CÁLCULO II.
1º DE GRADO EN MATEMÁTICAS Y DOBLE GRADO INFORMÁTICA-MATEMÁTICAS. Curso 2016-17.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Hoja 8

Curvas. Integrales de línea. Fórmula de Green

1.- Hallar el vector tangente (normalizado) a la trayectoria $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe la recta tangente en el punto $(0, 0)$?

2.- Para las siguientes trayectorias, hallar la velocidad, la rapidez (es decir, la longitud del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente al valor de t dado:

(a) $\gamma(t) = \big(e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t} \cos t\big), \quad t = 2\pi.$ $\qquad$ (b) $\sigma(t) = \big(e^{-2t} \operatorname{sen}(2t), e^{-2t} \cos(2t), e^{-2t}\big), \quad t = \dfrac{\pi}{2}.$

3.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

(a) $\sigma(s) = (s, 4s, s^2)$, $0 \le s \le 4$.

(b) $\sigma(u) = \big(e^{-u} \cos u, e^{-u} \operatorname{sen} u\big)$, $0 \le u < +\infty$.

4.- Dibujar el arco de cicloide descrito por $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1 - \cos t)$, con $0 \le t \le 2\pi$ y hallar su longitud.

5.- Hallar la longitud del arco de hipocicloide descrito por $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 3t\big) & \text{si } \ 0 \le t \le \pi, \\ \big(-1, -t + \pi, 3t\big) & \text{si } \ \pi \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

7.- Dada la curva γ mediante las ecuaciones paramétricas $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$, calcúlese la integral $\displaystyle\int_\gamma z\, ds$;

8.- Dibujar la curva descrita por la trayectoria σ dada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $0 \le t \le \pi$, y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\, ds$, donde $f(x, y, z) = x + y + z$.

9.- Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F(x, y)\, ds$ del campo vectorial F a lo largo de la curva orientada Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(a) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1 - x|$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$.

(b) $F(x, y) = (x + y, x - y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ recorrida en el sentido contrario al de las manillas del reloj.

10.- Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sea $F(x, y)$ el vector unitario que apunta desde (x, y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a, 0)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

11.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma y\, dx + x^2\, dy$, cuando Γ es:

(a) la circunferencia $x^2 + y^2 = a\,x$; $\qquad$ (b) la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

recorridas en el sentido positivo (el de la medida de los ángulos).

12.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x, y) = (y^2 + x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en el sentido negativo.

13.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\, dx + (x - y \arctan y)\, dy$, donde Γ viene dado como sigue: dados los puntos $A = (2,0)$, $B = (1,-1)$ y $C = (0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$. Γ es el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, y los segmentos orientados BC, CO, OA (O es el origen de coordenadas).

14.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x,y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

(a) $F(x,y) = (3\,x^2 y, x^3)$

(b) $F(x,y) = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x, \cos x + x \cos y + y)$

(c) $F(x,y) = (2\,x\,e^y + y, x^2\,e^y + x - 2\,y)$

(d) $F(x,y) = (\operatorname{sen} x\,y + x\,y \cos x\,y, x^2 \cos x\,y)$.

15.- Evaluar $\displaystyle\int_\Gamma (2\,x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy$, donde Γ es el círculo unidad orientado en el sentido negativo.

16.- Verificar el teorema de Green para el campo (P,Q) con $P(x,y) = 2\,x^3 - y^3$ y $Q(x,y) = x^3 + y^3$ y la región anular (corona) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,a^2$.

17.- Sea A el área del recinto acotado por una curva γ de clase C^1, simple y cerrada en el plano y orientada en el sentido positivo. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma x\, dy - 4y\, dx$ en función de A.

16.- Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función que tiene segundas derivadas continuas y que verifica

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x) = 0.$$

Demostrar que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $r > 0$, se verifica que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} u(y) d\sigma(y),$$

donde ω_n es el área de la esfera unidad y $d\sigma(y)$ el elemento de área de la esfera de radio r.

17.- Dibujar las siguientes curvas y hallar su longitud de arco.

(a) El arco de cicloide descrito por

$$\begin{cases} x = R\,(t - \sin t), \\ y = R\,(1 - \cos t), \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) La cardioide que en coordenadas polares viene dada por $r = 1 + \cos\theta$, con $0 \leq \theta \leq \pi$.

18.- Considérese la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(0) = 0$, $f(1/(2n-1)) = 1/n$, $f(1/(2n)) = -1/n$, y f lineal en los intervalos intermedios. Comprobar que su gráfica es una curva continua, cuya longitud es infinita.

19.- Calcular el área limitada por cada uno de los siguientes contornos.

(a) La elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

(b) El arco de cicloide $x = R\,(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = R\,(1 - \cos\theta)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y el eje de abscisas.

20.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x,y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

(a) $F(x,y) = (3\,x^2 y, x^3)$ (b) $F(x,y) = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x, \cos x + x \cos y + y)$

(c) $F(x,y) = (2\,x\,e^y + y, x^2\,e^y + x - 2\,y)$ (d) $F(x,y) = (\operatorname{sen} x\,y + x\,y \cos x\,y, x^2 \cos x\,y)$.

21.- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada f' continua en $[0,1]$, tal que $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'(1) = -1$ y $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Sea

$$C = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\} \bigcup \{(x, -f(x)) : x \in [0,1]\}.$$

(a) Hallar una parametrización γ de C, con la orientación positiva del plano.

(b) Calcular $\displaystyle\int_\gamma y^2\,dx + xy\,dy$.

(c) Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{4}\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$.

22.- Considérese la función $f(x,y) = -\log\sqrt{x^2+y^2}$, definida en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y el campo $F = \nabla f$ en Ω. Hallar el flujo de F hacia el exterior del disco de radio 1 centrado en el punto $(2,1)$. ¿Cuál es el flujo de F hacia el exterior del disco unidad de $\mathbb{R}^2$?

23.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, donde Γ es el contorno del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, orientado positivamente.

24.- Calcular el flujo de los campos $F(x,y) = (y,-x)$ y $G(x,y) = (x,y)$ hacia el exterior del disco unidad $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

25.- Considérese la función $f(x,y) = -\log\sqrt{x^2+y^2}$, definida en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y el campo $F = \nabla f$ en Ω. Hallar el flujo de F hacia el exterior del disco de radio 1 centrado en el punto $(2,1)$. ¿Cuál es el flujo de F hacia el exterior del disco unidad de $\mathbb{R}^2$?

26.- Comprobar si el campo vectorial $F(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$ es conservativo y, si procede, hallar una función potencial para F.

27.- Sean $r > 0$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ y ∂D su frontera orientada en positivamente. Usando primero el teorema de Green y luego las coordenadas polares, calcular la integral $\displaystyle\int_{\partial D} xy^2\, dy - yx^2\, dx$.

28.- Las condiciones $z = 12$ y $x^2 + y^2 \leq 5$ describen un disco, S, contenido en un plano horizontal. Para el campo vectorial $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcúlese $\displaystyle\iint_S F \cdot dS$ de, por lo menos, dos maneras distintas.

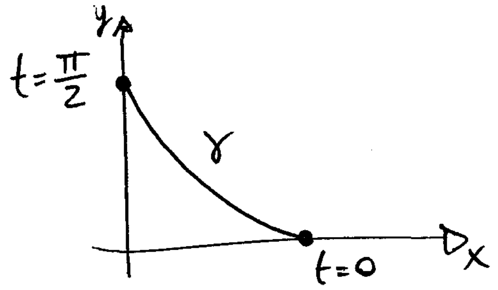
$\boxed{\text{HOJA 8}}$

$\boxed{5.}$ Hipocicloide

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^{2/3} = \cos^2 t \\ y^{2/3} = \operatorname{sen}^2 t \end{array}\right\} \Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$y^{2/3} = 1 - x^{2/3} \Rightarrow y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2} \qquad 0 \leq x \leq 1$$



$$\ell(\gamma) = \int_0^{\pi/2} |\gamma'(t)|\, dt$$

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$$

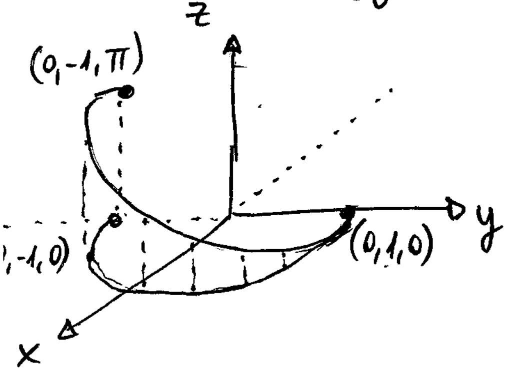
$$\gamma'(t) = (3\cos^2 t(-\operatorname{sen} t), 3\operatorname{sen}^2 \cdot \cos t) = 3 \underset{\in [0, \pi/2]}{\underbrace{\operatorname{sen} t}_{\geq 0} \underbrace{\cos t}_{\geq 0}} (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$\Rightarrow |\gamma'(t)| = 3 \operatorname{sen} t \cos t = \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2t)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} |\gamma'(t)|\, dt = \frac{3}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2t)\, dt = \frac{3}{4} \left(-\cos(2t)\right)\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} //$$

$\boxed{8.}$ $\sigma(t) = (\text{sen}t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$

y hallar $I = \int_\sigma f\, ds$; $f(x,y,z) = x+y+z$



$$I = \int_0^{\pi} \underbrace{f(\sigma(t))}_{\substack{\text{evaluar } f \\ \text{a lo largo} \\ \text{de la curva}}} \cdot |\sigma'(t)|\, dt$$

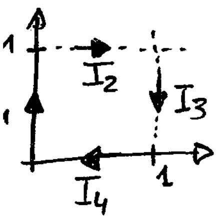
$$f(\sigma(t)) = \text{sen}t + \cos t + t$$

$$|\sigma'(t)| = \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$I = \int_0^{\pi} (\text{sen}t + \cos t + t)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi} (\text{sen}t + \cos t + t)\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\left[2 + 0 + \frac{\pi^2}{2}\right] = 2\sqrt{2} + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{12.}$ $F(x,y) = (y^2 + x^3, x^4)$ Trabajo de F a lo largo del contorno de $[0,1]^2$ en sentido negativo.



I_0: $x=0$, $y=t$ con $0 \leq t \leq 1$

velocidad $= (0,1)$ $0<t<1$

I_1: $y=1$, $x=t-1$, $1 \leq t \leq 2$

velocidad $= (1,0)$, $1<t<2$

I_2: $x=1$, $y=3-t$, $2 \leq t \leq 3$

velocidad $= (0,-1)$, $2<t<3$

I_3: $y=0$, $x=4-t$, $3 \leq t \leq 4$

velocidad $= (-1,0)$ $3<t<4$

continuación del 12

$$T = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^4 \vec{F}(\gamma(t))\cdot|\gamma'(t)|\,dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{3}\int_j^{j+1}\vec{F}(\gamma(t))\cdot|\gamma'(t)|\,dt$$

$$I_0 : \int_0^1 (t^2,0)\cdot(0,1)\,dt = 0$$

$$I_1 : \int_1^2 \left(1+(t-1)^3,\ (t-1)^4\right)\cdot(1,0)\,dt = \int_1^2 1+(t-1)^3\,dt = \frac{5}{4}$$

$$I_2 : \int_2^3 \left(1+(3-t)^2,\ 1\right)(0,-1)\,dt = -1$$

$$I_3 : \int_3^4 \left((4-t)^3,\ (4-t)^4\right)(-1,0)\,dt = -\frac{1}{4}$$

$$I = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$\boxed{14.}$

b) $F(x,y) = (\underbrace{\operatorname{sen}y - y\operatorname{sen}x + x}_{P}, \underbrace{\cos x + x\cos y + y}_{Q})$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \operatorname{sen}x \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\operatorname{sen}x + \cos y$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow F$ es conservativo, ¿potencial para F?

$F = \nabla U$? $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \operatorname{sen}y - y\operatorname{sen}x + x & [1] \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \cos x + x\cos y + y & [2] \end{cases}$

[1] $\Rightarrow V = \int (\operatorname{sen}y - y\operatorname{sen}x + x)\,dx = x\operatorname{sen}y \int -y\operatorname{sen}x\,dx =$

$= x\operatorname{sen}y + y\cos x + \frac{x^2}{2} + C(y)$

[2] $\Rightarrow \cos x + x\cos y + y = \partial_y\left(x\operatorname{sen}y + y\cos x + \frac{x^2}{2} + C(y)\right) =$

$= x\cos y + \cos x + C'(y)$

$\Rightarrow C'(y) = y \Rightarrow C(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$

$$U = x\operatorname{sen}y + y\cos x + \frac{x^2+y^2}{2} + C_1$$

d) $F(x,y) = (\underbrace{\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy)}_{P}, \underbrace{x^2\cos(xy)}_{Q})$

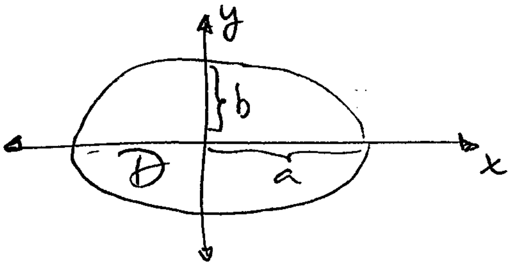
$$\frac{\partial P}{\partial y} = y\cos(xy) + x\cos(xy) - x^2y\operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2y\operatorname{sen}(xy)$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow F$ no es conservativo

20. Calcular el área encerrada por las curvas:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow$ elipse semieje a y b.



Para calcular áreas gracias al teorema de Green:

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dx + (-y)\,dy \longrightarrow \begin{cases} P = -y \\ Q = x \end{cases}$$

Parametrización de la elipse:

$\gamma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t) \quad t \in [0, 2\pi]$

Vamos a calcular la siguiente integral de línea:

$$\int_\gamma x\,dx - y\,dy \Rightarrow \vec{F}(x,y) = (-y, x)$$

$\gamma'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, b\cos t)$

$$\int_\gamma x\,dx - y\,dy = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-b\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t) \cdot (-a\,\mathrm{sen}\,t, b\cos t)\,dt$$

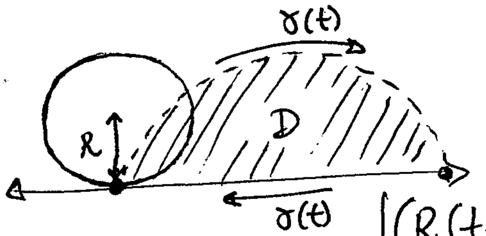
$$= \int_0^{2\pi} (ab\,\mathrm{sen}^2 t + ab\cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} ab(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} ab\,dt = \boxed{ab2\pi}$$

Por lo tanto $A(D) = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dx - y\,dy = \frac{1}{2}(ab2\pi) = \underline{\underline{ab\pi}}$

b) Arco de cicloide $\left[\; y = R(1-\cos\theta) \right.$

$\theta \in [0, 2\pi]$



Sea $\gamma(t) = \begin{cases} (R(t-\text{sen}t),\ R(1-\cos t)) , & 0 \leq t \leq 2\pi \\ R(4\pi - t, 0) , & 2\pi \leq t \leq 4\pi \end{cases}$

$\gamma(t)$ es una curva cerrada y simple que encierra el área que buscamos

↳ orientación negativa.

$\gamma'(t) = \begin{cases} (R(1-\cos t),\ R(\text{sen}t)) \\ R(-1,0) \end{cases}$

$$\int_\gamma x\,dx - y\,dy \rightarrow \vec{F} = (x, -y)$$

$$2A(D) = -\underbrace{\int_\gamma x\,dx - y\,dy}_{\text{lo llamamos } I}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (R(t-\text{sen}t), -R(1-\cos t)) (R(1-\cos t), R(\text{sen}t))\,dt +$$

$$+ \int_{2\pi}^{4\pi} (R4\pi - tR, 0)(-R, 0)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2(t-\text{sen}t)(1-\cos t) - R^2(1-\cos t)(\text{sen}t)\,dt +$$

$$+ \int_{2\pi}^{4\pi} R^2 4\pi + R^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} R^2(1-\cos t)(t - 2\text{sen}t)\,dt + R^2 8\pi^2 + R^2 \frac{t^2}{2}\Big|_{2\pi}^{4\pi}$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} t - 2\text{sen}t - t\cos t + 2\cos t\,\text{sen}t\,dt + R^2 8\pi^2 + 6\pi^2 =$$

$$= R^2 \left(2\pi^2 + 2\cancel{\cos t}^{\,0} \nearrow^0 \nearrow^0 \right) = 2\pi^2 R^2 + R^2 8\pi^2 + 6\pi^2 = \underline{\quad\quad} \pi^2$$

Posiblemente mal.

25. a) $f(x,y) = -\log\sqrt{x^2+y^2}$ en $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$

Flujo hacia el exterior de $F=\nabla f$ en el disco de radio 1 centrado en $(2,1)$.

$$f(x,y) = -\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \quad \text{si} \quad \underbrace{\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}}_{\to\ \Omega}$$

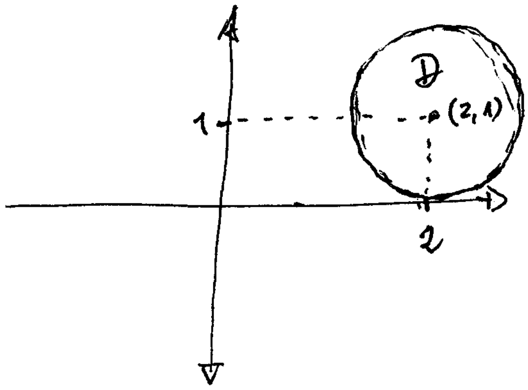
Calculemos ∇f:

$\to \partial_x f: -\frac{1}{2}\dfrac{\partial x(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$

$\to \partial_y f: \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

esto está bien definido en $\underbrace{\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}}_{\Omega}$ y es C^1.

$$\boxed{\vec{F} = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)}$$



$D = \{(x,y) \,/\, (x-2)^2+(y-1)^2 \leq 1\}$

Flujo de F a lo largo de ∂D

$= \int_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{N}\cdot d\vec{s} \to \vec{N}$ = normal exterior a D (a lo largo de $\Gamma = \partial D$).

Flujo de $F = \iint_D (\partial_x Q - \partial_y P)\, dA(x,y)$ (esto puedo aplicarlo porque $D\subset\Omega$)

$\partial_x Q = -\dfrac{y(-2x)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

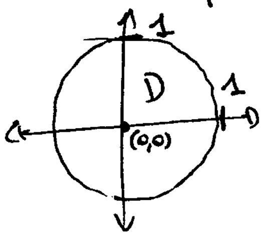
$\partial_y P = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

$\to \partial_x Q - \partial_y P = 0$ siempre que $(x,y)\neq(0,0)$

Flujo $= 0$.

b) Si fijamos ahora D en el (0,0) donde el flujo ya no está definido NO PODEMOS UTILIZAR EL T$^{\underline{a}}$ GREEN

Solo nos queda calcular el flujo directamente.



$\partial D = \{(x,y) / x^2+y^2=1\}$

vector normal exterior $N(x,y) = (x,y)$

(particularidad de la circunf

$$\int_{\partial D} \vec{F}.\vec{N}.d\vec{s} = \int_{\partial D} \left(-\frac{x}{\underbrace{x^2+y^2}_{=1 \text{ en } \partial D}}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)(x,y)\, ds =$$

$$= \int_{\partial D} (-x,-y)(x,y)\, ds = \int_{\partial D} \underbrace{(-x^2-y^2)}_{=-1 \text{ en } \partial D} ds = \boxed{-2\pi}$$