Compacidad.

1. Estudia si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican.

- $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología del límite inferior $\mathcal{T}_{[\,)}$.
- $[0,1] \times \{3\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico.

2.

- Demostrar que $\mathbb{R}^2$ y S^2 no son homeomorfos.
- Sean $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$, $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demostrar que X_1 es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y que X_1 y X_2 no son homeomorfos.
- Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 = y^2, \ x, y \in [-1,1]\}$, con la topología usual. ¿Existe alguna función continua y sobreyectiva de X en $\mathbb{R}$?.

3. ¿Son $[0,1] \times [0,1]$ y $[0,1) \times [0,1]$ espacios compactos con la topología del orden lexicográfico?, ¿son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico?

4. Decir cuáles son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, con la topología de los complementos numerables y, finalmente, con la topología discreta.

Demostrar que los conjuntos compactos en la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ son necesariamente numerables [1].

5. Prueba que si X es un espacio compacto y $A \subset X$ entonces $\overline{A}$ es compacto. Demuestra también que $\mathcal{B} = \{\{0, n\} \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{Z}$ en la que $A = \{0\}$ es compacto pero $\overline{A}$ no lo es. ¿Contradice esto lo anterior?.

6. Demostrar que si $f : X \to Y$ es continua, Y es Hausdorff y X es compacto, entonces f es cerrada. Deducir que si f es además una biyección, entonces es un homeomorfismo.

7.

1. Demostrar que si Y es compacto entonces $p_1 : X \times Y \to X$ es cerrada[2]. Dar un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ cuyas proyecciones sean compactas.
2. Sea X un espacio topológico e Y un espacio de Hausdorff compacto. Probar que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la gráfica de f, Γ_f, es cerrada en $X \times Y$. Si X es también un espacio de Hausdorff compacto, entonces f es continua si y sólo si Γ_f es compacta [3].

---

[1] *Sugerencia*: Usar el hecho de que en un conjunto no numerable hay siempre una sucesión estrictamente creciente.

[2] Indicación: Si A es cerrado y $x \notin p_1(A)$, hallamos un "tubo" $T = U_x \times Y$ tal que $T \cap A = \emptyset$.

[3] Indicación: La clave de la demostración está en probar que $f^{-1}(C) = p_1\big((X \times C) \cap \Gamma_f\big)$ para todo C cerrado de Y y luego basta usar el ejercicio anterior.

8. Sea (X,d) un espacio métrico.

1. Si X es compacto, prueba que la función distancia está acotada.
2. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Demostrar que la función $d(x,K) = \inf\{d(x,y) : y \in K\}$ es continua, y que para cada $x \in X$ existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$.
3. Demostrar que si B_n es una sucesión de bolas cerradas encajadas en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset\,.$$

9. Sea X un espacio compacto.

- Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de X en $[0,1]$ tales que si $f, g \in \mathcal{F}$ entonces $fg \in \mathcal{F}$, y para cada $x \in X$ existe $f \in \mathcal{F}$ y un entorno $U(x)$ con $f(U(x)) = 0$. Demuestra que $\mathcal{F}$ contiene a la función nula.
- Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}^+$ tales que si $f, g \in \mathcal{F}$ entonces existe $h \in \mathcal{F}$ con $h \leq \min(f,g)$, y para todo $x \in X$, $\inf\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} = 0$. Demuestra que para todo $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

10. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. La unión finita de subconjuntos compactos de un espacio es un subconjunto compacto.
2. La unión de una familia cualquiera de compactos de un espacio es un subconjunto compacto.
3. La intersección de una familia cualquiera de compactos es un subconjunto compacto[4]
4. La intersección de una familia de compactos de un espacio de Hausdorff es un subconjunto compacto.
5. Existe un recubrimiento de $[0,1]$ por intervalos cerrados que no admite ningún subrecubrimiento finito.
6. Si un espacio es compacto con cierta topología, entonces lo es necesariamente con una menos fina.
7. Si un espacio es compacto con cierta topología, entonces lo es necesariamente con una más fina.

[4] Indicación: considera en $[0,1]$ la topología cuya base es $\mathcal{B} = \{(a,b) : 0 < a < b < 1\} \cup \{(0,1]\} \cup \{[0,1)\}$.