TEMA 1 | TEORÍA DE REDES LINEALES

Múltiplos y submúltiplos

T → 10^{12}	μ → 10^{-6}
G → 10^{9}	n → 10^{-9}
M → 10^{6}	p → 10^{-12}
K → 10^{3}	f → 10^{-15}
m → 10^{-3}	a → 10^{-18}

Magnitudes

Potencia → vatio (W)
Inductancia → henrio (H)
Capacidad → faradio (F)
Carga → culombio (C)
Voltaje → voltio (V)
Intensidad → amperio (A)
(Corriente)
Resistencia → ohmio (Ω)

$$\boxed{V = R \cdot I}$$

$$\underbrace{1\,A}_{\text{amperio}} = \frac{1\,C \;(\text{culombio})}{1\,s \;(\text{segundo})} \Rightarrow I = \frac{Q}{t}$$

$$\boxed{V = L \cdot \frac{dI}{dt}}$$

$$\underbrace{1\,H}_{\text{henrio}} = 1\,V\,(\text{voltio}) \cdot \frac{1\,s \;(\text{segundo})}{1\,A \;(\text{amperio})}$$

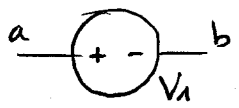
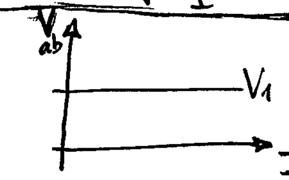
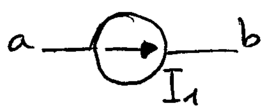
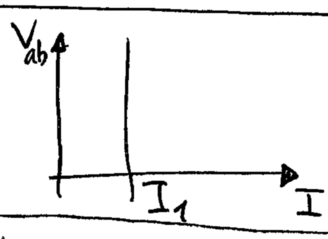
$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \rightarrow \underbrace{1\,F}_{\text{faradio}} = \frac{1\,C \;(\text{culombio})}{1\,V \;(\text{voltio})}$$

Resistencia
Condensador
Inductancia
} Pasivos

F. Alimentación/es → Activos

Tipos de elementos ideales

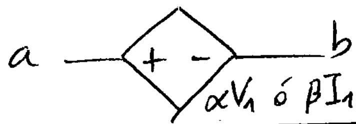
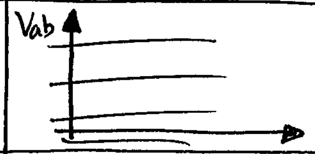
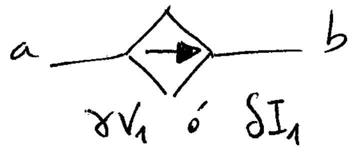
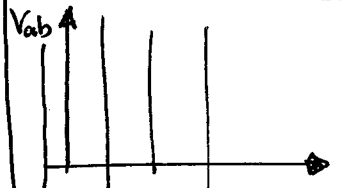
Activos: pueden ceder energía al circuito.

Tipo	Nombre	Símbolo	V-I
independientes	Fuente de tensión		
	Fuente de corriente		

▶ El valor de la corriente en una fuente de tensión depende del circuito en que se encuentre.

▶ El valor de la tensión entre los terminales de una fuente de corriente depende del circuito en que se encuentre.

- FUENTES
  - Independientes
    - de tensión
    - de corriente
  - Dependientes (o gobernadas)
    - de tensión
    - de corriente

Tipo	Nombre	Símbolo	V-I
Dependientes	Fuente de tensión		
	Fuente de corriente		

$V_{ab} = \alpha V_1$ ó $V_{ab} = \beta I_1$

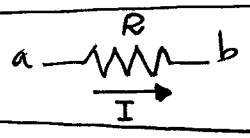
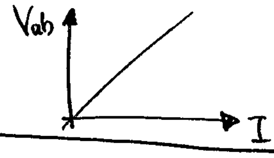
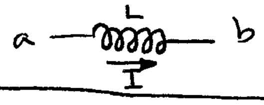
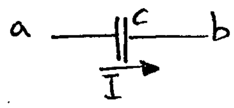
$I = \gamma V_1$ ó $I = \delta I_1$

▶ V_1 ó I_1, tensión o corriente en algún pto. del circuito.

▶ α, β, γ y δ son constantes con las dimensiones apropiadas.

▶ A diferencia de las independientes, tanto el valor de la tensión como el de la corriente, depende del circuito en que se encuentre.

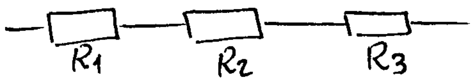
Pasivos: no pueden ceder energía al circuito.

TIPO	NOMBRE	SÍMBOLO	V-I
Impedancias	Resistencia		
	Bobina		$V_{ab} = L \cdot \frac{dI(t)}{dt}$
	Condensador		$I = C \cdot \frac{dV_{ab}(t)}{dt}$ (*)

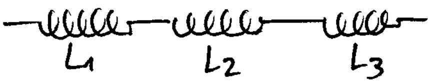
(*) $C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C \cdot V$

$$\frac{dQ}{dt} = I = C \cdot \frac{dV(t)}{dt}$$

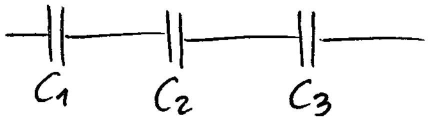
- **Asociación en serie de elementos pasivos** (Equivalencia)

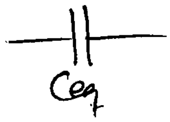


$$R_{eq} = \sum_K R_K$$



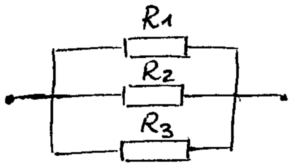
$$L_{eq} = \sum_K L_K$$

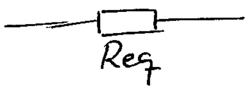




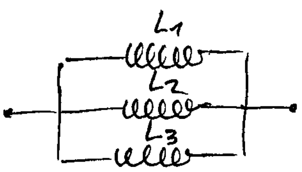
$$C_{eq} = \left(\sum_K \frac{1}{C_K}\right)^{-1}$$

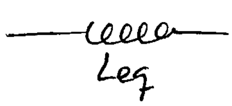
- **Asociación en paralelo de elementos pasivos** (Equivalencia)



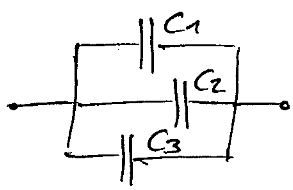


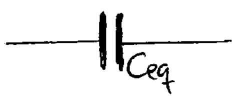
$$R_{eq} = \left(\sum_K R_K\right)^{-1}$$





$$L_{eq} = \left(\sum_K L_K\right)^{-1}$$





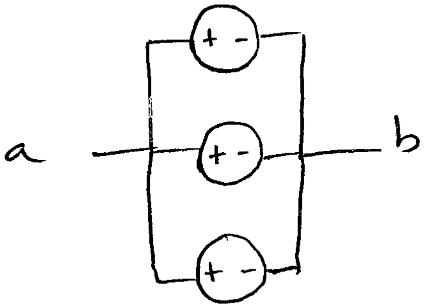
$$C_{eq} = \sum_K C_K$$

- Asociaciones en <u>serie</u> y <u>paralelo</u> de <u>Fuentes de tensión</u>

$V_{eq} = V_1 - V_2 + V_3$

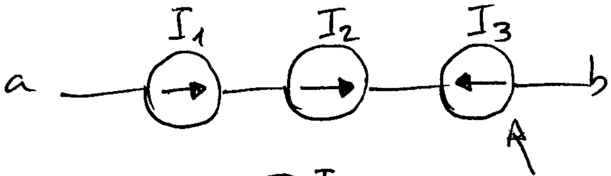
$V_{eq} = \sum_k V_k$

(*) → Suma algebraica
Cuidado direcciones

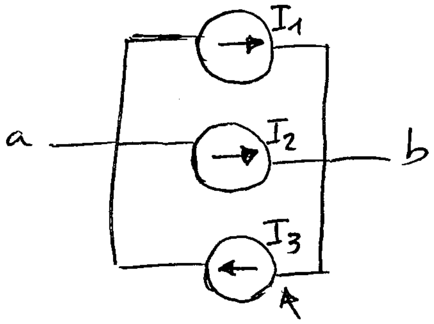


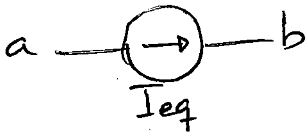
¡EXPLOTA!

- Asociaciones en <u>serie</u> y <u>paralelo</u> de <u>Fuentes de corriente</u>



¡EXPLOTA!





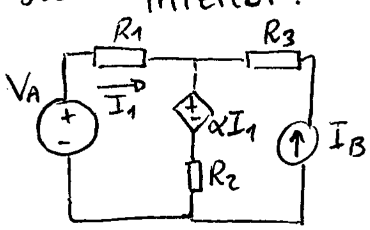
$I_{eq} = I_1 + I_2 - I_3$

$I_{eq} = \sum_k I_k$

(*) → Suma algebraica!
cuidado direcciones

<u>Otros elementos</u>: Conexiones

- Nodo: pto. donde se unen tres o más elementos.
- Rama: porción de circuito entre dos nodos que no pasa por un tercer nodo.
- Lazo cerrado: recorrido en un circuito que parte y acaba en el mismo punto.
- Malla: lazo cerrado que no contiene otros lazos cerrados en su interior.



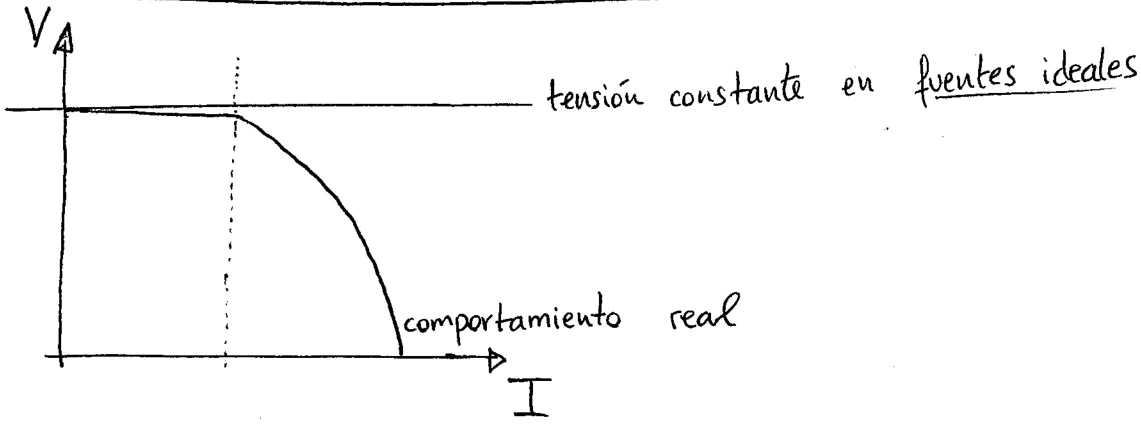
- 2 nodos
- 3 ramas
- 3 lazos cerrados
- 2 mallas

$$\boxed{m = r - n + 1}$$

m → mallas, r → ramas, n → nodos

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^1 i(t)\cdot v(t)\,dt}$$

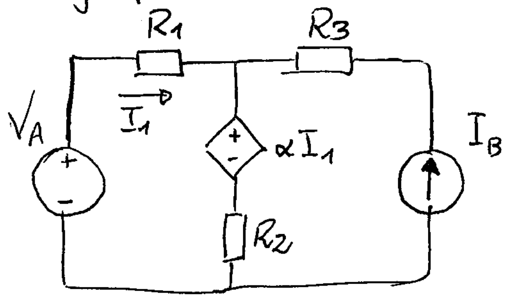
ELEMENTOS REALES EN CIRCUITOS REALES



ANÁLISIS DE UN CIRCUITO

→ Determinación de las corrientes y tensiones en el mismo.

Ejemplo de análisis



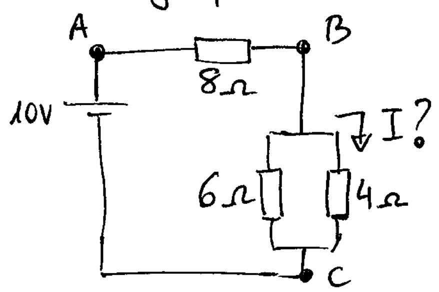
Se conocen V_A, I_B, R_j y α. Pero no I_1, I_{R2} ni V_{IB}

¿cómo deducir las magnitudes desconocidas

→ MEDIANTE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

→ APLICANDO MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE ANÁLI

Ejemplo



$Req_{T_0}? \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{10}{24}$

$Req = \frac{24}{10} = 2'4\ \Omega$

$R_T = 8\Omega + 2'4\Omega = 10'4\ \Omega$

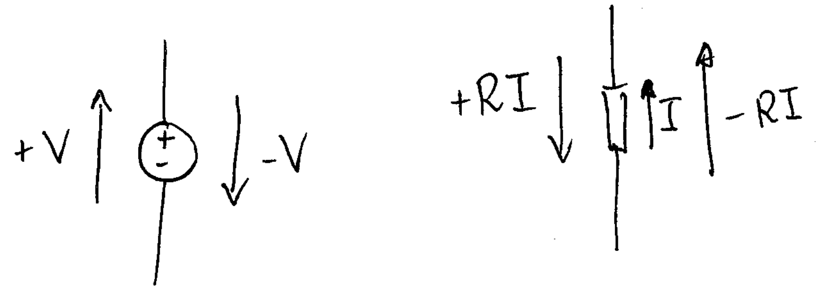
$I_T = \frac{10V}{10'4\Omega} = 0'962\ A$

$V_{AB} = 8\Omega \cdot 0'962 = 7'692\ V$

$V_{BC} = 10 - 7'692 = 2'308\ V$

$I? = \frac{2'308V}{4\Omega} = \boxed{0'577\ A}$

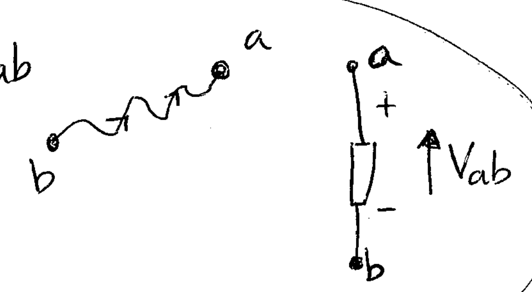
- De la PRIMERA LEY DE KIRCHOFF (1ª LK) podemos sacar n-1 ecuaciones independientes, siendo n = nº de nodos.
- De la SEGUNDA LEY DE KIRCHHOFF (2ª LK) podemos sacar m ecuaciones independientes, siendo m = nº de mallas.



<u>MÉTODO DE TENSIONES DE NODOS</u>: utiliza la L.K.N.

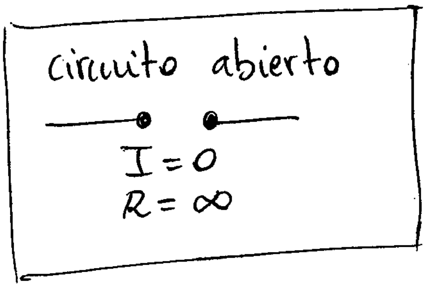
- Se elige un nodo como origen de tensiones (V=0), y se etiquetan los restantes.
- Se asignan corrientes a todas las ramas del circuito.
- Mediante la L.K.N. se plantean n-1 ecuaciones de nodo, siendo n = nº de nodos.
- Se expresan las ecuaciones en función de las tensiones de nodo usando la L. Ohm.
- Si el sistema es indeterminado (porque hay fuentes dependientes), se buscan relaciones "adicionales" en el propio circuito y se resuelve el sistema (obtención de las tensiones de nodo).

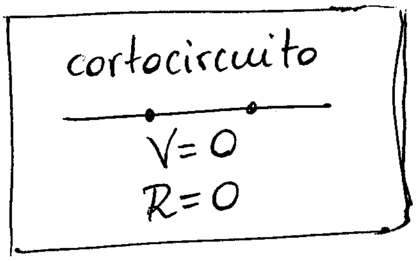
OJO: Vab



MÉTODO DE CORRIENTES DE MALLAS: utiliza la L.K.M.

- Se asigna una "corriente de malla" a cada malla. Una rama perteneciente a dos mallas estará recorrida por dos "corrientes de malla"
- Mediante la L.K.M. se plantean m ecuaciones de malla, con m = nº de mallas.
- Se expresan las ecuaciones en función de las corrientes de malla usando la L. Ohm.
- Si el sistema de ecuaciones es indeterminado, se buscan relaciones "adicionales" en el circuito y se resuelve el sistema (obtención de las corrientes de malla)





PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

En aquellos fenómenos físicos en los que causa y efecto están linealmente relacionados, el efecto total de varias causas actuando simultáneamente es equivalente a la suma de los efectos de cada causa actuando individualmente.

En circuitos electrónicos $\begin{cases} \text{causas} \Longleftrightarrow \text{fuentes independientes} \\ \text{efectos} \Longleftrightarrow \text{tensiones y corrientes que producen} \end{cases}$

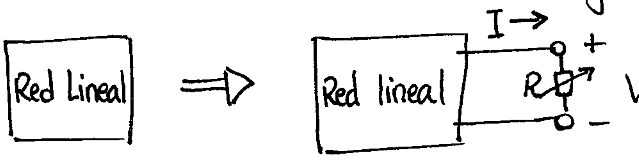
- Este teorema puede usarse con cualquiera de los métodos anteriores.
- Es especialmente útil en algunos circuitos de corriente alterna.

¡Atención!

- Las fuentes dependientes no se deben anular, pues no son causas.
- No olvidar que la corriente por un cortocircuito puede tomar cualquier valor, mientras que la corriente por un circuito abierto es nula.
- Las ecuaciones de un circuito parcial no son válidas para el o los otros, pues la topología de ambos circuitos es diferente.

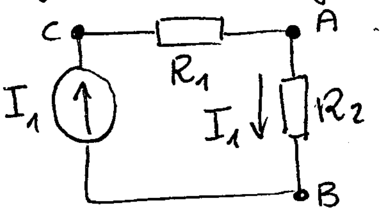
CIRCUITOS DE DOS TERMINALES

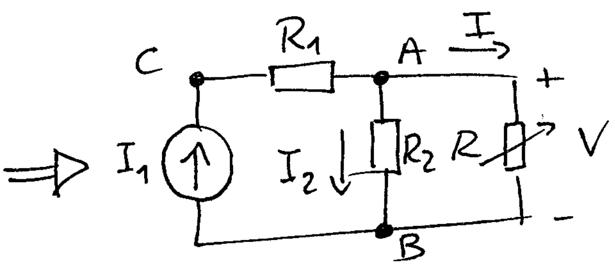
¿Qué ocurre si en una red o circuito lineal conectamos entre dos puntos una resistencia adicional y hacemos variar su valor?



- Las corrientes y tensiones dentro de la red lineal variarán con el valor de R.
- Se establecerá una corriente I por la resistencia, y la caída de tensión V entre sus terminales será función de ella.
- A la relación V-I así obtenida se le denomina <u>ecuación característica</u> del circuito, y a su representación gráfica, <u>curva característica</u>.

Ejemplo: ecuación característica del circuito de la figura, dados A y B.

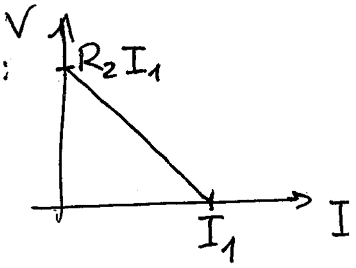




L.K.N. $I_1 = I_2 + I \Rightarrow I_1 - I_2 - I = 0 \Rightarrow I_1 - \frac{V}{R_2} - I = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V(I) = R_2 I_1 - R_2 I}$$

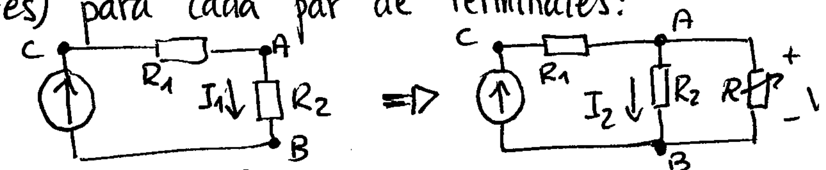
curva característica:



- En circuitos con varias posibilidades de elección de los terminales, se obtendrán distintas ecuaciones características (= circuitos equivalentes) para cada par de terminales:

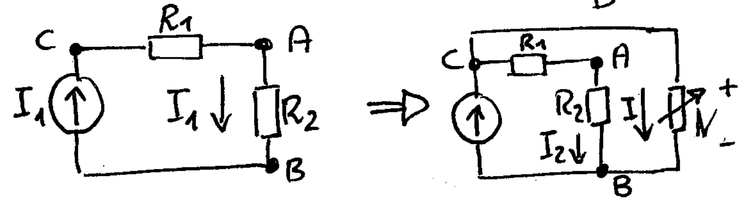
- tomando A y B

  $V(I) = R_2 I_1 - R_2 I$



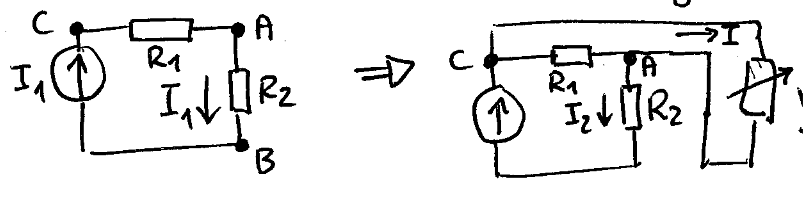
- tomando C y B

  $V(I) = (R_1 + R_2) I_1 - (R_1 + R_2) I$



- tomando C y A

  $V(I) = R_1 I_1 - R_1 I$



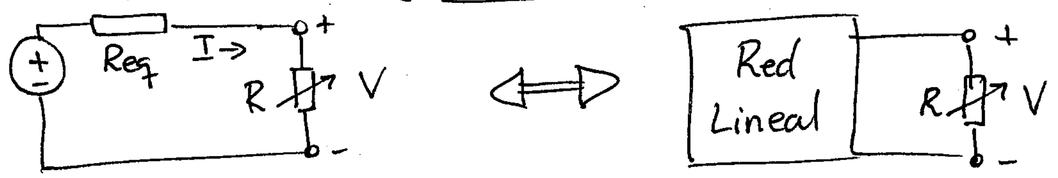
- Observar que la relación obtenida es de la forma $V(I) = A - B.I$, este resultado es general para toda red lineal, por ser combinación de elementos lineales.

- La constante "A" ($[A] = V$) corresponde a la situación en que $I = 0$ (R no conectada o de valor infinito, circuito abierto) y recibe el nombre de <u>TENSIÓN DE THÉVENIN</u>, V_{Th}

- La constante "B" ($[B] = \Omega$) recibe el nombre de resistencia equivalente, R_{eq}.

$$\boxed{V(I) = V_{Th} - R_{eq}.I}$$

(*) Todo circuito lineal se comporta de la misma manera que un circuito formado por una fuente de tensión en serie con una resistencia (<u>TEOREMA DE THÉVENIN</u>).

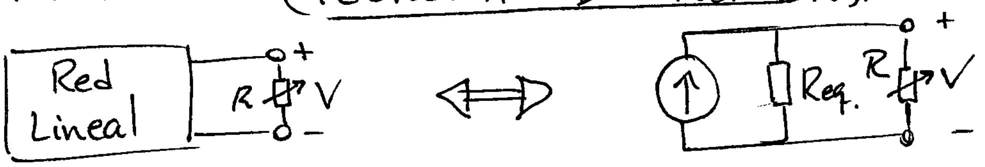


- Si se intercambian las variables dependiente e independiente, la relación es de la forma $I(V) = C - DV$, este resultado es también general para toda red lineal.
- La constante "C" ($[C] = A$) corresponde a la situación en que $V = 0$ ($R = 0$, o sea terminales en "cortocircuito" - cable entre ellos), y recibe el nombre de <u>CORRIENTE DE NORTON</u>, I_n.

- La constante "D" ($[D] = \Omega$) es $D = B^{-1} = R_{eq}^{-1}$.

$$\boxed{I(V) = I_N - R_{eq}^{-1}.V} \qquad \boxed{V_{Th} = I_N.R_{eq}}$$

Todo circuito lineal se comporta de la misma manera que un circuito formado por una fuente de corriente en paralelo con una resistencia (<u>TEOREMA DE NORTON</u>).



OBTENCIÓN DE LOS CIRCUITOS EQUIVALENTES DE THÉVENIN Y NORTON DE UNA RED LINEAL

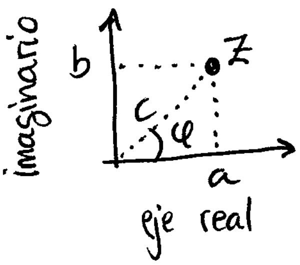
1) Identificando términos una vez obtenida la ecuación característica.

2) Imponiendo en el circuito las condiciones de circuito abierto (tensión V_{Th}) y de cortocircuito (para I_N), y utilizando la relación entre ellas para obtener R_{eq}.

- Si el circuito no tiene fuentes dependientes, se puede obtener R_{eq} anulando las fuentes independientes y calculando el equivalente de la asociación de resistencias visto desde esos dos puntos.

- En cualquier circuito se puede obtener R_{eq} anulando las fuentes independientes, conectando una fuente de prueba externa (entre los terminales a y b) y hallando el cociente entre la tensión que aplica dicha fuente y la corriente que suministra.

NÚMEROS COMPLEJOS



parte real; parte imaginaria; módulo; argumento

$$\boxed{a + bj = c(\cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi) = c \cdot e^{j\varphi}}$$

CARTESIANA — TRIGONOMÉTRICA — POLAR

$c\,(\text{módulo}) = \sqrt{a^2+b^2} \equiv |a+bj|$; $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$

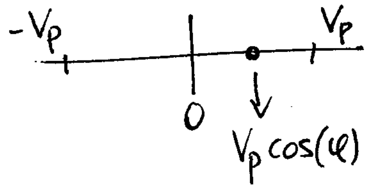
$$\begin{cases} \cos\varphi = \mathrm{Re}\{e^{j\varphi}\} \rightarrow a = c\cdot\cos\varphi \\ \mathrm{sen}\,\varphi = \mathrm{Im}\{e^{j\varphi}\} \rightarrow b = c\cdot\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

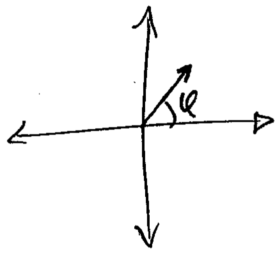
complejo conjugado de $z = \bar{z} = z^* = a - bj = c \cdot e^{-j\varphi} \Rightarrow z\cdot\bar{z} = |z|^2$

Observación: sea F un número complejo de la forma $F = \frac{A \cdot B}{C \cdot D}$

$|F| = \frac{|A|\cdot|B|}{|C|\cdot|D|}$; $\varphi(F) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(C) - \varphi(D)$

$$v(t) = V_p \cdot \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow V_c(t) = V_p \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$





$$V_c(t) = \underbrace{V_p \cdot e^{j\varphi}}_{= \mathcal{V}} \cdot e^{j\omega t}$$

$\mathcal{V}$ (fasor de tensión)

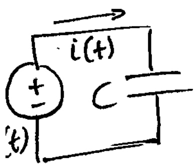
$$\mathcal{V} = V_p \cdot e^{j\varphi}$$

$$v(t) = Re\{V_c(t)\} \longleftarrow V_c(t) = \mathcal{V} \cdot e^{j\omega t}$$

En el espacio complejo, y con funciones con dependencia temporal $e^{j\omega t}$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\mathcal{V} \cdot e^{j\omega t}\right] = j\omega \cdot \mathcal{V} \cdot e^{j\omega t} \\ \displaystyle\int \mathcal{V} \cdot e^{j\omega t}\, dt = \dfrac{1}{j\omega} \cdot \mathcal{V} \cdot e^{j\omega t} \end{cases}$$

- Circuito capacitivo de señal alterna:



$$V(t) = V_p \cdot \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow V_c(t) = \underbrace{V_p \cdot e^{j\varphi}}_{= \mathcal{V}} \cdot e^{j\omega t} = \mathcal{V} \cdot e^{j\omega t}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dV}{dt} \longrightarrow i_c(t) = C \cdot \frac{dV_c}{dt} = j\omega \cdot C \cdot V_c(t) = j\omega \cdot C \cdot V_p \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\underline{\mathcal{I}}} \cdot e^{j\omega t}$$

↳ fasor de intensidad $= j\omega C\, V_p\, e^{j\varphi}$

$$\frac{V_c(t)}{i_c(t)} = \frac{\mathcal{V} \cdot e^{j\omega t}}{\mathcal{I} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}} = \frac{V_p \cdot e^{j\varphi}}{j\omega C\, V_p \cdot e^{j\varphi}} = \boxed{\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} \equiv Z_c}$$

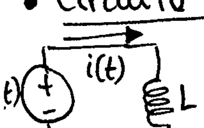
↳ IMPEDANCIA CONDENSADOR

Mediante la ley de Ohm compleja $\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{I} \cdot Z}$

$$\begin{cases} |\mathcal{I}| = \dfrac{|\mathcal{V}|}{|Z_c|} = V_p \cdot \omega C \\ \varphi(\mathcal{I}) = \varphi(\mathcal{V}) - \varphi(Z_c) = \varphi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$i(t) = Re\{\mathcal{I} \cdot e^{j\omega t}\}$$

- Circuito inductivo de señal alterna:



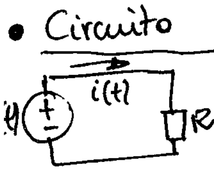
$$V(t) = V_p \cdot \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow V_c(t) = \mathcal{V} \cdot e^{j\omega t}\ ; \quad i_c(t) = \mathcal{I} \cdot e^{j\omega t}$$

$$V(t) = L \cdot \frac{dI}{dt} \longrightarrow \mathcal{V} \cdot e^{j\omega t} = L j\omega \mathcal{I} \cdot e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}} = j\omega L \equiv Z_L}$$

IMPEDANCIA BOBINA

$$\begin{cases} |\mathcal{I}| = \dfrac{|\mathcal{V}|}{|Z_L|} = \dfrac{V_p}{\omega L} \\ \varphi(\mathcal{I}) = \varphi(\mathcal{V}) - \varphi(Z_L) = \varphi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Circuito resistivo de señal alterna:



$$V(t) = V_p \cdot \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow V_c(t) = \mathcal{V} \cdot e^{j\omega t}\ ; \quad i_c(t) = \mathcal{I} \cdot e^{j\omega t}$$

$$V(t) = R \cdot I(t) \longrightarrow \mathcal{V} = R \cdot \mathcal{I} \longrightarrow \boxed{R = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{I}}}$$

IMPEDANCIA RESISTENCIA

LEY DE OHM GENERALIZADA

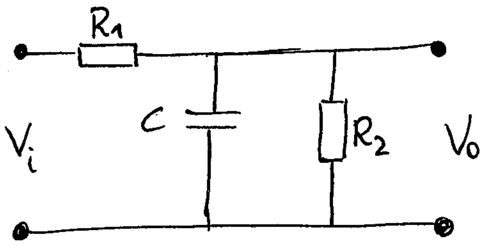
$$\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{I} \cdot Z_{eq}}$$

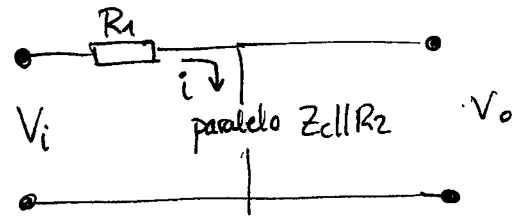
BOBINAS Y CONDENSADORES EN CONTINUA $(f=0 \Rightarrow \omega = 2\pi f = 0)$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \begin{cases} \xrightarrow{\omega \to 0} Z_C \to \infty \text{ (circuito abierto)} \\ \xrightarrow{\omega \to \infty} Z_C \to 0 \text{ (cortocircuito)} \end{cases}$$

$$Z_L = j\omega L \begin{cases} \xrightarrow{\omega \to 0} Z_L \to 0 \text{ (cortocircuito)} \\ \xrightarrow{\omega \to \infty} Z_L \to \infty \text{ (circuito abierto)} \end{cases}$$

Ejemplo 1





$$V_o = i\left(R_2 \| Z_c\right)$$

$$V_i = i\left(R_1 + (R_2 \| Z_c)\right)$$

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \frac{i(R_2\|Z_c)}{i(R_1+(R_2\|Z_c))} = \frac{R_2\|Z_c}{R_1+R_2\|Z_c} = \frac{\left(\frac{1}{R_2}+j\omega C\right)^{-1}}{R_1+\left(\frac{1}{R_2}+j\omega C\right)^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+j\omega C R_1}$$

$$= \frac{R_2}{R_1+R_2+j\omega C R_1 R_2} = \frac{R_2/(R_1+R_2)}{1+j\omega\frac{CR_1R_2}{R_1+R_2}} =$$

$$\boxed{\omega_1 = \left(\frac{CR_1R_2}{R_1+R_2}\right)^{-1} \equiv 2\pi \underbrace{f_1}_{\text{despejamos}}}$$

$$= \frac{0'1}{1+j\frac{f}{f_1}}$$

$$|A_v|_{dB} = \underbrace{20\log_{10} 0'1}_{-20\,dB} - 20\log_{10}\left[1+\frac{f^2}{f_1^2}\right]^{1/2} =$$