CÁLCULO II.
1º DE GRADO EN MATEMÁTICAS Y DOBLE GRADO INFORMÁTICA-MATEMÁTICAS. Curso 2016-17.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Hoja 7

Cambio de variables. Principio de Cavalieri

1.- Dibujar la región Ω y expresar la integral $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ como una integral iterada en coordenadas polares.

(a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, donde $a > 0$.

(b) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

2.- Consideremos la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u + v\,, \\ y = v - u^2\,. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Calcular la imagen D mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0,0), (2,0), (0,2)$.

(c) Calcular $\iint_D (x - y + 1)^2\,dx\,dy$ directamente, y haciendo un cambio de variables para llevarla a la región T.

3.- Utilizar una transformación lineal para calcular la integral

$$\int_\Omega (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\,dx\,dy\,,$$

donde Ω es el paralelogramo de vértices $(\pi,0), (2\pi,\pi), (\pi,2\pi), (0,\pi)$.

4.- Se considera la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2\,, \\ y = 2\,uv\,. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Determinar la imagen Ω mediante esta transformación del rectángulo R cuyos vértices son $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$ y $(1,3)$.

(c) Calcular el área de Ω.

5.- Demuéstrese la igualdad

$$\iint_D f(xy)\,dx\,dy = \log 2 \int_1^2 f(u)\,du\,,$$

siendo D la región del primer cuadrante limitada por las líneas $xy = 1$, $xy = 2$, $\dfrac{y}{x} = 1$, $\dfrac{y}{x} = 4$.

6.- Para cada $r > 0$ considérese $I(r) = \int_{-r}^{r} e^{-t^2}\,dt$.

(a) Demostrar que

$$I(r)^2 = \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,,$$

siendo R el cuadrado $R = [-r,r] \times [-r,r]$.

(b) Sean D_1 y D_2 los discos inscritos en y circunscritos a R, respectivamente. Demostrar que

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < I(r)^2 < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,.$$

(c) Calcular las integrales sobre estos discos mediante el cambio a coordenadas polares. Deducir que $I(r) \to \sqrt{\pi}$ cuando $r \to +\infty$. Obsérvese que esto significa

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7.- Calcular la integral

$$I(p,r) = \iint_{D_r} \frac{dx\, dy}{(p^2 + x^2 + y^2)^p}$$

sobre el disco $D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Determinar los valores de p para los que $I(p,r)$ tiene límite cuando $r \to +\infty$.

8.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

(a) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2 + y^2 = 2\,z$ y el plano $z = 2$.

(b) $\displaystyle\iiint_\Omega dx\, dy\, dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 1$.

9.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

(a) $\displaystyle\iiint_B \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 9)^2}\, dx\, dy\, dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\displaystyle\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2\,a$.

10.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular $\displaystyle\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el recinto acotado con frontera $\partial\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = z\big\}$.

11.- Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2 + y^2$ encerrado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12.- Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

(a) El limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4\,z$.

(b) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} \leq 1\}$.

13.- Demostrar que el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ es $A = \pi\, a\, b$. Utilizar este resultado y el principio de Cavalieri para demostrar que el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ es $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

14.- Sea T el toro sólido en $\mathbb{R}^3$ obtenido al girar el círculo $(y - a)^2 + z^2 = b^2$ del plano $x = 0$ alrededor del eje Z. Utilizar el principio de Cavalieri para calcular que el volumen de T es $2\,\pi^2\, a\, b^2$.

HOJA 7)

$\boxed{1.}$ b) $\iint_\Omega f(x,y,z)$ en polares (ρ, θ)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

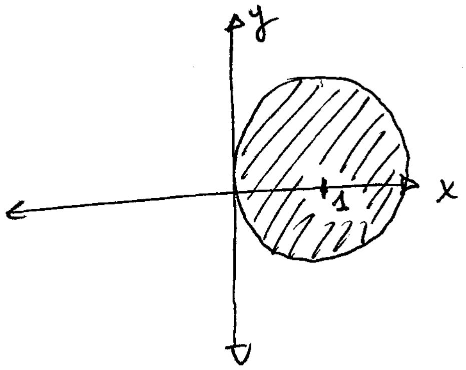
$\mathrm{Jac}(\rho,\theta) = \rho$

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x\}$

$x^2+y^2 \leq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underline{(x-1)^2+y^2 \leq}$

círculo centrado en (1,0 radio 1.

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$



Tenemos que expresar Ω en coordenadas polares.

Como $x \geq 0$ siempre, podemos imponer que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ahora queremos ver de donde a donde varía ρ.

$x^2+y^2 \leq 2x \Leftrightarrow \rho^2 \leq 2x \Leftrightarrow \rho^2 \leq 2\rho\cos\theta$ con $\rho \geq 0$

$\Rightarrow \rho \leq 2\cos\theta$ con $\cos\theta \geq 0$ si $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2} < \rho < \frac{\pi}{2}\right)$

$$I = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\, d\rho \right) d\theta$$

EL JACOBIANO !!

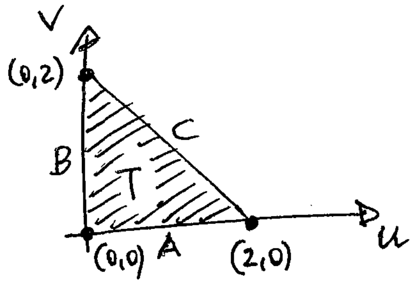
2. $\begin{cases} x = u+v \\ y = v-u^2 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = F(u,v) = (u+v,\ v-u^2)$

a) $Jac(u,v) = \left|\det DF(u,v)\right|$

$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1\end{pmatrix}\right| = |1+2u|$$

b) Calcular la imagen D mediante esta transformación del ~~rectángulo~~ triángulo T cuyos vértices son ~~(1,1), (2,1), (2,2)~~ $(0,0), (2,0), (0,2)$.

$D = F(T)$



$T = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2-u\}$

Para determinar D miramos que $\partial D = F(\partial T = A \cup B \cup C) =$
$= F(A) \cup F(B) \cup F(C)$

Previo: tenemos que demostrar que F es inyectiva en T:

LEMA: F es inyectiva en $\Omega = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u,v \ge 0\}$ y $T \subset \Omega$ entonces F es inyectiva en T.

Supongamos $\begin{cases} u+v = u'+v' & (1) \\ v-u^2 = v'-u'^2 & (2)\end{cases}$ con $u,v,u',v' \ge 0$

~~(1) ⟹ u−u' = v−v'; (2) ⟹ v−v' = u²−u'² ⟹ u−u' = u²−u'² = (u+u')(u−u')~~

$\left.\begin{matrix}(1) \Rightarrow u-u' = v'-v \\ (2) \Rightarrow v-v' = u^2-u'^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u-u' = v'-v \\ v'-v = u'^2-u^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow u-u' = u'^2-u^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (u'+u)(u'-u) = u-u' = -(u'+u)(u-u') \Rightarrow \dots \Rightarrow u = u'$

como $u = u' \Rightarrow v = v'$

$A' = F(A)$ en $A:\ v=0$ y $u \in [0,2]$

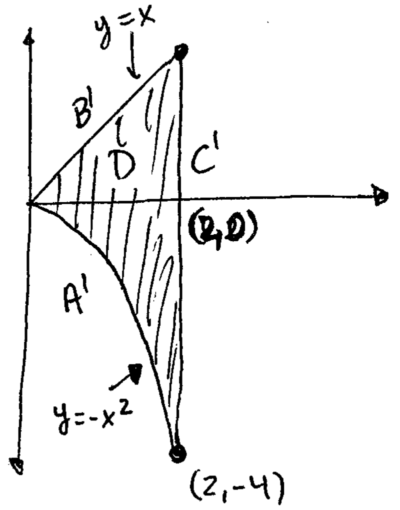
$\Rightarrow (x,y) = (u, -u^2)$

$B' = F(B)$ en $B:\ u=0$ y $v \in [0,2]$

$\Rightarrow (x,y) = (v,v)$

$C' = F(C)$ en $C = \{(u,v):\ \underbrace{u+v=2}_{\to\, v = 2-u} \quad 0 \le u \le 2\}$

$\Rightarrow (x,y) = (2,\ 2-u-u^2)$



$$\boxed{D = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\ -x^2 \le y \le x\}}$$

c) $$\iint_D (x-y+1)^2\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{y=-x^2}^{y=x} (x-y+1)^2\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{(x-y-1)^3}{3} \Big]_{y=-x^2}^{y=x} \right) d$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{(1+x+x^2)^3}{3} \right) dx = \underbrace{\cdots}_{\text{multiplicar}} = 7$$

multiplicar como un desgraciado

con CAMBIO DE VARIABLE:

$$I = \iint_T \left(u+v-(v-u^2)+1\right)^2 J(u,v)\,du\,dv = \iint_T (1+u+u^2)^2\,|1+2u|\,du\,dv =$$

$$= \int_{u=0}^{u=2} \left(\int_{v=0}^{v=2-u} (1+u+u^2)^2 (1+2u)\,dv \right) du = \int_0^2 (1+u+u^2)^2 (1+2u)(2-u)\,du =$$

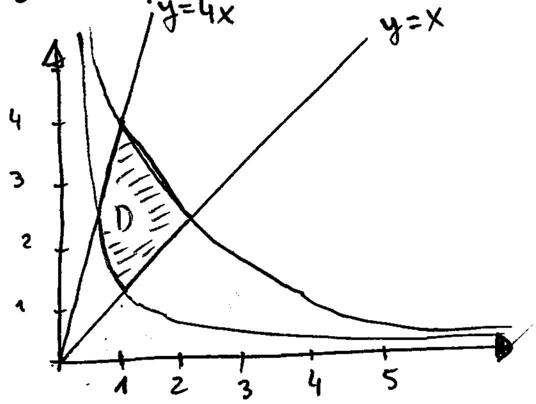
$$= \int_0^2 (1+u+u^2)(1+2u)(2-u)\,du = \underbrace{\cdots}_{\text{multiplicar como un desgraciado}} = 7$$

5. Demostrar:

$$\iint_D f(\underline{xy})\,dx\,dy = \log 2 \int_1^2 f(u)\,du$$

con esto y ... ⊛

$D \equiv$ región limitada por $xy = 1$, $xy = 2$, $\underbrace{\frac{y}{x} = 1}_{y = x}$, $\underbrace{\frac{y}{x} = 4}_{y = 4x}$



$D = \{(x,y) : x, y > 0 \ , \ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4 \ , \ 1 \leq xy \leq 2\}$

⊛ ... y sabiendo esto $\longrightarrow \begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases} \equiv (u,v) = T(x,y) = (xy, y/x)$$

$$|J(x,y)| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & 1/x \end{pmatrix}\right| = \left|2\frac{y}{x}\right| = 2\frac{y}{x} \text{ si } x,y>0$$

$$\longrightarrow 2v$$

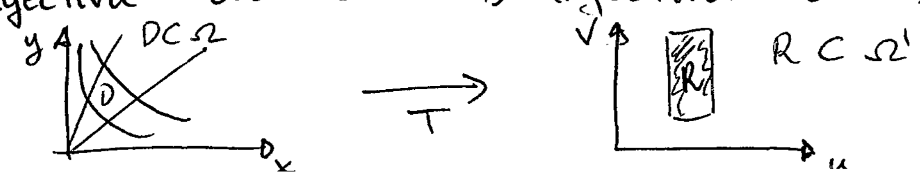
$D \subset \Omega = \{(x,y) : x, y \geq 0\}$

Veamos que T es inyectiva en Ω: Sean $x, y, x', y' > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y), (x', y') \in \Omega$ y $\begin{cases} xy = x'y' & (1) \\ y/x = y'/x' & (2) \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \frac{x}{x'} = \frac{y'}{y} \\ \\ 2)\ \frac{y}{y'} = \frac{x}{x'} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{y}{y'} \Rightarrow y'^2 = y^2 \Rightarrow y' = y \Rightarrow x' = x$$

$\Rightarrow T$ inyectiva en $\Omega \Rightarrow$ inyectiva en D.



$$I = \iint_D f(xy)\,dx\,dy = \iint_{T(D)} f(u)\ \mathrm{Jac}(T^{-1})(u,v)\ du\,dv =$$

$$= \iint_{T(D)=R} f(u) \frac{1}{\mathrm{Jac}\ T(x,y)}\ du\,dv = \iint_R f(u) \cdot \frac{1}{2v}\ du\,dv =$$

$$= \int_{u=1}^{2} \left(\int_{v=1}^{4} f(u)\ \frac{dv}{2v} \right) du = \int_1^2 f(u)\,du \underbrace{\int_1^4 \frac{dv}{2v}}_{*}$$

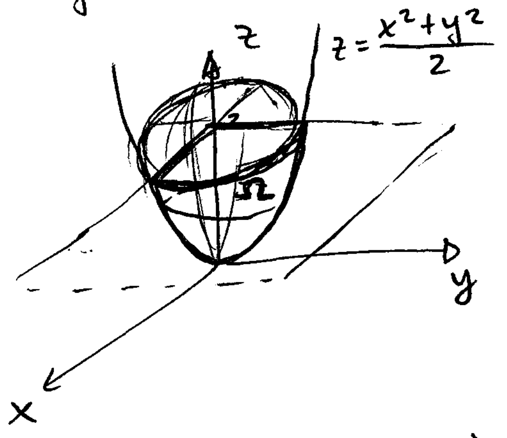
$$* \quad \int_1^4 \frac{dv}{2v} = 2 \log v \Big|_1^4 = \log 2$$

$$\Rightarrow \log 2 \int_1^2 f(u)\,du \qquad \square$$

$\boxed{8.}$

a) $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ $\quad \Omega \equiv$ sólido limitado por $x^2+y^2=2z$ y el plano $z=2$

$$x^2+y^2=2z \Rightarrow z=\frac{x^2+y^2}{2}$$



$$\Omega = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq 2\right\}$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\cos\theta \\ z = z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} r\in[0,2] \\ \theta\in[0,2\pi] \\ z \text{ entre } \frac{r^2}{2} \text{ y } z=2 \end{array}\right.$$

$$\Omega = \left\{(r,\theta,z): \frac{r^2}{2}\leq z\leq 2\right\} = \left\{(r,\theta,z): 0\leq r\leq 2,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ \frac{r^2}{2}\leq z\leq 2\right\}$$

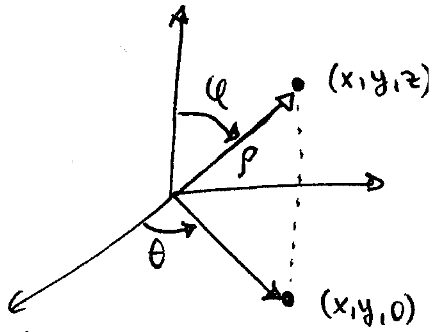
$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^2\cdot\underbrace{r}_{\text{Jac}}\,dz\,d\theta\,dr = \int_0^2\int_0^{2\pi} r^3\left(\frac{r^2}{2}-2\right)d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^2 r^3\left(\frac{r^2}{2}-2\right)dr = 2\pi\int_0^2 \frac{r^5}{2}-2r^3\,dr =$$

$$= 2\pi\left[\int_0^2\frac{r^5}{2}dr - \int_0^2 2r^3\,dr\right] = \cdots = \frac{16\pi}{3}$$

9. b) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ D ≡ corona entre las esferas de radios a y 2a.

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{|(x,y,z)| = \rho} \le 2a\}$$



D (expresado en coord. esféricas (ρ,θ,φ)) es:

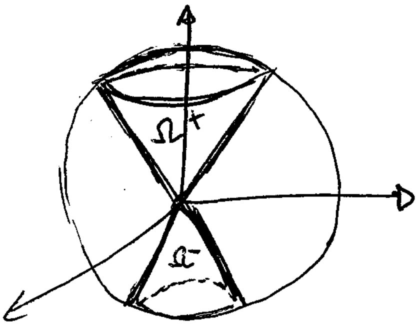
$$D = \{(\rho,\theta,\varphi) : a \le \rho \le 2a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{2a} \rho^2 \cdot \underbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}_{\text{Jac}}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 2\pi \int_0^{\pi}\int_a^{2a} \rho^4 \cdot \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi \cdot \int_a^{2a} \rho^4 d\rho = \cdots = 4\pi \cdot \frac{2^5-1}{5} \cdot a^5$$

11. Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2+y^2$ encerrado por la superficie $x^2+y^2+z^2=1$.

$$\Omega = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2+y^2 \ , \ x^2+y^2+z^2=1\}$$



$$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$$

Obs: $\Omega^+ \cap \Omega^- = \{(0,0,0)\}$ conj. $\underline{\text{área cero}}$ / $\underline{\text{volumen}}$

$$\Omega_+ = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2+y^2} \ , \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

$$\Omega_- = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : z \geq -\sqrt{x^2+y^2} \ , \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

<u>Importante</u>: Ω_- es la reflejada de Ω_+ a través del plano $xy \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(\Omega_+) = V(\Omega_-)$$

Por lo tanto: $V(\Omega) = 2V(\Omega_+)$

Expresamos Ω_+ en esféricas (ρ, θ, φ):

$$\Omega_+ = \{(\rho,\theta,\varphi) : 0 \leq \rho \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \varphi \leq ?\}$$

¿? Como $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow z \geq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\varphi \geq \sqrt{\rho^2\mathrm{sen}^2\varphi} \Rightarrow \cos\varphi \geq \mathrm{sen}\varphi \geq 0$$

$\Rightarrow$ Como $\cos\varphi \geq \mathrm{sen}\varphi \geq 0 \Rightarrow$ Sólo en la región  $\Rightarrow \varphi \in [0, \pi/4]$ ¿?

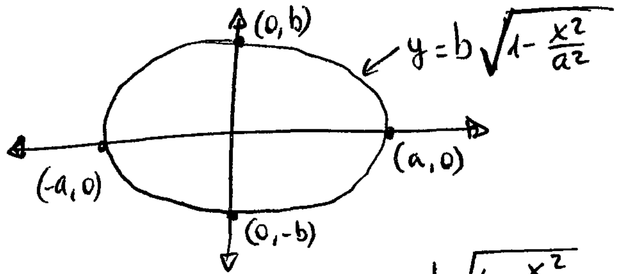
$$Vol(\Omega) = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \rho^2 \cdot \mathrm{sen}\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 4\pi \int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}\varphi \int_0^1 \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}$$

$\boxed{13.}$ Demostrar que el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ es $A = \pi ab$. Utilizar este resultado y el Ppio. de Cavalieri para demostrar que el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ es $V = \frac{4}{3}\pi abc$

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a,\ \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}$$



$$A(E) = \int_{x=-a}^{a} \int_{y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\ dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ dx =$$

C.V $x = a.t$
$dx = a.dt$

$$= \int_{-1}^{1} 2b\sqrt{1-t^2}\ a\,dt = 2ab \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\ dt}_{} \Rightarrow$$

$-a \leq x \leq a$
si $x = -a \to t = \frac{x}{a} = -1$
i $x = a \to t = \frac{x}{a} = 1$

"mitad del área de un disco de radio 1
$x^2 + y^2 \leq 1$
$A = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow A(E) = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = ab\pi$$

Demostración parte dos

Principio de Cavalieri

$$V(\mathcal{E}) = \int_{\mathbb{R}} \text{Área}\left(\mathcal{E} \cap \Pi_{z=t}\right) dt$$

$$\mathcal{E} \cap \Pi_{z=t} = \emptyset \quad \text{si} \quad |t| > c \qquad \left(\text{si} \quad (x,y,z) \in \mathcal{E} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq a \\ |y| \leq b \\ |z| \leq c \end{cases}\right)$$

$$\text{Si} \quad |t| < c, \quad \mathcal{E} \cap \Pi_{z=t} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=t, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{t^2}{c^2} > 0\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 . \ z=t, \ \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{t^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{t^2}{c^2}\right)} \leq 1\right\}$$

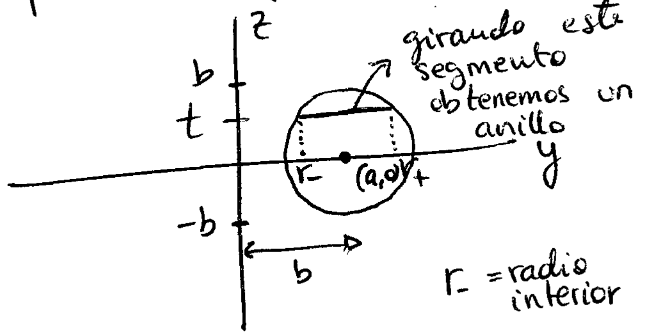
$$\Rightarrow V(\mathcal{E}) = \int_{t=-c}^{c} \text{Área}\left(\text{elipse semiejes } a\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}, \ b\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}\right) dt =$$

$$= \int_{-c}^{c} \pi\left(a\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}\right)\left(b\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}\right) dt = \pi ab \int_{-c}^{c} \left(1-\frac{t^2}{c^2}\right) dt =$$

$$= \pi ab \left(t - \frac{t^3}{c^2}\Big]_{t=-c}^{c}\right) = \frac{4\pi}{3} abc$$

14. Toro sólido T en $\mathbb{R}^3$ limitado por la superficie de revolución obtenida girando el círculo $(y-a)^2 + z^2 = b^2$ alrededor del eje z. $a, b > 0$

Principio de Cavalieri: secciono T por una familia de planos paralelos.



r_- = radio interior

r_+ = radio exterior

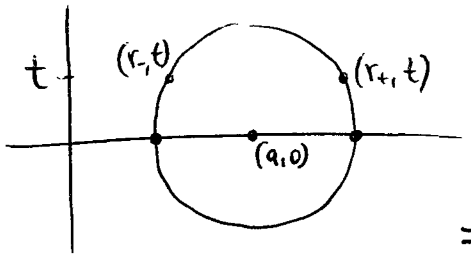
$$V(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Area}(T \cap \Pi_{z=t})$$

- Si $|t| > b \Rightarrow T \cap \Pi_z = \emptyset$

- Si $|t| < b \Rightarrow A(T \cap \Pi_z = \text{anillo})$

$$V(T) = \int_{-b}^{b} A(T \cap \Pi_{z=t})\,dt$$

Si $z = t$, con $|t| < b$, $T \cap \Pi_{z=t}$ es un anillo de radios r_- (interior), r_+ (exterior), situado en el plano $z=t$. Para encontrar r_+ y r_-, podemos suponer que estamos en el plano yz.



$$(y-a)^2 + z^2 = b^2$$

Si $z = t \Rightarrow (y-a)^2 + t^2 = b^2$

(con $y = r_{+,-}$) $\quad (r_{+,-} - a)^2 = b^2 - t^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_{+-} - a = \pm\sqrt{b^2 - t^2} \Rightarrow r_\pm = a \pm \sqrt{b^2 - t^2}$

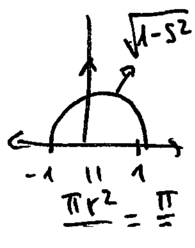
$A(\text{anillo de radios } r_+ \text{ y } r_-) = \pi(r_+^2 - r_-^2) = \pi(r_+ + r_-)(r_+ - r_-) =$

$= \pi(2a)(2\sqrt{b^2 - t^2}) = 4\pi a\sqrt{b^2 - t^2}$

$V(T) = \int_{-b}^{b} 4\pi a\sqrt{b^2 - t^2}\,dt \qquad$ cambio de variable $t = bs$ ← nueva variable que se inventa

$\rightarrow b^2 - t^2 = b^2 - b^2 s^2 = b^2(1 - s^2)$

$\Rightarrow V(T) = \int_{-1}^{1} 4\pi a\sqrt{b^2(1-s^2)}\, b\,.ds = 4\pi a b^2 \underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-s^2}\,ds}_{=\frac{\pi}{2}}$



$\Rightarrow V(T) = 2\pi^2 a b^2$