TIM
(Teoría de la integral y de la medida)
Grado de Matemáticas
Capítulo 2: Integral.

José García-Cuerva

Universidad Autónoma de Madrid

17 de diciembre de 2019

1. Funciones medibles
   - Aproximación por funciones simples.
2. Integración de funciones no negativas.
   - Teorema de convergencia monótona.
   - Lema de Fatou.
3. Integración de funciones complejas
   - El espacio L^1.
   - Teorema de convergencia dominada.
   - Relación con la integral de Riemann.
4. Producto de espacios de medida.
   - Teorema de Fubini.
   - La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.
   - Cambio de variable en la integral de Lebesgue.
   - Integración en coordenadas polares

Funciones medibles

Definición.

Sean $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es $(\mathcal{M}, \mathcal{N})-$medible si y sólo si

$$\forall E \in \mathcal{N},\ f^{-1}(E) \in \mathcal{M}.$$

Ejercicio 1: Demostrar que la composición de aplicaciones medibles es medible. En concreto, probar que si $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ y $(Z, \mathcal{O})$ son espacios medibles y tenemos dos aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$, entonces

$$(f \text{ es } (\mathcal{M}, \mathcal{N}) - \text{medible}) \wedge (g \text{ es } (\mathcal{N}, \mathcal{O}) - \text{medible}) \\ \Longrightarrow (g \circ f \text{ es } (\mathcal{M}, \mathcal{O}) - \text{medible}).$$

Ejercicio 2: Sean $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles y supongamos que $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ es una familia que genera la $\sigma-$álgebra $\mathcal{N}$; es decir: $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E})$. Entonces una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{N})-$medible si y sólo si

$$\forall E \in \mathcal{E},\ f^{-1}(E) \in \mathcal{M}.$$

Sugerencia: Demostrar que $\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$ *es una* $\sigma-$*álgebra.*

Ejercicio 3: Demostrar que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua del espacio topológico X al espacio topológico Y, entonces f es $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)-$medible.

Definición.

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Entonces

- Diremos que una función real $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{M}-$medible si es una aplicación $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})-$medible.
- Diremos que una función compleja $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathcal{M}-$medible si es una aplicación $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})-$medible.
- En particular $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es Lebesgue medible si y solo si es $(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})-$medible y se dice que es Borel medible si es $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})-$medible.
- Y también $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es Lebesgue medible si y solo si es $(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})-$medible y se dice que es Borel medible si es $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})-$medible.

Proposición.

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) f es $\mathcal{M}-$medible.

(b) $\forall a \in \mathbb{R},\ f^{-1}(]a, \rightarrow[) = \{x \in X :\ f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.

(c) $\forall a \in \mathbb{R},\ f^{-1}([a, \rightarrow[) = \{x \in X :\ f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$.

(d) $\forall a \in \mathbb{R},\ f^{-1}(]\leftarrow, a[) = \{x \in X :\ f(x) < a\} \in \mathcal{M}$.

(e) $\forall a \in \mathbb{R},\ f^{-1}(]\leftarrow, a]) = \{x \in X :\ f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$.

Demostración. (**Ejercicio 4**).

Ejercicio 5: Demostrar que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces f es Borel medible.

Cuando no haya necesidad de distinguir entre varias $\sigma-$álgebras, diremos, simplemente que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ o $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ son medibles.

Proposición.

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y supongamos que, para cada $\alpha \in J$ tenemos un espacio medible $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$. Podemos formar el espacio medible producto $(Y, \mathcal{N})$ donde $Y = \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha$ y $\mathcal{N} = \bigotimes_{\alpha \in J} \mathcal{N}_\alpha$. Y tenemos las aplicaciones coordenadas $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Entonces $f : X \longrightarrow Y$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{N}) -$ medible si y sólo si $\forall \alpha \in J,\ f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha) -$ medible.

Demostración. (**Ejercicio 6**).

Corolario.

$f : X \to \mathbb{C}$ es $\mathcal{M}-$medible si y sólo si $\Re f$ y $\Im f$ son $\mathcal{M}-$medibles.

Demostración. La razón es que $\mathcal{B}_\mathbb{C} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \bigotimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

En Análisis Real es frecuente encontrar aplicaciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, donde $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ es la recta ampliada que se obtiene añadiéndole a $\mathbb{R}$ un primer punto $-\infty$ y un último punto ∞ y dándole la topología del orden que convierte a $\overline{\mathbb{R}}$ en un espacio topológico homeomorfo a un intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Definición.

Diremos que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{M}-$medible si es $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})-$medible.

Ejercicio 7: Demostrar que $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : \; E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$.

Ejercicio 8:

(*a*) Demostrar que tanto la colección $\{[-\infty, a[: \; a \in \mathbb{R}\}$ como la colección $\{]a, \infty] : \; a \in \mathbb{R}\}$ generan la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$

(*b*) Utilizar el resultado del punto anterior para dar criterios de medibilidad similares a los del ejercicio 4 para funciones que toman valores en la recta ampliada.

Proposición.

Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ son $\mathcal{M}-$medibles, entonces también son $\mathcal{M}-$medibles $f+g$ y fg.

Demostración.

Definimos $F : X \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante $F(x) = (f(x), g(x))$, $\varphi(z, w) = z + w$ y $\psi(z, w) = zw$.
Puesto que $\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, sabemos que F es $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}})-$medible. Por otro lado, φ y ψ son continuas; de modo que también son $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})-$medibles.
Entonces $f + g = \varphi \circ F$ y $fg = \psi \circ F$ son $\mathcal{M}-$medibles.

Ejercicio 9: Sean $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Demostrar que

(a) fg es medible (donde $0 \cdot (\pm\infty) = 0$).

(b) Si fijamos $a \in \overline{\mathbb{R}}$ y definimos $h(x) = a$ si $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ y $h(x) = f(x) + g(x)$ en los demás casos; entonces h es medible.

Ejercicio 10: Demostrar directamente, usando el criterio del ejercicio 4 que, si f es medible, entonces $\forall k \in \mathbb{N}$, f^k es medible.

Ejercicio 11: Demostrar directamente, usando el criterio del ejercicio 4 que, si f y g son dos funciones medibles finitas, entonces, tanto $f+g$ como fg son también medibles.

Proposición.

Si f_j, $j \in \mathbb{N}$, es una sucesión de funciones medibles de $(X, \mathcal{M})$ en $\overline{\mathbb{R}}$, entonces las funciones

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x),\ g_2(x) = \inf_j f_j(x),$$

$$g_3(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x),\ g_4(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

son todas medibles.

Además, si $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ existe para cada $x \in X$, entonces f es medible.

Demostración.

Tenemos

$$g_1^{-1}(]a,\infty]) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}(]a,\infty]),\ g_2^{-1}([-\infty,a[) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}([-\infty,a[),$$

de modo que g_1 y g_2 son medibles.
Por otro lado, si $h_k(x) = \sup_{j>k} f_j(x)$, entonces h_k es medible para cada k, entonces $g_3 = \text{ínf}_k\, h_k$ es medible y lo mismo le ocurre a g_4. Finalmente, si existe f, entonces $f = g_3 = g_4$, de modo que, f es medible.

Corolario.

Si $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ son medibles, entonces, también son medibles $\text{máx}(f,g)$ y $\text{mín}(f,g)$.

Corolario.

Si $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones complejas medibles y $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ existe para todo x, entonces f es medible.

Demostración: Ejercicio 12.

Definición.

Dada $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definimos su parte positiva f^+ y su parte negativa f^- mediante

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \qquad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Entonces $f^+, f^- \geq 0$ y $f = f^+ - f^-$. Además, por el corolario de la página anterior, si f es medible, también lo son f^+ y f^-.
Por otro lado, se tiene que $|f| = f^+ + f^-$, de modo que, si f es medible, también $|f|$ es medible.

Definición.

Para $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tenemos su descomposición polar:

$$f = (\mathrm{sgn} f)|f| \qquad \text{donde} \qquad \mathrm{sgn} z = \begin{cases} z/|z| \text{ si } z \neq 0 \\ 0 \text{ si } z = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 13: Demostrar que si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible, entonces, tanto $|f|$ como $\mathrm{sgn} f$ son también medibles.

Definición.

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Para cada $E \subset X$ se define la función característica χ_E de E mediante:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E. \end{cases}$$

En Teoría de Probabilidad es habitual llamar a la función característica función indicadora y denotarla por $\mathbb{1}_E$.

Ejercicio 14:

$$\chi_E \text{ es medible} \iff E \in \mathcal{M}.$$

Observación: Para funciones reales de variable real la frase "La composición de dos funciones medibles es medible" carece de sentido, ya que hay dos tipos de medibilidad: de Borel y de Lebesgue y estos se comportan de forma diferente. Vamos a examinar esta cuestión con detalle. Partimos de la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

- Si g y f son ambas Borel medibles, entonces $f \circ g$ es, también, Borel medible, ya que

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ (f \circ g)^{-1}(B) = g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

- Si g es Lebesgue medible y f es Borel medible, entonces $f \circ g$ es Lebesgue medible, ya que

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ (f \circ g)^{-1}(B) = g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$$

- ¿Qué sucede si sólo sabemos que f y g son Lebesgue medibles? Si tomamos $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tenemos

$$(f \circ g)^{-1}(B) = g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}}) \in \ ????.$$

  No podemos decir nada. Sospechamos que $f \circ g$ puede no ser Lebesgue medible; pero para poder afirmar esto con seguridad, hemos de encontrar un contraejemplo. Si g^{-1} fuera la función F de Cantor-Lebesgue, podríamos obtener un contraejemplo sin más que tomar $f = \chi_A$ con $A \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Pero esto no puede ser porque la función F de Cantor-Lebesgue no es biyectiva.

Sin embargo, el que la función F de Cantor-Lebesgue no sea biyectiva no es un obstáculo insalvable. Vamos a ver que, modificando ligeramente la función F de Cantor-Lebesgue, podemos obtener una función biyectiva; de hecho un homeomorfismo de $\mathbb{R}$, que también lleva un conjunto medible en uno que no lo es.
Empezamos definiendo $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi(x) = F(x) + x \in [0,2].$$

Vemos que φ es estrictamente creciente, ya que

$$x < y \Longrightarrow F(x) \leq F(y) \Longrightarrow \varphi(x) = F(x) + x < F(y) + y = \varphi(y).$$

¿Cuál es la imagen de un bocado $]a,b[$ cualquiera de los que damos a $[0,1]$ para construir el conjunto de Cantor?

$$(\varphi(a) = F(a) + a) \wedge (\varphi(b) = F(b) + b)$$
$$\Longrightarrow \varphi(]a,b[) =]F(a) + a, F(b) + b[=]c + a, c + b[,$$

ya que $F(a) = F(b)$. Se sigue que $\lambda(\varphi(]a,b[)) = \lambda(]a,b[)$.

Y, por consiguiente $\lambda(\varphi([0,1] \setminus \mathcal{C})) = \lambda([0,1] \setminus \mathcal{C}) = 1$.
Pero, como φ es inyectiva,

$$\varphi([0,1] \setminus \mathcal{C}) = \varphi([0,1]) \setminus \varphi(\mathcal{C}) = [0,2] \setminus \varphi(\mathcal{C}).$$

Así pues

$$2 - \lambda(\varphi(\mathcal{C})) = \lambda([0,2] \setminus \varphi(\mathcal{C})) = 1 \Longrightarrow \lambda(\varphi(\mathcal{C})) = 1.$$

Podemos extender φ a una biyección $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ haciendo:

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Tenemos así un homeomorfismo h de $\mathbb{R}$ que satisface $\lambda(h(\mathcal{C})) = \lambda(\varphi(\mathcal{C})) = 1$. Y esto es todo lo que necesitamos para completar el contraejemplo.

La clave es que, al ser $h(\mathcal{C})$ de medida de Lebesgue positiva, necesariamente contiene algún conjunto E que no es medible Lebesgue. Es decir: $\exists E \subset h(\mathcal{C})$ tal que $E \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Y, sin embargo, el conjunto $A = h^{-1}(E) \subset \mathcal{C}$ es Lebesgue medible por ser la medida de Lebesgue completa. Hacemos ahora $g = h^{-1}$ y $f = \chi_A$. Resulta que g es continua y, por consiguiente, Borel medible y χ_A es Lebesgue medible por ser la función característica de $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$. Vamos a ver que la composición $f \circ g$ no es Lebesgue medible.

Veamos quién es $f \circ g$: Como $f = \chi_A$ toma sólo los valores 0 y 1, lo mismo le pasará a $f \circ g$; así que será la función característica de cierto conjunto. ¿De cúal?

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 1 \iff g(x) = h^{-1}(x) \in A \iff x \in h(A) = E.$$

Así pues, $f \circ g = \chi_E$ que no es Lebesgue medible porque $E \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g=h^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g=\chi_E"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f=\chi_A"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Podemos resumir lo que hemos demostrado sobre la composición de funciones medibles de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ en el siguiente gráfico:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\mathcal{B}-\mathrm{med}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{B}-\mathrm{med}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\mathcal{B}-\mathrm{med}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\mathcal{L}-\mathrm{med}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{L}-\mathrm{med}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\mathcal{B}-\mathrm{med}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\mathcal{B}-\mathrm{med}"] \arrow[rr, bend right, "???"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\mathcal{L}-\mathrm{med}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Definición.

Una función simple en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$ es una combinación lineal finita con coeficientes complejos de funciones características de conjuntos medibles; es decir

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \text{ con } a_j \in \mathbb{C} \text{ y } E_j \in \mathcal{M} \; \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 15: Demostrar que $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es simple si y sólo si f es $\mathcal{M}-$medible y toma sólo un número finito de valores.

Es inmediato que si f y g son funciones simples, también lo son $f+g$ y fg.
La importancia de las funciones simples en la integración radica en el hecho de que cualquier función medible se puede aproximar muy bien por funciones simples. Los detalles se dan en el siguiente teorema:

Teorema.

Sea $(X,\mathcal{M})$ un espacio medible. Entonces

(a) Si $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ es medible, existe una sucesión $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ de funciones simples tales que $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \cdots \leq f$, $\varphi_n \longrightarrow f$ puntualmente y $\varphi_n \longrightarrow f$ uniformemente en cualquier conjunto en elque f sea acotada.

(b) Si $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible, existe una sucesión $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ de vfunciones simples tales que $0 \leq |\varphi_0| \leq |\varphi_1| \leq \cdots \leq |f|$, $\varphi_n \longrightarrow f$ puntualmente y $\varphi_n \longrightarrow f$ uniformemente en cualquier conjunto en el que f sea acotada.

Demostración.

(a) Para $n = 0, 1, 2, \cdots$ y $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$, sean

$$E_n^k = f^{-1}(]k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]) \qquad \text{y} \qquad F_n = f^{-1}(]2^n, \infty])$$

y definamos

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n}\chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}.$$

(ver figura en la página siguiente).
Se comprueba fácilmente que $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ $\forall n = 0, 1, \cdots$ y que $\forall n = 0, 1, \cdots$, $0 \leq f - \varphi_n \leq 2^{-n}$ en el conjunto donde $f \leq 2^n$.

(b) Si $f = g + \imath h$, aplicamos el punto anterior a las partes positiva y negativa de g y h obteniendo sucesiones $\psi_{+,n}, \psi_{-,n}, \varsigma_{+,n}, \varsigma_{-,n}$ de funciones simples ≥ 0 que crecen, respectivamente, a g^+, g^-, h^+, h^-. Entonces, tomando $\varphi_n = \psi_{+,n} - \psi_{-,n} + \imath(\varsigma_{+,n} - \varsigma_{-,n})$ obtenemos la sucesión deseada.

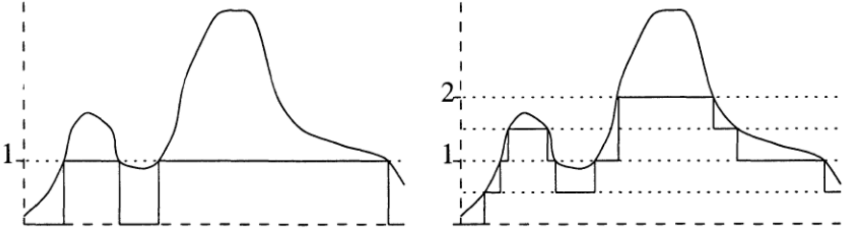

Figura: Las funciones φ_0 (a la izquierda) y φ_1 (a la derecha) de la demostración de la página anterior

Proposición.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces las tres propiedades siguientes son equivalentes:

(*a*) La medida μ es completa.

(*b*) Si f es medible y $f = g$ en casi todo punto respecto a μ, se sigue que g es medible.

(*c*) Si f_n es medible para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f_n \longrightarrow f$ en casi todo punto con respecto a μ, se sigue que f es medible.

Demostración: Ejercicio 16.

Proposición.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(X, \widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu})$ su completación. Si f es una función $\widetilde{\mathcal{M}}-$ medible en X, entonces existe una función $\mathcal{M}-$medible g tal que $f = g$ en casi todo punto con respecto a $\widetilde{\mu}$.

Demostración: Ejercicio 17. *Sugerencia: Comenzar con* $f = \chi_E$, $E \in \widetilde{\mathcal{M}}$ *y luego utilizar el teorema de aproximación por funciones simples.*

Integración de funciones no negativas.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida que mantendremos fijo en toda la sección. Llamaremos $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ al espacio formado por todas las funciones $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ que sean medibles.
Vamos a empezar integrando las funciones simples pertenecientes a $\mathcal{L}^+$. Está claro que si tenemos una función simple $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, su integral debería ser $\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$. Pero aquí tropezamos con una dificultad: la función simple φ puede escribirse de maneras distintas como combinación lineal de funciones características de conjuntos medibles; por ejemplo $0 = \chi_A - \chi_A$.
Para definir la integral de una función simple sin ambigüedad elegimos una representación entre todas las posibles

Definición.

Para una función simple $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ si $(a_j)_{j=1}^n$ son los valores distintos que toma y si para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, $E_j = \varphi^{-1}(a_j)$, llamaremos representación canónica o representación estándar de φ a la expresión

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \qquad (1)$$

En particular, si φ toma el valor 0, su representación canónica contiene el término $0\chi_{\varphi^{-1}(0)}$, totalmente innecesario para expresar φ. La representación canónica (1) de φ se caracteriza porque los a_j son todos distintos y los E_j forman una partición de X, es decir, son disjuntos dos a dos y cubren todo X : $X = \biguplus_{j=1}^{\infty} E_j$. Ahora ya podemos definir la integral de una función simple $\varphi \in \mathcal{L}^+$ con representación canónica (1) como $\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$.

Definición.

Si $\varphi \geq 0$ es una func ión simple y $A \in \mathcal{M}$, como $\varphi\chi_A$ es, también, una funcion simple de $\mathcal{L}^+$, tiene sentido definir

$$\int_A \varphi d\mu = \int_A \varphi = \int_A \varphi(x) d\mu(x) = \int_X \varphi\chi_A d\mu$$

Aunque ya hemos definido sin ambigüedad la integral de una función simple $\varphi \geq 0$, más vale que la fórmula sea cierta independientemente de la representación; porque la integral necesitamos que sea un operador lineal y, sin esta independencia, no podríamos llegar muy lejos.

Proposición.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k).$$

Demostración.

- **Primer caso: los E_j son disjuntos dos a dos y los F_k también.** Podemos suponer, añadiendo un término si la función toma el valor 0, que tanto los E_j como los F_k son sendas particiones de X en conjuntos medibles. Para cada par de índices j, k consideramos el conjunto $E_j \cap F_k$. Puede ocurrir que sea $E_j \cap F_k = \emptyset$ o que sea $E_j \cap F_k \neq \emptyset$. En este segundo caso, tomando un punto de $E_j \cap F_k$ y evaluando en él nuestra función, resulta que $a_j = b_k$. Entonces vemos que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k).$$

- **Caso general** Ahora partimos de una representación $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ en que no suponemos que los E_j sean disjuntos dos a dos y encontramos una familia de conjuntos disjuntos dos a dos $(H_\ell)_{\ell=1}^{N}$, donde $N = 2^n - 1$, tal que todo E_j es unión de algunos de los H_ℓ. (**Ejercicio 18.** *Sugerencia: considerar los* 2^n *conjuntos* $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ *donde cada* A_j *es, o bien* E_j *o bien* $\complement E_j$.)
  Entonces
  $$\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{\ell,\ H_\ell \subset E_j} \chi_{H_\ell} = \sum_{\ell} b_\ell \chi_{H_\ell},$$
  donde $b_\ell = \sum_{j,\ E_j \supset H_\ell} a_j$.
  Para estas dos representaciones, tenemos
  $$\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{\ell,\ H_\ell \subset E_j} \mu(H_\ell) = \sum_{\ell} b_\ell \mu(H_\ell),$$

Así la suma correspondiente a una representación cualquiera es igual a una correspondiente a una representación con conjuntos disjuntos dos a dos. Como esas sumas son iguales por el caso anterior, llegamos a que dos sumas correspondientes a dos representaciones cualesquiera de una misma función simple son iguales.

Proposición.

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^+$ funciones simples. Entonces

(a) $\forall c \geq 0, \int_X c\varphi d\mu = c \int_X \varphi d\mu$.

(b) $\int_X (\varphi + \psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu$.

(c) $\varphi \leq \psi \implies \int_X \varphi d\mu \leq \int_X \psi d\mu$.

(d) La aplicación $A \longmapsto \int_A \varphi d\mu$ es una medida en $\mathcal{M}$.

Demostración: Ejercicio 19.

Definición.

Para $f \in \mathcal{L}^+$ definimos

$$(2) \qquad \int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi d\mu : \ \varphi \text{ simple } \ni 0 \leq \varphi \leq f\right\}$$

Por el apartado (c) de la última proposición, para f simple (2) nos da el mismo valor que la definición que ya teníamos. Además, se sigue inmediatamente de (2) que los apartados (a) y (c) de la proposición última siguen siendo ciertos si, en vez de funciones simples, se consideran funciones arbitrarias de $\mathcal{L}^+$.

TEOREMA DE CONVERGENCIA MONÓTONA.

Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{L}^+$ que es monótona creciente; es decir, que cumple que $\forall j \in \mathbb{N}, \ f_j \leq f_{j+1}$ y si $f = \lim_{n\to\infty} f_n$; entonces $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Demostración. $\left(\int_X f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos de $[0,\infty]$, de modo que su límite existe y es igual al supremo. Además, $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$. Sólo nos queda probar la desigualdad que va en sentido contrario. Para hacerlo, empezamos fijando $\alpha \in]0,1[$ y tomando una función simple φ tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Consideramos los conjuntos $E_n = \{x \in X : \; f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$. Los E_n son una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es X y tenemos

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \alpha \int_{E_n} \varphi d\mu.$$

Aplicando el punto (d) de la última proposición, vemos que $\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}\varphi d\mu = \int_X \varphi d\mu$; de forma que, obtenemos $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \geq \alpha\int_X \varphi d\mu$. Como esto es cierto para todo $\alpha < 1$; es también cierto para $\alpha = 1$ y si luego tomamos el supremo sobre todas las funciones simples φ que cumplen $0 \leq \varphi \leq f$, resulta lo que queríamos, es decir, que $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$.

Teorema.

Si $(f_n)_{n=1,\cdots}$ es una sucesión finita o infinita de funciones de $\mathcal{L}^+$ y si $f = \sum_n f_n$, entonces

$$\int_X f d\mu = \sum_n \int_X f_n d\mu; \text{ es decir, } \int_X \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int_X f_n d\mu$$

Demostración. Primero consideramos dos funciones f_1 y f_2. Sabemos, por el teorema de aproximación por funciones simples, que existen sucesiones $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones simples ≥ 0, tales que $\varphi_j \uparrow f_1$ y $\psi_j \uparrow f_2$. Entonces, se sigue que $\varphi_j + \psi_j \uparrow f_1 + f_2$ y podemos aplicar el teorema de convergencia monótona para obtener

$$\begin{aligned}\int_X (f_1 + f_2) d\mu &= \lim_{j\to\infty} \int_X (\varphi_j + \psi_j) d\mu \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_X \varphi_j d\mu + \lim_{j\to\infty} \int_X \psi_j d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.\end{aligned}$$

Se sigue, por inducción, que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \int_X \sum_{n=1}^{N} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n d\mu.$$

Finalmente, haciendo $N \to \infty$ y aplicando de nuevo el teorema de convergencia monótona, obtenemos

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Proposición.

Si $f \in \mathcal{L}^+$, entonces

$$\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ en c.t. } x \text{ respecto a } \mu.$$

Demostración: Ejercicio 20.

Corolario.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{L}^+$ que **crecen** en casi todo punto a $f \in \mathcal{L}^+$, entonces

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demostración: Ejercicio 21.

Ejemplos: En los dos ejemplos que siguen el espacio de medida es el de Lebesgue de la recta, es decir, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \lambda)$.

- Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \chi_{]n,n+1[}$. Claramente $\int f_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y, sin embargo $\int \lim_{n\to\infty} f_n = 0$, ya que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.
- Ahora consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n = n\chi_{]0,1/n[}$. también en este caso $\int g_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y, sin embargo $\int \lim_{n\to\infty} g_n = 0$, ya que $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$.

Lema de Fatou

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{L}^+$, entonces

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demostración.

Dado $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\forall j \geq k$, $\inf\limits_{n\geq k} f_n \leq f_j$ y, por lo tanto, $\forall j \geq k$, $\int_X \inf_{n\geq k} f_n d\mu \leq \int_X f_j d\mu$, con lo que podemos escribir

$$\int_X \inf_{n\geq k} f_n d\mu \leq \inf_{j\geq k} \int_X f_j d\mu.$$

Finalmente, si hacemos $k \to \infty$ y aplicamos el teorema de convergencia monótona, obtenemos:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \inf_{n\geq k} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Corolario.

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{L}^+$ y sea $f \in \mathcal{L}^+$. Supongamos que $f_n \longrightarrow f$ en casi todo punto con respecto a μ. Entonces $\int_X f d\mu \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Demostración: Ejercicio 22.

Proposición.

Si $f \in \mathcal{L}^+$ y $\int_X f d\mu < \infty$, entonces $\{x \in X : \ f(x) = \infty\}$ es un conjunto nulo respecto a μ y $\{x \in X : \ f(x) > 0\}$ es $\sigma-$finito respecto a μ.

Demostración: Ejercicio 23.

Ejercicio 24: Supongamos que $f_n \in \mathcal{L}^+ \ \forall n \in \mathbb{N}$ y que $f_n \to f$ puntualmente. Demostrar que si $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu < \infty$, entonces $\forall E \in \mathcal{M}$, $\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$. Ver además que, sin embargo, si se supone que $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \infty$, la conclusión puede no ser cierta.

Ejercicio 25: Dada $f \in \mathcal{L}^+$ definimos, para cada $E \in \mathcal{M}$, $\nu(E) = \int_E f d\mu$. Demostrar que ν es una medida sobre $\mathcal{M}$ y que para cada $g \in \mathcal{L}^+$, $\int_X g d\nu = \int_X fg d\mu$. (*Sugerencia: empezar suponiendo que g es simple*.

Ejercicio 26: Sean $f_n \in \mathcal{L}^+$ y supongamos que las f_n decrecen puntualmente a f. Demostrar que si, además, $\int_X f_1 d\mu < \infty$, entonces $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Ejercicio 27: Sea $f \in \mathcal{L}^+$ con $\int_X f d\mu < \infty$. Demostrar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) < \infty$ y $\int_E f d\mu > \int_X f d\mu - \varepsilon$.

Ejercicio 28: Suponer el lema de Fatou y deducir de él el teorema de la convergencia monótona.

Integración de funciones complejas

Definición.

Para cada $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$a^+ = \max(a, 0) = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad a \leq 0 \end{cases}$$

y

$$a^- = \max(-a, 0) = -\min(a, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a \leq 0 \end{cases}$$

Proposición.

para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple que:

(*i*) $a = a^+ - a^-$,

(*ii*) Si $a = b - c$, con $b, c \geq 0$, entonces $a^+ \leq b$ y $a^- \leq c$.

(*iii*) $|a| = a^+ + a^-$.

(*iv*) $a \leq b \Longrightarrow (a^+ \leq b^+) \wedge (a^- \geq b^-)$.

Demostración.

(*i*) Si $a \geq 0,\ a^+ - a^- = a - 0 = a$ y si $a \leq 0,\ a^+ - a^- = 0 - (-a) = a$.

(*ii*) Si $a \geq 0,\ a^+ = a = b - c \leq b$ y $a^- = 0 \leq c$, mientras que si $a \leq 0,\ a^+ = 0 \leq b$ y $a^- = -a = c - b \leq c$.

(*iii*) Si $a \geq 0,\ |a| = a$ y $a^+ a^- = a$ y si $a \leq 0,\ |a| = -a$ y $a^+ a^- = 0 - a = -a$.

(*iv*) $a = b - (b - a) = b^+ - b^- - (b - a) = b^+ - (b^- + b - a) \Longrightarrow a^+ \leq b^+$. Y $b = b - a + a = b - a + a^+ - a^- \Longrightarrow b^- \leq a^-$.

Así pues, la expresión de un número como diferencia entre sus partes positiva y negativa es la más económica entre todas las formas de escribir dicho número como diferencia de dos números ≥ 0.

Observación: La descomposición $a = a^+ - a^-$ puede extenderse a todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ haciendo $\infty^+ = \infty,\ \infty^- = 0,\ (-\infty)^+ = 0,\ (-\infty)^- = \infty$. La proposición sigue siendo cierta en $\overline{\mathbb{R}}$.

En toda la sección supondremos que tenemos un espacio de medida fijo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y siempre que usemos el adjetivo "medible" para un conjunto o una función, querrá decir $\mathcal{M}-$medible.

Definición.

Para $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definimos

$$f^+(x) = (f(x))^+ \qquad \text{y} \qquad f^-(x) = (f(x))^-.$$

Desde luego, si f es medible, ya sabemos que también lo son f^+ y f^-.

Como consecuencia de la proposición que demostramos para números, tenemos una análoga para funciones.

Proposición.

para $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que:

(*i*) $f = f^+ - f^-$,

(*ii*) Si $f = g - h$, con $g, h \geq 0$, entonces $f^+ \leq g$ y $f^- \leq h$.

(*iii*) $|f| = f^+ + f^-$.

(*iv*) $f \leq g \Longrightarrow (f^+ \leq g^+) \wedge (f^- \geq g^-)$.

Definición de la integral.

Para $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, definimos la integral como

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

si al menos una de las integrales del segundo miembro es finita. Si ambas son finitas, diremos que f es integrable y, si además, f toma sólo valores reales, escribiremos

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{M}, \mu).$$

Si no hay duda de que nos referimos a funciones reales abreviamos $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ por $\mathcal{L}^1(\mu)$ y $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Para $E \in \mathcal{M}$, la integral sobre E se define de la forma obvia. En realidad es la misma definición considerando el espacio de medida relativo $(E, \mathcal{M}|_E, \mu|_E)$.

Proposición.

Para f medible real,

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff \int_X |f| d\mu < \infty.$$

Demostración: Ejercicio 29.

Proposición.

Sean f, g medibles tales que $f \leq g$. Entonces, si $\int_X f d\mu$ e $\int_X g d\mu$ existen, se cumple que

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Demostración. $f \leq g \implies (f^+ \leq g^+) \wedge (f^- \geq g^-)$. Por tanto

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \leq \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu.$$

Proposición.

Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible y tiene integral y si $f = g - h$ siendo g y h funciones medibles ≥ 0, alguna de las cuales tiene integral finita, entonces

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu - \int_X h d\mu.$$

Demostración.

$f^+ + f^- = f = g - h \Longrightarrow f^+ + h = f^- + g$. Entonces

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X h d\mu = \int_X f^- d\mu + \int_X g d\mu$$
$$\Longrightarrow \int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \int_X g d\mu - \int_X h d\mu.$$

Proposición.

$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ es un espacio vectorial real y la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_X f d\mu. \end{array}$$

es un funcional $\mathbb{R}-$lineal.

Demostración. Si $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene que $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$. Por lo tanto

$$\int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < \infty$$

y queda demostrado que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.
Por otro lado

$$\begin{aligned} \alpha f + g &= (\alpha^+ - \alpha^-)(f^+ - f^-) + g^+ - g^- \\ &= \alpha^+ f^+ + \alpha^- f^- + g^+ - (\alpha^+ f^- + \alpha^- f^+ + g^-). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\int_X(\alpha f+g)d\mu &= \alpha^+\int_X f^+d\mu+\alpha^-\int_X f^-d\mu+\int_X g^+d\mu\\ &\quad-\alpha^+\int_X f^-d\mu-\alpha^-\int_X f^+d\mu-\int_X g^-d\mu\\ &= \alpha^+\left(\int_X f^+d\mu-\int_X f^-d\mu\right)-\alpha^-\left(\int_X f^+d\mu-\int_X f^-d\mu\right)\\ &\quad+\int_X g^+d\mu-\int_X g^-d\mu=\alpha\int_X fd\mu+\int_X gd\mu.\end{aligned}$$

Proposición.

Para toda $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ (en general para toda f medible con integral) se tiene que

$$\left|\int_X fd\mu\right|\le\int_X|f|d\mu.$$

Demostración.

$$-|f| \leq -f^- \leq f = f^+ - f^- \leq f^+ \leq |f|.$$

Así pues,

$$-\int_X |f| d\mu = \int_X -|f| d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \int_X |f| d\mu.$$

Definición.

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Diremos que f es integrable y escribiremos $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ si y sólo si $\Re f, \Im f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.
En ese caso, definiremos la integral de f mediante

$$\int_X f d\mu = \int_X \Re f d\mu + \imath \int_X \Im f d\mu.$$

Como hicimos en el caso real, también nos permitiremos abreviar $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ por $\mathcal{L}^1(\mu)$ y $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ cuando no haya duda de que las funciones son complejas.

Proposición.

Para f medible compleja,

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Longleftrightarrow \int_X |f| d\mu < \infty.$$

Demostración: Ejercicio 30.

La integral sobre $E \in \mathcal{M}$ se define de la forma obvia y, en realidad, es la misma definición considerando el espacio de medida relativo $(E, \mathcal{M}|_E, \mu|_E)$.

Proposición.

$\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ es un espacio vectorial complejo y la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \int_X f d\mu. \end{array}$$

es un funcional $\mathbb{C}-$lineal

Demostración. Si $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se tiene que $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$. Por lo tanto

$$\int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < \infty$$

y queda demostrado que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.
Por otro lado

$$\begin{aligned} \alpha f + g &= (\Re\alpha + \imath\Im\alpha)(\Re f + \imath\Im f) + \Re g + \imath\Im g \\ &= \Re\alpha\Re f - \Im\alpha\Im f + \Re g + \imath(\Re\alpha\Im f + \Im\alpha\Re f + \Im g), \end{aligned}$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\int_X (\alpha f + g) d\mu &= \Re\alpha \int_X \Re f d\mu - \Im\alpha \int_X \Im f d\mu + \int_X \Re g d\mu \\
&\quad + \imath \left(\Re\alpha \int_X \Im f d\mu + \Im\alpha \int_X \Re f d\mu + \int_X \Im g d\mu \right) \\
&= (\Re\alpha + \imath\Im\alpha) \left(\int_X \Re f d\mu + \imath \int_X \Im f d\mu \right) + \int_X \Re g d\mu + \imath \int_X \Im g d\mu \\
&= \alpha \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.
\end{aligned}
$$

Proposición.

Para toda $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ se tiene que

$$
\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.
$$

Demostración

Si ponemos $\omega = \operatorname{sign}\left(\int_X f d\mu\right) \in \mathbb{C}$, teniendo en cuenta que $|\omega| \leq 1$, resulta:

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \omega \int_X f d\mu = \int_X \omega f d\mu = \Re \int_X \omega f d\mu$$
$$= \int_X \Re(\omega f) d\mu \leq \int_X |f| d\mu.$$

Proposición.

(*a*) Si $f \in \mathcal{L}^1$, entonces $\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}$ es $\sigma-$finito.

(*b*) Si $f, g \in \mathcal{L}^1$, entonces

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \int_X |f - g| d\mu = 0 \Leftrightarrow f = g \ \text{ c. t.}$$

Demostración.

(a)

$$\{x \in X : \ f(x) \neq 0\} = \{x \in X : \ |f(x)| > 0\}$$

y este segundo conjunto es $\sigma-$finito por ser $\int_X |f| d\mu < \infty$.

(b) Como $|f - g| \in \mathcal{L}^+$, ya sabemos que

$$\int_X |f - g| d\mu = 0 \Leftrightarrow |f - g| = 0 \ c.t. \Leftrightarrow f = g \ c.t.$$

Si $\int_X |f - g| d\mu = 0$, tenemos

$$\left| \int_E f d\mu - \int_E g d\mu \right| = \left| \int_E (f - g) d\mu \right|$$
$$\leq \int_E |f - g| d\mu \leq \int_X |f - g| d\mu = 0$$

Por otro lado, si $u = \Re(f - g)$ y $v = \Im(f - g)$ y si no es cierto que $f = g$ c. t., alguna de las funciones u^+, u^-, v^+, v^- debe ser $\neq 0$ en un conjunto de medida positiva. Si, por ejemplo $E = \{x \in X : \; u^+(x) > 0\}$ tiene $\mu(E) > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\Re\left(\int_E f d\mu - \int_E g d\mu\right) &= \int_E \Re(f - g) d\mu \\ &= \int_E u d\mu = \int_E u^+ d\mu > 0,\end{aligned}$$

ya que $u^- = 0$ en E, de modo que $\int_E f d\mu \neq \int_E g d\mu$. Y lo mismo en los otros casos posibles.

Hemos visto que podemos alterar una función medible en un conjunto de medida nula sin que cambie su integral. De hecho, podemos integrar una función f que está definida solamente en un conjunto medible E tal que $\mu(\complement E) = 0$, simplemente haciendo $f = 0$, o cualquier otro valor, en $\complement E$. Esto nos permite considerar funciones que toman valores en $\overline{\mathbb{R}}$ y son finitas en casi todo punto, como funciones reales para integrarlas.

Como consecuencia del segundo apartado de la última proposición vemos que el conjunto

$$\mathcal{N} = \left\{ f \in \mathcal{L}^1 : \int_X |f| d\mu = 0 \right\} = \{ f \in \mathcal{L}^1 : \ f = 0 \ c.t.\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^1$. Podemos utilizar $\mathcal{N}$ para definir en $\mathcal{L}^1$ una relación de equivalencia $\sim$ dada por

$$f \sim g \iff f - g \in \mathcal{N} \iff f = g \ c.t..$$

El hecho de que $\mathcal{N}$ sea un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^1$ implica que el conjunto cociente $\mathcal{L}^1/\sim = \mathcal{L}^1/\mathcal{N}$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas del modo natural, es decir

$$(f+\mathcal{N})+(g+\mathcal{N})=(f+g)+\mathcal{N}, \qquad \lambda(f+\mathcal{N})=(\lambda f)+\mathcal{N}.$$

Definición.

Definimos $L^1=\mathcal{L}^1/\mathcal{N}$. Entonces $L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ es un espacio vectorial real y $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ es un espacio vectorial complejo.
Aunque, en realidad, L^1 es un conjunto de clases de equivalencia de funciones, usaremos sistemáticamente la notación $f\in L^1$, que no da lugar a ninguna confusión, ya que, cualquier función que coincida c. t. con f producirá los mismos resultados de integración.

Ejercicio 31: Sea $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida y sea $(X,\widetilde{\mathcal{M}},\widetilde{\mu})$ su completado. Utilizar el ejercicio 17 para establecer una correspondencia biunívoca natural entre $L^1(X,\mathcal{M},\mu)$ y $L^1(X,\widetilde{\mathcal{M}},\widetilde{\mu})$.

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Se llama norma en $\mathbb{X}$ a cualquier aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

tal que

(1) $\|x\| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{X}$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \; \forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall x \in \mathbb{X}$.

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall x, y \in \mathbb{X}$.

Si $\| \ \|$ es una norma en $\mathbb{X}$, diremos que $(\mathbb{X}, \| \ \|)$ es un espacio normado.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ se define

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} \times \mathbb{X} & \stackrel{d}{\to} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & d(x, y) = \|x - y\|, \end{array}$$

entonces d es una distancia en $\mathbb{X}$ o, en otras palabras, $(\mathbb{X}, d)$ es un espacio métrico, lo cual quiere decir que d cumple las tres propiedades siguientes:

(1) $d(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in \mathbb{X}$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in \mathbb{X}$.

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \; \forall x, y \in \mathbb{X}$.

Un espacio normado $\mathbb{X}$ se dice que es de Banach si $(\mathbb{X}, d)$ es un espacio métrico completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy converge.

Proposición

Sea $(\mathbb{X}, \| \ \|)$ un espacio normado. Entonces $(\mathbb{X}, \| \ \|)$ es un espacio de Banach si y sólo si

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} x_j \text{ converge en } \mathbb{X}.$$

Demostración. I.- Si $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach y tenemos $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$, observamos que la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$, o sea $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$, es una sucesión de Cauchy. En efecto, si $n > m$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \|x_j\| < \varepsilon$$

si m es suficientemente grande.

Así pues, existe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x$ y la serie es convergente en $(\mathbb{X}, \| \,\|)$.

II.- Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición (3). Vamos a ver que, entonces, $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach. Sea $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \| \,\|)$. Podemos elegir una subsucesión $(y_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ que cumpla $\|y_{j_k} - y_{j_{k+1}}\| < 2^{-k}$. Tendremos

$$y_{j_k} = y_{j_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (y_{j_{i+1}} - y_{j_i}).$$

Ahora bien, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (y_{j_{i+1}} - y_{j_i})$ converge en $\mathbb{X}$, por la propiedad (3), ya que $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_{j_{i+1}} - y_{j_i}\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1 < \infty$. Entonces, existirá

$$\lim_{k \to \infty} y_{j_k} = y_{i_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (y_{j_{i+1}} - y_{j_i}).$$

Pero, para una sucesión de Cauchy, si alguna subsucesión converge, también lo hace la sucesión original. En efecto,dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall j, j' \geq j_0$, $\|y_j - y_{j'}\| \leq \varepsilon$. Si $y = \lim_{k\to\infty} y_{k_j}$, tendremos

$$\|y_j - y\| \leq \|y_j - y_{j_k}\| + \|y_{j_k} - y\| \leq 2\varepsilon,$$

tomando j y j_k suficientemente grandes. Y así termina esta demostración.

Ejercicio 32: Si para cada $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ definimos $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$, demostrar que $\| \ \|_1$ es una norma en $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Definición.

Dadas $f_n \in L^1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f \in L^1$, diremos que $f_n \to f$ en L^1 si $\|f - f_n\|_1 \to 0$ para $n \to \infty$; es decir, si $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$ para $n \to \infty$.

A continuación vamos a ver el Teorema de convergencia dominada, que es el tercer teorema básico de convergencia junto con el Teorema de convergencia monótona y el Lema de Fatou. Veremos que es consecuencia inmediata del Lema de Fatou. La idea subyacente es la misma que la de los dos teoremas anteriores: Si $f_n \to f$ c. t. y si los gráficos de todas las $|f_n|$ están dentro de una misma región del plano de área finita, de forma que las áreas por debajo de ellos no se pueden escapar a infinito, entonces $\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$.

TEOREMA DE CONVERGENCIA DOMINADA.

Sean $f_n \in L^1,\ n \in \mathbb{N}$, tales que

(a) $f_n \to f$, c. t. y

(b) $\exists \underbrace{g}_{\geq 0} \in L^1$, tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq g$ c. t..

Entonces $f \in L^1$ y $\int_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Demostración. Como límite de funciones medibles, f es medible, aunque haya que redefinirla en un cierto conjunto de medida 0. Además, como $|f| \leq g$ c. t., $f \in L^1$. Tomando partes reales e imaginarias, vemos que se puede suponer que tanto las f_n como la f son reales. En ese caso, la condición $|f_n| \leq g$ se puede reescribir como $-g \leq f_n \leq g$ c. t. $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir $\forall n \in \mathbb{N},\ g + f_n \geq 0$ c.t. y $\forall n \in \mathbb{N},\ g - f_n \geq 0$ c.t. Aplicando el lema de Fatou a cada una de estas desigualdades obtenemos:

$$\int_X g d\mu + \int_X f d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} (g + f_n) d\mu$$
$$\underbrace{\leq}_{\text{FATOU}} \liminf_{n\to\infty} \int_X (g + f_n) d\mu = \int_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu,$$

y

$$
\begin{aligned}
\int_X g d\mu - \int_X f d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu \\
&\underbrace{\leq}_{\text{FATOU}} \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n) d\mu = \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu,
\end{aligned}
$$

Ahora podemos eliminar $\int_X g d\mu$, que es un número finito, y combinar las dos estimaciones para obtener:

$$
\int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu,
$$

que demuestra que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Teorema.

Sean $f_j \in L^1 \; \forall j \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X |f_j| d\mu < \infty$.

Entonces

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge c. t. a una función $f \in L^1$,

(b) $\int_X f d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j d\mu$ y

(c) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge a f en L^1; es decir

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_j \right\|_1 = \int_X \left| f - \sum_{j=1}^{n} f_j \right| \to 0 \text{ para } n \to \infty.$$

En particular, (c) implica que L^1 es un espacio de Banach; es decir, un espacio normado completo.

Demostración. Sabemos por el Teorema de convergencia monótona, que $\int_X \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X |f_j| d\mu < \infty$. En consecuencia, la función $g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ pertenece a L^1. En particular, $g(x) < \infty$ c. t.. Pero, entonces, en todo $x \in X$ en el que sea $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| < \infty$, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ converge a una suma que le llamamos $f(x)$. Como, desde luego, $|f(x)| \leq g(x)$ c. t., se tiene que $f \in L^1$. Ya tenemos (a). Para obtener (b) sólo necesitamos observar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right| \leq g(x)$ y aplicar el Teorema de convergencia dominada.

Y, finalmente, para probar (c) basta darse cuenta de que, en cada punto x en el que converja la serie

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x) \right| \to 0 \text{ para } n \to \infty \text{ y}$$

$\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x) \right| \leq g(x)$, de modo que se puede aplicar, de nuevo, el Teorema de convergencia dominada.

Ejercicio 33: Demostrar que las funciones simples integrables son densas en L^1. Es decir, que si $f \in L^1$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una función simple integrable $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ tal que $\int_X |f - \varphi| d\mu < \varepsilon$.

Ejercicio 34: Demostrar que, si μ es una medida de Lebesgue-Stieltjes (en $\mathbb{R}$), en la situación del problema anterior, se puede conseguir que los E_j sean intervalos abiertos.

Ejercicio 35: Demostrar que, para μ de Lebesgue-Stieltjes, las funciones continuas con soporte compacto son densas en $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\mu, \mu)$.

Ejercicio 36: Ver que si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida y $(X, \widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu})$ su completado, entonces, la aplicación $f \mapsto f$ es un isomorfismo isométrico de $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ sobre $L^1(X, \widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu})$.

Teorema.

Supongamos que $f : X \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, es una función $f(x,t)$ tal que, para cada $t \in [a,b]$, la aplicación $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ es integrable. Definimos $\forall t \in [a,b]$, $F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x)$ Entonces:

(a) Si existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$ $\forall (x,t) \in X \times [a,b]$ y, para un cierto $t_0 \in [a,b]$, $\lim_{t \to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$ $\forall x \in X$, resulta que $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$. En particular, si para cada $x \in X$, $\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ es continua, resulta que F es continua.

(b) Si $\partial f/\partial t$ existe y si $\forall (x,t) \in X \times [a,b]$, $|(\partial f/\partial t)(x,t)| \leq g(x)$ con $g \in L^1(\mu)$, resulta que F es diferenciable y $\forall t \in [a,b]$, $F'(t) = \int_X (\partial f/\partial t)(x,t)d\mu(x)$.

Demostración.

(a) Basta aplicar el Teorema de convergencia dominada a las funciones $f_n(x) = f(x, t_n)$, donde $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier sucesión de puntos de $[a, b]$ que converge a t_0.

(b) Empezamos por observar que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) \qquad \text{donde} \qquad h_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0},$$

siendo,como antes $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier sucesión de puntos de $[a, b]$ que converge a t_0. se sigue que $\partial f/\partial t$ es medible y, además, por el teorema del valor medio

$$|h_n(x)| \le \sup_{t\in[a,b]} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \le g(x),$$

de modo que podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada para obtener

$$F'(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

Teorema.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, donde $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Se cumple que

(a) Si f es integrable Riemann, entonces f es medible Lebesgue (e integrable en $[a, b]$, puesto que es acotada) y $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$, es decir: las integrales de Riemann y de Lebesgue de f coinciden.

(b) f es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de puntos de $[a, b]$ donde f no es continua tiene medida de Lebesgue cero.

Demostración.

(a) Dada una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ consideramos las funciones simples $G_P = \sum_{j=1}^{n} M_j \chi_{]t_{j-1},t_j]}$ y

$$g_P = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{]t_{j-1},t_j]},$$ donde $M_j = \sup_{[t_{j-1},t_j]} f$ y $m_j = \inf_{[t_{j-1},t_j]} f$.

Observamos que las sumas superior e inferior de Darboux $\mathcal{S}(P,f)$ y $\mathcal{I}(P,f)$ coinciden, respectivamente, con $\int_{[a,b]} G_P d\lambda$ y $\int_{[a,b]} g_P d\lambda$.
Por otro lado, por ser f integrable Riemann, sabemos que existe una sucesión de particiones $P_k, k \in \mathbb{N}$ con intervalo máximo que tiende a 0 y tales que cada una incluye a la anterior (de forma que las g_{P_k} crecen con k mientras que las G_{P_k} decrecen al crecer k) y con $\mathcal{S}(P_k,f) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$ e $\mathcal{I}(P_k,f) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$.
Llamamos $G = \lim_{k\to\infty} G_{P_k}$ y $g = \lim_{k\to\infty} g_{P_k}$. Entonces, tenemos $g \leq f \leq G$.
Aplicando cualquiera de los teoremas de convergencia (monótona o dominada), resulta

$$\int_{[a,b]} G d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} G_{P_k} = \int_a^b f(x)dx.$$

Y también

$$\int_{[a,b]} g d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} g_{P_k} = \int_a^b f(x)dx.$$

Entonces

$$\int_{[a,b]} (G-g)d\lambda = 0 \Longrightarrow \ G = g \text{ c.t.} \Longrightarrow \ f = G \text{ c.t.}.$$

Como G es medible (por ser límite de funciones simples) y λ es una medida completa, llegamos a la conclusión de que f es medible.

Por otro lado

$$(g \le f \le G) \wedge \left(\int_{[a,b]} g d\lambda = \int_{[a,b]} G d\lambda = \int_a^b f(x)dx \right)$$
$$\Longrightarrow \int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

(b) Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, definimos, para cada $x \in [a, b]$,

$$H(x) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{|y-x| \leq \delta} f(x), \qquad h(x) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{|y-x| \leq \delta} f(x).$$

Entonces, f es continua en x si y sólo si $H(x) = h(x)$.
Como en el punto anterior, podemos encontrar una sucesión de particiones P_k, $k \in \mathbb{N}$, tales que el intervalo máximo tiende a 0 y cada una contiene a la anterior. En ese caso, $g_{P_k} \uparrow h$ y $G_{P_k} \downarrow H$. Y, además $\mathcal{S}(P_k, f) \longrightarrow \overline{\int_a^b} f(x)dx$ y $\mathcal{I}(P_k, f) \longrightarrow \underline{\int_a^b} f(x)dx$. Aplicando el Teorema de convergencia dominada (o monótona) vemos que

$$\mathcal{S}(P_k, f) = \int_{[a,b]} G_{P_k} d\lambda \longrightarrow \int_{[a,b]} H d\lambda.$$

de modo que

$$\int_{[a,b]} H d\lambda = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Y aplicando de nuevo el Teorema de convergencia dominada (o monótona) vemos que

$$\mathcal{I}(P_k, f) = \int_{[a,b]} g_{P_k} d\lambda \longrightarrow \int_{[a,b]} h d\lambda.$$

de modo que

$$\int_{[a,b]} h d\lambda = \underline{\int_a^b} f(x) dx.$$

Entonces resulta que

$$f \text{ es integrable Riemann } \iff \underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

$$\iff \int_{[a,b]} h d\lambda = \int_{[a,b]} H d\lambda \iff \int_{[a,b]} (H - h) d\lambda = 0.$$

Esta última condición equivale a que $H = h$ c. t. y esto es lo mismo que decir que f es continua en casi todo punto, o sea, fuera de un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Producto de espacios de medida.

Dados dos espacios de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, queremos construir un "espacio de medida producto". Ya tenemos entendidos dos de los tres ingredientes que ha de tener un espacio de medida: el conjunto $X \times Y$ y la $\sigma-$álgebra $\mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}$, de modo que sólo nos queda especificar lo que ha de ser la medida producto.

Definición.

Llamaremos rectángulo medible a cualquier subconjunto de $X \times Y$ que sea de la forma $A \times B$, con $A \in \mathcal{M}, \ B \in \mathcal{N}$. Y denotaremos por $\mathcal{R}$ la familia de todos los rectángulos medibles.

Proposición.

La colección $\mathcal{R}$ es una semiálgebra de subconjuntos de $X \times Y$.

Demostración: Ejercicio 37.

Corolario.

La familia $\mathcal{A}$ de las uniones finitas disjuntas de rectángulos medibles es un álgebra que genera la $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}\bigotimes\mathcal{N}$, es decir, $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{M}\bigotimes\mathcal{N}$.

Proposición.

La función de conjunto

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{\pi} & [0,\infty] \\ A\times B & \longmapsto & \pi(A\times B)=\mu(A)\nu(B) \end{array}$$

es completamente aditiva en la semiálgebra $\mathcal{R}$ de los rectángulos medibles.

Demostración. Supongamos que

$$A\times B=\biguplus_{j=1}^{J} A_j\times B_j,\ J \text{ finito o infinito},\ A,A_j\in\mathcal{M};B,B_j\in\mathcal{N}\ \forall j.$$

Entonces

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x,y) = \sum_{j=1}^{J} \chi_{A_j\times B_j}(x,y) = \sum_{j=1}^{J} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y).$$

Integrando en x con la medida μ obtenemos

$$\mu(A)\chi_B(y) = \int_X \chi_A(x)\chi_B(y)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{J} \int_X \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)d\mu(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \mu(A_j)\chi_{B_j}(y) \Longrightarrow \mu(A)\nu(B) = \sum_{j=1}^{J} \mu(A_j)\nu(B_j).$$

Corolario.

La función de conjunto π definida en la semiálgebra $\mathcal{R}$ se extiende a una única función de conjunto completamente aditiva, es decir, lo que hemos denominado una "premedida" en el álgebra $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{R}$. Como ya recordamos, $\mathcal{A}$ es la colección de las uniones finitas disjuntas de rectángulos medibles

Demostración. Basta aplicar el teorema general de la página 80 del capítulo 1.

Definición.

La premedida π definida en el álgebra $\mathcal{A}$ da lugar a una medida exterior $\pi^\star$ en $\mathcal{P}(X \times Y)$ y, cuando restringimos esta medida exterior $\pi^\star$ a la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{A}$, que es $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}$ obtenemos una medida a la que llamaremos $\mu \times \nu$, la medida producto de μ y ν. También diremos que $(X \times Y, \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ es el espacio de medida producto de $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$.

Ejercicio 38: Demostrar que si μ y ν son $\sigma-$finitas; entonces $\mu \times \nu$ también es $\sigma-$finita y, en este caso, $\mu \times \nu$ es la única medida en $\mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}$ que extiende la función de conjunto π, dada en $\mathcal{R}$ por $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Ejercicio 39: Extender la construcción de la medida producto a cualquier número finito de factores y formular y probar leyes de asociatividad para los productos de $\sigma-$álgebras y de medidas, imponiendo las condiciones precisas para que los resultados sean ciertos.

Definición.

Dados dos espacios de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ y dado un conjunto $E \subset X \times Y$, definiremos, para cada $x \in X$, la $x-$sección de E, a la que llamaremos E_x, mediante

$$E_x = \{y \in Y : \ (x, y) \in E\} \subset Y$$

y, para cada $y \in Y$, definiremos la $y-$sección de E, a la que llamaremos E^y, mediante

$$E^y = \{x \in X : \ (x, y) \in E\} \subset X.$$

Definición.

Si tenemos una aplicación $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$, para cada $x \in X$, definiremos la $x-$sección f_x de f como la aplicación

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f_x} & \mathbb{C} \\ y & \longmapsto & f_x(y) = f(x,y). \end{array}$$

Y para cada $y \in Y$, definiremos la $y-$sección f^y de f como la aplicación

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f^y} & \mathbb{C} \\ y & \longmapsto & f^y(x) = f(x,y). \end{array}$$

Proposición.

(a) Si $E \in \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}$, entonces $E_x \in \mathcal{N}\ \forall x \in X$ y $E^y \in \mathcal{M}\ \forall y \in Y$.

(b) Si f es $\mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}-$medible, entonces f_x es $\mathcal{N}-$medible $\forall x \in X$ y f^y es $\mathcal{M}-$medible $\forall y \in Y$.

Demostración.

(*a*) Sea
$\mathcal{S} = \{E \subset X \times Y : \ (E_x \in \mathcal{N} \ \forall x \in X) \wedge (E^y \in \mathcal{M} \ \forall y \in Y\}$.
Como

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x \text{ y } \left(\complement E\right)_x = \complement(E_x)$$

y también

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)^y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)^y \text{ y } \left(\complement E\right)^y = \complement(E^y),$$

resulta que $\mathcal{S}$ es una $\sigma-$álgebra. Para $E = A \times B \in \mathcal{R}$, se tiene que $E_x = B$ si $x \in A$, $E_x = \emptyset$ si $x \notin A$, $E^y = A$ si $y \in B$ y $E^y = \emptyset$ si $y \notin B$; de modo que $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$. Por lo tanto, por ser $\mathcal{S}$ $\sigma-$álgebra, llegamos a que $\mathcal{S} \supset \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}$, c.q.d..

(*b*) $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \ f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N} \Rightarrow ((f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x \in \mathcal{N}) \wedge ((f^y)^{-1}(B) = (f^1(B))^y \in \mathcal{M}$.

Definición.

Diremos que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ es una clase monótona si $\mathcal{M}$ es cerrada por uniones de familias numerables crecientes y también por intersecciones de familias numerables decrecientes.

Toda $\sigma-$álgebra es una clase monótona.

Además, la intersección de cualquier familia de clases monótonas es una clase monótona.

En particular, dada cualquier familia de conjuntos $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, la intersección de todas las clases monótonas que contienen a $\mathcal{E}$ es una clase monótona, la mínima clase monótona que contiene a $\mathcal{E}$, que denotaremos como $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Lema de la clase monótona.

Para cualquier álgebra $\mathcal{A}$, la clase monótona generada por $\mathcal{A}$ coincide con la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{A}$, es decir

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

Demostración.

$\sigma(\mathcal{A})$ es una clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$, luego $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Para ver la igualdad basta demostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es una $\sigma-$álgebra. Para cada $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ consideramos

$$\mathcal{M}_E = \{F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : \; E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\},$$

que es, claramente, una clase monótona.
Observamos que $\emptyset, E \in \mathcal{M}_E$ y $E \in \mathcal{M}_F \iff F \in \mathcal{M}_E$.
Como $\mathcal{A}$ es un álgebra, $\forall E, F \in \mathcal{A}, \; F \in \mathcal{M}_E$. Así que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_E \; \forall E \in \mathcal{A}$. Y, por ser $\mathcal{M}_E$ clase monótona, $\forall E \in \mathcal{A}, \; \mathcal{M}_E = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Esto implica que $\forall F \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \; \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_F$. Por tanto $\mathcal{M}_F = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.
Y como $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$, queda probado que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es un álgebra.
Finalmente, si tenemos una sucesión de conjuntos $E_j \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, será $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \; \forall n \in \mathbb{N}$ y,puesto que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es cerrada por uniones crecientes numerables, $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Teorema.

Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida $\sigma-$finitos. Si $E \in \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}$, entonces las funciones

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & [0, \infty] & \text{e} & Y & \longrightarrow & [0, \infty] \\ x & \longmapsto & \nu(E_x) & & y & \longmapsto & \mu(E^y) \end{array}$$

son medibles en X e Y respectivamente y

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

Demostración. Empezamos suponiendo que las medidas μ y ν son finitas. Sea $\mathcal{V}$ el subconjunto de $\mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}$ formado por aquellos E's para los que la conclusión del teorema es cierta. Para un rectángulo medible $E = A \times B$, tenemos $\nu(E_x) = \chi_A(x)\nu(B)$ y $\mu(E^y) = \mu(A)\chi_B(y)$. Así que $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$. Y, por la aditividad de las medidas, también $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{V}$,

donde recordamos que $\mathcal{A}$ es el álgebra formada por las uniones de familias finitas de rectángulos medibles disjuntos. Si vemos que $\mathcal{V}$ es una clase monótona, quedará probado que $\mathcal{V} = \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}$.
Vamos a ver que $\mathcal{V}$ es clase monótona.
Si $E_n \in \mathcal{V}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $E_n \uparrow E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, las funciones $f_n(y) = \mu((E_n)^y)$ son medibles y crecen a $f(y) = \mu(E^y)$.
Por el teorema de convergencia monótona, tenemos

$$\int_Y \mu(E^y) d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \mu((E_n)^y) d\nu(y)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\mu \times \nu)(E_n) = \mu \times \nu(E).$$

Del mismo modo

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

Queda probado que $E \in \mathcal{V}$.
Si ahora tenemos $E_n \in \mathcal{V}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $E_n \downarrow E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, las funciones $g_n(y) = \mu((E_n)^y)$ son integrables y decrecen a $g(y) = \mu(E^y)$.

Por el teorema de convergencia dominada, tenemos

$$\int_Y \mu(E^y)d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \mu((E_n)^y)d\nu(y)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\mu \times \nu)(E_n) = \mu \times \nu(E).$$

Del mismo modo

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x)d\mu(x).$$

Queda probado que $E \in \mathcal{V}$.
Finalmente, si μ y ν son $\sigma-$finitas, escribimos $X \times Y$ como unión de una sucesión creciente de rectángulos medibles $X_j \times Y_j$ de medida finita. Si $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, podemos aplicar lo que ya hemos visto a cada $E \cap (E_j \times Y_j)$, obteniendo

$$
\begin{aligned}
\mu \times \nu(E \cap (X_j \times Y_j)) &= \int_X \chi_{X_j}(x)\nu(E_x \cap Y_j)d\mu(x) \\
&= \int_Y \chi_{Y_j}(y)\mu(E^y \cap X_j)d\nu(y).
\end{aligned}
$$

Ahora sólo hay que aplicar el teorema de la convergencia monótona para concluir.

Teorema de Fubini-Tonelli

Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ dos espacios de medida $\sigma-$finitos.

Teorema de Tonelli.

Si $f \in \mathcal{L}^+(X \times Y)$, entonces, las funciones

$$g(x) = \int_Y f_x d\nu \qquad \text{y} \qquad h(y) = \int_X f^y d\mu$$

están en $\mathcal{L}^+(X)$ y $\mathcal{L}^+(Y)$ respectivamente y

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \times \nu) = \int_X \left\{ \int_Y f(x,y)d\nu(y) \right\} d\mu(x)$$
$$= \int_Y \left\{ \int_X f(x,y)d\mu(x) \right\} d\nu(y)$$

Teorema de Fubini.

Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces, $f_x \in L^1(\nu)$ para casi todo $x \in X$ con respecto a μ, $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$ con respecto a ν, las funciones definidas c. t.

$$g(x) = \int_Y f_x d\nu \qquad \text{y} \qquad h(y) = \int_X f^y d\mu$$

están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente y

$$\int_{X \times Y} fd(\mu \times \nu) = \int_X \left\{ \int_Y f(x,y) d\nu(y) \right\} d\mu(x)$$
$$= \int_Y \left\{ \int_X f(x,y) d\mu(x) \right\} d\nu(y)$$

Demostración de los teoremas de Tonelli y Fubini. El teorema de Tonelli para la función $\chi_E(x,y)$ con $E \in \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}$ ya lo hemos demostrado. Por linealidad, se cumple también para funciones simples. Si $f \in \mathcal{L}^+(X \times Y)$, sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples medibles que converge monótonamente a f. El teorema de convergencia monótona implica, primero, que las correspondientes g_n y h_n crecen a g y h, de modo que g y h son medibles y, en segundo lugar, que

$$\int_X g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu).$$

y

$$\int_X h d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu).$$

Esto prueba el teorema de Tonelli y también demuestra que si $f \in \mathcal{L}^+(X \times Y)$ y $\int_{X\times Y} fd(\mu \times \nu) < \infty$, entonces $g < \infty$ c. t. y $h < \infty$ c. t.; es decir $f_x \in L^1(\nu)$ c. t. y $f^y \in L^1(\mu)$ c. t.. Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces la conclusión del teorema de Fubini se sigue aplicando el de Tonelli a las partes positiva y negativa de las partes real e imaginaria de f.

Observaciones:

1) Es una práctica generalizada suprimir los paréntesis o las llaves en las integrales iteradas, poniendo, en lugar de $\int_Y \left\{\int_X f(x,y)d\mu(x)\right\} d\nu(y)$, simplemente $\int_Y \int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$, o, incluso $\int_X \int_Y fd\mu d\nu$.
2) Si se quita la hipótesis de $\sigma-$finitud de alguna de las medidas, las conclusiones del teorema de Fubini-Tonelli pueden fallar. Veamos un ejemplo sencillo: Sean $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, μ la medida de Lebesgue y ν la medida contadora.

Si $D = \{(x,y) \in X \times Y : \ x = y\}$, la diagonal del cuadrado $X \times Y = [0,1]^2$, vamos aver que las tres integrales

$$\int_Y \int_X \chi_D d\mu d\nu, \ \int_X \int_Y \chi_D d\nu d\mu \text{ y } \int_{X\times Y} \chi_D d(\mu \times \nu)$$

son todas distintas. En efecto:

$$\int_Y \int_X \chi_D d\mu d\nu = \int_Y \left(\underbrace{\int_X \chi_D(x,y) d\mu(x)}_{=0} \right) d\nu(y) = 0.$$

$$\int_X \int_Y \chi_D d\nu d\mu = \int_X \left(\underbrace{\int_Y \chi_D(x,y) d\nu(y)}_{=1} \right) d\mu(x) = 1.$$

Y, finalmente

$$\int_{X\times Y} \chi_D d(\mu\times\nu) = \mu\times\nu(D)$$
$$= \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu\times\nu(R_j),\ D\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j,\ R_j\in\mathcal{R}\ \forall j\in\mathbb{N}\right\} = \infty,$$

ya que si

$$D\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\times B_j,$$

entonces, para algún $j\in\mathbb{N}$, se ha de cumplir que $\mu(A_j)>0$ y B_j es infinito, de modo que $\nu(B_j)=\infty$ y, así $\mu\times\nu(R_j)=\mu(A_j)\nu(B_j)=\infty$.

3) En el teorema de Tonelli, no se puede prescindir de la hipótesis $f \in \mathcal{L}^+(X \times Y)$. En el ejercicio 41 de más abajo se da un ejemplo de una función $f \geq 0$ que no es $\mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}-$medible y para la que, sin embargho, f_x y f^y son siempre medibles y las integrales iteradas existen; pero no son iguales.

4) Tampoco se puede prescindir de la hipótesis $f \in L^1(\mu \times \nu)$ en el teorema de Fubini. En el ejercicio 42 de más abajo se da un ejemplo de $f \notin L^1(\mu \times \nu)$ para la que f_x y f^y son siempre integrables y las integrales iteradas existen pero no coinciden.

5) Los teoremas de Tonelli y Fubini se usan muchas veces conjuntamente. La situación más común es que uno quiera ver si puede cambiar el orden de integración en una cierta integral $\int_X \int_Y f d\nu d\mu$. Lo primero que uno hace es usar el teorema de Tonelli para ver que $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) < \infty$. Y, una vez sabido esto, se usa el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración y calcular la integral si es preciso.

Ejercicio 40: Ver con un ejemplo que, aunque $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sean completos, $(X \times Y, \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ puede no serlo. *Sugerencia: Tomar $E = A \times B$ con $\emptyset \neq A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$ y $B \subset Y$ tal que $B \notin \mathcal{N}$.*

Ejercicio 41: Sea $X = Y$ un conjunto no numerable totelmente ordenado tal que, para cada $x \in X$, $\{y \in X : \ y < x\}$ es numerable; por ejemplo se puede tomar el conjunto de los ordinales numerables. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ la $\sigma-$álgebra de los conjuntos numerables o conumerables y sea $\mu = \nu$ definida en $\mathcal{M}$ haciendo $\mu(A) = 0$ si A es numerable y $\mu(A) = 1$ si A es conumerable. Sea $E = \{(x, y) \in X \times Y : \ y < x\}$. Ver que, entonces, E_x y E^y son medibles para todo x, y y las integrales iteradas $\int_X \int_Y \chi_E d\nu d\mu$ y $\int_Y \int_X \chi_E d\mu d\nu$ existen pero son distintas.

Ejercicio 42: Sea $X = Y = \mathbb{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. y sea $\mu = \nu =$medida contadora. Definimos $f(m, n) = 1$ si $m = n$, $f(m, n) = -1$ si $m = n + 1$ y $f(m, n) = 0$ en el resto de puntos de $X \times Y$. Ver que $\int_{X \times Y} fd(\mu \times \nu) = \infty$ y las integrales $\int_X \int_Y fd\nu d\mu$ y $\int_Y \int_X fd\mu d\nu$ existen pero son distintas.

Teorema de Fubini-Tonelli para medidas completas.

Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida $\sigma-$finitos completos y sea $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ el completado del espacio de medida producto $(X \times Y, \mathcal{M} \bigotimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$. Si f es $\mathcal{L}-$medible y, o bien es $f \geq 0$ (caso a) o bien es $f \in L^1(\lambda)$ (caso b), entonces f_x es $\mathcal{N}-$medible para casi todo x, f^y es $\mathcal{M}-$medible para casi todo y y, en el caso b, también f_x y f^y son integrables para casi todo x e y respectivamente. Además, las aplicaciones $x \longmapsto \int_Y f_x d\nu$ e $y \longmapsto \int_X f^y d\mu$ son medibles y, en el caso b, también integrables y

$$\int_{X \times Y} f d\lambda = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$$

Demostración. Recordando el problema 17, sabemos que existe g, $\mathcal{M}\bigotimes\mathcal{N}-$ medible, tal que $f = g$ c. t. respecto a λ. Como el teorema de Fubini-Tonelli se cumple para g, que es ≥ 0 en el caso a e integrable con respecto a $\mu \times \nu$ en el caso b, todo lo que necesitamos es probar que se cumple también para $h = f - g$, que es una función que se anula en c. t. punto respecto a λ.
Existirá un conjunto $E \in \mathcal{M}\bigotimes\mathcal{N}$ con $\mu \times \nu(E) = 0$, tal que $h(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin E$. Como

$$0 = \mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y),$$

será $\nu(E_x) = 0$ para c. t. x y $\mu(E^y) = 0$ para c. t. y. Al ser las medidas μ y ν completas $\nu(E_x) = 0 \Rightarrow E_x \in \mathcal{N}$ y $\mu(E^y) = 0 \Rightarrow E^y \in \mathcal{M}$. Como $h_x = \chi_{\complement E_x}$ y $h^y = \chi_{\complement E^y}$ tenemos que h_x y h^y son medibles para c. t. punto, integrables también en el caso b y sus integrales se anulan. Y esto termina la demostración.

La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Definición.

La medida de Lebesgue λ^n en $\mathbb{R}^n$ es la completación de la medida producto $\underbrace{m \times m \cdots \times m}_{n \text{ factores}}$ en $\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cdots \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n \text{ factores}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, o, lo que es lo mismo, la completación de la medida producto $\underbrace{\lambda \times \lambda \cdots \times \lambda}_{n \text{ factores}}$ en $\underbrace{\mathcal{L}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \cdots \times \mathcal{L}_{\mathbb{R}}}_{n \text{ factores}}$. A la $\sigma-$álgebra en la que está definida λ^n la denotaremos por $\mathcal{L}^n$ o $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}$ y si $E \in \mathcal{L}^n$, diremos que E es es un conjunto medible de Lebesgue o Lebesgue medible de $\mathbb{R}^n$. A veces denotaremos la restricción de λ^n a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}^n$, que no es otra que $\underbrace{m \times m \cdots \times m}_{n \text{ factores}}$, por m^n. Y, tal como hacíamos en el caso $n = 1$, pondremos $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ en lugar de $\int_{\mathbb{R}^n} fd\lambda^n$.

Cuando la dimensión n permanezca fija y esté clara, abreviaremos λ^n y m^n por λ y m respectivamente.

Teorema (regularidad de λ^n).

Sea $E \in \mathcal{L}^n$. Entonces

(a)

$$\lambda(E) = \text{ínf}\{m(U): \ U \supset E, \ U \text{ abierto}\}$$
$$= \sup\{m(K): \ K \subset E, \ K \text{ compacto}\}.$$

(b) $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \setminus N_2$, donde A_1 es un F_σ, A_2 es un G_δ y $\lambda(N_1) = \lambda(N_2) = 0$.

(c) Si $\lambda(E) < \infty$, se tiene que $\forall \varepsilon > 0$, existe una colección finita $(R_j)_{j=1}^N$ de rectángulos disjuntos, cuyos lados (o factores) son intervalos, tales que $\lambda\left(E \Delta \bigcup_{j=1}^{N} R_j\right) < \varepsilon$.

Demostración. Por la definición de medida producto, dado $\varepsilon > 0$, existe una familia numerable de rectángulos $(S_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(S_j) \leq \lambda(E) + \varepsilon$. Ahora, por la regularidad de la medida de Lebesgue en una dimensión, aplicada a los lados o factores de cada S_j, podemos encontrar un rectángulo U_j, cuyos lados o factores son abiertos (y que, por tanto, él mismo es un abierto de $\mathbb{R}^n$) tal que $U_j \supset S_j$ y $m(U_j) < \lambda(S_j) + \varepsilon 2^{-j}$. Tomando $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$, tenemos un abierto U tal que $m(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(U_j) \leq \lambda(E) + \varepsilon$. Así queda probada la primera identidad del punto (a). Para probar la segunda usamos el mismo procedimiento que en una dimensión, que recordamos ahora:

Comenzamos suponiendo que E es acotado. Si, además, es cerrado, entonces es un compacto y no hay nada que demostrar. Si E es acotado pero no es cerrado, dado $\varepsilon > 0$, existirá un abierto $U \supset \overline{E} \setminus E$ tal que $\mu(U) \leq \mu(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$. Sea $K = \overline{E} \setminus U$. Entonces K es compacto, $K \subset E$ y

$$\begin{aligned}\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U) &= \mu(E) - (\mu(U) - \mu(U \setminus E)) \\ &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\overline{E} \setminus E) \geq \mu(E) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Si E no es acotado, podemos ponerlo como una unión numerable de conjuntos acotados y aplicar a cada uno lo que acabamos de probar. Completar los detalles (**Ejercicio 43**). Así queda completa la demostración del apartado (a).

El apartado (b) se demuestra usando el (a) (**Ejercicio 44**). Y lo mismo se hace con el (c) (**Ejercicio 45**).

Teorema.

Si $f \in L^1(\lambda^n)$ y $\varepsilon > 0$, existe una función simple $\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{R_j}$, donde cada R_j es un producto de intervalos $1-$dimensionales, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |f - \varphi| d\lambda^n < \varepsilon$. Además existe g, continua con soporte compacto, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| d\lambda^n < \varepsilon$.

Demostración: Ejercicio 46.

Teorema.

La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones. En concreto, si para cada $a \in \mathbb{R}^n$ definimos $\tau_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mediante $\tau_a(x) = x + a \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

(a) $\forall E \in \mathcal{L}^n$, $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ y $\lambda(\tau_a(E)) = \lambda(E)$.

(b) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es Lebesgue-medible, entonces $f \circ \tau_a$ también es Lebesgue-medible. Y si, además, $f \geq 0$ o $f \in L^1(\lambda)$, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \tau_a) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda$.

Demostración. Como los τ_a son homeomorfismos, es evidente que conservan los conjuntos de Borel. Si E es un rectángulo, o sea, un producto cartesiano de conjuntos de Borel unidimensionales, la fórmula $\lambda^n(\tau_a(E)) = \lambda^n(E)$ es consecuencia de la correspondiente fórmula para $n = 1$. Y, una vez que se tiene para rectángulos, se extiende a todos los conjuntos de Borel $n-$dimensionales por la unicidad de la extensión de una premedida $\sigma-$finita de un álgebra a la $\sigma-$álgebra generada por ella.
En particular, la colección de los conjuntos de Borel $n-$dimensionales E que tienen $\lambda(E) = 0$ es invariante por cada τ_a.
Si f es medible-Lebesgue y $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, tenemos que $f^{-1}(B) = E \cup N$ donde $E \in \mathcal{B}^n$ y $\lambda(N) = 0$. Entonces $\tau_a^{-1}(E) \in \mathcal{B}^n$ y $\lambda(\tau_a^{-1}(N)) = 0$, de modo que $(f \circ \tau_a)^{-1}(B) \in \mathcal{L}^n$ y f es Lebesgue medible. La identidad $\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \tau_a) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda$ se reduce a $\lambda(\tau_{-a}(E)) = \lambda(E)$ cuando $f = \chi_E$. Se extiende a funciones simples por linealidad, a funciones medibles ≥ 0 por la definición de la integral y a $f \in L^1(\lambda)$ tomando partes positivas y negativas.

Cambio de variable en la integral de Lebesgue.

Vamos a empezar por estudiar cómo afecta a la integral de Lebesgue un cambio $T \in GL(n, \mathbb{R})$, es decir, una aplicación lineal invertible $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Identificaremos T con su matriz, cuyas entradas las denotaremos por $T_{ij} = e_i \cdot Te_j$, donde $(e_k)_{k=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Pondremos $\det T$ para el determinante de T y usaremos el hecho de que el determinante cumple que $\det(T \circ S) = (\det T)(\det S)$. También utilizaremos el resultado elemental de Algebra Lineal que dice que toda $T \in GL(n, \mathbb{R})$ puede obtenerse como producto o composición de un número finito de transformaciones pertenecientes a tres familias. Las transformaciones de la primera familia multiplican una coordenada determinada por una constante diferente de cero y dejan fijas las demás coordenadas. Las de la segunda familia añaden un múltiplo de una coordenada determinada a otra coordenada determinada distinta de la anterior y dejan las demás fijas. Y las de la tercera intercambian dos coordenadas determinadas distintas y dejan las demás fijas.

$$T_1(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,cx_j,\cdots,x_n), \qquad c\neq 0,$$
$$T_2(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,x_j+cx_k,\cdots,x_n), \qquad k\neq j,$$
$$T_3(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_k,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_j,\cdots,x_n).$$

Teorema.

Sea $T \in GL(n,\mathbb{R})$. Se cumple que

(*a*) Si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es Lebesgue medible, también lo es $f\circ T$. Y si, además, $f\geq 0$ o $f\in L^1(\lambda)$, entonces

$$(4) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f\circ T(x)dx.$$

(*b*) Si $E\in\mathcal{L}^n$, entonces $T(E)\in\mathcal{L}^n$ y $\lambda(T(E)) = |\det T|\lambda(E)$.

Demostración. Comenzamos suponiendo que f es Borel medible. Entonces, puesto que T es continua, $f \circ T$ es también Borel medible. Si (4) es cierta para dos transformaciones $T, S \in GL(n, \mathbb{R})$, se sigue que también es cierta para $T \circ S$. En efecto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T(x)dx$$
$$= |\det T||\det S| \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) \circ S(x)dx = |\det(T \circ S)| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ (T \circ S)(x)dx.$$

Por consiguiente, basta demostrar (4) cuando T pertenece a cada una de las familias de T_1, T_2, T_3. Pero esto es consecuencia del teorema de Fubini-Tonelli. Para T_3, intercambiamos el orden de integración de las variables x_j y x_k. Y para T_1 y T_2 integramos primero con respecto a x_j y usamos las fórmulas unidimensionales

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = |c| \int_{\mathbb{R}} f(ct)dt, \qquad \int_{\mathbb{R}} f(t+a)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt,$$

que son consecuencia del comportamiento de λ^1 respecto a dilataciones y traslaciones.
Como $\det T_1 = c,\ \det T_2 = 1,\ y \det T_3 = -1$, queda probada (4) para funciones Borel medibles.
Si $E \in \mathcal{B}^n$, entonces $T(E) \in \mathcal{B}^n$, ya que T^{-1} es continua. Además, tomando $f = \chi_{T(E)}$ en la versión de (4) que ya hemos demostrado, obtenemos $m(T(E)) = |\det T| m(E)$. En particular, la colección de los conjuntos de Borel de medida 0 es invariante por T y T^{-1}. Se sigue que también $\mathcal{L}^n$ es invariante. Y apartir de aquí, obtenemos la versión general de (4) del mismo modo que demostramos la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue.

Corolario.

La medida de lebesgue es invariante por rotaciones.

Demostración. Una rotación es una transformación $T \in GL(n, \mathbb{R})$ que satisface $T \circ T^\star = I$, donde $T^\star$ es la traspuesta de T e I es la identidad. El subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ formado por las rotaciones se llama grupo ortogonal y se denota por $O(n)$. Dado que $\det T = \det T^\star$, se sigue de $T \circ T^\star = I$ que $\forall T \in O(n), \ (\det T)^2 = 1$, de forma que $|\det T| = 1$. Basta aplicar ahora (4) para concluir.

Ahora vamos a tratar de extender (4) a aplicaciones diferenciables utilizando la aproximación lineal que proporciona la derivada y lo que ya sabemos para transformaciones lineales.

Vamos a considerar $G : \underbrace{\Omega}_{\text{abierto}_{\subset \mathbb{R}^n}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $G = (g_1, \cdots, g_n)$ tiene componentes g_i de clase $\mathcal{C}^1$, es decir, con derivadas parciales de primer orden continuas.

Denotaremos por $D_x G$ la matriz derivada de G en el punto $x\Omega$, es decir: $D_x G = ((\partial g_i/\partial x_j)(x))$.

Definición.

Diremos que G es un difeomorfismo $\mathcal{C}^1$ si G es inyectiva y $\forall x \in \Omega,\ D_x G$ es invertible. En ese caso, el teorema de la función inversa nos garantiza que $G(\Omega)$ es abierto y $G^{-1} : G(\Omega) \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ es también un difeomeorfismo $\mathcal{C}^1$ y
$D_x(G^{-1}) = (D_{G^{-1}(x)} G)^{-1}\ \forall x \in G(\Omega)$.

Teorema.

Sea un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sea $G : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo $\mathcal{C}^1$. Se cumple que

(a) Si $f : G(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ es Lebesgue medible, entonces $f \circ G$ es Lebesgue medible en Ω. Y si, además, $f \geq 0$ o $f \in L^1(G(\Omega), \lambda)$, entonces

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx = \int_{\Omega} f \circ G(x) |\det D_x G| dx. \tag{5}$$

(b) Si $E \subset \Omega$ y $E \in \mathcal{L}^n$, entonces $G(E) \in \mathcal{L}^n$ y $\lambda(G(E)) = \int_E |\det D_x G| dx$.

Demostración.

Sabemos, por lo ya visto en el caso lineal, que basta considerar funciones o conjuntos Borel medibles. Además, al ser G y G^{-1} continuas, la medibilidad está asegurada.
Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $T = (T_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL(n, \mathbb{R})$, escribiremos

$$\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \qquad \|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |T_{ij}|.$$

Tenemos, entonces, que $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ y que $B(a, h) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| \leq h\}$ es el cubo de centro a y lado $2h$.
Sea $Q \subset \Omega$ un cubo, digamos $Q = B(a, h) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| \leq h\}$. Si $x \in Q$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, podemos aplicar el teorema del valor medio para concluir que $g_i(x) - g_i(a) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)(\partial g_i / \partial x_j)(y)$ para algún punto y del segmento que une a y x. Por tanto

$\|G(x) - G(a)\| \leq h \sup_{y \in Q} \|D_y G\|$. Vemos, así, que $G(Q) \subset B(G(a), h \sup_{y \in Q} \|D_y G\|)$, que es un cubo de lado $h \sup_{y \in Q} \|D_y G\|$. Se sigue que $m(G(Q)) \leq \left(\sup_{y \in Q} \|D_y G\|\right)^n m(Q)$. Si $T \in GL(n, \mathbb{R})$, aplicando la fórmula del cambio de variable lineal junto con esta última desigualdad, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(6) \quad m(G(Q)) &= |\det T| m(T^{-1}(G(Q))) \\
&\leq |\det T| \left(\sup_{y \in Q} \|T^{-1} D_y G\|\right)^n m(Q).
\end{aligned}
$$

Como $D_y G$ es continua en y, resulta que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\|(D_z G)^{-1} DyG\|^n \leq 1 + \varepsilon$ si $y, z \in Q$ y $\|y - z\| \leq \delta$. Dividimos Q en subcubos $Q_1, \cdots, Q_N$ con interiores disjuntos y con lados que midan a los sumo δ. Si llamamos $x_1, \cdots, x_N$ a los centros de estos subcubos, aplicando (6) con cada uno de los cubos Q_j en lugar de Q, obtenemos

$$
\begin{aligned}
m(G(Q)) &\leq \sum_{j=1}^{N} m(G(Q_j)) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |\det D_{x_j} G| \left(\sup_{y \in Q_j} \|(D_{x_j} G)^{-1} D_y G\| \right)^n m(Q_j) \\
&\leq (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} |\det D_{x_j} G| m(Q_j).
\end{aligned}
$$

La última suma es la integral de $\sum_{j=1}^{N} |\det D_{x_j}|\chi_{Q_j}(x)$, que, puesto que $D_x G$ es continua, tiende uniformemente en Q a $|\det D_x G$ cuando $\delta \to 0$. Por lo tanto, haciendo $\delta \to 0$ y $\varepsilon \to 0$, tenemos que

$$
m(G(Q)) \leq \int_Q |\det D_x G| dx.
$$

A continuación vamos a ver que esta misma desigualdad vale si se reemplaza Q por cualquier conjunto de Borel contenido en Ω.
En primer lugar, si consideramos un abierto $U \subset \Omega$, siempre podemos escribirlo como $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ donde los Q_j son cubos con interiores disjuntos (**Ejercicio 47**). Puesto que las fronteras de los cubos tienen medida de Lebesgue cero, tenemos que

$$m(G(U)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(G(Q_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} |\det D_x G| dx = \int_U |\det D_x G| dx.$$

Además, si tenemos un conjunto de Borel de medida finita $E \subset \Omega$, sabemos que existe una sucesión decreciente de abiertos de medida finita $U_j \subset \Omega$ tales que $E \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ y $m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \setminus E\right) = 0$.
podemos aplicar el teorema de convergencia dominada, para obtener

$$m(G(E)) \leq m\left(G\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j\right)\right) = \lim_{j\to\infty} m(G(U_j))$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} \int_{U_j} |\det D_x G| dx = \int_E |\det D_x G| dx.$$

Y, como m es $\sigma-$finita, tenemos que

$$m(G(E)) \leq \int_E |\det D_x G| dx \; \forall E \in \mathcal{B}^n \ni \; E \subset \Omega.$$

Si $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}$ es una función simple ≥ 0 definida en $G(\Omega)$, será:

$$\int_{G(\Omega)} f(x) dx = \sum_{j=1}^{N} a_j m(A_j) \leq \sum_{j=1}^{N} a_j \int_{G^{-1}(A_j)} |\det D_x G| dx$$

$$= \int_{\Omega} f \circ G(x) |\det D_x G| dx$$

Si f es una función medible ≥ 0, aproximándola por funciones simples y utilizando el teorema de convergencia monótona, llegamos a:

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx \leq \int_{\Omega} f \circ G(x)|\det D_x G|dx.$$

El mismo razonamiento que hemos usado puede aplicarse con G reemplazada por G^{-1} y f reemplazada por $f \circ G$, obteniendo:

$$\int_{\Omega} f \circ G(x)|\det D_x G|dx$$
$$\leq \int_{G(\Omega)} f \circ G \circ G^{-1}(x)|\det D_{G^{-1}(x)} G||\det D_x G^{-1}|dx = \int_{G(\Omega)} f(x)dx.$$

Así queda probado el apartado (a) para $f \geq 0$. Y, a partir de él, se obtiene, inmediatamente, para $f \in L^1(G(\Omega))$.
En cuanto a (b), basta observar que es sólo un caso particular de (a), que se obtiene tomando $f = \chi_{G(E)}$.

Integración en coordenadas polares

Definición.

Las coordenadas polares de un punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ son

- Su distancia al origen $r = |x| \in]0, \infty[$ y
- su proyección sobre la esfera unidad $x' = \dfrac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y| = 1\}$.

La aplicación $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \xrightarrow{\Phi} &]0, \infty[\times \mathbb{S}^{n-1} \\ x & \longmapsto & (r, x') \end{array}$ es biyectiva y continua con inversa $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$. Esta inversa es también continua, de modo que Φ es un homeomorfismo. Vamos a llamar $m_\star$ a la medida de Borel que resulta de trasladar la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ a $]0, \infty[\times \mathbb{S}^{n-1}$ mediante Φ, que vendrá dada por $m_\star(E) = m(\Phi^{-1}(E)) \ \forall E \in \mathcal{B}_{]0,\infty[\times \mathbb{S}^{n-1}}$. Y en $]0, \infty[$ consideraremos la medida $\rho = \rho_n$ dada por $\rho(A) = \int_A r^{n-1} dr$.

Teorema.

Existe una única medida de Borel $\sigma = \sigma_{n-1}$ en $\mathbb{S}^{n-1}$ tal que $m_\star = \rho \times \sigma$. Si f es Borel medible en $\mathbb{R}^n$ y, o bien es $f \geq 0$ o bien es $f \in L^1(m)$, entonces se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(rx')r^{n-1}d\sigma(x')dr. \tag{7}$$

Demostración. la fórmula (7) para $f = \chi_{\Phi^{-1}(E)}$, $E \in \mathcal{B}_{]0,\infty[\times\mathbb{S}^{n-1}}$ equivale a decir que $m_\star = \rho \times \sigma$. Y, una vez que hayamos construido σ y demostrado que $m_\star = \rho \times \sigma$, extenderemos (7) a funciones generales por el procedimiento habitual de linealidad y aproximación. Vamos a construir σ. Si $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, definimos,para cada $a > 0$,

$$E_a = \Phi^{-1}(]0, a] \times E) = \{rx' : \ 0 < r \leq a, \ x \in E\}.$$

Para que se cumpla (7) para $f = \chi_{E_1}$ debe ser

$$m(E_1) = \int_0^1 \int_E r^{n-1}d\sigma(x)dr = \sigma(E) \int_0^1 r^{n-1}dr = \frac{\sigma(E)}{n}.$$

Así pues, si (7) va a ser cierta, sólo podemos definir σ como $\sigma(E) = n \cdot m(E_1)$. Como la aplicación $E \longmapsto E_1$ lleva conjuntos de Borel a conjuntos de Borel y conmuta con uniones, intersecciones y complementos, es claro que σ definida como $\sigma(E) = n \cdot m(E_1)$ es una medida de Borel en $\mathbb{S}^{n-1}$. Además, como E_a es la imagen de E_1 por la aplicación $x \longmapsto ax$, tenemos $m(E_a) = a^n m(E_1)$ y, ppor consiguiente, si $0 < a < b$,

$$\begin{aligned} m_\star(]a,b] \times E) = m(E_b \setminus E_a) = \frac{b^n - a^n}{n}\sigma(E) \\ = \sigma(E)\int_a^b r^{n-1}dr = \rho \times \sigma(]a,b] \times E). \end{aligned}$$

Ahora fijamos $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ y llamamos $\mathcal{A}_E$ a la familia de las uniones finitas disjuntas de conjuntos de la forma $]a,b] \times E$. sabemos que $\mathcal{A}_E$ es un álgebra que genera la $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}_E = \{A \times E : \ A \in \mathcal{B}_{]0,\infty[}\}$. Por el cálculo anterior, tenemos que $m_\star = \rho \times \sigma$ en $\mathcal{A}_E$ y, por la unicidad de la extensión, se sigue que $m_\star = \rho \times \sigma$ en $\mathcal{M}_E$.

Pero $\bigcup_{E \in \mathcal{B}_{\mathbb{S}^{n-1}}} \mathcal{M}_E$ es, precisamente, la familia de los rectángulos de Borel de $]0,\infty[\times\mathbb{S}^{n-1}$, así que, otra aplicación del teorema de unicidad demuestra que $m_\star = \rho \times \sigma$ en toda la colección de los conjuntos de Borel de $]0,\infty[\times\mathbb{S}^{n-1}$.

Ejercicio 48: Extender (7) a funciones medibles de Lebesgue considerando la completación de la medida σ.

Corolario.

Si f es una función medible en $\mathbb{R}^n$, ≥ 0 o integrable y tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguna $g :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr.$$

Corolario.

Sean $c, C \in]0, \infty[$ y sea $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < c\}$. Supongamos que f es una función medible en $\mathbb{R}^n$. Se cumple que:

(a) Si $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ en B para algún $a < n$, entonces $f \in L^1(B)$. En cambio, si $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ en B, entonces $f \notin L^1(B)$.

(b) Si $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ en $\complement B$ para algún $a > n$, entonces $f \in L^1(\complement B)$. En cambio, si $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ en $\complement B$, entonces $f \notin L^1(\complement B)$.

Más abajo haremos el cálculo de $\sigma(\mathbb{S}^{n-1})$ para cualquier n. De momento, vamos a usar el hecho de que $\sigma(\mathbb{S}^1) = 2\pi$ para calcular una integral muy interesante. Que $\sigma(\mathbb{S}^1) = 2\pi$ es cosecuencia de la definición: $\sigma(\mathbb{S}^1) = 2m(B(0,1)) = 2\pi$.

Proposición.

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

Demostración.

Si llamamos I_n a la integral del enunciado, tenemos

$$I_2 = \sigma(\mathbb{S}^1) \int_0^\infty r e^{-ar^2} dr = 2\pi \left(-\frac{1}{2a} e^{-ar^2}\right)\Big|_{r=0}^{\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

como $e^{-a|x|^2} = \prod_{j=1}^{n} e^{-ax_j^2}$, el teorema de Tonelli implica que $I_n = (I_1)^n$.
En particular, $I_1 = (I_2)^{1/2}$, de modo que $I_n = (I_2)^{n/2} = (\pi/a)^{n/2}$.

Proposición.

$$\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

Demostración.

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr$$
$$= \frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{2} \int_0^\infty s^{(n/2)-1} e^{-s} ds = \frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Repaso: La función Γ de Euler.

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re z > 0$. Consideramos la función $f_z :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_z(t) = t^{z-1}e^{-t}$, donde $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$. Como $|t^{z-1}| = t^{\Re z - 1}$, tenemos $|f_z(t)| \le t^{\Re z-1}$ y también $|f_z(t)| \le C_z e^{-t/2}$. Por lo tanto, si $\Re z > 0$, $f_z \in L^1(]0,\infty[)$ y podemos definir

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \qquad \Re z > 0.$$

Puesto que

$$\int_\varepsilon^N t^z e^{-t}dt = -t^z e^{-t}\Big|_{t=\varepsilon}^N + z\int_\varepsilon^N t^{z-1}e^{-t}dt,$$

haciendo $\varepsilon \to 0$ y $N \to \infty$, vemos que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad \forall z \ni \Re z > 0. \tag{8}$$

La ecuación funcional (8) se puede usar para extender Γ a $\mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z},\ n \leq 0\}$. En concreto, para $-1 < \Re z \leq 0,\ z \neq 0$, podemos definir $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ y, por inducción, si ya tenemos definida Γ para $\Re z > -n$ la extendemos a $\Re z > -n-1$ mediante $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$. El resultado es una función definida en $\mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z},\ n \leq 0\}$.

Como $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} = 1$, aplicando repetidamente (8) obtenemos $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Corolario de la última proposicion.

Si $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < 1\}$, entonces $m(\mathbb{B}^n) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

Demostración.

$$m(\mathbb{B}^n) = \frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{(1/2)\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n/2)+1)}.$$

Proposición.

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Demostración. Por (8) tenemos

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Pero

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty s^{-1/2} e^{-s} ds = 2\int_0^\infty e^{-r^2} dr = \int_{-\infty}^\infty e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}.$$