2. HOJA 4

X

valores	prob.
0	$\theta/3$
1	$1/3$
2	$1/3$
3	$\frac{1-\theta}{3}$

$\Theta = [0,1]$ porque las prob. solo pueden ser positivas

Estimador por momentos y max vero

Muestras: $n = 100$

$0 \longrightarrow 10$

$1 \longrightarrow 27$

$2 \longrightarrow 23$

$3 \longrightarrow 40$

← TEORÍA

EMPÍRICO →

Media teórica: $\mathbb{E}_\theta(X)$

Media empírica $= \frac{0.10 + 1.27 + 2.23 + 3.40}{100} = 1'93$

$$\mathbb{E}_\theta(X) = 0.\frac{\theta}{3} + 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{3} + 3.\frac{1-\theta}{3} = 2-\theta$$

- Estimador por momentos: $2-\theta = 1'93 \Rightarrow \boxed{\theta = 0'07}$ estimación

$\underbrace{\boxed{M_\theta = 2-\overline{X}}}_{\text{estimador}} \Rightarrow \boxed{\theta = 2-\overline{x}}$ estimador

$$\mathbb{E}_\theta(M_\theta) = 2 - \mathbb{E}_\theta(\overline{X}) = 2 - \mathbb{E}(X) = 2-(2-\theta) = \theta \quad \text{(Insesgado)}$$

- Estimador por max vero: $\text{VERO}(\theta; x_1, \dots, x_{100}) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j ; \theta) =$

$$= \left(\frac{\theta}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{23} \cdot \left(\frac{1-\theta}{3}\right)^{40} = C \cdot \theta^{10}(1-\theta)^{40}$$

$\log \text{VERO} = \log C + 10 \log\theta + 40 \log(1-\theta)$

derivando e igualando a cero: $\frac{10}{\theta} = \frac{40}{1-\theta} \Rightarrow \boxed{\theta = 1/5}$ estimación

¿Estimador MAXVERO? → N_0 = nº veces que sale 0; → N_3 = nº veces que sale 3

$$\boxed{EMV_\theta = \frac{N_0}{N_0 + N_3}}$$ estimador

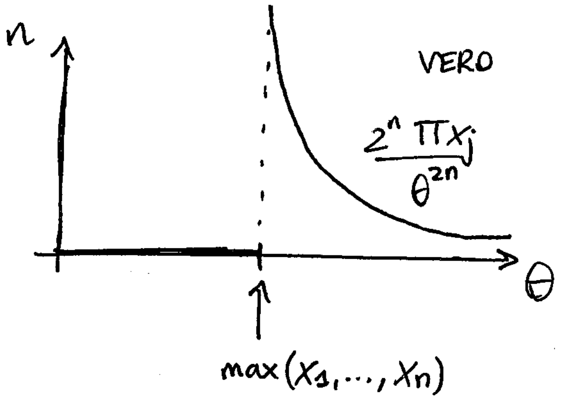
4\. X $\quad f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & ; \ 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & ; \ \text{si no} \end{cases} \qquad \Theta = (0, \infty)$

¿ EMV_θ ?

$$VERO(\theta; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} \frac{2x_j}{\theta^2} = \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \prod_{j=1}^{n} x_j & \text{si } \theta \geq \max(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Como esto no se puede derivar, lo hacemos mirando. Se alcanza el máximo de máx VERO cuando $\theta = \max(x_1, \dots, x_n)$

$$\Rightarrow \boxed{EMV_\theta = \max(x_1, \dots, x_n)}$$



¿ M_θ ?

teórica $\qquad$ práctica

$\mathbb{E}_\theta(X) \;=\; \bar{x}$ (media muestral)

$\uparrow$ las igualo

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \int_0^\theta x \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{2}{3}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\theta = \bar{x} \Rightarrow \boxed{M_\theta = \frac{3}{2}\bar{X}}$$

$\boxed{6.}$ $X \sim N(\mu, 1)$ $\mu \in [-1,1] = \Theta$ $x_1, \dots, x_n$ muest

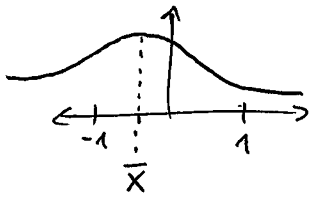
¿estimación por máxima verosimilitud de μ?

$$\text{VERO}(\mu; x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

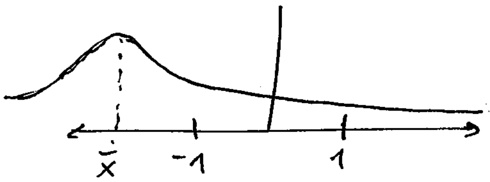
logaritmos y derivar $\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \Rightarrow \sum x_i = n\mu \Rightarrow \boxed{\mu =}$

Pero hay la restricción $\Theta = [-1,1] \ni \mu$. $\Rightarrow$ tenemos que encontrar el máximo en el intervalo $[-1,1]$.

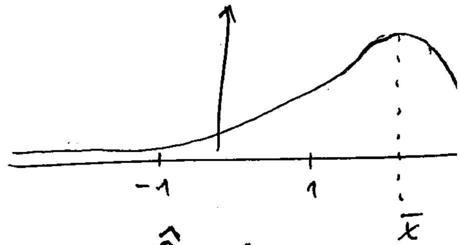
Hay tres casos:



$\hat{\theta} = \bar{x}$



$\hat{\theta} = -1$



$\hat{\theta} = 1$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \bar{x} & \text{si } \bar{x} \in (-1,1) \\ 1 & \text{si } \bar{x} > 1 \\ -1 & \text{si } \bar{x} < -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \text{EMV}_\theta = \max\left(\min\left(\bar{X}, 1\right), -1\right)$$

⊛ Si no nos dan una muestra en específico nos obligan a calcular el estimador (teoría) y no una estimación.

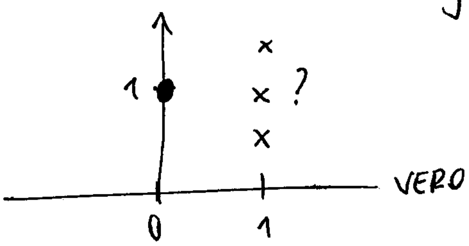
$\boxed{7.}$ $\Theta = \{0, 1\}$ $\quad f(x;0) = 1 \quad x \in (0,1)$ $\quad x_1, \dots, x_n \in (0,1)$

$$f(x;1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x \in (0,1)$$

¿ $\mathrm{VERO}(\theta; x_1, \dots, x_n)$?

$$\mathrm{VERO}(0; x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j; 0) = 1$$

$$\mathrm{VERO}(1; x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j; 1) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n} x_j}}$$



$$\hat{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n} x_j}} < 1 \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n} x_j}} > 1 \\ \underline{\text{sin estimación}} & \text{cuando } \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n} x_j}} = 1 \end{cases}$$

$\boxed{8.}$ T_1, T_2 insesgados de θ. $\quad \lambda T_1 + (1-\lambda) T_2 \quad \lambda \in (0,1)$

Calcular $\mathbb{E}_\theta(\lambda T_1 + (1-\lambda) T_2)$

Por ser insesgados $\mathbb{E}_\theta(T_1) = \theta = \mathbb{E}_\theta(T_2)$

$$\mathbb{E}_\theta(\lambda T_1 + (1-\lambda) T_2) = \lambda \mathbb{E}_\theta(T_1) + (1-\lambda) \mathbb{E}_\theta(T_2) = \lambda\theta + (1-\lambda)\theta = \theta$$

<u>Moraleja</u>: La combinación convexa de estimadores insesgados es insegado.

$\underline{10.1}$ $\quad X \quad f(x;\theta) \quad \theta \in \Theta \quad T_1, T_2$ insesgados (muestras de tamaño n)

Fabricamos U (muestras de tamaño $2n$)

$$U(X_1, \dots, X_{2n}) = \frac{1}{2} T_1(X_1, \dots, X_n) + \frac{1}{2} T_2(X_{n+1}, \dots, X_{2n})$$

¿ $V_\theta(U)$?

$$V_\theta(U) \underset{\uparrow}{=} V_\theta\left(\frac{1}{2}T_1\right) + V_\theta\left(\frac{1}{2}T_2\right) = \frac{1}{4}V_\theta(T_1) + \frac{1}{4}V_\theta(T_2)$$

independencia
de $X_1, \dots, X_n$
con $X_{n+1}, \dots, X_{2n}$

HOJA 5

$\boxed{2.}$ $\quad \theta \in \Theta = (0,1)$

a) ¿ cota de CRAMER-RAO?

b) Mínima varianza

X
tabla

valores	prob.
-1	$\theta/4$
0	$1-\theta/2$
1	$\theta/4$

PASO 1 $\qquad$ PASO 2 $\qquad$ PASO 3

a) $$\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} \longrightarrow Y = \partial_\theta \ln f(X,\theta) \longrightarrow I_X(\theta) = V_\theta(Y)$$

PASO 1

$$\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} = \begin{cases} \frac{d}{d\theta} \ln f(-1;\theta) = \frac{1}{\theta} \\ \frac{d}{d\theta} \ln f(0;\theta) = \frac{1}{\theta-2} \\ \frac{d}{d\theta} \ln f(1;\theta) = \frac{1}{\theta} \end{cases}$$

PASO 2

Y
table

valores	prob.
$1/\theta$	$\theta/4$
$\frac{1}{\theta-2}$	$1-\frac{\theta}{2}$
$1/\theta$	$\theta/4$

PASO 3

$$\mathbb{E}_\theta(Y) = 0$$

$$V_\theta(Y) = \mathbb{E}(Y^2) =$$
$$= \frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{\theta}{4} + \frac{1}{(\theta-2)^2}\cdot\left(1-\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{\theta}{4} =$$
$$= \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2(\theta-2)}$$

b) $T = 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ ¿insesgado? ¿mínima varianza.

Tenemos que mirar si $\mathbb{E}_\theta(T) = \theta$

$$\mathbb{E}_\theta(T) = 2\,\mathbb{E}_\theta(X^2) = 2\left((-1)^2\frac{\theta}{4} + 0^2\left(1-\frac{\theta}{2}\right) + 1^2\cdot\frac{\theta}{4}\right) = \theta \quad \checkmark$$

$$V_\theta(T) = \frac{4n}{n^2} V_\theta(X^2) = \frac{4}{n}\left(\mathbb{E}_\theta(X^4) - \mathbb{E}_\theta(X^2)^2\right) = \frac{4}{n}\left(\frac{\theta}{2} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right)$$

$\boxed{4.}$ (Normalidad asintótica, método delta)

$X \sim Geo(p) \qquad p \in (0,1) \qquad \mathbb{E}_p(X) = \frac{1}{p} \qquad V_p(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$\frac{1}{\bar{X}}$ para estimar p

normalidad asintótica

TLC: $\sqrt{n}\left(\bar{X}_{(n)} - \frac{1}{p}\right) \longrightarrow N\left(0, \frac{1-p}{p^2}\right)$

transformación $g(x) = 1/x$

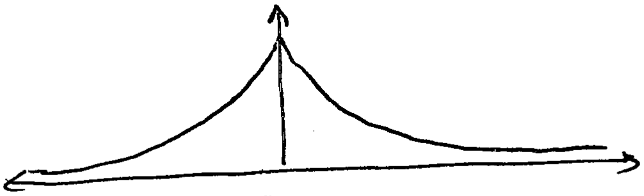
$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow |g'(x)|^2 = \frac{1}{x^4}$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g\left(\tfrac{1}{p}\right)\right) \longrightarrow N\left(0, |g'(1/p)|^2 \cdot \frac{1-p}{p^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\underbrace{\frac{1}{\bar{X}_n}}_{= T} - p\right) \longrightarrow N\left(0, (1-p)p^2\right)$$

Vamos a hacer los ejercicios $\boxed{3}$ y $\boxed{8}$, para los cuales vamos a hacer unos cálculos comunes.

(1) $X \quad f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-|x|/\theta}$, $x \in \mathbb{R}$ $\qquad \theta \in \Theta = (0, \infty)$



Por simetría $\mathbb{E}_\theta(X) = 0$

$\mathbb{E}_\theta(X^{2k+1}) = 0$ con $k \geq 0$ entero

- $$\mathbb{E}_\theta(|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{2\theta} \cdot e^{-|x|/\theta}\, dx = \cancel{2} \int_0^\infty \frac{x}{\cancel{2}\theta} \cdot e^{-x/\theta}\, dx =$$ cambio variable $y = \frac{x}{\theta}$

$$= \theta \int_0^\infty y e^{-y}\, dy$$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty y^t e^{-y}\, dy$$

$$\Gamma(k+1) = k!$$

$$= \theta . 1 = \theta$$

cambio variable $y = \frac{x}{\theta}$

- $$\mathbb{E}_\theta(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2\theta} \cdot e^{-|x|/\theta}\, dx = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-x/\theta}\, dx =$$

$$= \theta^2 \int_0^\infty y^2 e^{-y}\, dy = \theta^2 \Gamma(3) = 2\theta^2$$

$$\mathbb{E}_\theta(X^{2k}) = \theta^{2k}\, \Gamma(2k+1) = (2k)!\, \theta^{2k}$$

- $$\mathbb{E}_\theta(X^4) = \theta^4 \Gamma(5) = 24\theta^4$$

(2) Cota de Cramer-Rao

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} \cdot e^{-|x|/\theta}$$

$$\ln f(x;\theta) = \ln \frac{1}{2} - \ln\theta - \frac{|x|}{\theta}$$

$$\partial_\theta \ln f(x;\theta) = -\frac{1}{\theta} + \frac{|x|}{\theta^2}$$

$$Y = \frac{|X| - \theta}{\theta^2} \Rightarrow \mathbb{E}_\theta(Y) = 0$$

$$I_X(\theta) = V_\theta(Y) = \frac{1}{\theta^4} V_\theta(|X|) =$$

$$= \frac{1}{\theta^4}\Big(\underbrace{\mathbb{E}_\theta(|X|^2)}_{\mathbb{E}_\theta(X^2)} - \mathbb{E}_\theta(|X|)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{\theta^4}(2\theta^2 - \theta^2) = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\overset{\text{C.C-R}}{\Longrightarrow} V_\theta(T) \geq \frac{1}{n I_X(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}$$

(3) $T = \overline{|X|}$ ¿insesgado? ¿mínima varianza?

$$\mathbb{E}_\theta(T) = \mathbb{E}_\theta(|\bar{X}|) \underset{\text{en general}}{=} \mathbb{E}_\theta(|X|) = \theta \Rightarrow T \text{ insesgado}$$

$$V_\theta(T) = V_\theta(\overline{|X|}) = \frac{V_\theta(|X|)}{n} = \frac{\theta^2}{n} \Rightarrow \text{mínima varianza}$$

(4) $T = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2}$ normalidad asintótica de T

TCL: $\sqrt{n}\left(\underbrace{\overline{X^2}}_{} - \underbrace{2\theta^2}_{\mathbb{E}(X^2)}\right) \longrightarrow N\left(0, \underbrace{2\theta^4}_{V(X^2)}\right)$

$g(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$; $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow |g'(x)|^2 = \frac{1}{8x}$

$|g'(2\theta^2)|^2 = \frac{1}{16\theta^2}$

$$\sqrt{n}(T - \theta) \longrightarrow N\left(0, \frac{1}{16\theta^2} \cdot 2\theta^4\right)$$

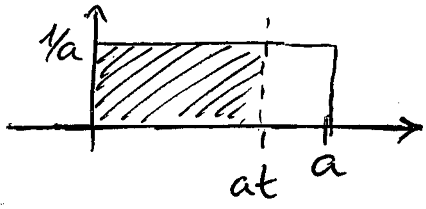
HOJA 6

$\boxed{10.}$ $X \sim \text{Unif}[0,a]$ | Intervalo para a

$M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

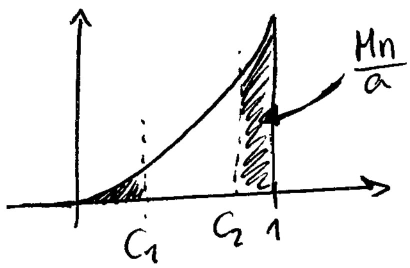
a) Comprobar que $\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{a} \leq t\right) = t^n$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{a} \leq t\right) = \mathbb{P}(X \leq at)^n = t^n \qquad 0 \leq t \leq 1$$



b) Dado $\alpha \in (0,1)$. Hallar c_1 y c_2 para que:

$$\mathbb{P}_a\left(\frac{M_n}{a} \leq c_1\right) = \mathbb{P}_a\left(\frac{M_n}{a} \geq c_2\right) = \alpha/2$$



$$c_1^n = \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{a} \leq c_1\right) = \alpha/2 \Rightarrow \boxed{c_1 = \sqrt[n]{\alpha/2}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{a} \geq c_2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{a} \leq c_2\right) = 1 - c_2^n \Rightarrow \boxed{c_2 = \sqrt[n]{1 - \alpha/2}}$$

c) Intervalo de confianza.

Probabilidad (antes del experimento):

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left(c_1 \leq \frac{M_n}{a} \leq c_2\right)$$

Muestra $x_1, \dots, x_n \longrightarrow m_n = \max(x_1, \dots, x_n)$

confianza $1-\alpha$: $\quad \dfrac{m_n}{c_2} \leq a \leq \dfrac{m_n}{c_1}$

$\boxed{9.}$ $X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ σ^2 parámetro desconocido a estimar

μ_0: conocido

a) ¿distribución de T_n?

b) Intervalo

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$$

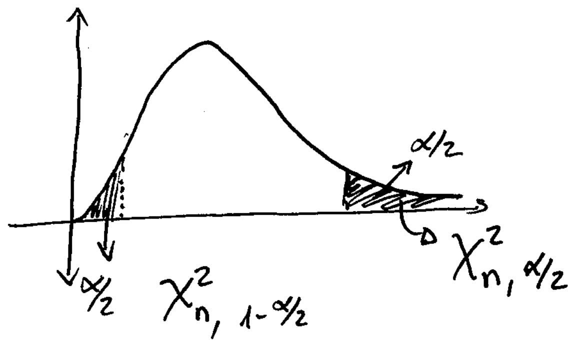
a)

$$\mathbb{E}_{\sigma^2}(T_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}_{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right) = \frac{n}{n}\mathbb{E}_{\sigma^2}\left((X_i-\mu_0)^2\right) = \frac{n}{n}V(X_i) = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\sigma^2}(T_n) = \sigma^2 \quad \text{(insesgado)}$$

$$T_n = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n}\chi^2_n \,, \quad \text{porque} \quad \chi^2_K = Y_1^2 + \cdots + Y_K^2, \quad Y_i \sim N(0,1)$$

b)



Probabilidad:

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{n,1-\alpha/2} \le \chi^2_n \le \chi^2_{n,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$
$$\|$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n,1-\alpha/2} \le \frac{\sigma^2}{n}\chi^2_n \le \frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n,\alpha/2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n,1-\alpha/2} \le T_n \le \frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Estadística: (realización de una muestra)

Confianza $1-\alpha$: $\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n,1-\alpha/2} \le \hat{t}_n \le \frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n,\alpha/2}$

$$\Rightarrow \frac{\hat{t}_n \cdot n}{\chi^2_{n,\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{\hat{t}_n \cdot n}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}$$

11. $X = \delta + Y \qquad Y \sim Exp(1) \qquad \delta > 0 \qquad T_n = \min(X_1, \dots, X_n)$

a) Comprobar que $F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < \delta \\ 1 - e^{-n(t-\delta)} & t \geq \delta \end{cases}$

$\mathbb{P}(Y > t) = e^{-t} \qquad t \geq 0$

$f_Y(t) = e^{-t} \qquad t \geq 0$

$\mathbb{P}(X > s) = \mathbb{P}(\delta + Y > s) = \mathbb{P}(Y > s - \delta) = e^{-(s-\delta)}$ para $s \geq \delta$

$\mathbb{P}(T_n > t) = \mathbb{P}(X > t)^n = e^{-n(t-\delta)}$ para $t \geq \delta$

$\Rightarrow \mathbb{P}(T_n < t) = F_{T_n}(t) = 1 - e^{-n(t-\delta)} \qquad t \geq \delta.$

b) $\alpha \in (0,1) \qquad \mathbb{P}_\delta(T_n \leq C_1) = \mathbb{P}_\delta(T \geq C_2) = \alpha/2$

$\mathbb{P}(T_n > C_2) = \alpha/2$
$\quad\; \shortparallel$
$e^{-n(C_2-\delta)}$

$\mathbb{P}(T_n \leq C_1) = 1 - \mathbb{P}(T_n > C_1) = \alpha/2$

despejamos C_1 y C_2

c) $\hat{t}$ estimación T_n. Calcula intervalo confianza $1-\alpha$ para δ.

$C_1 < \hat{t} < C_2$ con confianza $1-\alpha$

HOJA 7 (A)

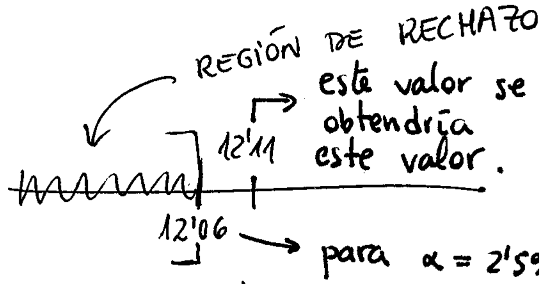
2. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mu, \sigma^2$ desconocidos $\quad$ muestra de tamaño 12 con $\bar{x} = 12'11$ y con $S = 1'479$

$\alpha = 2'5\%$

a)

Estamos comparando μ con $\underset{\mu_0}{\underset{\shortparallel}{13}}$.

$H_0: \mu > \mu_0 = 13$



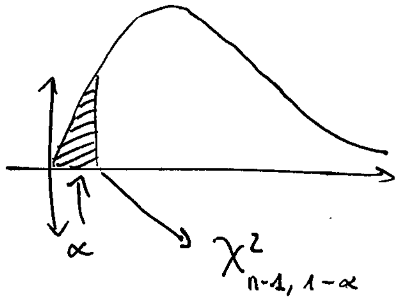
Región de rechazo: ¿ $\bar{x} < \mu_0 - t_{n-1,\alpha} \dfrac{S}{\sqrt{n}}$?

$12'11 < 13 - t_{11}(2'5) \cdot \dfrac{1'479}{\sqrt{12}} \Rightarrow 12'11 < 13 - 2'2 \cdot \dfrac{1'479}{\sqrt{12}} = 12'06$

No podemos rechazar.

b) Estamos comparando σ con $1'5$.

$H_0: \sigma > \sigma_0 = 1'5$ $\quad \underbrace{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}}_{\substack{\shortparallel \\ 10'\text{algo}}} < \underset{\substack{\shortparallel \\ 3'8}}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}$



No podemos rechazar

5. $n_1 = 100$ $\quad n_2 = 250$ $\quad \alpha = 5\%$

$\bar{x_1} = 0'6$ $\quad \bar{x_2} = \dfrac{175}{250} = 0'7$

p_1 $\quad p_2$

a)

$H_0: p_1 = p_2$ $\quad$ rechazo si $\quad \underbrace{|\bar{x_1} - \bar{x_2}|}_{0'1} > \underbrace{\underset{\substack{\shortparallel \\ 1'96}}{z_{\alpha/2}} \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}_{\substack{\shortparallel \\ 0'11}}$ $\quad$ con $\bar{p} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$1'96 \cdot (\qquad)$

No podemos rechazar

b) $H_0: p_1 \geq p_2$ $\quad$ rechazo si: $\quad \underset{\substack{\shortparallel \\ -0'1}}{\bar{x_1} - \bar{x_2}} < \underbrace{-z_\alpha \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}_{-0'09}$

se cumple $\rightarrow$ rechazamos $\rightarrow$ conclusión significativa: $p_1 < p_2$

$\boxed{3.}$ $X \sim Ber(p)$ Muestra de tamaño n

$H_0 \equiv p = 1/2 = p_0$ Contamos el nº de unos

a) $n = 200$, $\alpha = 5\%$ ¿Qué se requiere para rechazar la hipótesis?
b) n general pero grande, $\alpha = 5\%$, Sale 57% de caras.
¿para qué n's aceptamos y para qué n's rechazamos?
c) Calcular una fórmula explícita del p-valor?

a) $\bar{x}$ = proporción de unos

Región de rechazo: $|\bar{x} - \frac{1}{2}| \geq Z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{1/2(1-1/2)}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} Z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow$ Rechazamos si : $|\bar{x} - 1/2| \geq \frac{1}{2} \cdot 1'96 \cdot \frac{1}{\sqrt{200}}$

b) Conocemos $\bar{x}$ y α ¿n?

Si $n \geq \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1'96}{0'07}\right)^2$ rechazamos, por el contrario, tenemos que acepta

c) ¿α?

$$|\bar{x} - \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2} Z_{\alpha/2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \phi\left(|\bar{x} - 1/2| \cdot 2\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\left(1 - \phi(|\bar{x} - 1/2| 2\sqrt{n})\right)$$

$\boxed{4.}$ $n=10$

$X :=$ colesterol antes

$Y :=$ colesterol después

$H_0 \equiv$ nivel antes y después coinciden

$\alpha = 5\%$

(X, Y) Suponemos normalidad

↳ CUIDADO: NO es el caso de dos poblaciones independientes

X e Y no son independientes.

Es 1 población y 2 características (antes y después)

Consideramos $U = X - Y$ $\qquad U \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow H_0 \equiv \mu = 0 = \mu_0$ $\qquad \sigma$ desconocida

Rechazo : $|\bar{u} - 0| \geq t_{9,\alpha/2} \cdot \frac{S_u}{\sqrt{n}}$

Mirando datos: $\bar{u} = 5'5$ $\qquad S_u = 10$

$5'5 \geq 2'26 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 7'15$ No se cumple

No rechazamos

Tenemos que aceptar H_0.

HOJA 7 (B)

2. H_0: (porcentaje de peces adultos ≤ 20 cm) es $\leq 10\%$

$n = 6$

Rechazo si al menos 1 inferior a 20 cm.

a) ¿Nivel de significación? ¿Función de potencia?

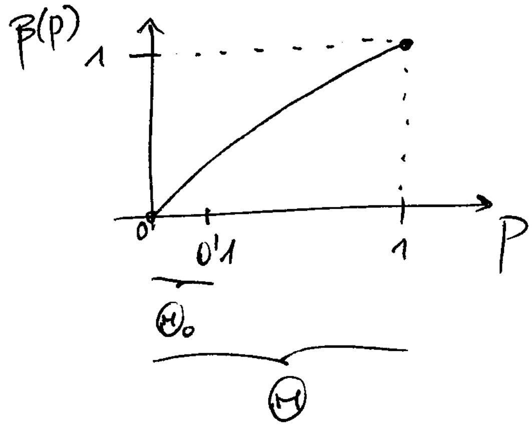
$X \sim Ber(p) \qquad p \in \Theta = (0,1)$

$H_0: \ p \leq 10\%$

Función de potencia $\rightarrow \beta(p) = \mathbb{P}_p(\text{rechazar}) = \mathbb{P}_p(Bin(6,p) \geq 1)$

$\Rightarrow \beta(p) = 1 - \mathbb{P}(Bin(6,p) = 0) = 1 - (1-p)^6$

Significación $= \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} \beta(p) = \beta(0'1)$



b) Si fuera $p = 5\%$, ¿$\mathbb{P}_p(\text{rechazar})$?

$\mathbb{P}_{0'05}(\text{rechazar}) = \beta(0'05)$

c) Si $p = 20\%$, ¿cuál es la probabilidad de aceptar?

$\mathbb{P}_{0'2}(\text{aceptar}) = 1 - \mathbb{P}_{0'2}(\text{rechazar}) = 1 - \beta(0'2)$

5.) $X \sim Geo(p)$ $\quad p \in (0,1) = \Theta$ $\quad n=10$

$\overset{\shortparallel}{\text{nº de días}}$

Contrastar que $H_0: p > 0'2$ $\quad \Theta_0 = (0'2, 1)$

Rechazo si $x_1, \dots, x_{10} \geq 3$.

¿Función de potencia y significación?

$$\beta(p) = \mathbb{P}_p(\text{rechazar}) = \mathbb{P}_p(\min(x_1,\dots,x_{10}) \geq 3) = \mathbb{P}_p(X_1 \geq 3, \dots, X_{10} \geq 3) =$$

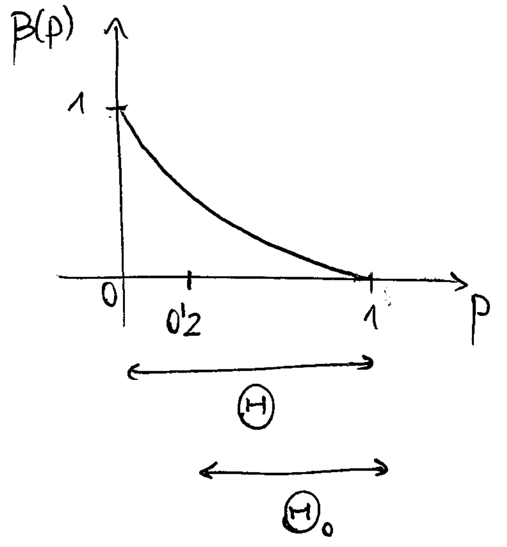
$$= \mathbb{P}_p(X \geq 3)^{10} \quad \downarrow X \sim Geo(p)$$

$$\mathbb{P}_p(X=1) = p$$

$$\mathbb{P}_p(X=2) = p(1-p)$$

$$\mathbb{P}_p(X > k) = (1-p)^k$$

$$\mathbb{P}_p(X \geq 3)^{10} = ((1-p)^2)^{10} = (1-p)^{20}$$



Significación $\beta(0'2) = (0'8)^{20} = 1'15\%$

8. X

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-x^2/2\theta} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \theta \in (0,\infty) = \Theta$$

Test RV para $H_0 = \theta < \theta_0$ con nivel α.

PASO 1 : Calcular VERO

PASO 2 : Maximo VERO

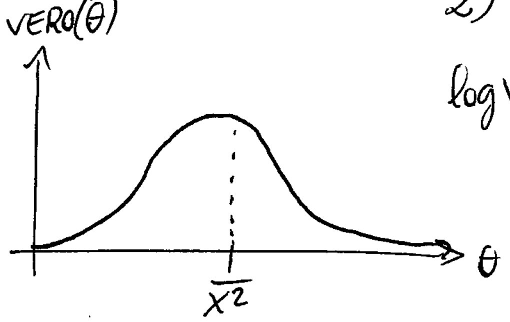
PASO 3 : RV

PASO 4 : Región de rechazo (Fijar c)

función de θ

1) $$\text{VERO}(\theta; x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)^n \exp\left(-\frac{\overbrace{\sum x_i^2}^{n\overline{x^2}}}{2\theta}\right)$$

$\text{VERO}(0^+) = 0 \qquad \text{VERO}(\infty) = 0$



máximo absoluto.

2) MAX VERO

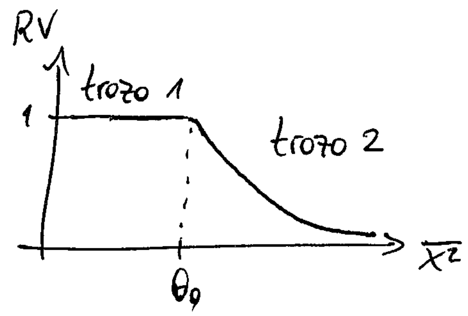
log VERO $\longrightarrow$ derivar $\longrightarrow$ igualar a cero $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ obtinemos mejor estimación

$\longrightarrow \theta = \overline{x^2}$

3)
$$RV = \frac{\sup_{\theta \le \theta_0} \text{VERO}(\theta)}{\sup_{\theta \in (0,\infty)} \text{VERO}(\theta)} = \begin{cases} \dfrac{\text{VERO}(\overline{x^2})}{\text{VERO}(\overline{x^2})} = 1 & \text{si} \quad \theta_0 \geq \overline{x^2} \\[2ex] \dfrac{\text{VERO}(\theta_0)}{\text{VERO}(\overline{x^2})} & \text{si} \quad \theta_0 < \overline{x^2} \end{cases}$$

4) Rechazo si $RV \le C$ (poco verosimil)



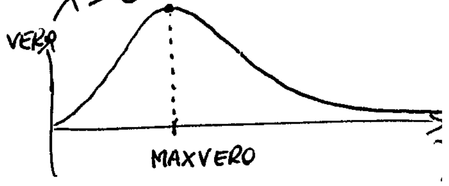
trozo 1 siempre $RV = 1$ $\rightarrow$ nunca rechazo

trozo 2 :

$$RV = \left(\frac{\overline{x^2}}{\theta_0}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\overline{x^2}}{\theta_0}n + \frac{1}{2}n\right)$$

Región rechazo: $\left(\frac{\overline{x^2}}{\theta_0}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\overline{x^2}}{\theta_0}n + \frac{1}{2}n\right) \le C \quad \wedge \quad \overline{x^2} > \theta_0$

9. X $\qquad f(x;\lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \lambda > 0$



$$\text{VERO}(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \cdot e^{-n\lambda(|x_1| + \dots + |x_n|)} = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \cdot e^{-n\lambda\overline{|x|}}$$

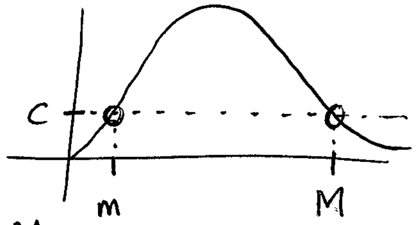
$\log \text{VERO} = n \log(\lambda/2) - n\lambda\overline{|x|}$ $\longrightarrow$ igualamos a cero y despejamos λ $\longrightarrow$ $\boxed{\lambda = \frac{1}{\overline{|x|}}}$

$H_0 : \lambda = 2 \qquad$ RV $\qquad$ calibre c

$$RV = \frac{\text{VERO}(2)}{\text{VERO}(1/\overline{|x|})} \qquad \text{Región rechazo: } RV < c$$

$$\longrightarrow RV = (2\overline{|x|})^n e^{-2n\overline{|x|} + n}$$

$g(\overline{|x|}) = RV$ con $g(x) = (2x)^n e^{-2nx+n}$



Región de rechazo cuando $\overline{|x|} < m$ ó $|\overline{x}| > M$.

Función de potencia:

$\mathbb{P}_\lambda (m \leq |\overline{x}| \leq M)$