$\boxed{1}$

① $|x+1| > 3$

$x+1 > 3 \Rightarrow x > 2$

$-x-1 > 3 \rightarrow x < -4$

$|x+1| > 3$ en $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$

② $|2x+1| < 1$

$2x+1 < 1 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$

$-2x-1 < 1 \Rightarrow -2x < 2 \Rightarrow x > -1$

$|2x+1| < 1$ en $(-1, 0)$

③

Apuntes

④ $x^2 - 4x + 6 < x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4.6}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$+ \quad 2 \quad - \quad 3 \quad +$

$x(1) = 1 - 5 + 6 = 2$

$x(2'5) = -$

$x(4) = 16 - 20 + 6 = 2$

$x^2 - 5x + 6 < 0$ en $(2, 3)$

⑤ $|x^2 - 3| \leq 1$

$x^2 - 3 \leq 1 \Rightarrow x \leq \sqrt{4} \Rightarrow x \leq \pm 2$

$-x^2 + 3 \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x \geq \pm\sqrt{2}$

$-2 \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad 2$

$x(-3) = 6$ $\quad x(0) = 3$ $\quad x(3) = 6$

$x(-1'5) = 0'75$ $\quad x(1'5) = 0'75$

$|x^2 - 3| \leq 1$ en $[-2, -\sqrt{2}] \cup$

$\cup [\sqrt{2}, 2]$

$\boxed{2.}$

1) $*\ \boxed{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}} \stackrel{!}{=} P(n)$

A - Parte izda $(*)$ para $P(1)=1$

Parte dcha $(*)$ para $P(1)=\frac{1.(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$ ✓

B) Suponiendo que $P(n)$ es cierto (~~principio~~ hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ también es cierto.

$$\underbrace{1+2+\cdots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)+2n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(n+1)+2n+2=(n+1)(n+2) \Rightarrow n^2+n+2n+2=n^2+3n+2=$$

$$=(n+1)(n+2)$$

$$n=\frac{-3\pm\sqrt{9-4.2}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}= \begin{cases} n_1=-1 \\ n_2=-2 \end{cases}$$

~~Pato~~ Por lo tanto: $n^2+3n+2=(n+1)(n+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Por lo que podemos afirmar que $P(n)$ es cierto para todos los números naturales.

2) * $\boxed{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \equiv P(n)$

A- Parte izda. (*) para $P(1) = 1^2 = 1$

Parte dcha (*) para $P(1) = \dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = \dfrac{2.3}{6} = 1$

B- Suponiendo que $P(n)$ es cierto (~~principio~~ hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ también es cierto.

$$\underbrace{1^2+2^2+\cdots+n^2}_{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2 = (n+1)(n+2)(2n+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n^2+n)(2n+1) + 6(n^2+2n+1) = (n+1)(n+2)(2n+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6 = (n+1)(n+2)(2n+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}_{\downarrow \text{ RUFINI}} = (n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 9 & 13 & 6 \\
-1 & & -2 & -7 & -6 \\
\hline
 & 2 & 7 & 6 & \boxed{0} \\
-2 & & -4 & -6 & \\
\hline
 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Por lo tanto: $2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = (n+1)(n+2)(2n+3)$

$\Rightarrow$ Por lo que podemos afirmar que $P(n)$ es cierto para todos los números naturales.

3) $* \boxed{1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2} \equiv P(n)$

$*$ $1+2+ - + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$(1+2+ - +n)^2 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$1^2+2^2+ - +n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

A) Parte izda. $(*) = 1^3 = 1$
Parte dcha $(*) = 1^2 = 1$ ✓

B) Suponiendo que $P(n)$ es cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ también es cierto.

$$\underbrace{1^3+2^3+ - +n^3}_{(1+2+ - +n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2} + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}\right)^2$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

$$\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n^2+2n+n+2}{2}\right)^2$$

$$\frac{n^4+2n^3+n^2}{4} + n^3+3n^2+3n+1 = \frac{(n^2+2n+n+2)^2}{4}$$

$$n^4+2n^3+n^2+4n^3+12n^2+12n+4 = (n^2+2n+n+2)(n^2+2n+n+2)$$

$$n^4+6n^3+12n^2+12n+4 = n^4+2n^3+n^3+2n^2+2n^3+4n^2+2n^2+4n+ \\ + n^3+2n^2+n^2+2n+2n^2+4n+2n+4$$

$$n^4+6n^3+13n^2+12n+4 = n^4+6n^3+13n^2+12n+4$$

$\Rightarrow$ Por lo tanto, podemos afirmar que $P(n)$ es cierto para todos los números naturales.

4) $\boxed{1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2}$ $\stackrel{!}{=} P(n)$ (*)

A) Parte izda. (*) $= 2.1 - 1 = 1$
Parte dcha. (*) $= 1^2 = 1$ ✓

B) Suponiendo que $P(n)$ es cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ también es cierto.

$$1 + 3 + \text{—} + (2n-1) + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2$$

$$1 + 3 + \text{—} + (2n-1) + (2n+2-1) = (n+1)^2$$

$$\underbrace{1 + 3 + \text{—} + (2n-1)}_{n^2} + (2n+1) = (n+1)^2$$

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

$$n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$$

Por lo tanto, queda demostrado que para $P(n+1)$ también es cierto y, por consiguiente, podemos afirma que $P(n)$ se cumple para todos los números naturales

8) $\boxed{4(1+5+5^2+\dots+5^n)+1=5^{n+1}} \stackrel{?}{\equiv} P(n)$

$$\parallel\!\!|$$

$$* \boxed{1+5+5^2+\dots+5^n = \frac{5^{n+1}-1}{4}} \equiv P(n)$$

A) Parte izda. (*) para $P(1)$: $1+5^1=6$

Parte dcha. (*) para $P(1)$: $\frac{5^2-1}{4}=\frac{24}{4}=6$ ✓

B) Suponiendo que $P(n)$ es cierto (hipótesis de inducción) vamos a demostrar que $P(n+1)$ también es cierto.

$$\underbrace{1+5+5^2+\dots+5^n}_{\frac{5^{n+1}-1}{4}}+5^{n+1}=\frac{5^{n+1+1}-1}{4}$$

$$\frac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$$

$$5^{n+1}-1+4(5^{n+1})=5^{n+2}-1$$

$$5.5^n \cancel{-1}+4.5.5^n=5^2.5^n\cancel{-1}$$

$$5.5^n+20.5^n=25.5^n$$

$$\Downarrow \quad 5x+20x=25x \quad [5^n \text{ podemos considerarlo como } x]$$

$$25.5^n=25.5^n$$

Por lo tanto, queda demostrado que para $P(n+1)$ es cierto y, por consiguiente, queda validada la veracidad de $P(n)$.

7) $n=0$ puntos $\Rightarrow$ 0 rectas

$n=1$ punto $\Rightarrow$ añades $n-1$ rectas $= 1-1=0$ rectas

$n=2$ puntos $\Rightarrow$ añades $n-1$ rectas $= 2-1=1$ recta } 1 recta

$n=3$ puntos $\Rightarrow$ añades $n-1$ rectas $= 3-1=2$ rectas } 3 rectas

$n=4$ puntos $\Rightarrow$ añades $n-1$ rectas $= 4-1=3$ rectas } 6 rect

$\vdots$

$$(*)\ \boxed{1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)} \equiv P(n)$$

A) Parte izda. $(*)$ para $P(1) = 1-1=0$ ✓

Parte dcha $(*)$ para $P(1) = \frac{1}{2}\cdot 1(1-1) = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 0 = 0$

B) Suponiendo $P(n)$ cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ es cierto.

$$1+2+3+\text{—}+(n-1)+(n+\cancel{1}-\cancel{1}) = \frac{1}{2}(n+1)(n+\cancel{1}-\cancel{1})$$

$$\underbrace{1+2+3+\text{—}+(n-1)}_{\overset{\text{H.I.}}{=}\ \frac{1}{2}n(n-1)} + n = \frac{1}{2}(n+1)\cdot n$$

$$\frac{1}{2}n(n-1)+n = \frac{1}{2}(n+1)\cdot n$$

$$\frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n} + \frac{n}{n} = \frac{1}{2}(n+1)$$

$$\frac{1}{2}(n-1)+1 = \frac{1}{2}(n+1) \Rightarrow \frac{1}{2}n - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{1} = \frac{1}{2}n + \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n \ ✓$$

Por lo tanto, queda demostrado que $P(n+1)$ es cierto, lo que afirma la veracidad de $P(n)$.

11) $\boxed{n(n^2+5) = 6K} \equiv P(n)$

A) Comprobamos para $P(1)$

$1(1+5) = 6$ ✓ (6 divisible entre 6)

B) Suponiendo $P(n)$ cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ es también cierto.

$$(n+1)\left((n+1)^2+5\right) = (n+1)\left(n^2+2n+1+5\right) = (n+1)\left(n^2+2n+6\right) =$$

$$= n^3+2n^2+6n+n^2+2n+6 = 6+n^3+5n+3n^2+3n =$$

$$= 6+n(n^2+5)+3(n^2+n) = \underbrace{6}_{\text{6 divisible entre 6}} + \underbrace{n(n^2+5)}_{\text{Hemos supuesto que esto es divisible entre 6 en la hipótesis de inducción}} + \underbrace{3(n(n+1))}_{\text{Tenemos un 3 multiplicando a una multiplicación de un número natural por su siguiente, lo que es una multiplicación de un número par por uno impar. El resultado es 3 por un número natural par, lo que nos indica que el nº se puede factorizar en 2 y 3 (por lo menos), lo que supone que sea divisible entre 6.}}$$

Por lo tanto, queda demostrado que $P(n+1)$ es cierto, lo que corrabora la veracidad de $P(n)$.

10) $n \neq 4m$; (*) $\boxed{1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 10K} \stackrel{!}{=} P(n)$

A) Comprobamos para $n = 1, 2, 3$

$n=1$; $1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 = 10$; $K = 1$ ✓

$n=2$; $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$; $K = 3$ ✓

$n=3$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$; $K = 10$ ✓

B) Suponiendo $P(n)$ cierto, (hipótesis de inducción) vamos a demostrar que para $P(n+4)$ también se cumple. Para ello restaremos $P(n+4) - P(n)$ porque si a un múltiplo de 10 le restamos otro múltiplo de 10 (hipótesis de inducción), el resultado será también múltiplo de 10.

$$P(n+4) = 1^{n+4} + 2^{n+4} + 3^{n+4} + 4^{n+4} = 10K$$

$$1 + 2^4 . 2^n + 3^4 . 3^n + 4^4 . 4^n = 10K$$

$$P(n+4) - P(n) = \cancel{1} - \cancel{1} + 2^4 . 2^n - 2^n + 3^4 . 3^n - 3^n + 4^4 . 4^n - 4^n = 10K =$$

$$= 2^n (2^4 - 1) + 3^n (3^4 - 1) + 4^n (4^4 - 1) =$$

$$= 15 . 2^n + 80 . 3^n + 255 . 4^n = 15 . 2^n + 80 . 3^n + 255 . (2^2)^n$$

$$\underbrace{15 . 2^n}_{15 = 5 \cdot 3} + \underbrace{80 . 3^n} + \underbrace{255 . 2^{2n}} = 10K \ ?$$

$15 = 5 \cdot 3$ Es múltiplo de 10 porque contiene los factores 5 y 2.

80 es múltiplo de 10

255 es múltiplo de 5, el cual está multiplicado por 2^{2n}, por lo que también es múltiplo de 10.

Por lo tanto, queda demostrada la veracidad de $P(n+4)$ y, por consiguiente, también la de $P(n)$.

12) (*) $\underbrace{1 + 1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + (n-1)(n-1)! = n!}_{P(n)}$; $n \geq 2$

A) Parte izda. (*) para $P(2) = 1 + (2-1)(2-1)! = 2$

Parte dcha. (*) para $P(2) = 2! = 2$ ✓

B) Suponiendo que $P(n)$ es cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ también lo es.

$$\underbrace{1 + 1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + (n-1)(n-1)!}_{\overset{\shortparallel}{n!} \text{ (hipótesis de inducción)}} + n.n! = (n+1)!$$

$$n! + n.n! = (n+1)! \implies n!(n+1) = (n+1)!$$

$$\begin{cases} (n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\ (n+1) \cdot n! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \end{cases}$$ ✓

Por lo tanto $P(n+1)$ se cumple y por consiguiente también lo hace $P(n)$ $\forall n \geq 2$.

$\boxed{5.}$ (*) $\boxed{1 + r + r^2 + \text{—} + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}} \overset{!}{\equiv} P(n) \quad ; \; r \neq 1$

A) Parte izda. (*) para $P(1) = 1 + r$

Parte dcha (*) para $P(1) = \dfrac{1 - r^2}{1 - r} = \dfrac{\cancel{(1-r)}(1+r)}{\cancel{1-r}} = 1 + r$ ✓

B) suponiendo $P(n)$ cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ también es cierto.

$$\underbrace{1 + r + r^2 + \text{—} + r^n}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}} \text{ (H.I)}} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$

$$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$

$$\frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{\cancel{1 - r}} = \frac{1 - r^{n+2}}{\cancel{1 - r}}$$

$$1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r) = 1 - r^{n+2}$$

$$1 \cancel{- r^{n+1}} + \cancel{r^{n+1}} - r^{n+2} = 1 - r^{n+2}$$

$$1 - r^{n+2} = 1 - r^{n+2} \quad ✓$$

Por lo tanto, queda demostrado $P(n+1)$, y por lo tanto $P(n)$ también es cierto.

$\boxed{6.}$ (*) $\underline{(1+x)^n \geq 1 + nx} \stackrel{.}{\equiv} P(n) \quad \forall x \geq -1$

A) Parte izda. (*) para $P(1)$: $(1+x)^1 = 1+x$

Parte dcha. (*) para $P(1)$: $1 + 1x = 1 + x$

$1+x \geq 1+x$? $\Longrightarrow$ Sí ✓

B) Suponiendo $P(n)$ cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ se cumple.

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

$$\underbrace{(1+x)^n}_{\stackrel{\shortparallel}{1+nx \ (H.I)}} \cdot (1+x) \geq 1 + x + nx$$

$$(1+nx)(1+x) \geq 1 + x + nx$$

$$\cancel{1+x+nx} + nx^2 \geq \cancel{1+x+nx}$$

$$nx^2 \geq 0 \quad ✓$$

Por lo tanto, $P(n)$ queda demostrado como cierto para todo n natural y $\forall x \geq -1$.

7. $a, b \geq 0$; $a \leq b$

$$\boxed{a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b}$$

<u>1ª PARTE</u> : $a \leq \sqrt{ab}$

$a \leq \sqrt{ab} \Rightarrow a^2 \leq ab \Rightarrow a.a \leq ab$

Como $a \leq b \Rightarrow a.a \leq ab$

<u>2ª PARTE</u>: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow ab \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4ab \leq a^2+2ab+b^2 \Rightarrow \cancel{ab}+\cancel{ab}+ab+ab \leq aa+\cancel{ab}+\cancel{ab}+bb \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab+ab \leq aa+bb \Rightarrow 2ab \leq a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$; Como $a-b$ está elevado a 2, siempre es mayor o igual que cero.

<u>3ª PARTE</u> $\frac{a+b}{2} \leq b$

Si $a = b \Rightarrow \frac{b+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$

Pero como $a \leq b \Rightarrow \frac{a+b}{2} \leq b$

Por lo tanto; queda demostrado:

$$\boxed{\begin{array}{c} a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b \\ \forall b, a \geq 0 \ ; \ a \leq b \end{array}}$$