CÁLCULO II.
1º DE GRADO EN MATEMÁTICAS Y DOBLE GRADO INFORMÁTICA-MATEMÁTICAS. Curso 2016-17.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Hoja 9

Superficies parametrizadas. Integrales sobre superficies. Teoremas de Stokes y Gauss.

1.- Hallar la ecuación del plano tangente a las siguientes superficies parametrizadas:

(*a*) $\Phi(u,v) = (4u, 3u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0,1,6)$.

(*b*) $\Phi(u,v) = (u^2, e^{v^2}, v^2 + 1)$ en $(0,1,1)$.

(*c*) $\Phi(u,\theta) = (\cosh u \cos\theta, \cosh u \operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} u)$ en $(0,1,0)$.

(*d*) $\Phi(u,v) = (u^2+1, v^2+1, u^2+v^2)$ en $\Phi(1,1)$.

2.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

(*a*) $\Phi(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$ con $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le \pi$.

(*b*) $\Phi(r,\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, r)$ con $0 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le \pi$.

3.- Dada la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$ considerándola como:

(*a*) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta,\varphi) = (2\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, 2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, 2\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

(*b*) Superficie de nivel 4 de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(*c*) Gráfica de la función $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $(x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\}$.

4.- (*a*) Hallar un parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

(*b*) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(*c*) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(*d*) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en (*c*).

5.- Hallar el área del helicoide definido por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ donde $\Phi(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha, \alpha)$ y D es la región donde $0 \le r \le 1$ y $0 \le \alpha \le 2\pi$.

6.- Un toro (o rosquilla) T se puede representar paramétricamente por la función $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, donde Φ viene dada por las funciones coordenadas $x = (R + \cos\phi)\cos\theta$, $y = (R + \cos\phi)\operatorname{sen}\theta$, $z = \operatorname{sen}\phi$, donde $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, esto es $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$. Calcular el área de T.

7.- Demuéstrese que la superficie $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $1 \le z < \infty$, "se puede llenar pero no se puede pintar" y explíquese el significado de esta frase.

8.- Calcular la integral de superficie $I = \iint_S (x+z)\,dS$, donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$, perteneciente al primer octante, de dos maneras:

(a) considerando S como la gráfica de una función de las variables x e y y expresando I como una integral doble;

(b) parametrizando la superficie de otra manera (por ejemplo, usando como parámetros la coordenada x y el ángulo θ de las coordenadas polares en el plano yz.

9.- Hallar la integral de superficie $\iint_S F \cdot dS$, siendo $F(x,y,z) = (x^3, y^3, -3z)$ y donde S denota la esfera unidad $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ orientada hacia el exterior.

10.- Hallar la integral del campo

$$\vec{F} = (x + \cos y - \log(1 + z^2), y + \operatorname{sen} \sqrt{1 + x^2 + z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad con la orientación inducida por normal exterior.

11.- Sea S la superficie del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcular la integral

$$\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}\,.$$

12.- Transformar la integral de superficie

$$\int\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}\,,$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, x\,y, x\,z)$, donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* 0.

b) $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* $-\pi$.

c) $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, y\,z, -x\,z)$, donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x, y, z \leq 2$ no situadas en el plano xy y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* -4.

13.- Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.

a) Siendo C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el plano $x + y + z = 0$,

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi\,R^2\sqrt{3}\,.$$

b) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2\,y$ y el plano $y = z$,

$$\int_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz = 0\,, \qquad \int_C y^2\,dx + x\,y\,dy + x\,z\,dz = 0\,.$$

c) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $x/a + z/b = 1$, con $a, b > 0$,

$$\int_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz = 2\pi\,a(a + b)\,.$$

14.- Sea S la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $x^2 + y^2 \leq 1/2$. Calcular $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ (con la orientación inducida por la normal exterior) donde

$$\vec{F} = (x\,z + e^{y \operatorname{sen} z}, 2\,y\,z + \cos xz, -z^2 + e^x \cos y).$$

15.- Hallar la integral de superficie

$$\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \qquad \text{siendo} \qquad \vec{F} = (x^3, y^3, -a\,b\,z),$$

cuando S es el elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,$$

orientado hacia el exterior.

HOJA 9

4. a) Parametrización del hiperboloide $x^2+y^2-z^2=25$

Observación: PARAMETRIZACIONES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad ; \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Es inmediato que:

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1 \quad // \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t = \cosh(2t)$$

$$(\operatorname{senh} t)' = \cosh t$$

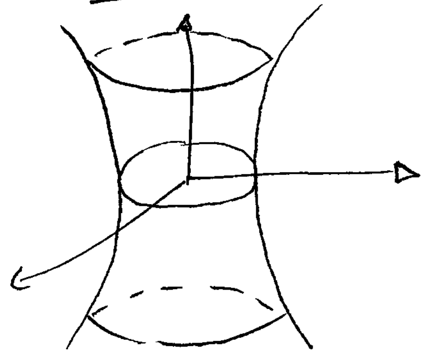
$$(\cosh t)' = \operatorname{senh} t$$

Si $r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r^2 - z^2 = 25 = 5^2$

$$r = 5\cosh t$$
$$z = 5\operatorname{senh} t$$

Por último si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x,y) = (r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)$

Entonces $\Phi(\theta,t) = (5\cosh t\cos\theta,\ 5\cosh t\operatorname{sen}\theta,\ 5\operatorname{senh} t)$ es una parametrización de S.



b) Normal unitaria a S

$$\vec{N}(\theta,t) = \frac{T_\theta \times T_t}{\|T_\theta \times T_t\|}$$

$$\vec{T_\theta} = \partial_\theta \Phi = (-5\cosh t.\operatorname{sen}\theta,\ 5\cosh t\cos\theta,\ 0)$$

$$\vec{T_t} = \partial_t \Phi = (5\operatorname{senh} t.\cos\theta,\ 5\operatorname{senh} t\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{senh} t)$$

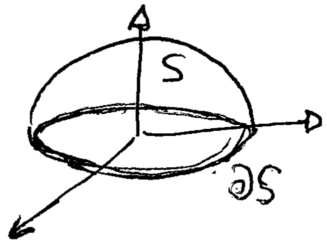
$$\vec{N} = \vec{T_\theta} \times \vec{T_t} = 25\cosh t\,(\cosh t.\cos\theta,\ \cosh t.\operatorname{sen}\theta,\ -\operatorname{senh} t)$$

$$\|\vec{N}\| = (25\cosh t)^2\cosh(2t)$$

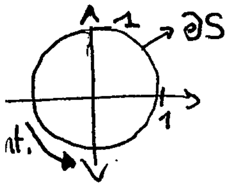
$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

12. | $\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{rot}(F) \cdot d\vec{S}$

a) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, xy, xz)$ con $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$



$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



$\partial S : (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\partial S} \vec{F}(\partial S(t)) \cdot \partial S'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t, \cos t \operatorname{sen} t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^3 t + \cos^2 t \operatorname{sen} t \; dt = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^3 t \, dt - \cancelto{0}{\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen} t \,(1 - \cos^2 t)\, dt = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \, dt + \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos^2 t \, dt} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \, dt = \left[\cos t\right]_0^{2\pi} = 0$$

$\boxed{10.}$ Utilizamos el Teorema de la divergencia:

$$\vec{F} = (x + \cos y - \log(1+z^2),\ y + \operatorname{sen}\sqrt{1+x^2+z^2},\ z)$$

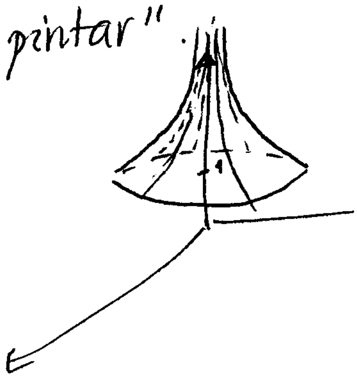
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \overset{T.G}{=} \iiint_{B_1} \operatorname{div}(\vec{F}) \cdot dx\,dy\,dz$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = (\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{B_1} \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\,dy\,dz = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = \boxed{4\pi}$$

$\boxed{7.}$ La superficie $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donde $z \in [1, \infty)$

"se puede llenar pero no se puede pintar".



- Veamos que se puede llenar:

Volumen sólido encerrado por la superficie =

$$= \iint_{\{(x,y)\,/\,(x^2+y^2)^{-1/2} \geq 1\}} z\,dx\,dy = \iint_{\{(x,y)\,/\,x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy =$$

cambio a polares

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{r} \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi < \infty$$

- Veamos que no se puede pintar:

$$S: \{(x, y, \underbrace{z(x,y)}_{\Phi(x,y)}) : \underbrace{0 \leq x^2+y^2 \leq 1}_{\Omega}\}$$

$$\vec{T_x} = \left(1, 0, -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$\vec{T_y} = \left(0, 1, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$A(S) = \iint_\Omega \|\vec{T_x} \times \vec{T_y}\|\,dS = \iint_\Omega \left(1 + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3}\right)^{1/2} dx\,dy =$$

$$= \iint_\Omega \left(1 + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^3}\right)^{1/2} dx\,dy \underset{\text{CAMBIO A POLARES}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{r^4}\right)^{1/2} r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{\overbrace{(1+r^4)^{1/2}}^{\geq 1}}{r^2}\,r\,dr \geq$$

$$\geq 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r} = +\infty$$

C curva intersección del cilindro $x^2+y^2=2y$ y el plano $y=z$

cilindro: $x^2+y^2-2y=0 \Rightarrow x^2+(y-\frac{1}{2})^2=1$

Parametrizamos la superficie: $\Phi(x,y)=(x,y,y)$

Nos piden calcular: $\int_C y^2dx + xy\,dy + xz\,dz$ y ver que es igual a ce

$\boxed{\vec{F}=(y^2,xy,xz)}$ $\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=(1,0,0) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=(0,1,1)$

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \hat{k}-\hat{j}=(0,-1,1)\equiv\vec{N}$$

$\boxed{1^{a} \text{ FORMA}}$

$$\text{rot}(\vec{F})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}=y\vec{k}-2y\vec{k}-z\vec{j}=(0,-z,-y)$$

$$\iint_S (0,-z,-y)(0,1,1)\,dA(x,y) = \iint_S -y-z\,dA(x,y)$$

cambio a polares en el plano YZ: $\begin{cases} y=r\cos\theta \\ z=r\,\text{sen}\theta\end{cases}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1(-r\cos\theta-r\,\text{sen}\theta)r\,dr\,d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta+\text{sen}\theta\,d\theta}_{0}\cdot\int_0^1 -r^2dr = 0$$

COMPROBADO

$\boxed{2^{a} \text{ FORMA}}$ $\quad \vec{F}(\Phi(x,y))=(y^2,xy,xy)$

$$\text{rot}\,\vec{F}(\Phi(x,y))=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ y^2 & xy & xy\end{vmatrix}=x\vec{i}+y\vec{k}-2y\vec{k}-y\vec{j}=(x,-y,-y)$$

$$\iint_S (x,-y,-y)(0,-1,1)\,dA(x,y)=\iint_S y-y\,dA(x,y) = 0$$

COMPROBADO