b - a \leq \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)$, que es todo lo que quedaba por demostrar. Si, en lugar de $]a, b]$ tenemos un intervalo no acotado de $\mathcal{S}_1$, vale esencialmente la misma prueba, aunque la notación tenga que ser algo distinta.

Hay que recordar que, puesto que hemos usado el Teorema de Caratheodory para extender ν_1, el resultado final será una medida completa, a la que llamaremos m_1 o m cuando no haya lugar a ambigüedad, que es lo que propiamente llamaremos medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Esta medida m_1 estará definida en la $\sigma-$álgebra de los conjuntos $\nu_1^\star$ medibles en el sentido de Caratheodory. Esta $\sigma-$álgebra la designaremos por $\mathcal{L}_1$ o bien $\mathcal{L}_\mathbb{R}$ (o, simplemente $\mathcal{L}$ si no hay peligro de confusión) y a sus conjuntos les llamaremos medibles de Lebesgue. Desde luego, se tiene $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{L}_\mathbb{R}$.

A $\nu_1^\star$ le llamaremos medida exterior de Lebesgue y la denotaremos simplemente por $m^\star$ o $\lambda^\star$.

Medidas de Borel en $\mathbb{R}$.

El procedimiento utilizado para definir la medida de Lebesgue se puede generalizar sin dificultad para definir cualquier medida sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ que sea finita sobre compactos (localmente finita).

Para motivar lo que vamos a hacer, supongamos que tenemos una medida μ sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ que sea finita. A μ le podemos asociar una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiendo $F(x) = \mu(]\leftarrow, x])\ \forall x \in \mathbb{R}$. Y podemos recuperar la medida μ a partir de la función F observando que $\mu(]a, b]) = \mu(]\leftarrow, b] \setminus]\leftarrow, a]) = \mu(]\leftarrow, b]) - \mu(]\leftarrow, a]) = F(b) - F(a)$.

La idea es, ahora, revertir el proceso y empezar con la función F para construir la medida extendiendo la función de conjunto $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$ definida en la semiálgebra $\mathcal{S}_1$.

Pero, antes de emprender este camino, necesitamos entender qué funciones F aparecen asociadas a las medidas de Borel μ.

Vemos que la función F que proviene de una medida de Borel finita μ mediante la definición $F(x) = \mu(]\leftarrow, x])$ cumple, necesariamente, las dos propiedades siguientes:

- Es **creciente**, ya que

$$x < y \Longrightarrow]\leftarrow, x] \subset]\leftarrow, y] \\ \Longrightarrow F(x) = \mu(]\leftarrow, x]) \leq \mu(]\leftarrow, y]) = F(y).$$

- Es **continua por la derecha**, ya que si $x_j \downarrow x$, se tiene que

$$]\leftarrow, x] = \bigcap_{j=1}^{\infty}]\leftarrow, x_j] \Longrightarrow F(x) = \mu(]\leftarrow, x]) \\ = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}]\leftarrow, x_j]\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(]\leftarrow, x_j]) = \lim_{j\to\infty} F(x_j)$$

Ya estamos en condiciones de construir cualquier medida de Borel localmente finita en $\mathbb{R}$.

Teorema.

Si $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función creciente continua por la derecha, existe una única medida de Borel m_F en $\mathbb{R}$ tal que $m_F(]a,b]) = F(b) - F(a)$ para todo $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Si $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra función creciente continua por la derecha, entonces $m_F = m_G$ si y sólo si $F - G$ es constante. Recíprocamente, si μ es cualquier medida de Borel localmente finita en $\mathbb{R}$, y definimos

$$F(x) = \begin{cases} \mu(]0,x]) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\mu(]x,0]) & \text{si } x < 0, \end{cases} \qquad y \tag{11}$$

entonces F es creciente, continua por la derecha y $\mu = m_F$.

Demostración. Si tenemos $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha, comenzamos definiendo μ_F en la semiálgebra $\mathcal{S}_1$ de los intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha de $\mathbb{R}$ (definidos en (5)) mediante

$$
\begin{aligned}
(12)\quad \mu_F(]a,b]) &= F(b) - F(a), \mu_F(]\leftarrow, b]) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x), \\
\mu_F(]a, \to[) &= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a), \\
\mu_F(\mathbb{R}) &= \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x),\ \mu_F(\emptyset) = 0.
\end{aligned}
$$

Probamos que μ_F es una función de conjunto aditiva en la semiálgebra $\mathcal{S}_1$. (**Ejercicio 34.**)

Sabemos que, entonces, μ_F se puede extender a una única función de conjunto ν_F aditiva en $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$. Después, podemos utilizar esta extensión para comprobar que, de hecho, μ_F es $\sigma-$aditiva en $\mathcal{S}_1$. El proceso es el mismo que se usó para la medida de Lebesgue. Es muy instructivo seguir todos los pasos y ver cuándo se usan las propiedades de monotonía y continuidad por la derecha de F. (**Ejercicio 35.**).

Y, a partir de aquí, se sigue de la teoría general, que ν_F es $\sigma-$aditiva en el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$; es decir, es una premedida. Por consiguiente, podemos usar el proceso de Caratheodory para extender ν_F a una medida completa definida en una $\sigma-$álgebra que contiene a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. La restricción de esta medida completa a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la medida de Borel m_F.

Claramente $\nu_F = \nu_G \iff \mu_F = \mu_G \iff F - G$ es constante. Y, puesto que la premedida ν_F es $\sigma-$finita, sabemos que su extensión a una medida es única. Por lo tanto, queda visto que
$m_F = m_G \iff F - G$ es constante.

Ya tenemos probada la primera mitad del teorema. En la segunda, definimos F a partir de μ mediante (11).

Comprobamos que F es creciente considerando todos los casos posibles: Si $x \leq 0 < y$ o bien $x < 0 \leq y$, es obvio que $F(x) \leq 0 \leq F(y)$. Si $0 \leq x < y$, entonces $]0,x] \subset]0,y] \Longrightarrow F(x) = \mu(]0,x]) \leq \mu(]0,y]) = F(y)$. Y, finalmente, si $x < y \leq 0$, entonces $]y,0] \subset]x,0] \Longrightarrow F(x) = -\mu(]x,0]) \leq -\mu(]y,0]) = F(y)$.

Para probar que F es continua por la derecha distinguimos dos casos:

Si $0 \leq x$ y $x_n \downarrow x$, se tiene que $]0,x_n] \downarrow]0,x] \Longrightarrow F(x_n) \longrightarrow F(x)$ por la continuidad superior de la medida μ.

Y si $x < 0$ y $x_n \downarrow x$; podemos suponer que $x < x_n < 0 \; \forall n$. Entonces $]x_n, 0] \uparrow]x, 0] \Longrightarrow F(x_n) = -\mu(]x_n, 0]) \longrightarrow -\mu(]x, 0]) = F(x)$, por la continuidad inferior de la medida μ.

Veremos, a continuación, que la función de conjunto μ_F definida en $\mathcal{S}_1$ a partir de la F dada por (11) mediante (12) coincide con μ en los conjuntos de $\mathcal{S}_1$. Esto es todo lo que hace falta para obtener, por la teoría general, que $\nu_F = \mu$ en $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$ y que, finalmente, $m_F = \mu$ en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

En efecto, si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, analizamos los distintos casos: Para $0 \leq a < b$, $\mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a) = \mu(]0, b]) - \mu(]0, a]) = \mu(]a, b])$. Para $a < 0 \leq b$, $\mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a) = \mu(]0, b]) + \mu(]a, 0]) = \mu(]a, b])$. Y para $a < b < 0$, $\mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a) = -\mu(]b, 0]) + \mu(]a, 0]) = \mu(]a, b])$.

Si $0 \leq b$,

$$\mu_F(]\leftarrow, b]) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = \mu(]0, b]) + \mu(]\leftarrow, 0]) = \mu(]\leftarrow, b]).$$

Y si $b < 0$,

$$\mu_F(]\leftarrow, b]) = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\mu(]b, 0]) + \mu(]\leftarrow, 0]) = \mu(]\leftarrow, b]).$$

Si $0 \leq a$,

$$\mu_F(]a, \rightarrow[) = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a) = \mu(]0, \rightarrow[) - \mu(]0, a]) = \mu(]a, \rightarrow[)$$

Y si $a < 0$,

$$\mu_F(]a, \rightarrow[) = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a) = \mu(]0, \rightarrow[) + \mu(]a, 0]) = \mu(]a, \rightarrow[).$$

$$\mu_F(\mathbb{R}) = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = \mu(]0, \rightarrow[) - \mu(]\leftarrow, 0]) = \mu(\mathbb{R}).$$

Hay que decir que la construcción de la medida de Borel m_F asociada a la función F nos da algo más. Puesto que el último paso de esta construcción usa el teorema de Caratheodory para extender la premedida ν_F desde el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$, lo que obtenemos es una medida completa λ_F definida en la $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}_F$ de los conjuntos medibles para la medida exterior $\nu_F^\star$ definida a partir de ν_F mediante

$$\nu_F^\star(E)=\text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\nu_F(A_j):(A_j\in\mathcal{A}(\mathcal{S}_1),\ \forall j\in\mathbb{N})\wedge\left(E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)\right\},$$

A la medida $\lambda_F=\nu_F^\star|_{\mathcal{M}_F}$ le llamaremos medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F.

A partir de la definición de $\nu_F^\star$ y del hecho de que los conjuntos de $\mathcal{A}(\mathcal{S}_1)$ son uniones finitas de intervalos semiabiertos, vemos que

$$\forall E\in\mathcal{M}_F,\ \lambda_F(E)=\text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j)-F(a_j)):\ E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j,b_j]\right\}.$$

El matemático holandés Thomas Jan Stieltjes (1856–1894) generalizó la integral de Riemann usando en la definición de las sumas una extensión de la longitud de los intervalos que consiste, simplemente en reemplazar $x_j - x_{j-1}$ por $F(x_j) - F(x_{j-1})$, donde F es una función creciente. Por eso es justo que su nombre aparezca unido al de Lebesgue para designar a las medidas λ_F que estamos estudiando.

Para ser absolutamente coherentes, deberíamos llamar a la medida completa de Lebesgue λ_1, (o λ), ya que es un caso particular de medida de Lebesgue-Stieltjes, la que está asociada a la función $F(x) = x$. La notación m_1 (o m) deberíamos reservarla para la medida de Lebesgue restringida a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

A continuación vamos a estudiar las propiedades de regularidad de las medidas de Lebesgue-Stieltjes, que son muy útiles y se aplican, en particular, a la medida de Lebesgue.
Haremos este estudio para una medida completa de Lebesgue-Stieltjes, que mantenemos fija, a la que llamamos μ. Estará asociada a una función creciente continua por la derecha F. Vamos a llamar $\mathcal{M}_\mu$ a la $\sigma-$álgebra en la que está definida μ. Lo fundamental, que va a ser nuestro punto de partida, es que

$$\begin{aligned}\forall E \in \mathcal{M}_\mu,\ \mu(E) &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j)-F(a_j)) :\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j]\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(]a_j, b_j]) :\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j]\right\}.\end{aligned}$$

Lo primero es observar que, en la última fórmula, podemos reemplazar los intervalos semiabiertos por intervalos abiertos; es decir:

Lema.

$$\forall E \in \mathcal{M}_\mu, \ \mu(E) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(]a_j, b_j[) : \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j[\right\}.$$

Demostración. Llamemos $\nu(E)$ a la cantidad de la derecha. Si $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j[$, podemos poner $\forall j \in \mathbb{N}, \ ]a_j, b_j[= \bigcup_{k=1}^{\infty} I_j^k$ donde $I_j^k =]c_j^k, c_j^{k+1}], \ c_j^1 = a_j$ y $c_j^k \uparrow b_j$ para $k \to \infty$. Entonces tenemos $E \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_j^k$, de modo que $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(]a_j, b_j[) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \mu(I_j^k) \geq \mu(E)$. Y así, queda demostrado que $\nu(E) \geq \mu(E)$.

Para obtener la desigualdad en sentido opuesto, nos damos $\varepsilon > 0$ y sabemos que existen $]a_j, b_j]$, $j = 1, \cdots$, tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j]$ y

$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(]a_j, b_j]) \leq \mu(E) + \varepsilon$. La continuidad por la derecha de F nos permite afirmar que $\forall j \in \mathbb{N},\ \exists \delta_j > 0$ tal que $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \varepsilon 2^{-j}$. Entonces $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j + \delta_j[$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(]a_j, b_j + \delta_j[) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(]a_j, b_j]) + \varepsilon \leq \mu(E) + 2\varepsilon,$$

de modo que $\nu(E) \leq \mu(E)$.

Teorema.

Para todo $E \in \mathcal{M}_\mu$,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) :\ U \supset E \text{ y } U \text{ abierto}\}$$
$$= \sup\{\mu(K) :\ K \subset E \text{ y } K \text{ compacto}\}.$$

Demostración. Sabemos, por el lema anterior, que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists]a_j, b_j[,\ j = 1, \cdots$, tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j[$ y $\mu(E) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(]a_j, b_j[)$. Si ponemos $U = \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j[$, tenemos que U es un abierto, $U \supset E$ y $\mu(U) \leq \mu(E) + \varepsilon$. Como, desde luego, $U \supset E \implies \mu(U) \geq \mu(E)$, queda probada la primera identidad del enunciado.

Para probar la segunda identidad comenzamos suponiendo que E es acotado. Si, además, es cerrado, entonces es un compacto y no hay nada que demostrar. Si E es acotado pero no es cerrado, dado $\varepsilon > 0$, existirá un abierto $U \supset \overline{E} \setminus E$ tal que $\mu(U) \leq \mu(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$. Sea $K = \overline{E} \setminus U$. Entonces K es compacto, $K \subset E$ y

$$\begin{aligned}\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U) &= \mu(E) - (\mu(U) - \mu(U \setminus E)) \\ &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\overline{E} \setminus E) \geq \mu(E) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Si E no es acotado, podemos ponerlo como una unión numerable de conjuntos acotados y aplicar a cada uno lo que acabamos de probar. Completar los detalles (**Ejercicio 36**).

Teorema.

Para $E \subset \mathbb{R}$, las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) $E \in \mathcal{M}_\mu$.

(b) $E = V \setminus N_1$ donde V es un G_δ, o sea, una intersección numerable de abiertos, y $\mu(N_1) = 0$.

(c) $E = H \cup N_2$, donde H es un F_σ, o sea, una unión numerable de cerrados y $\mu(N_2) = 0$.

Demostración. Puesto que los G_δ's y los F_σ's son conjuntos de Borel y $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{M}_\mu$ y μ es una medida completa en $\mathcal{M}_\mu$, es claro que $(b) \Longrightarrow (a)$ y $(c) \Longrightarrow (a)$.

Veamos las implicaciones recíprocas. Sea $E \in \mathcal{M}_\mu$. Comencemos suponiendo que $\mu(E) < \infty$. sabemos, por el teorema anterior, que $\forall j \in \mathbb{N}$, existen un abierto $U_j \supset E$ y un compacto $K_j \subset E$, tales que

$$\mu(U_j) - 2^{-j} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j) + 2^{-j}.$$

Entonces, si tomamos $V = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ y $H = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, tenemos $H \subset E \subset V$, donde V es un G_δ, H es un F_σ y $\mu(V) = \mu(H) = \mu(E)$, de modo que $\mu(V \setminus E) = \mu(E \setminus H) = 0$ y ya tenemos (b) y (c).
El caso en que $\mu(E) = \infty$ se reduce fácilmente al que ya hemos visto (**Ejercicio 37**).

Ejercicio 38: Examinar la demostración del lema para probar la siguiente extensión:

$$(13) \qquad \forall E \subset X,\ \nu_F^\star(E) = \text{ínf}\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(]a_j, b_j[) :\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j[\right\}.$$

Deducir que también se extiende la primera mitad del teorema que sigue al lema; en concreto:

$$(14) \qquad \forall E \subset X,\ \nu_F^\star(E) = \text{ínf}\{\mu(U) :\ U \supset E \text{ y } U \text{ abierto}\}.$$

Más adelante resultará muy útil aplicar (13) y (14) a la medida exterior de Lebesgue $m^\star$ (o, con otra notación, $\lambda^\star$).
¿Qué se puede decir de la segunda parte del teorema?.

Ejercicio 39: Demostrar que, si $E \in \mathcal{M}_\mu$ y $\mu(E) < \infty$, entonces, $\forall \varepsilon > 0$, existe un conjunto A que es unión finita de intervalos abiertos, tal que $\mu(E \Delta A) < \varepsilon$. (Se designa mediante $E\Delta A$ la diferencia simétrica de los dos conjuntos E y A, que es, por definición $E\Delta A = (E \setminus A) \cup (A \setminus E)$).

El hecho de que "todo conjunto medible es casi una unión finita de intervalos abiertos" es el primero de los "tres principios del Análisis Real" atribuidos al matemático inglés John Edensor Littlewood (1885–1977).

Ejercicio 40: Demostrar que el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \lambda_F)$ es el completado de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, m_F)$. En particular, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_\mathbb{R}, \lambda_1)$ es el completado de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, m_1)$.

A continuación vamos a analizar el comportamiento de la medida de Lebesgue frente a traslaciones y dilataciones. Si $E \subset \mathbb{R}$ y $s, r \in \mathbb{R}$, definimos

$$E + s = \{x + s : \; x \in E\} \qquad \text{y} \qquad rE = \{rx : \; x \in E\}.$$

Teorema.

Si $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, entonces

- $\forall s \in \mathbb{R}, \; E + s \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ y $\lambda(E + s) = \lambda(E)$ y
- $\forall r \in \mathbb{R}, \; rE \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ y $\lambda(rE) = |r|\lambda(E)$.

Demostración. Los intervalos abiertos y, por consiguiente, los abiertos, son invariantes por traslaciones y dilataciones. Por tanto, lo mismo es cierto para la $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Para $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ definimos $m_s(E) = m(E + s)$ y $m^r(E) = m(rE)$. Tenemos así dos medidas que coinciden con m y con $|r|m$, respectivamente, sobre uniones finitas de intervalos y, por consiguiente, sobre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

En particular, si $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $m(E) = 0$, se tiene que, también $m(E+s) = m(rE) = 0$. Se sigue que la clase de los conjuntos Lebesgue medibles de medida de Lebesgue 0 es invariante por traslaciones y dilataciones. Por tanto, la clase $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, cuyos conjuntos son uniones de conjuntos de Borel y conjuntos de medida de Lebesgue 0, también se conserva por traslaciones y dilataciones. Y, además, $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}},\ \lambda(E+S) = \lambda(E)\ \forall s \in \mathbb{R}$ y $\lambda(rE) = |r|\lambda(E)\ \forall r \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 41: Sea $E \subset \mathbb{R}$ tal que $m^\star(E) > 0$. Demostrar que, para cada $\alpha \in]0,1[$, existe un intervalo abierto J para el cual

$$m^\star(E \cap J) \geq \alpha m(J).$$

Sugerencia: Tomar U abierto tal que $U \supset E$ y $m^\star(E) \geq \alpha m(U)$. Escribir U como unión numerable de intervalos abiertos disjuntos y ver que alguno de ellos tiene que cumplir la propiedad que buscamos

Ejercicio 42: Sea $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ con $\lambda(E) > 0$. Demostrar que el conjunto de las diferencias

$$\Delta(E) = \{z \in \mathbb{R} : \ z = x - y \text{ para algunos } x, y \in E\}$$

contiene un intervalo abierto centrado en el origen.
Este enunciado es un caso particular de un teorema debido al matemático polaco Hugo Steinhaus (1887–1972).

Sugerencias:

- *Por el ejercicio anterior* $\exists J$, *intervalo abierto tal que* $\lambda(E \cap J) \geq (3/4)\lambda(J)$. *Si llamamos* $E_0 = E \cap J$ *y suponemos que* $\Delta(E_0)$ *no contiene un intervalo abierto centrado en el origen,entonces, para a tan pequeño como queramos,* $E_0 \cap (E_0 + a) = \emptyset$. *Pero* $E_0 \cup (E_0 + a) \subset J \cup (J + a)$. *Y esto es una contradicción porque el conjunto de la izquierda mide* $2\lambda(E_0) \geq (3/2)\lambda(J)$ *mientras el de la derecha mide sólo un poquito más que* $\lambda(J)$.
- *Otra posibilidad es suponer* E *compacto y encontrar* $U \supset E$ *con* U *abierto y* $\lambda(U) < 2\lambda(E)$. *Si* J *es un intervalo abierto tal que* $E + J \subset U$, *para cada* $x \in J$ *resulta que* $(E + x) \cap E \neq \emptyset$ *pues, en caso contrario, tendríamos* $2\lambda(E) \geq \lambda(U)$.

La segunda demostración de las dos sugeridas se encuentra en el siguiente artículo de Karl Stromberg: "An Elementary Proof of Steinhaus's Theorem", Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 36, No. 1 (Nov., 1972), p. 308.

Ejercicio 43: Sean $E, F \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ tales que $\lambda(E) > 0, \lambda(F) > 0$. Demostrar que

$$E + F = \{x + y : \ x \in E, y \in F\}$$

contiene algún intervalo abierto.
Sugerencia: Es fácil adaptar la primera de las pruebas sugeridas en el ejercicio anterior.

Ejercicio 44: En $\mathbb{R}$ definimos la siguiente relación de equivalencia: Si $x, y \in \mathbb{R}$, diremos que x está relacionado con y y escribiremos $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales. Mediante esta relación de equivalencia, $\mathbb{R}$ queda dividido en clases de equivalencia que son conjuntos disjuntos y el axioma de elección nos permite considerar un conjunto $S_0 \subset \mathbb{R}$ que tiene un único elemento en cada clase de equivalencia. Utilizar el ejercicio 42 para demostrar que S_0 no es medible. Un caso particular de S_0 es el conjunto no medible de Vitali que vimos al principio del capítulo. Para S_0 no exigimos que sea un subconjunto de $[0, 1[$.

Ejercicio 45: Sea S el conjunto no medible de Vitali. Se pide

(a) Demostrar que si $E \subset S$ es medible, entonces $\lambda(E) = 0$.

(b) Demostrar que, si $A \subset \mathbb{R}$ tiene $\lambda^\star(A) > 0$, entonces existe algún subconjunto $B \subset A$ tal que B no es medible.

El conjunto de Cantor.

Sea $\mathcal{C}_0 = [0,1]$. A $\mathcal{C}_0$ le damos un bocado en el centro mediante el cual eliminamos el intervalo abierto $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Nos queda $\mathcal{C}_0 \setminus]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[= \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right]}_{=J_{1,1}} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, 1\right]}_{=J_{1,2}} = \mathcal{C}_1$. De cada uno de los intervalos $J_{1,1}$ y $J_{1,2}$ eliminamos un bocado abierto central de longitud $1/3$ de la longitud total del correspondiente intervalo. Obtenemos $\mathcal{C}_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}$, cuatro intervalos cerrados disjuntos de longitud $\frac{1}{3^2}$ cada uno. Seguimos comiéndonos el tercio central de cada intervalo, de suerte que, tras la etapa $k-$ésima obtenemos un compacto $\mathcal{C}_k$ que es la unión de 2^k intervalos cerrados disjuntos de longitud 3^{-k} cada uno. El conjunto de Cantor es $\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$.

El bocado eliminado en el primer paso $\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[$ es el conjunto de todos los números reales que son de la forma $x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{3^j}$ con $x_1=1$, algún $x_j\neq 0$ para $j\geq 2$ y no todos los $x_j=2$ para $j\geq 2$.
Los dos bocados eliminados en el segundo paso son $\left]\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right[$ y $\left]\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right[$.
Los números del primer intervalo son los $x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{3^j}$ con $x_1=0, x_2=1$ y las demás cifras del desarrollo ternario que no sean ni todas 0 ni todas 2. Los números del segundo intervalo son $x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{3^j}$ con $x_1=2, x_2=1$ y las restantes cifras que ni sean todas 0 ni todas 2. Vemos que, en definitiva, los números eliminados de $\mathcal{C}_0$ para formar $\mathcal{C}$ son los que necesitan que usemos 1 en su expresión ternaria. En consecuencia

$$\mathcal{C}=\left\{x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{3^j}\;:\;x_j=0,2\right\}.$$

Cada $x \in \mathcal{C}$ tiene una única expresión $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j}$, $x_j \in \{0, 2\}$. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \stackrel{\varphi}{\to} & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j} & \mapsto & (x_j/2)_{j=1}^{\infty} \end{array} \tag{15}$$

es, de hecho, una biyección, cuya aplicación inversa es

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \stackrel{\varphi^{-1}}{\to} & \mathcal{C} \\ (y_j)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2y_j}{3^j} \end{array} \tag{16}$$

Topológicamente $\mathcal{C}$ es un conjunto interesante, ya que

ES UN COMPACTO TOTALMENTE INCONEXO SIN PUNTOS AISLADOS

Es totalmente inconexo porque entre cada dos puntos distintos de $\mathcal{C}$ siempre hay algún bocado. En efecto, $\forall x \in \mathcal{C}$,

$$(17) \qquad \{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} J_{k,j_k(x)} \text{ y } x = y \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ j_k(x) = j_k(y).$$

A partir de (17) también se ve que $\forall x \in \mathcal{C}$, $\exists x_k \to x$, donde cada x_k es extremo de $J_{k,j_k(x)}$. Siempre podemos elegir $x_k \neq x$ tales que $x_k \to x$ para $k \to \infty$. Así pues, cada $x \in \mathcal{C}$ es un punto de acumulación de $\mathcal{C}$, de forma que $\mathcal{C}$ no tiene puntos aislados.

En Topología, a un conjunto cerrado sin puntos aislados se le suele llamar conjunto perfecto. La caracterización topológica de un conjunto perfecto E es que sea $E = E'$, donde E' denota el conjunto derivado de E, o, en otras palabras, el conjunto de puntos de acumulación de E.

Es muy fácil ver que un compacto perfecto no vacío de $\mathbb{R}$ (o de cualquier espacio de Hausdorff) es no numerable. La prueba está, por ejemplo, en el libro "Principios de Análisis Matemático" de Walter Rudin, que la utiliza para ver que $\mathbb{R}$ es no numerable. Para el conjunto de Cantor, podemos usar la biyección φ con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ para ver que no es numerable.

Que φ sea biyección implica que

$$\mathrm{card}(\mathcal{C}) = \mathrm{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0} = \mathrm{card}(\mathbb{R}).$$

Así, $\mathcal{C}$ es un conjunto muy grande. Sin embargo, si sumamos las medidas de Lebesgue de los intervalos abiertos cuya unión es $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ obtenemos $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1$, lo cual implica que $m(\mathcal{C}) = 0$, así que, desde el punto de vista de la medida de Lebesgue, $\mathcal{C}$ es, en realidad, pequeño.

La existencia de un conjunto de medida de Lebesgue 0 con $2^{\aleph_0}$ elementos nos proporciona una primera prueba de que hay conjuntos medibles de Lebesgue que no son medibles de Borel, o sea, que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneqq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

En efecto, ya sabemos que $\mathrm{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = 2^{\aleph_0}$; mientras que todos los subconjuntos de $\mathcal{C}$, que son $2^{2^{\aleph_0}}$, pertenecen a $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$; de modo que $\mathrm{card}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}) = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$.

Si se considera en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ la topología producto, donde cada factor $\{0,1\}$ tiene la topología discreta, y en $\mathcal{C}$ se considera la topología natural heredada de la de $\mathbb{R}$, es fácil ver que φ es un homeomorfismo. En efecto, para ver que φ es continua, basta comprobar que, para cada proyección π_k, la composición $\pi_k \circ \varphi$ es continua; pero esto resulta inmediato observando que $\pi_k \circ \varphi$ toma los valores 0 y 1 en sendos cerrados de $\mathcal{C}$. Finalmente, por ser φ continua y biyectiva de un compacto en un espacio de Hausdorff, se sigue que φ es un homeomorfismo

La función de Cantor-Lebesgue puede definirse a partir de la composición siguiente

$$(18) \qquad \begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\psi} & [0,1] \\ x = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ x_j=0,2}}^{\infty} \frac{x_j}{3^j} & \mapsto & (x_j/2)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j/2}{2^j} \end{array}$$

$f = \psi \circ \varphi$. Es fácil ver que f es una aplicación continua de $\mathcal{C}$ sobre $[0,1]$ (**EJERCICIO 46**: Escribir la prueba con detalle).
En términos aritméticos, la aplicación f lleva el $x \in \mathcal{C}$ cuya expresión ternaria con cifras 0 o 2 es $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ al número real con expresión binaria $(x_j/2)_{j=1}^{\infty}$.
También es fácil comprobar que f es creciente; aunque no estrictamente. Es fundamental entender esto para extender $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ a una $F : [0,1] \to [0,1]$, que será la función de Cantor-Lebesgue. Veámoslo.

Sean $x, y \in \mathcal{C}$ tales que $x < y$. Si las expresiones ternarias con ceros y doses de x e y son, respectivamente $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$, $x < y \Rightarrow \exists j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j < j_0,\ x_j = y_j \wedge x_{j_0} = 0 \wedge y_{j_0} = 2$. Por tanto

$$f(x) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{j_0-1}}{2^{j_0-1}} + \frac{0}{2^{j_0}} + \cdots \text{y}$$
$$f(y) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{j_0-1}}{2^{j_0-1}} + \frac{1}{2^{j_0}} + \cdots$$

¿Es ésto suficiente para afirmar que $f(x) < f(y)$?. La respuesta a esta pregunta es:

SÍ, A NO SER QUE $\forall j > j_0,\ x_j = 2 \wedge y_j = 0$.

Y esto ocurre exclusivamente

CUANDO $]x, y[$ ES UN BOCADO DE LA FASE j_0,

en cuyo caso, $f(x) = f(y)$. Por ejemplo

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \psi \circ \varphi\left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{2}{3^j}\right) = \psi(0, 1, 1, \cdots) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}.$$

y también

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \psi \circ \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \psi(1, 0, 0, \cdots) = \frac{1}{2}.$$

Análogamente

$$f\left(\frac{1}{9}\right) = \psi \circ \varphi\left(\sum_{j=3}^{\infty} \frac{2}{3^j}\right) = \psi(0, 0, 1, \cdots) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{4}$$

y también

$$f\left(\frac{2}{9}\right) = \psi \circ \varphi\left(\frac{2}{3^2}\right) = \psi(0, 1, 0, \cdots) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Del mismo modo

$$f\left(\frac{7}{9}\right) = \psi \circ \varphi\left(\frac{2}{3} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{2}{3^j}\right) = \psi(1, 0, 1, \cdots) = \frac{1}{2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

y también

$$f\left(\frac{8}{9}\right) = \psi \circ \varphi\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right) = \psi(1, 1, 0, \cdots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

En general, en ambos extremos de cada bocado de la fase $j-$ésima, la función f toma el mismo valor, que es uno de los números $k/2^j,\ k = 1, 2, 3, \cdots, 2^j - 1$ que no hayan aparecido en alguna fase anterior. Por tanto, si extendemos $f : \mathcal{C} \to [0, 1]$ a $F : [0, 1] \to [0, 1]$ haciendo F constante en cada bocado, obtenemos una función continua en $[0, 1]$, creciente y con imagen $[0, 1]$. Además, F tiene derivada nula en todos los puntos de la unión de los bocados, o sea, del complemento respecto a $[0, 1]$ del conjunto de Cantor. Este complemento es un abierto de medida 1. Así obtenemos el ejemplo paradójico de una función $F : [0, 1] \to [0, 1]$ con $F'(x) = 0$ en casi todo punto de $[0, 1]$; pero que cumple $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.
Como la unión de los bocados es un conjunto denso en $[0, 1]$, basta definir F en dicha unión para tenerla definida en todo $[0, 1]$.

EJERCICIOS

Ejercicio 47: Encontrar un conjunto $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ con $\lambda(E) = 0$ tal que $E - E$ contenga un intervalo abierto centrado en 0.
Sugerencia: Demostrar que $\mathcal{C} - \mathcal{C} = [-1, 1]$.

Ejercicio 48: Ver que la imagen mediante una aplicación continua de un conjunto medible no es, necesariamente, medible.
Sugerencia: Usar la función de Cantor-Lebesgue.

Ejercicio 49: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua.

(*a*) Demostrar que $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

(*b*) Demostrar que si, además de ser continua, f es inyectiva, entonces, también es cierto que $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ f(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 50: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación inyectiva con derivada $f'(x)$ en todo punto $x \in \mathbb{R}$. Supongamos además que $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Demostrar que, entonces $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}},\ f(E) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.
Sugerencia: Basta considerar E tal que $\lambda(E) = 0$.