1.3. Medidas exteriores. Extensión de medidas

1. Dado un conjunto X, consideramos la aplicación

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ 1 & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Mostrar que μ^* es una medida exterior y hallar los conjuntos μ^*-medibles.

2. Sea X un conjunto no contable. Consideramos la aplicación

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es contable}, \\ 1 & \text{si } A \text{ es no contable}. \end{cases}$$

Mostrar que μ^* es una medida exterior y hallar los conjuntos μ^*-medibles.

1.4. La medida de Lebesgue

3. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Mostrar que $m(A) = 0$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos $\{I_n\}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y la suma de sus longitudes es menor que ε.

4. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ con $m(A) > 0$. Mostrar que para cualquier $\alpha < 1$, existe un intervalo abierto I verificando que $m(I \cap A) > \alpha\, m(I)$.
Sugerencia: téngase en cuenta que $m(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} m((a_j, b_j)) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \right\}$.

5. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(0) = 0, \qquad \text{y} \qquad f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \qquad \text{para } x > 0.$$

Calcular la medida de Lebesgue del conjunto $A = \{x \in [0, 1/\pi] : f(x) \geq 0\}$.
Ayuda: Recuérdese que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n = \log 2$.

6. Sea H un espacio afín $n-1$ dimensional de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que $m(H) = 0$.

7. Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Calcular $m(A)$, donde $A = \{x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : 0 \leq \lambda_j \leq 1\}$.

8. Sea U un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\overline{U} \subset \lambda U$, para todo $\lambda > 1$. Mostrar que ∂U (la frontera de U) es medible Borel y que $m(\partial U) = 0$.