ALEJANDRO SANTORUM VARELA TAREA 10

[1] $Y(t)^t S Y(t) = Y_0^t S Y_0 \quad \forall Y_0 \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq t_0$

con S simétrica y no nula

Dado RK con $M \equiv 0$, probar $\boxed{y_{n+1}^t S y_{n+1} = y_n^t S y_n}$ ☆

Primero vamos a ver que $f(t,y)^t S y = 0$

Desarrollamos [1] $\quad Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_d(t))$

$$(Y_1, \dots, Y_d) \underbrace{\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1d} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2d} \\ \vdots & & & \\ S_{d1} & S_{d2} & \dots & S_{dd} \end{pmatrix}}_{\text{simétrica}} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_d \end{pmatrix} = (Y_1 \dots Y_d) \begin{pmatrix} Y_1 S_{11} + Y_2 S_{12} + \dots + Y_d S_{1d} \\ Y_1 S_{21} + Y_2 S_{22} + \dots + Y_d S_{2d} \\ \vdots \\ Y_1 S_{d1} + Y_2 S_{d2} + \dots + Y_d S_{dd} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} Y_i^2 S_{ii} + 2 \sum_{i<j}^{d} Y_i Y_j S_{ij} \qquad [2]$$

Derivamos [1], que es lo mismo que derivar el desarrollo anterior ([2]):

$$\frac{\partial [2]}{\partial t} = 2 \sum_{i=1}^{d} Y_i(t) \cdot Y_i'(t) \cdot S_{ii} + 2 \left(\sum_{i<j}^{d} Y_i' Y_j S_{ij} + \sum_{i<j}^{d} Y_i Y_j' S_{ij} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[Y_0^t S Y_0 \right] = 0 \quad \text{por ser constante } Y_0 \in \mathbb{R}^d$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d} Y_i Y_i' S_{ii} + \sum_{i<j}^{d} Y_i' Y_j S_{ij} + \sum_{i<j}^{d} Y_i Y_j' S_{ij} = 0 \qquad [3]$$

Si derivásemos [1] directamente obtendríamos

$$\frac{\partial [1]}{\partial t} = Y'(t)^t S Y(t) + Y(t)^t \cdot S \cdot Y'(t) =$$
$$= f(t,y)^t S Y(t) + Y(t)^t S f(t,y)^t = 0$$

Como $f(t,y)^t S \cdot Y(t) = Y(t)^t \cdot S \cdot f(t,y)^t$ por [3], tenemos:

$$2 f(t,s)^t S Y(t) = 0 \Rightarrow \boxed{f(t,s)^t \cdot S \cdot Y(t) = 0}$$

Ahora vamos a probar ($\star$):

Para ello hay que tener en cuenta como se escriben los métodos RK: $y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i$

Entonces:

$$y_{n+1}^t S y_{n+1} = \left(y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i\right)^t S \left(y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i\right) =$$

$$= \left(y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i\right)^t S \left(y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i\right) =$$

donde $f_i = f\left(t_n + c_i h,\ y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right)$

$$= y_n^t S y_n + \overbrace{y_n^t S h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i}^{(*)} + \overbrace{\left(h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i\right)^t S y_n}^{(**)} +$$

$$+ \underbrace{\left(h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i\right)^t S \left(h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i\right)}_{:= (***)}$$

Ahora, $(*)$ y $(**)$ se anulan debido a que $f(t,y) S y = 0$ ($= y^t S f(t,s)$)

ya que $(*)$ y $(**)$ son combinaciones lineales (con coefs $= hb_i$ $i = 1, \dots, s$) de $f(t,y) S y$.

Finalmente, $(***)$ también se anula debido a que $M \equiv 0$. El razonamiento claro y bien construido no lo he logrado sacar.

Llegaríamos a que $y_{n+1}^t S y_{n+1} = y_n^t S y_n$, que era lo que queríamos probar.