MINIMIZACIÓN $\begin{cases} \text{media} \\ \text{varianza} \end{cases}$

¿p? p = pto. de equilibrio

$$\longrightarrow \quad 0 = \sum_{i}^{n} (x_i - p)$$

$$0 = \sum x_i - np \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{n} \sum x_i$$

Este es el significado de la media

¿q?

$$F(q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - q)^2$$

⊛ ¿q tal que $F(q)$ sea mínimo?

desarrollando el cuadrado

$$F(q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2q x_i + q^2) =$$

$$= \overline{x^2} - 2q\bar{x} + q^2 \qquad (q \text{ variable})$$

$$F'(q) = \frac{dF(q)}{dq} = 0 \iff q = \bar{x}$$

Entonces el valor de q para que $F(q)_{min}$ es $\bar{x}$

$\Rightarrow$ valor mínimo es la varianza $= V_x$

Coeficiente de asimetría muestral

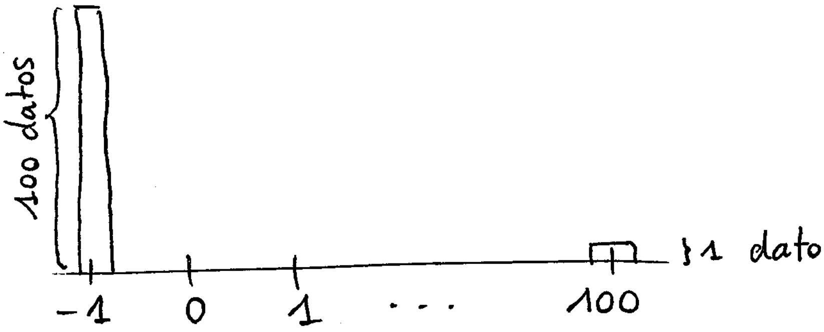
$$\boxed{ASIM_x = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{V_x^{3/2}}}$$

Ejemplo

$n = 101$

$x_1 = \dots = x_{100} = -1$

$x_{101} = 100$



$$\overline{x} = 0$$

$$V_x = \frac{100 \cdot 1^2 + 1 \cdot 100^2}{101} \approx 100$$

$$\frac{1}{101}\left(100 \cdot (-1) + 1 \cdot 10^6\right) \approx 10^4 \quad \left(\begin{array}{c}\text{numerador}\\ ASIM_x\end{array}\right)$$

$$V_x^{3/2} \approx 10^3$$

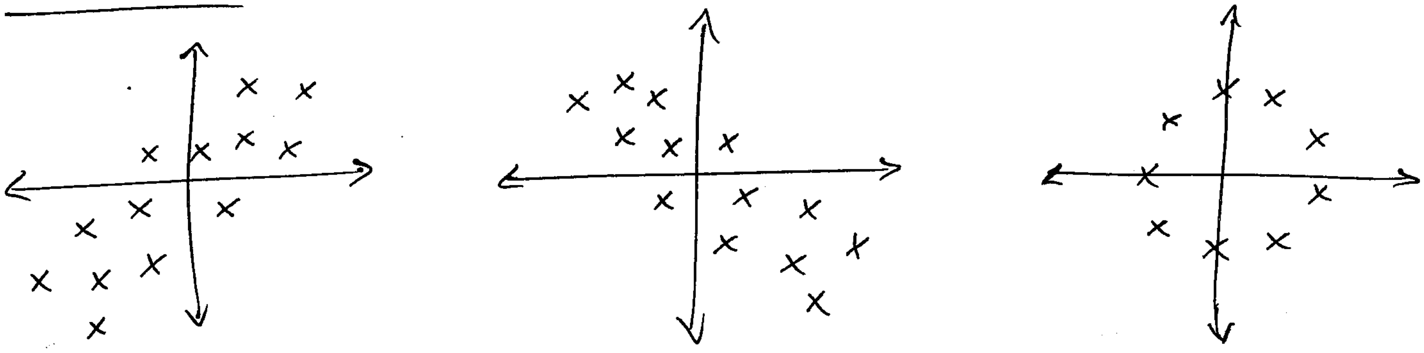
$$\Rightarrow ASIM_x \approx 10$$

$ASIM_x > 0$

$ASIM_x < 0$

Individuos Bidimensionales

Covarianza



$Cov_{X,Y} > 0$ $\qquad$ $Cov_{X,Y} < 0$ $\qquad$ $Cov_{X,Y} \approx 0$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|Cov_{X,Y}| \leq \sqrt{V_X}\sqrt{V_Y}$$

$$\begin{matrix} \alpha = (a_1, \dots, a_n) \\ \beta = (b_1, \dots, b_n) \end{matrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\left|\sum a_i b_i\right| \leq \left(\sum a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum b_j^2\right)^{1/2}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$$

$$Cov_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(x_i - \bar{x})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(y_i - \bar{y})\right)$$

$$|Cov_{X,Y}| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(y_i - \bar{y})^2\right)^{1/2} = \sqrt{V_X} \cdot \sqrt{V_Y}$$

Coeficiente de correlación

Si $V_X \neq 0$, $V_Y \neq 0$ $\qquad \rho_{X,Y} = \dfrac{Cov_{X,Y}}{\sqrt{V_X} \cdot \sqrt{V_Y}}$

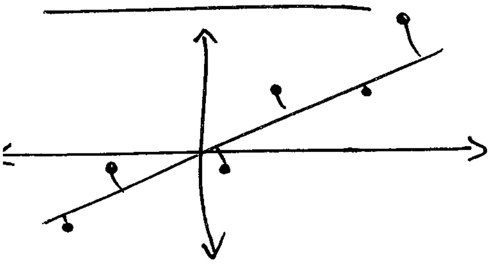
- su signo tiene el mismo significado que el de la covarianza
- $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
- invariante bajo cambios de escala

Tenemos una muestra del par de variables (X,Y):

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \dots,\ (x_n,y_n)$$

De entre todas las rectas $\boxed{y = a+bx}$ $\boxed{\text{recta} = (a,b)}$, ¿cuál es la que "mejor" aproxima/explica la muestra?

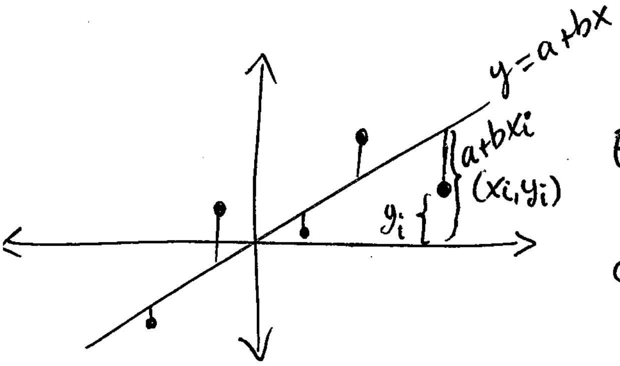
<u>Geométricamente</u>



error cuadrático

$$\text{Error}(a,b) = \frac{1}{n}\sum \text{dist}\big((x_i,y_i),\ \text{recta } y=a+bx\big)^2$$

Buscar (a,b) que MINIMICEN el error



cuadrático

$$E(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(y_i-(a+bx_i)\big)^2$$

¿a,b? para que el error es mínimo

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = 2a + 2\bar{x}b - 2\bar{y} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = 2\overline{x^2}b + 2\bar{x}a - 2\overline{xy} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = a + b\bar{x} \\ \overline{xy} = a\bar{x} + b\overline{x^2} \end{cases}$$

$\bar{y} = a + b\bar{x} \rightarrow$ nos dice que la recta de regresión pasa por $(\bar{x},\bar{y})$

Multiplicando la primera por $\bar{x}$ obtenemos:

$$\hat{b} = \frac{Cov_{X,Y}}{V_X}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \bar{y} - \left(\frac{Cov_{X,Y}}{V_X}\right)\bar{x}$$

Escrituras alternativas:

$$y - \bar{y} = \hat{b}(x-\bar{x})$$

ó

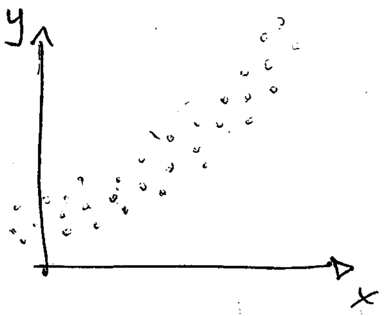
$$\frac{y-\bar{y}}{\sqrt{V_Y}} = \rho_{X,Y}\,\frac{x-\bar{x}}{\sqrt{V_X}}$$

Cuidado

$(y_i - (a+bx_i))$

La recta de regresión de y sobre x, no es la recta de regresión de x sobre y.

AJUSTE EXPONENCIAL



$$y = Ce^{Dx}$$

$$E(C,D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (Ce^{Dx_i})\right)^2$$

buscaría C, D que minimicen $E(C,D)$

TRUCO $\rightarrow$ transformamos este problema en uno lineal

regresión lineal de $(\underbrace{\ln y_i}_{w_i}, x_i)$

⊛ Si datos apuntan a $\boxed{y = a + b\ln x_i}$

Hacemos regresión lineal de $(\ln x_i, y_i)$

⊛ Si datos apuntan a que $\boxed{y = Gx^H}$

Hacemos $\ln y = \ln G + H\ln x$

regresión lineal de $(\ln x_i, \ln y_i)$

RECORDATORIO PROBABILIDAD

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$

Ejercicio: calcular $E(x^2)$

$$E(x^2) = \sum_{j=0}^{n} j^2 \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

OBSERVACIÓN: otra geométrica

Repetimos Bernoulli $Ber(p)$ independientes hasta primer éxito, contando el número de fracasos.

$$X = n^{\underline{o}} \text{ de fracasos}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(j-1)}}{(j-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

observación $\longrightarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{i!} = e^k$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j \lambda^j}{(j-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-1+1)\lambda^j}{(j-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-2)!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$\underline{X} \sim Exp(\lambda)$$

$$E(X) = \sum \text{valores} * \text{probabilidades} =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{\text{valores}} \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{\text{prob.}} dx = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} y e^{-y} dy}_{=1} = \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$$

En muchas ocasiones el parámetro "natural" de la exponencial es $1/\lambda$, no λ.

<u>FUNCIÓN GAMMA</u> $\quad Gamma(\lambda, t) \quad \lambda, t > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(t)} \cdot \lambda^t \cdot x^{t-1} \cdot e^{-\lambda x} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^t e^{-x} \frac{dx}{x}$$

Γ función de Euler

<u>observación</u> : $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} \underbrace{x^{t-1}}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x} dx}_{dv} = \underbrace{-x^{t-1} e^{-x} \Big]_{x=0}^{x=\infty}}_{=0} +$$

$$+ (t-1) \underbrace{\int_0^{\infty} x^{t-2} e^{-x} dx}_{\Gamma(t-1)}$$

$$\boxed{\text{Para } n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \qquad \Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = (n-1)!}$$

¿ $\Gamma(1/2)$?

cambio variable $x = y^2/2 \rightarrow dx = y\,dy$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx \overset{\downarrow}{=} \int_0^\infty \sqrt{2}\, e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-y^2/2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2} dy}_{(\text{la normal } = \sqrt{2\pi})} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$$

$X \sim \text{Gamma}(\lambda, t)$

cambio variable $\lambda x = y$ $\quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

$\downarrow \lambda dx = dy$ $\quad \frac{dy}{y} = \frac{\cancel{\lambda} dx}{\cancel{\lambda} x}$

$$\int_{-\infty}^\infty f_X(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^\infty \lambda^t x^{t-1} e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(t)} \underbrace{\int_0^\infty y^t e^{-y} \frac{dy}{y}}_{\Gamma(t)} = \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t)} = 1$$

$X \sim \text{Gamma}(\lambda, t)$

cambio de variable $\lambda x = y$

$$E(x^k) = \int_0^\infty \underset{\substack{\downarrow \\ \text{valores}}}{x^k} \underbrace{\frac{1}{\Gamma(t)} (\lambda x)^t \cdot e^{-\lambda x} \frac{dx}{x}}_{\text{probabilidades}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(t)} \cdot \frac{1}{\lambda^k} \underbrace{\int_0^\infty y^k y^t e^{-y} \frac{dy}{y}}_{\Gamma(t+k)} = \frac{1}{\lambda^k} \cdot \underbrace{(t+k-1) \cdot \ldots \cdot t}_{k \text{ factores}}$$

$$\Gamma(t+k) = (t+k-1)\,\Gamma(t+k-1) = \cdots$$

$$= \underbrace{(t+k-1)(t+k-2) \cdots t}_{k \text{ factores}}\, \Gamma(t)$$

Ejemplo

$X \sim Normal(0,1)$

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

$Y = e^X$ (log-normal)

$(a,b) = (-\infty, \infty)$

$(c,d) = (0, \infty)$

$$f_X(x) = f_Y(e^x) \cdot e^x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$y \in (0,\infty): \quad f_Y(y) \cdot y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$$

---

transformación de U

$F_X^{-1}(U) \overset{d}{=} X$

$s \in (0,1)$

$\mathbb{P}(U \leq s) = s$

$$\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F_X(t)) = F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

Ejemplo $\quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$$f_{(X_1,X_2)} = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & x_1, x_2 > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) $$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{valores}} \underbrace{e^{-(x_1+x_2)}}_{\text{probab.}} dx_1\, dx_2 \Rightarrow \begin{matrix} u = x_1 + x_2 \,; & x_1 = u - v \\ v = x_2 \,; & x_2 = v \end{matrix}$$

$$|J| = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1, X_2) = \int_0^\infty \int_v^\infty u e^{-u}\, du\, dv \to \text{por partes} \to \mathbb{E}(X_1, X_2) =$$

b) Marginales

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{x_2 \in \mathbb{R}} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_2 = \int_0^\infty e^{-(x_1+x_2)} dx_2 = e^{-x_1} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x_2} dx_2}_{=1} = e^{-x_1}$$

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1} & \text{si } x_1 > 0 \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} \quad \text{es } \exp(1).$$

$$\mathbb{E}(X_1+X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 1+1=2$$

<u>Ejemplo</u> (X_1, X_2) vector ① 8 dimensiones (8 grados de libertad)

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	
-1				$=1/3$
0				$=1/3$
1				$=1/3$
	$\shortparallel$ $1/3$	$\shortparallel$ $1/3$	$\shortparallel$ $1/3$	

② Fijamos marginales $\longrightarrow$ 4 grados de libertad

③ X_1 y X_2 son independientes
$\Rightarrow \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = x_2)$

$\Rightarrow$ CONOCEMOS LA FUNCIÓN DE MASA CONJUNTA DE (X_1, X_2).

X_1, X_2 independientes

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) \overset{!}{=} \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2)$$

Independientes $\Rightarrow \operatorname{cov}(\text{—}) = 0$
pero al revés no

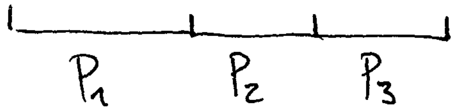
$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	
-1	$1/6$	0	$1/6$	$=1/3$
0	0	$1/3$	0	$=1/3$
1	$1/6$	0	$1/6$	$=1/3$
	$\shortparallel$ $1/3$	$\shortparallel$ $1/3$	$\shortparallel$ $1/3$	

Marginales fijadas, $\operatorname{cov}(\text{—}) = 0$ pero NO indep.

$\mathbb{E}(X_1) = 0$ y $\mathbb{E}(X_2) = 0$
$\Rightarrow$ Necesitamos $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = 0$

Modelo: $n=3$

Lanzamos una bola y cae en una caja con n subc



$P_1 + P_2 + P_3 = 1$

$P_1, P_2, P_3 > 0$

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si bola caja 1} \\ 0 & \text{si caja 2 ó 3} \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} 1 & \text{caja 2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad X_3 = \begin{cases} 1 & \text{caja 3} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

X_2 y X_3 análogas

posibles valores $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} P_1 = \mathbb{E}(X_1) \\ P_2 = \mathbb{E}(X_2) \\ P_3 = \mathbb{E}(X_3) \end{pmatrix}$$

$X_1 X_2 = 0$ (X_1 y X_2 no pueden ser 1 a la vez).

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = -P_1 P_2$$

$$V(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = P_1 - P_1^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} P_1 - P_1^2 & -P_1P_2 & -P_1P_3 \\ -P_1P_2 & P_2 - P_2^2 & -P_2P_3 \\ -P_1P_3 & -P_2P_3 & P_3 - P_3^2 \end{pmatrix}$$

caso particular: $P_1 = P_2 = P_3 = 1/3$

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{cov}(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} 2/9 & -1/9 & -1/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

semidefinida positiva

$$\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{V}(X_i - \mathbb{E}(X_i))$$

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{cov}(X_i - \mathbb{E}(X_i),\ X_j - \mathbb{E}(X_j))$$

$$\mathbb{E}(X_i) = 0 = \mathbb{E}(X_j)$$

$$\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{E}((X_i + X_j)^2) = \underbrace{\mathbb{E}(X_i^2)}_{\mathbb{V}(X_i)} + \underbrace{\mathbb{E}(X_j^2)}_{\mathbb{V}(X_j)} + \underbrace{2\mathbb{E}(X_i X_j)}_{2\operatorname{cov}(X_i, X_j)}$$

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j X_j$$

tiene varianza

$$\mathbb{V}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j X_j\right) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_i a_j \cdot \operatorname{cov}(X_i, X_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \cdot \mathbb{V}(X_j) + \sum_{1 \le i \ne j \le n} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

forma cuadratica

$$\le \mathbb{V}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j X_j\right) = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & & \operatorname{cov}(X_i X_j) \\ & \ddots & \\ \operatorname{cov}(X_i X_j) & & \mathbb{V}(X_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

MIDEFINIDA SITIVA

simétrica

A simétrica $n \times n$

Q = forma cuadrática asociada a A.

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \qquad Q(\vec{x}) = \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = \underbrace{\vec{x}^{T}}_{1\times n} . \underbrace{A}_{n\times n} . \underbrace{\vec{x}}_{n\times 1} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} x_i x_j$$

$$a^T = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$a^T . \operatorname{Cov}(\mathbb{X}) . a = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 V(x_j) + \sum_{i\neq j} \operatorname{cov}(x_i, x_j) a_i a_j = V(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) \geq$$

$$\vec{a}^T . \underbrace{\operatorname{Cov}(\mathbb{X})}_{\text{semidefinida positiva}} . \vec{a} = V\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) \geq 0 \quad \text{para todo } \vec{a} \in \mathbb{R}^n.$$

¿Cuándo $\operatorname{Cov}(\mathbb{X})$ es semidefinida positiva pero no definida positiva?

Hay $\vec{a} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{a}^T . \operatorname{Cov}(\mathbb{X}) . \vec{a} = 0 = V\left(\sum_{j=1}^{n} a_j V_j\right) \Leftarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \equiv$ cte. (identicamente)

Ejemplo

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{X_1 + X_2 + X_3 \equiv 1}_{P_1,\ P_2,\ P_3} \qquad V(X_1 + X_2 + X_3) = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Cov}(\mathbb{X})$ es semidefinida positiva pero no def. po

---

$$\mathbb{Y} = M\mathbb{X} + \vec{b} \qquad f_{\mathbb{X}}(x) = f_{\mathbb{Y}}(M\vec{x} + \vec{b}) . |\det(M)|$$

$$f_{\mathbb{X}} \qquad f_{\mathbb{Y}}(y) = \frac{1}{|\det(M)|} . f_{\mathbb{X}}(M^{-1}(y-b))$$

(X, Y) vector aleatorio con $f_{(X,Y)}(x,y)$

Sea $Z = X + Y$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, z-x)\, dx$$

$\xrightarrow[\text{independientes } X \text{ e } Y]{}$ $$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $\quad X, Y \quad \exp(1)$ independientes

Z es $\exp(\lambda)$ $\qquad f_Z(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$X+Y$

nción de densidad

$$\mathbb{E}(X+Y) = 2$$

$$\mathbb{V}(X+Y) = 2$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_X\underset{\substack{\vee\\0}}{(x)} \cdot f_Y \underset{\substack{\vee\\0}}{(z-x)}}_{0 \leq x \leq z} dx = \int_0^z e^{-x} \cdot e^{-(z-x)} dx = e^{-z} \int_0^z dx$$

$$\Rightarrow f_{X+Y}(z) = \begin{cases} z e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Ejemplo: $\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$ independientes $\qquad \begin{matrix} X \sim N(0,1) \\ Y \sim N(0,1) \end{matrix}$ $\qquad$ ¿ densidad $X+Y$?

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx =$$

completamos cuadrados

$$x^2 + (z-x)^2 \xrightarrow{\text{queremos}} (\text{algo})^2 + z^2$$

$$\shortparallel$$

$$2x^2 - 2zx + z^2$$

$$\shortparallel$$

$$\left(\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} z\right)^2 + \frac{1}{2} z^2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + (z-x)^2)} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} z\right)^2 + \frac{1}{2} z^2\right)} dx \quad =$$

$$= \frac{e^{z^2/4}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sqrt{2}x - z/\sqrt{2})^2}{2}} dx =$$

cambio variables
$u = \sqrt{2}x - z/\sqrt{2}$
$du = \sqrt{2}dx$

$$= \frac{e^{z^2/4}}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}}_{=\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/4}$$

$\Rightarrow$ Normal media 0 y desviación típica $\sqrt{2}$

$X + Y \sim N(0, 2)$

Ejemplo: $x_1, \dots, x_{100}$ dado regular

repetimos el experimento 100 veces

$X = (x_1, \dots, x_{100})^T$ tiene 6^{100} formas

$$\mathbb{P}(320 \le \underbrace{\sum_{i=1}^{100} x_i}_{S_{100}} \le 380)$$

$\mathbb{E}(X) = \mu = \frac{7}{2}$

$V(X) = \frac{35}{12}$ $\quad \sqrt{V(X)} \approx 1'71$

$$\frac{S_{100} - 100 \cdot \frac{7}{2}}{1'71\sqrt{100}} = \frac{S_{100} - 50.7}{17'1} \xrightarrow[\simeq]{d} N(0,1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{-30}{17'1} \le \frac{S_{100} - 350}{17'1} \le \frac{30}{17'1}\right) = \mathbb{P}(-1'75 \le N(0,1) \le 1'75)$$

$= 92\% \longrightarrow$ excel