ALEJANDRO SANTORUM VARELA GR. 240 44090946-S

PROBLEMA 1

1.1 Solo hay un servidor que recibe peticiones de los clientes siguiendo un proceso de Poisson. Esto es equivalente a suponer tiempo entre llegadas distribuido de forma exponencial. El tiempo de servicio también es exponencial. El tamaño de la cola es infinito.

Por todo esto, podemos concluir que usaremos un modelo de colas M/M/1.

1.2 ¿capacidad del servidor?

Sabemos: $T_a = 0'5 s \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{0'5} = 2 \text{ pet.}/s.$

$W_q = 0'05 s$

$$W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} \Longrightarrow (\mu-\lambda)\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mu W_q + 1 - \lambda W_q - \frac{\lambda}{\mu} = 1 \Longrightarrow W_q \mu^2 - \lambda W_q \mu - \lambda = 0$$

$$\Longrightarrow 0'05\mu^2 - 0'1\mu - 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{\mu = 7'4031}$$

1.3 ¿probabilidad servidor ocupado?

Probabilidad servidor libre $:= P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2}{7'4031} = 0'7298$

$\Longrightarrow$ Prob. servidor ocupado $= 1 - P_0 = 1 - 0'7298 = \boxed{0'2702}$

1.4 ¿tiempo medio de latencia?

$$W = W_q + T_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0'05 + \frac{1}{7'4031} = \boxed{0'1851 \ s}$$

$\boxed{1.5}$ ¿peticiones en el sistema en promedio?

$$L = \lambda W = 2 \cdot 0'1851 = \boxed{0'3702}$$

$\boxed{1.6}$ ¿peticiones en cola en promedio?

$$L_q = \lambda W_q = 2 \cdot 0'05 = \boxed{0'1}$$

$\boxed{1.7}$

i) ¿cumple el requisito?

$$\mathbb{P}(t \leq 0'05) = W(0'05) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t} = 1 - e^{-0'2701} = \boxed{0'2367}$$

Como $0'2367 < 0'25 \longrightarrow$ No cumple el requisito

ii) Buscamos un nuevo μ tal que:

$$0'05 = \frac{1}{\mu - 2} \ln\left(\frac{1}{1-0'25}\right) \Longrightarrow 0'05\mu - 0'1 = \ln\left(\frac{1}{0'75}\right)$$

$$\Longrightarrow \mu = \frac{\ln\left(\frac{1}{0'75}\right) + 0'1}{0'05} = 7'7536$$

$\Longrightarrow \boxed{\mu = 7'7536}$ NUEVA TASA DE SERVICIO $\equiv \boxed{T_s = \mu^{-1} = 0'1290 \text{ s}}$

NUEVO TIEMPO MEDIO DE SERVICIO

ALEJANDRO SANTORUM VARELA 44090946-S GR. 240

PROBLEMA 2

2.1 Hay varios servidores en el sistema.

El tiempo de servicio de cualquier servidor se puede considerar distribuido exponencialmente. La llegada sigue un proceso de Poisson, por lo que se puede considerar exponencial. La cola es infinita.

Por todo esto, el modelo de colas utilizado será M/M/C.

2.2 ¿número de servidores a instalar?

Se busca un 20% del tiempo con los servidores libres ⇒

⇒ 80% servidores ocupados ⇒ $\rho = 0'8$ y despejamos c:

$$c = \frac{\lambda}{\rho\mu} = \frac{4}{0'8 \cdot 1'\hat{3}} = 3'75 \Rightarrow \text{Necesitamos } \boxed{4 \text{ servidores}}$$

(*) ρ actual $\longrightarrow \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{4}{4 \cdot 1'\hat{3}} = 0'75$

2.3 $\mathbb{P}(\{N(t) \geq c+3\}) = P_q - P_{c+1} - P_{c+2} - P_{c+3}$

$$P_q = \frac{P_c}{1-\rho} \; ; \quad P_c = P_0 \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^c \; ; \quad P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6} + \frac{3^4}{4!(1-0'75)}\right]^{-1} = 0'0377$$

$$P_c = 0'0377 \cdot \frac{4^4}{4!}\left(\frac{4}{4 \cdot 1'\hat{3}}\right)^4 = 0'1272$$

$$P_q = \frac{0'1272}{1-0'75} = 0'5088$$

$$P_{c+1} = P_0 \cdot \frac{4^4}{4!}\left(\frac{4}{4 \cdot 1'\hat{3}}\right)^5 = 0'0954 \; ; \quad P_{c+2} = 0'0716$$

⇒

$\Longrightarrow \mathbb{P}(\{N(t) \geq c+3\}) = P_q - P_c - P_{c+1} - P_{c+2} = 0'5088 - 0'1272 - 0'0954 -$

$- 0'0716 = \boxed{0'2147}$. Es el mismo resultado que si calculamos:

$$\sum_{n=7}^{\infty} P_0 \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n = \sum_{n=7}^{\infty} 0'4021 \cdot (0'75)^n = \boxed{0'2147}$$

$\boxed{2.4}$ ¿ tiempo medio espera en cola?

$$W_q = \frac{P_q}{c\mu - \lambda} = \frac{0'5088}{4 \cdot 1'\widehat{3} - 4} = \boxed{0'3816 \text{ s}}$$

$\boxed{2.5}$

a) ¿ se satisface el requisito?

$$P_q = \frac{P_c}{1-\rho} = 0'5088 \Longrightarrow 0'5088 > 0'5$$ No se cumple

b)

Como mantenemos $c=4$ por el apartado 2, para establecer que en promedio menos de la mitad de los clientes esperen en la cola debemos reducir el tiempo de servicio (T_s). Para ello intentaremos despejar $\mu \left(= \frac{1}{T_s}\right)$ para que $P_q = 0'5$.

$$P_q = \frac{P_c}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} = \frac{P_0 \cdot \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^c}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} = \frac{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!\,(1 - \lambda/c\mu)}\right]^{-1} \cdot \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^c}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} = 0'5$$

Despejaríamos μ (llamando $\hat{\mu}$ al nuevo μ) y entonces $T_s \leq \frac{1}{\hat{\mu}}$

Esto sigue siendo compatible con el apartado 2 porque en este apartado se buscaba que $\rho \leq 0'8$. Con $c=4$, tenemos que $\rho = 0'75$ y $\rho = \frac{\lambda T_s}{c}$. Si reducimos T_s, también reducimos ρ, y como antes ρ ya era menor que $0'8$, haciendo las modificaciones seguiríamos cumpliéndolo.