CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2016-2017. HOJA 7.

1) Hallar el cociente $C(X)$ y el resto $R(X)$ que resultan de dividir el polinomio

$$P(X) = 3X^5 + 2X^3 + X + 1 \quad \text{entre el} \quad Q(X) = 3X^2 + 1 .$$

Hallarlos primero en $\mathbb{Q}[X]$ y luego en $\mathbb{Z}_5[X]$.

2) Sean P, $Q \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que P y Q son *coprimos* si y sólo si $P + Q$, $P \cdot Q$ también lo son.

3) Calcular el máximo común divisor $D(X)$ de los polinomios

$$P(X) = X^5 - 5X^3 + 4X \qquad \text{y} \qquad Q(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$$

Encontrar dos polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que: $A(X) \cdot P(X) + B(X) \cdot Q(X) = D(X)$.

4) Encontrar polinomios $A(X)$ y $B(X)$ tales que: $A(X)(X^2+2X-2)+B(X)(X^2+X-1) = 1$.

5) Hallar un polinomio $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $X^2 + 1$ divida a $P(X)$, y $X^3 + 1$ divida a $P(X) - 1$, siendo el grado de P el mínimo posible.

6) Hallar los ceros racionales del polinomio $P(X) = 20X^3 - 56X^2 + 33X + 9$

7) Hallar todos los ceros de $P(X) = X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 27X - 54$, con sus multiplicidades. Razonar y comprobar lo que esos ceros implican para el máximo común divisor de $P(X)$ y su derivada $P'(X)$.

8) Los números $2 + \sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, son, cada uno de ellos, cero de algún polinomio de $\mathbb{Z}[X]$. Hallar esos polinomios.

9) a) Demostrar que para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, existen infinitos polinomios irreducibles en $\mathbb{K}[X]$. *Sugerencia: recordar la prueba de Euclides de que hay en $\mathbb{Z}$ infinitos números primos.*

b) Deducir que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo con un número finito de elementos (por ejemplo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ para p primo) habrá en $\mathbb{K}[X]$ polinomios irreducibles de grado arbitrariamente grande.

10) a) Para un producto de polinomios $(a_0 + \cdots + a_k X^k)(b_0 + \cdots + b_j X^j) = c_0 + \cdots + c_n X^n$, con coeficientes $\in \mathbb{Z}$ y grados $j, k < n$, probar por inducción que:

Si para un primo dado $p \in \mathbb{N}$, $p \nmid b_0$, pero $\forall i \leq k$, $p \mid c_i$, entonces $\forall i$ se tiene $p \mid a_i$.

b) Deducir de a) el ***criterio de irreducibilidad de Eisenstein:***

Si para algún primo p se tiene $p \mid c_i$ para $i < n$, $p \nmid c_n$, $p^2 \nmid c_0$, entonces el polinomio $c_0 + \cdots + c_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

c) Deducir que $\forall\ n > 1$ existen infinitos polinomios de grado n que son irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

d) Un ejemplo: descomponer $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2$ en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

11) a) Probar que un polinomio $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ es irreducible si y solamente si es irreducible el polinomio $Q(X) = P(X + a)$ para cualquier $a \in \mathbb{K}$.

b) ¿Es reducible en $\mathbb{Q}[X]$ el polinomio $p(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 33$? Justificar la respuesta.

12) a) Determinar los polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{Z}_2[X]$ de grados $1, 2, 3$ y 4.

b) Demostrar que el polinomio $P(X) = X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 7X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$

13) Descomponer el polinomio $p(X) = X^4+3X^2+4$ en sus factores irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{Z}_p[X]$, para $p = 2, 3, 5$ y 7.

$\boxed{\text{HOJA 7}}$

$\boxed{1.}$ a) En $\mathbb{Q}[x]$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^5} + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x + 1 & 3x^2 + 1 \\ \hline -\cancel{3x^5} \qquad\quad -x^3 & \underbrace{x^3 + \tfrac{1}{3}x}_{\text{cociente}} = Q[x] \\ \hline \qquad\quad \cancel{x^3} + x + 1 & \\ \qquad -\cancel{x^3} \quad -\tfrac{1}{3}x & \\ \hline \qquad\quad \underbrace{\tfrac{2}{3}x + 1}_{\text{resto}} = R[x] & \end{array}$$

b) En $\mathbb{Z}_5$ (módulo 5)

$[1]^{-1} = [1] \qquad [2]^{-1} = [3] \qquad [3]^{-1} = [2] \qquad [4]^{-1} = [4]$

$$\begin{array}{l|l} 3\cancel{x^5} + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x + 1 & 3x^2 + 1 \\ \hline -3\cancel{x^5} \qquad\quad -x^3 & \underbrace{[1]x^3 + [2]x}_{\text{cociente}} = \tilde{Q}[x] \\ \hline \qquad\quad \cancel{x^3} + x + 1 & \\ \qquad -\cancel{x^3} \quad -2x & \\ \hline \qquad\quad \underbrace{4x + 1}_{\text{resto}} = \tilde{R}[x] & \end{array}$$

$\boxed{2.}$ $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$

"Si P, Q no son coprimos $\Rightarrow P.Q$ y $P+Q$ no son coprimos".

$R \mid P \ \wedge \ R \mid Q \Rightarrow R \mid (P+Q)$

$R \mid P \ \wedge \ R \mid Q \Longrightarrow R \mid P.Q$

"Si $P.Q$ y $P+Q$ no son coprimos $\Rightarrow P, Q$ no son coprimos"

$$\left.\begin{array}{l} R_{\text{irreducible}} \mid PQ \\ R_{\text{irreducible}} \mid P+Q \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} R_{\text{irreducible}} \mid PQ \\ -\,R_{\text{irreducible}} \mid (P+Q)Q \\ \hline R_{\text{irreducible}} \mid Q^2 \Longrightarrow R_{\text{irreducible}} \mid Q \end{array}$$

Análogo para P (multiplicando aquí por P)

3. a) $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x \qquad Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^5} - 5x^3 + 4x & x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\ \hline - \cancel{x^5} - 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 & x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{2x^4} - 6x^2 + 4x \\ \cancel{2x^4} - 4x^3 - 10x^2 \quad 12x \\ \hline -\cancel{4x^3} + 4x^2 \quad - 8x \\ \cancel{4x^3} - 8x^2 \quad - 20x + 24 \\ \hline \underbrace{12x^2 + 12x - 24} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & 12x^2 + 12x - 24 \\ \hline - x^3 + x \quad - 2x & \frac{x}{12} - \frac{3}{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{-3x^2} \; \cancel{-3x} \; \cancel{+6} \\ - \quad -\cancel{3x^2} \; -\cancel{3x} \; \cancel{+6} \\ \hline \underline{0} \end{array}$$

$$mcd(P, Q) = 12x^2 + 12x - 24$$

b) $x^5 - 5x^3 + 4x = (x^2 + 2x + 4)(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) +$

$+ 12x^2 + 12x - 24 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{}_{A(x)} \underbrace{x^5 - 5x^3 + 4x}_{P(x)} - \underbrace{(x^2 + 2x + 4)}_{B(x)} \underbrace{(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)}_{Q(x)} =$$

$$= \underbrace{12x^2 + 12x - 24}_{D(x)}$$

$\boxed{4.}$ $A(x)$ y $B(x)$ tales que: $A(x)(x^2+2x-2) + B(x)(x^2+x-1) = 1$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2} + 2x - 2 & x^2+x-1 \\ \hline -\cancel{x^2} + x - 1 & 1 \\ \hline x - 1 & \end{array}$$

$(x^2+2x-2) = (x^2+x-1)\cdot 1 + (x-1)$:

$\Rightarrow (x-1) = (x^2+2x-2) - 1(x^2+x-1)$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2} + x - 1 & x-1 \\ \hline -\cancel{x^2} - x & x+2 \\ \hline 2\cancel{x} - 1 & \\ -2\cancel{x} - 2 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$(x^2+x-1) = (x+2)(x-1) + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+x-1) - (x+2)(x-1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+x-1) - (x+2)\left[(x^2+2x-2) - (x^2+x-1)\right]$:

$\boxed{6.}$ $20x^3 - 56x^2 + 33x + 9$

$\dfrac{p}{q}$ $p \rightarrow$ divisores $9: \pm 1, \pm 3, \pm 9$

$q \rightarrow$ divisores $20: \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

$$\begin{array}{c|cccc} & 20 & -56 & 33 & 9 \\ \frac{3}{2} & & 30 & -39 & -9 \\ \hline & 20 & -26 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow 20x^2 - 26x - 6 = 0$

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4.20.(-6)}}{40} = \frac{26 \pm 34}{40} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$$

8. a)

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 2+3+2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6} \Rightarrow (x^2-5)^2 = 4.6 = 24 \Rightarrow (x^2-5)^2 - 24 =$

7.

$\boxed{13.}$ $\boxed{P(x) = x^4 + 3x^2 + 4}$

a) en $\mathbb{C}[x]$

$x^4 = t^2$

$$t^2 + 3t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3+\sqrt{7}\,i}{2} \\ \dfrac{-3-\sqrt{7}\,i}{2} \end{cases}$$

$$x^4 = t^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}}$$

$$P(x) = \left(x + \sqrt{\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}}\right)$$

b) en $\mathbb{R}[x]$

Agruparlos de dos en dos ~~y~~ viendo que están en $\mathbb{R}$.

c) en $\mathbb{Q}[x]$

$$(x^2 + ax + 2)(x^2 + bx + 2) = x^4 + (a+b)x^3 + (ab+4)x^2 + \dots$$

$$\begin{cases} a+b = 0 \rightarrow a = -b \\ ab+4 = 3 \longrightarrow -a^2 + 4 = 3 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

d) en $\mathbb{Z}_2[x]$

$$[1]x^4 + [3]x^2 + [4] \Rightarrow [1]x^4 + [1]x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2([1]x^2 + [1])$$

Demostrar el binomio de Newton

TMA 1. *para todo número natural n y a y b cualesquiera se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ y } 0! = 1$$

Demostración. Sea $P(n) \equiv (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

$P(1) \equiv (a+b) = \binom{1}{0} a^0 b + \binom{1}{1} a b^0 = b + a$ es cierta. Suponiendo $P(n)$ vamos a probar que $P(n+1)$ también es cierta.

$$P(n+1) \equiv (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

Desarrollamos la suma

$$\binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a b^n + \cdots + \binom{n+1}{n} a^n b + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 =$$

descomponemos todos los $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ excepto el primero y el último, que valen 1

$$\binom{n+1}{0} b^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] a b^n + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a^n b + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} =$$

deshacemos los corchetes agrupando los primeros términos de cada corchete y los segundos términos de cada corchete

$$b^{n+1} + \binom{n}{0} a b^n + \cdots + \binom{n}{n-1} a^n b + \binom{n}{1} a b^n + \cdots + \binom{n}{n} a^n b + a^{n+1} =$$
$$b^{n+1} + a\left[\binom{n}{0} b^n + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b\right] + b\left[\binom{n}{1} a b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n\right] + a^{n+1} =$$

Ahora, $a[\ldots]$ es $a[P(n) - a^n]$, es decir $a[\ldots]$ es $aP(n)$ menos el último término, que es a^n. Análogamente, $b[\ldots]$ es $b[P(n) - b^n]$, es decir $b[\ldots]$ es $bP(n)$ menos el primer término, que es b^n. Podemos meter aquellos sumandos en los que no desarrollamos el coeficiente binomial ($\binom{n}{m}$) al principio, que son el primero, b^{n+1}, y el último, a^{n+1}, dentro de sus respectivos paréntesis para completar $P(n)$ en cada caso:

$$a\left[\binom{n}{0} b^n + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + a^n\right] + b\left[b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n\right] =$$
$$a\left[\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right] + b\left[\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right] = a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

□