Universidad Autónoma de Madrid Álgebra Lineal y Geometría. Curso 2017-18

Ingeniería Informática-CC.Matemáticas

Segundo Parcial: Espacios Vectoriales Euclídeos y Unitarios; Espacio Afín

Jueves, 19 de octubre de 2017

Apellidos ____________________ **Nombre** ____________________

DNI ____________________ **Grupo** ____________________

Problema 1. Decide, de manera razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

A. **(5 puntos)** En $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ hay dos planos π_1 y π_2 que se intersecan exactamente en un punto.

B. **(5 puntos)** Si $S_1, S_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son dos simetras ortogonales entonces $S_1 \circ S_2$ es una rotación.

Problema 2. En $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ se consideran los puntos $Q_0 = (1,0), Q_1 = (1,1), Q_2 = (0,1)$.
(a) (3 puntos) Demuestra que $\mathcal{S} = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ es una referencia baricéntrica.

(b) (3 puntos) Sea $\mathcal{R} = \{P_0 = (0,0); e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la referencia cartesiana estándar de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y sea $\mathcal{S}' = \{Q_0; \vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$. Escribe las ecuaciones de cambio de coordenadas cartesianas de $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{R}$.

(c) **(4 puntos)** Calcula las coordenadas baricéntricas del punto $T = (2, 2)$ respecto a $\mathcal{S}$.

Problema 3. Consideramos En $V = \mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar, que consideramos positivamente orientada, y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz respecto a B es

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(3 puntos)** Demuestra que f es ortogonal.

(b) **(2 puntos)** Decide de manera razonada si f conserva la orientación.

(c) **(5 puntos)** Clasifica f y determina sus elementos geométricos.

$$(x, y, z, 1) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13}/2 & a_1/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} & a_{23}/2 & a_2/2 \\ a_{13}/2 & a_{23}/2 & a_{33} & a_3/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & a_3/2 & a \end{pmatrix}}_{\overline{A}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

A

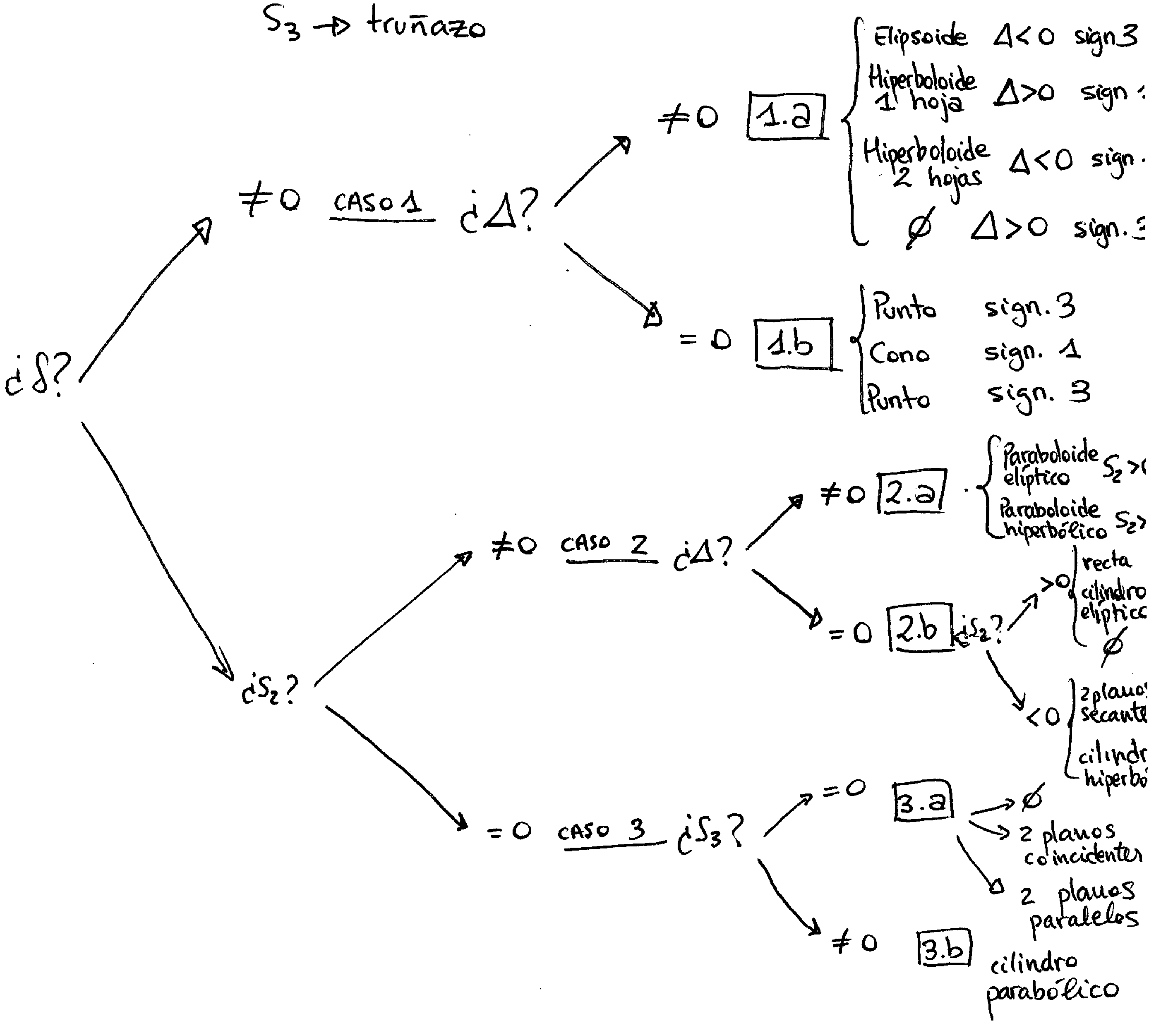
$\delta = \det(A)$

$\Delta = \det(\overline{A})$

$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ (traza de A)

$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{12}/2 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}/2 \\ a_{23}/2 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}/2 \\ a_{13}/2 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$S_3 \rightarrow$ truñazo



¿Composición de afinidades?

$R = \{O; u_1, u_2\}$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$A, B \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$

$$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f\left(\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + A\left[\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}}_{\substack{\text{traslación}\\ \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}}} + \underbrace{A\cdot B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{f\circ g}$$

LGEBRA Y GEOMETRÍA | 1er PARCIAL

Espacios Vectoriales

PROBLEMA 1 : VERDADERO O FALSO

A) Sean $u_1=(5,0,0)$, $u_2=(1,5,0)$ y $u_3=(1,1,5)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Entonces existe un único producto escalar $\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ respecto al que los tres vectores son ortogonales entre sí, y $\|u_1\|_\varphi = 5$, $\|u_2\|_\varphi = 2$ y $\|u_3\|_\varphi = 1$.

Para que los tres vectores sean ortogonales entre si respecto a φ

$$\varphi(u_1,u_2)=\varphi(u_2,u_1)=0$$

$$\varphi(u_1,u_3)=\varphi(u_3,u_1)=0$$

$$\varphi(u_2,u_3)=\varphi(u_3,u_2)=0$$

Además φ tiene que ser un prod. escalar. Tienen que cumplirse las tres propiedades $\begin{cases}\rightarrow \text{bilinealidad} \checkmark \\ \rightarrow \text{simétrica} \checkmark \\ \rightarrow \text{def. positiva ?}\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(u_1,u_1)^2=\|u_1\|_\varphi \Rightarrow \varphi(u_1,u_1)=+\sqrt{5} \\ \varphi(u_2,u_2)^2=\|u_2\|_\varphi \Rightarrow \varphi(u_2,u_2)=+\sqrt{2} \\ \varphi(u_3,u_3)^2=\|u_3\|_\varphi \Rightarrow \varphi(u_3,u_3)=+\sqrt{1}=1 \end{array}\right\}$$ positivos para que $M(\varphi)$ sea definida posit

$$M(\varphi)=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$ Conclusión, verdadero, es único.

B) Sea $\{v_1,v_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$, y sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $f(v_1)=v_1+v_2$ y $f(v_2)=-v_1+v_2$. Entonces exis un producto escalar respecto al que f es ortogonal.

$$M_{\{v_1,v_2\}}(f)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad |M_{\{v_1,v_2\}}(f)|=2$$

Como $\det(M(f)) \neq 1,-1$ $\Rightarrow$ no existe ningún producto escal para el cual f es ortogonal.

Conclusión, falso.

: En $\mathbb{R}^2$ consideramos el producto escalar usual. Sea $P: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal sobre la recta $x = y$. Sea $B = \{e_1, e_2\}$ la base estándar.

a) Escribe la matriz de P respecto de la base B. se ha hecho para $\mathbb{R}^3$.

W = espacio generado por la recta $\rightarrow$ Base $W = \{(1,1,0)\}$

Calculamos ahora $W^\perp$:

$$W^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) . I_3 . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$$

Base $W^\perp = \{(1,-1,0), (0,1,-1)\}$

Sabemos que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$ por lo que:

Base $\mathbb{R}^3$: $B' = \{(1,1,1), (1,-1,0), (0,1,-1)\}$

$$M_{B'}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Realizamos un cambio de base.

$$M_B(P) = M_{BB'} . M_{B'}(P) . M_{B'B} = M_{BB'} . M_{B'}(P) . M_{BB'}^{-1}$$

$$M_{BB'}^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{matrix}}_{M_{BB}^{-1}}$$

$$(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B) Decide de manera razonada si P es autoadjunta.

Se puede determinar si una función es autoadjunta si su matriz, expresada en una base ortonormal respecto a φ, es simétrica. (En el caso $\mathbb{R}$, en $\mathbb{C}$ sería hermítica).

$B = \{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal respecto al φ usual.

$$M_B(P) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = M_B(P)^T \Rightarrow P \text{ es autoadjunta.}$$

PROBLEMA 3: Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ formado por los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales y sea:

$$\begin{aligned} \varphi: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p(x), q(x)) &\longmapsto \int_0^1 x p(x) q(x)\, dx \end{aligned}$$

a) Decide de manera razonada si φ es un producto escalar en V.

- Sean $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ polinomios de grado ≤ 2.

$$\varphi(p(x) + r(x), q(x)) = \int_0^1 x(p(x) + r(x)) \cdot q(x)\, dx = \int_0^1 x p(x) q(x) dx + \int_0^1 x r(x) q(x)\, dx = \varphi(p(x), q(x)) + \varphi(r(x), q(x)).$$

Análogo para $\varphi(p(x), q(x) + r(x)) = \varphi(p(x), q(x)) + \varphi(p(x), r(x))$

$$\varphi(\lambda p(x), q(x)) = \int_0^1 x \lambda p(x) q(x)\, dx = \lambda \int_0^1 x p(x) q(x) dx = \lambda \varphi(p(x), q(x))$$

Análogo para $\varphi(p(x), \lambda q(x)) = \lambda \varphi(p(x), q(x))$. $\longrightarrow$ bilineal ✓

¿Es simétrica? ¿$\varphi(p(x), q(x)) = \varphi(q(x), p(x))$?

$$\varphi(p(x), q(x)) = \int_0^1 x p(x) q(x)\, dx = \int_0^1 x q(x) p(x) dx = \varphi(q(x), p(x)) \longrightarrow \text{simétrica ✓}$$

¿Es def. positiva? ¿$\forall p(x) \in V$ $\varphi(p(x), p(x)) > 0$ y $\varphi(p(x), p(x)) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$?

$$\varphi(p(x), p(x)) = \int_0^1 \underset{\substack{\downarrow \\ >0 \\ \text{entre 0 y 1.}}}{x} \underbrace{p(x)^2}_{>0} dx \Rightarrow \text{positivo} \quad \text{y} \quad \varphi(p(x), p(x)) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \Rightarrow \int_0^1 0\, dx = 0$$

$\longrightarrow$ def. positiva ✓

b) Sea $W := \langle x \rangle$ Encuentra el complemento ortogonal de W respecto de φ.

$ax^2 + bx + c \in V$ genérico

$$\langle x \rangle^{\perp} = \{ax^2+bx+c \in V / \varphi(ax^2+bx+c, x) = 0\} = \{ax^2+bx+c \in V / \int_0^1 x(ax^2+bx+c)x\,dx$$

$$= \{ax^2+bx+c \in V / \int_0^1 ax^4 + bx^3 + cx^2\,dx = 0\} =$$

$$= \{ax^2+bx+c \in V / \frac{a}{5}[x^5]_0^1 + \frac{b}{4}[x^4]_0^1 + \frac{c}{3}[x^3]_0^1 = 0\} =$$

$$= \{ax^2+bx+c \in V / \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = 0\} = \{ax^2+bx+c \in V / 12a + 15b + 20c = 60\}$$

c) Decide de manera razonada si $\{1, x, x^2\}$ es una base ortogonal de V.

$\varphi(1,x) = \int_0^1 x.x\,dx = \varphi(x,1) = \frac{1}{3}[x^3]_0^1 = \frac{1}{3} \neq 0$ 1 y x ya no son ortogonales.

→ No es una base ortogonal.

d) Sea $p(x) = a + bx$. Encuentra una condición necesaria y suficiente en los coeficientes de $p(x)$ para que este sea unitario.

Será unitario si $\varphi(p(x), p(x)) = 1$.

$$\varphi(p(x),p(x)) = \int_0^1 x(a+bx)^2\,dx = \int_0^1 x(a^2 + 2abx + b^2x^2)\,dx = \int_0^1 a^2x + 2abx^2 + b^2x^3\,dx =$$

$$= \frac{a^2}{2}[x^2]_0^1 + \frac{2ab}{3}[x^3]_0^1 + \frac{b^2}{4}[x^4]_0^1 = \frac{a^2}{2} + \frac{2ab}{3} + \frac{b^2}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{6a^2 + 8ab + 3b^2 = 12}$$