Modelos de epidemias

Rafael Orive, Daniel Faraco
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Marzo 2020

Problema

Un pequeño grupo de personas tiene una enfermedad contagiosa. Este se introduce en una población más grande que es susceptible de enfermarse. Nos hacemos las siguientes preguntas

- ¿Qué ocurre según transcurre el tiempo?
- Una epidemia consiste en un aumento repentino del nḿero de infectados. ¿Se presentará una epidemia?
- ¿Desaparece la enfermedad? ¿Cuándo?
- ¿Cuantas personas enfermarán?
- ¿Cuantos fallecimientos habrá?

Modelos epidemiología con EDOs

- Modelo SR.
- Modelo SIR.
- Teorema del Umbral.

SR: El modelo

- Los infectados mueren con probabilidad pdt.
- La probabilidad de ser infectado es qdt.
- Los que no mueren se hacen inmunnes.
- $m(t)dt$ probabilidad de morir por otra causea.
- Grupos. $P(t) = S(t) + R(t)$ susceptibles e Inmunes.
- Un individuo deja el grupo de los susceptibles porque muere o porque le infectan:
$$S'(t) = -qS - mS \tag{1}$$
- Por otro lado si te infectas y sobrevives pasas de ser susceptible a retirado. Y ademas algunos retirados pueden morir.
$$R'(t) = q(1-p)S - mR \tag{2}$$

SR:Las ecuaciones

Si $X = \dfrac{S}{P}$, ocurre que

$$x' = -qx + pqx^2 \tag{3}$$

Veamos porqué:

- Sumando las ecuaciones, llegamos a

$$P' = -pqS - mP \tag{4}$$

- Despejando m de (1): $m = -q - S'/S$
- Sustituyendo m en (4)

$$P' = -pqS + P(q + \frac{S'}{S}) \Rightarrow pqS^2 - qPS = S'P - SP'.$$

- Divido por P^2

$$-q\frac{S}{P} + pq\frac{S^2}{P^2} = \frac{S'P - SP'}{P^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{S}{P}\right)$$

Solución

Notemos que (3) es la ecuación logistíca.
Tomando $x = 1/z$ se transforma en $z' = qz - pq$.
Como $z(0) = P(0)/S(0) = 1$ tenemos la solución explícita.

$$z(t) = e^{qt}(1 - p(q\int_0^t e^{-qs}ds) = e^{qt}(1-p) + p,$$

$$x(t) = \frac{1}{e^{qt}(1-p) + p}$$

Consecuencia: Todos van a ser infectados ya que $S(t) \to 0$.

Viruela en niños

Comparamos con la situación en que se inocula el virus de la viruela a los recien nacidos, de manera que solo se muere de otras causas.

$$(P_*)' = -mP$$

Hacemos el mismo truco: Despejar m en (4) y consideramos la función $w = P/P_*$. Obtenemos una ecuación para w

$$w' = -pq\frac{S}{P}$$

que reducimos a

$$\frac{w'}{w} = pq\frac{e^{-qt}}{(1-p) + pe^{-qt}}$$

recordando $w(0) = 1$ llegamos a

$$w(t) = \frac{1}{(1-p) + pe^{-qt}}, \quad P_* = \frac{P}{(1-p) + pe^{-qt}}$$

Conclusiones

- Esperanza de vida. Lo que Bernoulli comparó fue

$$\frac{1}{P_0}\int_0^\infty P(x)dx$$

  obteniendo una ganancia de casi tres años de vida. Es necesario dar un resultado cuantitativo.
- Controversia con D'Alambert. D'Alambert crítico que la mortalidad debida a la viruela debería también depender del tiempo, es decir, de la edad. Como hombre pragmático además crítico la esperanza de vida como medida de la eficacia pues, para la sociedad, solo son beneficiosos los adultos. Como en tantos otros casos de matemáticos, la controversia duro años.

SIR

Se divide la población en tres clases:

- S Clase susceptible. No transmiten pero se contagian.
- I Clase Infectiva. Individuos que están en condiciones de transmitir la enfermedad.
- R Clase retirada. Muertos, aislados, recuperados o inmunes.

Reglas del modelo:

- La población es constante $N = I + S + R$. Consideramos que nacimientos/muertes inmigración/emigración ocurren en una escala distinta.
- La cantidad de susceptibles que pasan a infectivos es proporcional al numero de encuentros $rSIdt$, r tasa de infección.
- El aumento de retirados es proporcionan al número de infectados γIdt, γ tasa de retiro.

De las reglas anteriores se el siguiente sistema de EDOs:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -rSI, \\ \frac{dI}{dt} &= rSI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I. \end{aligned} \qquad \text{(SIR)}$$

Las dos primeras ecuaciones de (SIR) forman un sistema independiente. La ecuación de las trayectorias es

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\gamma}{rS} \Rightarrow I(S) = I_0 + S_0 - S + \rho \ln(S/S_0) \qquad (5)$$

donde S_0 e I_0 son los valores iniciales y $\rho = \gamma/r$.

El umbral

Notemos de (5) que $I(S_0) = I_0$ e $I(0) = -\infty$. Entonces, existe S_∞ tal que $I(S_\infty) = 0$ e $(S_\infty, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema (SI).

- La enfermedad no extermina la población. Algunos individuos sobreviven, S_∞.
- La propagación se detiene por falta de infecciosos.

ρ parámetro importante. Observando la ecuación de I de (SIR) hay dos comportamientos :

- Si $S < \rho$, el número de infectados decrece en el tiempo.
- Si $S > \rho$, el número de infectados crece

Conclusión. Hay epidemia sólo si el número de susceptibles excede de ρ

Teorema del Umbral de la Epidemiología

Theorem

Sea $S_0 = \rho + \nu$ $(\nu > 0)$, *con* $\dfrac{\nu}{\rho} << 1$. *Sea* $I_0 <<< 1$.
Entonces, el número de infectados finalmente es aproximadamente 2ν.

Demostración. Al tender $t \to \infty$ en (5):

$$0 = I_0 + S_0 - S_\infty + \rho \ln\left(\frac{S_\infty}{S_0}\right)$$

Como $I_0 << 1$, consideramo $I_0 = 0$ en esta ecuación y

$$0 = S_0 - S_\infty + \rho \ln(\frac{S_\infty}{S_0}) = S_0 - S_\infty + \rho \ln(1 - \frac{S_0 - S_\infty}{S_0}) \qquad (6)$$

Si en un pequeño grupo de susceptibles añadimos un pequeño grupo de susceptibles, tendremos un dato inicial (S_0, I_0) que convergerá a un $(S_\infty, 0)$ muy cercano. Por tanto, $S_0 - S_\infty$ será muy pequeño comparado con S_0.

Truncando la serie de Taylor $ln(1-x) \approx -x - \dfrac{x^2}{2}$ en (6) resulta

$$\begin{aligned} 0 &= S_0 - S_\infty - \rho \frac{S_0 - S_\infty}{S_0} - \rho \frac{(S_0 - S_\infty)^2}{2S_0^2} \\ &= (S_0 - S_\infty)\left(1 - \frac{\rho}{S_0} - \frac{\rho}{2S_0^2}(S_0 - S_\infty)\right) \end{aligned}$$

Despejando

$$S_0 - S_\infty = 2S_0\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) = 2\nu\left(1 + \frac{\nu}{\rho}\right) \approx 2\nu.$$

Comparando con datos reales

Hecho. El número de infectados a la semana no se puede medir pero si el número de retirados. De las ecuaciones S y R de (SIR) resulta

$$\frac{dS}{dR} = \frac{-S}{\rho} \Rightarrow S(R) = S_0 e^{-R/\rho}$$

Insertándolo en la ecuación para R se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= \gamma I = \gamma(N - S - R) = \gamma\left(N - R - S_0 e^{-R/\rho}\right) \\
&= \gamma\left(N - R - S_0\left(1 - \frac{R}{\rho} + \frac{R^2}{2\rho^2}\right)\right) \\
&= \gamma\left(N - S_0 + \left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right) R - \frac{S_0}{2}\frac{R^2}{\rho^2}\right)
\end{aligned}$$

donde se ha reemplazado la exponencial por los tres primeros términos de Taylor.

Solución recuperados

La solución de esta ecuación es

$$R(t) = \frac{\rho^2}{S_0}\left[\frac{S_0}{\rho} - 1 + \alpha \tanh(\frac{1}{2}\alpha\gamma t - \phi)\right]$$

donde

$$\alpha = \left[\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)^2 \frac{2S_0(N - S - 0)}{\rho^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \phi = \tanh^{-1}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{S_0}{\rho} - 1\right)$$

En 1927, Kermack and MacKendrick compararon los resultados predecidos por esta ecuación y los de una plaga en Bombay de 1905-06 y observaron que los datos estaban en sintonía con los fallecimientos.

Respuestas a las preguntas iniciales

- ¿Qué ocurre según transcurre el tiempo?
  Los estados tienden a sus puntos de equilibrio. En (SIR) son
  $$(S_\infty, 0, N - S_\infty)$$
- Una epidemia consiste en un aumento repentino del nḿero de infectados. ¿Se presentará una epidemia?
  Depende de ρ y de S_0. Para S_0 suficientemente grande tendremos un aumento exponencial de infectados.
- ¿Desaparece la enfermedad? ¿Cuándo?
  Si, siempre. Cuando el número de infectados es nulo.
- ¿Cuantas personas enfermarán?
  Esta pregunta es díficil de responder porque no se pueden detectar todos los infectados
- ¿Cuantos fallecimientos habrá?
  Según el teorema del umbral: 2ν.