Topología, curso 2019-20

Hoja 5

1. Estudia si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican.

i) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

ii) $\{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

iii) $\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} \subset \mathbb{R}$.

iv) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología del límite inferior $\mathcal{T}_{[\,)}$.

v) $[0,1] \times \{3\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico.

2. Halla un recubrimiento de $[0,1)$ por intervalos abiertos que no admita subrecubrimiento finito.

3. Da un ejemplo de un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tal que:

i) A no es compacto y $\overline{A}$ es compacto.

ii) A es compacto pero $\overline{A}$ no es compacto. *Sugerencia*: $X = \mathbb{N}$, con la topología que consta de $\varnothing$ y de todos los conjuntos que contienen a 1.

4. Si un espacio es compacto con cierta topología, ¿lo será con una menos fina? ¿Y con una más fina?

5. Demuestra que si C_1 y C_2 son dos subconjuntos compactos disjuntos de un espacio de Hausdorff, existen dos abiertos disjuntos U_1, U_2 tales que $C_i \subset U_i$.

6. Demuestra que si C es un compacto de un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto C' de puntos de acumulación de C es también compacto.

7. Demuestra que si $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de bolas cerradas encajadas de $\mathbb{R}^n$ (es decir, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$), entonces $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j \neq \varnothing$.

8. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) La unión finita de subconjuntos compactos de un espacio es un subconjunto compacto.

ii) La unión de una familia cualquiera de compactos de un espacio es un subconjunto compacto.

iii) La intersección de una familia de compactos de un espacio de Hausdorff es un subconjunto compacto.

9. Decide cuáles son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, con la topología de los complementos numerables y, finalmente, con la topología discreta.

10. Demuestra que los conjuntos compactos en la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ son necesariamente numerables.
Indicación: Prueba primero que en un conjunto no numerable existe siempre una sucesión estrictamente creciente.

11. Consideremos los conjuntos $[0,1] \times [0,1]$ y $[0,1) \times [0,1]$.

i) ¿Son espacios compactos con la topología del orden lexicográfico?

ii) ¿Son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico?

12. **i)** Demuestra que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^2$ no son homeomorfos.

ii) Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 = y^2,\ x, y \in [-1,1]\}$, con la topología usual. ¿Existe alguna función continua y suprayectiva de X en $\mathbb{R}$?

13. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Prueba que la función distancia está acotada.

14. Demuestra que si X es compacto, Y es Hausdorff y $f : X \to Y$ es continua entonces f es cerrada. Concluye que si f es además biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

15. Demuestra que si $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(X, \mathcal{T}_2)$ es compacto y Hausdorff para dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ que sean comparables, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

16. Demuestra que si Y es compacto entonces $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada. Da un ejemplo de un conjunto no compacto en $\mathbb{R}^2$ cuyas proyecciones sean compactas. Indicación: Si A es cerrado y $x \notin \pi_1(A)$, hallamos un «tubo» $T = U_x \times Y$ tal que $T \cap A = \varnothing$.