Cálculo Numérico I

1) Se consideran las matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 12 & 26 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 6 & 12 & 14 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -12 & 3 & -9 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar una descomposición $A = LU$ para la matrices A_1 y A_2.

b) Encontrar una descomposición con pivotaje (parcial) $PA = LU$ para la matrices A_3 y A_4.

2) Se consideran las matrices

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar la descomposición de Cholesky $A = CC^T$ de la matriz A_5.

b) Encontrar una descomposición $A_6 = LDL^T$, con L triangular inferior con 1's en la diagonal y D diagonal.

3) Demostrar lo siguiente:

a) Una matriz triangular es invertible si y sólo si los elementos en su diagonal son todos distintos de 0.

b) Si A y B son triangulares inferiores entonces también lo es AB.

c) Si A es triangular inferior e invertible entonces también lo es A^{-1}.

d) Lo anterior también es cierto para:

- matrices triangulares inferiores con 1's en la diagonal
- matrices triangulares superiores
- matrices triangulares superiores con 1's en la diagonal

Comentario: suponiendo que ya lo hemos demostrado para las inferiores, hay una "forma rápida" de probarlo para las superiores ¿cuál?

e) Probar que si la descomposición LU de una matriz existe entonces es única.

4) Demostrar las siguientes desigualdades entre normas y dar un ejemplo de vector o matriz (no nulos) para los cuales se alcance la igualdad:

a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{m}\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

b) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ y $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$ para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

5) Se considera el sistema lineal $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ no singular. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando la matriz A es:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Estudiar también, cuando ambos métodos converjan, cuál lo hace más rápido.

6) Sea $C = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Escribir las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver el sistema $Cx = y$ y demostrar que Jacobi converge si y solamente si Gauss-Seidel converge. ¿Se puede establecer alguna relación entre sus velocidades de convergencia?

7) Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Para resolver el sistema $Ax = b$ se usa el siguiente método iterativo:

$$Mx^{(k+1)} + Nx^{(k)} = b,$$

a) Encontrar condiciones sobre α, β y γ que garanticen la convergencia de la sucesión de iteradas $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ para todo $x^{(0)}$ y para todo b.

b) Si $\alpha = \beta = \gamma = -1$ ¿qué sucede?

c) Si $\alpha = \gamma = 0$ ¿es cierto que se necesitan tan sólo tres iteraciones para calcular la solución? Razonar la resupesta.

8) (*) Definimos la matriz N de tamaño $s \times s$ como

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Cuántos términos no nulos contiene el desarrollo $(\lambda I + N)^n = \lambda^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$?

b) Obtener la estimación $\|(\lambda I + N)^n\| \leq C n^{s-1} |\lambda|^{n-s+1} (1 + |\lambda|^{s-1})$, donde C sólo puede depender de s.

c) Demostrar que

$$|\lambda| < 1 \iff \|(\lambda I + N)^n\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

d) Sea $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$ una matriz cuadrada y sea $\rho(A)$ su radio espectral. Representando A en su forma de Jordan y aplicando el apartado anterior, demostrar que $\rho(A) < 1$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$.