

Capítulo 6

Intervalos de confianza

6.1. Notación de percentiles	2
6.2. Introducción	4
6.3. Intervalos para una población	7
6.3.1. Intervalos para μ y para σ^2 de una variable normal	8
6.3.2. Intervalos para una proporción p	10
6.3.3. Intervalo aproximado para la media de una población general	13
6.3.4. Intervalos aproximados basados en normalidad asintótica de estimadores	14
6.3.5. Datos (normales) apareados: diferencia de medias	17
6.4. Intervalos para dos poblaciones independientes	18
6.4.1. Caso de dos variables normales	18
6.4.2. Caso de dos proporciones	22
6.5. Resumen: intervalos de confianza más habituales	23
6.5.1. Intervalos I de confianza $1 - \alpha$ para una distribución . . .	23
6.5.2. Intervalos I de confianza $1 - \alpha$ para dos distribuciones .	24

Seguimos, en este capítulo, embarcados en la tarea de estimar el parámetro θ de una variable X con función de densidad/masa $f(x; \theta)$ a partir de muestras de la variable de cierto tamaño.

En el capítulo 5 anterior vimos cómo obtener *estimaciones* $\hat{\theta}$ del parámetro θ a partir de una juiciosa elección de estimadores adecuados al modelo en cuestión.

En este capítulo veremos cómo construir *intervalos* $I = (a, b)$ de manera que el verdadero (y desconocido) valor de θ con el que se produjo la muestra pertenezca a I con alta *confianza*.

La construcción explícita de estos intervalos suele ser complicada, y de hecho sólo analizaremos (en detalle, y con éxito) el caso en el que X es una variable normal, apoyándonos en el teorema 4.6 de Fisher–Cochran. Para el resto de los casos,

tendremos que conformarnos con construir intervalos aproximados, apoyándonos en resultados asintóticos. Las secciones 6.3 y 6.4 contienen todos los detalles para los casos de una única población, y de dos poblaciones, respectivamente.

A modo de resumen, la sección 6.5 contiene las fórmulas de los intervalos de confianza más habituales, en términos de percentiles de diversos modelos estándar, que presentamos en la sección 6.1 siguiente.

6.1. Notación de percentiles

En lo que sigue aparecerán repetidamente percentiles de cuatro modelos básicos: la normal (estándar), la chi cuadrado, la t de Student y la F de Fisher-Snedecor (véanse sus definiciones y propiedades en la sección 3.3.1). Resumimos a continuación la notación para referirnos a sus percentiles.

A. Percentiles de la normal estándar

Sea Z una variable $\mathcal{N}(0, 1)$ (una normal estándar). Para $\alpha \in (0, 1/2]$ llamamos z_α al número real tal que

$$\mathbf{P}(Z > z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha.$$

El número z_α deja, a su derecha, área α (bajo la gráfica de la función de densidad de la $\mathcal{N}(0, 1)$). Véase la figura. El parámetro α denota una probabilidad, generalmente pequeña, que se suele escribir en porcentaje.

Los valores más habituales son $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$ y $\alpha = 0.1\%$.

De su definición se deduce que que z_α viene dado por

$$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha, \quad \text{esto es,} \quad z_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

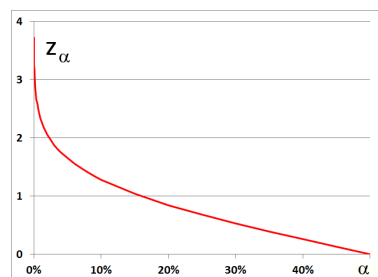
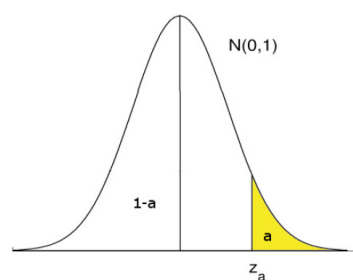
En Excel, z_α se calcula con la fórmula `=distr.norm.estand.inv(1-α)`, o bien con `=inv.norm.estand(1-α)`.

Aparecerán muy habitualmente, en lo que sigue, percentiles $z_{\alpha/2}$. La razón es que, si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, por simetría,

$$\mathbf{P}(|Z| > z_{\alpha/2}) = 2\mathbf{P}(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha \implies \mathbf{P}(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Obsérvese que $z_\alpha > 0$ para $\alpha \in (0, 1/2]$, que $z_{1/2} = 0$, y que $z_\alpha \rightarrow +\infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$. La tabla adjunta recoge algunos valores (aproximados) de z_α (y de $z_{\alpha/2}$) para los valores más habituales de α .

α	z_α	$z_{\alpha/2}$
5 %	1.645	1.960
1 %	2.326	2.576
0.1 %	3.090	3.291



B. Percentiles de la t de Student con n grados de libertad

Sea Z una $STU(n)$ (t de Student con n grados de libertad, $n \geq 1$). Para $\alpha \in (0, 1/2]$, denotamos por $t_{\{n;\alpha\}}$ al valor tal que

$$\mathbf{P}(Z > t_{\{n;\alpha\}}) = \alpha.$$

En Excel, estos percentiles $t_{\{n;\alpha\}}$ se calculan¹ como `=inv.t(1- α ;n)`.

Por simetría, se cumple que

$$\mathbf{P}(Z < -t_{\{n;\alpha\}}) = \alpha \quad \text{y que} \quad \mathbf{P}(|Z| < t_{\{n;\alpha/2\}}) = 1 - \alpha.$$

Como en el caso de la normal estándar anterior, se tiene que $t_{\{n;\alpha\}} > 0$ para $\alpha \in (0, 1/2]$, que $t_{\{n;1/2\}} = 0$, y que $t_{\{n;\alpha\}} \rightarrow +\infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0^+$.

En la siguiente tabla se exhiben algunos valores de estos percentiles para unos cuantos valores de α y n :

α	$t_{\{2,\alpha\}}$	$t_{\{3,\alpha\}}$	$t_{\{4,\alpha\}}$	$t_{\{50,\alpha\}}$	$t_{\{500,\alpha\}}$
5 %	2.920	2.353	2.132	1.676	1.648
1 %	6.965	4.541	3.747	2.403	2.334
0.1 %	22.327	10.215	7.173	3.261	3.107

Compárense con los correspondientes percentiles en la normal estándar: si el número n de grados de libertad muy grande, son prácticamente iguales (ejercicio 6.9).

C. Percentiles de la χ_n^2

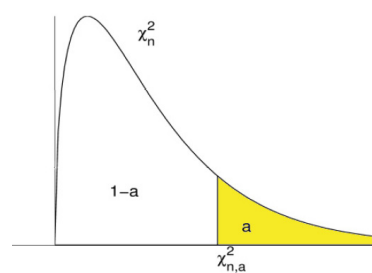
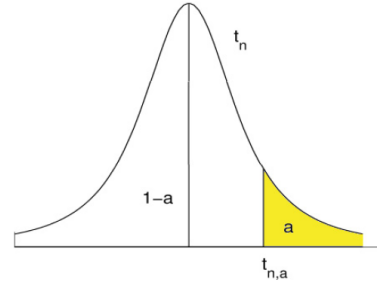
Sea Z una χ_n^2 (chi cuadrado con n grados de libertad). Para $\alpha \in (0, 1)$, denotamos $\chi_{\{n,\alpha\}}^2$ al valor tal que

$$\mathbf{P}(Z > \chi_{\{n;\alpha\}}^2) = \alpha.$$

En Excel, el percentil $\chi_{\{n,\alpha\}}^2$ se calcula² como `=inv.chicud(1- α ;n)`.

Nótese que la distribución de una χ_n^2 no es simétrica, como en los dos casos anteriores. Más adelante usaremos que, para cualquier $\alpha \in (0, 1)$,

$$\mathbf{P}(\chi_{\{n;1-\alpha/2\}}^2 < Z < \chi_{\{n;\alpha/2\}}^2) = 1 - \alpha.$$



¹En versiones antiguas de Excel, con la instrucción `=distr.t.inv(2 α ;n)`.

²En versiones antiguas de Excel, `=prueba.chi.inv(α ;n)`.

D. Percentiles de la F de Fisher–Snedecor con n y m grados de libertad

Sea Z una $F_{n,m}$ (una F con n y m grados de libertad). Para $\alpha \in (0, 1)$, denotamos por $F_{\{n,m;\alpha\}}$ al valor tal que

$$\mathbf{P}(Z > F_{\{n,m;\alpha\}}) = \alpha.$$

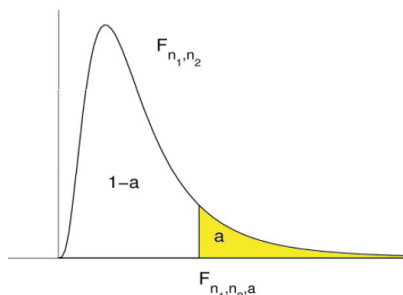
En Excel, los percentiles $F_{\{n,m;\alpha\}}$ se calculan³ como `=inv.f(1- α ;n;m)`.

Obsérvese que

$$\mathbf{P}(F_{\{n,m;1-\alpha/2\}} < Z < F_{\{n,m;\alpha/2\}}) = 1 - \alpha,$$

y también que, por la definición de la distribución F (sección 3.3.2),

$$F_{\{n,m;1-\alpha\}} = \frac{1}{F_{\{m,n;\alpha\}}}.$$



Nota 6.1.1. Recuérdese que si $X \sim F_{n,m}$, entonces $1/X \sim F_{m,n}$. Esto sale de la propia definición de la F de Fisher (apartado 3.3.2). De manera que

$$\mathbf{P}(Z > F_{\{n,m;\alpha\}}) = \alpha \implies \mathbf{P}\left(\frac{1}{Z} < \frac{1}{F_{\{n,m;\alpha\}}}\right) = \alpha,$$

y por tanto $1/F_{\{n,m;\alpha\}}$ es el percentil α de una $F_{m,n}$.

6.2. Introducción

Como ilustración del concepto de intervalo de confianza, empezaremos con el caso “teórico” del intervalo para la media μ de una variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ **suponiendo que σ^2 es conocida**⁴.

Análisis probabilista (en activa)

Para la muestra aleatoria (X_1, \dots, X_n) de X sabemos que

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{se distribuye como una} \quad \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

Por consiguiente, para cualquier $z > 0$ se tiene, tipificando, que

$$\mathbf{P}\left(|\bar{X} - \mu| \geq z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z\right) = \mathbf{P}(|Z| \geq z),$$

donde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

³En versiones antiguas de Excel, `=distr.f.inv(α ;n;m)`.

⁴Y tan teórico... ¿no conocen la media, pero sí la varianza? ¡Vaya!

Así que, si para un $\alpha \in (0, 1/2]$ tomamos $z = z_{\alpha/2}$ y denotamos de nuevo por Z a una normal estándar, tenemos que

$$\mathbf{P}\left(|\bar{X} - \mu| \geq z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathbf{P}(|Z| \geq z_{\alpha/2}) = \alpha,$$

es decir,

$$(\star) \quad \mathbf{P}\left(-z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

De manera que, si α es pequeño, con probabilidad elevada, de $1 - \alpha$, muy próxima a 1, se ha de cumplir que la media muestral \bar{X} se sitúa en el intervalo

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Pero, preparando el terreno, preferimos reescribir (\star) como sigue:

$$(\star\star) \quad \mathbf{P}\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

situando a μ en el papel central que tendrá en el siguiente análisis.

Inferencia estadística (en pasiva)

Nuestro interés ahora es la siguiente cuestión de *inferencia estadística*. Sabemos que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La varianza σ^2 es conocida, pero la media μ es desconocida. Disponemos de una realización (x_1, \dots, x_n) concreta de (X_1, \dots, X_n) .

Si α es pequeño, pongamos, $\alpha = 1\%$, la discusión anterior nos dice que en el 99 % de las realizaciones \bar{x} de valores de \bar{X} se ha de dar que

$$(\dagger) \quad \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

En otros términos, tenemos confianza alta (no seguridad plena) de que se cumpla (\dagger) ; evaluamos esa confianza como del 99 %.

En general, decimos que **tenemos confianza $1 - \alpha$** de que el valor desconocido de μ cumpla

$$(6.1) \quad \boxed{\mu \in \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

*A priori: probabilidad de realizaciones;
a posteriori, confianza en intervalo de estimación.*

Al intervalo

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

se le dice **intervalo de confianza al $(1 - \alpha)$ para la media μ** (de una normal, con σ^2 conocida); tenemos confianza $(1 - \alpha)$ de que contenga al verdadero, pero desconocido, valor de μ . Obsérvese que el intervalo de confianza depende de la muestra empírica, y que de hecho está centrado en la media muestral \bar{x} .

A veces se escribe, abreviadamente,

$$\mu = \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{con confianza } (1 - \alpha)$$

A la cantidad

$$2 z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

nos referiremos como la **longitud del intervalo de confianza**; o quizás a esa misma cantidad, sin el factor 2 y tomando como referencia la media muestral: una cantidad $z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$ hacia la derecha, y otro tanto hacia la izquierda.

Por supuesto, cuanto menor sea ese intervalo más relevante será: más precisión sobre la estimación de μ . *Ceteris paribus*,

- cuando menor sea α , es decir, cuanta más confianza $1 - \alpha$ queramos tener, mayor será el intervalo de confianza;
- cuanto mayor sea σ , mayor será el intervalo de confianza (esto es natural, porque σ grande significa que los valores de X –y por tanto los de \bar{X} , aunque menos– están muy dispersos);
- cuanto mayor sea n , menor será el intervalo de confianza.



Nota 6.2.1. Mejorando la precisión en la estimación. La longitud del intervalo de confianza de arriba es directamente proporcional al parámetro σ : si se duplica σ , entonces se duplica esa longitud. Aunque σ no es, en principio, un parámetro a nuestra disposición, pues viene dado por la naturaleza del experimento.

Sí que disponemos de libertad para elegir α . Querremos que α sea pequeño, para tener alta confianza sobre el intervalo de confianza obtenido. Pero α pequeño significa que $z_{\alpha/2}$ es “grande”. Aunque sólo moderadamente: por ejemplo, si $\alpha = 1\%$, es decir, confianza del 99%, entonces $z_{0.5\%}$ es aproximadamente 2.58; mientras que si $\alpha = 0.01\%$ (confianza del 99.99%), entonces el percentil correspondiente se habrá ido a (sólo) 3.89. O al revés: aumentar (mucho) α para reducir (no mucho) la longitud del intervalo de confianza hace que perdamos (mucho) confianza en la estimación; no parece una estrategia recomendable.

Queda, claro, aumentar n , es decir, obtener muestras de mayor tamaño. Pero obsérvese que la dependencia es con $1/\sqrt{n}$. Así que, por ejemplo, si queremos reducir un factor 10 la longitud del intervalo de confianza, entonces tendremos que hacer una muestra 100 veces más grande. Véase el ejemplo numérico 6.2.1.

Tamaño de la muestra

Seguimos con este ejemplo básico en el que queremos estimar μ de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 es conocido.

Vamos a calcular qué tamaño n debe tener una muestra de X para obtener un intervalo que contenga a μ con confianza de $(1 - \alpha)$ y con un error máximo de δ . Este último requisito significa que queremos que el tamaño del intervalo no exceda 2δ , es decir,

$$(\#) \quad z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \delta.$$

6.3. Intervalos para una población

7

Buscamos n para que se cumpla (#). Aquí σ es un parámetro conocido y α ha sido prefijado. El tamaño n ha de cumplir

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\delta} \right)^2$$

A menor α , o mayor σ , o menor δ , mayor será n .

EJEMPLO 6.2.1. *Ilustración numérica de intervalo de confianza para μ de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocida.*

Digamos que $\sigma = 2$ y que la muestra de tamaño $n = 100$ tiene una media muestral de 1.2. La tabla:

α	5 %	1 %	0.1 %
$z_{\alpha/2}$	1.960	2.576	3.291

nos da los siguientes intervalos de confianza:

confianza	intervalo		error relativo
95 %	$\mu \in (0.808, 1.592)$,	1.2 ± 0.392	$\pm 32.67 \%$
99 %	$\mu \in (0.685, 1.715)$,	1.2 ± 0.515	$\pm 42.93 \%$
99.9 %	$\mu \in (0.542, 1.858)$,	1.2 ± 0.658	$\pm 54.84 \%$

Supongamos que ahora queremos calcular el tamaño (mínimo) de la muestra que garantiza que el error en la estimación de μ (esto es, el tamaño del intervalo) no supere un cierto nivel δ prefijado con cierto nivel de confianza. La siguiente tabla recoge algunos de esos tamaños muestrales mínimos para un par de valores de δ y algunos niveles de confianza:

confianza	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.01$
95 %	$n \geq 1\,537$	$n \geq 153\,658$
99 %	$n \geq 2\,654$	$n \geq 265\,396$
99.9 %	$n \geq 4\,331$	$n \geq 433\,103$

Nótese cómo, para que el intervalo de confianza baje un factor 10, necesitamos muestras de tamaño 100 veces mayor. ♣

6.3. Intervalos para una población

El ejemplo anterior nos va a servir de guía en el análisis de unos cuantos casos más: en la sección 6.3.1 estudiaremos el caso en el que X es una variable normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, con el objetivo de obtener intervalos de confianza para los parámetros μ y σ^2 , y utilizando los análisis de las variables media y cuasivarianza muestrales de capítulos anteriores, en particular la sección 4.5.1.

Para otro tipo de variables, supondremos que el tamaño de la muestra es suficientemente grande, y apelaremos a resultados de normalidad asintótica, como el teorema central del límite, para establecer intervalos de confianza aproximados para los parámetros de interés (secciones 6.3.2–6.3.4).

6.3.1. Intervalos para μ y para σ^2 de una variable normal

Suponemos aquí que μ y σ^2 son ambas, como es natural, desconocidas. En lo que sigue, la muestra de X tendrá tamaño n y designaremos simplemente con \bar{X} y S^2 las variables media muestral y cuasivarianza muestral (en lugar de los más aparatosos $\bar{X}_{(n)}$ y $S_{(n)}^2$).

A. Intervalo para μ

a) *Análisis probabilista.* Usamos (proposición 4.7) que

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim \text{STU}(n-1).$$

Así que, fijado α ,

$$\mathbf{P}\left(|\bar{X} - \mu| \geq t_{\{n-1, \alpha/2\}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \alpha,$$

es decir,

$$\mathbf{P}\left(\bar{X} - t_{\{n-1, \alpha/2\}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\{n-1, \alpha/2\}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

b) *Inferencia estadística.* Dada una realización muestral (x_1, \dots, x_n) con media muestral \bar{x} y cuasidesviación típica muestral s , tenemos confianza $1 - \alpha$ de que

$$(6.2) \quad \mu \in \left(\bar{x} - t_{\{n-1, \alpha/2\}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\{n-1, \alpha/2\}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

En esta expresión,

- n es el tamaño de la muestra (dada por el diseño del experimento),
- \bar{x} y s se obtienen de la muestra en sí,
- y α (y por tanto $z_{\alpha/2}$) lo fija el usuario.



Nota 6.3.1. A igualdad de s y α , la longitud del intervalo de confianza descrito en (6.2) disminuye cuando el tamaño n de la muestra se hace más grande. Y de hecho, de manera similar al del caso de la σ^2 conocida analizado antes, véase (6.1): como $1/\sqrt{n}$, pues el percentil $t_{\{n-1, \alpha/2\}}$ tiende a z_α cuando $n \rightarrow \infty$. Esto se deduce de las propiedades de la distribución t de Student (véase el apartado 3.3.3, y en particular la convergencia de funciones de densidad del ejercicio 3.8).



Nota 6.3.2. Realizamos el siguiente experimento: sorteamos muestras de tamaño $n = 30$ de una normal con parámetros $\mu = 2$ y $\sigma^2 = 9$. Fijamos $\alpha = 5\%$, y calculamos $t_{\{29; 2.5\%\}} = 2.045$, así que $t_{\{29; 2.5\%\}}/\sqrt{30} = 0.373$. Si \bar{x} y s designan la media y la cuasidesviación típica de cada muestra, entonces aproximadamente el 95% de las veces que repetamos el experimento, el intervalo de la forma

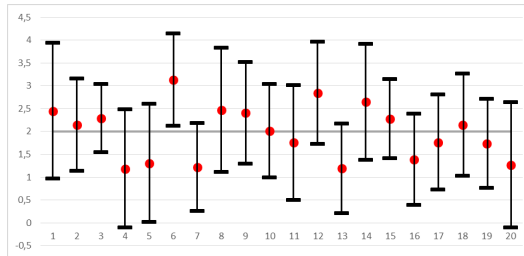
$$(\bar{x} - 0.373s, \bar{x} + 0.373s)$$

6.3. Intervalos para una población

9

deberá incluir el valor $\mu = 2$. Cada intervalo está centrado en \bar{x} , y su anchura también depende de la muestra, a través de la cuasidesviación típica s , que suele ser del orden de 3, puesto que $\sigma = 3$.

En la figura de la derecha hemos representado los resultados de 20 experimentos: la línea horizontal es el nivel 2; cada intervalo de confianza (cuya longitud es variable) se dibuja en vertical, con un punto rojo para indicar la media muestral. De cada 20 experimentos como estos, esperamos encontrar aproximadamente *uno* que no incluya el $\mu = 2$. Es decir, solo (aproximadamente) una de cada 20 veces el intervalo de confianza no “acertaría” el verdadero valor de μ .



Claro, que en la práctica estadística sólo habrá una muestra, y podría ocurrir que justamente...

B. Intervalo para σ^2

a) *Análisis probabilista*. Usamos (teorema 4.6) que

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Así que, fijado α ,

$$\mathbf{P}\left(\chi_{\{n-1; 1-\alpha/2\}}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\{n-1; \alpha/2\}}^2\right) = 1 - \alpha.$$

O, en otros términos,

$$\mathbf{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\{n-1; \alpha/2\}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\{n-1; 1-\alpha/2\}}^2}\right) = 1 - \alpha.$$

b) *Inferencia estadística*. Dada una muestra empírica (x_1, \dots, x_n) con cuasivarianza muestral s^2 , el intervalo

$$(6.3) \quad \left[\frac{(n-1)}{\chi_{\{n-1; \alpha/2\}}^2} s^2, \frac{(n-1)}{\chi_{\{n-1; 1-\alpha/2\}}^2} s^2 \right]$$

contiene a σ^2 con confianza de $1 - \alpha$.

Nota 6.3.3. Convergencia de percentiles. A igualdad de s^2 , la longitud del intervalo de confianza (6.3) es menor cuanto mayor sea n , puesto que, como vamos a comprobar, para cualquier $\beta \in (0, 1)$ se tiene que $\chi_{\{n; \beta\}}^2/n \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$.

De hecho, vamos a probar que, para cualquier $\beta \in (0, 1)$,

$$(\star) \quad \sqrt{n} \left(\frac{\chi_{\{n; \beta\}}^2}{n} - 1 \right) \rightarrow \sqrt{2} z_\beta \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

lo que en particular nos dice que el cociente $\chi_{\{n; \beta\}}^2/n$ ha de tender a 1.

Veamos. Supongamos que la variable Z sigue una χ_n^2 . Recuérdese que $\mathbf{E}(Z) = n$ y que $\mathbf{V}(Z) = 2n$. Para cualquier $\beta \in (0, 1)$,

$$1 - \beta = \mathbf{P}(Z < \chi_{\{n;\beta\}}^2) = \mathbf{P}\left(\frac{Z - n}{\sqrt{2n}} < \frac{\chi_{\{n;\beta\}}^2 - n}{\sqrt{2n}}\right).$$

Como Z se define como una suma de n variables idénticas e independientes, el teorema central del límite nos dice que $(Z - n)/\sqrt{2n}$ tiende en distribución a un normal estándar cuando $n \rightarrow \infty$.

Fijamos $\varepsilon > 0$. Supongamos que para infinitos valores de n se tuviera que

$$(\dagger) \quad \sqrt{n} \left(\frac{\chi_{\{n;\beta\}}^2}{n} - 1 \right) \leq \sqrt{2} z_\beta - \varepsilon.$$

Entonces ocurriría (para infinitos valores de n) que

$$1 - \beta = \mathbf{P}\left(\frac{Z - n}{\sqrt{2n}} < \frac{\chi_{\{n;\beta\}}^2 - n}{\sqrt{2n}}\right) \leq \mathbf{P}\left(\frac{Z - n}{\sqrt{2n}} < \sqrt{2} z_\beta - \varepsilon\right).$$

La cantidad de la derecha, por el teorema central del límite, tiende a $\Phi(z_\beta - \varepsilon) = \Phi(\Phi^{-1}(1 - \beta) - \varepsilon)$, que es estrictamente *menor* que $1 - \beta$. Así que ha de ocurrir que $\sqrt{n}(\chi_{\{n;\beta\}}^2/n - 1) \geq \sqrt{2} z_\beta - \varepsilon$ para $n \geq n_\varepsilon$.

Un argumento análogo, pero tomando en (\dagger) un “ \geq ” y un “ $+\varepsilon$ ”, terminaría la prueba de (\star) .

El caso de la normal, tratado en esta sección, es muy especial, porque gracias al teorema 4.6 de Fisher–Cochran, y a la proposición 4.7, que es consecuencia del primero, tenemos información precisa sobre la distribución de los estimadores \bar{X} y S^2 , sea cual sea el tamaño de la muestra. Es decir, los intervalos de confianza para μ y σ^2 escritos antes son *exactos*, en el sentido de que no se apoyan en resultados de tipo asintótico, y son válidos para todo n .

En muy pocas ocasiones más seremos capaces de establecer con la misma precisión la distribución del estimador de interés (vea el lector al respecto los ejercicios 6.11–6.13 para el caso de mínimos o máximos), y será necesario recurrir a estimaciones asintóticas generales, que vamos a ir desgranando en las siguientes secciones.

6.3.2. Intervalos para una proporción p

En este caso, $n\bar{X}$ es $\text{BIN}(n, p)$. Podríamos intentar usar este hecho para obtener un intervalo de confianza para p . Véase la nota 6.3.4.

Pero procedemos de la siguiente manera, anticipando argumentos que generalizaremos en las secciones 6.3.3 y 6.3.4.

a) *Análisis probabilista*. **Suponemos que n es grande** y aproximamos (teorema del límite central):

$$\bar{X} \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(p, p(1-p)/n), \quad \text{o bien} \quad \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(0, 1).$$

Así que

$$\mathbf{P}\left(-z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \bar{X} - p \leq z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \approx 1 - \alpha,$$

y por tanto

$$\mathbf{P}\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \approx 1 - \alpha.$$

b) *Inferencia estadística*. La expresión anterior nos diría que tenemos confianza aproximadamente $1 - \alpha$ de que el intervalo

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

contenga al parámetro p . Pero claro, tal cual está, este intervalo no dice nada y no es útil, porque el propio intervalo *depende del valor desconocido* p .

Para soslayar esta dificultad, lo más habitual es reemplazar, en el término de error $z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$, el parámetro desconocido p por su estimación \bar{x} , lo que nos deja un intervalo de confianza $1 - \alpha$ para p como el que sigue:

$$(6.4) \quad \boxed{p = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}}$$

Como alternativa (conservadora) podemos observar que $p(1-p) \leq 1/4$, sea cual sea el valor desconocido de p , y usar el intervalo

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right),$$

que con confianza de *al menos* $1 - \alpha$ contiene al valor de p .

Tamaño de muestra

Si queremos que el error cometido con el intervalo sea menor que un margen de error dado, digamos δ , debemos tomar n tal que

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \leq \delta$$

Esta decisión sobre n es previa a tomar la muestra, de manera que \bar{x} está por determinar, y la fórmula anterior no es útil. Tenemos dos alternativas:

1) Si disponemos de una estimación previa (provisional) de p , digamos p_0 , usamos ese valor en lugar de \bar{x} en esta expresión del error y requerimos

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \leq \delta, \quad \text{es decir,} \quad n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{\delta^2} p_0(1-p_0).$$

2) En caso contrario, nos ponemos en el peor caso usando que $\bar{x}(1-\bar{x}) \leq 1/4$ (puesto que aquí \bar{x} está entre 0 y 1), y requerimos (conservadoramente)

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}} \leq \delta, \quad \text{es decir,} \quad n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{4\delta^2}.$$

EJEMPLO 6.3.1. *Un ejemplo numérico de intervalos de confianza para p .*

Supongamos que la muestra tiene tamaño $n = 100$, y que registramos 43 unos y 57 ceros. La media muestral es 43 %. Los intervalos de confianza para $\alpha = 5\%$ son

$$\begin{aligned} 43\% \pm 8.14\% & \text{ si usamos la alternativa con las medias muestrales;} \\ 43\% \pm 8.22\% & \text{ si usamos la alternativa "conservadora".} \end{aligned}$$

Si la muestra fuera de tamaño $n = 10\,000$, siguiendo con media muestral de 43 %, los intervalos de confianza para $\alpha = 5\%$ serían

$$\begin{aligned} 43\% \pm 0.814\% & \text{ si usamos la alternativa con las medias muestrales;} \\ 43\% \pm 0.822\% & \text{ si usamos la alternativa "conservadora".} \end{aligned}$$

Nótese que con una muestra 100 veces mayor "ganamos" un decimal de precisión. ♣

EJEMPLO 6.3.2. *Un ejemplo numérico de tamaños de muestra.*

Queremos determinar el tamaño (mínimo) de la muestra que garantiza que el error al estimar p sea menor que un cierto δ con confianza del 95 %. Tendríamos

$$\begin{aligned} n &\geq 97 && \text{para } \delta = 10\%; \\ n &\geq 9604 && \text{para un más exigente } \delta = 1\%, \end{aligned}$$

usando el método 2) de arriba. Mientras que, si dispusiéramos de una muestra preliminar, quizás pequeña, de la que hubiéramos deducido una estimación $p_0 = 6\%$, entonces tendríamos $n \geq 22$ para $\delta = 10\%$, y $n \geq 2167$ para $\delta = 1\%$. Nótese cómo se reduce el tamaño de muestra requerido. ♣



Nota 6.3.4. Podríamos intentar usar que $n\bar{X}$ es una $\text{BIN}(n, p)$.

En ese caso, determinaríamos $b_{n;p;\alpha}$, entero y óptimo, tal que $\mathbf{P}(\text{BIN}(n, p) > b_{n;p;\alpha}) \leq \alpha/2$ y $c_{n;p;\alpha}$, entero y óptimo tal que $\mathbf{P}(\text{BIN}(n, p) < c_{n;p;\alpha}) \leq \alpha/2$.

El intervalo de confianza $1 - \alpha$ que obtendríamos, siendo \bar{x} la proporción de unos en la muestra, sería

$$\frac{c_{n;p;\alpha}}{n} \leq \bar{x} - p \leq \frac{b_{n;p;\alpha}}{n},$$

pero ahora $b_{n;p;\alpha}$ y $c_{n;p;\alpha}$ dependen intrincadamente de n y α y, sobre todo, del parámetro p a estimar.



Nota 6.3.5. Podríamos (con afán de precisión algebraica) despejar p en la inecuación de segundo grado

$$p \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \sqrt{p(1-p)/n},$$

para obtener una cota superior de p que dependerá de \bar{x} , $z_{\alpha/2}$ y n . Y, análogamente, despejar p en la desigualdad

$$p \geq \bar{x} - z_{\alpha/2} \sqrt{p(1-p)/n},$$

para obtener una cota inferior de p . Pero se consigue una ganancia pírrica, pues recordemos que no hemos cuantificado la bondad de la aproximación de partida de \bar{X} a una normal.

6.3.3. Intervalo aproximado para la media de una población general

Supongamos que X tiene función de densidad/masa $f(x; \theta)$, con un único parámetro θ . Queremos dar un intervalo de confianza para el parámetro $\mu = \mathbf{E}_\theta(X)$, la media de X . Explicitamos la dependencia de θ escribiendo $\mu(\theta)$.

La varianza $\mathbf{V}_\theta(X)$ es asimismo una cierta fórmula de θ , pongamos $v(\theta) = \mathbf{V}_\theta(X)$, por abreviar y para explicitar su dependencia de θ .

a) *Análisis probabilista*. Suponemos n grande. El teorema del límite central nos dice que

$$\bar{X} \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(\mu(\theta), v(\theta)/n), \quad \text{esto es,} \quad \frac{\bar{X} - \mu(\theta)}{\sqrt{v(\theta)/n}} \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(0, 1),$$

lo que nos daría que

$$\mathbf{P}\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{v(\theta)}{n}} \leq \mu(\theta) \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{v(\theta)}{n}}\right) \approx 1 - \alpha.$$

b) *Inferencia estadística*. El intervalo obtenido para la media, usando la expresión anterior, dependería de θ , que es desconocido. Si \bar{x} es una realización de la media muestral, entendemos que

$$\mu(\theta) \approx \bar{x}.$$

Esto debe permitir despejar una cierta aproximación de θ , digamos $\hat{\theta}$ (como se hacía en el método de estimación por momentos), lo que a su vez nos da una estimación $v(\hat{\theta})$.

El intervalo con confianza (aproximadamente) $1 - \alpha$ para μ sería

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{\theta})/n}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{\theta})/n} \right]$$

Esto es, obsérvese, justamente lo que hacíamos en el caso de $X \sim \text{BER}(p)$, para el que $\mu(p) = p$ y $v(p) = p(1-p)$. Aquí estimamos $\hat{p} = \bar{x}$, lo que nos da $v(\hat{p}) = \bar{x}(1-\bar{x})$, que permite construir el intervalo de confianza para la media p .

Veamos unos cuantos ejemplos.

EJEMPLO 6.3.3. *Intervalo de confianza para λ si $X \sim \text{POISS}(\lambda)$.*

Con la notación anterior, $\mu(\lambda) = v(\lambda) = \lambda$. La estimación $\hat{\lambda} = \bar{x}$ nos lleva al intervalo de confianza (aproximado)

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{x}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{x}} \right)$$

para la media λ (que en este caso coincide con el parámetro).



EJEMPLO 6.3.4. *Intervalo de confianza para la esperanza de $X \sim \text{EXP}(\lambda)$.*

Recordemos que $\mu(\lambda) = 1/\lambda$ y $v(\lambda) = 1/\lambda^2$. Si tenemos una realización de la media muestral \bar{x} , planteamos

$$\frac{1}{\lambda} = \mu(\lambda) = \bar{x},$$

para obtener la estimación $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$, y de ahí la estimación (en términos de \bar{x}) para la varianza

$$v(\hat{\lambda}) = \bar{x}^2.$$

Así que el intervalo (aproximado) para $\mathbf{E}(X)$ con confianza $1 - \alpha$ sería

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{x}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{x} \right).$$



EJEMPLO 6.3.5. *Intervalo de confianza para la esperanza de $X \sim \text{RAY}(\theta)$.*

Recordemos que $\mu(\theta) = \sqrt{\pi\theta/2}$ y que $v(\theta) = (2 - \pi/2)\theta$. De una realización de la media muestral \bar{x} , usando que $\mu(\theta) \approx \bar{x}$, estimamos

$$\hat{\theta} = \frac{2}{\pi} \bar{x}^2,$$

y de ahí, a su vez,

$$v(\hat{\theta}) = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \hat{\theta} = \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \bar{x}^2.$$

Así que el intervalo (aproximado) para $\mathbf{E}(X)$ con confianza $1 - \alpha$ sería

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\bar{x}}{\sqrt{n}} \sqrt{4/\pi - 1}.$$



6.3.4. Intervalos aproximados basados en normalidad asintótica de estimadores

En la sección anterior hemos obtenido intervalos de confianza aproximados para la media de la distribución usando el teorema del límite central para el estimador \bar{X} cuando n , el tamaño de la muestra, es grande.

La misma estrategia se puede utilizar si disponemos de resultados de normalidad asintótica para el estimador del parámetro de interés de la distribución que se haya escogido. Usaremos aquí, en especial, los resultados de las secciones 5.4.1 y 5.4.2.

Supongamos que tenemos una variable aleatoria X con función de densidad $f(x; \theta)$. Llamemos, como en la sección anterior, $\mathbf{E}_\theta(X) = \mu(\theta)$ y $\mathbf{V}_\theta(X) = v(\theta)$.

Digamos que $T_n := T_n(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador de θ para el que se verifica un resultado de normalidad asintótica del tipo

$$\sqrt{n} (T_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, w(\theta)),$$

donde $w(\theta)$ es una cierta función de θ .

El estimador T_n podría ser

- la misma media muestral $\bar{X}_{(n)}$, si es que $\mu(\theta) = \theta$; en este caso $w(\theta)$ sería simplemente la varianza $v(\theta)$;
- o del tipo $T_n = g(\bar{X}_{(n)})$, para una cierta función g , como los que se obtienen por el método de momentos; en este caso, la función $w(\theta)$ vendría dada por $w(\theta) = |g'(\mu(\theta))|^2 v(\theta)$, como nos dice el método delta, siempre que la función g cumpla las condiciones del teorema 5.15;
- o un estimador de máxima verosimilitud, en cuyo caso tendríamos que $w(\theta) = 1/I_X(\theta)$ (sección 5.4.2).

En cualquier caso, tendríamos que

$$\frac{T_n - \theta}{\sqrt{w(\theta)/n}} \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(0, 1),$$

lo que nos llevaría, con los argumentos habituales, a que

$$\mathbf{P}\left(T_n - z_{\alpha/2} \sqrt{w(\theta)/n} \leq \theta \leq T_n + z_{\alpha/2} \sqrt{w(\theta)/n}\right) \approx 1 - \alpha.$$

Obsérvese que si, por ejemplo, el parámetro θ fuera positivo y se tuviera que $w(\theta) = K\theta^2$, donde K es cierta constante, entonces en la expresión anterior podríamos situar θ en un intervalo que solo depende del estimador:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\approx \mathbf{P}\left(T_n - z_{\alpha/2} \sqrt{K\theta^2/n} \leq \theta \leq T_n + z_{\alpha/2} \sqrt{K\theta^2/n}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{1 + z_{\alpha/2} \sqrt{K/n}} \cdot T_n \leq \theta \leq \frac{1}{1 - z_{\alpha/2} \sqrt{K/n}} \cdot T_n\right). \end{aligned}$$

Si no fuera el caso, procederíamos como ya hemos hecho en secciones anteriores. Dada la muestra empírica (x_1, \dots, x_n) , calcularíamos la estimación $\hat{\theta} = T(x_1, \dots, x_n)$, que usaríamos para escribir el intervalo de confianza (aproximadamente) $1 - \alpha$ para θ como

$$\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \sqrt{w(\hat{\theta})/n} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \sqrt{w(\hat{\theta})/n}.$$

Veamos un par de ejemplos.

EJEMPLO 6.3.6. *Intervalo de confianza para el parámetro θ de $X \sim \text{RAY}(\theta)$.*

El estimador máximo verosímil de θ es

$$\mathbf{emv}_n(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{\frac{1}{2} \bar{X}_{(n)}^2}.$$

El número de información es, en este caso, $I_\theta(X) = 4/\theta^2$. Esto nos dice que $w(\theta) = \theta^2/4$, y por tanto

$$(\star) \quad \mathbf{P}\left(\mathbf{emv}_n - z_{\alpha/2} \frac{\theta}{2n} \leq \theta \leq \mathbf{emv}_n + z_{\alpha/2} \frac{\theta}{2n}\right) \approx 1 - \alpha,$$

es decir, despejando,

$$(\star\star) \quad \mathbf{P}\left(\frac{1}{1 + \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}} \cdot \mathbf{emv}_n \leq \theta \leq \frac{1}{1 - \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}} \cdot \mathbf{emv}_n\right) \approx 1 - \alpha.$$

Sea ahora (x_1, \dots, x_n) una muestra empírica de X , que nos da la estimación $\hat{\theta} = (\bar{x}^2/2)^{1/2}$ del parámetro θ . Utilizando $(\star\star)$, el intervalo de (aproximadamente) confianza $1 - \alpha$ sería

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}} \hat{\theta}, \frac{1}{1 - \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}} \hat{\theta}\right),$$

mientras que usando (\star) directamente, tendríamos

$$\left(\left(1 - \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right) \hat{\theta}, \left(1 + \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right) \hat{\theta}\right).$$

Obsérvese que

$$\frac{1}{1 + \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}} = 1 - \frac{z_{\alpha/2}}{z_{\alpha/2} + 2\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1 - \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}} = 1 + \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n} - z_{\alpha/2}}.$$

Así que los dos intervalos no son exactamente iguales, pero sí son muy parecidos cuando n es grande (que es la hipótesis de partida). ♣

EJEMPLO 6.3.7. *Intervalo de confianza para λ en $X \sim \text{EXP}(\lambda)$.*

Consideramos el estimador $T_n = 1/\bar{X}_{(n)}$. Como vimos en el ejemplo 5.4.8,

$$\sqrt{n}(T_n - \lambda) \text{ converge en distribución a } \mathcal{N}(0, \lambda^2).$$

Esto nos da que, para n grande,

$$(\star) \quad \mathbf{P}\left(T_n - z_{\alpha/2} \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \leq \lambda \leq T_n + z_{\alpha/2} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \alpha.$$

Sea ahora (x_1, \dots, x_n) una muestra empírica de X , que nos da la estimación $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$ del parámetro λ . Procediendo como en el ejemplo anterior, tendríamos el intervalo de confianza (aproximadamente) $1 - \alpha$ para λ siguiente:

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}} \frac{1}{\bar{x}}, \frac{1}{1 - \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}} \frac{1}{\bar{x}}\right);$$

o estimando λ como $1/\bar{x}$, tendríamos que el intervalo

$$\left(\frac{1}{\bar{x}} - z_{\alpha/2} \frac{1}{\bar{x} \sqrt{n}}, \frac{1}{\bar{x}} + z_{\alpha/2} \frac{1}{\bar{x} \sqrt{n}}\right)$$

contiene a λ con (aproximadamente) confianza $1 - \alpha$. ♣

6.3.5. Datos (normales) apareados: diferencia de medias

Finalizamos esta sección, antes de entrar en el análisis del caso de intervalos de confianza para dos poblaciones (sección 6.4), y de hecho para diferenciarla de aquél, tratando la siguiente situación.

Pongamos que, en una cierta población, y para cada individuo, registramos la tensión arterial antes (X) y después (Y) de administrar una cierta droga. Interesa establecer un intervalo de confianza para la diferencia de las medias $\mu_X - \mu_Y$.

Modelamos el par (X, Y) con una normal bidimensional. La variable $W = X - Y$ es una variable normal, y de ella nos interesa estimar su media, pues $\mu_W = \mu_X - \mu_Y$.

La varianza de W involucra la de X , la de Y y además el coeficiente de correlación entre X e Y . En general, X e Y son dependientes y ese coeficiente de correlación será distinto de 0. Pero, afortunadamente, no se requiere información alguna sobre $\mathbf{V}(W)$.

Si tenemos la muestra empírica $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$, formamos una muestra (w_1, \dots, w_n) de W tomando las diferencias:

$$w_j = x_j - y_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tras calcular \bar{w} y s_w para esta muestra, y usando los resultados de la sección 6.3.1, concluimos que el intervalo

$$\left(\bar{w} - t_{\{n-1; \alpha/2\}} \frac{s_w}{\sqrt{n}}, \bar{w} + t_{\{n-1; \alpha/2\}} \frac{s_w}{\sqrt{n}} \right)$$

contiene a $\mu_X - \mu_Y$ con confianza de $1 - \alpha$.

Obsérvese que este intervalo se calcula usando (únicamente) la media muestral \bar{w} de los w_j y la cuasivarianza muestral s_w de los w_j .

6.4. Intervalos para dos poblaciones independientes

Nos interesamos ahora por la siguiente situación: medimos una cierta característica (por ejemplo la altura, el cociente intelectual, la renta per cápita, etc.) en dos poblaciones. La variable X representa esa característica en la primera población, e Y , en la segunda. Suponemos, como resulta natural, que X e Y son independientes.

Para establecer intervalos de confianza para, por ejemplo, la diferencia entre las medias de X y de Y , tomamos muestras de tamaño n_1 en la primera población, y de tamaño n_2 en la segunda. Vamos a tratar en detalle el caso en el que X e Y son normales (sección 6.4.1), e ilustraremos cómo analizar otras situaciones con el caso de variables Bernoulli (sección 6.4.2), apelando a resultados de normalidad asintótica.

6.4.1. Caso de dos variables normales

Tenemos dos poblaciones en las que hacemos mediciones independientes de cantidades que siguen distribuciones normales.

En la primera población tenemos que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$. El tamaño muestral en esta población es n_1 , esto es, tenemos n_1 clones $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$.

En la segunda población tenemos $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. El tamaño muestral en esta población es n_2 , esto es, tenemos n_2 clones $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$.

Además, las extracciones de muestras en las dos poblaciones son independientes unas de otras, es decir, las X_j y las Y_k son independientes.

Tenemos las medias muestrales \bar{X} y \bar{Y} , las cuasivarianzas muestrales S_1^2 y S_2^2 . Obsérvese que estas cuatro variables aleatorias son independientes. En el análisis que sigue aparecerán dos estadísticos adicionales:

a) una suerte de estadístico *cuasivarianza promedio*:

$$(6.5) \quad S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 - 1 + n_2 - 1},$$

que para el caso $n_1 = n_2$ resulta ser la media aritmética de S_1^2 y S_2^2 ;

b) y la siguiente combinación de S_1^2 y S_2^2 :

$$(6.6) \quad \tilde{S}^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}.$$

A. Intervalo para diferencia de medias

Queremos estimar $\mu_1 - \mu_2$. La variable $\bar{X} - \bar{Y}$ es una normal con parámetros

$$\bar{X} - \bar{Y} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

es decir

$$(6.7) \quad \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1).$$

Caso 1. σ_1 y σ_2 conocidas

Si *conocemos los valores de σ_1 y σ_2* , bien porque es razonable suponerlos a partir de cálculos anteriores, bien por contraste teórico, entonces (6.7) nos da directamente el siguiente intervalo para $\mu_1 - \mu_2$ con confianza $1 - \alpha$:

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x} - \bar{y}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Caso 2. σ_1 y σ_2 desconocidas

Nos ponemos ahora en la situación, más realista, en la que *no conocemos los valores de σ_1 y σ_2* . Por Fisher–Cochran, teorema 4.6, tenemos que

$$(n_1 - 1)S_1^2 \stackrel{d}{=} \sigma_1^2 \chi_{n_1-1}^2 \quad \text{y} \quad (n_2 - 1)S_2^2 \stackrel{d}{=} \sigma_2^2 \chi_{n_2-1}^2.$$

Las dos χ^2 que aquí aparecen son independientes.

Si sumamos las dos expresiones anteriores, obtenemos

$$(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 \stackrel{d}{=} \sigma_1^2 \chi_{n_1-1}^2 + \sigma_2^2 \chi_{n_2-1}^2,$$

así que, usando la definición de S_p^2 de (6.5),

$$(6.8) \quad [(n_1 - 1) + (n_2 - 1)] S_p^2 \stackrel{d}{=} \sigma_1^2 \chi_{n_1-1}^2 + \sigma_2^2 \chi_{n_2-1}^2.$$

Caso 2a. σ_1 y σ_2 desconocidas, pero iguales

Digamos que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Es decir, que aunque las varianzas son desconocidas, podemos suponer que son *iguales*. Entonces (6.8) queda

$$[(n_1 - 1) + (n_2 - 1)] S_p^2 \stackrel{d}{=} \sigma^2 (\chi_{n_1-1}^2 + \chi_{n_2-1}^2) \stackrel{d}{=} \sigma^2 \chi_{n_1-1+n_2-1}^2,$$

puesto que las dos variables χ^2 son independientes. Esto nos da que

$$S_p \stackrel{d}{=} \sigma \sqrt{\frac{\chi_{n_1-1+n_2-1}^2}{n_1 - 1 + n_2 - 1}}.$$

Además, en este caso,

$$\bar{X} - \bar{Y} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right).$$

Finalmente, como $\bar{X} - \bar{Y}$ es independiente de la χ^2 que especifica a S_p (por Fisher–Cochran y la independencia de los clones de X con los clones de Y) se tiene que

$$(6.9) \quad \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim \text{STU}(n_1 - 1 + n_2 - 1).$$



Nota 6.4.1. Basta observar que, llamando Z a una $\mathcal{N}(0, 1)$ y W a una $\chi_{n_1+n_2-2}^2$,

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = \frac{\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}}{\sqrt{W/(n_1 + n_2 - 2)}} \stackrel{d}{=} \frac{Z}{\sqrt{W/(n_1 + n_2 - 2)}}.$$

Esto nos dice que, para α fijo,

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbf{P}\left((\bar{X} - \bar{Y}) - t_{\{n_1+n_2-2; \alpha/2\}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \right. \\ &\quad \left. \leq (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{\{n_1+n_2-2; \alpha/2\}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right). \end{aligned}$$

De donde, dadas unas muestras empíricas (x_1, \dots, x_{n_1}) e (y_1, \dots, y_{n_2}) , cuyas medias muestrales son \bar{x} e \bar{y} , respectivamente, y cuyas cuasivarianzas muestrales son s_1^2 y s_2^2 , obtenemos el siguiente intervalo para $\mu_1 - \mu_2$ con confianza de $1 - \alpha$:

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{x} - \bar{y}) \pm t_{\{n_1-1+n_2-1; \alpha/2\}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

con

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 - 1 + n_2 - 1}.$$

Caso 2b. σ_1 y σ_2 desconocidas

Nos ponemos, finalmente, en la situación general en la que σ_1 y σ_2 son desconocidas, pero además *no podemos suponer* a priori que $\sigma_1 = \sigma_2$.

Ahora, desafortunadamente, no podemos sacar un factor común en (6.8). Veamos cómo podemos argumentar. El estadístico

$$\tilde{S}^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$$

es un estimador insesgado de $\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$, y es independiente de $\bar{X} - \bar{Y}$, lo que invita considerar el estadístico

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2))}{\tilde{S}}.$$

Además, \tilde{S}^2 es una combinación lineal con coeficientes positivos de las variables $X_1^2, X_2^2, \dots, X_{n_1}^2, Y_1^2, Y_2^2, \dots, Y_{n_2}^2$. Convénzase el lector repasando la demostración del teorema 4.6 de Fisher–Cochran.

Aproximamos entonces \tilde{S}^2 por un múltiplo de una χ_g^2 con un cierto número de grados de libertad g : pongamos

$$(\dagger) \quad \tilde{S}^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \stackrel{d}{\approx} \Lambda \frac{\chi_g^2}{g}$$

(dividimos la χ_g^2 por sus grados anticipando su papel en una t de Student por venir).

¿Qué valores deberíamos asignar a Λ y a g ? Si igualamos esperanzas en (\dagger) , tendríamos que

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \approx \Lambda,$$

puesto que $\mathbf{E}(\chi_g^2) = g$. Y si igualamos varianzas en (\dagger) , tendríamos que

$$\frac{\sigma_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{\sigma_2^4}{n_2^2(n_2-1)} \approx \frac{\Lambda^2}{g},$$

pues S_1^2 y S_2^2 son independientes y $\mathbf{V}(\chi_g^2) = 2g$. La conclusión es que

$$\Lambda \approx \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \quad \text{y} \quad g \approx \frac{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\sigma_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{\sigma_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

Esto nos daría que

$$\tilde{S}^2 \stackrel{d}{\approx} \left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \frac{\chi_g^2}{g}$$

y (casi finalmente) que

$$(6.10) \quad \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \stackrel{d}{\approx} \frac{((\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)) / \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}{\sqrt{\chi_g^2/g}},$$

que es una t de Student con g grados de libertad, pues el par (S_1^2, S_2^2) es independiente del par (\bar{X}, \bar{Y}) .

Parece que con esto ya tendríamos suficiente, pero obsérvese que el valor dado para g no es un entero (esto no es grave), y, sobre todo, que depende de las desconocidas σ_1^2 y σ_2^2 . Obtenemos un valor sensato de g aproximando σ_1^2 y σ_2^2 por sus estimaciones s_1^2 y s_2^2 , y buscando el entero más próximo:

$$g = \text{entero más próximo a } \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{(n_1-1)} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{(n_2-1)}}$$

El intervalo para $\mu_1 - \mu_2$ con confianza $(1 - \alpha)$ resulta entonces

$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\{g; \alpha/2\}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

B. Intervalo para cociente de varianzas

El argumento aquí es bien directo. Como

$$(n_1 - 1)S_1^2 \stackrel{d}{=} \sigma_1^2 \chi_{n_1-1}^2 \quad \text{y} \quad (n_2 - 1)S_2^2 \stackrel{d}{=} \sigma_2^2 \chi_{n_2-1}^2,$$

y además S_1^2 y S_2^2 son independientes, tenemos que

$$(6.11) \quad \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \stackrel{d}{=} \frac{\chi_{n_1-1}^2/(n_1-1)}{\chi_{n_2-1}^2/(n_2-1)} \sim F_{n_1-1, n_2-1}.$$

Así que, con probabilidad $(1 - \alpha)$, se tiene que

$$F_{\{n_1-1, n_2-1; 1-\alpha/2\}} \leq \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \leq F_{\{n_1-1, n_2-1; \alpha/2\}},$$

lo que nos da el siguiente intervalo con confianza $1 - \alpha$ para el cociente σ_1^2/σ_2^2 :

$$\left(\frac{1}{F_{\{n_1-1, n_2-1; \alpha/2\}}} \frac{s_1^2}{s_2^2}, \frac{1}{F_{\{n_1-1, n_2-1; 1-\alpha/2\}}} \frac{s_1^2}{s_2^2} \right)$$

6.4.2. Caso de dos proporciones

Tenemos dos poblaciones independientes de las que nos interesa comparar las proporciones con las que se da una determinada característica.

- En la primera, tenemos $X \sim \text{BER}(p_1)$ y una muestra de tamaño n_1 . Los clones son X_1, \dots, X_{n_1} .
- En la segunda, tenemos $Y \sim \text{BER}(p_2)$ y una muestra de tamaño n_2 . Los clones son Y_1, \dots, Y_{n_2} .
- Las variables $X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ son independientes.

Nos interesa estimar $p_1 - p_2$.

Atendemos sólo al caso en que n_1 y n_2 son grandes para apelar al teorema del límite central (o a la aproximación de la binomial por la normal).

Tenemos que

$$\bar{X} \stackrel{d}{\approx} p_1 + \sqrt{p_1(1-p_1)/n_1} \mathcal{N}_X \quad \text{y que} \quad \bar{Y} \stackrel{d}{\approx} p_2 + \sqrt{p_2(1-p_2)/n_2} \mathcal{N}_Y,$$

donde \mathcal{N}_X y \mathcal{N}_Y son normales estándar independientes. Por tanto,

$$(6.12) \quad \bar{X} - \bar{Y} \stackrel{d}{\approx} p_1 - p_2 + \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \mathcal{N}$$

donde \mathcal{N} es una normal estándar.

Con esto obtendríamos un intervalo para $p_1 - p_2$, centrado en $\bar{x} - \bar{y}$, pero en cuyo error aparecerían de nuevo p_1 y p_2 . Con el mismo truco/aproximación del caso de estimación de la proporción de una sola población, es decir, reemplazando (en el error sólo) p_1 por \bar{x} y p_2 por \bar{y} , obtenemos el intervalo de confianza $1 - \alpha$ siguiente:

$$p_1 - p_2 = \bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n_1} + \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{n_2}}$$

6.5. Resumen: intervalos de confianza más habituales

6.5.1. Intervalos I de confianza $1 - \alpha$ para una distribución

Denotamos por \bar{x} a la media y s^2 a la cuasivarianza de la muestra (x_1, \dots, x_n) de tamaño n de la variable X . Los intervalos que siguen son con confianza $1 - \alpha$.

A. El caso de la normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

A1. Intervalos para la media μ

Caso 1. Suponiendo que σ^2 es conocida:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1) \longrightarrow \text{Intervalo: } I = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Caso 2. Si σ^2 es desconocida:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} t_{n-1} \longrightarrow \text{Intervalo: } I = \left(\bar{x} \pm t_{\{n-1; \alpha/2\}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

(véase el apartado 6.3.1).

A2. Intervalo para la varianza σ^2

$$\text{Estimador: } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \stackrel{d}{=} \chi_{n-1}^2 \longrightarrow \text{Intervalo: } I = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\{n-1; \alpha/2\}}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\{n-1; 1-\alpha/2\}}^2} \right)$$

(véase el apartado 6.3.1).

B. Otros ejemplos

B1. Intervalo para p en la Bernoulli. Para n grande,

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(0, 1) \longrightarrow \text{Intervalo: } I = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \right)$$

(véase el apartado 6.3.2).

B1. Intervalo para λ en la Poisson. Para n grande,

$$\frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(0, 1) \longrightarrow \text{Intervalo: } I = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} \right)$$

(véase el apartado 6.3.3).

6.5.2. Intervalos I de confianza $1 - \alpha$ para dos distribuciones

A. Dos normales, $X = \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y = \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

DATOS:

- Muestra de X de tamaño n_1 . Media muestral \bar{x}_1 y cuasivarianza muestral s_1^2 .
- Muestra de Y de tamaño n_2 . Media muestral \bar{x}_2 y cuasivarianza muestral s_2^2 .

A1. Intervalos para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$

- si σ_1, σ_2 conocidas:

$$I = \left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

- si σ_1, σ_2 desconocidas, pero $\sigma_1 = \sigma_2$:

$$I = \left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\{n_1+n_2-2; \alpha/2\}} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

donde

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}.$$

- si σ_1, σ_2 desconocidas, pero $\sigma_1 \neq \sigma_2$:

$$I = \left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\{f; \alpha/2\}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right)$$

donde f es el entero más próximo a $\frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$.

A2. Intervalo para el cociente de varianzas σ_1^2/σ_2^2 .

$$I = \left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\{n_1-1, n_2-1; \alpha/2\}}}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\{n_1-1, n_2-1; 1-\alpha/2\}}} \right)$$

Véase el apartado 6.4.1.

B. Comparación de proporciones p_1, p_2

DATOS:

- muestra de tamaño n_1 de la variable $X_1 \sim \text{BER}(p_1)$, media muestral \bar{x}_1 .
- muestra de tamaño n_2 de la variable $X_2 \sim \text{BER}(p_2)$, media muestral \bar{x}_2 .

Tanto n_1 como n_2 son grandes.

Intervalo de confianza para $p_1 - p_2$:

$$I = \left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{x}_1(1-\bar{x}_1)}{n_1} + \frac{\bar{x}_2(1-\bar{x}_2)}{n_2}} \right)$$