Modelos Unidimensionales

Daniel Faraco, Rafael Orive
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Marzo 2020

Objetivos

- Cambios de escala
- Puntos fijos.
- Trayectorias y planos de fases.
- Concepto de Bifurcación.
- Fórmula general Bernoulli equations.
- Linearización. Comportamiento cerca de los equilibrios.

Modelos

- Dinámica de Poblaciones.
- Malthus versus Verhulst.
- Harvesting. Esfuerzo Constante.
- Plagas de Polillas de abetos en Canada

El primer día estudiamos poblaciones que crecen respecto a una ley $N(k+1) = aN(k)$. En este tema vamos a suponer que la tasa de cambio es mucho más rápida y estudiamos modelos continuos. De hecho en parte debido a la complejidad matemática estudiaremos

- Modelos discretos lineales multidimensionales.
- Modelos continuos unidimensionales lineales y no lineales.
- Modelos continuos bidimensionales lineales y no dimensionales.
- Modelos discretos no lineales.

La razón es que modelos continuous 3d y discretos 1d hay caos (1d podemos decir algo).

Contribución de los modelos matemáticos: De información en pequeños intervalos de tiempo, deducir el comportamiento a largo plazo. Los datos experimentales y técnicas estadísticas ayudan a averiguar los parámetros de los modelos.

Malthus

1798: Malthus (An essay of the principle of Population)
Cuantas personas puede mantener la Tierra?
Principios básicos.

- Si la población se reproduce a ritmo constante aumenta hasta el infinito.
- El ambiente es dinámico (control de nacimiento, cambios de hábitos en la sociedad)
- En algunos periodos históricos ha habido bajas importantes (peste negra, migraciones)
- La capacidad de soporte depende del número de individuos

La tasa de cambio de la población se determina en función de β la tasa de nacimiento y μ la tasa de defunciones. Se supone que la población es cerrada.

- $x(t+h) = x(t) + (\beta - \mu)hx(t)$
- $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = (\beta - \mu)x$; dato inicial $x(t=0) = x_0$
- $r = \beta - \mu$

Solución $x(t) = e^{rt}x_0$.
Interpretación. Si $r > 0$ crecimiento exponencial, si $r = 0$ la población no cambia, si $r < 0$ la población se extingue. $R_0 = \frac{\beta}{\mu}$ el **basic Reproductive number** captura esta bifurcación y no depende de las unidades.
Preguntas para el lector:

- Determinar el tiempo necesario para doblar el tamaño inicial (Doubling life) o el necesario para reducirla a la mitad.
- Y si la tasa de cambio es una función del tiempo $r = r(t)$?

Información: Se sabe que la proporción del isótopo de carbono catorce en cualquier tejido orgánico se deteriora siguiendo una ley exponencial. Se sabe que se reduce ritmo exponencial y que necesita 5730 años para quedarse en la mitad.
Por tanto la concentración $x(t)$ sigue el modelo,

$$\dot{x} = -ax, \quad x(t_0) = A,$$
$$a = \frac{ln2}{t} = \frac{ln2}{5700} = 1,216 \times 10^{-4}.$$

Para datar la sabana santa de Turin en 1988 se midió una concentracion del 92 por ciento (es decir, $X(0) = 0.92A$)

$$x(t) = Ae^{-a(t+t_0)} \Rightarrow 0.92A = x(0) = Ae^{-at_0}$$
$$\Rightarrow t_0 = -\frac{\ln(0.92)}{a} = 5700\frac{-\ln(0.92)}{ln2} = 685,68$$

Por tanto, el año de su creación es $1988 - 685,68 = 1302,32$

Modelo logístico

En los siguientes modelos utilizaremos ecuaciones autónomas ($\dot{x} = f(x)$). La tasa de crecimiento solo depende del tamaño de la población.
El crecimiento exponencial falla si por ejemplo observamos microorganismos en una probeta. En 1838 Verhulst introdujo la famosa ecuación logística. Consideramos K la máxima capacidad biológica del ecosistema, donde la tasa de crecimiento $r(x) = b(K - x)$ decrece cuando x se acerca al nivel de saturación hasta que se hace cero.

$$\dot{x} = bx(K - x) = ax(1 - \frac{x}{K}) \quad (a = bK)$$

- Si $x \approx 0, K - x \approx K$ la ecuación se parece a $\dot{x} = ax$, $x \approx e^{at}$
- Si $x \approx K$, $\dot{x} \approx a(K - x)$, entonces $(K \dot{-} x) = -a(K - x)$ ie $K - x \approx e^{-at}$
- La ecuación logística es descriptiva, no se deriva de ninguna observación sobre la tasa de crecimiento. En contraposición con Malthus que $a = \beta - \mu$ (parámetros determinables sin la ecuación).

Resolución explícita de la logística

La logistica la podemos resolver explicitamente integrando $\dfrac{1}{x(K-x)}$.

También considerandola como una ecuación de Bernoulli.

- $v = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dot{v} = \dfrac{-\dot{x}}{x^2} = -\dfrac{ax(1-\frac{x}{K})}{x^2} = a(\dfrac{1}{K} - \dfrac{1}{x}) = a(\dfrac{1}{K} - v)$
- $z = \dfrac{1}{K} - v \Rightarrow \dot{z} = -az \Rightarrow z = Ce^{-at}$
- $v = \dfrac{1}{K} - Ce^{-at} \Rightarrow x = \dfrac{K}{1 + CKe^{-at}}$
- Si introducimos las condiciones iniciales tenemos que

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-at}}$$

Ejercicio: Calcular la tasa de crecimiento máxima y para que valor de la población se alcanza.

$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$. Herramientas principales de E.D.O.

- **Teorema de Picard**. Si f es Lipschitz (por ejemplo, con derivada continua) existe una solución para todo tiempo y es única. Consecuencia importantísima: Las distintas trayectorias no pueden cortarse.
- Llamamos $x(t; x_0)$ a esta solución única tal que $x(0) = x_0$.
- **Puntos de equilibrio** ($f(x_\infty) = 0$) son trayectorias constantes que actúan de barreras.
- **Diagrama de fases** se dibuja sobre el eje real y viene totalmente determinado por el signo de f.
- Se pueden dibujar las gráficas de todas las trayectorias.

Aviso: No toda función natural es Lipschitz. Ejemplo: modelo de von Bertalanffy del crecimiento de un pez

$$\dot{x} = ax^{\frac{2}{3}} - x$$

Observamos que sean autónomas nos da varias observaciones

1. Si $x(t)$ es solución de $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{x}(t_0) = 0$ entonces $x(t) = x(t_0)$ para todo t.
2. Toda solución de una ecuación autónoma es o estrictamente monótona o constante.
3. Si $x(t)$ es solución también lo es $x(t + t_0)$. Simplificamos la notación: $x(t; t_0, x_0) = x(t; x_0)$
4. Si $\lim_{t\to\infty} x(t) = \xi \Rightarrow f(\xi) = 0$
5. Resumen Práctico.
   - Si x_0 está entre dos ceros consecutivos de $f : x_1 < x_0 < x_2$, $x(t; x_0)$ esta definida para todo $\mathbb{R}$ y crece o decrece entre x_1 a x_2.
   - Si f no tiene ceros a la derecha (izquierda). Entonces no está acotada en su intervalo de definición (α, β) Es decir $\{x(t; t_0, x_0); t \in [t_0, \beta)\} = [x_0, \infty)$ si $f(x_0) > 0$; $\{x(t; t_0, x_0); t \in (\alpha, t_0]\} = [x_0, \infty)$ si $f(x_0) < 0$.
   - Si f no se anula nunca entonces toda solución toma todo los valores reales.

- $f(x(t_0)) = 0$.
- La función $u(t) \equiv x(t_0)$ es solución.
- Aplicar el teorema de unicidad para la ecuación $\dot{x} = f(x), x(t_0) = x(t_0)$

Consecuencia directa de que la ecuación es autónoma.
La intuición nos dice: Si converge su velocidad tenderá a cero asi que tenderá a un punto crítico de f. Rigurosamente. Como $x(t)$ converge es una sucesión de Cauchy. Sea t_n tal que si $t \geq t_n$ $|x(t) - x(t_n)| \leq \frac{1}{n}$.
Escogiendo $t = t_n + 1$, y aplicando el teorema del valor medio, deducimos la existencia de $t_n < \tau_n \leq t_n + 1$ tal que

$$|f(x_{\tau_n})| = |\dot{x}(\tau)| = |x(t_n + 1) - x(t_n)| \leq \frac{1}{n}$$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} |f(x_{\tau_n})| = 0 = f(\xi)$ por continuidad de f.

Definición de puntos de equilibrio

Sea x_∞ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, $f(x_\infty) = 0$.

- x_∞ es **estable** si para todo ϵ existe δ tal que $|x_\infty - z| \leq \delta$ implica que $x(t; z)$ está definida y verifica que $|x(t; z) - x_\infty| \leq \epsilon$ para todo $t \geq 0$.
- Si no es estable, entonces es **inestable**.
- x_∞ es **atractor** local si existe un ρ tal que para todo z que verifique $|z - x_\infty| \leq \rho$ se cumple que $\lim_{t\to\infty} x(t; z) = x_\infty$.
- La región de atracción de x_∞ es el conjunto de $z \in \mathbb{R}$ tal que $x(t; z) \to x_\infty$. Se designa por $A(x_\infty)$.
- x_∞ es **asintoticamente estable** si es estable y atractor.
- x_∞ es **repulsor** si existe un $\rho > 0$ tal que para todo z con $|z - x_\infty| \leq \rho$ se tiene que $x(t; z) \to x_\infty$ cuando $t \to -\infty$

Clasificación de puntos de equilibrio

- Si existe $\delta > 0$ tal que $f\chi_{[x_\infty-\delta,x_\infty)} \geq 0$ y $f\chi_{(x_\infty,x_\infty+\delta]} \leq 0$, entonces x_∞ es **estable**.
- x_∞ es **asintóticamente estable** si existe $\delta > 0$ tal que $f\chi_{[x_\infty-\delta,x_\infty)} > 0$ y $f\chi_{(x_\infty,x_\infty+\delta]} < 0$ (desigualdades estrictas).
- Sea $z < x_\infty$ ($z > x_\infty$), se cumple que $z \in A(x_\infty)$ si $f(\xi) > 0$ ($f(\xi) < 0$) para todo $\xi \in (z, x_\infty)$ ($\xi \in (x_\infty, z)$)

Analizar la ecuación logística: $f(x) = x(1-x)$

Pregunta para mañana: Decidir las condiciones para punto repulsor y punto inestable.

Estabilidad mediante la primera aproximación

Decimos que un punto crítico es **hiperbólico** si $f'(x_\infty) \neq 0$.

Proposición

Sea x_∞ un punto crítico hiperbólico. Es atractor si $f'(x_\infty) < 0$ y es repulsor si $f'(x_\infty) > 0$. Si $f'(x_\infty) = 0$ no podemos decidirlo.

Discutamos los siguientes ejemplos

- $f(x) = x^2$. 0 es inestable.
- la ecuación logistica. 0 es inestable y repulsor y K es atractor.
- $x^3 sen(1/x)$. 0 es estable pero no asintóticamente estable (no se cumple la condición sobre el signo de f).

Qué ocurre cerca de los puntos de equilibrio

Consideramos $u(t) = x(t) - x_\infty$

$$\dot{u} = f(x) = f(x_\infty + u(t)) \approx \underbrace{f(x_\infty)}_{=0} + f'(x_\infty)u + Cu^2$$

Es una Bernoulli como veremos luego pero como $u(t)$ es muy pequeña

$$\dot{u} \approx f'(x_\infty)u \Rightarrow (x(t) - x_\infty) = e^{f'(x_\infty)t}(x_0 - x_\infty)$$

Así que la solución converge o diverge de manera exponencial dependiendo del signo de $f'(x_\infty)$.

Harvesting

Nuevo factor: Harvesting. Cosechar, recolectar.

$$\dot{x} = f(x) - h$$

En principio h puede depender de t e incluso de x. Primero analizamos el caso constante

$$\dot{x} = x(1-x) - h$$

Raíces de $f - h = 0$: $x_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1-4h})/2$

- $h < 1/4$, dos raíces. Son puntos hiperbólicos. $f_h'(x_-) > 0$, x_- repulsor (**fuente**). $f_h'(x_+) < 0$, x_+ atractor (**pozo, sumidero**)
- $h = 1/4$, una raíz. No es hiperbólico. Es inestable.
- $h > 1/4$. Raíces no reales, sin puntos de equilibrio.

Bifurcación: Cambio en el caracter y/o cantidad de puntos críticos.

Interpretación biológica

- Si la tasa de cosecha es menor que $1/4$ y la población inicial es mayor que x_- la poblacion sobrevive.
- Si la tasa de cosecha es mayor que $1/4$ la especie se extingue en poco tiempo.
- El parámetro de bifurcación es un desastre para el modelo y predice un cierto caos.

Los parámetros nunca son exactos.
En la mayoría de los casos se obtienen ajustando los parámetros de algunas mediciones del mismo modo que se obtienen los coeficientes en la recta de regresión en estadistica. Por tanto hay un intervalo de confianza. Cerca del nivel de bifurcación pequeñas fluctuaciones pueden dar lugar a distintas predicciones.

Suponemos que el crecimiento de una población sigue un modelo logístico. Se ejerce un control de caza o pesca limitado por el numero de individuos (elefantes en un parque nacional). E es un parámetro con unidades de caza. Suposición: Se puede cuestionar que el número de peces sea proporcional al esfuerzo. Aparentemente en los esfuerzos de pescado tiene sentido. Analizamos la ecuación:

$$\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{K}) - Ex$$

Cambio de variables: $y = \dfrac{x}{K}$ $\tau = rt$ $h = \dfrac{E}{r}$ obtenemos otra logística.

$$\dot{y} = y(1 - y) - hy$$

Ejercicio. Cómo afectan estos cambios en el dato inicial.

Puntos críticos y bifurcación

Los puntos críticos asociados a $f(y) = (1-h)y - y^2$ son 0 y $1-h$.

- $h = E/r > 1 \Rightarrow \dot{y} = (1-h)y - y^2 < 0$. La población se extingue en tiempo finito
$$y(t) = \frac{(h-1)y_0}{(h-1+y_0)e^{(h-1)t} - y_0}$$
- $h = 1$, se produce la bifurcación $y(t) = y_0/(y_0 t + 1)$.
- $h < 1$. Dos equilibrios 0, $1-h$
  - $y_\infty = 1-h$ es un punto hiperbólico $f'(y_\infty) = (h-1) < 0 \Rightarrow$ es un atractor
  - $x_0 = 0$, $f'(0) = 1-h > 0 \Rightarrow$ inestable.

Observamos que logicamente el esfuerzo pesquero tiene que ser menor que la tasa de reposición.

Solución explicita: Ecuaciones de Bernoulli

Recordamos solución explícita de la Bernoulli

$$\dot{y} = ay + by^2,\ z = \frac{1}{y},\ \dot{z} = -az - b$$

$$\text{Si } A(t) = \int_0^t a(s)ds \Rightarrow\ z(t) = e^{-A(t)}\left(z(0) - \int_0^t e^{A(s)}b(s)ds\right)$$

Si a y b son constantes

$$z(t) = e^{-at}[z(0) - b\int_0^t e^{as}ds] = e^{-at}[z(0) - \frac{b}{a}[e^{at} - 1] = (z_0 + \frac{b}{a})e^{-at} - \frac{b}{a}$$

$$y(t) = \frac{e^{at}}{\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}(e^{at} - 1)} = \frac{1}{(\frac{1}{y_0} + \frac{b}{a})e^{-at} - \frac{b}{a}}$$

Referencia: Allen, Capítulo 6.5. Se modela la población como una logística con el efecto de un depredador (pájaros).

$$\dot{N} = r_p N(1 - \frac{N}{K}) - p(N), \qquad p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2},$$

donde $p(N)$ es la tasa de depredación.

Propiedades de la tasa de depredación

- Si la población es pequeña la tasa de depredación es casi 0 porque los depredadores persiguen otras presas.
- Por otro lado la depredación no puede ser muy grande. Hay una cota superior de cuantas polillas pueden cazadas.
- $p'(N) = \dfrac{2A^2BN}{(A^2 + N^2)^2} > 0$. La tasa de depredación siempre aumenta.
- $p''(N) = \dfrac{2A^2B[A^2 - 3N^2]}{(A^2 + N^2)^2} \Rightarrow N = \dfrac{A}{\sqrt{3}}$ pasa de aceleración positiva a negativa.

- B estimación de la caza por los pájaros cuando solo se alimentan de polillas.
- A población de polillas cuando $P(N) = B/2$.
- r_p tasa de nacimiento de las polillas.
- K máxima capacidad de polillas.

Consideramos los cambios de escala:

$$u = \frac{N}{A}, \quad \tau = \frac{Bt}{A}, \quad r = \frac{Ar_p}{B}, \quad q = \frac{K}{A}$$

Nos queda la ecuación logística

$$\frac{du}{d\tau} = ru(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1 + u^2} = u\left(r(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u}{1 + u^2}\right)$$

Bifurcación.

Notemos que $f(u) = ug(u)$

$$g(u) = r(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u}{1+u^2}$$

Para otros puntos de equilibrio $g(u) = 0$.
Queremos entender la bifurcación del problema, $f'(u) = g(u) - ug'(u)$.
Estudiemos cuando $g'(u) = 0$.
Despejamos r. Sea u punto de equilibrio. Derivamos con respecto a u

$$g'(u) = 0 \Rightarrow -\frac{r}{q} = \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \Rightarrow r = -q\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$$

Resolvemos q. Utilizo el valor r en $g(u) = 0$

$$-q\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}(1 - \frac{u}{q}) = \frac{u}{1+u^2} \Rightarrow q - u = u\frac{u^2+1}{u^2-1} \Rightarrow q = \frac{2u^3}{u^2-1}$$

Insertando esta expresión en r tenemos los puntos de bifurcación con respecto a los parámetros $(r, q) = (\frac{2u^3}{(1+u^2)^2}, \frac{2u^3}{u^2-1})$

Bifurcación

Si fijamos $q = 10$, los puntos de equilibrio de la curva de bifurcación son las raíces positivas del polinomio $q(u) = u^3 - 5u^2 + 5$, es decir, son $u_1 \approx 4.78$ (cuyo r de bifurcación es $r \approx 0.384$) y $u_2 \approx 1.14$ (cuyo $r \approx 0.56$).
Así, vamos variando r con $q = 10$, el número de puntos críticos varía mucho.

- $r = 0.3$ dos puntos críticos $u_0 = 0$, $u_1 \approx 0.3$ estable.
- Si $r \approx 0.384$, tangente entre las dos curvas, tenemos tres puntos de equilibrio, $u_0 = 0$ inestable, $u_1 \approx 0.47$ estable y $u_2 \approx 4.78$ inestable. En este par (r, q) tenemos bifurcación.
- Si $r = 0.5$ tenemos 4 puntos de equilibrio, los estable son 0.6 y 7.3, inestables 0 y 2.
- $r \approx 0.56$ tenemos tres otra vez. El único estable es 7.724, el 1.14 es inestable, el 0 es inestable. En este par (r, q) tenemos bifurcación.
- $r = 0.645$ tenemos otra vez dos. El único estable es 8.11, 0 es inestable.

Además del 0 podemos tener más puntos de equilibrio (uno, dos o tres) según las curvas se intersecan o son tangentes.

Plano rq Dibujamos la curva parametrizada de los puntos de bifurcación, $[2t^3/(t^2-1), 2t^3/(t^2+1)^2]$. La curva que no es continua en $t=1$ nos divide la región en dos regiones donde pasamos de dos a cuatro puntos de equilibrio y se tendrá tres puntos de equilibrio sobre la curva.

Gráfico de Hysterisis

Podemos seguir el gráfico de cual es el valor de la puntuación en el punto de equilibrio estable. Si fijamos un q vemos que según aumenta la r repentinamente aparece un punto de equilibrio estable mucho más alto. Además la región de atracción del punto menor es cada vez más pequeña por lo que, según r va aumentado, se produce un repentino salto en la población. Cuando ya nos encontramos en la región de atracción del punto plaga, aunque volvamos a disminuir la r, seguimos en la región de atracción del punto plaga. Tenemos que disminuir mucho más el r para entrar en la región de atracción del punto refugio.

La histéresis es la tendencia a conservar una de sus propiedades, en ausencia del estímulo que la ha generado.

Interpretación

- u_1 el primer punto de equilibrio es el equilibrio refugio.
- u_3 es el equilibro plaga.

Logicamente el objetivo es ajustar los parámetros para evitar el equilibrio plaga. Existen varias opciones, insecticidas, nuevos depredadores, esterilizaciones, modificar el bosque.
Sistemas más complejos tienen en cuenta más variables que varían más despacio. Por ejemplo el espacio para las larvas y las reservas de energía para las polillas.