ESTADÍSTICA I

PROF: JOSE LUÍS FERNÁNDEZ
C - 17 - 302

COORD: PABLO FERNÁNDEZ

www.uam.es/pablo.fernandez

WEB DE DOCUMENTACIÓN

2PARCIALES
- Vier - 26 - oct (P1)
- Vier - 21 - dic (P2)

9:00 - 10:30

Trabajo laboratorio

$$\boxed{NF = 0'45 P_1 + 0'45 P_2 + 0'1 T}$$

PARTES DEL CURSO

1. Recordatorio
   - Estadística descriptiva
   - Probabilidad I / Simulación

YO

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

PROF

$$V_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{\overline{x^2}} - \underbrace{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}x_i}_{\underbrace{\frac{-2\bar{x}}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{-2\bar{x}^2}} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2}_{\underbrace{"n\bar{x}^2}_{"\bar{x}^2}} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Estadística I
Grado en Matemáticas, UAM, 2018-2019

Práctica 1 (simulación)

$x = F_X^{-1}(u)$

Parte 1. Un poco de Excel.

- Celdas, rangos.
- Contenido de celdas: datos, texto, fórmulas.
- F2 para editar contenido de celdas.
- Copiar fórmulas: referencias relativas y absolutas (tecla F4).
  - Ilustración: cálculo de valores de $\sin(\lambda x)$, donde λ es un parámetro dado y x toma valores entre 0 y 3 con separación 0.1. Dibujo de la gráfica.
- Tablas.
  - Ilustración: cálculo de

$$\sum_{j=0}^{30} \sin(\lambda j/10)$$

para distintos valores de λ (por ejemplo, $\lambda = 1, \dots, 25$).

a partir de esto obtenemos muestras x de X

necesitamos un diccionario (muestra de U)

Parte 2. Simulación de variables aleatorias.

- Columna con sorteos de una $X \sim U[0,1]$ (función `aleatorio()`). Tecla F9 para recalcular. Comparación de medias y varianzas muestrales con $\mathbf{E}(X) = 1/2$ y $\mathbf{V}(X) = 1/12$.
- Columna con sorteos de una $X \sim \text{EXP}(\lambda)$, para un parámetro $\lambda > 0$. Recuérdese que

$$\mathbf{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$u = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln\left(\frac{1}{1-u}\right)$

Comparación de medias y varianzas muestrales con $\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$ y $\mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2$.

$X \overset{d}{=} F_X^{-1}(U)$

determinista

Parte 3. Teorema central del límite.

- Tabla de simulaciones de la variable $S_{100} = \sum_{j=1}^{100} X_j$, donde $X_1, \dots, X_{100}$ son variables exponenciales de parámetro λ completamente independientes. Media y varianza muestrales de S_{100}.
- Tabla de simulaciones de la variable

$$\frac{S_{100} - 100/\lambda}{10/\lambda}$$

Histogramas. Comparación con $\mathcal{N}(0,1)$.

$$f(x) = \begin{cases} 4x & , \ x \in [0, 1/2] \\ 4(1-x) & , \ x \in (1/2, 1] \\ 0 & , \ \text{en el resto} \end{cases}$$

- Fórmula explícita para $F(x)$ (función de distribución)

$$F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ 2x^2 & , \ x \in [0, 1/2] \\ 4x - 2x^2 - 1 & , \ x \in (1/2, 1] \\ 1 & , \ x > 1 \end{cases}$$

- Fórmula explícita para $F^{-1}(u)$ (inversa f distribución)

$$y = 4x - 2x^2 - 1 = -2x^2 + 4x - 1 = -2\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -2\left((x-1)^2 - 1 + \frac{1}{2}\right) = -2\left((x-1)^2 - 1/2\right) \Rightarrow$$

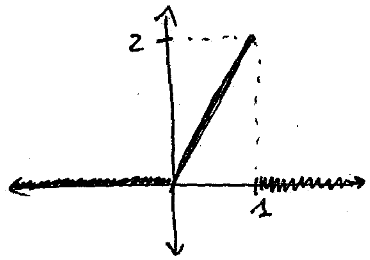
$$\Rightarrow \frac{y-1}{-2} = (x-1)^2 \xRightarrow{y \leftrightarrow x} y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{2}} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 - \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & , \ u < 0 \\ \sqrt{\frac{x}{2}} & , \ u \in [0, 1/2] \\ 1 - \sqrt{\frac{1-x}{2}} & , \ u \in [1/2, 1] \\ 1 & , \ u > 1 \end{cases}$$

Ejercicio (no está en las hojas)

X v.a. con $f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \leq 0 \\ 2x & , \text{ si } x \in (0,1) \\ 0 & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$



$X_1, \dots, X_n$ clones indep. de X

¿$\mathbb{E}(M_n)$? $\quad M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

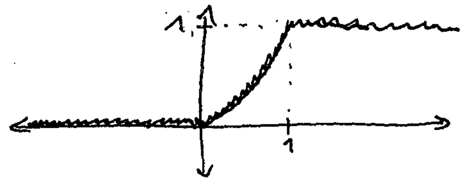
Alternativa 1

$$\mathbb{E}(M_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\max(x_1, \dots, x_n)}_{\text{valores}} \cdot \underbrace{f_X(x_1) \cdot \dots \cdot f_X(x_n)}_{\text{probab.}} \, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

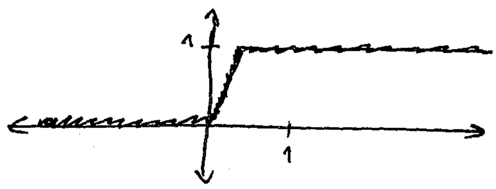
Alternativa 2

$$\mathbb{E}(M_N) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{M_n}(x) \, dx$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0 \\ \int 2x \, dx = x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$$



$$F_{M_n}(x) = F_X(x)^n = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^{2n} & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



$$f_{M_n}(x) = F'_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2n x^{2n-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(M_n) = \int_0^1 x \cdot 2n x^{2n-1} \, dx = \int_0^1 2n x^{2n} \, dx = 2n \int_0^1 x^{2n} \, dx =$$

$$= 2n \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{2n}{2n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$\mathbb{V}(M_N) = \mathbb{E}(M_n^2) - \mathbb{E}(M_n)^2 \quad ; \quad \mathbb{E}(M_n^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{M_n}(x) \, dx = \int_0^1 2n x^{2n+1} \, dx =$$

$$= 2n \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1 = \frac{2n}{2n+2}$$

$$\mathbb{V}(M_n) = \underbrace{\frac{2n}{2n+2}}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 1} - \underbrace{\frac{4n^2}{(2n+1)^2}}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$