Ecuaciones diferenciales

Lista 7 $\qquad$ 2ºM/3ºDG, Curso 2018-19

1. (*) Dados los sistemas lineales

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y - 7 \\ y' = -x - 2y + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x - 2y + 3 \\ y' = 2x - y - 6 \end{cases}$$

a) Determínese la naturaleza de sus puntos críticos y sus propiedades de estabilidad.
b) En el caso en el que se obtiene un punto de silla, determinar las direcciones de sus ejes.

2. Estudiar los puntos críticos de los problemas

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2 \\ 4x - 3y + 7xy \end{pmatrix}$

2) (*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(4 - 2x - y) \\ y(3 - x - y) \end{pmatrix}$

3) (*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x^3 \\ x - y^3 \end{pmatrix}$

4) (*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + x^3 \\ x + y^3 \end{pmatrix}$

5) (*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} + y \\ y - x\,y \end{pmatrix}$

3. Describir el plano de fases para los sistemas:

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$

4. (*) Discutir según los valores de μ la estabilidad del $(0, 0)$para el sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x - \mu(x^2 - 1)y \end{pmatrix}$$

(*Ecuación de Van der Pol*).

5. (*) Decimos que la función

$$E : \Omega \subset R^2 \to R$$

es una integral primera del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

si $E \in C^1(\Omega)$, no es constante en ningún abierto contenido en Ω, y $E(x(t), y(t))$ es constante para cada solución del sistema (es decir, las soluciones del sistema son conjuntos de nivel para E). Calcular una integral primera para los sistemas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1+y) \\ -y(1+x) \end{pmatrix}$$

6. Utilizar el cambio $y = x^2 u(t)$ para calcular una integral primera del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & xy - 3x^3 \\ y' & = & y^2 - 6x^2 y + x^4. \end{array} \right.$$

Dibujar el plano de fases.

7. Hallar una integral primera para el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & xy \\ y' & = & \log x. \end{array} \right.$$

8. (*) Mediante el método directo de Liapunov estúdiese el tipo de estabilidad del $(0,0)$ en los siguientes sistemas:

1) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - \frac{1}{4}x^3 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 3x^3 \\ -x - 7y^3 \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy^4 \\ yx^4 \end{pmatrix}$$

4) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - xy^4 \\ y - y^3 x^2 \end{pmatrix}$$

5) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - x^3 \\ 3x - 4y^3 \end{pmatrix}$$

9. (*) En cada uno de estos sistemas determínese la naturaleza del punto crítico $(0,0)$ y sus propiedades de estabilidad:

a) $$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y - 2\,\mathrm{sen}(xy) \\ y' = -2\,x + y + 3\,y^2 \end{array} \right.$$

b) $$\left\{ \begin{array}{l} x' = -\,\mathrm{sen}(x+y) + 1 - e^{-x2} \\ y' = -2\,x + 4\,y + y\,\mathrm{sen}(x+y) \end{array} \right.$$

10. (*) Estúdiense los puntos críticos del siguiente sistema autónomo y esbócese una posibilidad coherente con estos datos para las trayectorias del sistema en el primer cuadrante.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x\,(60 - 4\,x - 3\,y) \\ y' = y\,(42 - 3\,x - 2\,y) \end{array} \right.$$

11. (*) Considérese el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y + x\,(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y\,(x^2 + y^2) \end{array} \right.$$

a) Estúdiese que tipo de punto crítico es $(0,0)$ en el sistema linealizado.
b) Resuélvase el sistema no lineal empleando coordenadas polares y decídase la estabilidad de dicho punto crítico.
c) Realizar un análisis análogo (sin calcular explícitamente las soluciones) en el caso del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - x\exp(x^2 + y^2) \\ x + 3y - y\exp(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

12. (*) Transfórmese la ecuación del péndulo $x'' + \operatorname{sen} x = 0$ en un sistema autónomo con el procedimiento habitual (escribiendo $y = x'$).
a) Calcúlense todos los puntos críticos.
b) Hállese la ecuación de las trayectorias
c) Decídase la estabilidad y carácter de todos los puntos críticos.
d) ¿Qué función de Liapunov se podría emplear para probar la estabilidad en $(0,0)$?

13. (*) Comprobar que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x(1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2}) \\ y' & = & y(1 - \dfrac{x^2}{2} - y^2) \end{array} \right.$$

es un sistema conservativo, calcular un potencial y estudiar los puntos críticos y el plano de fases.

14. (*) Pruébese que el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{array} \right.$$

tiene (al menos) una solución periódica rodeando al origen. Estúdiese la estabilidad de ese punto. *Indicación*: Utilícense coordenadas polares.

15. (*) Determínese una función de Liapunov para

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -2y - x^3 \\ y' = x/2 - 4y^3 \end{array} \right.$$

16. (*)Usando la función

$$V(x,y) = (x/a)^2 + (y/b)^2$$

demostrar que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x(x - a) \\ y' & = & y(y - b) \end{array} \right.$$

tiene en el origen un punto crítico asintóticamente estable. Comprobar que toda trayectoria que entre en la región $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1$ tiende a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$.

17. (*) Hállese una función de Liapunov de la forma $\alpha(2x+y)^2 + \beta(x+y)^2$ que pruebe la estabilidad en el origen del sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = -3x - 2y - (2x+y)^3 + (x+y)^3 \\ y' = 5x + 3y - 2(x+y)^3 + (2x+y)^3 \end{cases}$$

18. Demostrar que la solución trivial $x(t) \equiv 0$ es asintóticamente estable en las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x'' + x' - \dfrac{(x')^3}{3} + x = 0$.

b) $x'' + x' \operatorname{sen}(x')^2 + x = 0$.

c) $x'' + (x')^3 + x^3 = 0$.