UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, grupo 721, 2018-2019

ANÁLISIS MATEMÁTICO GRADO EN CC. MATEMÁTICAS GRUPO 721 2017-2018
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID Departamento de Matemáticas J.R. Esteban

Ejercicios 19 a 22

19. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$.

1. Supongamos que $A \subset B$.

   Demostrar que A es compacto en (X, d) si y sólo si es compacto en el subespacio métrico (B, d).

2. Demostrar que si A es cerrado en (X, d) y B es compacto en (X, d), entonces $A \cap B$ es compacto en (X, d).

3. Demostrar que la intersección de una colección arbitraria de subconjuntos de X compactos en (X, d) es compacta en (X, d).

4. Demostrar que la unión de un número finito de subconjuntos de X compactos en (X, d) es compacta en (X, d).

20. Considérese el espacio métrico $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, formado por $\mathbb{Q}$ con la métrica heredada de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Dados $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sea

$$J = \{ q \in \mathbb{Q} \, : \, a < q < b \} .$$

Demostrar:

1. J es cerrado y acotado en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.
2. J no es compacto en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

21. Sean $\mathbb{S}^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1 \}$ y la función

$$g(t) = \begin{cases} \left(1 + t, \sqrt{1 - (1+t)^2}\right), & -2 \le t \le 0, \\[2ex] \left(1 - t, \sqrt{1 - (1-t)^2}\right), & -2 \le t \le 0. \end{cases}$$

Comprobar que g es sobreyectiva desde $[-2, 2]$ sobre $\mathbb{S}^1$.

1. Demostrar que ninguna función continua $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ puede ser inyectiva en $\mathbb{S}^1$.

2. Sean $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua y $z_0 \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que todo entorno de z_0 contiene puntos p y q , con $p \neq q$, tales que $\|h(p)\|_2 = \|h(q)\|_2$.

3. Considérese g definida solamente en los $t \in [-2\,,0)$. Demostrar que g es continua e inyectiva en $[-2\,,0)$, pero que su inversa no es continua en $\mathbb{S}^1$.

22. A. Considérese la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ definida en los $x \in I = (0\,,1]$. Demostrar que no existe ninguna función $g(x)$ continua en $[0\,,1]$ y tal que $g(x) = f(x)$ en todo $0 < x \leq 1$.

B. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos y $\Omega \subset X$. Considérese una función

$$f : \Omega \subset X \longrightarrow Y$$

continua en Ω . Demostrar que a lo sumo existe una función

$$F : \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow Y$$

continua en $\overline{\Omega}$ y tal que $F(x) = f(x)$ en cada $x \in \Omega$.

C. Supongamos que (Y, d_2) es completo y que la función

$$f : \Omega \subset X \longrightarrow Y$$

es uniformemente continua en Ω .

1. Demostrar que si $\{x_n\}_n \subset \Omega$ es de Cauchy en (X, d_1) , entonces $\{f(x_n)\}_n$ es de Cauchy en (Y, d_2) .

2. Definimos una función
$$F : \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow Y$$
como sigue: *Para cada* $x \in \overline{\Omega}$,
$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$
cuando $\{x_n\}_n \subset \Omega$ *satisface* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

3. Demostrar que F está bien definida en $\overline{\Omega}$ y que $F(x) = f(x)$ en cada $x \in \Omega$.

4. Demostrar que F es uniformemente continua en $\overline{\Omega}$.

ANÁLISIS MATEMÁTICO
GRADO EN CC. MATEMÁTICAS
GRUPO 721
2017-2018
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
J.R. Esteban