Topología. Capítulo 1. Espacios topológicos Grado de Matemáticas. Curso 2015-2016

José García-Cuerva

Universidad Autónoma de Madrid

8 de octubre de 2015

1. Topologías. Espacios topológicos
   - Definiciones y ejemplos
   - Bases.
   - La topología del orden.
   - Espacio topológico producto de dos espacios topológicos.
   - La topología de subespacio.
   - Subbases
   - Entornos.
   - Convergencia. Límites. Espacios topológicos de Hausdorff.
   - Espacios métricos. Completitud
   - Interior.
   - Cierre.
   - Puntos de acumulación. Conjunto derivado.
2. Aplicaciones continuas.
   - Homeomorfismos
   - Espacios producto de infinitos factores. Topologías iniciales.
   - Axiomas de numerabilidad.
   - Espacio cociente. Topologías finales.

Definición.

Una topología sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X que cumple las tres condiciones siguientes:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
2) para cada familia $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ de conjuntos $G_\alpha \in \mathcal{T}$, su unión $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ es también miembro de $\mathcal{T}$ y
3) para cada par G, H de miembros de $\mathcal{T}$, su intersección $G \cap H$ es también miembro de $\mathcal{T}$.

Por supuesto, a partir de 3) se sigue que, para cualquier colección finita de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{T}$ su interesección es, también, miembro de $\mathcal{T}$.
Si X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una topología en X, al par ordenado $(X, \mathcal{T})$ se le llama espacio topológico.

A los conjuntos pertenecientes a la topología $\mathcal{T}$ se les suele llamar abiertos.

Podemos decir que, dar una topología en un conjunto X consiste en decir cuáles conjuntos vamos a considerar como abiertos, siempre respetando los axiomas de que $\emptyset$ y X han de ser abiertos y, tanto la unión arbitraria como la intersección finita de abiertos ha de ser abierto.

Ejercicio 1. Sea $X = \{1, 2, 3\}$.

- ¿Es $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ una topología?
- ¿Es $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ una topología?
- ¿Cuántas topologías diferentes se pueden dar sobre X?

Ejercicio 2. Demostrar que, en cualquier conjunto X, tanto $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$ como $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ son siempre topologías. A la primera se le suele llamar topología trivial y a la segunda topología discreta. Para cualquier topología $\mathcal{T}$ de X, se tiene que $\mathcal{T}_t \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d$.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto cualquiera. Y sea $\mathcal{T}_f$ la coleccción formada por aquellos subconjuntos $E \subset X$ cuyo complementario, que escribiremos como $\complement E$, o bien como $X \setminus E$, es, o un conjunto finito, o todo X. Se pide demostrar que $\mathcal{T}_f$ es una topología. Se la denomina la topología de los complementos finitos.

Ejercicio 4. Sea X un conjunto cualquiera. Y sea $\mathcal{T}_n$ la coleccción formada por aquellos subconjuntos $E \subset X$ cuyo complementario, que escribiremos como $\complement E$, o bien como $X \setminus E$, es, o un conjunto numerable, o todo X. Se pide demostrar que $\mathcal{T}_n$ es una topología. Se la denomina la topología de los complementos numerables.

Definición. Comparación de topologías

Supongamos que en un mismo conjunto X tenemos dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$.

- Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ diremos que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ o que $\mathcal{T}$ es más gruesa que $\mathcal{T}'$.
- Si $\mathcal{T} \subsetneqq \mathcal{T}'$ diremos que $\mathcal{T}'$ es estrictamente más fina que $\mathcal{T}$ o que $\mathcal{T}$ es estrictamente más gruesa que $\mathcal{T}'$.

Estos términos se aprecian mejor si uno ve un espacio topológico como un camión de grava en el que los abiertos son las piedras y sus uniones. Si las piedras se muelen más finamente, se aumenta la colección de abiertos. Tenemos, por así decirlo, una estructura "de grano más fino".

Bases.

Definición.

Se llama base de la topología $\mathcal{T}$ a cualquier colección de conjuntos abiertos $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ que cumple la propiedad de que cualquier abierto $E \subset \mathcal{T}$ es unión de alguna familia de conjuntos abiertos pertenecientes a $\mathcal{B}$.

Teorema.

Para que una familia de subconjuntos de un conjunto $X, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ sea base de alguna topología para X, es necesario y suficiente que $\mathcal{B}$ cumpla las dos condiciones siguientes

1)
$$\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} \ni x \in B$$
y

2) Dados dos conjuntos cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, se tiene que
$$\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B} \ni x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Ejercicio 5. Dado un conjunto cualquiera X, demostrar que la colección

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$$

es base para la topología discreta de X.

Ejercicio 6. En el plano $\mathbb{R}^2$ se consideran, para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y cada $r > 0$, los conjuntos

$$D_r(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}.$$

Demostrar que la colección

$$\mathcal{B}_c = \{D_r(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ r > 0\}$$

es base para alguna topología del plano.

Ejercicio 7. En el plano $\mathbb{R}^2$ se consideran, para cada $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$, los conjuntos

$$R_{a,b,c,d} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ c < y < d\}$$

Demostrar que la colección

$$\mathcal{B}_r = \{R_{a,b,c,d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$$

es base para alguna topología del plano.

PROPOSICIÓN.

Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías sobre el mismo conjunto X con bases respectivas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Entonces, las dos propiedades siguientes son equivalentes

1) $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$.
2) $$\forall B \in \mathcal{B} \text{ y } \forall x \in B,\ \exists B' \in \mathcal{B}' \ni x \in B' \subset B.$$

Ejercicio 8. Demostrar que las topologías dadas en el plano por las bases $\mathcal{B}_c$ del Ejercicio 6 y $\mathcal{B}_r$ del Ejercicio 7, son iguales. De hecho, se trata de la que llamaremos topología usual de $\mathbb{R}^2$. La estudiaremos, en general, para $\mathbb{R}^n$, cuando hablemos de espacios métricos.

Ejercicio 9. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, se definen los conjuntos siguientes:

- El intervalo abierto
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$
- El intervalo semiabierto, abierto por la derecha
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$
- El intervalo semiabierto, abierto por la izquierda
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$
- El intervalo cerrado
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

También usaremos
$$K = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Se pide demostrar que las siguientes colecciones son todas bases de topologías en $\mathbb{R}$.

- $$\mathcal{B} = \{]a,b[:\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}.$$
- $$\mathcal{B}_i = \{[a,b[:\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}.$$
- $$\mathcal{B}_s = \{]a,b]:\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}.$$
- $$\mathcal{B}_k = \mathcal{B}\cup\{]a,b[\setminus K:\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}.$$

Si se denominan las topologías con bases respectivas $\mathcal{B},\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_s,\mathcal{B}_k$ como $\mathcal{T},\mathcal{T}_i,\mathcal{T}_s,\mathcal{T}_k$, se pide ver que las tres últimas son estrictamente más finas que $\mathcal{T}$; pero no son comparables entre sí.
A la topología $\mathcal{T}$ le llamaremos topología usual de la recta real y siempre que hablemos de $\mathbb{R}$ como espacio topológico, entenderemos que, la topología que lleva es $\mathcal{T}$, la usual.

Supongamos que en un conjunto X tenemos definida una relación de orden total para la que vamos a usar la notación $\leq$.
Recordemos que, decir que $\leq$ sea una relación de orden en X quiere decir que satisface las tres condiciones siguientes:

- Es reflexiva, es decir: $\forall x \in X, \; x \leq x$.
- Es antisimétrica, es decir: $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$. Y
- Es transitiva: $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Siempre que se tiene una relación de orden $\leq$, se acostumbra va poner $x < y$ para indicar que $x \neq y$ y $x \leq y$.
La relación de orden $\leq$ se dice que es total si

$$\forall x \neq y, \; (x < y) \vee (y < x).$$

Munkres le llama al orden total, orden simple u orden lineal.
Cuando se da un orden total $\leq$ en X, se dice que $(X; \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

En un conjunto totalmente ordenado $(X, \leq)$, podemos definir los intervalos exactamente igual que como hemos hecho en $\mathbb{R}$. Al fin y al cabo $\mathbb{R}$ con su relación de orden natural, no es más que un caso particular de conjunto totalmente ordenado. Es el ejemplo que todo el mundo tiene en mente; de ahí la denominación "orden lineal".
Definimos los intervalos. Para cada $a, b \in X$ tales que $a < b$, tenemos:

- El intervalo abierto
$$]a, b[= \{x \in X : a < x < b\}.$$
- El intervalo semiabierto, abierto por la derecha
$$[a, b[= \{x \in X : a \leq x < b\}.$$
- El intervalo semiabierto, abierto por la izquierda
$$]a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\}.$$
- El intervalo cerrado
$$[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}.$$

La topología del orden la definimos usando como base la colección $\mathcal{B}$ formada por los conjuntos siguientes:

- Todos los intervalos abiertos $]a, b[, \ a, b \in X$,
- Además, si X tiene un primer elemento a_0, es decir, un elemento $a_0 \in X$ que cumple $a_0 \leq X \ \forall x \in X$, incluimos también en $\mathcal{B}$ todos los intervalos semiabiertos $[a_0, b[, \ b \in X$.
- Y, en caso de que X tenga un último elemento b_0, es decir, un elemento $b_0 \in X$ tal que $x \leq b_0 \ \forall x \in X$, también incluimos en $\mathcal{B}$ todos los intervalos semiabiertos $]a, b_0]$.

Es inmediato comprobar que $\mathcal{B}$ cumple las dos condiciones que vimos para ser base de una topología y a esa topología le llamaremos topología del orden.

Aparte de la recta real con su topología usual, podemos dar algunos ejemplos más “exóticos”de topología del orden.

Ejemplo 1. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el orden del diccionario u orden lexicográfico se define del modo siguiente, apoyándose en el orden natural de $\mathbb{R}$:

$$(a, b) \leq (c, d) \iff (a < c) \vee ((a = c) \wedge (b \leq d)).$$

Se ve en seguida que se trata de un orden total y que no hay ni primer ni último elemento. Por lo tanto, la base $\mathcal{B}$ de la topología del orden está formada, en este caso, por dos tipos de conjuntos:

- $$](a, b), (c, d)[, \ a < c$$

  y

- $$](a, b), (a, d)[, \ b < d.$$

Puede ser instructivo intentar dibujar estos dos tipos de intervalos.

Se puede observar que también es una base de la topología del orden en este caso, la colección formada por los intervalos del segundo tipo solamente.

Ejemplo 2. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ con su orden canónico, la topología del orden es la discreta. En efecto, para todo $n > 1,\ \{n\} =]n-1, n+1[$ y $\{1\} = [1, 2[$.

Ejemplo 3. Sin embargo, si consideramos el conjunto $\{a, b\} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico, la topología del orden ya no es la discreta. En efecto, aunque para todos los puntos $(a, n),\ n \geq 1$ y $(b, m),\ m \geq 2$, el correspondiente conjunto formada por ese único punto es un abierto, no sucede lo mismo para el punto $(b, 1)$, ya que cualquier intervalo abierto que lo contenga, forzosamente ha de contener algún punto del tipo $(a, n),\ n \in \mathbb{N}$.

ESPACIO TOPOLÓGICO PRODUCTO DE DOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS.

DEFINICIÓN.

Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$, vamos a dar una topología en el producto cartesiano $X \times Y$. Para ello utilizaremos la colección

$$\mathcal{B} = \{A \times B : \ A \in \mathcal{T}_X, \ B \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Es inmediato ver que $\mathcal{B}$ satisface las dos condiciones que caracterizan a las bases de las topologías. En efecto, la primera condición se cumple por ser $X \times Y \in \mathcal{B}$. Y la segunda resulta de que la intersección de dos conjuntos de $\mathcal{B}$ es, también, un conjunto de $\mathcal{B}$. En efecto, si tenemos $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_X$ y $B_1, B_2 \in \mathcal{T}_Y$, entonces

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{B}.$$

La topología determinada por $\mathcal{B}$ en $X \times Y$ se llamará topología producto y sus abiertos serán todas las uniones de conjuntos de $\mathcal{B}$.

Los conjuntos de la base $\mathcal{B}$ se suelen llamar “rectángulos abiertos”. Desde luego son abiertos; pero no son todos los abiertos.
Al espacio topológico determinado en $X \times Y$ por las topología producto que acabamos de definir le llamaremos espacio topológico producto de $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$.
A veces es útil manejar bases más pequeñas. En concreto, tenemos el siguiente

TEOREMA.

Supongamos que las topologías $\mathcal{T}_X$ y $\mathcal{T}_Y$ tienen bases respectivas $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$. Entonces, la colección

$$\mathcal{C} = \{A \times B : \ A \in \mathcal{B}_X, B \in \mathcal{B}_Y\}$$

es una base de la topología producto de $X \times Y$.

Demostración.

Desde luego $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, aunque, en general, $\mathcal{C}$ será una clase más pequeña.

para ver que $\mathcal{C}$ es base de la topología producto, lo que hemos de hacer es verificar que cualquier conjunto de $\mathcal{B}$, o sea, cualquier rectángulo abierto, es unión de conjuntos de $\mathcal{C}$, que son rectángulos abiertos especiales.

Supongamos que $A \in \mathcal{T}_X$ se puede poner como $A = \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$ con $G_\alpha \in \mathcal{B}_X \ \forall \alpha \in J$ y que $B \in \mathcal{T}_Y$ se puede poner como $B = \bigcup_{\beta \in K} H_\beta$ con $H_\beta \in \mathcal{B}_Y \ \forall \beta \in K$. Entonces

$$A \times B = \left(\bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha \right) \times \left(\bigcup_{\beta \in K} H_\beta \right) = \bigcup_{\alpha \in J, \beta \in K} G_\alpha \times H_\beta$$

y $\forall \alpha \in J, \beta \in K, \ G_\alpha \times H_\beta \in \mathcal{C}$.

Ejemplo. Ya hemos introducido la topología usual de $\mathbb{R}$ que tiene como base la colección de todos los intervalos abiertos de la forma $]a, b[,\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Coincide con la topología del orden, que vimos en la sección anterior. En el ejercicio 8 aparecía la topología usual de $\mathbb{R}^2$ que generábamos de dos maneras distintas usando en una las bolas abiertas o discos abiertos (base $\mathcal{B}_c$ del ejercicio 6) y en otra los productos de intervalos abiertos $]a, b[,\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ (base $\mathcal{B}_r$ del ejercicio 7). Vemos ahora que la topología usual de $\mathbb{R}^2$ es, en realidad, la topología producto de la topología usual de $\mathbb{R}$ consigo misma. En efecto, la base $\mathcal{B}_r$ del ejercicio 7 no es otra cosa que la base $\mathcal{C}$ de los rectángulos abiertos especiales del teorema, correspondiente a las bases de intervalos de la topología usual de $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN.

Supongamos que tenemos un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y consideramos un subconjunto $Y \subset X$. Entonces la colección de subconjuntos de Y

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : \ U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en Y, a la que llamaremos topología de subespacio. Otros nombres que se suelen usar son topología relativa, inducida o heredada.

Diremos que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un subespacio topológico del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

Se ve fácilmente que, si $\mathcal{B}$ es base de la topología $\mathcal{T}$ de X, entonces, la colección de subconjuntos de Y,

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : \ B \in \mathcal{B}\}$$

es base de la topología de subespacio $\mathcal{T}_Y$ de Y.

Cuando manejemos, en el mismo texto, un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un subespacio suyo $(Y, \mathcal{T}_Y)$, habrá que tener cuidado al usar el término abierto, para evitar confusiones. Los conjuntos pertenecientes a $\mathcal{T}$ diremos que son "abiertos en X", mientras que los conjuntos de $\mathcal{T}_Y$ diremos que son "abiertos en Y".
Conviene destacar el siguiente caso especial

PROPOSICIÓN.

Sea Y un subespacio de X. Si U es abierto en Y e Y es abierto en X, entonces U es abierto en X.

Planteamos ahora el siguiente problema sobre el comportamiento de productos y subespacios:

¿Es lo mismo el subespacio del producto que el producto de los subespacios?

Para concretar: Si tenemos dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$, tendremos la topología producto en $X \times Y$, a la que ahora vamos a llamar $\mathcal{P}$. Si ahora consideramos dos subconjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$, hay, a priori, dos formas diferentes de dar una topología en $A \times B$, a saber:

- Ver $A \times B$ como subespacio de $X \times Y$, o sea, considerar en $A \times B$ la topología que denotaríamos por $\mathcal{P}_{A\times B}$. O, alternativamente
- dar en A la topología $\mathcal{T}_A$ y en B la topología $\mathcal{S}_B$ y, con $\mathcal{T}_A$ y $\mathcal{S}_B$ formar luego la correspondiente topología producto en $A \times B$, llamémosle $\mathcal{Q}$.

La primera $\mathcal{P}_{A\times B}$ nos da sobre $A \times B$ lo que hemos llamado "subespacio del producto", mientras que la segunda $\mathcal{Q}$ nos da sobre $A \times B$ el "producto de los subespacios".
Podemos, entonces, reducir la pregunta a una fórmula:

¿Es $\mathcal{P}_{A\times B} = \mathcal{Q}$?

Vamos a ver que **la respuesta a esta pregunta es SÍ**.
Sabemos que podemos conseguir una base de $\mathcal{P}_{A\times B}$ partiendo de la base de $\mathcal{P}$ dada por

$$\mathcal{B} = \{U \times V : \ U \in \mathcal{T}, \ V \in \mathcal{S}\}$$

y formando

$$\mathcal{B}_{A\times B} = \{(U\times V)\cap(A\times B):\ U\in\mathcal{T},\ V\in\mathcal{S}\}$$

Por otro lado, una base para $\mathcal{Q}$, es, por definición de la topología producto

$$\mathcal{C} = \{E\times F:\ E\in\mathcal{T}_A,\ F\in\mathcal{S}_B\} = \{(U\cap A)\times(V\cap B):\ U\in\mathcal{T},\ V\in\mathcal{S}\}.$$

Ahora basta darse cuenta de que $\mathcal{B}_{A\times B} = \mathcal{C}$, ya que

$$(U\times V)\cap(A\times B) = (U\cap A)\times(V\cap B).$$

Un problema similar se plantea para la topología del orden. Supongamos que $(X,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y que consideramos un subconjunto $Y\subset X$. Hay dos maneras de dotar a Y de una topología; a saber:

- Considerar a Y como subespacio del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, donde $\mathcal{T}$ es la topología del orden sobre X. Digamos que esta topología sobre Y es la topología de subespacio y llamémosle $\mathcal{T}_s$.
- Dar primero un orden en Y que es, sencillamente, la restricción a Y del orden de X. Desde luego, Y, con este orden heredado de X es, también un conjunto totalmente ordenado y ahora podemos dar en Y la correspondiente topología del orden. Llamémosla $\mathcal{T}_o$.

La pregunta es, ahora:

¿Es $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_o$?

En contraste con la situación de los productos, **la respuesta es NO.**

Ejercicio 10. Demostrar que, siempre, es $\mathcal{T}_o \subset \mathcal{T}_s$.

Sin embargo, no siempre es cierto que $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_o$. Vamos a ver tres ejemplos:

Ejemplo 1. Supongamos que $X = \mathbb{R}$ con su orden natural y que $Y = [0,1]$. En este caso es fácil darse cuenta de que $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_o$. En efecto, una base de $\mathcal{T}_s$ está formada por los conjuntos

$$]a,b[\cap[0,1], (\text{con } a<b) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } a<b\leq 0 \text{ o } 1\leq a<b, \\ [0,1] \text{ si } a<0<1<b, \\ ]a,b[\text{ si } 0\leq a<b\leq 1, \\ [0,b[\text{ si } a<0<b\leq 1 \\ ]a,1] \text{ si } 0\leq a<1<b. \end{cases}$$

Esta base vemos que es, justamente, también una base para la topología del orden sobre $[0,1]$.

Ejemplo 2. Siguiendo con $X = \mathbb{R}$, tomemos, ahora $Y = [0, 1[\cup\{2\}$. Es fácil darse cuenta de que $\{2\} \in \mathcal{T}_s \setminus \mathcal{T}_o$. En efecto $\{2\} =]1, 3[\cap Y \in \mathcal{T}_s$. Y, sin embargo, cualquier abierto de $\mathcal{T}_o$ que contenga a 2, contiene a algún intervalo $]a, 1]$ con $0 < a < 1$.

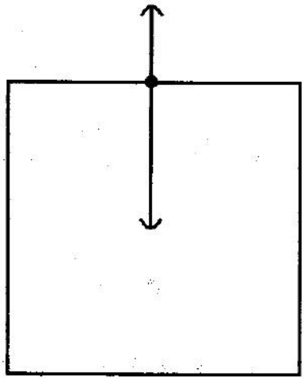
Ejemplo 3. Sea ahora $X = \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico y tomemos $Y = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Vamos a ver que, por ejemplo, el conjunto

$$A =](1/2, 1/2), (1/2, 1)] = \{(x, y) : \ x = 1/2, \ 1/2 < y \leq 1\} \in \mathcal{T}_s \setminus \mathcal{T}_0.$$

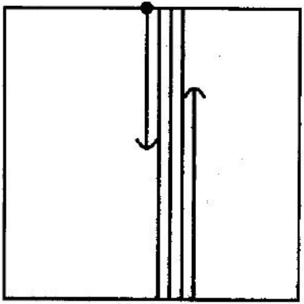
Desde luego, $A \in \mathcal{T}_s$, ya que, por ejemplo,

$$A =](1/2, 1/2), (1/2, 2)[\cap Y.$$

Sin embargo $A \notin \mathcal{T}_o$, ya que, cualquier abierto de $\mathcal{T}_o$ que contenga a $(1/2, 1)$, ha de contener también a algún punto (x, y) con $x > 1/2$.
Se puede ver un dibujo de la situación en la página siguiente



Subespacio



Orden

Ejercicio 11. supongamos que, en un conjunto X, tenemos una familia de topologías $(\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$. Demostrar que $\bigcap_{\alpha\in J} \mathcal{T}_\alpha$ es, también, una topología en X.

PROPOSICIÓN.

Sea X un conjunto cualquiera. Y sea $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una colección cualquiera de subconjuntos de X. Entonces, entre todas las topologías que contienen a Σ, hay una que es la mínima en el orden de los conjuntos, o sea, la menos fina en el lenguaje que hemos introducido para la comparación de las topologías. A dicha topología mínima le llamaremos, sistemáticamente, la topología engendrada por Σ. Le llamaremos $\mathcal{T}(\Sigma)$. Está formada por todas las uniones de las intersecciones de subfamilias finitas de Σ.

DEMOSTRACIÓN.

Desde luego, si consideramos la familia de todas las topologías de X que contienen a Σ, la interesección de todas las topologías de dicha familia es $\mathcal{T}(\Sigma)$. Luego vemos que la colección de todas las intersecciones de un número finito de conjuntos de Σ, incluyendo X como intersección de la familia vacía, es base para una topología de X. Le llamamos $\mathcal{T}$. Como $\mathcal{T} \supset \Sigma$, se sigue que $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}(\Sigma)$. Y, simplemente por ser $\mathcal{T}(\Sigma)$ topología, tiene que ser $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\Sigma)$.

DEFINICIÓN.

Se dice que $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ es una subbase de la topología $\mathcal{T}$ de X si $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Sigma)$, es decir, si Σ genera la topología $\mathcal{T}$ o, equivalentemente, si todo abierto de $\mathcal{T}$ es unión de intersecciones de subfamilias finitas de Σ.

Ejercicio 12. Explicar por qué, tanto $\emptyset$ como $\{\emptyset\}$ son subbases para la topología trivial.

Ejercicio 13. Demostrar que $\Sigma = \{]a, \rightarrow [: \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{] \leftarrow, b[: \ b \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para la topología usual de $\mathbb{R}$.

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos. Cuando tratamos con el producto cartesiano $X \times Y$, es muy útil manejar las proyecciones, que son unas aplicaciones definidas del modo siguiente

DEFINICIÓN.

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

TEOREMA.

La colección

$$\Sigma = \{\pi^{-1}(U) : \ U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{\pi^{-1}(V) : \ V \in \mathcal{T}_Y\}$$

es una subbase de la topología producto sobre $X \times Y$.

Demostración. Recordemos que la topología producto sobre $X \times Y$ tiene como base la colección de conjuntos

$$\mathcal{B} = \{U \times V : \ U \in \mathcal{T}_X, \ V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Observemos que

$$\forall U \in \mathcal{T}_X, \ \pi_1^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{B} \text{ y } \forall V \in \mathcal{T}_Y, \ \pi_2^{-1}(V) = X \times V \in \mathcal{B},$$

de modo que $\Sigma \subset \mathcal{B}$.
Por otro lado

$$\forall U \in \mathcal{T}_X \text{ y } \forall V \in \mathcal{T}_Y, \ U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V),$$

lo que nos dice que Σ es una subbase de la topología producto.

Ejercicio 14. Demostrar que si Σ es una subbase para un espacio topológico X, entonces, para $Y \subset X$,

$$\Sigma_Y = \{U \cap Y : U \in \Sigma\}$$

es una subbase para la topología del subespacio sobre Y.

En cuanto a la topología del orden, tenemos la siguiente generalización del ejercicio 13:

PROPOSICIÓN.

Sea X un conjunto totalmente ordenado. Entonces, la colección Σ de todos los "rayos abiertos", es decir

$$\Sigma = \{]\leftarrow, a[, a \in X\} \cup \{]a, \rightarrow[\},$$

es una subbase para la topología del orden sobre X.

Más arriba hemos planteado el problema siguiente: Si X es un conjunto totalmente ordenado al que damos la topología del orden y tenemos $Y \subset X$, es posible dar en Y dos topologías: la topología $\mathcal{T}_s$ que hereda Y como subespacio de X y la topología $\mathcal{T}_o$ que se obtiene en Y considerando el orden total dado por el de X cuando se restringe a Y.

Vimos que $\mathcal{T}_o \subset \mathcal{T}_s$; pero también vimos ejemplos en los que este contenido era estricto. Sin embargo, en el primer ejemplo que dimos, que era un intervalo de $\mathbb{R}$, las dos topologías coincidían.

Vamos a dar a continuación un resultado que explica estos hechos.

DEFINICIÓN.

Un subconjunto Y de un conjunto ordenado X se dirá que es convexo para el orden ("order convex") si, para cada $a, b \in Y$, todo el intervalo $]a, b[$ está contenido en Y.

Los intervalos y los rayos son ejemplos de conjuntos convexos para el orden. Podemos probar lo siguiente:

TEOREMA.

Si tenemos $Y \subset X$, con X totalmente ordenado y si, además, Y es convexo para el orden, entonces $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_o$.

Demostración. Para $\mathcal{T}_s$ tenemos la siguiente subbase:

$$\Sigma_s = \{] \leftarrow, a[\cap Y, a \in X\} \cup \{]a, \rightarrow [\cap Y, a \in Y\}.$$

Y, para $\mathcal{T}_o$, tenemos esta otra subbase:

$$\Sigma_o = \{] \leftarrow, b[, b \in Y\} \cup \{]b, \rightarrow [, b \in Y\}.$$

Pues bien, ahora vamos a ver que, por el hecho de ser Y convexo para el orden, las dos colecciones de arriba, resultan ser, esencialmente, idénticas (idénticas salvo por $\emptyset$ e Y, que no molestan nada).
Desde luego, si $b \in Y$, el conjunto que denotamos como $]\leftarrow, b[$ en Σ_o es

$$]\leftarrow, b[= \{y \in Y : y < b\} = \{x \in X : x < b\} \cap Y =]\leftarrow, b[\cap Y,$$

donde el último intervalo $]\leftarrow, b[$ es un intervalo de X. Por tanto, queda claro que $\Sigma_o \subset \Sigma_s$. Pero, lo que ya no es cierto, para un subconjunto Y arbitrario es que $\Sigma_s \subset \Sigma_o$, ya que si partimos de un elemento $a \in X$, tal que $a \notin Y$, no está claro que exista algún $b \in Y$ tal que $]\leftarrow, a[\cap Y =]\leftarrow, b[$. Vamos a ver que, sin embargo, esta dificultad no se presenta si Y es convexo para el orden. La razón es la siguiente: Si $a \notin Y$, al ser Y convexo para el orden, se tiene que cumplir que, o bien todos los elementos de Y son $\geq a$ o bien todos los elementos de Y son $\leq a$. Si existieran $y, y' \in Y$ tales que $y < a < y'$, la convexidad de Y implicaría que $a \in Y$. Así pues, o a es una cota inferior de Y, en cuyo caso $]\leftarrow, a[\cap Y = \emptyset$; o bien a es una cota superior de Y, en cuyo caso $]\leftarrow, a[\cap Y = Y$. Lo mismo vale para los rayos $]a, \rightarrow[$.

ENTORNOS

DEFINICIÓN.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que el conjunto $V \subset X$ es un entorno del punto $x \in x$ si existe algún abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subset V$.
Usaremos la notación

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X : \ V \text{ es entorno de } x\}.$$

PROPOSICIÓN.

Las colecciones de todos los entornos $\mathcal{V}(x), \ x \in X$ de un espacio topológico satisfacen las propiedades siguientes

i) $\forall x \in X$ y $\forall V \in \mathcal{V}(x), \ x \in V$.

ii) $U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

iii) $U \supset V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \in \mathcal{V}(x)$.

iv) $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists V \subset U \ni (V \in \mathcal{V}(x)) \wedge (\forall y \in V, \ U \in \mathcal{V}(y))$.

De hecho, las cuatro propiedades de la última proposición caracterizan los sistemas de entornos y son las que uno tiene que comprobar cuando define una topología especificando para cada punto, su sistema total de entornos. En concreto se tiene la siguiente

PROPOSICIÓN.

Sea X un conjunto. Supongamos que, para cada $x \in X$, damos $\underbrace{\mathcal{F}(x)}_{\neq \emptyset} \subset \mathcal{P}(X)$, de modo que se cumplan las cuatro propiedades siguientes

i) $\forall x \in X$ y $\forall V \in \mathcal{F}(x),\ x \in V$.

ii) $U, V \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{F}(x)$.

iii) $U \supset V \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow U \in \mathcal{F}(x)$.

iv) $U \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow \exists V \subset U \ni (V \in \mathcal{F}(x)) \wedge (\forall y \in V,\ U \in \mathcal{F}(y))$.

Entonces

$$\exists! \mathcal{T} \text{ topología en } X \ \ni \forall x \in X,\ \mathcal{V}(x) = \mathcal{F}(x).$$

Demostración. Empezamos definiendo

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : \ \forall x \in A, \ A \in \mathcal{F}(x)\}.$$

A continuación comprobamos que $\mathcal{T}$ es una topología viendo que cumple las tres condiciones de la definición de topología:

1) Claramente $\emptyset \in \mathcal{T}$ y además, $X \in \mathcal{T}$, ya que si $x \in X$, como $\mathcal{F}(x) \neq \emptyset$, tenemos algún $U \in \mathcal{F}(x)$ y, por la propiedad iii), $X \supset U \Rightarrow X \in \mathcal{F}(x)$.
2) Si tenemos una colección $G_\alpha, \alpha \in J$, con cada $G_\alpha \in \mathcal{T}$, vamos a demostrar que $\bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha \in \mathcal{T}$. En efecto, si $x \in \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$, existe algún α tal que $x \in G_\alpha$. Por consiguiente, $G_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow G_\alpha \in \mathcal{F}(x)$. Y, de nuevo por la propiedad iii), llegamos a que $\bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha \in \mathcal{F}(x)$.
3) Finalmente, si $A, B \in \mathcal{T}$, vemos que $A \cap B \in \mathcal{T}$. En efecto, si $x \in A \cap B$, tenemos, usando ii), $A, B \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}(x)$.

Una vez que ya tenemos que $\mathcal{T}$ es una topología, podemos considerar, para cada $x \in X$, su sistema de entornos

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X : \ \exists A \in \mathcal{T} \ni x \in A \subset V\}$$

Ahora vamos a demostrar que

$$\forall x \in X, \ \mathcal{V}(x) = \mathcal{F}(x).$$

Primero vemos que $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}(x)$. En efecto

$$U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \supset \underbrace{A}_{\in \mathcal{T}} \ni x \Rightarrow U \supset A \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow (\text{por } iii))U \in \mathcal{F}(x).$$

Y, en segundo lugar vemos que $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. Sea $U \in \mathcal{F}(x)$. Consideremos

$$A = \{y \in U : \ U \in \mathcal{F}(y)\}.$$

Desde luego, $x \in A$. Así que, si demostramos que $A \in \mathcal{T}$, ya tenemos que $U \in \mathcal{V}(x)$. Para ver que $A \in \mathcal{T}$ tomamos cualquier $y \in A$. Por definición de A, sabemos que $U \in \mathcal{F}(y)$. Y, por la propiedad iv), tenemos garantizada la existencia de $V \subset U$ tal que $y \in V$ y $\forall z \in V, \ U \in \mathcal{F}(z)$.

En particular, se sigue que $V \subset A$ y $V \in \mathcal{F}(y)$. Queda así visto que $\forall y \in A,\ A \in \mathcal{F}(y)$, de modo que $A \in \mathcal{T}$, como queríamos demostrar.

Ejemplo:

¿Cómo son los entornos de un punto en la topología del subespacio?

PROPOSICIÓN.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Si consideramos en Y la topología de subespacio $\mathcal{T}_Y$, tenemos que, para cualquier $V \subset Y$ y cualquier $y \in Y$, las dos afirmaciones siguientes son equivalentes

a) V es entorno de Y en la topología de subespacio.

b) Existe algún $U \subset X$, tal que U es entorno de y en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $V = U \cap Y$.

DEMOSTRACIÓN.

$a) \Rightarrow b)$
Si V es entorno de y en la topología $\mathcal{T}_Y$, existirá $A \in \mathcal{T}_Y$ tal que $V \supset A \ni y$. Por definición, decir que $A \in \mathcal{T}_Y$ quiere decir que existe $B \in \mathcal{T}$ tal que $A = B \cap Y$. Como $B \in \mathcal{T}$ y $B \ni y$, se sigue que $B \in \mathcal{V}(y)$, es decir, B es un entorno de y en $(X, \mathcal{T})$. Pero, entonces $V \cup B$ también es un entorno de y en $(X, \mathcal{T})$. Si ponemos $U = V \cup B$, tenemos

$$U \cap Y = (V \cup B) \cap Y = (V \cap Y) \cup (B \cap Y) = V \cup A = V.$$

$b) \Rightarrow a)$ Por ser $U \in \mathcal{V}(y)$, existirá $A \in \mathcal{T}$ tal que $U \supset A \ni y$. Pero, entonces

$$(V = U \cap Y \supset A \cap Y \ni y) \wedge (A \cap Y \in \mathcal{T}_Y) \Rightarrow V \in \mathcal{V}_Y(y),$$

en otras palabras, V es un entorno de y en la topología del subespacio.

De hecho, una forma de dar la topología de subespacio en Y sería considerar, para cada $y \in Y$, la colección

$$\mathcal{F}(y) = \{V \cap Y : \ V \in \mathcal{V}(y)\},$$

y ver que cumple las cuatro condiciones que caracterizan a los sistemas de entornos.

Definición.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $x \in X$. Un sistema fundamental de entornos de x, o base de entornos de x o base local en x, es cualquier familia $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ tal que

$$\forall V \in \mathcal{V}(x)\ \exists B \in \mathcal{B}(x)\ \ni B \subset V.$$

Proposición.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y supongamos que para cada $x \in X$ tenemos una base de entornos de x, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. Entonces

i) $\forall x \in X$ y $\forall V \in \mathcal{B}(x),\ x \in V$.

ii) $U, V \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{B}(x)\ \ni W \subset U \cap V$.

iii) $U \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists V \subset U \ni (V \in \mathcal{B}(x)) \wedge (\forall y \in V,\ \exists W \in \mathcal{B}(y)\ \ni W \subset U)$.

PROPOSICIÓN

Si en un conjunto X damos, para cada $x \in X$, una familia no vacía de subconjuntos de X, $\mathcal{B}(x)$, de modo que se cumplan las tres propiedades de la última proposición, entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X para la cual, se tiene que $\mathcal{B}(x)$ es base local para cada $x \in X$.

PROPOSICIÓN.

Si $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ son dos espacios topológicos, para $(x, y) \in X \times Y$, las dos colecciones

$$\mathcal{B}_1((x,y)) = \{A \times B : \ A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{S}, x \in A, y \in B\}$$

y

$$\mathcal{B}_2((x,y)) = \{U \times V : U \in \mathcal{V}_X(x), V \in \mathcal{V}_y(y)\}$$

son ambas, bases de entornos de (x, y) en la topología producto.

Para comparar topologías usando entornos o bases de entornos, tenemos la proposición siguiente:

PROPOSICIÓN.

En un conjunto X consideramos dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, con sistemas de entornos respectivos, para $x \in X$, que denotamos por $\mathcal{V}_1(x)$ y $\mathcal{V}_2(x)$ y con bases de entornos respectivas, para $x \in X$, que denotamos por $\mathcal{B}_1(x)$ y $\mathcal{B}_2(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \mathcal{V}_1(x) \subset \mathcal{V}_2(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ \forall U_1 \in \mathcal{B}_1(x)\ \exists U_2 \subset U_1 \ni U_2 \in \mathcal{B}_2(x).\end{aligned}$$

DEFINICIÓN.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos del espacio topológico $(X,\mathcal{T})$. Diremos que la sucesión converge al punto $a\in X$, y escribiremos $x_n\to a$, si y sólo si

$$\forall V\in\mathcal{V}(a),\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \ni\ \forall n\geq n_0,\ x_n\in V.$$

Se ve inmediatamente que esta condición es equivalente a la que se obtiene considerando, en lugar de los sistemas totales de entornos de a, una base de entornos $\mathcal{B}(a)$; es decir

$$(x_n\to a)\Longleftrightarrow(\forall U\in\mathcal{B}(a),\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \ni\ \forall n\geq n_0,\ x_n\in U).$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ con la topología usual, si tomamos como base de entornos de a, la colección $\mathcal{B}(a)=\{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[,\ \varepsilon>0\}$ recuperamos la definición de convergencia de sucesiones que debe resultar familiar desde Cálculo I:

$$x_n \to a \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ni \forall n \geq n_0,\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Uno estaría tentado para decir, en lugar de $x_n \to a$, que el límite de la sucesión x_n es a. Pero esto, que resulta legítimo en el caso de la topología usual de $\mathbb{R}$, no está justificado en general. Para entender este asunto a fondo, empecemos analizando el ejemplo siguiente:

Ejemplo: Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_f$ de los complementos finitos. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, a la que sólo le pedimos que todos sus términos sean distintos. Entonces, encontramos el siguiente hecho sorprendente

$$\forall a \in \mathbb{R},\ x_n \to a.$$

¿Cómo es ésto posible? Usemos la definición. Sea U un entorno de a, que podemos suponer que es abierto (los entornos abiertos forman una base local). Como los abiertos no vacíos tienen complemento finito, está claro que basta excluir un número finito de términos de la sucesión, digamos todos los que tienen índice menor que un cierto n_0, para garantizar que todos los demás, es decir, todos los x_n con $n \geq n_0$, pertenevcen a U.

Analicemos cuál es la razón de que en la recta real, si usamos la topología de los complementos finitos, una sucesión puede tener muchos límites, mientras que si usamos la topología usual, sólo puede tener uno. Recordemos la prueba de este último hecho:
Supongamos que estamos en $\mathbb{R}$ con su topología usual y supongamos que tenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to a$ y $x_n \to b$, siendo $a \neq b$. Entonces, por la definición de convergencia, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existirán $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq n_0,\ |x_n - a| \leq \varepsilon$ y $\forall n \geq n_1,\ |x_n - b| \leq \varepsilon$. A partir de aquí, tomando $n_2 = \max(n_0, n_1)$, resulta que, para todo $n \geq n_2$, se tiene que, al mismo tiempo, $|x_n - a| \leq \varepsilon$ y $|x_n - b| \leq \varepsilon$.
La clave es que, si ε es suficientemente pequeño, las dos condiciones anteriores son incompatibles porque

$$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[= \emptyset.$$

DEFINICIÓN.

A un espacio topológico en el que para cada par de puntos distintos x e y existen sendos entornos de x y de y que son disjuntos, se le llama separado o de Hausdorff, en honor del matemático alemán Félix Hausdorff(1868-1942), que puede ser considerado uno de los padres fundadores de la Topología, por su obra maestra "Grundzüge der Mengenlehre"(1914).

La recta real con su topología usual es un espacio topológico de Hausdorff, mientras que la recta real con la topología de los complementos finitos, no es un espacio topológico de Hausdorff.

PROPOSICIÓN.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de un espacio topológico de Hausdorff, se tiene que $(x_n \to a) \wedge (x_n \to b) \Longrightarrow a = b$. Es decir, en un espacio topológico de Hausdorff, el límite de una sucesión, si existe, es único.

Ejercicio 15. Demostrar la proposición anterior adaptando la que dimos más arriba para la recta real con la topología usual.

En este punto, un alumno preguntó:

¿Es verdad que si el límite es único, el espacio es de Hausdorff?

Pues bien, si por límite se entiende límite de sucesiones, la respuesta es: **NO**.

El ejemplo no puede ser más sencillo: el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$, donde los abiertos son el vacío y los conjuntos cuyo complemento es numerable. Resulta que, en esta topología

$$(1) \qquad x_n \to a \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \forall n \geq n_0, \ x_n = a.$$

La razón es que $U = \mathbb{R} \setminus \{x_n : \ x_n \neq a\}$ es un entorno abierto de a. A partir de (1) resulta que

$$(x_n \to a) \wedge (x_n \to b) \Longrightarrow a = b.$$

Sin embargo, a pesar de que en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$ una sucesión tiene, a lo sumo, un límite, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$ no es un espacio topológico de Hausdorff.

La razón es que si tenemos dos abiertos $U, V \in \mathcal{T}_n$ tales que $U \ni a$ y $V \ni b$, siendo $a \neq b$, se tendrá

$$\complement(U \cap V) = \complement U \cup \complement V \subsetneqq \mathbb{R},$$

ya que tanto $\complement U$ como $\complement V$ son conjuntos numerables, de modo que, también $\complement U \cup \complement V$ es numerable y, sabemos que $\mathbb{R}$ no es numerable. Así pues, $U \cap V \neq \emptyset$, lo que demuestra que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$ no es de Hausdorff.

Restauraremos el sentido común en esta cuestión introduciendo la noción de red. Veremos que la pregunta, convenientemente reformulada en términos de convergencia de redes, si tiene ya respuesta afirmativa.

Una generalización útil del concepto de sucesión es el concepto de red. Una sucesión no es más que una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ n & \longmapsto & x_n. \end{array}.$$

En la convergencia de una sucesión juegan un papel, la topología de X y el orden de $\mathbb{N}$.
Si, en lugar de $\mathbb{N}$, tenemos cualquier conjunto dirigido J, lo que resulta es lo que se llama una red.

Un conjunto dirigido es un par $(J, \prec)$, donde J es un conjunto y $\prec$ es una relación de orden en J a la que le pedimos que sea filtrante, lo cual quiere decir, simplemente, que se cumpla lo siguiente:

$$\forall j, j' \in J, \ \exists j'' \in J \ \ni (j \prec j'') \wedge (j' \prec j'').$$

La definición de convergencia de una red es formalmente idéntica a la de una sucesión.

DEFINICIÓN.

Sea $(x_j)_{j\in J}$ una red en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces

$$x_j \to a \in X \iff \forall V \in \mathcal{V}(a)\ \exists j_0 \in J\ \ni j \succ j_0,\ x_j \in V.$$

Ejercicio 16. Demostrar que, en un espacio topológico de Hausdorff, una red $(x_j)_{j\in J}$ no puede converger a puntos distintos. Observar el papel que juega en la demostración el carácter filtrante del orden de J.

Ahora si que tenemos un recíproco de esta propiedad:

PROPOSICIÓN.

Si en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ ninguna red puede converger a puntos distintos, entonces, el espacio es de Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN.

Empecemos observando que, si en $\mathcal{V}(a)$ damos un orden mediante $U \prec V \Leftrightarrow V \subset U$ y si consideramos una red $V \mapsto x_V$ que cumpla, sencillamente, que $x_V \in V$, entonces $x_V \to a$.

Ahora la demostración de la proposición resulta muy fácil. Suponemos que el espacio $(X; \mathcal{T})$ no es de Hausdorff y demostramos que existe una red que converge a dos puntos distintos. Si el espacio no es de Hausdorff, será que existen $a \neq b$ tales que $\forall U \in \mathcal{V}(a)$ y $\forall V \in \mathcal{V}(b),\ U \cap V \neq \emptyset$. Ahora damos un orden en $\mathcal{V}(a) \times \mathcal{V}(b)$, mediante

$$(U, V) \prec (U', V') \Longleftrightarrow (U \prec U') \wedge (V \prec V')$$

Ahora formamos una red $(U, V) \longmapsto x_{U,V}$ pidiendo, simplemente, que $x_{u,V} \in U \cap V$ y, es inmediato comprobar que $X_{U,V} \to a$ y, también $X_{U,V} \to b$.

DEFINICIÓN.

Una distancia en un conjunto X es cualquier aplicación

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{d} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

que cumpla las tres propiedades siguientes

1)
$$\forall x,y \in X,\ d(x,y) \geq 0 \text{ y } d(x,y) = 0 \iff x = y,$$

2)
$$\forall x,y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$$

y

3)
$$\forall x,y,z \in X,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Ejercicio 17. Seguro que todo el mundo está familiarizado con la distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$, dada, para $x = (x_j)_{j=1}^n$, $y = (y_j)_{j=1}^n$, por

$$d(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}.$$

Se pide demostrar que, en general, para cada $p \in [1, \infty]$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d_p} & \mathbb{R} \\ (x = (x_j)_{j=1}^n, y = (y_j)_{j=1}^n) & \longmapsto & d_p(x,y) = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \right)^{1/p} & \text{si } p < \infty \\ \max_{1 \le j \le n} |x_j - y_j| & \text{si } p = \infty. \end{cases} \end{array}$$

es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

La distancia euclídea es el caso particular $d = d_2$.

Un caso particular importante de espacio métrico es el de un espacio normado.

DEFINICIÓN

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

- Una norma en $\mathbb{X}$ es, por definición, una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\|\ \|} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

  que cumple las tres propiedades siguientes

  i) $\forall x \in \mathbb{X},\ \|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
  ii) $\forall x \in \mathbb{X}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
  iii) $\forall x, y \in \mathbb{X},\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

- Al par $(\mathbb{X}, \|\ \|)$ formado por un espacio vectorial real o complejo X junto con una norma $\|\ \|$ en X se le llama espacio normado

Todo espacio normado $(\mathbb{X}, \|\ \|)$ tiene asociado de manera natural, un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ donde $d(x, y) = \|x - y\|,\ \forall x, y \in \mathbb{X}$.

Ejercicio 18. Ver que las distancias d_p definidas en $\mathbb{R}^n$ en el ejercicio anterior provienen de las respectivas normas $\| \ \|_p$ dadas, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ por

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < \infty; \\ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \text{ si } p = \infty. \end{cases}$$

DEFINICIÓN.

Sea (X, d) un espacio métrico. Dado un punto $x \in X$ y un número real $r > 0$, llamaremos bola abierta de centro x y radio r al subconjunto de X que denotaremos por $\mathbf{B}(x, r)$ y que consiste en

$$\mathbf{B}(x, r) = \{y \in X : \; d(x, y) < r\}.$$

Y llamaremos bola cerrada de centro x y radio r al subconjunto de X que denotaremos por $\overline{\mathbf{B}}(x, r)$ y que consiste en

$$\overline{\mathbf{B}}(x, r) = \{y \in X : \; d(x, y) \leq r\}.$$

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico. Se pide

- Demostrar que si, para cada $x \in X$ se considera

$$\mathcal{B}(x) = \{\mathbf{B}(x, r),\ r > 0\},$$

las colecciones $\mathcal{B}(x),\ x \in X$ cumplen las condiciones para ser bases locales de una topología sobre X.

- Demostrar que

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{B}(x, r),\ x \in X, r > 0\},$$

cumple las condiciones para ser base de una topología sobre X, la misma que la del punto anterior.

DEFINICIÓN.

Cualquiera de los dos procedimientos esbozados en el último ejercicio, nos permite asignar de forma canónica un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ a cada espacio métrico (X, d). La topología queda caracterizada del siguiente modo:

$$\text{Para } E \subset X,\ E \in \mathcal{T} \iff \forall x \in E\ \exists r > 0\ \ni \mathbf{B}(x, r) \subset E.$$

Definición.

Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es metrizable si existe una distancia d en X para la cual, el espacio topológico asociado al espacio métrico (X, d) es, precisamente, $(X, \mathcal{T})$.

Distancias diferentes pueden dar lugar a la misma topología. Veremos en el próximo ejercicio que todas las distancias $d_p,\ 1 \leq p \leq \infty$, que hemos definido en $\mathbb{R}^n$, dan lugar a la misma topología.

Proposición.

Todo espacio topológico metrizable es de Hausdorff.

Demostración.

Basta ver que, si (X, d) es un espacio métrico y tenemos dos puntos de X, $a \neq b$, tomando $r = \dfrac{d(a,b)}{2} > 0$,

$$\mathbf{B}(a, r) \cap \mathbf{B}(b, r) = \emptyset.$$

Ejercicio 20. Para el espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d_p)$, denotaremos la bola abierta de centro x y radio r como $\mathbf{B}_p(x, r)$. Se pide

- Dibujar $\mathbf{B}_p(0, 1)$ para todo $p \in [1, \infty]$. Bueno, para unos cuantos $p's$ que incluyan $1, 2, \infty$.
- Demostrar que todos los espacios métricos $(\mathbb{R}^n, d_p),\ 1 \leq p \leq \infty$, dan lugar al mismo espacio topológico. La topología de dicho espacio se llama la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia: Dados dos puntos $a, b \in \mathbb{R}^n$, *ponemos, simplemente* $d_p = d_p(a, b)$. *Demostrar que, si* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, *se tiene la siguiente cadena de desigualdades:*

$$d_\infty \leq d_p \leq d_q \leq d_1 \leq n d_\infty.$$

Utilizar estas desigualdades para ver cómo están contenidas unas en otras las bolas dadas por las diferentes distancias.

Ejercicio 21. Supongamos que en el espacio vectorial X, real o complejo, tenemos dos normas $\| \ \|$ y $\| \ \|'$, que determinan, respectivamente, las distancias d y d' y, por consiguiente, las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$. Demostrar que, si sabemos que existe una constante $C > 0$, tal que

$$\forall x \in X, \ \|x\|' \leq C\|x\|,$$

entonces $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$.

DEFINICIÓN.

Diremos que las normas $\| \ \|$ y $\| \ \|'$, definidas sobre el espacio vectorial, real o complejo, X son equivalentes si existen dos constantes $c, C > 0$ tales que

$$\forall x \in X, \ c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|.$$

Se sigue del ejercicio 21, que dos normas equivalentes, dan lugar a la misma topología.
Esta observación se puede usar para abordar el ejercicio 20 usando normas en vez de las distancias correspondientes.

La completitud es una propiedad que un espacio métrico puede tener o no. Esta propiedad juega un papel tan básico en el Análisis Matemático, que merece la pena que nos remontemos a su origen para entender bien su significado.

Podemos comenzar la discusión pensando en una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales y preguntando:

¿Cómo podemos saber si esta sucesión converge?

Esta pregunta es más delicada que la de cómo saber si la sucesión converge a un determinado punto $a \in \mathbb{R}$ fijado de antemano. Para responder a esta segunda pregunta, sólo tenemos que ver si los distintos valores de la sucesión están tan cerca de a como queramos o no.

Pero, para saber si converge la sucesión, sin tener a priori un candidato para el límite, tendríamos que ir mirando a todos los infinitos límites a posibles, es decir, a todos los números reales.

El criterio que permite decidir si una sucesión converge o no sin saber nada de su posible límite, se llama, hoy en día, criterio de Cauchy, en honor al mismo matemático francés que ya hemos encontrado al comienzo del capítulo; aunque, en realidad, fue descubierto primero por el matemático checo Bernhard Bolzano(1781-1848).
Para formulando empezamos con una

DEFINICIÓN.

En un espacio métrico (X, d) se dice que la sucesión de puntos $x_n \in X$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \geq n_0,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{2}$$

El criterio buscado se formula, entonces, de este modo

TEOREMA (CRITERIO DE CAUCHY).

Para una sucesión $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, son equivalentes las dos propiedades siguientes:

(i) s es convergente.

(ii) s es una sucesión de Cauchy.

La implicación (*i*)$\Longrightarrow$(*ii*) es verdad en cualquier espacio métrico. Si sabemos que la sucesión $x_n \in X$ converge al punto $a \in X$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existira $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0,\ d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Pero, entonces, si tenemos $n, m \geq n_0$, resulta que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Para ver la otra implicación para una sucesión de números reales, comenzamos con una observación elemental

LEMA.

Toda sucesión de números reales tiene alguna subsucesión monótona. Esto quiere decir que, si tenemos una sucesión s de números $x_n \in \mathbb{R}$, entonces, podemos encontrar una sucesión creciente de índices naturales n_k tales que la sucesión $s' = (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, que es una subsucesión de s, es monótona, lo cual quiere decir que, o bien es creciente (o sea, cumple que $k < k' \Rightarrow x_{n_k} \leq x_{n_{k'}}$) o bien es decreciente (o sea, cumple que $k < k' \Rightarrow x_{n_k} \geq x_{n_{k'}}$).

DEMOSTRACIÓN. DEL LEMA.

Diremos que la sucesión “toca fondo” en un índice $j \in \mathbb{N}$ si para todo $n > j,\ x_n \geq x_j$. Entonces sólo hay dos casos posibles: O bien la sucesión toca fondo en una cantidad infinita de índices, o bien lo hace sólo en una cantidad finita de índices. En el primer caso, si los índices en que la sucesión toca fondo son $j_1 < j_2 < \cdots < j_k < \cdots$, la subsucesión $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ es creciente.
En el segundo caso, si la sucesión sólo toca fondo en $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$; se tendrá que, para cada $j > j_r$, existe $j' > j$ tal que $x_{j'} < x_j$. Así podemos encontrar una subsucesión de s que sea decreciente.

Como consecuencia de este lema se obtiene el siguiente resultado, que jugó un papel básico el la fundamentación del Análisis Matemático durante el siglo XIX.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS.

Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna subsucesión convergente.

DEMOSTRACIÓN.

Usando el lema, obtenemos una subsucesión creciente o decreciente y luego, observamos que toda sucesión monótona acotada, forzosamente tiene límite.
En efecto, supongamos que es creciente. Al ser acotada, existirá el supremo y, al ser creciente, el supremo es, ciertamente, el límite.

Este resultado lo descubrió el matemático checo, mencionado antes, Bernhard Bolzano en 1817 y lo demostró con rigor el matemático alemán Karl Weierstrass(1815-1897) en un curso del año 1877. Los sesenta años que separan las dos pruebas permitieron, entre otras cosas, una mejor fundamentación de los números reales.
Ahora podemos retomar la demostración del criterio de Cauchy:

DEMOSTRACIÓN. DE QUE (*ii*)$\Longrightarrow$(*i*)

Basta darse cuenta de dos cosas

(1) Toda sucesión de Cauchy está acotada y
(2) Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, entonces, la sucesión original, es convergente.

Ejercicio 22. Demostrar que (1) y (2) del párrafo anterior son ciertas para toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico cualquiera.

Ya estamos preparados para entender y apreciar bien la idea de completitud.

DEFINICIÓN.

Diremos que el espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de puntos de X, converge.

Podemos resumir lo que hemos probado más arriba diciendo, simplemente, que $\mathbb{R}$, con su distancia natural, es un espacio métrico completo.

DEFINICIÓN.

Diremos que el espacio normado $(\mathbb{X}, \| \ \|)$ es completo, o que es un espacio de Banach si el correspondiente espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ (el que se obtiene definiendo la distancia d mediante $d(x, y) = \|x - y\| \ \forall x, y \in \mathbb{X}$) es completo.
Para un espacio con producto interior, si es de Banach, o sea, si es completo, diremos que se trata de un espacio de Hilbert.

PROPOSICIÓN.

Si $\| \ \|$ y $\| \ \|'$ son dos normas equivalentes definidas en el espacio vectorial $\mathbb{X}$, se tiene que

$$(\mathbb{X}, \| \ \|) \text{ es completo } \iff (\mathbb{X}, \| \ \|') \text{ es completo.}$$

DEMOSTRACIÓN.

Las sucesiones de Cauchy son las mismas y las sucesiones convergentes también.

Proposición

Sea $(\mathbb{X}, \| \ \|)$ un espacio normado. Entonces $(\mathbb{X}, \| \ \|)$ es un espacio de Banach si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} x_j \text{ converge en } \mathbb{X}. \tag{3}$$

Demostración. I.- Si $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach y tenemos $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$, observamos que la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$, o sea $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$, es una sucesión de Cauchy. En efecto, si $n > m$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \|x_j\| < \varepsilon$$

si m es suficientemente grande. Así pues, existe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x$ y la serie es convergente en $(\mathbb{X}, \| \, \|)$.

II.- Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición (3). Vamos a ver que, entonces, $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach. Sea $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \| \, \|)$. Podemos elegir una subsucesión $(y_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ que cumpla $\|y_{j_k} - y_{j_{k+1}}\| < 2^{-k}$. Tendremos

$$y_{j_k} = y_{j_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (y_{j_{i+1}} - y_{j_i}).$$

Ahora bien, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (y_{j_{i+1}} - y_{j_i})$ converge en $\mathbb{X}$, por la propiedad (3), ya que $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_{j_{i+1}} - y_{j_i}\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1 < \infty$. Entonces, existirá

$$\lim_{k \to \infty} y_{j_k} = y_{i_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (y_{j_{i+1}} - y_{j_i}).$$

Pero, para una sucesión de Cauchy, si alguna subsucesión converge, también lo hace la sucesión original. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall j, j' \geq j_0,\ \|y_j - y_{j'}\| \leq \varepsilon$. Si $y = \lim_{k\to\infty} y_{k_j}$, tendremos

$$\|y_j - y\| \leq \|y_j - y_{j_k}\| + \|y_{j_k} - y\| \leq 2\varepsilon,$$

tomando j y j_k suficientemente grandes. Y así termina esta demostración.

PROPOSICIÓN.

$\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con cualquiera de las normas $\| \ \|_p,\ 1 \leq p \leq \infty$ que hemos introducido (todas ellas equivalentes, como hemos visto), es un espacio de Banach; es decir, es completo.

Para concretar, escribimos la demostración para $\mathbb{R}^n$. El caso complejo es, esencialmente igual.

Sólo hay que comprobar que se cumple (3). Podemos usar cualquier norma $\| \|_p$ porque todas son equivalentes. Usamos $\| \|_1$.

Sean, para cada $j \in \mathbb{N}$, $x_j = (x_j(i))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_1 < \infty$.

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j(i)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_1 < \infty$. Como $\mathbb{R}$ es completo, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j(i)$ converge. Si llamamos a su suma $x(i)$, estamos definiendo un vector $x = (x(i))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Ahora vamos a ver que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x$ en el espacio normado $(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$. En efecto

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - x \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{N} x_j(i) - x(i) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} x_j(i) \right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \|x_j\|_1 \to 0$$

para $N \to \infty$.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

DEFINICIÓN.

Dado un conjunto $A \subset X$, se llama interior de A al conjunto, que denotaremos por A° o, a veces, $\mathrm{int}(A)$, que es, por definición, el máximo abierto contenido en A.
La definición tiene sentido porque la unión de cualquier colección de abiertos, es, también, un abierto

PROPOSICIÓN.

$$\forall A \subset X,\ A^{\circ} = \{x \in X :\ A \in \mathcal{V}(x)\}.$$

Demostración.

- $$x \in A^\circ \Rightarrow x \in \underbrace{A^\circ}_{\in \mathcal{T}} \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x).$$

- $$A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow A \supset \underbrace{G}_{\in \mathcal{T}} \ni x \Rightarrow x \in G \subset A^\circ.$$

Proposición: Propiedades del interior.

i) $\forall A \subset X, \;\; A^\circ \subset A.$

ii) $\forall A \subset X, \;\; A^{\circ\circ} = A^\circ.$

iii) $\forall A, B \subset X, \;\; (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$

iv) $X^\circ = X$ y

v) $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A^\circ = A.$

DEMOSTRACIÓN.

Veamos iii): Ante todo observamos que

$$C \subset D \Longrightarrow C^\circ \subset D^\circ.$$

Esto implica que $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$ y $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$; de modo que, $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.
Por otro lado, $A^\circ \cap B^\circ$ es un abierto contenido en $A \cap B$; de modo que, necesariamente, $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

Resulta que las cuatro primeras propiedades de la proposición última caracterizan al operador "interior". En concreto, tenemos el resultado siguiente:

TEOREMA.

Sea X un conjunto y supongamos que damos una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\jmath} & \mathcal{P}(X) \\ A & \longmapsto & \jmath(A) \end{array}$$

que cumple las cuatro propiedades siguientes

i) $\forall A \subset X,\ \jmath(A) \subset A$.

ii) $\forall A \subset X,\ \jmath(\jmath(A)) = \jmath(A)$.

iii) $\forall A, B \subset X,\ \jmath(A \cap B) = \jmath(A) \cap \jmath(B)$.

iv) $\jmath(X) = X$.

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\forall A \subset X,\ A^\circ = \jmath(A)$.

Lo primero que hemos de hacer es definir

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : \jmath(A) = A\}$$

y comprobar que la colección $\mathcal{T}$ así definida es, en efecto, una topología. Para ello, verificamos las tres propiedades características de una topología:

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$. En efecto $\jmath(\emptyset) \subset \emptyset \Rightarrow \jmath(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}$.

También $X \in \mathcal{T}$ ya que, por iv), $\jmath(X) = X$.

2) Ahora queremos ver que si tenemos una familia $A_\alpha \in \mathcal{T},\ \alpha \in J$, entonces $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{T}$. En otras palabras, hemos de ver que

$$\jmath(A_\alpha) = A_\alpha \ \forall \alpha \in J \Rightarrow \jmath\left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha.$$

Antes que nada observamos que la propiedad iii) implica que

$$C \subset D \Rightarrow \jmath(C) \subset \jmath(D).$$

En efecto

$$C \subset D \Rightarrow C \cap D = C \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por } iii)} \jmath(C) \cap \jmath(D) = \jmath(C \cap D) = \jmath(C) \Rightarrow \jmath(C) \subset \jmath(D).$$

Volviendo a los A_α, tenemos

$$\forall \alpha \in J,\ \jmath(A_\alpha) \subset \jmath\left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} \jmath(A_\alpha) \subset \jmath\left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha,$$

de modo que $\jmath\left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$, como queríamos demostrar.

Finalmente vemos 3). Si $A, B \in \mathcal{T}$, será $\jmath(A) = A$ y $\jmath(B) = B$), de modo que

$$\jmath(A \cap B) = \{\text{por } iii)\} \jmath(A) \cap \jmath(B) = A \cap B \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}.$$

Para terminar de probar el teorema, hemos de demostrar que, en la topología $\mathcal{T}$ definida al comienzo de la prueba, se cumple que $\forall A \subset X,\ A^\circ = \jmath(A)$. Lo hacemos de este modo:

$$\jmath(\jmath(A)) = \jmath(A) \Rightarrow \jmath(A) \in \mathcal{T}.$$

A partir de esto, como $\jmath(A) \subset A$, se sigue que $\jmath(A) \subset A^\circ$.
Y, en la otra dirección,

$$\underbrace{A^\circ}_{\in \mathcal{T}} \subset A \Rightarrow A^\circ = \jmath(A^\circ) \subset \jmath(A).$$

Cierre.

En un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tiene sentido considerar la colección

$$\mathcal{C} = \{C \subset X : X \setminus C \in \mathcal{T}\}.$$

A los conjuntos de esta familia se les llama cerrados.
Puesto que los cerrados son los complementarios de los abiertos, las tres propiedades características de los abiertos implican, por dualidad, las siguientes tres propiedades características de los cerrados.

Proposición.

1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.
2) para cada familia $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ de conjuntos $C_\alpha \in \mathcal{C}$, su intersección $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ es también miembro de $\mathcal{C}$ y
3) para cada par C, D de miembros de $\mathcal{C}$, su unión $C \cup D$ es también miembro de $\mathcal{C}$.

Por supuesto, a partir de 3) se sigue que, para cualquier colección finita de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{C}$ su unión es, también, miembro de $\mathcal{C}$.

Observación. Lo primero que hay que decir es que, en un espacio topológico, un conjunto puede ser abierto, cerrado, ni abierto ni cerrado o abierto y cerrado a la vez.
Y los ejemplos son fáciles de producir.
En todo espacio topológico, el conjunto vacío y el conjunto total son abiertos y cerrados a la vez. Y, por ejemplo, en el espacio métrico $[0,1] \setminus \{1/2\}$ con la distancia dada por el valor absoluto, tanto $[0,1/2[$ como $]1/2,1]$ son, a la vez, abiertos y cerrados.
Y, desde luego, en la recta con su topología usual $[0,1[$ no es ni abierto ni cerrado.
Este comentario viene a cuento para que nadie, dejándose llevar por el lenguaje ordinario, piense, ni por un sólo momento, que los conjuntos son como las puertas que, cuando no están abiertas, están cerradas.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

DEFINICIÓN.

Dado un conjunto $A \subset X$, se llama cierre o adherencia de A al conjunto, que denotaremos por $\overline{A}$ que es, por definición, el mínimo cerrado que contiene a A.
La definición tiene sentido porque la intersección de cualquier colección de cerrados, es, también, un cerrado.

La denominación "cierre"está perefectamente justificada y es la que usaremos generalmente. Otros autores prefieren hablar de "adherencia". Este término se entiende mejor después del resultado siguiente

PROPOSICIÓN.

$$\forall A \subset X,\ \overline{A} = \{x \in X :\ \forall V \in \mathcal{V}(x),\ \ V \cap A \neq \emptyset\}.$$

Un punto x es adherente a A, o se adhiere a A cuando todo entorno de x contiene algún punto de A. Ese es el contenido de la proposición.

Demostración.

Si $x \in \overline{A}$ y $V \in \mathcal{V}(x)$, tenemos, para algún $G \in \mathcal{T}$, $x \in G \subset V$. Entonces $\complement G$ es un cerrado que no contiene a x, que es de $\overline{A}$. Eso implica que $\complement G$ no puede contener a A y, por consiguiente, hay algún punto de A que pertenece a G, es decir $G \cap A \neq \emptyset$. A partir de aquí, puesto que $V \supset G$, llegamos a que $G \cap A \neq \emptyset$.
Recíprocamente, si $x \in X$ es tal que todo entorno de x corta a A, vamos a ver que $x \in \overline{A}$. Para ello, hemos de ver que, si tenemos un cerrado cualquiera C, tal que $A \subset C$, entonces $x \in C$. Si para algún cerrado C tal que $A \subset C$, no fuera $x \in C$, tendríamos $x \in \complement C$, con lo que $\complement C$ sería un abierto conteniendo a x, y por tanto un entorno de x para el cual $\complement C \cap A = \emptyset$.

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$. Se pide demostrar que

$$\overline{A} = \{x \in X : \ d(x, A) = 0\},$$

donde $d(x, A)$ denota la distancia del punto x al conjunto A, la cual es, por definición $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : \ y \in A\}$.

Ejercicio 24. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$. Se pide demostrar que
$$\overline{A} = \{x \in X : \ \exists \underbrace{a_n}_{\in A} \to x\},$$
Veremos más adelante que esta caracterización no es cierta para espacios topológicos cualesquiera, aunque valga para los métricos.

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que, para cada $a \in X$ y cada $r > 0$, $\overline{\mathbf{B}}(a, r)$ es un cerrado y que
$$\overline{\mathbf{B}(a, r)} \subset \overline{\mathbf{B}}(a, r).$$
Ver que, sin embargo, el contenido puede ser propio; como sucede en el siguiente ejemplo:
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x^2 + y^2 = 1) \vee ((y = 0) \wedge (0 \leq x \leq 1))\}$$
con la distancia euclídea del plano. En concreto, ver que, en este ejemplo, la bola cerrada de centro $(0, 0)$ y radio 1 contiene, estrictamente, el cierre de la correspondiente bola abierta.

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que, para cada $a \in X$ y cada $r > 0$,

$$\mathbf{B}(a, r) \subset \left(\overline{\mathbf{B}}(a, r)\right)^{\circ}.$$

¿Puede el contenido ser propio?

Ejemplo:

¿Qué relación hay entre el cierre en la topología del subespacio y el cierre en la topología del espacio mayor?

PROPOSICIÓN.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Si consideramos en Y la topología de subespacio $\mathcal{T}_Y$, tenemos que, para todo $E \subset Y$, el cierre de E en la topología de subespacio de Y, es decir, en $\mathcal{T}_Y$, es $\overline{E} \cap Y$, donde $\overline{E}$ es el cierre de E en X, es decir, en la topología $\mathcal{T}$.

Demostración. Los cerrados de $(Y, \mathcal{T}_Y)$ son de la forma

$$Y \setminus B,\ B \in \mathcal{T}_Y,\ \text{es decir},\ Y \setminus (Y \cap A),\ A \in \mathcal{T};$$

Pero

$$Y \setminus (Y \cap A) = Y \cap \complement(Y \cap A) = Y \cap \left(\complement Y \cup \complement A\right) = Y \cap \complement A = Y \cap C,$$

donde C es un cerrado de $(X, \mathcal{T})$.

Entonces, puesto que el cierre de $E \subset Y$ en la topología de subespacio de Y, al que podemos llamar $\overline{E}^{(Y)}$, es la intersección de todos los cerrados de $(Y, \mathcal{T}_Y)$ que contienen a E, tenemos, denotando por $\mathcal{C}$ la colección de todos los cerrados de $(X, \mathcal{T}$,

$$\overline{E}^{(Y)} = \bigcap_{C \in \mathcal{C} \ni C \supset E} (Y \cap C) = Y \cap \left(\bigcap_{C \in \mathcal{C} \ni C \supset E} C \right) = Y \cap \overline{E}.$$

Ejercicio 27. ¿Existe una fórmula similar a la que acabamos de establecer

$$\overline{E}^{(Y)} = Y \cap \overline{E}$$

para el interior en lugar del cierre? Si crees que si, intenta probarla y, en caso contrario, busca un contraejemplo y trata de encontrar la clave para que el interior y el cierre se comporten, en este aspecto, de forma distinta.

Proposición: Propiedades del cierre.

i) $\forall A \subset X,\ A \subset \overline{A}$.

ii) $\forall A \subset X,\ \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

iii) $\forall A, B \subset X,\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

iv) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y

v) $A \subset X$ es cerrado $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Demostración.

Vemos iii). En primer lugar, se sigue de la definición que $C \subset D \Rightarrow \overline{C} \subset \overline{D}$. A partir de aquí, tenemos que

$$(\overline{A} \subset \overline{A \cup B}) \wedge (\overline{B} \subset \overline{A \cup B}) \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Pero, por otro lado, como $\overline{A} \cup \overline{B}$ es un cerrado que contiene a $A \cup B$, resulta que, también

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Resulta que, como en el caso del “interior”, las cuatro primeras propiedades de la proposición última caracterizan al operador “cierre”. En concreto, tenemos el resultado siguiente:

Teorema.

Sea X un conjunto y supongamos que damos una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{c} & \mathcal{P}(X) \\ A & \longmapsto & c(A) \end{array}$$

que cumple las cuatro propiedades siguientes

i) $\forall A \subset X,\ A \subset c(A)$.

ii) $\forall A \subset X,\ c(c(A)) = c(A)$.

iii) $\forall A, B \subset X,\ c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$.

iv) $c(\emptyset) = \emptyset$.

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\forall A \subset X,\ \overline{A} = c(A)$.

La estrategia es la misma que la que utilizamos para el caso del interior. Empezamos definiendo

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : \ c(A) = A\}$$

y nos ponemos a ver que $\mathcal{F}$ es, en efecto, la colección de cerrados de una topología en X.
1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ por iv). Y, dado que, por i), $X \subset c(X) \subset X$, queda claro que, también $X \in \mathcal{F}$.
2) Ahora vamos a ver que si tenemos una colección cualquiera de conjuntos $A_\alpha \in \mathcal{F}, \alpha \in J$, entonces, se cumple que $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathcal{F}$.
Lo primero es observar que, a partir de iii) resulta que

$$C \subset D \Rightarrow c(C) \subset c(D).$$

En efecto

$$C \subset D \Rightarrow C \cup D = D \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por } iii)} c(C) \cup c(D) = c(C \cup D) = c(D) \Rightarrow c(C) \subset c(D).$$

Entonces, volviendo a los A_α, tenemos

$$\forall \alpha \in J, \bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha \subset A_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in J, c\left(\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha\right) \subset c(A_\alpha)$$

$$\Rightarrow \bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha \subset c\left(\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in J} c(A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha$$

Y, finalmente, 3) Si tenemos $A, B \in \mathcal{F}$, comprobamos que $A \cup B \in \mathcal{F}$. En efecto:

$$c(A \cup B) = c(A) \cup c(B) = A \cup B.$$

Así tenemos ya una topología en X, constituida por los conjuntos $G \subset X$ que cumplen $c(\complement G) = \complement G$. Ahora hay que ver que, para dicha topología $\mathcal{T}$, se tiene que $\forall A \subset X,\ \overline{A} = c(A)$.
Como $c(c(A)) = c(A)$, vemos que $c(A)$ es un cerrado del espacio topológico. Como, además $c(A) \supset A$, queda claro que $c(A) \supset \overline{A}$. por otro lado, como $\overline{A}$ es cerrado, será $c(\overline{A}) = \overline{A}$. Pero

$$\overline{A} \supset A \Rightarrow \overline{A} = c(\overline{A}) \supset c(A).$$

En definitiva $c(A) = \overline{A}$, como queríamos demostrar.

Ejercicio 28. Demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{c} & \mathcal{P}(X) \\ A & \longmapsto & c(A) = \begin{cases} A \text{ si } A \text{ es finito} \\ X \text{ si } A \text{ es infinito} \end{cases} \end{array}$$

es el operador "cierre" para una cierta topología en X. Describir dicha topología.

Ejercicio 29. Demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{c} & \mathcal{P}(X) \\ A & \longmapsto & c(A) = \begin{cases} A \text{ si } A \text{ es numerable} \\ X \text{ si } A \text{ es no numerable} \end{cases} \end{array}$$

es el operador "cierre" para una cierta topología en X. Describir dicha topología.

¿Por qué se parecen tanto los teoremas que caracterizan al interior y al cierre? Hay una relación de dualidad entre las propiedades correspondientes, que se entiende muy bien cuando se expresa el cierre en términos del interior o viceversa. Para ello hay que hacer intervenir al operador "complementario". Vaámoslo.
Comenzamos por escribir la caracterización del cierre mediante entornos:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset.$$

Y ahora negamos los dos lados de la equivalencia, obteniendo una caracterización del complemento del cierre de A, que es lo que llamaremos exterior de A, denotándolo por $\mathrm{ext}(A)$.

$$x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x) \ni V \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x) \ni V \subset \complement A \Leftrightarrow x \in \left(\complement A\right)^{\circ}.$$

Podemos escribir

PROPOSICIÓN.

$$\mathrm{ext}(A) = \complement\overline{A} = \left(\complement A\right)^{\circ}, \quad \overline{A} = \complement\left(\left(\complement A\right)^{\circ}\right), \quad B^{\circ} = \complement\overline{\complement B}.$$

Ejercicio 30. Usar las fórmulas de la última proposición , junto con las leyes de De Morgan para pasar de una a otra de las dos fórmulas siguientes:

- $\forall A, B \subset X,\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$
- $\forall A, B \subset X,\ (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$

Cada vez que demos un conjunto A en un espacio topológico X, este conjunto nos permitirá clasificar todos los puntos de X en tres conjuntos disjuntos dos a dos, a saber:

- El interior de A, A° caracterizado por

$$x \in A^\circ \iff \exists V \in \mathcal{V}(x) \ \ni V \subset A.$$

- El exterior de A, $\mathrm{ext} A$ caracterizado por

$$x \in \mathrm{ext}(A) \iff \exists V \in \mathcal{V}(x) \ \ni V \subset \complement A$$

- Y, finalmente, este otro conjunto

$$\{x \in X :\ \forall V \in \mathcal{V}(x),\ (V \cap A \neq \emptyset) \wedge (V \cap \complement A \neq \emptyset)\}$$

¿Quién es el tercer conjunto? Por su caracterización está claro que se trata de $\overline{A} \cap \overline{\complement A}$. Para abreviar y para adaptarnos a la tradición, le llamaremos frontera de A y lo denotaremos por $\mathrm{Fr}(A)$.

DEFINICIÓN.

En un espacio topológico X, la frontera de A es, por definición, el conjunto

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement A}.$$

La clasificación de los puntos de X en relación con A que explicamos en la anterior transparencia puede escribirse ahora como

$$X = A^\circ \uplus \mathrm{Fr}(A) \uplus \mathrm{ext}(A).$$

Observemos que

$$\overline{A} = A^\circ \uplus \mathrm{Fr}(A) \quad \text{y} \quad \overline{\complement A} = \mathrm{Fr}(A) \uplus \mathrm{ext}(A).$$

Hay otra forma de describir el cierre de un conjunto que utiliza una noción importante, que merece la pena definir y aprender a manejar bien; la noción de punto de acumulación. Es habitual usar el término alternativo de "punto límite" y eso es, precisamente, lo que hace J. Munkres. Pero nosotros nunca lo haremos para no crear confusión. Otra denominación frecuente en inglés es "cluster point".

DEFINICIÓN.

Dados $E \subset X$ y $a \in X$, diremos que a es un punto de acumulación de E si todo entorno de a contiene algún punto de E distinto de a.
Denotaremos por E' el conjunto de todos los puntos de acumulación de E. Y diremos que E' es el conjunto derivado de E.
Vemos que

$$\overline{E} = E \cup E'.$$

PROPOSICIÓN.

E es cerrado si y sólo si $E' \subset E$.

DEFINICIÓN.

Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ dos espacios topológicos y sea $f : X \longrightarrow Y$.

- Diremos que f es continua en el punto $x_0 \in X$ si para cada entorno V de $f(x_0)$ en $(Y, \mathcal{S})$, es decir, $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, existe algún entorno U de x_0 en $(X, \mathcal{T})$, es decir, $U \in \mathcal{V}(x_0)$, tal que $f(U) \subset V$.
- Diremos, simplemente, que f es continua, si f es continua en cada punto $x_0 \in X$.

En la definición anterior, como $f(U) \subset V$ es lo mismo que $U \subset f^{-1}(V)$, decir que existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tal que $f(U) \subset V$ es, justamente, lo mismo que decir que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$, de modo que,

PROPOSICIÓN.

Para $f : X \longrightarrow Y$, las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

- f es continua en $x_0 \in X$.
- $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$.

PROPOSICIÓN.

Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicaciones entre espacios topológicos. Entonces,

- Si f es continua en $x_0 \in X$ y g es continua en $f(x_0) = y_0 \in Y$, se tiene que la composición $g \circ f : X \to Z$ es continua en x_0.
- Si f y g son continuas, $g \circ f$ es continua.

DEMOSTRACIÓN.

Dado $V \in \mathcal{V}((g \circ f)(x_0))$, hemos de ver que $(g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$. Pero $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y, como g es continua en $f(x_0) = y_0$ y $g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$, será $g^{-1}(V) \in \mathcal{V}(y_0) = \mathcal{V}(f(x_0))$. Y, usando ahora que f es continua en x_0, llegamos a que $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{V}(x_0)$, que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA.

Dados $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$, espacios topológicos y dada $f : X \longrightarrow Y$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1) f es continua.
2) $\forall x \in X,\ \forall V \in \mathcal{V}(f(x)),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$.
3) $\forall G \in \mathcal{S},\ f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$.
4) $\forall B \subset Y,\ f^{-1}(B^\circ) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$.
5) $\forall B \subset Y,\ f^{-1}(\,\overline{B}\,) \supset \overline{f^{-1}(B)}$.
6) $\forall A \subset X,\ f(\,\overline{A}\,) \subset \overline{f(A)}$.
7) $\forall C \in \mathcal{C}_Y,\ f^{-1}(C) \in \mathcal{C}_X$, donde $\mathcal{C}_Y$ y $\mathcal{C}_X$ denotan las familias de cerrados de $(Y, \mathcal{S})$ y $(X, \mathcal{T})$ respectivamente.

DEMOSTRACIÓN.

1) $\Rightarrow$ 2) es, sencillamente, la definición.
2) $\Rightarrow$ 3). Sea $G \in \mathcal{S}$ Para ver que $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$, empezamos tomando un $x \in f^{-1}(G)$. Entonces, $f(x) \in G \in \mathcal{S} \Rightarrow G \in \mathcal{V}(f(x))$. Por 2) sabemos que $f^{-1}(G) \in \mathcal{V}(x)$. Hemos visto, así, que $\forall x \in f^{-1}(G),\ f^{-1}(G) \in \mathcal{V}(x)$. Se sigue que $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$.
3) $\Rightarrow$ 4). Por 3), $B^\circ \in \mathcal{S} \Rightarrow f^{-1}(B^\circ) \in \mathcal{T}$. Pero, entonces, como $f^{-1}(B^\circ) \subset f^{-1}(B)$, se sigue que $f^{-1}(B^\circ) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$.
4) $\Rightarrow$ 5)

$$\begin{aligned}\overline{B} = \complement(\complement B)^\circ \Rightarrow f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(\complement(\complement B)^\circ) = \complement f^{-1}((\complement B)^\circ) \supset \complement(f^{-1}(\complement B))^\circ \\ = \complement(\complement f^{-1}(B))^\circ = \overline{f^{-1}(B)}.\end{aligned}$$

5) $\Rightarrow$ 6) $f^{-1}(\overline{f(A)}) \supset \overline{f^{-1}f(A)} \supset \overline{A}$. Se sigue que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
6) $\Rightarrow$ 7) Si $C \in \mathcal{C}_Y$, tenemos $C = \overline{C}$, de modo que $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subset \overline{ff^{-1}(C)} \subset \overline{C}$. O sea, $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(\overline{C}) = f^{-1}(C)$, de donde se sigue que $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$.
Que 7) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) es ya pura rutina.

Ejercicio 31. Demostrar que, para garantizar que $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ es continua, basta comprobar que para cada $G \in \Sigma$, siendo Σ una subbase de $\mathcal{S}$, $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$.

Ejercicio 32. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías sobre X. Entonces $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}'$ si y sólo si es continua la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}') \\ x & \longmapsto & x \end{array}.$$

Ejercicio 33. Se consideran los espacios topológicos $\mathbb{R}_u, \mathbb{R}_i$ y $\mathbb{R}_s$ que se definen sobre $\mathbb{R}$ con la topología usual, la topología del límite inferior (con base $\mathcal{B}_i = \{[a, b[, a < b\}$) y la tolología del límite superior (con base $\mathcal{B}_s = \{]a, b], a < b\}$), respectivamente.
Se pide decidir entre cuáles de estos espacios es la identidad una aplicación continua.

Para espacios métricos, la definición que hemos dado de aplicación continua coincide con la que se da habitualmente en Análisis en términos de los consabidos ε y δ, que tanto despistan a los principiantes.

PROPOSICIÓN.

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Sea $f : X \to Y$ una aplicación y sea $x_0 \in X$. Entonces f es continua en el punto x_0 si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \ni d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{4}$$

En Análisis es útil expresar la continuidad en términos de límites, como se refleja en los dos resultados siguientes. El primero utiliza límites de sucesiones y el segundo de funciones.

Proposición.

Para una aplicación f del espacio métrico (X, d_X) en el espacio métrico (Y, d_Y) son equivalentes las dos propiedades siguientes

- (a) f es continua en el punto $x_0 \in X$.
- (b) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X que converja a x_0, se tiene que la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ de puntos de Y, converge a $f(x_0)$.

Demostración. Para ver que $(a) \Longrightarrow (b)$, suponemos que f es continua en x_0. Entonces, dado ε, tenemos el correspondiente δ de la definición de continuidad. Ahora suponemos que la sucesión x_n converge a x_0 en X y queremos ver que $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$ en Y. Para ello tomamos ε; por ser f continua en x_0, la definición nos da el correspondiente δ y ahora, usando este δ, por ser $x_n \to x_0$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $d_X(x_n, x_0) < \delta$ y, por consiguiente, $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Con eso queda probado lo que queríamos.

Ver que $(b) \Longrightarrow (a)$ es lo mismo que ver que la negación de (a) implica la negación de (b). Así pues, suponemos que f no es continua en x_0 y buscamos una sucesión que converja a x_0 sin que su imagen converja a $f(x_0)$.
Por no ser f continua en x_0, sabemos que existe $\varepsilon > 0$, y, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$, tal que $d_X(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$ y, sin embargo, $d_Y(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$. Esta sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es, justo, lo que necesitábamos.

PROPOSICIÓN.

Sea f una aplicación del espacio métrico (X, d_X) en el espacio métrico (Y, d_Y) y sea $x_0 \in X'$. Entonces, las dos propiedades siguientes son equivalentes

(a) f es continua en el punto x_0.

(b) $f(x) \underset{x \to x_0,\ x \in X \setminus \{x_0\}}{\longrightarrow} f(x_0)$.

Observación. De estas dos últimas proposiciones, sólo la segunda continúa siendo válida para espacios topológicos generales. En realidad, es, sencillamente, la definición de límite.
En cambio, de la primera, sólo podemos asegurar que $a) \Rightarrow b)$ si cambiamos el espacio métrico X por un espacio topológico. La demostración del recíproco $b) \Rightarrow a)$ utiliza un hecho que no es cierto en un espacio topológico general. Y es que, en un espacio métrico, todo punto tiene una base de entornos numerable. En concreto, x_0 tiene como base de entornos $(\mathbf{B}(x_0, 1/n))_{n\in\mathbb{N}}$. Y es esta base de entornos la que hemos utilizado para ver que $(b) \Rightarrow a)$.

DEFINICIÓN.

Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ cumple el primer axioma de numerabilidad si cada $x \in X$ tiene una base de entornos $\mathcal{B}(x)$ que es numerable.

Ejercicio 34. Demostrar que, en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ que cumple el primer axioma de numerabilidad, se tiene que, para $E \subset X$,

$$x \in \overline{E} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ni (x_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N}) \wedge (x_n \to x).$$

Ejercicio 35. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ una aplicación entre espacios topológicos. Se pide

1) Ver que, si f es continua en $x_0 \in X$ y $x_n \to x_0$, entonces $f(x_n) \to f(x_0)$.
2) Ver que si, además $(X, \mathcal{T})$ cumple el primer axioma de numerabilidad, entonces la propiedad de que

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ni x_n \to x, \text{ se tiene que } f(x_n) \to f(x_0)$$

implica que f es continua en x_0.

Vamos a ver, con un ejemplo, que, en general, ni la continuidad ni el cierre de un conjunto se pueden caracterizar mediante sucesiones en espacios topológicos generales.

Ejercicio 36. Sobre $\mathbb{R}$ se consideran dos topologías: la topología usual $\mathcal{T}$ y la topología $\mathcal{T}_n$ de los complementos numerables.

a) Ver que el cierre de $]0,1[$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$ es todo $\mathbb{R}$ y que, sin embargo, ningún punto del complemento de $]0,1[$ es límite en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$ de una sucesión de puntos de $]0,1[$.

b) Ver que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_n) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

no es continua y que , sin embargo, si para una sucesión de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se cumple que $x_n \to x$ en $\mathcal{T}_n$, entonces, también se cumple que $x_n \to x$ en $\mathcal{T}$.

c) De cualquiera de los dos puntos anteriores se sigue que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_n)$ no satisface el primer axioma de numerabilidad. ¿Sabrías demostrar esta última conclusión directamente; es decir, a partir de la definición del primer axioma de numerabilidad?

Si queremos caracterizaciones del cierre o de la continuidad en espacios toopológicos generales, podemos conseguirlas con redes.

PROPOSICIÓN.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sean $x \in X$, y $E \subset X$. Entonces $x \in \overline{E}$ si y sólo si existe alguna red $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ tal que $(x_\alpha \in E \ \forall \alpha \in J) \wedge (x_\alpha \to x)$.

PROPOSICIÓN.

Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ una aplicación entre espacios topológicos. Y sea $x_0 \in X$. Entonces f es continua en x_0 si y sólo si para cada red $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ con $x_\alpha \in X \ \forall \alpha \in J$ y $x_\alpha \to x_0$, se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x_0)$.

DEFINICIÓN.

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos.
Diremos que la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \ni d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon. \tag{5}$$

Ejercicio 37: Decidir, razonadamente, cuáles de las aplicaciones siguientes son uniformemente continuas y cuáles no lo son. La métrica considerada en $\mathbb{R}$ y en sus subconjuntos es siempre la dada por el valor absoluto (que, desde luego, es una norma en $\mathbb{R}$).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}]1,2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}, \quad \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log x \end{array}, \quad \begin{array}{ccc}]1,\to[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log x \end{array}$$

Ejercicio 38. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $a \in X$. Demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(a, x) \end{array}$$

es uniformemente continua. En particular, ver que si $(X, \| \, \|)$ es un espacio normado, la norma

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

es una aplicación uniformemente continua.

Ejercicio 39. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $E \subset X$, se define la distancia de a a E, a la que denotaremos por $d(a, E)$ del modo siguiente:

$$d(a, E) = \inf\{d(a, z) : \; z \in E\}.$$

Demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, E) \end{array}$$

es uniformemente continua.
Sugerencia: Demostrar que

$$\forall x, y \in X, \; |d(x, E) - d(y, E)| \leq d(x, y).$$

PROPOSICIÓN.

Sean $(\mathbb{X}, \| \|_{\mathbb{X}})$ e $(\mathbb{Y}, \| \|_{\mathbb{Y}})$ espacios normados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ lineal. Entonces, son equivalentes las propiedades siguientes:

(*a*) T es continua,

(*b*) T es continua en 0,

(*c*) $\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq M\|x\|_{\mathbb{X}}\ \forall x \in \mathbb{X}$ y

(*d*) T es uniformemente continua.

DEMOSTRACIÓN.

- $(a) \Rightarrow (b)$ es obvio.
- $(b) \Rightarrow (c)$. $T(0) = 0$ y, sabemos que, dado $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, tal que $\|x\|_{\mathbb{X}} < \delta \Rightarrow \|T(x)\|_{\mathbb{Y}} < 1$. Entonces, dado $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, si tomamos $x' = \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{X}}}$, tenemos $\|x'\|_{\mathbb{X}} < \delta$, por lo que $\frac{\delta}{2}\frac{\|T(x)\|_{\mathbb{Y}}}{\|x\|_{\mathbb{X}}} = \|T(x')\|_{\mathbb{Y}} < 1$, de donde, $\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_{\mathbb{X}}$.
- $(c) \Rightarrow (d)$ es inmediato y $(d) \Rightarrow (a)$ es obvio.

COROLARIO.

Dos normas $\| \;\|$ y $\| \;\|'$ definidas sobre el espacio vectorial real o complejo $\mathbb{X}$ son equivalentes si y sólo si dan lugar a la misma topología.

Ejercicio 40. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\widetilde{d}} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \widetilde{d}(x, y) = \min(d(x, y), 1). \end{array}$$

Demostrar que $\widetilde{d}$ es una distancia en X que determina sobre X la misma topología que la distancia original d.
A $\widetilde{d}$ se le llama la medida acotada estándar ("standard bonded metric" en inglés) asociada a d.

DEFINICIÓN.

Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ dos espacios topológicos. Llamaremos homeomorfismo del espacio $(X, \mathcal{T})$ sobre el espacio $(Y, \mathcal{S})$ a cualquier aplicación biyectiva $f : X \to Y$ que cumple que, tanto f como su inversa f^{-1} son aplicaciones continuas.

A partir de la definición de continuidad, se ve inmediatamente que

$$f : X \to Y \text{ es homeomorfismo } \iff (\forall U \subset X,\ U \in \mathcal{T} \iff f(U) \in \mathcal{S}) .$$

Dos espacios topológicos son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

Se ve que la composición de homeomorfismos vuelve a ser homeomorfismo, de modo que si X es homeomorfo a Y e Y es homeomorfo a Z, se sigue que X es homeomorfo a Z.

Ejercicio 41. Ver que, para $f : X \to Y$ biyectiva, son equivalentes las propiedades siguientes

1) f es homeomorfismo
2) $\forall\ E \subset X,\ E$ es cerrado en $X \iff f(E)$ es cerrado en Y.
3) $\forall E \subset X,\ f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$.

DEFINICIÓN.

Las propiedades que se conservan por los homeomorfismos se dice que son propiedades topológicas.

Ejercicio 42. Demostrar que, si $a, b \in \mathbb{R}$, siendo $a < b$, entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc}]a, b[& \xrightarrow{f} &]0, 1[\\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \end{array}$$

es un homeomorfismo del intervalo abierto $]a, b[$ sobre el intervalo abierto $]0, 1[$.
Como consecuencia, resulta que todos los intervalos abiertos acotados de $\mathbb{R}$ son homeomorfos.
Ver que los rayos abiertos y el propio $\mathbb{R}$ son también homeomorfos a cualquier intervalo abierto.
¿Qué puedes decir de los intervalos cerrados?

Definición.

Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua e inyectiva entre espacios topológicos. Si la aplicación

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\widetilde{f}} & f(X) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

es un homeomorfismo del espacio X sobre el espacio topológico que se obtiene dando a $f(X)$ la topología de subespacio de Y, entonces diremos que f es una inclusión topológica de X en Y.
En inglés se usa la palabra "embedding" o "imbedding", que algunos autores traducen en español como "embebimiento topológico"(en la versión traducida del Munkres) o, incluso "encamamiento", dos términos nada recomendables. Otros autores usan "inmersión topológica", que no está mal; pero que nosotros, no utilizaremos.

Naturalmente, para que la aplicación continua e inyectiva $f : X \to Y$ sea una inclusión topológica hay que pedir que, para todo A abierto de Y,

$$\widetilde{f}^{-1}(f(X) \cap A) = \{x \in X : \ f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$$

sea un abierto de X.

Ejemplo 1. Sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$, la esfera unidad de $\mathbb{R}^2$, que vemos como un espacio topológico con la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$.
La aplicación

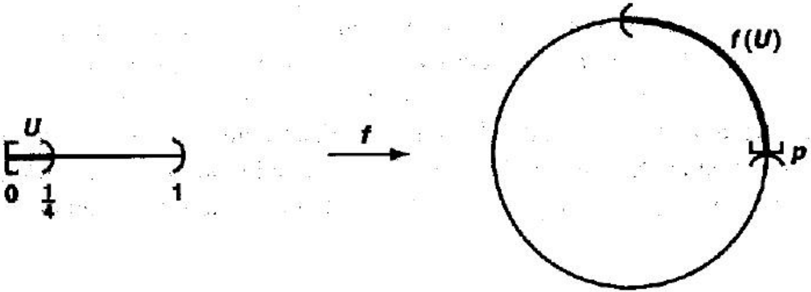
$$\begin{array}{ccc} [0,1[& \xrightarrow{f} & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi\imath t} = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t)) \end{array}$$

es continua y biyectiva; pero no es homeomorfismo. Por ejemplo $f([0, 1/4[)$ no es un abierto de S^1, puesto que $f(0) = (1, 0)$ no pertenece a ningún abierto de V de $\mathbb{R}^2$ tal que $V \cap S^1 \subset f([0, 1/4[)$.

Ejemplo 2. Como consecuencia del ejemplo anterior, la aplicación continua e inyectiva

$$\begin{array}{ccc} [0,1[& \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi\imath t} = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \end{array}$$

no es una inclusión topológica de $[0,1[$ en $\mathbb{R}^2$.



TEOREMA: REGLAS PARA CONSTRUIR FUNCIONES CONTINUAS.

Sean X, Y y Z espacios topológicos.

(*a*) (Aplicaciones constantes) Si $f : X \longrightarrow Y$ lleva cada punto de X a un mismo punto $y_0 \in Y$, entonces f es continua.

(*b*) (Inclusión) Si A es un subespacio de X, la inclusión $\begin{array}{ccc} A & \overset{j}{\hookrightarrow} & X \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ es continua.

(*c*) (Restricción del dominio) Si $f : X \to Y$ es continua y si A es un subespacio de X, entonces $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f|_A} & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ es continua.

(*d*) (Restringir o expandir el espacio de llegada) Sea $f : X \to Y$ continua. Si Z es un subespacio de Y que contiene a $f(X)$, entonces $\begin{array}{ccc} X & \overset{g}{\to} & Z \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ es continua. Y, por otra parte, si Z es un espacio topológico que tiene a Y como subespacio, también $\begin{array}{ccc} X & \overset{h}{\to} & Z \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ es continua.

Proposición: Formulación local de la continuidad.

$f : X \to Y$ es continua si existe una familia de abiertos $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ tal que $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ y, para cada $\alpha \in J$, $f|_{U_\alpha}$ es continua.

Lema del pegado o “pegamiento”(“pasting lemma” o “gluing lemma”).

Supongamos que el espacio topológico X se puede poner como $X = A \cup B$, siendo A y B cerrados. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ aplicaciones continuas en el espacio topológico Y. Si $\forall x \in A \cap B,\ f(x) = g(x)$, entonces, las dos aplicaciones f y g se pueden “pegar”para dar lugar a una función continua

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ x & \longmapsto & h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in B. \end{cases} \end{array}$$

La proposición y el lema se demuestran igual. Para la primera conviene usar la caracterización de la continuidad mediante abiertos y para la segunda, la caracterización mediante cerrados.
Para la proposición: Sea G un abierto de Y. Entonces

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{\alpha \in J} (f|_{U_\alpha})^{-1}(G).$$

Para cada $\alpha \in J$, por ser $f|_{U_\alpha}$ continua, $(f|_{U_\alpha})^{-1}(G)$ será un abierto de U_α y, por ser U_α abierto, $(f|_{U_\alpha})^{-1}(G)$ será también un abierto de X. Se sigue que la unión $f^{-1}(G)$ es un abierto.
Para el lema: Sea C un cerrado de Y.

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

Por ser f continua, $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y, por ser g continua en B, $g^{-1}(C)$ es cerrado en B. Puesto que cerrado en cerrado es cerrado, ambos conjuntos $f^{-1}(C)$ y $g^{-1}(C)$ son cerrados de X y su unión es cerrado.

Ejemplo: No se puede generalizar el lema del pegamiento a una colección infinita de cerrados, como prueba el ejemplo siguiente: Consideramos los subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A =]\leftarrow, 0], \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}.\ B_n = [1/n, \rightarrow [.$$

Desde luego,

$$\mathbb{R} = A \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Las aplicaciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g_n : B_n \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ dadas por

$$f(x) = x \text{ y } \forall n \in \mathbb{N},\ g_n(x) = x + 1\ \forall x \in B_n$$

son todas continuas y, sin embargo, determinan $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0, \\ x + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases},$$

que no es continua.
Para generalizar el lema del pegamiento a familias infinitas de cerrados hace falta imponer una condición adicional, que vemos a continuación.

Ejercicio 43. Sea $\mathcal{F} = (E_\alpha)_{\alpha \in J}$ una familia de conjuntos del espacio topológico X. Se dice que la familia $\mathcal{F}$ es localmente finita si cada punto $x \in X$ tiene algun entorno $V \in \mathcal{V}(x)$ que corta sólo a un número finito de conjuntos de $\mathcal{F}$; es decir, el conjunto

$$\{\alpha \in J : \ V \cap E_\alpha \neq \emptyset\}$$

es finito. Se pide

- Demostrar que, para una familia $\mathcal{F} = (E_\alpha)_{\alpha \in J}$ localmente finita de conjuntos de un espacio topológico, se cumple que

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in J} \overline{E_\alpha}$$

- Demostrar que la unión de una familia localmente finita de cerrados, es un cerrado.
- Usar el punto anerior para formular una versión del lema del pegado que valga para colecciones infinitas de cerrados.

Vimos que, dados dos espacios topológicos $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$, se puede definir una topología $\mathcal{T}$ sobre el producto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ de dos maneras, a saber

- Mediante la base
$$\mathcal{B} = \{A \times B : \ A \in \mathcal{T}_1, \ B \in \mathcal{T}_2\}.$$
- Utilizando las proyecciones
$$\begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \xrightarrow{\pi_1} & X_1 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_1 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_2 \end{array}$$
para formar la subbase
$$\Sigma = \{\pi_1^{-1}(A) : \ A \in \mathcal{T}_1\} \cup \{\pi_2^{-1}(B) : \ B \in \mathcal{T}_2\}.$$

Sucede que, por ser
$$\pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) = (A \times X_2) \cap (X_1 \times B) = A \times B,$$
los dos métodos conducen a la misma topología; que es la que hemos llamado topología producto $\mathcal{T}$.

Esta construcción del producto se extiende al caso de un número finito de espacios topológicos $(X_n, \mathcal{T}_n),\ n = 1, 2, \cdots, N$.

Proposición y definición.

Dados los espacios topológicos $(X_n, \mathcal{T}_n),\ n = 1, 2, \cdots, N$, la base $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{n=1}^{N} A_n :\ \forall n = 1, \cdots, N\ \ A_n \in \mathcal{T}_n \right\}$ y la subbase dada por las proyecciones
$$\begin{array}{rcl} X = \prod_{n=1}^{N} X_n & \xrightarrow{\pi_n} & X_n \\ (x_n)_{n=1}^{N} & \longmapsto & x_n \end{array}$$
mediante $\Sigma = \bigcup_{n=1}^{N} \left\{ \pi_n^{-1}(A_n) :\ A_n \in \mathcal{T}_n \right\}$ determinan sobre el producto cartesiano $X = \prod_{n=1}^{N} X_n$ la misma topología $\mathcal{T}$, a la que llamaremos topología producto de las $\mathcal{T}_n$. También diremos que $(X, \mathcal{T})$ es el espacio topológico producto de los espacios topológicos $(X_n, \mathcal{T}_n)$.

La clave es que, como en el caso de dos factores, se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(A_n) = \prod_{n=1}^{N} A_n.$$

Supongamos ahora que tenemos una familia numerable de espacios topológicos $(X_n, \mathcal{T}_n)$. Entonces nos encontramos con una situación nueva; porque, aunque las intersecciones finitas de conjuntos de la subbase son, desde luego, de la base, no todo conjunto de la base es una de estas intersecciones. Estas intersecciones finitas de ciertos $\pi_n^{-1}(A_n)$ son producto cartesiano de abiertos de los X_n pero con la limitación de que, excluyendo un número finito de subíndices, justo aquellos de la familia finita de partida, para todos los demás, el correspondiente factor es todo X_n. Es decir, para cada F subconjunto finito de $\mathbb{N}$,

$$\bigcap_{n\in F} \pi_n^{-1}(A_n) = \prod_{n\in\mathbb{N}} B_n \ \ni B_n = \begin{cases} A_n \text{ si } n \in F, \\ X_n \text{ si } n \notin F. \end{cases}$$

En este caso, los dos procedimientos que, en el caso anteriormente tratado de un número finito de espacios, daban la misma topología, conducen ahora a topologías no necesariamente iguales.
La topología generada por la base $\mathcal{B}$ es la topología de las cajas ("box topology" en inglés); mientras que la topología correspondiente a la subbase Σ asociada a las proyecciones π_n será a la que llamaremos topología producto. Las razones se verán más adelante.
Por el momento nos conformamos con señalar que

PROPOSICIÓN.

La topología de las cajas es más fina que la topología producto y puede ser, en general, estrictamente más fina.

Por ejemplo, si todos los espacios $(X_n, \mathcal{T}_n)$ son iguales a $\mathbb{R}$ con su topología usual, el producto cartesiano es el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formado por todas las sucesiones de números reales.
En $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ podemos considerar dos topologías: La topología de las cajas $\mathcal{T}_c$ y la topología producto $\mathcal{T}_p$.

En este ejemplo concreto, la topología de las cajas es estrictamente más fina que la topología producto: $\mathcal{T}_p \subsetneqq \mathcal{T}_c$. En efecto, consideremos la caja (producto cartesiano de intervalos abiertos).

$$B =]-1,1[^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} I_n, \text{ donde } \forall n \in \mathbb{N}, \; I_n =]-1,1[.$$

Es claro que B es abierto en la topología de las cajas y que no lo es en la topología producto. La sucesión constante $(0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ pertenece a B y no hay ningún entorno suyo en la topología producto que esté contenido en B. En efecto; para que sea $\prod_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset B$, tiene que cumplirse que $\forall n \in \mathbb{N}, \; B_n \subset I_n =]-1,1[$ y esto implica que, para cada B_n se tiene $B_n \subsetneqq X_n = \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN.

Dada una familia de conjuntos $X_\alpha, \ \alpha \in J$, siempre tiene sentido el producto cartesiano

$$\prod_{\alpha \in J} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in J} : \ \forall \alpha \in J, \ x_\alpha \in X_\alpha\},$$

donde $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ es, simplemente una aplicación

$$f : J \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha \ \ni \forall \alpha \in J, \ f(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha.$$

Para asegurar que

(6) $$\forall \alpha \in J, \ X_\alpha \neq \emptyset \Longrightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \neq \emptyset$$

necesitamos admitir el axioma de elección. De hecho, (6) es una formulación equivalente de dicho axioma.

Una vez que nos sentimos a gusto con la definición del producto cartesiano $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, si en cada X_α consideramos una topología $\mathcal{T}_\alpha$, podemos definir sobre X dos topologías asociadas a esta familia:

- La topología $\mathcal{T}_c$ de las cajas, que es la dada por la base

$$\mathcal{B} = \left\{ B = \prod_{\alpha \in J} B_\alpha : \ \forall \alpha \in J, \ B_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \right\}$$

  y

- la topología producto $\mathcal{T}_p$ determinada por las proyecciones

$$\begin{array}{ccc} X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha & \xrightarrow{\pi_\alpha} & X_\alpha \\ x = (x_\alpha)_{\alpha \in J} & \longmapsto & x_\alpha \end{array}$$

  mediante la subbase

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha \in J} \left\{ \pi_\alpha^{-1}(A), \ A \in \mathcal{T}_\alpha \right\}$$

Ejercicio 44. Sean $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in J$, espacios topológicos. Supongamos que, para cada $\alpha \in J,\ \mathcal{B}_\alpha$ es una base de la topología $\mathcal{T}_\alpha$. Se pide demostrar que

(*a*) La colección

$$\mathcal{B}_c = \left\{ \prod_{\alpha \in J} B_\alpha :\ \forall \alpha \in J,\ B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \right\}$$

es una base de la topología de cajas $\mathcal{T}_c$.

(*b*) La colección $\mathcal{B}_p$ formada por los conjuntos de $\mathcal{B}_c$ para los que $B_\alpha = X_\alpha$ para todo $\alpha \in J$ excepto para un número finito de ellos, es una base de la topología producto.

Ejercicio 45. Sean $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in J$, espacios topológicos. Supongamos que, para cada $\alpha \in J$, $Y_\alpha \subset X_\alpha$ y que consideramos en Y_α la topología que hereda como subespacio de X_α, a la que llamaremos $\mathcal{S}_\alpha$. Con las topologías $\mathcal{T}_\alpha,\ \alpha \in J$, generamos, sobre $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ las topologías $\mathcal{T}_c$ de las cajas y $\mathcal{T}_p$ del producto. Y en $Y = \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha$ hacemos lo propio con las topologías $\mathcal{S}_\alpha,\ \alpha \in J$, obteniendo la topología de cajas $\mathcal{S}_c$ y la de producto $\mathcal{S}_p$. Se pide demostrar que la topología $\mathcal{S}_c$ coincide con la topología de subespacio heredada de $\mathcal{T}_c$ y la topología $\mathcal{S}_p$ coincide con la topología de subespacio heredada de $\mathcal{T}_p$.

Ejercicio 46. Sean $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in J$, espacios topológicos. Supongamos que, para cada $\alpha \in J,\ E_\alpha \subset X_\alpha$. Demostrar, que tanto para la topología de cajas como para la topología producto,

$$\prod_{\alpha\in J} \overline{E_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in J} E_\alpha}.$$

PROPOSICIÓN.

Sean $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in J$, espacios topológicos. La topología producto $\mathcal{T}_p$ es la mínima topología sobre $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ que hace que las proyecciones

$$\begin{array}{rcl} X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha & \xrightarrow{\pi_\alpha} & X_\alpha \\ x = (x_\alpha)_{\alpha\in J} & \longmapsto & x_\alpha \end{array}$$

sean todas continuas.

Lo que hace particularmente útil a la topología producto es el resultado siguiente

Teorema.

Sean $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in J$, espacios topológicos. Formamos el producto cartesiano $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ en el que consideramos la topología producto $\mathcal{T}_p$ dada por las $\mathcal{T}_\alpha$. Si ahora consideramos otro espacio topológico $(Y, \mathcal{S})$ y una aplicación $f : Y \to X$, entonces

$$f : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T}_p) \text{ es continua} \iff \forall \alpha \in J,\ \pi_\alpha \circ f : (Y, \mathcal{S}) \to (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \text{ es continua.}$$

En otras palabras, si

$$f(y) = (f_\alpha(y))_{\alpha \in J},$$

$$f : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T}_p) \text{ es continua} \iff \forall \alpha,\ f_\alpha : (Y, \mathcal{S}) \to (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \text{ es continua.}$$

La implicación $\Rightarrow$ resulta inmediata del hecho de que la composición de aplicaciones continuas es continua.
Para probar la implicación en sentido contario, observamos que la continuidad de f_α implica que, para cada $A \in \mathcal{T}_\alpha$, $f_\alpha^{-1}(A) \in \mathcal{S}$. Pero

$$f_\alpha^{-1}(A) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(\pi_\alpha^{-1}(A)\right).$$

Vemos con esto que para todo abierto G de la subbase Σ de $\mathcal{T}_p$, se cumple que $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$, que basta para asegurar que f es continua.

Este resultado ya no es cierto, en general, si, en lugar de utilizar en el producto cartesiano la topología producto, utilizamos la topología de las cajas. Esto es natural, ya que la topología de las cajas es más fina. Añadir abiertos al espacio de llegada siempre tiene el peligro de estropear la continuidad. Veamos un ejemplo.

Ejemplo: Usando la misma notación del teorema, supongamos que, tanto $(Y, \mathcal{S})$ como todos los $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ son iguales a $\mathbb{R}$ con su topología usual.

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ t & \longmapsto & f(t) = (t, t, \cdots, t, \cdots) \end{array}$$

Está claro que todas las $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ son continuas, ya que todas son iguales a la identidad en $\mathbb{R}$.

Eso garantiza la continuidad de f si se dota a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la topología producto.

Sin embargo, si en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ponemos la topología de las cajas, f deja de ser continua. Veámoslo.

$$f(0) = (0, 0, \cdots, 0, \cdots).$$

Consideremos el siguiente entorno de $f(0)$ en la topología de las cajas

$$V = \prod_{n\in\mathbb{N}}]-1/n, 1/n[.$$

Resulta que

$$f^{-1}(V) = \{t \in \mathbb{R} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ t \in]-1/n, 1/n\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-1/n, 1/n[= \{0\},$$

que no es abierto en $\mathbb{R}$.
Algo como esto no puede pasar nunca con la topología producto, ya que sólo tendríamos que hacer la intersección de un número finito de intervalos.
Este ejemplo pone de manifiesto que la topología producto es la elección natural si uno quiere tener una caracterización de la continuidad basada en la continuidad de las proyecciones.

DEFINICIÓN.

Sea X un conjunto y sea $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$ una colección de espacios topológicos. Supongamos que, para cada $\alpha \in J$ tenemos una aplicación $g_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$. Entonces llamaremos topología inicial dada por la familia $g_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha,\ \alpha \in J$, a la topología **menos fina** que hace que todas las g_α sean continuas.

Dado que, cuantos más abiertos haya en X, más posibilidades habrá para que una aplicación sea continua; tiene sentido buscar aquella topología que hace continuas a las aplicaciones g_α empleando los menos abiertos posibles.

PROPOSICIÓN.

La topología inicial en X determinada por la colección de aplicaciones $g_\alpha : X \to (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ tiene como subbase $\Sigma = \bigcup_{\alpha\in J} \left\{g_\alpha^{-1}(A) :\ A \in \mathcal{T}_\alpha\right\}$

1) La topología producto en $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ obtenida a partir de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ de X_α, para cada $\alpha \in J$, es, justamente, la topología inicial que corresponde a la familia de las proyecciones

$$\begin{array}{ccc} X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha & \xrightarrow{\pi_\alpha} & X_\alpha \\ (x_\alpha)_{\alpha \in J} & \longmapsto & x_\alpha \end{array}$$

2) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico e $Y \subset X$, la topología del subespacio sobre Y no es más que la topología inicial dada en Y por la inclusión conjuntista $Y \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$.
Es un caso particular de la topología imagen recíproca que es la topología inicial asociada a una aplicación $Y \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ y en la que los abiertos son, justamente, los conjuntos de la forma $f^{-1}(A),\ A \in \mathcal{T}$.

3) Si tenemos definida sobre X una colección de topologías $\mathcal{T}_\alpha,\ \alpha \in J$, vemos que, en el conjunto ordenado de todas las topologías sobre X, donde el orden es la inclusión conjuntista, existe el supremo de la colección $(\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in J}$, que es la topología menos fina sobre X que es más fina que cada $\mathcal{T}_\alpha$.
Dado que decir que $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}_\alpha$ es lo mismo que decir que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{T}) & \xrightarrow{i_\alpha} & (X,\mathcal{T}_\alpha) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

es continua, vemos que el supremo de las topologías $\mathcal{T}_\alpha,\ \alpha \in J$ es, justamente, la topología inicial asociada a las aplicaciones i_α de arriba.

TEOREMA.

Sean $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ espacios topológicos y sea $\mathcal{T}$ la topolgía inicial determinada en el conjunto X por la familia de aplicaciones $g_\alpha : X \longrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),\ \alpha \in J$.
Sea $(Y, \mathcal{S})$ un espacio topológico y sea $f : Y \longrightarrow X$. Entonces, son equivalentes las propiedades siguientes

(a) $f : (Y, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua y

(b) $\forall \alpha \in J,\ g_\alpha \circ f : (Y, \mathcal{S}) \longrightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ es continua.

DEMOSTRACIÓN.

Es totalmente análoga a la que hicimos para la topología producto. La clave consiste en usar la caracterización de la continuidad con una subbase del nespacio de llegada; en este caso, $(X, \mathcal{T})$. Recordar el ejercicio 31.

DEFINICIÓN.

Dado un conjunto A, consideramos

$$\mathbb{R}^A = \{x : A \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Si $\widetilde{d}$ es la distancia acotada estándar de $\mathbb{R}$ dada por $d(s,t) = \min(1, |s-t|)$, definimos, para cada $x, y \in \mathbb{R}^A$,

$$\rho(x,y) = \sup\{\widetilde{d}(x(\alpha), y(\alpha)) : \ \alpha \in A\}$$

Ejercicio 47: Demostrar que ρ es una distancia en $\mathbb{R}^A$ y que una red $(x_j)_{j\in J}$ de puntos $x_j \in \mathbb{R}^A$ converge a un punto $x \in \mathbb{R}^A$ en la métrica ρ si y sólo si, para cada $\alpha \in A$, $x_j(\alpha) \to x(\alpha)$ en $\mathbb{R}$ y la convergencia es "uniforme" en α., es decir, se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists j_0 \in J \ \ni \forall j \geq j_0, \text{ y } \forall \alpha \in A, \ |x_j(\alpha) - x(\alpha)| < \varepsilon.$$

Por eso a esta distancia ρ y a la correspondiente topología que determina en $\mathbb{R}^A$ se les llama, respectivamente, métrica uniforme y topología uniforme o, también, topología de la convergencia uniforme.

TEOREMA.

La topología uniforme $\mathcal{T}_u$ sobre $\mathbb{R}^A$ es más fina que la topología producto $\mathcal{T}_p$ y menos fina que la topología de las cajas $\mathcal{T}_c$, es decir

$$\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_c.$$

Las tres topologías son diferentes cuando A es un conjunto infinito.

Demostración. Para ver que $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_u$ hay que ver que la identidad es una aplicación continua de $(\mathbb{R}^A, \mathcal{T}_u)$ en $(\mathbb{R}^A, \mathcal{T}_p)$. Pero esto equivale a ver que cada proyección

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^A, \mathcal{T}_u) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x(\alpha))_{\alpha \in A} & \longmapsto & x(\alpha) \end{array}$$

es continua. Y esto es obvio, ya que

$$\widetilde{d}(x(\alpha), y(\alpha)) \leq \rho(x, y).$$

En cuanto a $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_c$ resulta inmediatamente de que, si llamamos $\mathbf{B}(x, r)$ a la bola abierta de centro x y radio r del espacio métrico $\mathbb{R}^A, \rho)$, tenemos, para $r < 1$,

$$\prod_{\alpha \in A}]x(\alpha) - r, x(\alpha) + r[.$$

Para ver que las tres topologías son diferentes si A es infinito, tomamos $A = \mathbb{N}$ y vemos que

$$\prod_{n \in \mathbb{N}}] - 1/n, 1/n[\in \mathcal{T}_c \setminus \mathcal{T}_u.$$

Y

$$]0, 1[^{\mathbb{N}} \in \mathcal{T}_u \setminus \mathcal{T}_p.$$

TEOREMA.

Un producto de una familia numerable de espacios metrizables, es metrizable.

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos una familia numerable de espacios métricos (X_n, d_n). En cada uno de ellos podemos cambiar a la correspondiente distancia acotada estándar $\widetilde{d_n}$. Pues bien, si para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definimos

$$d(x,y) = \sup\left\{\frac{\widetilde{d_n}(x_n,y_n)}{n}\right\} \text{ o bien } d'(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\widetilde{d_n}(x_n,y_n)}{2^n},$$

vemos que, tanto d como d' son distancias que definen en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ la topología producto.

Ya hemos definido antes un axioma de numerabilidad: el primero. Lo recordamos aquí.

DEFINICIÓN.

Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ cumple el primer axioma de numerabilidad (IAN) si cada $x \in X$ tiene una base de entornos $\mathcal{B}(x)$ que es numerable.

Ahora introducimos una propiedad mucho más fuerte.

DEFINICIÓN.

Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ cumple el segundo axioma de numerabilidad (IIAN) si tiene una base $\mathcal{B}$ que es numerable.

Dado que los abiertos de la base $\mathcal{B}$ que contienen al punto x forman una base local en x, $\mathcal{B}(x)$, se tiene que

PROPOSICIÓN.

Si un espacio satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces también satiface el primero. Sin embargo, vamos a ver que existen espacios métricos que no cumplen el segundo axioma de numerabilidad.

Ejemplo 1. $\mathbb{R}$ con su topología usual es IIAN, ya que la colección de intervalos con extremos racionales es una base numerable de la topología. En general, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ con su topología usual, que es la topología producto, dada por la distancia euclídea, es IIAN; puesto que la colección de las bolas abiertas con centro de coordenadas racionales y radio racional forman una base numerable de la topología.

Ejemplo 2. Incluso si ponemos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la topología producto, el espacio que resulta, que hemos visto ya que es metrizable, es también IIAN. En efecto, la colección formada por los conjuntos $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ donde todos los U_n salvo un número finito son iguales a $\mathbb{R}$ y el resto son intervalos abiertos de extremos racionales, es una base de la topología.

Ejemplo 3. Consideremos ahora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología uniforme, que sabemos que es metrizable, de modo que cumple el IAN. Vamos a ver que, sin embargo, no cumple el IIAN. En efecto, observamos que si un espacio tiene una base de abiertos numerable; entonces, cualquier subespacio discreto, ha de ser numerable. En efecto, para cada punto del subespacio, existe un abierto de la base cuya intersección con el subespacio se reduce a dicho punto. Por consiguiente, el subespacio es numerable.
Usando esta observación vamos a ver que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología uniforme no es IIAN. La razón es que si consideramos el subespacio formado por las sucesiones formadas únicamente por ceros y unos, tenemos un subespacio no numerable que hereda la topología discreta. Y hereda la topología discreta porque para cada par de sucesiones a, b distintas

$$\rho(a, b) = \sup\{\widetilde{d}(a(n), b(n)) : \; n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

Ejercicio 48. Demostrar que si un espacio topológico tiene una subbase numerable; entonces cumple el IIAN.

PROPOSICIÓN.

- Un subespacio de un espacio topológico que cumple el IAN, cumple, también, el IAN.
- Un producto de una colección numerable de espacios topológicos que cumplen el IAN, cumple, también, el IAN.
- Un subespacio de un espacio topológico que cumple el IIAN, cumple, también, el IIAN.
- Un producto de una colección numerable de espacios topológicos que cumplen el IIAN, cumple, también, el IIAN.

DEMOSTRACIÓN.

Basta probar que la topología inicial dada por una colección numerable de aplicaciones que van a parar a espacios que cumplen el IAN (respectivamente el IIAN), cumple también el IAN (respectivamente el IIAN).
Para el IIAN el resultado se sigue aplicando el ejercicio 48. Y para el IAN, la demostración es similar.

DEFINICIÓN.

Se dice que un subconjunto A de un espacio topológico X es denso en X si $\overline{A} = X$.

Teorema

Sea X un espacio topológico que cumple el IIAN. Entonces, X cumple también la dos propiedades siguientes:

(*a*) Todo recubrimiento de X por abiertos contiene un subrecubrimiento numerable.

(*b*) Existe un subconjunto numerable de X que es denso en X.

Demostración. Sea $\{B_n\}$ una base numerable de X.

(*a*) Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ para el que sea posible, elegimos un abierto A_n de $\mathcal{A}$ que contenga a B_n. La familia de los A_n así obtenidos, a la que llamaremos $\mathcal{A}'$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{A}$, ya que está indexada por un subconjunto $J \subset \mathbb{N}$. Veamos, ahora que $\mathcal{A}'$ recubre a X. Sea $x \in X$. Podemos elegir $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como A es abierto, existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_n \subset A$. Puesto que B_n está contenido en un abierto de $\mathcal{A}$, se sigue que $n \in J$, de modo que A_n está bien definido. Y tenemos $x \in B_n \subset A_n$. Así queda visto que $\mathcal{A}'$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{A}$ que recubre X.

(*b*) Elijamos, para cada n, $x_n \in B_n$. Entonces, el conjunto D formado por los x_n que hemos elegido, es denso en X. En efecto, dado $x \in X$ y dado $V \in \mathcal{V}(x)$, será $x \in B_n \subset V$ para algún n. Entonces $V \cap D \supset B_n \cap D \neq \emptyset$, de modo que queda probado que $x \in \overline{D}$.

En realidad, las propiedades (a) y (b) de arriba, se consideran como axiomas de numerabilidad que un espacio topológico puede o no cumplir.

DEFINICIÓN

- Un espacio topológico en el que todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento numerable se dice que es un espacio de Lindelöf, en honor del matemático finlandés Ernst Lindelöf (1870-1946).
- Un espacio que contiene un subconjunto denso numerable se dice que es separable. Es una pena que esta desafortunada denominación se haya consolidado y haya que mantenerla. Es importante no confundir separable con separado, que es lo mismo que "de Hausdorff".

Ejercicio 49. Sea X un espacio métrico. Demostrar que

$$X \text{ es separable } \iff X \text{ es de Lindelöf } \iff X \text{ satisface el IIAN.}$$

Ejemplo 1: El espacio $\mathbb{R}_i$, al que a veces se denota también como $\mathbb{R}_{[\ [}$ y que resulta de dotar a $\mathbb{R}$ de la topología del límite inferior $\mathcal{T}_i$, con base de abiertos $\mathcal{B}_i = \{[a,b[,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ satisface todos los axiomas de numerabilidad con excepción del segundo.

- Para un punto $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(x) = \{[x, x+1/n[:\ n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema fundamental de entornos de x en $\mathbb{R}_i$, de forma que $\mathbb{R}_i$ cumple el IAN.
- El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}_i$, de modo que $\mathbb{R}_i$ es separable.
- Sin embargo, $\mathbb{R}_i$ no cumple el IIAN. En efecto. Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}_i$, para cada $x \in \mathbb{R}$, podemos escoger $B_x \in \mathcal{B}$ de modo que sea $x \in B_x \subset [x, x+1[$. Si $x \neq y$, vemos que $B_x \neq B_y$, ya que $x = \inf B_x$ e $y = \inf B_y$. Se sigue que $\mathcal{B}$ no es numerable. Y, por consiguiente, $\mathbb{R}_i$ no es IIAN.

- Demostrar que $\mathbb{R}_i$ es Lindelöf lleva algo de trabajo: Primero observamos que, para ver que un espacio es de Lindelöf, basta demostrar que todo recubrimiento por abiertos de una determinada base tiene un subrecubrimiento numerable. Sea pues $\mathcal{A} = \{[a_\alpha, b_\alpha[\}_{\alpha\in J}$ un recubrimiento de $\mathbb{R}$. Queremos encontrar un subrecubrimiento numerable. Primero nos fijamos en $C = \bigcup\limits_{\alpha\in J}]a_\alpha, b_\alpha[$ y vamos a ver que $\mathbb{R}\setminus C$ es numerable. Sea $x \in \mathbb{R}\setminus C$. Como x no pertenece a ninguno de los intervalos $]a_\alpha, b_\alpha[$, se sigue que $x = a_\beta$ para algún $\beta \in J$. Elijamos un tal β y sea $q_x \in \mathbb{Q}$ tal que $q_x \in]a_\alpha, b_\alpha[$. Vemos que $]a_\beta, q_x[\subset]a_\beta, b_\beta[\subset C$. Se sigue que si x, y son dos puntos de $\mathbb{R}\setminus C$ con $x < y$, entonces $q_x < q_y$, ya que, de otro modo, tendríamos $x < y < q_y \leq q_x$, que implica que $y \in]x, q_x[\subset C$, que no es cierto. Así pues, la aplicación $x \mapsto q_x$ es inyectiva de $\mathbb{R}\setminus C$ en $\mathbb{Q}$, de modo que queda probado que $\mathbb{R}\setminus C$ es numerable.

Ahora ya podemos encontrar un subrecubrimiento numerable de $\mathcal{A}$. Primero elegimos, para cada elemento de $\mathbb{R} \setminus C$, un conjunto de $\mathcal{A}$ que lo contenga. Así resulta una colección numerable $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Después, para C encontramos una colección numerable de los $]a_\alpha, b_\alpha[$ que lo cubre (¿por qué podemos hacerlo?) y luego tomamos los correspondientes $[a_\alpha, b_\alpha[$, que, también cubrirán a C. Tenemos así una segunda colección también numerable $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$. La colección numerable $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ es la que buscábamos, ya que cubre todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2: El producto de dos espacios de Lindelöf no es, necesariamente, de Lindelöf. En efecto, sabemos que $\mathbb{R}_i$ es un espacio de Lindelöf. Vamos a ver que, sin embargo, $\mathbb{R}_i^2$ no lo es. Este producto es un espacio muy usado en Topología, que se conoce como plano de Sorgenfry.
Para ver que $\mathbb{R}_i^2$ no es de Lindelöf, comenzamos observando que el conjunto

$$L = \{(x, -x) : \; x \in \mathbb{R}\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}_i^2$.

Consideramos el recubrimiento

$$\mathbb{R}^2_i = \mathbb{R}^2_i \setminus L \cup \bigcup_{a\in\mathbb{R}} [a, a+1[\times[-a, -a+1[.$$

Está claro que no podemos quitar ningún $[a, a+1[\times[-a, -a+1[$, ya que ese es el único conjunto del recubrimiento que contiene a $(a, -a)$. Así pues, este recubrimiento, no tiene ningún subrecubrimiento numerable.

Ejercicio 50. Demostrar que

- La imagen continua de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.
- Todo subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf, aunque un subespacio que no sea cerrado de un espacio de Lindelöf puede no ser de Lindelöf.

TEOREMA.

(a) La imagen continua de un espacio separable es separable.

(b) Los subespacios de espacios separables no tienen por qué ser separables. Sin embargo, un subespacio abierto de un espacio separable es separable.

(c) Un producto de espacios de Hausdorff, cada uno de los cuales tiene, al menos, dos puntos, es separable si y sólo si cada factor es separable y hay, a lo sumo, $2^{\aleph_0}$ factores.

Demostración. (b) Sobre el semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq o\}$ se da una topología en la que los entornos básicos de los puntos (x, y) con $y > 0$ son los discos abiertos de centro (x, y) contenidos en el semiplano y, en cambio, para $(x, 0)$ un entorno básico es la unión de $\{(x, 0)\}$ con un disco abierto tangente al eje x en $(x, 0)$. Este es el "plano de Moore", que es separable. Y, sin embargo, el subespacio formado por el eje x es discreto y, por consiguiente, no separable.

$(c) \Rightarrow$ Supongamos que $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es separable. Como cada proyección π_α es continua, se sigue de (a) que cada $X_\alpha = \pi_\alpha(X)$ es separable. Queda por ver que $|J| \leq 2^{\aleph_0}$. Para cada $\alpha \in J$, sean U_α y V_α abiertos no vacíos y disjuntos en X_α. Sea D un subconjunto denso numerable de X. Para cada α, sea $D_\alpha = D \cap \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Entonces, $D_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in J$ y para dos índices, $\alpha, \beta \in J$ tales que $\alpha \neq \beta$, $D_\alpha \neq D_\beta$ ya que los puntos de $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ que pertenecen a D, pertenecerán a D_α y no a D_β. Así pues, la aplicación $F : J \to \mathcal{P}(D)$ definida por $F(\alpha) = D_\alpha$ es inyectiva, de modo que

$$|J| \leq |\mathcal{P}(D)| = 2^{\aleph_0}.$$

$\Leftarrow$ Supongamos que, en cada X_α tenemos un subconjunto denso numerable $D_\alpha = \{d_{\alpha 1}, d_{\alpha 2}, \cdots\}$. Como $|J| \leq 2^{\aleph_0}$, podemos suponer que $J \subset I = [0,1]$. Para cada familia finita $J_1, \cdots, J_k$ de intervalos cerrados de I disjuntos y con extremos racionales y cada familia de números naturales $n_1, \cdots, n_k$, definimos un punto $p(J_1, \cdots, J_k; n_1, \cdots, n_k) \in X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ del modo siguiente

$$p_\alpha = \begin{cases} d_{\alpha n_i} \text{ si } \alpha \in J_i \\ d_{\alpha 1} \text{ en otro caso} \end{cases} .$$

El conjunto D que hemos definido es numerable. Y, además, vamos a ver que es denso. Un abierto básico de X es de la forma

$$B = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m}),$$

donde U_{α_i} es abierto en X_{α_i}, $i = 1, \cdots, m$. Cada U_{α_i} contiene un punto $d_{\alpha_i n_i}$ de D_{α_i} y existen intervalos cerrados de extremos racionales disjuntos $J_1, \cdots, J_m$ que contienen, respectivamente, los puntos $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$. El punto $p(J_1, \cdots, J_m; n_1, \cdots, n_m)$ pertenece a B puesto que $p_{\alpha_i} = d_{\alpha_i n_i}$, $i = 1, \cdots, m$. Por tanto, D es denso.

PROPOSICIÓN Y DEFINICIÓN.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Consideramos el conjunto cociente $X/\mathcal{R}$, cuyos elementos son las clases de equivalencia $\mathcal{R}(x),\ x \in X$, donde

$$\forall x \in X,\ \mathcal{R}(x) = \{y \in X :\ x\mathcal{R}y\}.$$

Tenemos la proyección canónica

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/\mathcal{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{R}(x). \end{array}$$

Entonces la colección de subconjuntos de $X/\mathcal{R}$

$$\mathcal{T}_\pi = \{U \subset X/\mathcal{R} :\ \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en $X/\mathcal{R}$ a la que llamaremos topología cociente.

También diremos que $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\pi)$ es el espacio topológico cociente de $(X, \mathcal{T})$ por la relación de equivalencia $\mathcal{R}$.

Demostración.

- $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_\pi$. $\quad \pi^{-1}(X/\mathcal{R}) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow X/\mathcal{R} \in \mathcal{T}_\pi$.
- $U_\alpha \in \mathcal{T}_\pi \ \forall \alpha \in J \Rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T} \ \forall \alpha \in J \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} \pi^{-1}(U_\alpha) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha\right) \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{T}_\pi$.
- $A, B \in \mathcal{T}_\pi \Rightarrow \pi^{-1}(A), \pi^{-1}(B) \in \mathcal{T} \Rightarrow \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(A \cap B) \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}_\pi$.

Corolario.

En el espacio cociente $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\pi)$, donde π es la proyección canónica $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/\mathcal{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{R}(x). \end{array}$, $E \subset X/\mathcal{R}$ es cerrado $\iff \pi^{-1}(E)$ es cerrado en X.

PROPOSICIÓN.

La topología cociente $\mathcal{T}_\pi$ en $X/\mathcal{R}$ es la topología más fina que hace continua la proyección canónica $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/\mathcal{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{R}(x). \end{array}$.

DEFINICIÓN.

Una aplicación entre espacios topológicos $f : X \to Y$ se dice que es abierta si para cada abierto A de X, $f(A)$ es un abierto de Y. Y se dice que es cerrada si para cada cerrado C de X, $f(C)$ es un cerrado de Y.

El siguiente ejercicio muestra que, cuando se considera la topología cociente en $X/\mathcal{R}$, la proyección canónica $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ no tiene por qué ser ni abierta ni cerrada.

Ejercicio 51. En el intervalo $[0,1]$ con su topología usual damos la siguiente relación de equivalencia:

$$x\mathcal{R}y \iff \{(x,y<1/2)\vee(x,y\geq 1/2)\}.$$

Demostrar que el espacio cociente resultante es homeomorfo al espacio de Sierpinski; es decir, a un espacio formado por dos puntos, uno de los cuales es abierto y el otro cerrado. Ver que la proyección no es ni abierta ni cerrada.

DEFINICIÓN.

Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en el conjunto X, para cada $A\subset X$, se llama saturación de A o conjunto saturado de A al conjunto

$$\pi^{-1}(\pi(A))=\{x\in X:\ \exists a\in A\ni x\mathcal{R}a\},$$

donde π es la proyección canónica

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/\mathcal{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{R}(x). \end{array}.$$

Proposición.

Para que la proyección canónica

$$\begin{array}{ccc} (X,\mathcal{T}) & \xrightarrow{\pi} & (X/\mathcal{R},\mathcal{T}_\pi) \\ x & \longmapsto & \mathcal{R}(x). \end{array}$$

sea una aplicación abierta (respectivamente cerrada) es necesario y suficiente que el conjunto saturado de cada abierto (respectivamente, cerrado) sea abierto (respectivamente, cerrado). Se dice entonces que la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ es abierta (respectivamente, cerrada).

Proposición.

Sea $X/\mathcal{R}$ un espacio cociente del espacio topológico X y sea $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la correspondiente proyección canónica. Sea Y otro espacio topológico. Entonces

$$g : X/\mathcal{R} \longrightarrow Y \text{ es continua } \iff g \circ \pi : X \longrightarrow Y \text{ es continua.}$$

Proposición.

Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en el espacio topológico X y sea $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proyección canónica correspondiente. Supongamos que tenemos una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ que es constante en cada clase de equivalencia $\mathcal{R}(x),\ x \in X$. Entonces, existe una única aplicación $\widetilde{f} : X/\mathcal{R} \longrightarrow Y$ tal que $\widetilde{f} \circ \pi = f$. Y, además, dicha aplicación $\widetilde{f}$ es continua.

Por otro lado $\widetilde{f}$ es abierta (respectivamente, cerrda) si y sólo si $f(U)$ es abierto (respectivamente, cerrado) para cada U abierto (respectivamente, cerrado) saturado de X.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\mathcal{R} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

1.- **La circunferencia (o esfera unidimensional $\mathbb{S}^1$) se obtiene identificando (o sea, "pegando") los extremos de un intervalo.**
Llevamos $I = [0, 1]$ sobre $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$ mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi\imath t} = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \end{array}$$

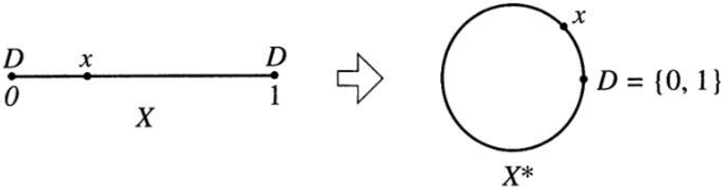
Definimos una relación de equivalencia en I identificando los puntos en los que f toma el mismo valor

$$t\mathcal{R}t' \iff f(t) = f(t').$$

Esta relación nos da, para cada $t \notin \{0, 1\}$, $\mathcal{R}(t) = \{t\}$ y $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}(1) = \{0, 1\}$.
Esto implica, que, al pasar al cociente, la aplicación $\widetilde{f}$ es biyectiva.

Desde luego, $\widetilde{f}$ es continua; pero, además es abierta, ya que cualquier abierto A **saturado** que contenga a un extremo, ha de contener intervalos $[0, \varepsilon[$ y $]1-\delta, 1]$ para ciertos $\delta, \varepsilon > 0$. Y esto garantiza que $f(A)$ contiene un arco abierto que contiene a $f(0) = (1, 0)$. Por ser continua y abierta, la biyección $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^1 \\ & I/\mathcal{R} \arrow[ur, "\approx", "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$



2.- **Construcción de un cilindro identificando punto a punto los lados verticales de un cuadrado.**

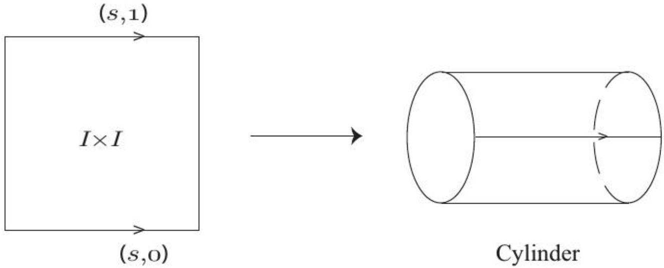
Llevamos $I^2 = I \times I$ sobre el cilindro $I \times \mathbb{S}^1$ mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{f} & I \times \mathbb{S}^1 \\ (s,t) & \longmapsto & (s, e^{2\pi\imath t}) = (s, \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \end{array}$$

Definimos una relación de equivalencia en I^2 identificando los puntos en los que f toma el mismo valor

$$(s,t)\mathcal{R}(s',t') \Longleftrightarrow f(s,t) = f(s',t').$$

Esta relación nos da, para cada (s,t) tal que $0 < t < 1$, $\mathcal{R}(s,t) = \{(s,t)\}$ y, para todo $s \in I$, $\mathcal{R}(s,0) = \mathcal{R}(s,1) = \{(s,0),\ (s,1)\}$. Esto implica, que, al pasar al cociente, la aplicación $\widetilde{f}$ es biyectiva.



$\widetilde{f}$ es continua; pero, además es abierta, ya que cualquier abierto A de I^2 que sea **saturado** contiene entornos de $(s,0)$ y $(s,1)$ cuya imagen conjunta contiene un entorno de $(s,1,0)$. Y esto garantiza que $f(A)$ es entorno de $f(s,0)=f(s,1)=(s,1,0)$. Por ser continua y abierta, la biyección $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^1 \times I \\ & I^2/\mathcal{R} \arrow[ur, "\approx", "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

3.- **Construcción de un toro identificando punto a punto tanto los lados verticales como los horizontales de un cuadrado.**
Podemos ver el toro, simplemente como $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
Llevamos $I^2 = I \times I$ sobre el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (s,t) & \longmapsto & (e^{2\pi\imath s}, e^{2\pi\imath t}) \end{array}$$

Definimos una relación de equivalencia en I^2 identificando los puntos en los que f toma el mismo valor

$$(s,t)\mathcal{R}(s',t') \Longleftrightarrow f(s,t) = f(s',t').$$

Esta relación nos da, para cada (s,t) tal que $0 < s < 1$, $\mathcal{R}(s,t) = \{(s,t)\}$, para todo $t \in]0,1[$, $\mathcal{R}(0,t) = \mathcal{R}(1,t) = \{(0,t),\ (1,t)\}$, para todo $s \in]0,1[$, $\mathcal{R}(s,0) = \mathcal{R}(s,1) = \{(s,0),\ (s,1)\}$ y, finalmente $\mathcal{R}(0,0) = \mathcal{R}(0,1) = \mathcal{R}(1,1) = \mathcal{R}(1,0)$. Al pasar al cociente, la aplicación $\widetilde{f}$ es biyectiva.

$\widetilde{f}$ es continua; pero, además es abierta, ya que, para cualquier abierto A de I^2 que sea **saturado**, $f(A)$ es abierto, como se ve analizando las tres situaciones posibles. Por ser continua y abierta, la biyección $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & I^2/\mathcal{R} \arrow[ur, "\approx", "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Alternativamente, podemos definir el toro $\mathbb{T}^2$ como la imagen de la aplicación

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} (1+(1/2)\cos(2\pi t))\cos(2\pi s) \\ (1+(1/2)\cos(2\pi t))\,\mathrm{sen}(2\pi s) \\ \mathrm{sen}(2\pi s) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 52. Ver que, si definimos una relación de equivalencia en I^2 identificando los puntos en los que f toma el mismo valor

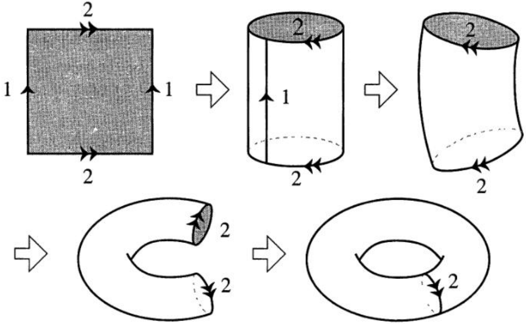
$$(s,t)\mathcal{R}(s',t') \iff f(s,t) = f(s',t'),$$

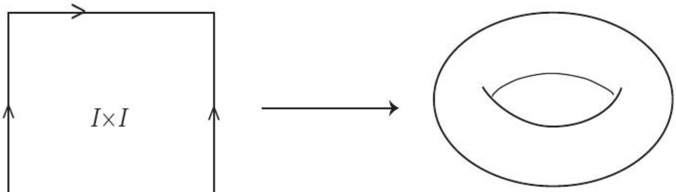
obtenemos las clases de equivalencia siguientes:

- para todo $t \in]0,1[$, $\mathcal{R}(0,t) = \mathcal{R}(1,t) = \{(0,t),\ (1,t)\}$.
- para todo $s \in]0,1[$, $\mathcal{R}(s,0) = \mathcal{R}(s,1) = \{(s,0),\ (s,1)\}$ y, finalmente
- $\mathcal{R}(0,0) = \mathcal{R}(0,1) = \mathcal{R}(1,1) = \mathcal{R}(1,0)$.

Es decir, justamente la misma relación que teníamos cuando veíamos el toro como $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Podemos poner, ahora

$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{T}^2 \\ & I^2/\mathcal{R} \arrow[ur, "\approx", "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

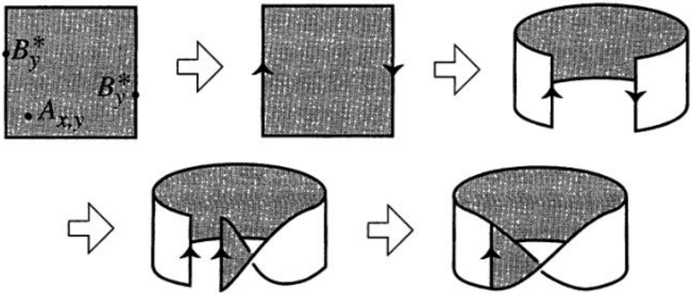


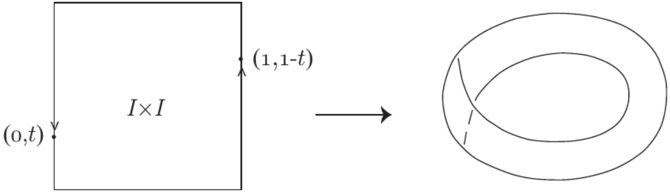


Torus

4.- **Construcción de la banda de Möbius.**
La banda (o cinta) de Möbius es la superficie que genera un segmento que se mueve de modo que su punto medio se desliza uniformemente por una circunferencia mientras el segmento, que se mantiene siempre perpendicular a la circunferencia gira, también uniformemente, un total de 180 grados hasta que el punto medio vuelve a su posición original después de una vuelta.

Un modelo de la banda de Möbius se puede construir pegando los extremos verticales de una banda rectangular de papel después de haberle dado media vuelta (180 grados), como se puede ver en la figura siguiente





Möbius Band

Partiendo de la descripción dinámica podemos definir la banda de Möbius M como la imagen de la aplicación

$$\begin{array}{ccc} I^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} (1+((t-(1/2))/2)\cos(\pi s))\cos(2\pi s) \\ (1+((t-(1/2))/2)\cos(\pi s))\operatorname{sen}(2\pi s) \\ ((t-(1/2))/2)\operatorname{sen}(\pi s) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 53. Ver que, si definimos una relación de equivalencia en I^2 identificando los puntos en los que f toma el mismo valor

$$(s,t)\mathcal{R}(s',t') \Longleftrightarrow f(s,t)=f(s',t'),$$

obtenemos las clases de equivalencia siguientes:

- Si $0<s<1,\ \mathcal{R}(s,t)=\{(s,t)\}\ \forall t\in I.$
- $\forall t\in I,\ \mathcal{R}(0,t)=\mathcal{R}(1,1-t)=\{(0,t),(1,1-t)\}.$

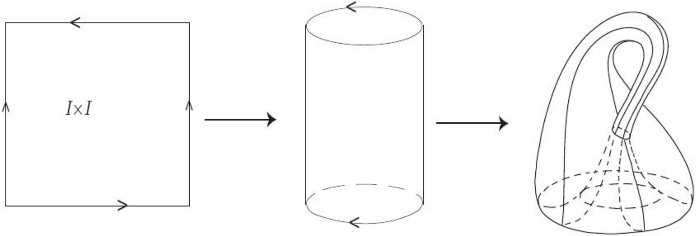
Al pasar al cociente, la aplicación $\widetilde{f}$ es biyectiva.
$\widetilde{f}$ es continua; pero, además es abierta, ya que cualquier abierto A **saturado** contiene entornos de $(0, t)$ y $(1, 1-t)$ cuya imagen conjunta contiene un entorno de $(1 + (((t - (1/2))/2), 0, 0)$. Y esto garantiza que $f(A)$ es entorno de $f(0, v) = f(1, 1-t) = (1 + (((t - (1/2))/2), 0, 0)$. Por ser continua y abierta, la biyección $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
I^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \\
& \left(I^2\right)/\mathcal{R} \arrow[ur, "\widetilde{f}"', "\approx"] &
\end{tikzcd}$$

5.- **La botella de Klein.** Es el espacio cociente de I^2 por la relación

$$(0,t)\mathcal{R}(1,t) \text{ y } (s,0)\mathcal{R}(1-s,1)\ \forall s,t \in I.$$

Podemos pensar en la botella de Klein como el espacio que se obtiene a partir de un cilindro identificando sus dos extremos después de dotarles de orientaciones opuestas.
Es imposible representar la botella de Klein en $\mathbb{R}^3$ sin autointersección.



6.- **El espacio proyectivo.** Al espacio cociente obtenido a partir de la esfera $n-$dimensional $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ con la relación de equivalencia

$$x\mathcal{R}y \iff x = -y$$

se le llama espacio proyectivo real $n-$dimensional y se le denota como $\mathbb{R}P^n$.

DEFINICIÓN.

Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$. Si definimos una relación binaria $\mathcal{R}$ en X, mediante

$$\forall x, y \in X, \ x\mathcal{R}y \iff (x = y) \vee (x, y \in A),$$

vemos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Al espacio topológico cociente $X/\mathcal{R}$ lo denotaremos, en este caso particular X/A.

Pensamos en X/A como el espacio que resulta de identificar el conjunto A con un punto o de colapsar todo A a un sólo punto

PROPOSICIÓN.

Si A es abierto, la proyección $\pi : X \longrightarrow X/A$ es abierta y si A es cerrado, la proyección es cerrada.
En cualquiera de los dos casos la restricción de π a $X \setminus A$ es un homeomorfismo sobre $(X/A) \setminus \pi(A)$.

Ejemplo. Vamos a ver que $\mathbb{D}^2/\mathbb{S}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$. Aquí $\mathbb{D}^2 = \overline{\mathbf{B}}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$, la frontera de $\mathbb{D}^2$.
En primer lugar, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{D}^2)^\circ & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (1-\|x\|)^{-1}x \end{array}$$

es un homeomorfismo ($h^{-1}(y) = (1+\|y\|)^{-1}y$). Además, si consideramos el "polo norte" $N = (0,0,1) \in \mathbb{S}^2$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ p = (x,y,z) & \longmapsto & 2(1-z)^{-1}(x,y) \end{array}$$

es también un homeomorfismo, con

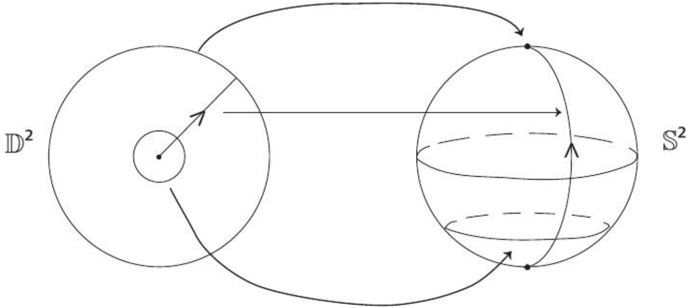
$$g^{-1}(s,t) = \left(\frac{4s}{s^2+t^2+4}, \frac{4t}{s^2+t^2+4}, \frac{s^2+t^2-4}{s^2+t^2+4} \right).$$

Se deduce, entonces, que $g^{-1} \circ h$ es un homeomorfismo de $(\mathbb{D}^2)^\circ$ sobre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Definimos $f : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} g^{-1}(h(x)) \text{ si } x \in (\mathbb{D}^2)^\circ = \mathbb{D}^2 \setminus \mathbb{S}^1, \\ N \text{ si } x \in \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

La aplicación f lleva la circunferencia de centro 0 y radio $r < 1$ homeomórficamente sobre el paralelo de latitud $\frac{r^2-4(1-r)^2}{r^2+4(1-r)^2}$. y lleva los radios que parten del centro de $\mathbb{D}^2$ a los meridianos que van del polo sur al polo norte de $\mathbb{S}^2$. f es continua y podemos pasar al cociente obteniendo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^2 \\ & \mathbb{D}^2/\mathbb{S}^1 \arrow[ur, "\approx", "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$



$\mathbb{D}^2$
$\mathbb{S}^2$