NÚMEROS EN NOTACIÓN POSICIONAL

Definición: Sea $b \in \{2, \dots\} : \mathbb{N} \setminus \{1\}$ base

y por $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea $\{a_j\}_{j=-m}^{n} \subset \{0, 1, \dots, b-1\}$ dígitos

el número racional $x = \sum_{j=-m}^{n} a_j b^j = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0 +$

$+ a_{-1} b^{-1} + \dots + a_{-m} b^{-m}$ se escribe en base b como:

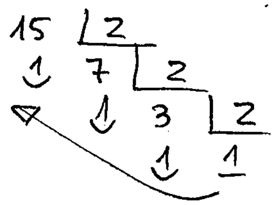
$$X_b = a_n a_{n-1} \cdots a_0 a_{-1} \cdots a_{-m}.$$

Ejemplos:

① $b = 10$, $x = 754 \longrightarrow X_{10} = 754$

② $b = 16$, $X = CAFE_{16} \longrightarrow X_{10} = 12.16^3 + 10.16^2 + 15.16^1 + 14.16^0 = 51966$

③ $b = 2$, $15_{10} = 1111_2$



Definición: Sean $x, b \in \mathbb{N}$.

- $\mathrm{mod}(x, b)$ es el resto de la división x/b
- $\left[\frac{x}{b}\right]$ es la parte entera de $\frac{x}{b}$.

Entonces: $\mathrm{mod}(x,b) = x - \left[\frac{x}{b}\right] b \Longrightarrow \underbrace{x = \left[\frac{x}{b}\right] b + \mathrm{mod}(x,b)}$

$$x = r_1 . b + a_0$$

Si $r_1 > 0$:

$$r_1 = \left[\frac{r_1}{b}\right] b + \mathrm{mod}(r_1, b)$$

$$r_1 = r_2 b + a_1$$

iterando obtenemos el algoritmo

Ejemplos:

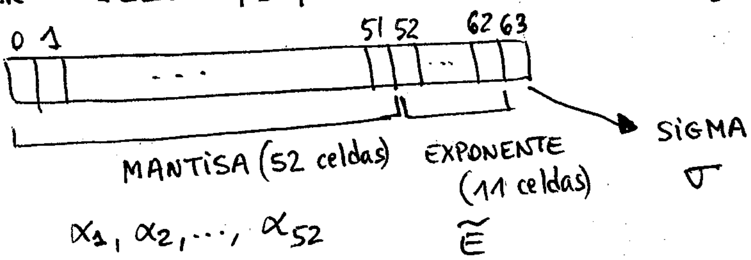
$x = 74_{10}$ y queremos $b = 3$

$$\left.\begin{array}{l} 74 = 24.3 + 2 \\ 24 = 8.3 + 0 \\ 8 = 2.3 + 2 \\ 2 = 0.3 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow X_3 = 02202_3 = 2202_3 = 74_{10}$$

$\boxed{\text{NÚMEROS DE PUNTO FLOTANTE}}$

DOBLE PRECISIÓN: números que ocupan 64 bits

ESTÁNDAR: IEEE 754 $b = 2$



Entonces los números se almacenan como:

$$X = (-1)^{\sigma}\, 1,\alpha_1 \dots \alpha_{52} \cdot 2^{E} \quad \text{donde} \quad E = \tilde{E} - 1023$$

$$0 \leq \tilde{E} \leq 2047$$

underflow (0) infinito, INF, ∞ (2047)

Entonces nos quedamos con 2046 valores posibles de exponente

Como $E = \tilde{E} - 1023$ y $\tilde{E} \in \{1, \dots, 2046\}$,

$$E \in \{-1022, \dots, 1023\}$$

REALMAX (matlab) = número más grande representable $= 1,11\dots1 . 2^{1023} \approx 1,8 . 10^{308}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = (2 - 2^{52}) . 2^{1023} \approx$

REALMIN (matlab) = número en valor absoluto más pequeño $= 1,000\dots0 \cdot 2^{-1022} \approx 2,2 . 10^{-308}$

Llamamos N_{max} como [realmax]

- $\alpha_i = 1$, $E = 52$ $\Rightarrow$ $x_{10} = 2^{53} - 1$
- $\alpha_i = 0$, $E = 53$ $\Rightarrow$ $x_{10} = 2^{53}$

a partir de aquí, los enteros representables van de 2 en 2 ... 4 en 4 .. dependiendo de la mantisa y el exponente.

FLINTMAX (matlab) $= 2^{53}_{(10)}$ $\rightarrow$ es el entero más grande hasta el que se pueden representar <u>todos</u> los enteros.

$$x = 1 + 2^{-53} \overset{FLP64}{=} 1$$

$x = 1 + 2^{-52}$ (sí se puede representar) $\alpha_1 = \dots = \alpha_{51} = 0$, $\alpha_{52} = 1$, $E = 0$

$x = 1 - 2^{-53}$ $\alpha_1 = \dots = \alpha_{52} = 1$, $E = -1$.

$\underset{\epsilon}{\overset{\parallel}{eps}} = 2^{-52}$ número más pequeño que se puede sumar al 1

Ejemplo

① $N = 2^{53}$
$M = N + 1$
$Q = M - N$
¿Q? $\rightarrow Q = 0$

② $P1 = 2^{53} + 1 - 2^{53}$
$P2 = 2^{53} - 2^{53} + 1$
$R = P2 - P1$
¿R? $\rightarrow R = 1$

③ $x = (0'1 + 0'3) + 0'7$
$y = (0'3 + 0'7) + 0'1$
$r = y - x$
¿r? $\rightarrow r \neq 0$
muy cercano a cero pero no igual

esto es porque 0'1, 0'3 y 0'7 no tienen representación finita en binario en floating point.

ANÁLISIS DE LOS ERRORES

DEFINICIÓN: Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\hat{x}$ el resultado de una evaluación numérica de x. El ERROR ABSOLUTO se define como:

$$E_{abs}(\hat{x}) = |x - \hat{x}|$$

El ERROR RELATIVO se define como: $E_{rel}(\hat{x}) = \dfrac{|x-\hat{x}|}{|x|}$

Si $x \in \mathbb{R}$ y $\hat{x}$ es su representación en flp64, entonces:

$$E_{rel}(\hat{x}) \sim 2^{-53} = \frac{1}{2}\epsilon$$

PROPAGACIÓN DE LOS ERRORES: ERRORES DE ARITMÉTICA

PROPOSICIÓN: Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ números.

1. $y = x_1 + x_2$, $\hat{y} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \Rightarrow E_{abs}(\hat{y}) \lesssim E_{abs}(\hat{x}_1) + E_{abs}(\hat{x}_2)$
2. $y = x_1 \cdot x_2$, $\hat{y} = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \Rightarrow E_{rel}(\hat{y}) \lesssim E_{rel}(\hat{x}_1) + E_{rel}(\hat{x}_2)$

Demostración $\hat{x}_1 = x_1 + \delta_1$, $\hat{x}_2 = x_2 + \delta_2$

1. $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = x_1 + x_2 + \delta_1 + \delta_2$

   $\hat{y} = y + (\delta_1 + \delta_2)$

$\to \varepsilon^2$ muy pequeñ

2. $\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 = (x_1 + \delta_1)(x_2 + \delta_2) = x_1 x_2 + x_1\delta_2 + x_2\delta_1 + \delta_1\delta_2$

   $\hat{y} = y + x_1\delta_2 + x_2\delta_1 \Rightarrow \hat{y} - y = x_1\delta_2 + x_2\delta_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\hat{y}-y}{y} = \frac{x_1\delta_2 + x_2\delta_1}{x_1 x_2} = \frac{\delta_1}{x_1} + \frac{\delta_2}{x_2}$$

CONDICIONAMIENTO NUMÉRICO

$x \in \mathbb{R}$, $\hat{x} = x + \delta$ $\qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y = f(x)$, $\hat{y} = f(\hat{x})$

PROPOSICIÓN: $f \in C^1\big((x_0-\beta, x_0+\beta)\big)$

$x_0, \beta \in \mathbb{R}$

$\delta \in \mathbb{R}$

$f'(x_0) >> \delta$

$$E_{rel}(\hat{y}) \leq \overset{\text{condicionamiento numérico}}{C_f(x_0)} . E_{rel}(\hat{x}_0)$$

donde $C_f(x) = \dfrac{|x . f'(x)|}{|f(x)|}$

$$E_{rel}(\hat{x}_0) = \frac{\delta}{|x_0|}$$

demostración

$$|\hat{y} - y| = |f(\underbrace{x_0 + \delta}_{\hat{x}_0}) - f(x_0)| \leq |f'(x_0)||\delta| + O(\delta) \lesssim$$

$$\frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} \xrightarrow{\delta \to 0} f'(x_0)$$

Equivalentemente.

$$f(x_0+\delta) = f(x_0) + f'(x_0)\,\delta + O(\delta)$$

Entonces

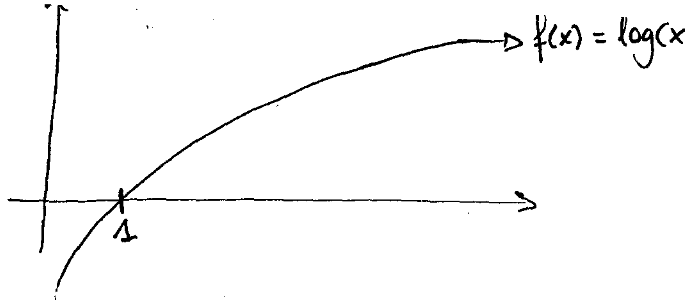
$$|f(x_0+\delta) - f(x_0)| \leq |f'(x_0)||\delta| + O(\delta)$$

$$\lesssim |f'(x_0)||\delta|$$

Entonces:

$$\underbrace{\frac{|\hat{y} - y|}{|y|}}_{E_{rel}(\hat{y})} \lesssim \frac{|x_0 . f'(x_0)|}{|f(x_0)|} . \frac{|\delta|}{|x_0|} = C_f(x_0) . E_{rel}(\hat{x}_0)$$

Ejemplo: $f(x) = \log(x)$



$$C_f(x) = \frac{|x \cdot f'(x)|}{|f(x)|} = \frac{1}{|\log x|}$$

$$\hat{y} = f(\hat{x})$$

$$E_{rel}(\hat{y}) \lesssim \frac{1}{|\log x|} \cdot E_{rel}(\hat{x})$$

ERRORES DE CANCELACIÓN

Problema: calcular con un ordenador las soluciones de:

$x^2 - 2px - q = 0$ en el caso $0 < |q| \ll p^2 < 1$

$$x_+ = p + \sqrt{p^2+q}$$

$$x_- = p - \sqrt{p^2+q} = p\left(1 - \sqrt{1+\frac{q}{p^2}}\right)$$

pregunta: ¿cómo calcular x_- con buena precisión?

$$p\left(1 - \sqrt{1+\frac{q}{p^2}}\right) = p\,\frac{1-(1+q/p^2)}{1+\sqrt{1+q/p^2}} = -p \cdot \frac{q/p^2}{1+\sqrt{1+q/p^2}} = -\frac{q}{p}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+q/p^2}}$$

$$\approx -\frac{q}{2p}$$

Otra forma: Fórmula de Taylor

$$f(x) \overset{x \sim 0}{=} \sqrt{1+x} = f(0) + f'(0)x + O(x) = 1 + \frac{x}{2} + O(x)$$

▸ Ejemplo 2

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$$ ¿ límite cuando $x \to 0$? $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

pero $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \forall x < x_0$ en fl. p. en 64

pregunta 1 : $x_0 = ?$

pregunta 2 : como resolverlo ?

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{5!} + O(x^6)$$

$$- 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{5!} = 2x + \frac{x^3}{3} + O(x$$

$1 + 2^{-53} = 1$ (fl64) , $2^{-53} \approx 1.1 . 10^{-16}$

Si $x = 10^{-8} \Rightarrow e^x = 1 + x$, $e^{-x} = 1 - x$

Entonces $f(x) = 1$

Pero si $x = 10^{-16} \Rightarrow e^x = e^{-x} = 1 \Rightarrow f(x) = 0$

Resolvemos el problema utilizando Taylor:

$f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + O(x^4)$ en un ordenador esto es más preciso que la expresión inicial y guardaría los términos al cubo.

SOLUCIONES DE ECUACIONES (no lineales)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$

$f(x)$ polinomio de grado 2 (Babilonia 1800 a.C.)

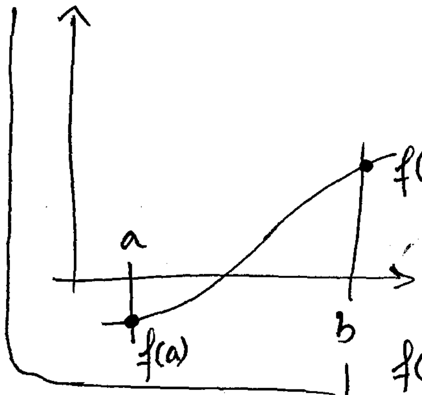
polinomio de grado 3 ó 4 ($\gtrsim$ siglo XVI)

polinomio de grado $\gtrsim 5$ (siglo XIX Ruffini, Abel, Galois)

MÉTODO DE BISECCIÓN

Se basa en el Th. Bolzano: si $f \in C([a,b])$ tal que $f(a) \cdot f(b) \leq 0$

$\Rightarrow \exists c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.



demostración:

- $f(a) \cdot f(b) = 0 \Rightarrow f(a)$ ó $f(b) = 0$
- $f(a) f(b) < 0 \Rightarrow a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$

$\left.\begin{array}{l} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \\ \text{cont.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c / f(c) = 0$

Si $f(c_0) = 0$ terminamos.

Si $f(c_0) \neq 0$ definimos las sucesiones: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$

$$\begin{cases} \to f(a_n) \cdot f(c_n) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n , \; b_{n+1} = c_n \\ \to f(b_n) \cdot f(c_n) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = c_n , \; b_{n+1} = b_n \end{cases} \Rightarrow c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$$

$n \geq 0$

Si hay n_0 tal que $f(c_{n_0}) = 0$ nos paramos.

$a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$ $\forall n \geq 0$

$a \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq b$

Como es una sucesión monótona y creciente ($\{a_n\}$) ó decreciente ($\{b_n\}$)

$\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{n \to \infty} b_n \in \mathbb{R}$

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n \geq 1$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} c_n = c$$

Como f es continua $\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) = \lim_{n \to \infty} f(c_n) = f(c)$

y sabemos que $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ $\forall n \geq 0$ $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) \cdot \lim_{n \to \infty} f(b_n) \leq 0 \Rightarrow (f(c))^2 \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$

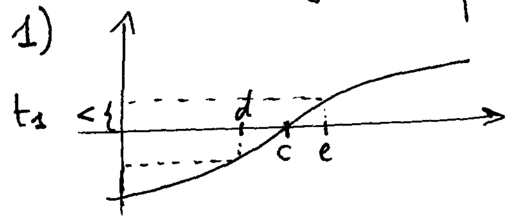
Condiciones de salida:

1) $|f(c_n)| < t_1$ → valores definidos

2) $|c_n - c| < t_2$ → por el usuario

Ambas tienen algunos problemas:

1)



d, e son los números con representac[ión] en floating point más cercanos a c. Si f(e) ó f(d) − f(cn) > t1 nunca se va a cumplir la condición de salida

2) No conocemos c.

$$|c_n - c| \leq |c_n - c_{n-1}| = \frac{b-a}{2^{n+1}} = E_n$$

Entonces podemos mejorar 2) con 2') $E_n < t_2$ pero aun tiene problemas:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < t_1 \iff 2^n > \frac{b-a}{2t_1}.$$

El número máximo de iteraciones es finito: $n_{iter\,máx} = \log_2 \frac{b-a}{2 \cdot t_1}$

Por lo que si se requiere una precisión muy alta, el número de iteraciones máximo puede ser menor que el necesario para alcanzar esa precisión.

Si esto $\leq 2^{-53}$ es igual a cero.

$$c_n = c_{n-1} \pm E_n = c_{n-1}\left(1 \pm \frac{E_n}{|c_{n-1}|}\right) \qquad \boxed{\frac{E_n}{|c_{n-1}|} \geq 2^{-53}} \; (*)$$

a) $(*) \iff E_n \geq 2^{-53} |c_{n-1}| \geq 2^{-53} \cdot \min\{|a|, |b|\}$

2') $E_n < t_2$; $\boxed{t_2 \geq 2^{-53} \cdot \min\{|a|, |b|\}}$

b) $(*) \iff \dfrac{b-a}{2^{n+1}|c_{n-1}|} \geq 2^{-53} \iff 2^n \leq \dfrac{2^{52} \cdot (b-a)}{|c_{n-1}|} \iff$

$$\iff \boxed{n \leq 52 + \log_2 \frac{|b-a|}{|c_{n-1}|}}$$

Pseudocódigo bisección : INPUT: f, a, b, t_1, t_2, NMAX

OUTPUT : c

```
bisección (f, a, b, t1, t2, NMAX):
    if f(a)·f(b) > 0 :
        error;
    end

    if f(a) = 0 :
        c = a , return;
    elseif f(b) = 0 :
        c = b , return;
    end

    c = (a+b)/2 , n = 0 ;
    while (|f(c)| > t1) AND ((b-a) > 2t2) AND n < NMAX :
        if f(a) f(c) < 0 :
            b = c ;
        elseif f(b)f(c) < 0 :
            a = c ;
        end
        c = (a+b)/2 , n = n+1;
    end
end
```

condición potencialmente frágil

mejoras

opcional (pero quitándolo ganamos eficiencia)

MEJORAS:

a) Al principio del código podemos añadir:

```
if a > 0 OR b < 0 :
    t2 = max{t2, 2^-53 · min{|a|, |b|}} ;
end
```

b) En lugar de $n < NMAX$ poner:

lo que nos ha dado el usuario (hay que almacenarlo al principio)

$$n \leq \min\left\{\log_2\left(\frac{b_0-a_0}{|c|}\right)+52 \ , \ NMAX\right\}$$

ORDEN DE CONVERGENCIA

Definición: Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ decimos que:

i) x_n converge a $c \in \mathbb{R}$ linealmente si $\exists \mu \in (0,1)$ tal que

$$\frac{|x_{n+1} - c|}{|x_n - c|} \xrightarrow{n\to\infty} \mu$$

ii) x_n converge a $c \in \mathbb{R}$ al orden $q > 1$ si $x_n \to c$ y $\exists \mu > 0$ tal que $\dfrac{|x_{n+1} - c|}{|x_n - c|^q} \xrightarrow{n\to\infty} \mu$.

iii) x_n converge a $c \in \mathbb{R}$ al menos al orden $q \geq 1$ si $\exists \{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $|x_n - c| \leq a_n$ y $a_n \to 0$ al orden q.

Proposición: Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$: (>0)

i) Si $a_n \to 0$ linealmente con constante $\mu\ (<1)$ entonces $\forall L \in (\mu, 1)$ $\exists K_L > 0$: $\boxed{a_{k+n} \leq L^n \cdot a_k}$ $\forall k > K_L$, $\forall n \geq 1$.

ii) Si $a_n \to 0$ al orden $q > 1$ $\Rightarrow \forall L \in (0,1)$ $\exists K_L > 0$: $\boxed{a_{k+n} \leq L^{q^n - 1} \cdot a_k}$ $\forall k > K_L$, $\forall n \geq 1$.

Ejercicio: bisección converge al menos linealmente.

$$|c_k - c| \leq \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{2^k} = a_k$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2} = \mu < 1.$$

Demostración: ① si $\exists \mu \in (0,1) : \frac{a_{k+1}}{a_k} \xrightarrow{k\to\infty} \mu \Rightarrow \forall L \in (\mu, 1) \ \exists K_L :$
$a_{k+n} \leq L^n \cdot a_k \quad \forall k \geq K_L \quad \forall n \geq 1.$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_\varepsilon : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} - \mu \right| < \varepsilon \quad \forall k > k_\varepsilon \Rightarrow a_{k+1} < a_k(\mu + \varepsilon)$$

Sea ε: $L = \mu + \varepsilon < 1$, $a_{k+1} < L \cdot a_k \quad \forall k > K_L \Rightarrow$
induce $\to K_L$

$$\Rightarrow a_{k+n} < L \cdot a_{k+n-1} < L^2 \cdot a_{k+n-2} < \dots < L^n \cdot a_k$$

② Sabemos que $a_k \to 0$ y $\frac{a_{k+1}}{a_k^q} \to \mu \in (0, \infty)$, $q \in (1, \infty)$ $\Rightarrow \forall L \in (0,1)$
$\exists K_L > 0$, $a_{k+n} < L^{q^n - 1} \cdot a_k \quad \forall k > K_L, \ \forall n \geq 1.$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon > 0 : a_{k+1} < (\mu+\varepsilon) \cdot a_k^q \Rightarrow a_{k+2} < (\mu+\varepsilon) \cdot a_{k+1}^q <$
$< (\mu+\varepsilon)\left((\mu+\varepsilon)\, a_k^q\right)^q$

$$a_{k+n} < a_k^{q^n} \cdot (\mu+\varepsilon)^{\overbrace{1+q+\dots+q^{n-1}}^{\text{suma geométrica}}} = a_k^{q^n} \cdot (\mu+\varepsilon)^{\frac{q^n-1}{q-1}} =$$

$$= a_k \cdot a_k^{q^n - 1} (\mu+\varepsilon)^{\frac{q^n-1}{q-1}} \Rightarrow a_{k+n} < \Big(\underbrace{a_k (\mu+\varepsilon)^{1/q-1}}_{L \text{ ya que } a_k \to 0}\Big)^{q^n - 1} \cdot a_k \quad \forall k > k_\varepsilon$$

Como $a_k \to 0 \Rightarrow \forall L < 1 \quad \exists \tilde{K}_L : a_k(\mu+\varepsilon)^{1/q-1} < L \quad \forall k > \tilde{K}_L$

Escogemos K_L como $\max\{\tilde{K}_L, k_\varepsilon\}$.

$\{a_k\} \subset \mathbb{R}_+ \; : \; |x_k - c| \leq a_k$

¿cuántos dígitos decimales de precisión generamos con n iteraciones?
Llamamos D_n a este número.

$a_{k+n} \leqslant 10^{-D_n} \cdot a_k \quad k > \bar{k}$

¿cuánto vale D_n?

i) Si tenemos convergencia lineal: $10^{-D_n} = L^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_n = \log_{10}\left(\frac{1}{L}\right) \cdot n$$

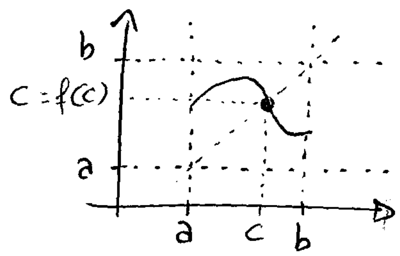
ii) Si tenemos convergencia $q > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_n = \left(\log_{10} \frac{1}{L}\right) q^n$$

ITERACIONES DE PUNTO FIJO

TEOREMA (Brouwer): Sea $g \in C([a,b])$ tal que $g([a,b]) \subset [a,b]$

$\Rightarrow \exists c \in [a,b] : g(c) = c$. c = punto fijo de g



demostración

Sea $f(x) = x - g(x)$

$\to f(a) = a - g(a) < 0 \quad (g(a) \geqslant a)$

$\to f(b) = b - g(b) > 0 \quad (g(b) \leqslant b)$

$\Rightarrow$ por el teorema de Bolzano $\exists c \in [a,b] : f(c) = 0$

DEFINICIÓN: Una $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ se dice una CONTRACCIÓN si $\exists L < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ $\forall x,y \in [a,b]$.

TEOREMA (Banach-Caccoppoli): Sea $g:[a,b] \to [a,b]$ contracción (con constante L) entonces:

i) Su punto fijo es único ($c \in [a,b]$).

ii) La sucesión definida por $x_{k+1} = g(x_k)$ converge a c $\forall x_0 \in [a,b]$.

punto inicial sucesión

demostración

i) Sean $c, d \in [a,b]$ puntos fijos de g.

$$|c-d| = |g(c) - g(d)| \leq L|c-d| \Rightarrow \underbrace{(1-L)}_{L<1 \Rightarrow 1-L \in (0,1)}\underbrace{|c-d|}_{=0} \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow c = d$.

ii) $|x_k - c| = |g(x_{k-1}) - g(c)| \leq L|x_{k-1} - c| \leq \dots \leq L^k |x_0 - c|$

como $L \in (0,1) \Rightarrow L^k|x_0 - c| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ $\forall x_0 \in [a,b]$

Observación: $x_k \to c$ al menos linealmente:

$a_k = L^k|x_0 - c|$, $\mu = L < 1$

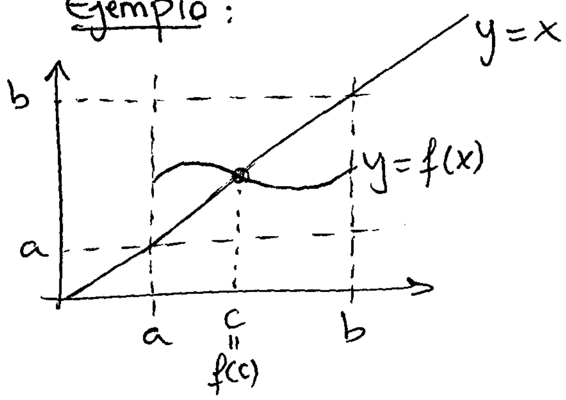
Resolver $f(c) = 0$ buscando c. $g(c) = c$, donde

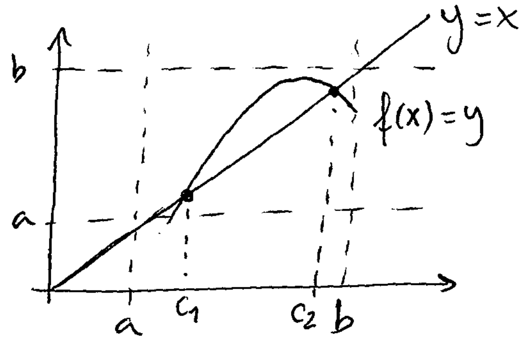
$g(x) = x - \lambda f(x) \quad \forall \lambda \neq 0$ $\boxed{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$ (método de Newton aproximadamente)

Porque como $g(c) = c \to g(c) = c - \lambda f(x) \to c = c - \lambda f(x) \to$
$\to 0 = -\lambda f(x)$ como $\lambda \neq 0 \to f(x) = 0$.

<u>TEOREMA</u>: (Ostrowski): Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tiene un punto fijo $c \in \mathbb{R}$ $(g(c) = c)$. Si $\exists h > 0 : g \in C^1([c-h, c+h])$ y $|g'(c)| < 1 \Rightarrow \exists \delta \in (0,h) : \forall x_0 \in [c-\delta, c+\delta]$ la iteración de punto fijo converge a c.

<u>Ejemplo</u>:





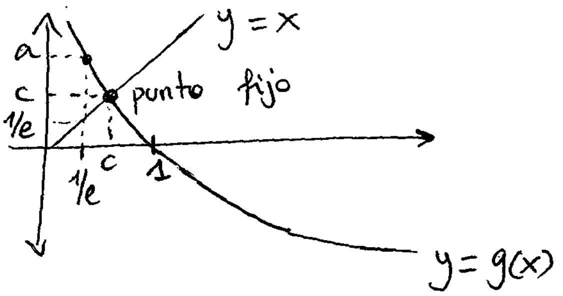
(*)

$|g(x) - g(y)| = |g'(z)||x-y|$ si $g'(z) < 1 \Rightarrow$ contracción

(*) Hemos perdido la unicidad del punto fijo debido a que no es una contracción.

<u>Ejemplo</u>: Sea $a > 0$, y $g(x) = -a\log(x)$ $(x>0)$

Buscamos x_0 t.q. $g(x_0) = x_0$

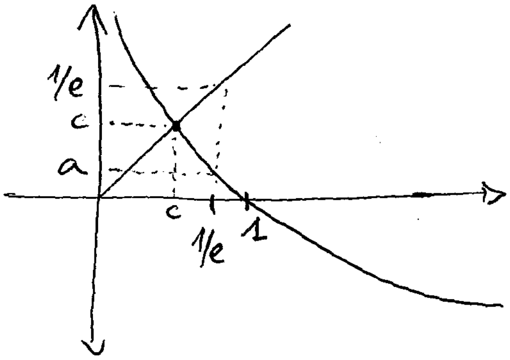


$g'(x) = -\frac{a}{x}$; $|g'(x)| = \frac{a}{x}$

$|g'(c)| < 1 \iff \frac{a}{c} < 1 \iff a < c$

y tal que $g(y) = a \iff y = \frac{1}{e}$

- Si $1/e < a \Rightarrow c < a$ X
- Si $1/e = a \Rightarrow g' = 1$ X



• Si $1/e > a \Rightarrow c > a$ ✓

TEOREMA: Sea $g \in C^n([c-h, c+h])$ y $g'(c) = g''(c) = \cdots = g^{(n-1)}(c) = 0$, $g^{(n)}(c) \neq 0$. $\Rightarrow$ la iteración de punto fijo converge al ORDEN n y $\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-c|}{|x_k-c|^n} = \frac{g^{(n)}(c)}{n!}$

$x_{k+1} = g(x_k)$

demostración

$$x_{k+1} - c = g(x_k) - g(c) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{g^{(j)}(c)}{j!}(x_k-c)^j}_{=0} + \frac{g^{(n)}(\xi_k)}{n!}(x_k-c)^n$$

$\xi_k \in (x_k, c)$

$\xi_k \to c$

$$\Rightarrow \frac{|x_{k+1}-c|}{|x_k-c|^n} = \frac{g^{(n)}(\xi_k)}{n!} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{g^{(n)}(c)}{n!} \qquad \square$$

Ejercicio: Sea $g \in C^1([c-h, c+h])$ $g(c) = c$ $0 < |g'(c)| < 1$ la iteración de punto fijo converge linealmente:

$$\frac{|x_{k+1}-c|}{|x_k-c|} = |g'(c)|$$

¿Cómo terminar una iteración de puntos fijos $x_{k+1} = g(x_k)$?

- $|x_k - c| < t$ (tolerancia) $\longrightarrow$ ¿cómo implementar esta condición?

PROPOSICIÓN: Sea $g : [a,b] \to [a,b]$ una contracción $(L < 1)$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{\forall k > \frac{1}{\ln \frac{1}{L}} \cdot \ln \frac{|x_0 - x_1|}{t(1-L)}}$ tenemos $|x_k - c| < t$.

$\Longleftrightarrow \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| < t$

demostración

$$|x_k - c| = |g(x_{k-1}) - g(c)| \le L|x_{k-1} - c| \le \cdots \le L^k |x_0 - c|$$

$$|x_0 - c| = |x_0 - x_1 + x_1 - c| \le |x_0 - x_1| + |x_1 - c| \le |x_0 - x_1| + L|x_0 - c| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_0 - c| \le \frac{1}{1-L}|x_0 - x_1| \Rightarrow L^k|x_0 - c| \le \frac{L^k}{1-L}|x_0 - x_1|$$

demostración (Ostrowski)

RECUERDO

$g \in C^1([c-h, c+h]) : g(c) = c$,

i) Si $|g'(c)| < 1 \Rightarrow \exists \delta \in (0,h) : \forall x_0 \in [c-h, c+h]$ la iteración $x_{k+1} = g(x_k)$ converge a c. (PUNTOS FIJOS ESTABLES)

ii) Si $|g'(c)| > 1 \Rightarrow \exists \delta \in (0,h) : \forall x_0 \in [c-h, c+h] \setminus \{c\}$ $\exists \bar{k} > 0 :$ $x_{\bar{k}} \in [c-h, c+h]$ (PUNTOS FIJOS INESTABLES).

- dem. i:

PASO 1 $\to$ Sea $f \in C([c-h, c+h])$ y $|f(c)| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta \in (0,h) : |f(x)| < 1 \quad \forall x \in [c-h, c+h]$

$|f(x)| = |f(x) + f(c) - f(c)| \le |f(x) - f(c)| + |f(a)|$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \forall |x - c| \le \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(c)| + |f(c)| \le \varepsilon + |f(c)| \quad \forall x \in [c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon]$, y

sea $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |f(c)|)$

Entonces $\varepsilon + |f(c)| \le \frac{1}{2}(1 + |f(c)|)$

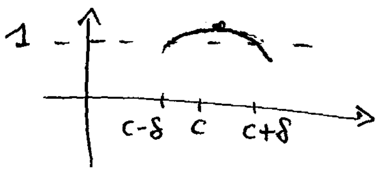
PASO 2 $\rightarrow$ $|g(x)-g(y)| \leq L|x-y|$, . $L<1$ $\forall x,y \in [c-\delta, c+\delta]$ $\hookrightarrow \delta_{\varepsilon}$

con $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-|g'(c)|)$.

$g \in C([c-\delta, c+\delta]) \Rightarrow \exists m = \min\limits_{[c-h,c+h]} g$, $M = \max\limits_{[c-h,c+h]} g \Rightarrow g([c-\delta,c+\delta]) =$
$= [m, M]$.

$|g(x) - \underset{\overset{\parallel}{c}}{g(c)}| \leq |x-c| \Rightarrow [m,M] \subset [c-\delta, c+\delta]$

▶ dem ii:



PASO 1 $\rightarrow$ Sea $f \in C([c-h, c+h])$

$|f(c)|>1 \Rightarrow \exists \delta \in (0,h) : \exists L>1 : |f(x)|>L \quad \forall x \in [c-\delta, c+\delta]$

demostración por contradicción : $\forall \delta \in (0,h) \quad \forall L>1 \quad \exists \bar{x} \in [c-\delta, c+\delta]$:
: $|f(\bar{x})|<L$.

Sea $\{\delta_K\} \in \mathbb{R}_+ \quad \delta_K \rightarrow 0$, $\{L_K\} \subset (1,\infty)$, $L_K \rightarrow 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall K \quad \exists X_K \in [c-\delta_K, c+\delta_K] : \quad |f(X_n)| < L_K$

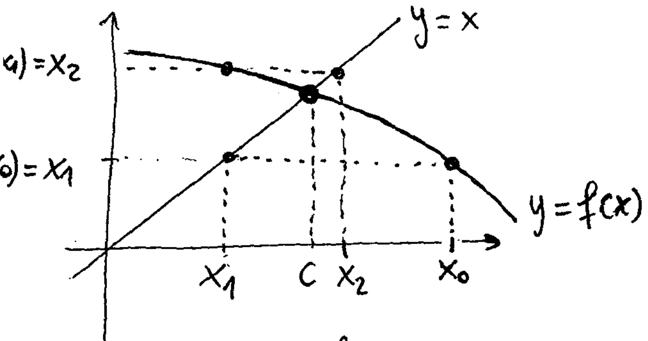
$X_K \rightarrow c$; $\Rightarrow |f(X_K)| \longrightarrow |f(c)| \leq 1$ contradicción con la hipótesis

PASO 2 $\rightarrow$ $\exists \delta \in (0,h)$, $\exists L>1$: $|g'(x)|>L \quad \forall x \in [c-\delta, c+\delta]$.

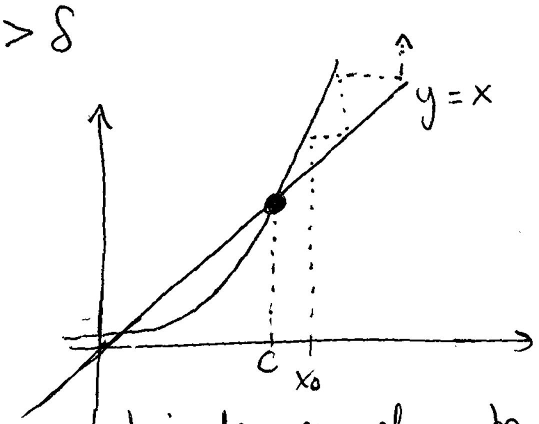
$x_0 \in [c-\delta, c+\delta] \setminus \{c\} \qquad |x_1 - c| = |g(x_0) - g(c)| = |g'(y)| \cdot |x_0 - c| \geq$

$\geq L \cdot |x_0 - c|$; Si $L|x_0-c| \leq \delta \Rightarrow |x_2 - c| \geq L \cdot |x_1 - c| \geq$

$\geq L^2 \cdot |x_0 - c| \qquad \bar{K} : L^{\bar{K}} |x_0 - c| > \delta$

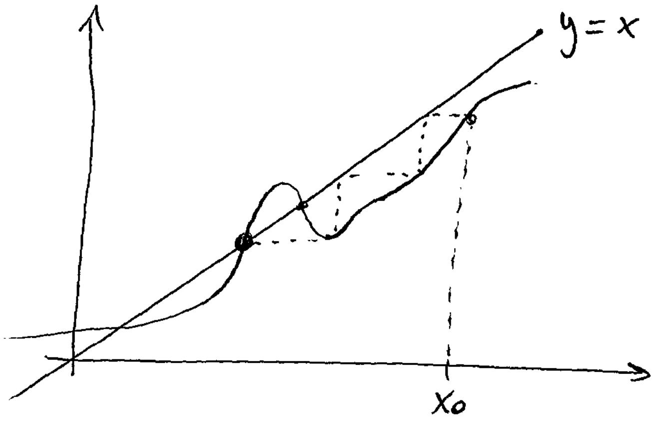


derivada en el punto fijo menor que 1



punto fijo inestable

derivada en el punto fijo mayor que 1.



El teorema no contradice que si la derivada es mayor que 1, podemos a llegar a caer en un punto fijo en número <u>finito</u> de iteraciones. Pero es muy dific porque no converge, tendría que caer en el punto de sue

- ¿Cómo terminar la iteración de punto fijo? parte 2

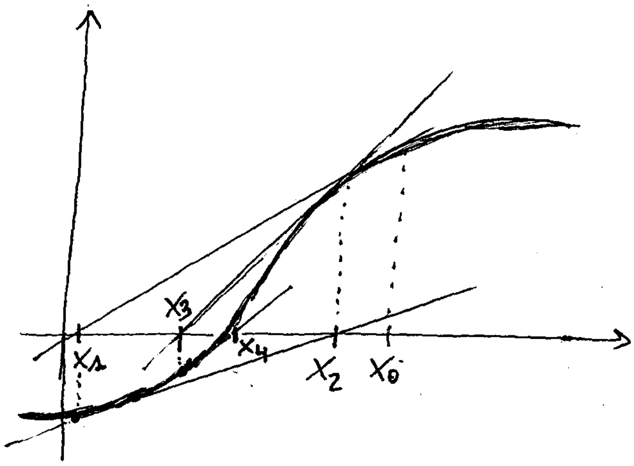
$$|x_{k+1} - x_k| < t \qquad\qquad |g(x_k) - x_k|$$

$$c - x_{k+1} = g(c) - g(x_k) = g'(\xi_k)(c - x_n) \ ;$$

$$c - x_k = c - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k = g'(\xi_k)(c - x_k) + x_{k+1} - x_k \ ;$$

$$\Rightarrow \boxed{|c - x_k| = \frac{1}{|1 - g'(\xi_k)|} \cdot |x_{k+1} - x_k|}$$

MÉTODO DE NEWTON



x_{k+1} = CERO DE LA RECTA TANGENTE a f en x_k.

↳ recta que para por $(x_k, f(x_k))$ con pendiente $f'(x_k)$.

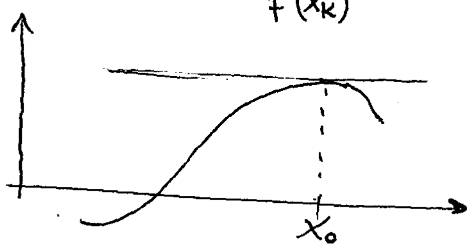
$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$y = 0 \iff x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Entonces:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Se necesita $f'(x_k) \neq 0$



Sea $f \in C^1$, $f' \neq 0$.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \overset{\text{Newton}}{x_{k+1} = g(x_k)}$$

Si c : $f(c) = 0$ y $f'(c) \in (0, \infty)$

$g(c) = c$.

Si $f \in C^2$: $g'(x) = 1 - \dfrac{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$

Si c : $f(c) = 0 \Rightarrow g'(c) = 0$

$$\boxed{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}} \qquad \boxed{g'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}}$$

$$g''(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x)\left(\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} - \frac{(f''(x))^2}{(f'(x))^3}\right).$$

<u>COROLARIO</u>: Si $f \in C^3([c-h, c+h])$, $f(c) = 0$

y si $f'(c) \neq 0$, $f''(c) \neq 0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ el algoritmo de Newton converge a c al orden 2,

y $$\frac{|x_{k+1} - c|}{|x_k - c|^2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{|f''(c)|}{|f'(c)|}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\sqrt{7}$.

Si $t > 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{t}$ es una solución (positiva) de

$x^2 - t = 0$: $f(x) = x^2 - t$.

$f'(x) = 2x$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - t}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{t}{x_k}\right)$$ iteración de Newton para calcular $\sqrt{t}$

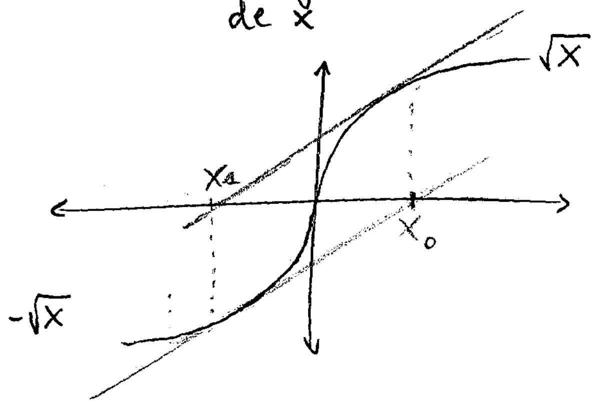
$x_0 = 3$

$x_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{7}{3}\right) = \frac{8}{3}$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{7}{8/3}\right) = \frac{127}{48}$ ¿$\left(\frac{127}{48}\right)^2$? $= 7'0004$ amazing

Ejemplo

$f(x) = \underbrace{\sigma(x)}_{\text{signo de } x} \sqrt{|x|} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$



$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 2 \cdot \sigma(x) \cdot |x| = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = -x_k$$

Para esta f tenemos $g(x) = -x$: $|g'(x)| = 1$

Ejemplo : Sea $f(x) = \sigma(x) \cdot |x|^{\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$

Demostrar que Newton converge $\Longleftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE NEWTON

TEOREMA: Sea $f \in C^2([c-\delta, c+\delta])$ tal que $f(c)=0$.
Si $|f'(x)| \geq m > 0 \quad \forall x \in [c-\delta, c+\delta]$

OBSERVACIÓN: Si $f'(c) \neq 0$ $\exists \delta', m>0$ tal que esto se cumple.

$\Rightarrow \forall x_0 : |x_0 - c| < \min\{\delta, \frac{2m}{M}\}$, donde $M = \max_{[c-\delta, c+\delta]} |f''|$
Newton converge al menos al orden 2.

demostración:

$$0 = f(c) = f(x_0) + f'(x_0)(c-x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2}(c-x_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) = -(c-x_0)f'(x_0) - \frac{1}{2}(c-x_0)^2 f''(\xi_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = c + \frac{1}{2}\cdot\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}(c-x_0)^2$$

$$|x_1 - c| = \underbrace{\left|\frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)}\right| |x_0-c|}_{<1} |x_0-c| < |x_0-c|$$

$$\boxed{x_{k+1} - c = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x_k-c)^2} \quad \forall k \geq 0$$

$$\Rightarrow |x_k - c| \leq \underbrace{\frac{M}{2m}|x_{k-1}-c|}_{<1,\ =L} \cdot |x_{k-1}-c| \qquad \forall k \geq 1$$

- $|x_k - c| \leq L \cdot |x_{k-1}-c|$
- $\dfrac{|x_{k+1}-c|}{|x_k-c|^2} \leq \dfrac{M}{2m}$

Ejemplo:

$$f(x) = 2x^3 + \frac{4}{3}x - 1 \quad ; \quad f'(x) = 6x^2 + \frac{4}{3} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sea $c : f(c) = 0$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \text{ es } \begin{cases} > 0 & \text{si } x > c \\ < 0 & \text{si } x < c \end{cases}$$

$$X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)} \text{ es } \begin{cases} < X_k & \text{si } X_k > c \\ > X_k & \text{si } X_k < c \end{cases}$$

- Observación: $f(0) = -1$; $f(1) = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow c \in (0,1)$.

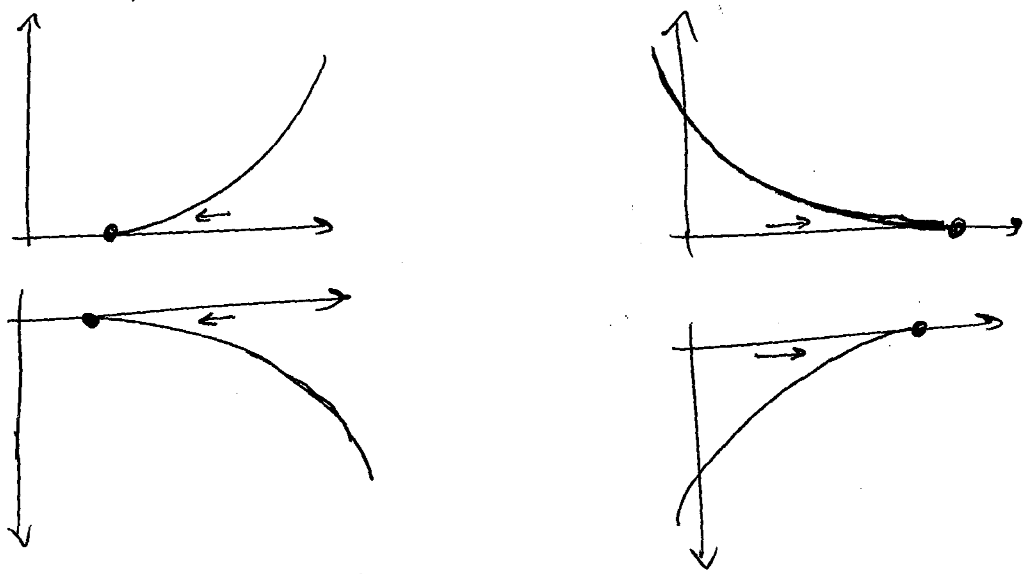
- Observación: $f''(x) = 12x > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Si $X_k > c \Rightarrow X_{k+1} > c$

$\therefore$ Si $x_0 > c \Rightarrow c < X_{k+1} < X_k$

Además, $\forall x_0 > 0 \Rightarrow$ Newton converge al orden 2.

Si las funciones son así:



el método de Newton converge al orden 2 para cualquier x_0.

$a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a > c$

<u>TEOREMA</u>: Sea $f \in C^2([c, a))$ tal que $f(c) = 0$ y $f', f'' \neq 0$ y tienen el mismo signo $\Rightarrow$ Newton converge a orden 2 $\forall x_0 \in [c, a)$.

$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a < c$.

Sea $f \in C^2((a, c])$ tal que $f(c) = 0$ y $f', f'' \neq 0$ signos opuestos $\Rightarrow$ Newton converge al orden 2 $\forall x_0 \in (a, c]$

<u>demostración</u>

$f' > 0 \quad f'' > 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k \quad \text{si } x_k > c$$

$$x_{k+1} = c + \omega^2 \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} > c$$

$\Rightarrow c < x_{k+1} < x_k$

esto viene de aquí

$$x_{k+1} - c = \frac{f''(\xi_k)}{2 f'(x_k)} \cdot (x_k - c)^2$$

¿QUÉ PASA si $f'(c) = 0$?

<u>TEOREMA</u>: Sea $f \in C^n([c-h, c+h])$ tal que $f^{(k)}(c) = 0 \quad k = 0 \ldots n-1$ y $f^{(n)}(c) \neq 0 \Rightarrow$ N converge linealmente ($\exists \delta \in (0, h)$: N converge linealmente $\forall x_0 \in [c-h, c+h]$) y $\mu = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$\mu = \lim \frac{x_{k+1} - c}{x_k - c}$$

<u>demostración</u>

El método de Newton es un método de punto fijo $g(x) = \begin{cases} x - \frac{f(x)}{f'(x)}, & x \neq c \\ c, & x = c \end{cases}$

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} & (x \neq c) \\ 1 - \dfrac{1}{n} & (x = c) \end{cases}$$

ahora demostramos que $g'(x) \xrightarrow{x \to c} 1 - \frac{1}{n}$

(ejercicio $\Rightarrow g(c) = c$. Solo falta ver que $\lim_{x \to c^-} g(x) = \lim_{x \to c^+} g(x) = g(c)$. $g(x)$ se define igual a la izda y dcha de c, por lo que $\lim_{x \to c^-} g(x) = \lim_{x \to c^+} g(x)$. Falta ver que $\lim_{x \to c} g(x) = c$.
g(x) es continua en $x = c$). $\Rightarrow = \lim x - \lim \frac{f(x)}{f'(x)} \overset{\text{L'Hopital}}{=} c - \lim_{x \to c} \frac{f^{(n-1)}(x)}{f^{(n)}(x)} = c - 0 =$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{=0} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + o((x-c)^n)$$

0 porque las derivadas en c son cero.

$$f'(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{=0} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + o((x-c)^{n-1})$$

$$f''(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-3} \frac{f^{(k+2)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{=0} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2} + o((x-c)^{n-2})$$

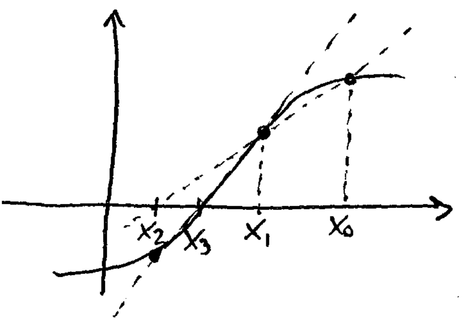
$$\Rightarrow g(x) = \frac{\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + o((x-c)^n)\right)\left(\frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}\cdot(x-c)^{n-2} + o((x-c)^{n-2})\right)}{\left(\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}\cdot(x-c)^{n-1} + o((x-c)^{n-1})\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(f^{(n)}(c))^2}{n!(n-2)!}(x-c)^{2n-2} + o((x-c)^{2n-2})}{\frac{(f^{(n)}(c))^2}{(n-1)!(n-1)!}(x-c)^{2n-2} + o((x-c)^{2n-2})} \xrightarrow{x \to c} \frac{\frac{1}{n!(n-2)!}}{\frac{1}{(n-1)!(n-1)!}} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-1)!}{n!(n-2)!} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

OTROS MÉTODOS "INSPIRADOS" POR NEWTON

1) Método de la secante



x_{k+1} = cero de la recta que pasa por $(x_k, f(x_k))$ y $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$. (se necesitan 2 puntos iniciales) $k \geq 1$.

Siempre que la función sea continua y siempre que $f(x_0) \neq f(x_1)$ (porque sino estarían a la misma altura y no conseguiríamos 3er punto) obtendremos un cero.

Ejercicio: la recta que pasa por $(x_k, f(x_k))$ y $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e
$y = ax + b$.

$$a = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad , \quad b = \frac{f(x_{k-1})x_k - f(x_k)x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}} \sim \frac{1}{f'}$$

TEOREMA: $f \in C^2([c-h, c+h])$, $f(c) = 0$ y $f'(c) \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \delta > 0$ SECANTE converge $\forall x_0 \in [c-\delta, c+\delta]$ al orden
$q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2) Método de Steffenson

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\phi_f(x_k)} \quad \text{donde} \quad \phi_f(x) = \frac{f(x+f(x)) - f(x)}{f(x)}$$

TEOREMA: $f \in C^2([c-h, c+h])$, $f(c) = 0$, $f'(c) \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ el método de Steffenson converge al orden 2.

Idea de la demostración:

Sea $h(x) \xrightarrow{x \to c} 0$ y sea $\phi_h(x) = \frac{f(x+h(x)) - f(x)}{h(x)}$

si $|x-c| < \delta$ $\quad f(x+h(x)) = f(x) + f'(x)h(x) + \frac{1}{2}f''(x)h^2(x) + o(h^2(x$

SOLUCIONES DE SISTEMAS LINEALES: MÉTODOS DIRECTOS

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ entonces $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 7 & 1 & 27 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 27 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

d_n = # operaciones fl para calcular un det $n\times n$ =

$$= \underbrace{n \cdot d_{n-1}}_{\text{nº determinantes}} + \underbrace{n}_{\text{multiplicaciones det} \times \text{número}} + \overbrace{n-1}^{\text{sumas}} > n \cdot d_{n-1}$$

$$\boxed{n \cdot d_{n-1} + n + n - 1 \sim e \cdot n!}$$

Entonces:

Con $n = 32$ $\quad d_{32} = e \cdot n! = 7 \cdot 10^{35}$

Los ordenadores más potentes de la actualidad son del orden de 100 petaflops: 10^{17} flop/seg

Entonces un det 32×32 necesitaría $7 \cdot 10^{18}$ segundos $\sim 2 \cdot 10^{11}$ años

¿Variante o alternativa? $\longrightarrow$ Sistema de eliminación de Gauss.

SOLUCIÓN DE SISTEMAS TRIANGULARES

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad Lx = b \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}} \\ x_3 = \dfrac{b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}} \end{cases} \qquad l_{ii} \neq 0$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, \qquad Ux = b \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{b_3}{u_{33}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} \\ x_1 = \dfrac{b_3 - u_{13}x_3 - u_{12}x_2}{u_{11}} \end{cases} \qquad u_{ii} \neq 0$$

* La eliminación gaussiana permite reducir el problema $Ax = b$ a problemas triangulares.

Proposición: Sea $L_K = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & \ell^{(K)} & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ y definimos

$\tilde{L}_K^{-1} = (P_{n-1} \cdot P_{n-2} \cdot P_{n-3} \cdots P_{K+1}) \cdot L_K^{-1} \cdot (P_{K+1} \cdots P_{n-1})$ donde P_j son matrices de permutación de 2 filas (ambas filas de índice $\geq$

$\Rightarrow \tilde{L}_K^{-1} = I - \tilde{\ell}^{(K)} \otimes e_K$, donde $\tilde{\ell}^{(K)} = P_{n-1} \cdots P_{K+1} \cdot \ell^{(K)}$

demostración

$$\tilde{L}_K^{-1} = (P_{n-1} \cdots P_{K+1}) I (P_{K+1} \cdots P_{n-1}) - (P_{n-1} \cdots P_{K+1}) \ell^{(K)} \otimes e_K (P_{K+1} \cdots P_{n-1})$$

observación

$$(P \cdot v \otimes w)_{ij} = \left(\sum_K P_{iK} \cdot v_K\right) w_j = (Pv) \otimes w$$

$$(v \otimes w \cdot P^t)_{ij} = \sum_K v_j \cdot w_K \cdot P_{jK} = v \otimes Pw$$

Entonces: $P\, v \otimes w\, P^t = (Pv) \otimes (Pw)$

$= I - \tilde{\ell}^{(K)} \otimes e_K$.

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertible $\Rightarrow \exists\, P, L, U$ tal que $PA = L$

Donde P es una matriz de permutación, L triangular baja con unos en la diagonal, U triangular alta y P_K es la matriz de permutación de Π_K.

$U^{(0)} = A$

$U^{(K)} = L_K^{-1} \cdot P_K \cdot U^{(K-1)}$ $\qquad \Pi_K(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \neq K, i^* \\ i^* & \text{si } i = K \\ K & \text{si } i = i^* \end{cases}$, $i^* = \operatorname{argmax}_{i \in \{K, K+1, \dots, n\}} |U_{iK}^{(K-$

y $U = U^{(n-1)}$, $L = \tilde{L}_1 \cdot \tilde{L}_2 \cdots \tilde{L}_{n-2} \cdot L_{n-1}$

$\tilde{L}_K = I + ((P_{n-1} \cdots P_{K+1}) \ell^{(K)}) \otimes e_K$, $\quad \ell^{(K)} = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, K \\ (P_K \cdot U^{(K-1)})_{iK} / (P_K \cdot U^{(K-1)})_{KK} \end{cases}$

$$U = U^{(n-1)} = L_{n-1}^{-1} \underbrace{P_{n-1} L_{n-2}^{-1}}_{\tilde{L}_{n-2}^{-1} P_{n-1}} P_{n-2} \cdots P_2 L_1^{-1} P_1 A$$

$\tilde{L}_{n-2}^{-1} \underbrace{P_{n-1} P_{n-2} L_{n-3}^{-1}} \to \tilde{L}_{n-3}^{-1} P_{n-1} P_{n-2}$

FACTORIZACIÓN LU CON PIVOTAJE : $PA = LU$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 11 \\ 5 & 7 & 3 \\ 15 & 9 & 12 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 . A = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 12 \\ 5 & 7 & 3 \\ 10 & 14 & 11 \end{pmatrix} ; \qquad L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{(1)} = L_1^{-1} . P_1 . A = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 12 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 . U^{(1)} = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 12 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} ; \qquad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{(2)} = L_2^{-1} P_2 L_1^{-1} P_1 A = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 12 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -5/2 \end{pmatrix}$$

$\tilde{L}_1$ es la matriz tal que

$$P_2 . L_1^{-1} = \tilde{L}_1^{-1} . P_2$$

$$\boxed{\tilde{L}_1^{-1} = P_2 . L_1^{-1} . P_2}$$

$$\Rightarrow U^{(2)} = L_2^{-1} . \tilde{L}_1^{-1} . P_2 . P_1 . A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{L}_1 . L_2 . U^{(2)} = P_2 . P_1 . A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} . U^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . A$$

$$\tilde{L}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \\ -1/3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P = P_2 . P_1}$$

2. Las matrices de permutación son matrices ortogonales, es decir, $P^{-1} = P^t$.

demostración

$$P_\pi \cdot P_\pi^{\,t} = \begin{pmatrix} — e_{\pi(1)} — \\ — e_{\pi(2)} — \\ \vdots \\ — e_{\pi(n)} — \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_{\pi(1)} & e_{\pi(2)} & \cdots & e_{\pi(n)} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = I_n$$

$\square$

$$U^{(n)} = L_n^{-1} \cdot \underbrace{P_n \cdot L_{n-1}^{-1}}_{\tilde{L}_{n-1}^{-1} \cdot P_n} \cdot P_{n-1} \cdot L_{n-2}^{-1} \cdot P_{n-2} \cdot \cdots \cdot L_1^{-1} \cdot P_1 \cdot A$$

$$L_\circ = P_n \cdot L_{n-1}^{-1} \cdot P_n^{-1} = P_n \cdot L_{n-1}^{-1} \cdot P_n$$

$$U^{(n)} = L_n^{-1} \cdot \tilde{L}_{n-1}^{-1} \cdot \underbrace{P_n^{-1}}_{P_n''} \cdot P_{n-1} \cdot L_{n-2}^{-1} \cdot P_{n-2} \cdots$$

$$= L_n^{-1} \cdot \tilde{L}_{n-1}^{-1} \cdot \tilde{L}_{n-2}^{-1} \cdot P_n \cdot P_{n-1} \cdot P_{n-2} \cdots$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{(2)} = L_2^{-1} \cdot P_2 \cdot U^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$U^{(2)} = L_2^{-1} \cdot P_2 \cdot U^{(1)} = L_2^{-1} \cdot P_2 \cdot L_1^{-1} \cdot P_1 \cdot A$$

$$U^{(n)} = L_n^{-1} \cdot P_n \cdot U^{(n-1)} = L_n^{-1} \cdot P_n \cdot L_{n-1}^{-1} \cdot \cdots \cdot L_1^{-1} \cdot P_1 \cdot A$$

DEFINICIÓN: Una PERMUTACIÓN de n elementos es una aplicación biyectiva $\Pi: \{1 \dots n\} \longrightarrow \{1 \dots n\}$

Ejemplo: $n=4$

$1 \longrightarrow 3$
$2 \longrightarrow 4$
$3 \longrightarrow 2$
$4 \longrightarrow 1$

Sea $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$, decimos:

$$P_\Pi = \begin{pmatrix} \text{---} \; e_{\Pi(1)} \; \text{---} \\ \text{---} \; e_{\Pi(2)} \; \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \; e_{\Pi(n)} \; \text{---} \end{pmatrix}$$ la matriz de permutación asociada a Π.

Propiedades de las matrices de permutación:

$n=3$ (ejemplo de mierda)

Π_a: $1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 3$

Π_b: $1 \to 3$, $2 \to 2$, $3 \to 1$

$\Pi_a \circ \Pi_b$: $1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$

1. La composición de matrices de permutación es una m.d.p.
Si Π_a y Π_b son permutaciones de n elementos $\Rightarrow \exists\ \Pi_c$ permutación de n elementos tal que $P_{\Pi_a} \cdot P_{\Pi_b} = P_{\Pi_c}$

$$\boxed{\Pi_c = \Pi_b \circ \Pi_a}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^{54} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 0 & \underbrace{1-2^{54}}_{-2^{54}(1-2} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ en flp.

$$U = \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 0 & -2^{54} \end{pmatrix}$$

$$L.U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^{54} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 0 & -2^{54} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\tilde{A}} \neq A$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{1-2^{-54}} \simeq -1 \\ y = \dfrac{1}{1-2^{-54}} \simeq 1 \end{cases}$$

gran diferencia

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

¿cómo solucionamos esto? Con PIVOTAJE

pivotaje $\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2^{-54} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2^{-54} & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 17 & 10 \end{pmatrix} = P_1 . A \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = P_2 . U^{(}$$

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1} A \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tenemos $LUx = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b & (1) \\ Ux = y & (2) \end{cases}$

(1) $y_1 = b_1 \qquad y_2 = b_2 - l_2 y_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$y_3 = b_3 - l_{31} y_1 - l_{32} y_2$

<u>algoritmo</u>

```
y = b
for i = 2:n
    for j = 1:i-1
        y(i) = y(i) - L_ij y(j)
    end
end
```

(2) $x_3 = \dfrac{b_3}{u_{33}}$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{b_1 - u_{13} x_3}{u_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_1 - u_{12} x_2 - u_{13} x_3}{u_{11}}$$

<u>algoritmo</u>

```
x = y./diag(U)
for i = n:-1:1
    for j = i+1:n
        x(i) = x(i) - Uij xj / Uii
    end
end
```

B2 B1 n^2

$B1 \to 3(n-i)$ operaciones

$B2 = n(B1(i)) = n(3(n-i)) = 3n(n-i)$ operaciones

$$B2 = \sum_{i=1}^{n} B1(i) = 3\sum_{i=1}^{n}(n-i) = 3\left[\sum_{i=1}^{n} n + \sum_{i=1}^{n} i\right] = 3\left[n^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right] = 3n^2 + \frac{3n^2+3n}{2}$$

$$= \frac{9}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$$

?

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL POR FACTORIZACIÓN LU

$$\boxed{U^{(k)} = L_k^{-1} \cdot U^{(k-1)} \quad ; \quad U^{(0)} = A} \quad y \quad \boxed{L_k = I + l^{(k)} \otimes e_k \;;\; l_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & i = 1 \dots k \\ \dfrac{U_{ik}^{(k-1)}}{U_{kk}^{(k-1)}} & \text{para } i = k \dots \end{cases}}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ $Ax = b$

$$A = \underbrace{\left(I + \sum_{k=1}^{n-1} l^{(k)} \otimes e_k \right)}_{L} U^{(n-1)}$$

$$\boxed{U_{ij}^{(k)} = U_{ij}^{(k-1)} - l_i^{(k)} \cdot U_{kj}^{(k-1)}}$$

$$\boxed{L_{ik} = l_i^{(k)} \quad \text{DEBAJO DE LA DIAGONAL}}$$

Algoritmo:

$U = A$; $L = I$;

```
B3 | for k = 1 : n-1
   B2 | for i = k+1 : n
      |     L_ik = U_ik / U_kk   (actualizamos elem. por debajo diagonal)
      B1 | for j = k+1 : n  --> si queremos factorizar A=LU    j = k+1:n
         |                      si queremos triangular U       j = k:n
         |     U_ij = U_ij - L_ik U_kj   (actualizamos elem. por encima diagonal)
         | end
      | end
   | end
```

Número de operaciones aritméticas:

$\boxed{B1(k) = 2(n-k) \text{ operaciones}}$ $(n-k)$ iteraciones * 2 operaciones en cada iteración

$$\boxed{B2(k) = (n-k) \cdot (1 + B1(k)) = (n-k)(1 + 2(n-k))}$$

$$B3 = \sum_{k=1}^{n-1} B2(k) = 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \underset{j=n-k}{=} 2\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j =$$

$$= 2 \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{(N-1)N}{2} = \boxed{\frac{2}{3}N^3 - \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{6}N}$$

TEOREMA (de factorización de LU)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y decimos $U^{(0)} = A$, y $U^{(k)} = L_k^{-1} U^{(k-1)}$ $k=1\dots(n-1)$

donde $L_k = I + \ell^{(k)} \otimes e_k$, y $\ell_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=1,\dots,k \\ \dfrac{U_{ik}^{(k-1)}}{U_{kk}^{(k-1)}} & i=(k+1)\dots n \end{cases}$

si $U_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \quad \forall k=1,\dots,(n-1)$

$\Rightarrow A = LU$, donde $U = U^{(n-1)}$, y $L = I + \sum_{k=1}^{n-1} \ell^{(k)} \otimes e_k$

demostración

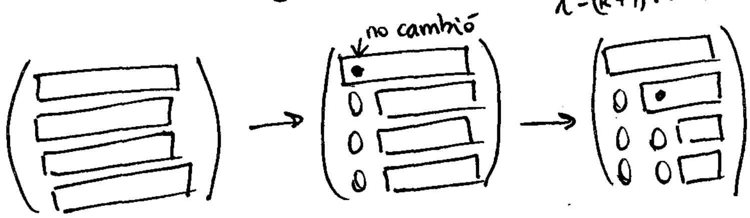
$$U = U^{(n-1)} = L_{n-1}^{-1} U^{(n-2)} = \dots = L_{(n-1)}^{-1} \cdot L_{(n-2)}^{-1} \cdot \dots \cdot L_1^{-1} A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = L_1 \dots L_{n-1} \cdot U = LU$$

$$U^{(k)} = L_k^{-1} \cdot U^{(k-1)} = (I - \ell^{(k)} \otimes e_k)\, U^{(k-1)} \iff$$

$$\iff U_{ij}^{(k)} = U_{ij}^{(k-1)} - \underbrace{\left(\left(\ell^{(k)} \otimes e_k\right) U^{(k-1)}\right)_{ij}}_{\ell_i^{(k)} \cdot U_{kj}^{(k-1)}} = \begin{cases} U_{ij}^{(k-1)} & i=1\dots k \\ U_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{U_{ik}^{(k-1)}}{U_{kk}^{(k-1)}} U_{kj}^{(k-1)} & i=(k+1)\dots n \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_{ik}^{(k)} = \begin{cases} U_{ik}^{(k-1)} & i=1\dots k \\ 0 & i=(k+1)\dots n \end{cases}$$



$$I + v \otimes e_K = L_K = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\ell^{(K)} = (\underbrace{0 \; \dots \; 0}_{K} \;\; \ell^{(K)}_{K+1} \;\; \ell^{(K)}_{K+2} \cdots \ell^{(K)}_{n})$

definimos $L_K \overset{def.}{=} I + \ell^{(K)} \otimes e_K$

Proposición:

i) $L_K^{-1} = I - \ell^{(K)} \otimes e_K$

ii) $L_K L_{K+1} = I + \ell^{(K)} \otimes e_K + \ell^{(K+1)} \otimes e_{K+1}$

demostración

i) $(I + \ell^{(K)} \otimes e_K)(I - \ell^{(K)} \otimes e_K) =$

$= I \underbrace{- \ell^{(K)} \otimes e_K + \ell^{(K)} \otimes e_K}_{\text{se anulan}} - \underbrace{(\ell^{(K)} \otimes e_K)(\ell^{(K)} \otimes e_K)}_{\to \text{ prod. escalar } = 0} = I$

ii) $(I + \ell^{(K)} \otimes e_K)(I + \ell^{(K+1)} \otimes e_{K+1}) =$

$= I + \ell^{(K)} \otimes e_K + \ell^{(K+1)} \otimes e_{K+1} + 0$

FACTORIZACIÓN LU

EFINICIÓN: $v, w \in \mathbb{R}^n$, $M = v \otimes w$ es la matriz $M_{ij} = v_i w_j$

opiedades básicas: $z, v, w, u \in \mathbb{R}^n$

i) $(v \otimes w)\, u = \langle w, u \rangle \cdot v$

ii) $(v \otimes w)(z \otimes u) = \langle w, z \rangle \cdot v \otimes u$

demostración

i) $$(Mu)_i = \sum_j M_{ij} u_j = \sum_j v_i . w_j . u_j = v_i \sum_j w_j u_j = \langle w, u \rangle . v$$

ii) $$(MN)_{ij} = \sum_K M_{iK} N_{Kj}$$

$$\big((v \otimes w)(z \otimes u)\big)_{ij} = \sum_K v_i w_K z_K u_j = v_i u_j \Big(\sum_K w_K z_K\Big) = (v \otimes u) . \langle w, z \rangle$$

Observación: Sea $e_K \in \mathbb{R}^n$ el K-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$:

$$(e_K)_i = \begin{cases} 1 & i = K \\ 0 & i \neq K \end{cases}$$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$

Entonces:

vector v en columna

$$(v \otimes e_K) = \begin{pmatrix} | & | & & | & & | & | \\ 0 & 0 & \cdots & v & \cdots & 0 & 0 \\ | & | & & | & & | & | \end{pmatrix}$$

ceros

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{-1}.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{(paso 1)}$$

1) ¿cómo invertir los L_K^{-1}?

2) ¿$L_1 L_2 L_3 = L$?

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2^{-1}.L_1^{-1}.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(paso 2)}$$

$$L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3^{-1}.L_2^{-1}.L_1^{-1}.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U \quad \text{(paso 3)}$$

El proceso de factorización LU es:

1) $U^{(0)} = A$

2) $U^{(K)} = L_K^{-1}.U^{(K-1)} \qquad K = 1, \dots, n-1$

3) pasar de $L_{n-1}^{-1}, \dots, L_1^{-1}$ a $L = L_1.L_2.\cdots.L_{n-1}$

Si $\quad A = L.U \implies Ax = b \iff L.U.x = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

<u>Ejemplo 1</u>: $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ 6x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ 0.x_1 - 3x_2 = -14 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{L^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 2</u>: $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

primer paso: obtener $\begin{pmatrix} \boxed{\text{fila 1}} \\ 0 \ \boxed{\cdots} \\ 0 \ \boxed{\cdots} \\ 0 \ \boxed{\cdots} \end{pmatrix}$

segundo paso: obtener $\begin{pmatrix} \boxed{\text{fila 1}} \\ 0 \ \boxed{\cdots} \\ 0 \ 0 \ \boxed{\cdot\ \cdot} \\ 0 \ 0 \ \boxed{\cdot\ \cdot} \end{pmatrix}$

tercer paso: obtener $\begin{pmatrix} \boxed{\text{fila 1}} \\ 0 \ \boxed{\cdots} \\ 0 \ 0 \ \boxed{\cdot\ \cdot} \\ 0 \ 0 \ 0 \ \boxed{\cdot} \end{pmatrix}$

EXISTENCIA DE P, L, U tal que $PA = LU$, $\forall A$ INVERTIBLE

- Condición suficiente para $A = LU$ sin pivote $U_{KK}^{(K-1)} \neq 0 \ \forall K = 1, \dots, n$

SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES CON MÉTODOS ITERATIVOS

Idea: $Ax = b$ en $\mathbb{R}^n$

Encontrar x como límite de una iteración $\boxed{x_{K+1} = g(x_K)}$ (*)

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Las g que consideramos son de la forma $g(x) = Bx + \Phi$ donde $B = \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\Phi \in \mathbb{R}^n$.

(*) Base de los métodos iterativos:

1) $\underbrace{\text{Si (*) converge}}_{\text{hipótesis}}$, lo hace a $c \in \mathbb{R}^n \iff \boxed{c = g(c)} \iff Bc + \phi = c \iff \phi = (I - B)c$

→ Si (*) converge, converge a $\underline{x} \iff \phi = (I - B)A^{-1} \cdot b$

2) $\|x_{K+1} - \underline{x}\| = \|g(x_K) - g(\underline{x})\| = \|B(x_K - \underline{x})\|$

Si B es simétrica:

$\|B(x_K - \underline{x})\| \leq \underbrace{\underset{\text{autovalor máximo de } B}{\max |\lambda|}}_{\rho(B)} \|x_K - \underline{x}\|$ Si $\rho(B) < 1 \Rightarrow$ (*) converge a $\underline{x}$.

Construcción de metodos iterativos : tecnica SPLITTING

Sean $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A = M - N$ y M es invertible

$$A\underline{x} = b \iff M\underline{x} = N\underline{x} + b \iff \underline{x} = M^{-1}(N\underline{x} + b)$$

si tenemo estas matrice tenemos g

$$B = M^{-1}N \quad , \quad \phi = M^{-1}.b$$

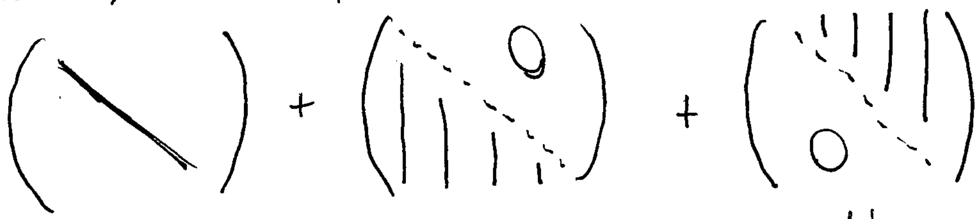
Objetivos de una construcción de método iterativo

i) Que $M^{-1}.N$ sea "pequeña"

ii) Que M sea fácilmente invertible.

Notación

dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, decimos $A = D_A + L_A + U_A$



D_A L_A U_A

Iteraciones clásicas

- Jacobi: $M = D_A$, $N = -(L_A + U_A) \Rightarrow B_J(A) = -D_A^{-1}(L_A + U_A)$
- Gauss-Seidel: $M = D_A + L_A$, $N = -U_A \Rightarrow B_{GS}(A) = -(D_A + L_A)^{-1}.U_A$

NORMAS

DEFINICIÓN: $\mathbb{K}$ quiere decir $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces $\mathbb{K}^n$ es $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}$

$v, w \in \mathbb{R}^n \qquad \langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i$

$z, u \in \mathbb{C}^n \qquad \langle z, u \rangle = \sum_i z_i \cdot \overline{u}_i$

$$\langle z, z \rangle = \sum_i |z_i|^2 = \|z\|^2$$

DEFINICIÓN: Una norma en $\mathbb{K}^n$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{K}^n$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$ $\quad \forall x \in \mathbb{K}^n, \ \alpha \in \mathbb{K}$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$

DEFINICIÓN: Una NORMA DE MATRIZ en $\mathbb{K}^{n\times n}$ es una ~~matriz~~ norma $\|\cdot\|$ tal que $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$

DEFINICIÓN: Sean $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ normas $\mathbb{K}^n$ decimos NORMA INDUCIDA de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ la cantidad:

$$\|A\|_{a\to b} \overset{\text{def.}}{=\!=} \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{K}^n}} \frac{\|Ax\|_b}{\|x\|_a} = \max_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \text{tal que } \|x\|_a = 1}} \|Ax\|_b$$

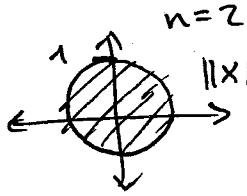
propiedad: $\|Ax\|_b \leq \|A\|_{a\to b} \|x\|_a$

Ejemplos

$1 \leq p \leq \infty$

- $x \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$

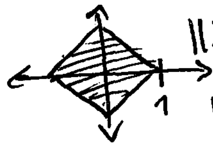
$n=2$



$\|x\|_2 \leq 1$

$p=2$: norma euclídea

$p=1: \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

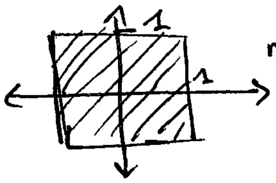


$\|x\|_1 \leq 1$

$|x_1| + |x_2| \leq 1$

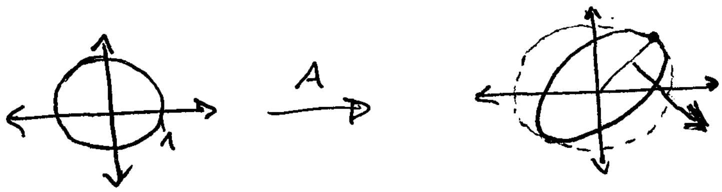
$p=\infty: \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1\dots n} |x_i|$

máximo en valor absoluto de las componentes de un vector



$\max\{|x_1|, |x_2|\}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



$\|A\|_{2\to 2}$

Proposición: Son normas de matriz: ...

- las normas inducidas (por una única norma)
- la norma 2 (norma de Frobenius $\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}$)

demostración.

i) $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$.

ii) $\|AB\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |(AB)_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \right|^2 \right)^{1/2} \leq$ desigualdad Cauchy-Schw

$\leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n} |B_{kj}|^2 \right)^{1/2} = \|A\|_2 \cdot \|B\|_2 \qquad \square$

$$\underbrace{\|\cdot\|_{1\to 1}\ ,\ \|\cdot\|_{\infty\to\infty}}_{\text{fórmula}} \quad y \quad \underbrace{\|\cdot\|_{2\to 2}}_{\text{autovalores}}$$

PROPOSICIÓN: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ A^1 & \cdots & A^n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} — A_1 — \\ \vdots \\ — A_n — \end{pmatrix}$

i) $\|A\|_{1\to 1} = \max_{j=1,\dots,n} \|A^j\|_1$

ii) $\|A\|_{\infty\to\infty} = \max_{i=1\dots n} \|A_i\|_1$

demostración

i) $\|A\|_{1\to 1} = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$: $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n \overbrace{\left|\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j\right|}^{x_i} \leq$

$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ij}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j|\cdot\|A^j\|_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \sum_{j=1}^n \frac{|x_j|}{\|x\|_1}\cdot\|A^j\|_1 \leq \max_{j=1\dots n}\|A^j\|_1 \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{|x_j|}{\|x\|_1}}_{=1}$

esto se realiza para $j=j^*$

Sea $x^* = (0\dots \overset{j^*}{1} \dots 0) \Rightarrow \frac{\|Ax^*\|_1}{\|x^*\|_1} = \|A^{j^*}\|_1$

ii) $\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \overbrace{\left|\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j\right|}^{(Ax)_i} \leq \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|\,|x_j| \leq$

$\leq \max_{j=1\dots n}|x_j| \max_{i=1\dots n}\sum_{j=1}^n |A_{ij}| = \|x\|_\infty \cdot \max_{i=1\dots n}\|A_i\|_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_{i=1\dots n}\|A_i\|_1$ Sea i^* tal que $\|A_{i^*}\|_1 \geq \|A_i\|_1 \ \forall i$

x^*: $x_j^* = \begin{cases} 0 & \text{si } A_{i^*j} = 0 \\ \dfrac{\overline{A_{kj}}}{|A_{kj}|} \end{cases}$

Ejercicio: $\|\cdot\|_\infty$ no es una norma de matriz

$\|A\|_\infty = \max\limits_i \max\limits_j |A_{ij}|$. Intentar ver dónde falla.

DEFINICIÓN: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\exists v \in \mathbb{C}^n$ tal que $Av = \lambda v \Rightarrow \lambda$ se dice AUTOVALOR de A

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = i \quad , \quad \lambda_2 = -i$

DEFINICIÓN: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos RADIO ESPECTRAL de A a: $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}$.

TEOREMA: Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{K}^n \Rightarrow \exists C_1, C_2 > 0$ tal que $C_1 \cdot \|x\|_1 \leq \|x\| \leq C_2 \cdot \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$.

COROLARIO: En $\mathbb{K}^n$ todas las normas son equivalentes.

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\| \leq \left(\max_j \|e_j\|\right) \cdot \|x\|_1$$

PROPOSICIÓN: Sea $\|\cdot\|$ una norma inducida de $\mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(A) \leq \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

demostración

Sea v el autovector de A tal que $Av = \lambda v$, $|\lambda| = \rho(A)$

$\Rightarrow$ • $\|A.v\| \leq \|A\| . \|v\|$

• $\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = \rho(A) . \|v\|$ $\square$

TEOREMA: Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

$$\underbrace{A^K \xrightarrow{K \to \infty} 0}_{\|A^K\| \longrightarrow 0} \iff \rho(A) < 1$$

TEOREMA (Householder)

$\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una norma inducida $\|\cdot\|$ de $\mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

$\Rightarrow$ mensaje del teorema: $\rho(A)$ es el ínfimo de $\|A\|$ sobre todas las normas de matriz.

COROLARIO: (fórmula de Gelfand)

Sea $\|\cdot\|$ una norma inducida de $\mathbb{K}^{n \times n}$ $\Rightarrow \rho(A) = \lim_{K \to \infty} \|A^K\|^{1/K}$.

demostración

- $(\rho(A))^K = \rho(A^K) \leq \|A^K\| \Rightarrow \rho(A) \leq \|A^K\|^{1/K}$ $\forall K >$
- Sea $\varepsilon > 0$ y $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ la norma de Householder:

$$\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \exists\, C = C(A,\varepsilon) : \|B\| \leq \|B\|_{A,\varepsilon} \quad \forall B \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

constante que depende de A y ε.

$$\Rightarrow \|A^K\| \leq C \cdot \|A^K\|_{A,\varepsilon} \leq C \cdot \|A\|_{A,\varepsilon}^K \leq C\left(\rho(A) + \varepsilon\right)^K$$

$$\Rightarrow \|A^K\|^{1/K} \leq C^{1/K}(\rho(A) + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(A) \leq \|A^K\|^{1/K} \leq C^{1/K}(\rho(A) + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(A) \leq \|A^K\|^{1/K} \leq \overbrace{(1+\varepsilon')(\rho(A)+\varepsilon)}^{\rho(A) + \varepsilon'\rho(A) + \varepsilon + \varepsilon\varepsilon'} \quad \forall K > K_{\varepsilon'}$$

una especie de Sandwich porque $\varepsilon'\rho(A) + \varepsilon + \varepsilon\varepsilon'$ puedes hacerlo tan pequeño quieras observación: ρ no es una norma:

$$A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad \rho(A)=0 \quad , \quad A\neq 0$$

OJO
$A^* = A^t$ en $\mathbb{R}$
$A^* = \overline{A^t}$ en $\mathbb{C}$

PROPOSICIÓN: $\|A\|_{2\to 2} = \rho(\underbrace{A^*.A}_{\text{matriz semidefinida positiva}})^{1/2} \qquad \forall A\in\mathbb{K}^{n\times n}$

observación: $\langle x, A^*Ax\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|_2^2 \geq 0$

demostración

- Si $C=C^* \Rightarrow A$ tiene una base ortonormal de autovectores a $\mathbb{K}^n$
- $C=A^*A$ es tal que $C^*=C$.
- Sea $\{v_j\}_{j=1}^n$ base ortonormal de $\mathbb{K}^n$ tal que $A^*.A.v_j=\lambda_j v_j$

$\hookrightarrow x\in\mathbb{K}^n$ se escribe $x=\sum_{j=1}^n c_j.v_j$

$$\|A\|_{2\to2} = \max_{x\in\mathbb{K}^n:\|x\|_2=1}\|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1}\Big(\underbrace{\langle Ax,Ax\rangle}_{\langle A^*Ax,x\rangle}\Big)^{1/2} =$$

$$=\max_{\|x\|_2=1}\Big(\langle \underbrace{A^*.A\sum_{j=1}^n c_jv_j}_{\sum_{j=1}^n c_j\lambda_j v_j}, \sum_{j=1}^n c_jv_j\rangle\Big)^{1/2} =$$

$$=\max_{\|x\|_2=1}\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_i\lambda_i\overline{c_j}\underbrace{\langle v_i,v_j\rangle}_{\substack{1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j}}\Big)^{1/2} =$$

$$=\max_{\|x\|_2=1}\Big(\sum_{j=1}^n\lambda_i.|c_j|^2\Big)^{1/2} \leq \max_{j=1\dots n}(\lambda_j)^{1/2}.\underbrace{\max_{\|x\|_2=1}\Big(\sum|c_j|^2\Big)^{1/2}}_{=1}$$

$$\underset{=1}{\|x\|_2^2} = \langle\sum c_jv_j,\sum c_jv_j\rangle = \sum|c_j|^2 = 1$$

TEOREMA: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $\quad A^K \xrightarrow{K\to 0} 0 \iff \rho(A) < 1$

demostración

Gelfand nos dice $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon > 0$ tal que

$$\rho(A)^K \leq \|A^K\| \leq (\rho(A)+\varepsilon)^K \quad \forall K > K_\varepsilon$$

- $A^K \to 0 \Rightarrow \|A^K\| \to 0 \Rightarrow \rho(A)^K \to 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$
- $\rho(A) < 1$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\rho(A)+\varepsilon < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\rho(A)+\varepsilon)^K \longrightarrow 0 \Rightarrow \|A^K\| \longrightarrow 0$$

$\square$

⊛ TEOREMA: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible, $b \in \mathbb{K}^n$, y sea $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\phi = (I-B)A^{-1}.b$

$\Rightarrow$ la iteración $X_{k+1} = BX_n + \phi$ converge ~~ad~~ a la solución de $Ax=b$ $\forall x_0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $\iff$

$\iff \rho(B) < 1$.

demostración

$$E_{k+1} = X_{k+1} - \underline{x} = B.X_k + (\cancel{I}-B)A^{-1}b - \cancel{A^{-1}b} =$$

$$= B(X_k - \underline{x}) = \cdots = B^{k+1}(x_0 - \underline{x})$$

$E_k \to 0 \iff B^k \to 0 \iff \rho(B) < 1$ $\square$

ITERACIÓN DE JACOBI

$Ax=b$ esto quiere decir que tenemos un sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b_n \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k\neq j} a_{jk}x_k}{a_{jj}}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, k\neq j}^{n} a_{ij}\cdot x_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad (*)$$

ctori-
ación $\Updownarrow$

$$x^{(k+1)} = D_A^{-1}\left(b - (A-D_A)x^{(k)}\right)$$

$$\boxed{B_J(A) = D_A^{-1}(D_A - A)}$$ matriz de iteración de Jacobi

(*) Esto también se puede escribir así:

$$x^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{\sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}} - \frac{\sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

$\downarrow$ MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

$$x^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{\sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)}}{a_{ii}} - \frac{\sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

TEOREMA: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \qquad \forall i=1,\dots,n \implies$$

$\implies \|B_J(A)\|_{\infty\to\infty} < 1 \implies$ la iteración de Jacobi CONVERGE

demostración ($B_J(A) = B$ en la demo)

$$B_{ij} = \sum_K \left(D_A^{-1}\right)_{iK} \left(D_A - A\right)_{Kj} = \sum_K \underbrace{\frac{1}{a_{ii}}}_{\text{elem de } D_A^{-1}} \cdot \delta_{iK} \left(\overbrace{a_{Kj}\delta_{Kj}}^{\text{elem de DA}} - \overbrace{a_{Kj}}^{\text{elem de A}}\right) =$$

NOTACIÓN

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

delta de Kronec

$$= \frac{1}{a_{ii}} \sum_K a_{Kj} \cdot \delta_{iK} \left(\delta_{Kj} - 1\right) = \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)\left(\delta_{ij} - 1\right)$$

$$\|B\|_{\infty\to\infty} = \max_{n=1\dots m} \sum_{j=1}^{n} |B_{ij}| = \max_{i=1\dots m} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

ITERACIÓN DE GAUSS-SEIDEL

$$x_i^{(K+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{\sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(K+1)}}{a_{ii}} - \frac{\sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(K)}}{a_{ii}}$$

$$\iff \sum_{j=1}^{i} a_{ij} \cdot x_j^{(K+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(K)}$$

$$(D_A + L_A) X^{(K+1)} = b - U_L X^{(K)} :$$

$$X^{(K+1)} = (D_A + L_A)^{-1} (b - U_A) X^{(K)}$$

$$\boxed{B_{GS}(A) = -(D_A + L_A)^{-1} \cdot U_A}$$

$$B_J(A) = D_A^{-1} \cdot (D_A - A)$$

TEOREMA: Si $A \in \mathbb{K}$ simetrica y $A > 0$ ...

$\Rightarrow \rho(B_{GS}(A)) < 1$. (GAUSS-SEIDEL CONVERGE)

TEOREMA: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i=1,\dots$

$\Rightarrow$ GS CONVERGE.

demostración

$$|a_{ii}| > \sum_{j<i} |a_{ij}| + \sum_{j>i} |a_{ij}| \Rightarrow \gamma_i = \frac{\sum_{j>i} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j<i} |a_{ij}|} < 1 \quad \forall i = 1\dots$$

probamos que $\dfrac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty} < \max_i \gamma_i$.

Sea $y = Bx \Rightarrow (D_A + L_A)y = -U_A \cdot x \iff$

$$\iff a_{ii} y_i + \sum_{j<i} a_{ij} y_j = -\sum_{j>i} a_{ij} x_j$$

- $\left| a_{ii} y_i + \sum_{j<i} a_{ij} y_j \right| \geq |a_{ii}||y_i| - \sum_{j<i} |a_{ij}||y_j|$
- Sea ℓ: $|y_\ell| = \|y\|_\infty$

$$\Rightarrow \left| a_{\ell\ell} y_\ell + \sum_{j<\ell} y_j a_{\ell j} \right| \geq |a_{\ell\ell}| - \sum_{j<\ell} |a_{\ell j}| \, \|y\|_\infty$$

$$\|y\|_\infty \leq \frac{1}{|a_{\ell\ell}| - \sum_{j<\ell} |a_{\ell j}|} \cdot \underbrace{\left| \sum_{j>\ell} a_{\ell j} x_j \right|}_{\leq \sum_{j<\ell} |a_{\ell j}| \cdot \|x\|_\infty} \leq \gamma_\ell \|x\|_\infty$$

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

¿cuántas operaciones necesitamos para evaluar un polinomio?

$$\begin{cases} n \text{ sumas} \\ a_k . x^k \quad n \text{ veces} \\ x . x^{k-1} \quad n-1 \text{ veces} \end{cases}$$

$\Rightarrow p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots))$ forma de HORNER

$$\begin{cases} n \text{ sumas} \\ n \text{ productos} \end{cases}$$

DEFINICIÓN: $\mathcal{P}_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \, , \; a_j \in \mathbb{R}\}$

polinomios de grado $\leq n$: $\mathcal{P}_n \simeq \mathbb{R}^{n+1}$

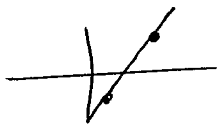
TEOREMA: Sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2 \wedge$ $\boxed{x_i \neq x_j}$ puntos distintos $n+1$ puntos del plano

$\Rightarrow \exists!\; P_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $P_n(x_i) = y_i$ $\quad P_n \equiv$ polinomio interpolador

demostración (inducción)

$n=0$: $p(x) = y_0$

$n=1$: (x_0, y_0) , (x_1, y_1)



$$\boxed{P_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\, y_1 + \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\, y_0}$$

Lo suponemos cierto para $n \Rightarrow$ ¿ para $n+1$?

$\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}$ y $P_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $P_n(x_i) = y_i \quad i=0 \dots n$

(x_{n+1}, y_{n+1}) : Sea $c \in \mathbb{R}$, decimos $q_c(x) = P_n(x) + \underbrace{c(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{\text{grado } n+1}$

$q_c(x_i) = y_i \quad i = 0 \dots n$

$q_c(x_{n+1}) = P_n(x_{n+1}) + \overbrace{c(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)}^{\neq 0} \longrightarrow$

$\longrightarrow$ queremos $q_c(x_{n+1}) = y_{n+1} \Rightarrow$ $\boxed{c = \dfrac{y_{n+1} - P_n(x_{n+1})}{(x_{n+1}-x_0)\cdot \ldots \cdot (x_{n+1}-x_n)}}$

demostración unicidad

Sean $P_n, q_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $P_n(x_i) = q_n(x_i) = y_i \quad i=0\dots n$

$\Rightarrow r = P_n - q_n \in \mathcal{P}_n$

$r(x_i) = 0 \quad i=0\dots n \qquad n+1$ ceros

$\Rightarrow r=0.$

TEOREMA (aproximación de funciones regulares con polinomios interpoladores)

Sea $f \in C^{n+1}([a,b])$ y $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R} \quad x_i \neq x_j \quad (i\neq j) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \ \exists\, \xi_x \in (a,b)$ tal que:

$$\boxed{f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x)}$$

P_n polinomio interpolador por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$

y

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot \dots (x-x_n) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

COROLARIO: $$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\cdot(b-a)^{n+1}$$

y además $$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

demostración del teorema

- Si $x = x_i \quad 0=0$ no hay nada que demostrar.
- Sea $x = x_i \quad i=0\dots n$ y decimos $\varphi_x(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)}\cdot\Pi_{n+1}(t)$

$\varphi_x \in C^{n+1}([a,b])$, $\varphi_x(x) = 0$ y $\varphi_x(x_j) = 0 \quad j=0\dots n$: tiene $n+2$ ceros

$\Rightarrow \varphi'_x$ tiene $n+1$ ceros en (a,b) y φ''_x tiene n ceros en (a,b) ...

$\Rightarrow \varphi_x^{(n+1)}$ tiene un cero en (a,b). ξ_x

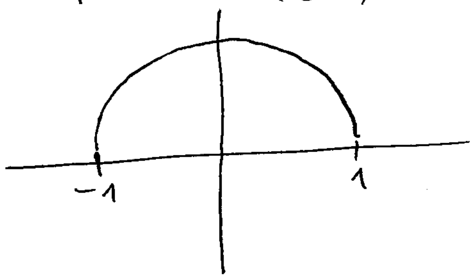
$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n}x^n = n\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x^{n-1} = \dots = n!}$$

$$\varphi_x^{(n+1)} = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)}\cdot(n+1)! \longrightarrow \varphi_x^{(n+1)}(\xi_x) = 0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)}(n+1)!$$

derivamos con resp. t

$$\Rightarrow \boxed{f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\cdot\Pi_{n+1}(x)}$$

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ en $[-1,1]$



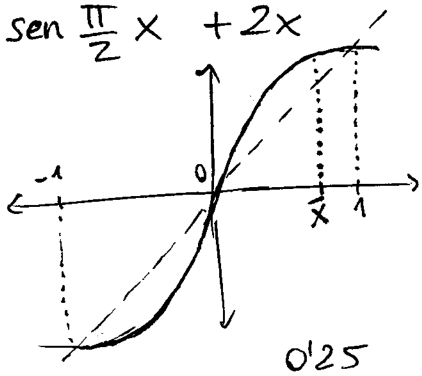
$P_2 \in \mathcal{P}_2$ por $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$

$P_2(x) = 1 - x^2$

$\phi(x) = f(x) - P_2(x) \longrightarrow \phi'(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}\, \frac{\pi}{2}x + 2x$

¿$\phi'(x) = 0$?

$\phi'(x)0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0'7$



si conocemos los

$|\phi(0'7)| = |\phi(-0'7)| \sim 0'056$

$$|f(x) - P_2(x)| = \frac{|f^{(3)}(\xi_x)|}{6}|x(x+1)(x-1)| \le \overbrace{\frac{\overbrace{\max_{[-1,1]}|f^{(3)}|}^{=\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}}{6} \cdot \overbrace{\max_{[-1,1]}|x(x+1)(x-1)|}^{\sim 0'38}}^{0'25}$$

$$\max_{[-1,1]}|x(x+1)(x-1)| \le (1-(-1))^3 = 8$$

$\to$ si no conocemos los "nodos"

$f^{(3)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$$\frac{\frac{\pi^3}{8}}{6} \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - P_2(x)| \le \frac{\pi^3}{6}$$

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| = \|f - P_n\|_\infty$$

Lista de deseos (objetivos)

1) Manera de construir $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|f-P_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

2) Que P_n haga que $\|f-P_n\|_\infty$ sea lo más pequeño posible.

$v \in \mathbb{R}^n \quad \|v\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} |v_i|$

$f_1, f_2 \in C([a,b]) \Longrightarrow af_1 + bf_2 \in C([a,b])$

$f\in C([a,b])$, $\|f\|_\infty = 0 \Longrightarrow f=0 \quad |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)|$

$\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial de dimensión $n+1$

$\mathcal{P}_n \subseteq C([a,b])$.

<u>TEOREMA</u> (de aproximación de Weierstrass)

Sea $f\in C([a,b])$ $\exists \{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, $P_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $\|f-P_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

<u>Problemas</u>

1) $P_n = ?$

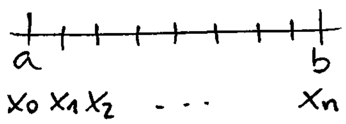
2) P_n dependiente de f

<u>TEOREMA</u> (de mejor aproximación de Chebyshev)

Sea $f\in C([a,b]) \Longrightarrow \forall n \ \exists!$ solución a $\min_{P_n\in\mathcal{P}_n} \|f-P_n\|_\infty$

y P_n es INTERPOLADOR.

NODOS EQUIESPACIADOS



$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \qquad i = 0 \dots n$$

Proposición: Sea $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ equiespaciados en $[a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \Pi_{n+1}(x) \right| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{n!}{n^{n+1}} \cdot (b-a)^{n+1}$$

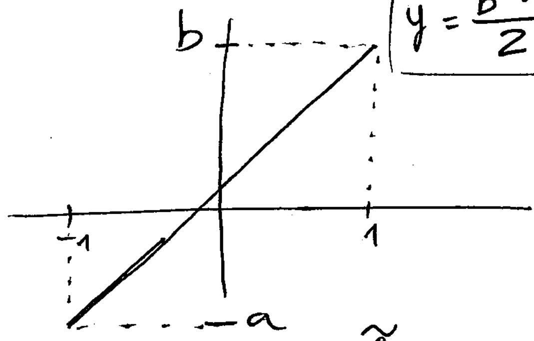
Corolario:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \cdot \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{n+1}$$

NODOS DE CHEBYSHEV

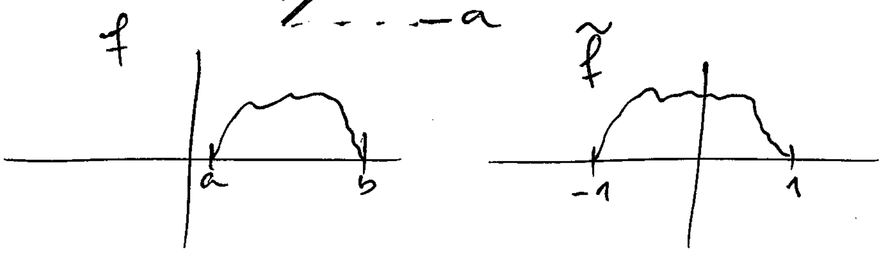
Trabajamos en $[a,b] = [-1,1]$

$$\boxed{y = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}}$$



$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

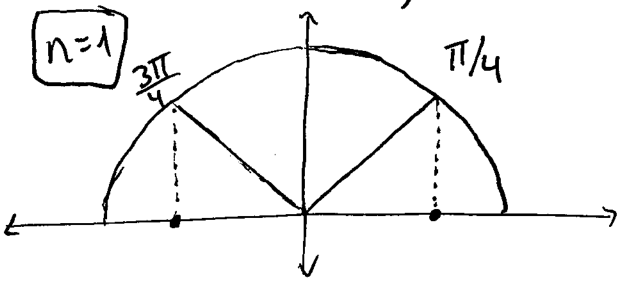
$\tilde{f} \circ y : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$



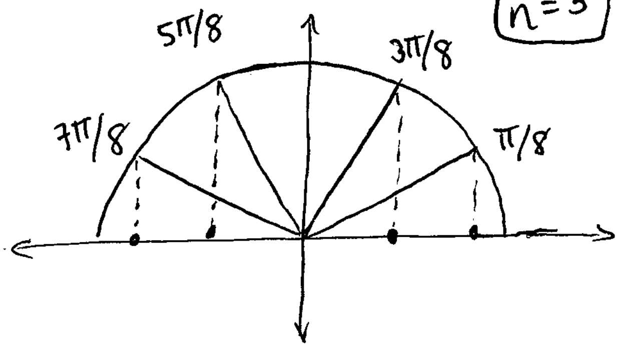
Definición: Los NODOS DE CHEBYSHEV en $[-1,1]$ son

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \qquad k = 0 \dots n$$

$\boxed{n=1}$



$\boxed{n=3}$



TEOREMA: Sea $\overset{\circ}{T}_{n+1}$ el polinomio mónico con ceros en los nodos de Chebyshev en $[-1,1]$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \max_{x\in[-1,1]} \left|\overset{\circ}{T}_{n+1}(x)\right| \leq \max_{x\in[-1,1]} \left|\Pi_{n+1}(x)\right| \quad \forall \Pi_{n+1} \text{ polinomio mónico}$$

DEFINICIÓN: Los polinomios de Chebyshev $\{T_n\}_{n\geq 0}$ son los polinomios dados por la relación

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) & n\geq 1 \\ T_0 = 1 \quad , \quad T_1(x) = x \end{cases}$$

ejemplos
$T_2(x) = 2xT_1 - T_0 = 2x^2 - 1$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

PROPOSICIÓN: $T_n \in \mathcal{P}_n$ es el polinomio tal que:

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad \forall\theta \in [0,\pi]$$

demostración

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha.\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$

Si $U_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \Rightarrow U_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n\theta+\theta)$
$U_{n-1}(\cos\theta) = \cos(n\theta-\theta)$

$$\Rightarrow U_{n+1}(\cos\theta) + U_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta \underbrace{\cos(n\theta)}_{U_n(\theta)}$$

Observación: En algunos libros: $\begin{cases} T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) & \theta\in[0,\pi] \\ T_n(x) = \cos(n.\arccos(x)) & x\in[-1, \end{cases}$

COROLARIO:

i) $T_n(x) = 0 \iff x = x_k^{(n)} = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad k = 0\ldots n-1$

Los nodos de Chebyshev x_k, $k=0\ldots n$ en $[-1,1]$ son los ceros de T_{n+1}

ii) los valores extremos de T_n se tienen en $\xi_j = \cos\left(\frac{j}{n}\pi\right)$ $j=$

$$T_n(\xi_j) = \begin{cases} 1 & j \text{ par} \\ -1 & j \text{ impar} \end{cases}$$

iii) $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathcal{P}_n$ como $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \Rightarrow a_n = 2^{n+1}$ (no es mónic

$\Rightarrow \overset{\circ}{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot T_n$

demostración del teorema

- Sabemos $\max_{[-1,1]} |\mathring{T}_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}$

- Supongamos por contradicción

$$\exists \overset{\text{mónico}}{\Pi_{n+1}} : \max_{[-1,1]} |\Pi_{n+1}| < \frac{1}{2^n}$$

$\Rightarrow$ Sea $d_{n+1} = \mathring{T}_{n+1} - \Pi_{n+1}$ es de grado $\leq n$

Ahora $|\mathring{T}_{n+1}(\xi_j)| = \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow d_{n+1}(\xi_0) > 0 \qquad d_{n+1}(\xi_1) < 0 \qquad \Rightarrow$

$\Rightarrow d_{n+1} = 0$ tiene $n+1$ ceros un pol de grado $\leq n$ $\Rightarrow$ pol $= 0$

CONSTRUCCIÓN DEL POLINOMIO INTERPOLADOR

Sean $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$ $n+1$ puntos del plano tal que $x_i \neq x_j$ $i\neq j$ $n>0$. El interpolador $p_n \in \mathcal{P}_n$ $(\exists!)$ es:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathcal{P}_n$$

$n+1$ incógnitas

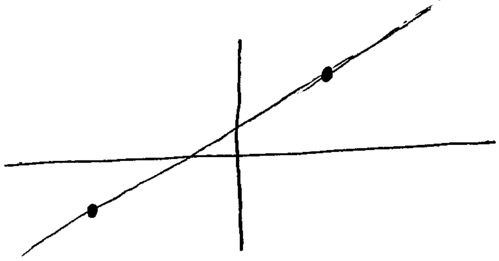
satisface $\boxed{p(x_j) = y_j \quad j=0\dots n}$ $n+1$ ecuaciones. $(*)$

MATRIZ DE VANDERMONDE

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \quad ; \quad (*) = V\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$O(n^3)$ operaciones para calcular a_i + n operaciones para evaluar.

MÉTODO DE LAGRANGE



$n=1$ $\quad (x_0,y_0) \quad (x_1,y_1)$

$$P_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

TEOREMA (polinomio interpolador en la forma de Lagrange)

Sean $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}$ $x_i\neq x_j$ $i\neq j \Rightarrow P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)y_j$ donde

$$L_j(x) = \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k} \qquad j=0\dots n$$

demostración

i) $L_j \in \mathcal{P}_n \Rightarrow P_n \in \mathcal{P}_n$: combinación lineal

ii) $L_j(x_\ell) = \delta_{j\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=\ell \\ 0 & \text{si } j\neq \ell \end{cases} \Rightarrow P_n(x_k) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x_k)y_j = y_k$ $\square$

Ejemplo

$n=2$ (3 puntos: parabola) (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\;;\quad L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\;;\quad L_2(x)=\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$P_2(x)=ax^2+bx+c$$

$$\boxed{P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}L_j(x)\,y_j\;;\quad L_j(x)=\prod_{k=0,\,k\neq j}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}}$$

1) ¿cuántas operaciones son necesarias para evaluar P_n en 1 punto

$O(n)$ para cada $L_j(x)$ $\Rightarrow$ dado x, solo para evaluar todos los L_j, hacen falta $O(n^2)$ operaciones

$\Rightarrow O(n^2)$ para $P_n(x)$.

2) Errores de cancelación $\longrightarrow$ inestable

3) ¿qué pasa si añadimos 1 nodo? (x_{n+1}, y_{n+1})
necesitamos repetir $O(n^2)$ operaciones para todo x en el que queramos evaluar $P_{n+1}(x)$.

Observación: ¿cuánto vale $u(x)=\sum_{j=0}^{n}L_j(x)$?

$f(x)=1\in\mathcal{P}_n$

$y_j=f(x_j)$

$u(x)=1 \quad \forall x$

FORMA BARICENTRICA DE LAGRANGE

<u>TEOREMA:</u> Sean $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x-x_j} y_j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x-x_j}}}, \quad \text{donde} \quad \boxed{w_j = \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=0, k\neq j}^{n} (x_j - x_k)}} \quad j = 0, \dots, n$$

1) $O(n)$ operaciones para cada w_j $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $O(n^2)$ operaciones para todos los w_j $j = 0, \dots, n$

pero w_j NO DEPENDE DE x $\Rightarrow$ Una vez calculados,

para cada $x \rightarrow O(n)$ operacion

2) Añadir (x_{n+1}, y_{n+1}) cuesta $O(n)$ operaciones.

demostración

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

- $$L_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0, k\neq j}^{n}(x-x_k)}{\displaystyle\prod_{k=0, k\neq j}^{n}(x_j-x_k)} = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_j)} \cdot \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=0, k\neq j}^{n}(x_j-x_k)}$$ $j = 0 \dots n$

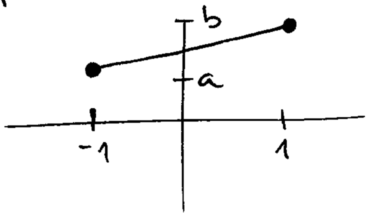
$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_j = \Pi_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x-x_j} y_j$$

- $$1 = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x-x_j} \Rightarrow \Pi_{n+1}(x) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x-x_j}}$$

$$\boxed{x_j \longmapsto \alpha x_j + \beta = \tilde{x}_j}$$ donde α y β no dependen de

desde el punto de vista de la <u>forma baricéntrica</u>, los w_j son invariantes ante la transformación $x_j \mapsto \alpha x_j + \beta = \tilde{x}_j$

No hay que volver a calcular/definir los w_j para la fórmula baricéntrica bajo este cambio de nodos.



$$x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} = \alpha t + \beta$$

$$x : [-1,1] \longrightarrow [a,b]$$

<u>NODOS EQUIESPACIADOS</u> $[0,1]$

$$x_k = k/n \qquad k = 0 \dots n$$

$$w_j = \frac{1}{\prod_{k=0, k\neq j}^{n}(x_j - x_k)} = \frac{1}{\prod_{k=0, k\neq j}^{n}\left(\frac{j}{n} - \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{\prod_{k=0, k\neq j}^{n}\left(\frac{j-k}{n}\right)} = \frac{n^n}{\prod_{k=0, k\neq j}^{n}(j-k)} =$$

$$= \frac{n^n}{\prod_{k=0}^{j-1}(j-k)\prod_{k=j+1}^{n}(j-k)} \longrightarrow j! \cdot (-1)^{n-j}\prod_{k=j+1}^{n}(k-j) =$$

$$= j! \cdot j!(n-j)!$$

$$\Rightarrow w_j^{(n)} = (-1)^{-n} \cdot n^n \cdot \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!}$$

$$w_j^{(n)} = (-1)^j \cdot \frac{1}{j!(n-j)!}$$

$$w_j^{(n)} = (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

son distintos números pero en la forma baricéntrica las cosas que no dependen de j se simplifican, por lo que da igual los w_j que escojamos.

NODOS EQUIESPACIADOS $x_0 \dots x_n$

NODOS DE CHEBYSHEV EN $[-1,1]$ $\quad X_K = \cos\left(\frac{2K+1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

Son los ceros de $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\,a.\cos(x))$ $\quad K=0\ldots n$

en $x\in[-1,1]$

$\overset{\circ}{T}_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}\cos((n+1)\,a.\cos(x))$ es mónico.

Observación

$$W_j = \frac{1}{\prod_{K=0,\,K\neq j}^{n}(X_j-X_K)} \underset{\text{¿por qué?}}{\downarrow} = \frac{1}{\Pi'_{n+1}(X_j)}$$

Sean los que sean los nodos $x_i\neq x_j$, $i\neq j$

$$\frac{d}{dx}\prod_{K=0}^{n}(x-X_K) = \sum_{j=0}^{n}\prod_{K=0,\,K\neq j}^{n}(x-X_K) = \Pi'_{n+1}(x)$$

$$\Pi'_{n+1}(X_\ell) = \prod_{K=0,\,K\neq \ell}^{n}(X_\ell-X_K)$$

$$\frac{d}{dx}\overset{\circ}{T}_n(x) = \frac{1}{2^n}\left(-\operatorname{sen}((n+1)\,a.\cos(x))\right) = \left(-(n+1)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\overset{\circ}{T}_n{}'(X_K) = \frac{n+1}{2^n}\cdot\frac{\operatorname{sen}((2K+1)\pi/2)}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{2K+1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right|} = \frac{n+1}{2^n}(-1)^K\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{2K+1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$$

Para los nodos de Chebyshev:

$$W_j = (-1)^j\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2j+1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad j=0\ldots n$$

POLINOMIO INTERPOLADOR EN LA FORMA DE NEWTON

Idea: 1 pto. $(x_0, f(x_0)) \longrightarrow P_0(x) = f(x_0)$

2 ptos. $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)) \longrightarrow P_1(x) = P_0(x) + R_1(x) \longrightarrow$ grado 1

$$\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) \\ P_1(x_1) = f(x_1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} P_0(x_0) + R_1(x_0) = f(x_0) + R_1(x_0) = f(x_0) \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow R_1(x_0) = 0 \Longleftrightarrow R_1(x) = a_1(x - x_0) \\ P_0(x_1) + a_1(x - x_0) = f(x_1) \Longleftrightarrow \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Entonces:

2 ptos. $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)) \longrightarrow P_1(x) = P_0(x) + R_1(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

Notación: $P_n(\overset{\text{variable}}{x}; \overset{\text{función}}{f}; \overset{\text{nodos}}{x_0, \dots, x_n})$ polinomio $\in \mathcal{P}_n$ formado por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$

<u>TEOREMA</u>: Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ $x_i \neq x_j$ $i \neq j$

$$\Rightarrow P_n(x) = P_n(x; f; x_0 \dots x_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot N_k(x)$$ donde:

$N_0(x) = 1$, $N_k(x) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$ $k = 1 \dots n$ y

$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ diferencias divididas.

$f[x_0, \dots, x_k]$ se obtienen de forma recursiva:

$$a_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$a_k = f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Ejemplo

$$a_2 = f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

demostración

- paso 1: inducción. Conocemos $P_{n-1}(x;f;x_0,\dots,x_{n-1}) \in \mathcal{P}_{n-1}$ y decimos $P_n(x;f;x_0,\dots,x_n) = P_{n-1}(x;f;x_0,\dots,x_n) + R_n(x) \in \mathcal{P}_n$.

Determinamos R_n : $f(x_i) = P_{n-1}(x_i) + R_n(x_i)$ $\quad i=0\dots n$

$$\begin{cases} f(x_i) = f(x_i) + R_n(x_i) \quad i=0\dots n-1 \iff R_n(x) = a_n \cdot \prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j) \\ f(x_n) = P_{n-1}(x_n;f;x_0,\dots,x_n) + a_n \prod_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n;f;x_0,\dots,x_{n-1})}{\prod_{j=0}^{n-1}(x_n-x_j)}$$

- paso 2: vemos que los a_k son las diferencias divididas y sean $r(x) = P_{n-1}(x;f;x_1,\dots,x_n)$, $s(x) = P_{n-1}(x;f;x_0,\dots,x_{n-1})$ y

$$q(x) = r(x) + \frac{x-x_n}{x_n-x_0}(r(x)-s(x)) \in \mathcal{P}_n.$$

$$q(x_0) = r(x_0) - r(x_0) + s(x_0) = s(x_0) = f(x_0)$$

$$q(x_n) = r(x_n) = f(x_n)$$

$$q(x_j) \overset{0<j<n}{=} r(x_j) + \frac{x_j-x_n}{x_n-x_0}\left(\overset{f(x_j)}{r(x_j)} - \overset{f(x_j)}{s(x_j)}\right) = f(x_j)$$

$$\left.\begin{aligned} q(x) &= a_n x^n + \cdots \\ r(x) &= b_{n-1}x^{n-1} + \cdots \\ s(x) &= c_{n-1}x^{n-1} + \cdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = \frac{b_{n-1}-c_{n-1}}{x_n-x_0}$$

□

<u>PROPOSICIÓN</u>: (simetría de las diferencias divididas)

$$\forall_{\text{perm}} \pi : \{0, \dots, n\} \xrightarrow{\text{BIY}} \{0, \dots, n\} \quad \text{(permutación)}$$

$$f[x_{\pi(0)} \cdots x_{\pi(n)}] = f[x_0, \dots x_n]$$

demostración

Sean $N_k^{(1)}(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$, $N_k^{(2)}(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_{\pi(j)})$

$$P_n(x; f; x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_n] N_k^{(1)}(x) \in \mathcal{P}_n \Rightarrow = a_n x^n + \cdots$$

$\parallel$ por unicidad del polinomio interpolador

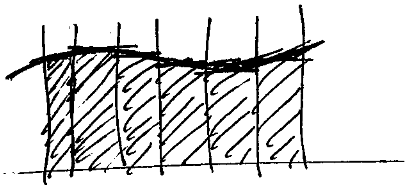
$$P_n(x; f; x_{\pi(0)}, \dots, x_{\pi(n)}) = \sum_{k=0}^{n} f[x_{\pi(0)}, \dots, x_{\pi(n)}] N_k^{(2)}(x) \in \mathcal{P}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = b_n x^n + \cdots$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Dada $f \in C([a,b])$ encontrar $\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$.



$$S^{Rim}[f] = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

DEFINICIÓN: Sean $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$ $\quad x_i \neq x_j \quad i \neq j$ y $\{w_j\}_{j=0}^{n} \subset \mathbb{R}$

decimos $I_{[a,b]}^{x,w}[f] = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_i) \rightarrow$ FÓRMULA DE CUADRATURA

$$\boxed{I[f] \approx \int_a^b f(x)\,dx}$$

y $e_{[a,b]}^{x,w}[f] = \int_a^b f(x)\,dx - I_{[a,b]}^{x,w}[f]$ ERROR

DEFINICIÓN: Una fórmula de cuadratura I se dice de ORDEN m, o EXACTA en $\mathcal{P}_m$ si $I[p] = \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall p \in \mathcal{P}_n$

Observación: $\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dx = \alpha \int_a^b f_1(x)\,dx + \beta \int_a^b f_2(x)\,dx$

$$I[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha I[f_1] + \beta I[f_2]$$

$$\Rightarrow \boxed{I \text{ es de orden } \underline{m} \iff I[x^k] = \int_a^b x^k\,dx \quad k = 0, \ldots, \underline{m}}$$

porque todo $p \in \mathcal{P}_n$ es $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

PROPOSICIÓN: Sean $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$ $\quad x_i \neq x_j$

$\Rightarrow \forall m \in \{0,\dots,n\}$ $\exists \{w_j\}_{j=0}^{n}$ tal que $I_{[a,b]}^{x,w}$ ORDEN m

y si $m=n$ la elección de pesos w es ÚNICA.

demostración

La condición de ser de ORDEN m es un sistema de m+1 ecuaciones.

$$I[x^k] = \int_a^b x^k\,dx \qquad k=0\dots m$$

$$\sum_{j=0}^{n} w_j x_j^k = \int_a^b x^k\,dx \qquad k=0\dots m$$

incógnitas (w_j) datos: coeficientes (x_j^k)

Sistema lineal para los $\{w_j\}_{j=0}^{n}$ con matriz:

$$A = \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_m^2 & x_{m+1}^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^m & x_1^m & \cdots & x_m^m & x_{m+1}^m & \cdots & x_n^m \end{array}\right)$$

Si $n=m$ $\rightarrow$ Vandermonde

Solución: sin resolver el sistema directamente.

Si $m=n \longrightarrow I[f] = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$ ORDEN n

Observación: $\underset{k\leq n}{\rightarrow} x^k = \sum_{j=0}^{n} x_j^k L_j(x)$ donde $\{L_j\}_{j=0}^{n}$ polinomio característico de Lagrange por $\{x_i\}_{i=0}^{n}$.

$$\int_a^b x^k\,dx = \sum_{j=0}^{n} x_j^k \underbrace{\int_a^b L_j(x)\,dx}_{w_j}$$

PROPOSICIÓN: Sean $\{x_j\}_{j=0}^{m} \subset [a,b]$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$

y sean $\{L_j\}_{j=0}^{m}$ Lagrange por $\{x_j\}_{j=0}^{m}$ $\boxed{m \leq n}$

$\Rightarrow$ i) $\forall \{w_j\}_{j=m+1}^{n} \subset \mathbb{R}$, si definimos:

$$w_j = \int_a^b L_j(x)dx - \sum_{k=m+1}^{n} w_k L_j(x_k) \quad j=0,\dots,m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I[f] = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)dx - \sum_{k=m+1}^{n} w_k L_j(x_k) \quad j=0,\dots,m$$

$$\Rightarrow I[f] = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \quad \text{ES DE ORDEN } m.$$

ii) Si $n=m$ sea $P_n \in \mathcal{P}_n$ el polinomio interpolador de f por $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ $\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) = \int_a^b P_n(x)\,dx$

demostración

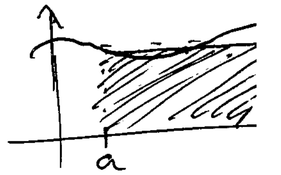
i) $$I[L_j] = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} w_k \overbrace{L_j(x_k)}^{\delta_{jk}}} + \sum_{k=m+1}^{n} w_k L_j(x_k) = \int_a^b L_j(x)dx$$

ii) $$I[f] = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot \int_a^b L_j(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x) \right) dx$$

Ejemplo: dados $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ $x_i \neq x_j$ encontrar $\{w_j\}_{j=0}^{n}$ tal que

$I_{[a,b]}^{x,w}$ orden n.

1) $n=0$ (1 pto) $\quad x_0 = \frac{a+b}{2}$ $\quad W_0 = \int_a^b L_0(x)\,dx = (b-a)$

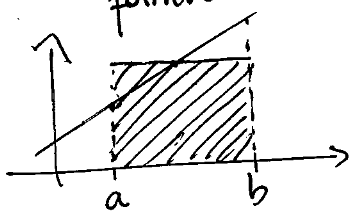


$\stackrel{\text{¿mónico?}}{}$

$$I^M[f] = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)$$ fórmula del punto medio

es exacta en $\mathbb{P}_1$

ORDEN 1



2) $n=1$ (2 ptos.) $\quad x_0 = a, \quad x_1 = b \quad I[f] = W_0 f(a) + W_1 f(b)$

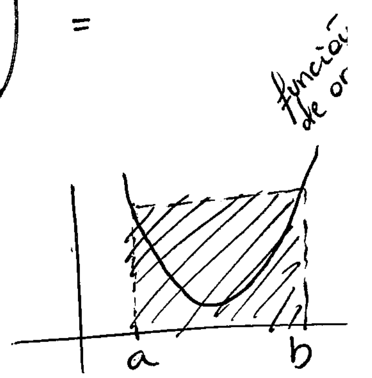
$$L_0(x) = \frac{x-b}{a-b} \qquad \overset{\text{trapecio}}{I^T}[f] = \int_a^b P_1(x; f; x_1, x_2)\,dx$$

$$L_1(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$P_1(x) = f(a)\cdot L_0(x) + f(b)\,L_1(x)$$

$$\int_a^b P_1(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \Big(f(b)(x-a) - f(a)(x-b)\Big)dx\right) =$$

$$= \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)$$ FÓRMULA DEL TRAPECIO
exacta orden 1
no exacta orden 2



3) $n=2$ (3 ptos.) $\quad x_0 = a, \; x_1 = \frac{a+b}{2}, \; x_2 = b$

$$L_0(x) = \frac{x - \frac{a+b}{2}}{a - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x-b}{a-b} = \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(a-b)^2}, \quad (a-b)^2 = (b-a)^2$$

$$L_1(x) = \frac{x-a}{\frac{a+b}{2} - a} \cdot \frac{x-b}{\frac{a+b}{2} - b} = \frac{-4(x-a)(x-b)}{(b-a)^2}$$

$$L_2(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{(x-a)(2x-a-b)}{(b-a)^2}$$

$L_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$
$j=0,\dots,n$
pol. característico de Lagrange para los puntos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$

$$W_0 = \frac{\;}{(b-a)^2}\int_a^b \underbrace{(2x-a-b)}_{\substack{\| \\ (x-a)+(x-b)}}(x-b)\,dx = \frac{\;}{(b-a)^2}\Big[\underbrace{\int_a^b (x-a)(x-b)dx}_{\substack{\text{cambio variable} \\ y=x-a}} + \int_a^b (x-b)^2 dx\Big] =$$

$$\int_0^{b-a} y(y-(b-a))dy = \frac{(b-a)^3}{3} - \frac{(b-a)^2}{2}$$

cambio variable $y = x-b$

$$\int_{a-b}^{0} y^2 dy = \frac{(b-a)^3}{3}$$

Entonces $W_0 = \dfrac{b-a}{6}$

Análogamente:

$W_1 = \frac{2}{3}(b-a)$

$W_2 = W_0$

Por lo tanto: Simpson

$$I^S_{[a,b]}[f] = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{1}{3}I^T[f] + \frac{2}{3}I^M[f]$$

trapecio ¿mónico?

Simpson es exacto para orden 1 y orden 2:

¿ex exacta para orden 3?

$$I^S_{[a,b]}[x^3] \overset{?}{=} \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4-a^4}{4}$$

$$\frac{b-a}{6}\left(a^3 + \frac{(a+b)^3}{2} + b^3\right) \;\; \|$$

por lo tanto Simpson es exacto para orden 3.

EJERCICIO ADICIONAL: en $[0,1]$

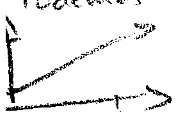
$x_0 = 1/4$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 3/4$ ← DATOS

Comprobar que $W_0 = 2/3$, $W_1 = -1/3$, $W_2 = 2/3$

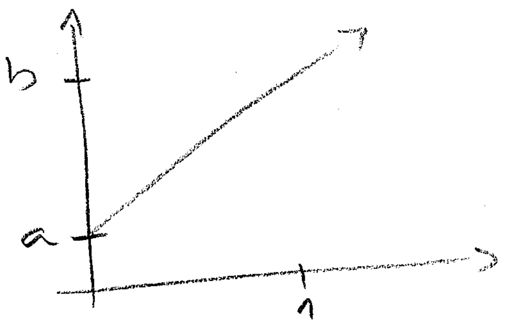
Comprobar que orden exacto 3.

Comprobar que para esto y para Simpson: no orden 4.

Podemos transformar esto en Simpson con un cambio de variable:



$$\int_a^b f(x)dx = [x = a + t(b-a)] = (b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))dt$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[x = a + t(b-a)\right] = (b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))\,dt$$

$$I_{[0,1]}[g] = \sum_{j=0}^{n} w_j \cdot g(t_j) \qquad \{t_j\} \subset [0,1]$$

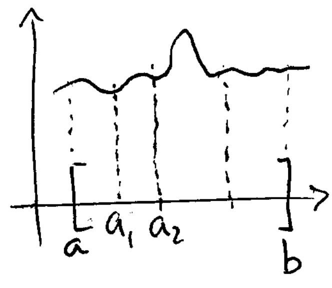
$$I_{[-1,1]}[g] = \sum_{j=0}^{n} w_j\, g(t_j) \longrightarrow \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} g\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)$$

$$I_{[a,b]}[f] = (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j \cdot f(a+t_j(b-a))$$

Sea $I = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \approx \int_0^1 f(x)\,dx$ orden m. FÓRMULA SIMPLE

$$\Rightarrow \bullet \int_a^b f(x)\,dx = \left[x = a + t(b-a)\right] = (b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))\,dt \approx$$

$$\approx (b-a)\sum_{j=0}^{n} w_j \cdot f(a + x_j(b-a)) \quad \text{orden } m.$$



$$[a,b] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [a_k, a_{k+1}]$$

FÓRMULA COMPUESTA

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\sum_{j=0}^{n} w_j \cdot f(a_k + x_j(a_{k+1}-a_k)) \quad \text{orden } m$$

Ejemplo: punto medio

$$I[f] = f(1/2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} (a_{k+1} - a_k)\, f\left(\frac{a_{k+1} + a_k}{2}\right)$$

Ejemplo: a_k equiespaciados en $[a,b]$

$$a_k = a + \frac{k}{N}(b-a)$$

Simpson compuesto para $[a,b] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [a_k, a_{k+1}]$

$$I^{S^N}_{[a,b]}[f] = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_{k+1} - a_k}{6} \left(f(a_k) + 4 f\left(\frac{a_{k+1} + a_k}{2}\right) + f(a_{k+1}) \right) =$$

$$= \frac{b-a}{6N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{a_{k+1} + a_k}{2}\right) + \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \left(f(a_k) + f(a_{k+1}) \right)}_{f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a_k)} \right)$$

ERROR EN LAS FÓRMULAS DE CUADRATURA

PROPOSICIÓN: Sean $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ $x_i \neq x_j$ $i \neq j$

Sean $\{L_j\}_{j=0}^{n}$ pol. Lagrange , $w_j = \int_a^b L_j(x)\,dx$

$$f \in C^{n+1} \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - I_{[a,b]}^{x,w}[f] \right| \leq \frac{\max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|}{(n+1)!} \int_a^b |\Pi_{n+1}(x)|dx$$

$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x$

demostración

Sabemos que $I_{[a,b]}^{x,w}[f] = \int_a^b P_n(x; f; x_0 \dots x_n)\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(x) - P_n(x)|}_{\wedge|} dx$$

$$\frac{\max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|$$

Observación: Si $f = x^n \Rightarrow f^{(n+1)} = 0 \Rightarrow$ ERROR $= 0$

TEOREMA: Sea $I_{[a,b]} = \sum_j w_j f(x_j)$ orden m $\wedge$ $f \in C^{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = I_{[a,b]}[f] + \int_a^b \frac{1}{m!} f^{(m+1)}(x) \cdot K(x)\,dx$$

$K(x) \rightarrow$ núcleo de Peano

donde $\boxed{K(x) = \int_a^b (y-x)_+^m\,dy - \sum_j w_j (x_j - x)_+^m}$

Notación

$$(y-x)_+^m = \begin{cases} (y-x)^m & y \geq x \\ 0 & y < x \end{cases}$$

demostración

LEMA: fórmula de Taylor con resto integral

Si $f \in C^{m+1}([a,b]) \Rightarrow f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{P_m(x)} + \underbrace{\frac{1}{m!}\int_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt}_{R_m(x)\ \text{resto integral}}$

demostración

$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$, ahora $f'(t) = f''(t)(x-t) + \frac{d}{dt}(f'(t)(x-t))$

$= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$

Sabemos que I es de orden m:

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - I[f] = \int_a^b (P_m(x) + R_m(x))dx - I[P_m + R_m] =$$

$$= \int_a^b R_m(x)\,dm - I[R_m]$$

con $+$ $x=b$

$$\int_a^b R_m(x)dx = \frac{1}{m!}\int_a^b \left(\int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^m dt \right) dx =$$

$$= \frac{1}{m!}\int_a^b f^{(m+1)}(t) \left(\int_a^b (x-t)_+^m dx \right) dt$$

$\square$

NODOS DE GAUSS

Dados $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ encontrar pesos $\{w_j\}_{j=0}^{n}$ tal que $\sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$ tenga el orden máximo.

Ejemplo: en $[-1,1]$

▶ $n=0$ (1 pto.) 2 variables: x_0 y w_0

- exacta en $\mathcal{P}_0$: para $f(x)=1$ $\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_0 \cdot f(x_0) \iff$

$\iff \int_{-1}^{1} 1\,dx = w_0 \iff w_0 = 2$

- exacta en $\mathcal{P}_1$: para $f(x)=x$ $\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_0 \cdot f(x_0) \iff$

$\iff \int_{-1}^{1} x\,dx = 2x_0 \iff x_0 = 0$

$\rightarrow$ Punto medio: $I[f] = 2f(0)$

▶ $n=1$ (2 ptos.) 4 variables: x_0, x_1 y w_0, w_1

- exacta en $\mathcal{P}_0$: para $f(x) = 1$ $\int_{-1}^{1} dx = w_0 + w_1$
- exacta en $\mathcal{P}_1$: para $f(x) = x$ $\int_{-1}^{1} x\,dx = x_0 w_0 + x_1 w_1$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = w_0 + w_1 \\ 0 = x_0 w_0 + x_1 w_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 1 - w_1 \\ 0 = w_0 x_0 + w_1 x_1 = 2x_0 - w_1 x_0 + w_1 x_1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} w_1 = \dfrac{2x_0}{x_0 - x_1} = \int_{-1}^{1} L_1(x)dx \\ w_0 = \dfrac{-2x_1}{x_0 - x_1} = \int_{-1}^{1} L_0(x)\,dx \end{cases}$$

$L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$, $L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Conocemos $w_0(x_0, x_1)$ y $w_1(x_0, x_1)$

- exacta en $\mathcal{P}_2$: para $f(x) = x^2$ $\int_{-1}^{1} x^2 dx = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2$
- exacta en $\mathcal{P}_3$: para $f(x) = x^3$ $\int_{-1}^{1} x^3 dx = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_0 X_0^2 + W_1 X_1^2 = 2/3 \\ W_0 X_0^3 + W_1 X_1^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2X_1}{X_1-X_0} X_0^2 - \frac{2X_0}{X_1-X_0} X_1^2 = 2/3 \\ \frac{2X_1}{X_1-X_0} X_0^3 - \frac{2X_0}{X_1-X_0} X_1^3 = 0 \end{cases} \iff$$

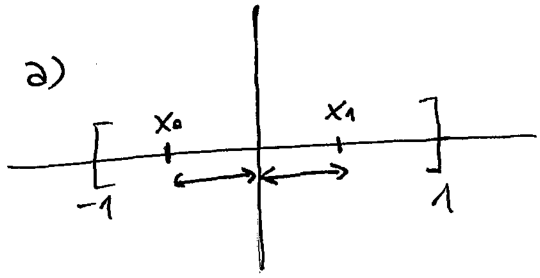
$$\iff \begin{cases} 2X_1X_0 \left(\frac{X_0}{X_1-X_0} - \frac{X_1}{X_1-X_0}\right) = 2/3 \\ 2X_1X_0 \left(\frac{X_0^2}{X_1-X_0} - \frac{X_1^2}{X_1-X_0}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2X_1X_0 \left(\frac{X_0-X_1}{X_1-X_0}\right) = 2/3 \\ 2X_1X_0 \frac{(X_0-X_1)(X_0+X_1)}{X_1-X_0} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} X_1X_0 = -1/3 \\ X_1X_0(X_0+X_1) = 0 \longrightarrow X_1 = -X_0 \end{cases} \longrightarrow X_1^2 = X_0^2 = 1/3$$

$$X_0 = -\sqrt{1/3}\ , \quad X_1 = \sqrt{1/3}$$

$$X_0 = \sqrt{1/3}\ , \quad X_1 = -\sqrt{1/3}$$

a)



$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

b) $W_0 f(X_0) + W_1 f(X_1)$

$$W_0 = \frac{2X_1}{X_1-X_0} = 1 \qquad y \qquad W_1 = \frac{2X_0}{X_1-X_0} = 1$$

Fórmula de cuadratura de Gauss para $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ con dos nodos:

$$I[f] = f(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3}) \qquad \text{ORDEN } 3$$

En general, para $\{x_j\}_{j=0}^{n}$, $\{W_j\}_{j=0}^{n}$ en $[-1,1]$

$$\begin{cases} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{cases} \text{n+1 ecuaciones lineales} \longrightarrow W_j = W_j(X_0, \dots, X_n) = \int_{-1}^{1} L_j(x)\,dx$$

$$\begin{cases} P_{n+1} \\ P_{n+2} \\ \vdots \\ P_{n+n+1} \end{cases} \quad \text{n+1 ecuaciones no lineales para } X_j$$

TEOREMA: $\forall n \geq 0 \quad \exists! \left(\{x_j\}_{j=0}^{n}, \{w_j\}_{j=0}^{n} \right) \subset [-1,1] \times \mathbb{R}$

tales que $x_j < x_{j+1} \quad j=0,\dots,n-1$

tal que $I[f] = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$ es de ORDEN $2n+1$ (máximo y exacto)

para $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \quad$, para $f \in C$

$\int_{-1}^{1} f(x)\rho(x)\,dx \quad$, para $f \in C$

$\downarrow$

dado $\rho(x) \in C$, $\rho \geq 0$

MÉTODOS ITERATIVOS PARA AUTOVALORES

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermítica : $A^* = A$

$\Longrightarrow \{\lambda \text{ autovalor de } A\} \subset \mathbb{R}$, $\exists \{v_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ $\quad Av_k = \lambda_k v_k \quad \langle v_k, v_j\rangle = \delta_{kj}$

- ## ITERACIÓN DE LA POTENCIA

$$\begin{cases} v^{(k+1)} = \dfrac{Av^{(k)}}{\|Av^{(k)}\|_2} & k = 1, 2, \dots \\ \rho^{(k+1)} = \langle v^{(k+1)}, Av^{(k+1)}\rangle \end{cases} \qquad v^{(0)} \in \mathbb{C}^n$$

TEOREMA: Sean $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ autovalores de A (con multiplicidad) ordenados tal que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

$\{q_j\}_{j=1}^n$ AUTOVECT $\quad Aq_j = \lambda_j q_j$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ y $\langle v^{(0)}, q_1\rangle \neq 0$

$\Longrightarrow v^{(k)} \longrightarrow q_1$, $\rho^{(k)} \longrightarrow \lambda_1$

- ## ALGORITMO QR para autovalores

$$\boxed{\begin{array}{l} A^{(0)} = A \\ \begin{cases} Q^{(k)} R^{(k)} = A^{(k-1)} & k \geq 1 \\ A^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)} \end{cases} \end{array}}$$

bajo hipótesis adecuadas...

A hermítica

$A^{(k)} \longrightarrow$ diagonal $\longleftarrow$ autovalores

Idea del algoritmo:

1) $A^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)} = Q^{(k)*} A^{(k-1)} Q^{(k)} \Longrightarrow A^{(k)}$ y A tienen los mismos autovalores.

2) (*) equivalente a iteración potencia sobre n vectores

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema (Bauer-Fike)

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizable $\qquad V = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$A = V \Lambda V^{-1}$

Sea $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $\qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\forall \mu$ autovalor de $A+E$

$\exists \lambda$ autovalor de A $\quad : |\lambda - \mu| \leq \|V\|_{2\to 2} \|V^{-1}\|_{2\to 2} \|E\|_{2\to 2}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} i) & v-b = \sum_{j=1} \lambda_j w_j \\ ii) & \langle v, w_j \rangle = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, n-m \end{cases}$$

Sea $\{a_k\}_{k=1}^{m}$ una base de M $(\Longrightarrow \langle a_k, w_j \rangle = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, m \quad \forall j = 1, \ldots, n$

$$ii) \Longleftrightarrow \quad v = \sum_{k=1}^{m} c_k a_k \quad : \quad v \in M$$

$$\mathbb{R}^m \ni b = \sum_{k=1}^{m} d_k a_k + \sum_{j=1}^{n-m} l_j w_j$$

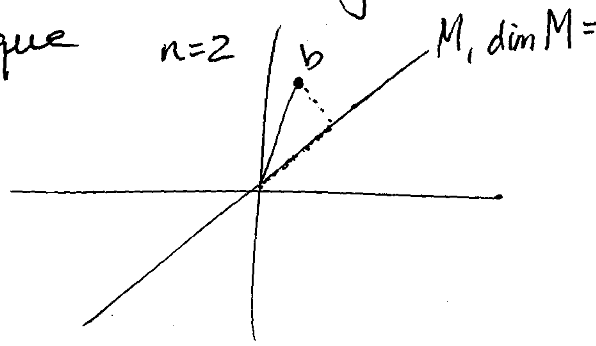
$$ii) \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{m} (c_k - d_k) a_k = \sum_{j=1}^{n-m} l_j w_j + \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j w_j$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_k = d_k & k = 1, \ldots, m \\ l_j = -\lambda_j & j = 1, \ldots, n-m \end{cases} \Longrightarrow \boxed{v = P_M b}$$

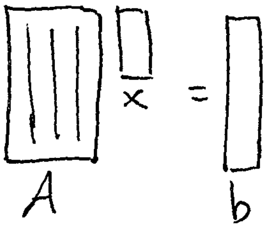
PROBLEMA DE MÍNIMOS CUADRADOS

Sea M subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$, $\dim(m) < n$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Encontrar $v \in M$ tal que

$$\|v-b\|_2 \leq \|w-b\|_2 \quad \forall w \in M$$



PROBLEMA EQUIVALENTE



$$\min \|\underbrace{Ax}_{v} - b\|_2$$

SOLUCIÓN 1: optimización con restricciones

- $$V_b = \underset{v \in M}{\operatorname{argmin}} \|v-b\|_2 = \underset{v \in M}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|v-b\|_2^2$$

- Sea $\{w_j\}_{j=1}^{n-m}$ Base ortonormal de $M^\perp \Rightarrow v \in M \Leftrightarrow \langle v, w_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

$$\mathcal{L}(v,\lambda) = \overbrace{\frac{1}{2}\|v-b\|_2^2}^{F(v)} - \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \overbrace{\langle v, w_j \rangle}^{g_j(v)}$$

$$\boxed{\nabla_{v,\lambda} \mathcal{L} = 0} \Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla F(v) = \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_j \cdot \nabla g_j(v) \\ g_j(v) = 0 \qquad j = 1, \dots, n-m \end{cases}$$

$$F(v) = \frac{1}{2}\|v-b\|_2^2 = \frac{1}{2}\langle v-b, v-b \rangle = \frac{1}{2}\Big(\underset{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}{\|v\|_2^2} - 2\underbrace{\langle v, b \rangle}_{\sum_{i=1}^n v_i b_i} + \|b\|^2\Big)$$

$$(\nabla F(v))_i = v_i - b_i$$

$$\nabla F(v) = v - b \qquad \nabla g_j(v) = w_j$$

$$\frac{\partial g_j(v)}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \sum v_i (w_j)_i = (w_j)_i$$

Proyecciones

Definición: $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice proyección si $P^2 = P$

observación: Sea P una proyección:

P es invertible $\Longleftrightarrow P = I_{n\times n}$

porque si $\exists P^{-1} \Rightarrow P = P^{-1}P^2 = P^{-1}P = I$

$n=2$ todas las proyecciones son

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha\beta & \alpha(1-\alpha\beta) \\ \beta & \alpha\beta \end{pmatrix} \qquad \text{por } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Lema: Sea P proyección

i) $v \in \mathrm{Im}(P) \Longleftrightarrow Pv = v$

ii) $P^c \underset{\text{notación}}{=} I - P$ es una proyección y $\mathrm{Im}(P^c) = \mathrm{Ker}(P)$

Proposición: Son equivalentes:

i) S_1, S_2 subespacios lineales de $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\begin{cases} S_1 \cap S_2 = \{0\} \\ S_1 + S_2 = \mathbb{C}^n \end{cases}$$

punto cero

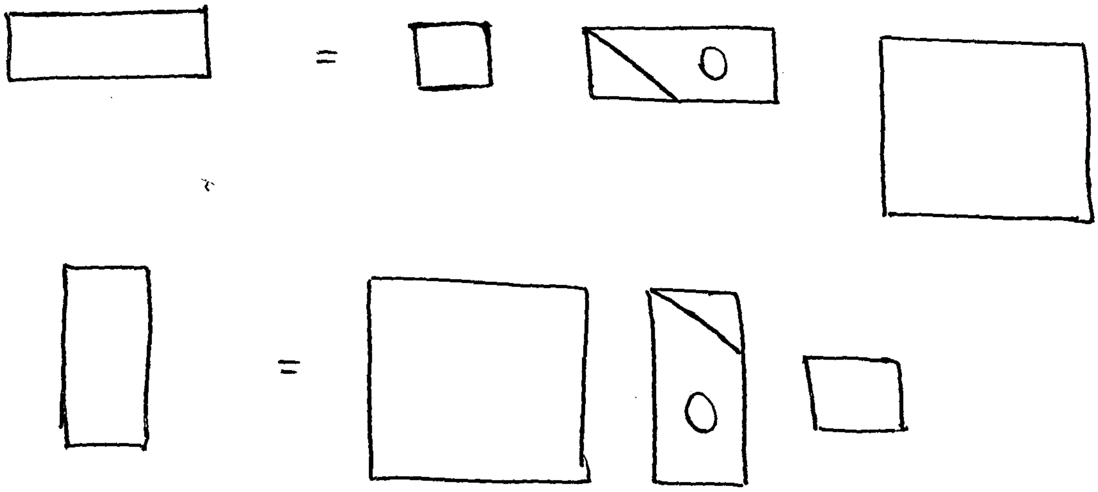
ii) $S_1 = \mathrm{Im}(P)$, $S_2 = \mathrm{Ker}(P)$ por P proyección

Definición: Sea $\mathbb{P}$ proyección, $\mathbb{P}$ se dice proyección ortogonal si $\mathrm{Im}(\mathbb{P}) \perp \mathrm{Ker}(\mathbb{P})$.

TEOREMA: $\mathbb{P}$ proyección es proyección ortogonal $\Longleftrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}^{*}$
$$\overset{\shortparallel}{P^t}$$

→ brecha existencial debido a la falta de tres clases ←

VALORES SINGULARES (SINGULAR VALUE DESCOMPOSITION SVD



$$A = U \quad \Sigma \quad V^{*}$$

TEOREMA: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m} \Rightarrow \exists \Sigma \in \overset{\{x\geq 0\}}{\mathbb{R}_+^{n\times m}}$ diagonal y $\exists U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitarias tal que $A = U\Sigma V^{*}$, y $\underset{\underset{\sigma_i}{\shortparallel}}{(\Sigma_{ii})_{i=1}^{\nu}}$ se dicen VALORES SINGULARES.

$\nu = \min\{n,m\}$

demostración

Sea $\sigma_1 = \|A\|_{2\to 2} = \max\limits_{\substack{x\in\mathbb{C} \\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2$

Sea $v^{(1)} \in \mathbb{C}^m$, $\|v^{(1)}\| = 1$ tal que $\|Av^{(1)}\| = \sigma_1$

$$V^{(1)} = \left(v^{(1)} \;\vdots\; \underset{\substack{\downarrow \\ \text{compleción BON}}}{\tilde{V}^{(1)}} \right) \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

PROPIEDADES:

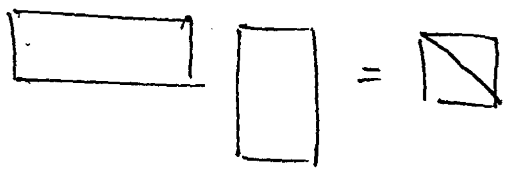
$$\sigma_1 = \|A\|_{2\to 2} = \rho(A^*A)$$

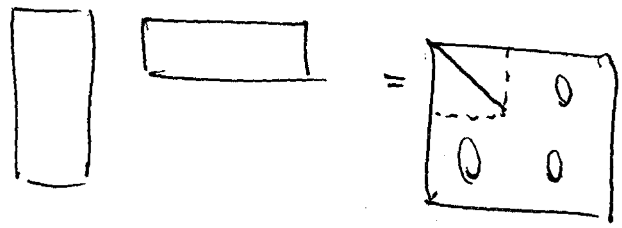
$$A^*A = V\Sigma^*U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^2V^*$$

$$AA^* = U\Sigma V^*V\Sigma^*U = U\Sigma^2U^*$$

$$\langle A^*Av, v\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle Av, Av\rangle = \|Av\|_2^2 \geq 0$$

$$(A^*A)^* = A^*A$$





Recordamos $\otimes$

si $M = u \otimes v$

$Mw = \langle w, v\rangle u$

$(u \otimes v)\, w$

Si $\text{rango}(A) = r$ $\left(\leq \min\{n,m\}\right) \Rightarrow A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i\, u^{(i)} \otimes v^{(i)}$

$$A = U\Sigma V^*$$

Sea $u^{(1)} = \frac{Av^{(1)}}{\sigma_1} \in \mathbb{C}^n$

$$U^{(1)} = \left(\begin{array}{c:c} u^{(1)} & \tilde{U}^{(1)} \end{array} \right)$$

$$AV^{(1)} = \left(\begin{array}{c:c} \sigma_1 u^{(1)} & M \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow U^{(1)*} A V^{(1)} = \left(\begin{array}{c:c} \sigma_1 & w^* \\ \hdashline 0 & B \end{array} \right) = A^{(1)}$$

Vemos que $w = 0$:

$$A^{(1)} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \|w\|_2^2 \\ Bw \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| A^{(1)} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2 \geq \sigma_1^2 + \|w\|_2^2 =$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \|w\|_2^2} \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|$$

$$\Rightarrow \|\overset{= \sigma_1}{A^{(1)}}\|_{2\to 2} \geq \sqrt{\sigma_1^2 + \|w\|_2^2}$$

pero $\|A^{(1)}\|_{2\to 2} = \|U^{(1)*} A V^{(1)}\|_{2\to 2} = \|A\|_{2\to 2} = \sigma_1$

$\sigma_2 = \|B\|_{2\to 2}$ y seguir, hacer lo mismo con la matriz Σ

$$\left(\begin{array}{c:c:c} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \sigma_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & C \end{array} \right)$$