Cálculo Numérico I

Curso 2017-2018 | Lista 1 | 1^o Mat./2^o D.G.

1) Se usa $\hat{e} = 2.7183$ como aproximación de e para calcular e^3.

a) Dar una estimación de los errores absoluto y relativo que se cometen en ese cálculo.

b) Hacer lo mismo para el cálculo de e^e.

c) Calcular esos errores en Matlab.

2) Aproximar $\sqrt{2}$ usando la recurrencia

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \; x_0 = 1 \,.$$

`Observacion`: la sucesión x_n converge a $\sqrt{2}$. Esa recurrencia corresponde al método de Newton, que veremos más adelante, aplicado a la función $f(x) = x^2 - 2$.

a) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para conseguir 5 cifras significativas correctas? ¿Y para 10?

Nota: tomar `sqrt(2)` calculado en Matlab como *valor* de $\sqrt{2}$.

b) Si no tuvieramos con qué comparar, ¿cómo se podría proceder?

3) Una aproximación al valor de $\sin(x)$ viene dada por su polinomio de Taylor en 0:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \,.$$

a) Usarla para aproximar $\sin(27)$ con un error menor que 10^{-5}. ¿Qué n se necesita?

b) ¿Cómo se podría mejorar (mucho) el n de manera sencilla?

4) Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \,.$$

Si x es pequeño $f(x) \approx 1$; sin embargo, si calculamos $f(10^{-16})$ en Matlab se obtiene, aproximadamente, 0.5551. ¿Qué está pasando? ¿Cómo se puede corregir?

5) Se considera el polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)^9 \\ &= x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512 \,. \end{aligned}$$

Dibujar en los puntos $x = 1.920, 1.921, 1.922, \ldots, 2.080$ los gráficos, superpuestos, para esas dos formas de expresarlo. ¿A qué se pueden deber las discrepancias?

6) Se considera la función $f(x) = e^x \log(1 + e^{-x})$. Para x grande el valor de esa función es, aproximadamente, 1. Dibujar $f(x)$ para x entre 0 y 40 tomando, al menos, 1000 puntos. ¿Qué se observa? ¿Qué puede estar pasando?

`Nota`: Se puede usar el *zoom* en Matlab para observar la zona *llamativa*.

Cálculo Numérico I

CURSO 2017-2018 Lista 2 1º MAT./2º D.G.

1) Analizar la convergencia del método del punto fijo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, para calcular las raíces reales de $f(x) = x^2 - x - 2$, con cada una de las siguientes g's: $g_1(x) = x^2 - 2$, $g_2(x) = \sqrt{x+2}$, $g_3(x) = -\sqrt{2+x}$ y $g_4(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ con $x \neq 0$.

2) Encontrar los puntos fijos de las siguientes iteraciones y analizar la convergencia:

a) $x_{n+1} = \sqrt{p + x_n}$ con $p > 0$.

b) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2 + x_n}$.

3) En el intervalo [0,1] se considera la función $g(x) = \lambda x(1-x)$ donde $\lambda \in [0,4]$.

a) Demostrar que g envía el intervalo $[0,1]$ en sí mismo.

b) ¿Cuántos puntos fijos tiene g en [0,1]?

c) Demostrar que el punto fijo $p = 0$ es atractor si $\lambda < 1$ y repulsor para $\lambda > 1$.

4) Se considera la ecuación $\tan x = x$ para $x > 0$.

a) Demostrar que tiene una única raíz en cada uno de los intervalos $(\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi(n+1))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Escribir un programa que use iteración para calcular las 10 primeras raíces ($n = 0, 1, ..., 9$) con 6 dígitos correctos.

5) Se considera la función $g(x) = (1/2)x - x^3$.

a) ¿Cuántos puntos fijos tiene g?

b) Hallar un punto $\beta > 0$ con la propiedad $g(\beta) = -\beta$.

c) ¿Qué le ocurre a la iteración de punto fijo para $x_0 \in (0, \beta)$? ¿Y para $x_0 = \beta$? ¿Y para $x_0 > \beta$?

`Observación`: no es necesario considerar los casos en que x_0 sea negativo pues al cambiar el signo de x_0 cambia el signo de todos los iterados.

6) **a)** Encontrar los puntos fijos de $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$.

b) Para cada x_0 real la sucesión de iterados converge a un punto fijo. Determinar, en función de x_0, cuál es ese límite.

7) Sea $f \in \mathcal{C}^{m+1}$, $m \geq 2$ (la función y sus $m+1$ primeras derivadas son continuas) tal que

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(m-1)}(\xi) = 0, \text{ pero } f^{(m)}(\xi) \neq 0.$$

a) Considerar la iteración del método de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, $k \geq 0$, y demostrar que no puede tener convergencia cuadrática para aproximar ξ.

b) Considerar el método de Newton modificado $x_{k+1} = x_k - m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k \geq 0$, y demostrar que su orden de convergencia sí es 2.

8) Las funciones $g(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \tan(x)$ tienen ambas un punto fijo en $\alpha = 0$ y para ambas $g'(0) = 1$.

a) Probar que para $|x_0|$ suficientemente pequeño con el seno la iteración de punto fijo converge mientras que con la tangente diverge.

b) En el caso $|g'(\alpha)| = 1$ la convergencia o divergencia depende de los valores de las derivadas superiores de g. Probar que si con $|g'(\alpha)| = 1$ hay convergencia cada error es asintóticamente de la misma magnitud del anterior con lo que la convergencia es lentísima y el método carece de utilidad en ese caso.

9) Suponer que $f \in C^2$, $f(\xi) = 0$ y que en el intervalo $[a, \xi]$ (con $a < \xi$), $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$.

a) Demostrar que para todo $x_0 \in [a, \xi]$ el método de Newton converge a ξ.

b) ¿Es eso cierto, en general, si cambiamos $[a, \xi]$ por $[\xi, a]$?

Final del 21 de enero de 2010:

10) Se considera la ecuación (*) $x = -a\log(x)$, donde a es un parametro positivo.

a) Demostrar que para cualquier $a > 0$, esta ecuación tiene una única solución real.

b) Demostrar que el método del punto fijo, aplicado a la función $g(x) = -a\log(x)$, converge para $a < 1/e$, y diverge para $a > 1/e$.

c) Si se escoge $a = 1/10$, ¿para qué valores del dato inicial x_0 puede estar uno seguro de que el metodo converge?

d) Calcular (en MatLab o con una calculadora) la solución de la ecuación (*) para $a = 9/25$ con 4 dígitos signicativos, eligiendo un método adecuado.

Cálculo Numérico I

CURSO 2017-2018 Lista 3 1º DE MAT./2º DE D.G.

1) Aplicamos el método de punto fijo a la función $g(x) = \dfrac{5x}{1+x^4}$.

a) Encontrar los puntos fijos de g. ¿Son atractores o repulsores?

b) Sea F el conjunto de puntos fijos de g, encontrado en el apartado anterior. Demostrar lo siguiente. Para todo dato inicial x_0, ó bien $x_k \in F$ para algún k finito (en este caso, lógicamente, los aproximantes $\{x_n\}$ convergen), ó bien $\{x_n\}$ no tienen ningún límite finito o infinito ($\pm\infty$). Comprobar también que en el último caso, la sucesión $\{|x_n|\}$ tampoco tiene límite (finito o infinito).

2) Se considera la función $f(x) = \text{signo}(x)|x|^a$, donde $\text{signo}(0) = 0$, $\text{signo}(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$ y $a > 0$ es un parámetro.

a) ¿Existen valores de a para los que no tenemos convergencia local del método de Newton a la raíz 0 de f? ¿Son válidos los teoremas que vimos en clase para estos casos?

b) Determinar los valores de a tales que se tiene la convergencia local. ¿Va a haber convergencia global en estos casos?

c) En casos cuando tenemos la convergencia local, determinar el orden de convergencia del método de Newton (en función de a).

3) Aplicamos el método del punto fijo a la función $g(x) = \frac{x}{1+2x}$ escogiendo $x_0 = 1$ como aproximante inicial.

a) Comprobar que $\alpha = 0$ es el único punto fijo de g. Demostrar que es atractor.

b) Decir exactamente, cuántas iteraciones necesitaremos para lograr que $|x_n - \alpha| < \frac{1}{10}$. ¿Y cuántas para tener $|x_n - \alpha| < \frac{1}{10^5}$?

4) (Continuación del ejercicio anterior). Supongamos ahora que g es cualquier función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$.

a) Demostrar que el punto fijo $\alpha = 0$ es atractor si $g''(0) < 0$ y es repulsor si $g''(0) > 0$.

b) Supongamos que $g''(0) < 0$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión de aproximantes que tiende al punto fijo 0. Demostrar que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = |g''(0)|/2.$$

c) Ponemos $t_n = 1/x_n$. Sabemos pues que $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = |g''(0)|/2$. Deducir que existe el límite finito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n x_n}.$$

Calcular este límite.

5) Aplicamos el método de punto fijo a la función $g(x) = (x-2)/3 + C(x+1)^{-1/2}$, donde C es una constante positiva.

a) Demostrar que g es convexa en exactamente un punto fijo $(-1, +\infty)$. Demostrar que, indepentientemente del valor de C, g tiene exactamente un punto fijo en este intervalo.

b) Investigar si es atractor o repulsor. Calcular el orden de convergencia del método de punto fijo y demostrar que este orden no depende de C.

c) Demostrar que el método converge para todo aproximante inicial x_0 en $(-1, \infty)$.

6) (Método de Steffensen)* El método de Newton para encontrar soluciones de $f(x) = 0$ tiene el inconveniente de que necesita calcular derivadas de la función $f(x)$. Se puede sustituir la iteración de Newton por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

con g apropiada (Newton corresponde a $g = f'$). El método de Steffensen corresponde a tomar $g(x) = \frac{f(x+f(x))-f(x)}{f(x)}$ lo que da lugar a la iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \; n \geq 0.$$

a) Este método es *muy cercano* al de Newton, ¿por qué?

b) Probar que si x_0 se elige suficientemente cercano a la solución, α, y $f'(\alpha) \neq 0$ entonces el método converge cuadráticamente.

c) Aplicar esa iteración para $f(x) = e^x - x - 2$ con $x_0 = 1$ y "verificar" numéricamente que el orden de convergencia es 2.

d) Analizar el comportamiento del método al variar la elección del punto inicial $x_0 \in [-10, 10]$.

Cálculo Numérico I

CURSO 2017-2018 Lista 4 1º DE MAT./2º DE D.G.

1) Se consideran las matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 12 & 26 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 6 & 12 & 14 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -12 & 3 & -9 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar una descomposición $A = LU$ para la matrices A_1 y A_2.

b) Encontrar una descomposición con pivotaje (parcial) $PA = LU$ para la matrices A_3 y A_4.

2) Se consideran las matrices

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar la descomposición de Cholesky $A = CC^T$ de la matriz A_5.

b) Encontrar una descomposición $A_6 = LDL^T$, con L triangular inferior con 1's en la diagonal y D diagonal.

3) Demostrar lo siguiente:

a) Una matriz triangular es invertible si y sólo si los elementos en su diagonal son todos distintos de 0.

b) Si A y B son triangulares inferiores entonces también lo es AB.

c) Si A es triangular inferior e invertible entonces también lo es A^{-1}.

d) Lo anterior también es cierto para:

- matrices triangulares inferiores con 1's en la diagonal
- matrices triangulares superiores
- matrices triangulares superiores con 1's en la diagonal

Comentario: suponiendo que ya lo hemos demostrado para las inferiores, hay una "forma rápida" de probarlo para las superiores ¿cuál?

e) Probar que si la descomposición LU de una matriz existe entonces es única.

4) Demostrar las siguientes desigualdades entre normas y dar un ejemplo de vector o matriz (no nulos) para los cuales se alcance la igualdad:

a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{m}\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

b) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ y $\|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$ para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

5) Se considera el sistema lineal $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ no singular. Estudiar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando la matriz A es:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Estudiar también, cuando ambos métodos converjan, cuál lo hace más rápido.

6) Sea $C = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Escribir las iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver el sistema $Cx = y$ y demostrar que Jacobi converge si y solamente si Gauss-Seidel converge. ¿Se puede establecer alguna relación entre sus velocidades de convergencia?

7) Se consideran las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Para resolver el sistema $Ax = b$ se usa el siguiente método iterativo:

$$Mx^{(k+1)} + Nx^{(k)} = b,$$

a) Encontrar condiciones sobre α, β y γ que garanticen la convergencia de la sucesión de iteradas $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ para todo $x^{(0)}$ y para todo b.

b) Si $\alpha = \beta = \gamma = -1$ ¿qué sucede?

c) Si $\alpha = \gamma = 0$ ¿es cierto que se necesitan tan sólo tres iteraciones para calcular la solución? Razonar la resupesta.

8) (*) Definimos la matriz N de tamaño $s \times s$ como

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Cuántos términos no nulos contiene el desarrollo $(\lambda I + N)^n = \lambda^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$?

b) Obtener la estimación $\|(\lambda I + N)^n\| \leq C n^{s-1} |\lambda|^{n-s+1}(1 + |\lambda|^{s-1})$, donde C sólo puede depender de s.

c) Demostrar que

$$|\lambda| < 1 \iff \|(\lambda I + N)^n\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

d) Sea $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$ una matriz cuadrada y sea $\rho(A)$ su radio espectral. Representando A en su forma de Jordan y aplicando el apartado anterior, demostrar que $\rho(A) < 1$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$.

EJERCICIOS

1. Estudiar la convergencia de las iteraciones:

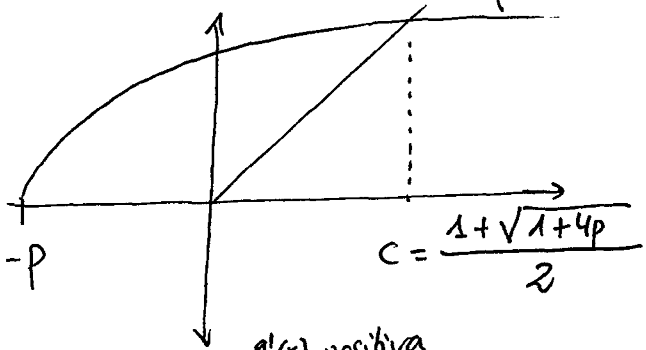
a) $X_{n+1} = \sqrt{p + X_n}$, $p > 0$

b) $X_{n+1} = \dfrac{1}{2 + X_n}$

a) $g(x) = \sqrt{p+x}$ un punto fijo de la g es ~~$c \in \mathbb{R}$~~ $c \in [-p, \infty)$ tal que $g(c) = c \Longleftrightarrow \sqrt{p+c} = c \Longrightarrow c \geq 0$

$\Longleftrightarrow$ c solución no negativa $(p+c) = c^2 \Longrightarrow c = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4p}}{2}$

Guardamos la raiz positiva.



$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{p+x}}$$

g'(x) positiva

$$|g'(x)| = g'(x) \overset{?}{<} 1$$

$$g'(x) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{p+x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{4} - p$$

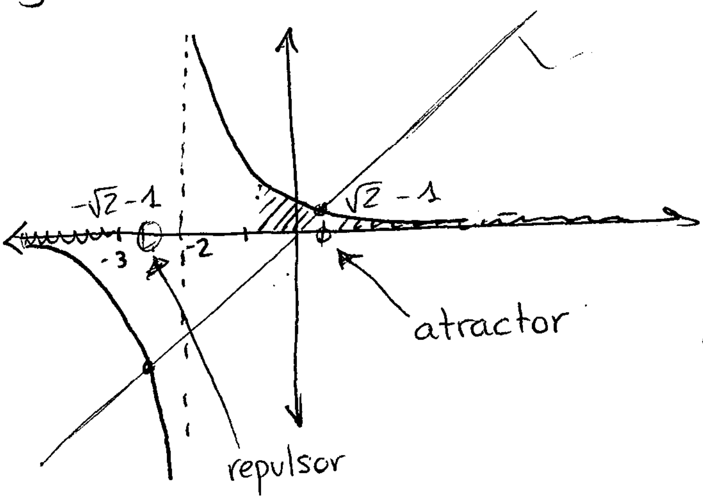
$$\frac{1+\sqrt{1+4p}}{2} \overset{?}{>} \frac{1-4p}{4}$$

$$1 + \sqrt{1+4p} > \frac{1}{2} - 2p \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{1+4p} > -2p \quad \forall p \geq 0$$

Entonces tenemos un intervalo que contiene el punto c y donde $|g'(x)| = g'(x) < 1$. Entonces en ese intervalo podemos utilizar la interacción de punto fijo estando seguros de que ~~escoga~~ escojamos cualquier punto inicial en el intervalo, la iteración va a converger.

b) $g(x) = \dfrac{1}{2+x}$

$g(c) = c \iff 1 = 2c + c^2 \iff c_{\pm} = -1 \pm \sqrt{2}$

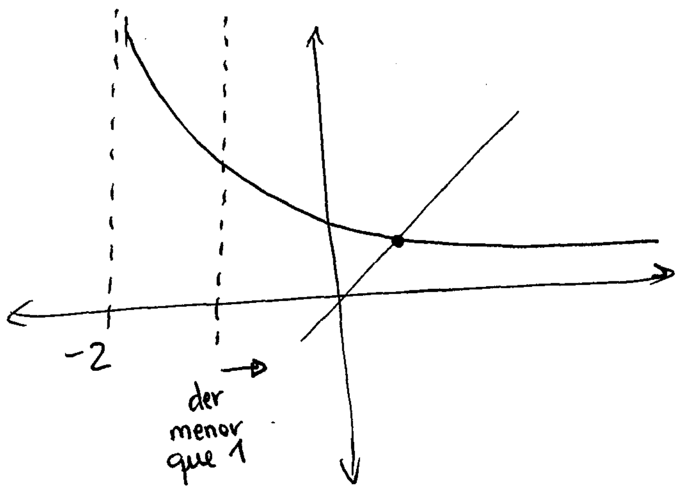


$g'(x) = -\dfrac{1}{(2+x)^2}$

$|g'(x)| < 1 \iff (2+x)^2 > 1$

$\iff 2+x > 1$ OR $2+x < -1$

$\boxed{x > -1 \text{ OR } x < -3}$



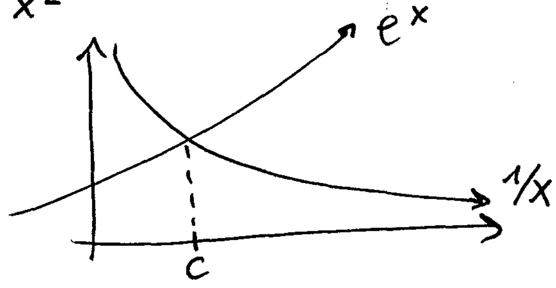
Encontrar por métodos iterativos el mínimo de $D(x) = e^x - \log x$.

$\Leftrightarrow$ Buscar el cero de $f(x) = e^x - \frac{1}{x} = D'(x)$

MÉTODO DE NEWTON:

$$X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)}$$

Comprobemos $f'(x)$: $\Rightarrow f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

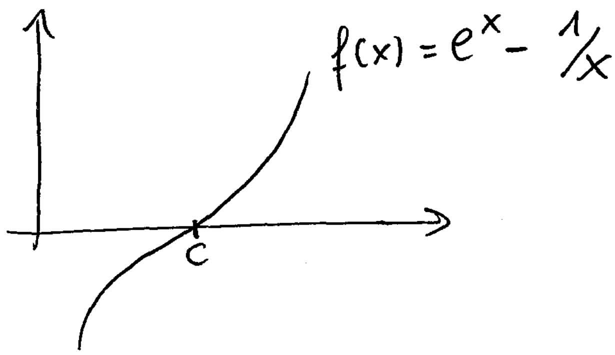


$$f''(x) = e^x - \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < \frac{2}{x^3}$$

¿ es cierto para $x < c$?

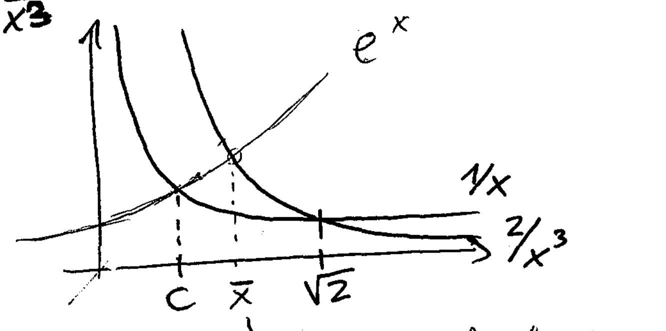
Si $x < c \Rightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{x}$



¿cuando $\frac{1}{x}$ es $< \frac{2}{x^3}$?

$\hookrightarrow$ porque si pase esto para $x<c$ tenemos $e^x < \frac{1}{x} < \frac{2}{x^3}$

$$\frac{1}{x} < \frac{2}{x^3} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x < \sqrt{2}$$



$\hookrightarrow$ punto $\bar{x}$ donde se anula la 2ª derivada

$$\left.\begin{array}{l} f(1) > 0 \\ f(1/2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c \in (1/2, 1)$$

Con toda esta información podemos sostener que si escogemos como punto inicial cualquier ~~$x<c$~~ $x \in (0,c)$ $\Rightarrow$ converge al orden 2.

$\rightarrow$ Esto es lo que nos dice el teorema.

$$X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)} > 0 \quad \text{si} \quad X_k > 0$$

Función de iteración de Newton: $g_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} > 0 \quad \forall x > 0$.

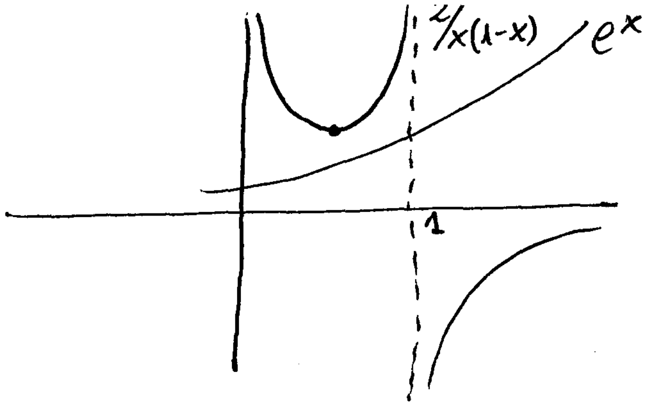
$$g_N(x) = \frac{(x-1)e^x + 2/x}{e^x + 1/x^2}$$

si $x \geq 1 \rightarrow$ seguro que $g_N > 0$

buscamos si hay solución para: $e^x = \frac{2}{x(1-x)}$

$\hookrightarrow$ nos estamos preguntando si se anula el numerador

$$h(x) = \frac{2}{x(1-x)}$$



$$h'(x) = \frac{2(2x-1)}{x^2(1-x)^2} = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

$$h(1/2) = 8 \quad y \quad e^{1/2} < 8$$

por lo tanto el numerador no se anula.

Llegamos a que para $x > c$, después de un número finito de iteraciones llegamos al intervalo bueno $x \in (0, c)$.

Otro problema

Encontrar c: $e^c = \frac{1}{c}$ con punto fijo.

$$f(x) = e^x - 1/x$$

$$\lambda \neq 0 \quad g_\lambda(x) = x - \lambda f(x) \quad : \quad f(c) = c$$

$$g'_\lambda(x) = 1 - \lambda f'(x) = 1 - \lambda\left(e^x + \frac{1}{x^2}\right)$$

c es punto fijo atractor para $g_\lambda \iff |g'_\lambda(c)| < 1 \iff$

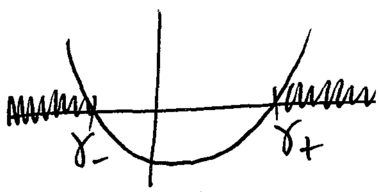
$$\iff -1 < 1 - \lambda\left(e^c + \frac{1}{c^2}\right) < 1 \iff -2 < -\lambda\left(e^c + \frac{1}{c^2}\right) < 0 \iff$$

$$\iff 0 < \lambda\left(e^c + \frac{1}{c^2}\right) < 2$$

Por definición de c: $e^c = \frac{1}{c}$ y que $c \in (1/2, 1)$ → Bolzano

$$0 < \lambda\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right) < 2 \overset{c > 1/2 > 0}{\iff} \begin{cases} \lambda(c+1) < 2 \cdot c^2 \\ \lambda > 0 \end{cases}$$

$$2c^2 - \lambda c - \lambda > 0 \longrightarrow \gamma_\pm = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}{4}$$



$$\iff c > \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda}}{4}$$ condición para que $|g'_\lambda(c)| < 1$

Sabemos que $c > 1/2$.

Si $\frac{1}{2} > \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+8\lambda}}{4} \Rightarrow$ c es punto fijo atractor para g_λ.

$\Leftrightarrow \lambda + \sqrt{\lambda^2+8\lambda} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+8\lambda} < 2-\lambda \Leftrightarrow \lambda^2+8\lambda < (2-\lambda$

$\Leftrightarrow \lambda^2+8\lambda < 4-4\lambda+\lambda^2 \Leftrightarrow 12\lambda < 4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda < 1/3}$

<u>Otro ejercicio</u>: (más complicado que el de las hojas)

$X_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{x_k^2}$: encontrar :

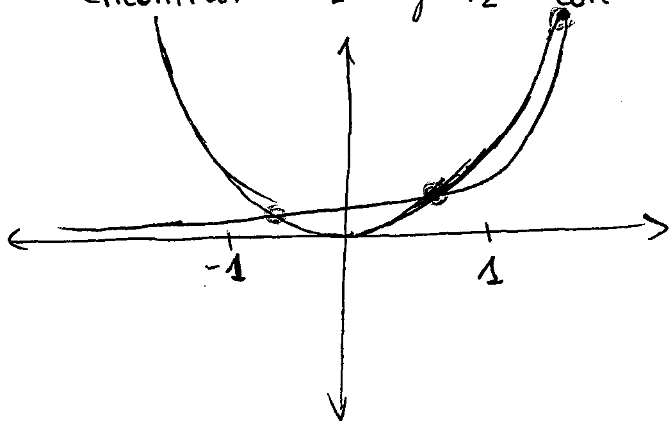
i) Punto de convergencia (a qué converge)

ii) Orden de convergencia (velocidad de convergencia)

iii) Encontrar un punto inicial

Sea $f(x) = 3x^2 - e^x$ demostrar que tiene 3 raíces reales ($f(x)=0$) $r_0 < r_1 < r_2$ de los cuales $r_1 \in (0,1)$ y $r_2 \in (3,4)$

Encontrar r_1 y r_2 con el método de Newton.



$$f(-1) = 3 - \frac{1}{e} > 0$$
$$f(0) = -1 < 0$$
$$f(1) = 3 - e > 0$$

Bolzano

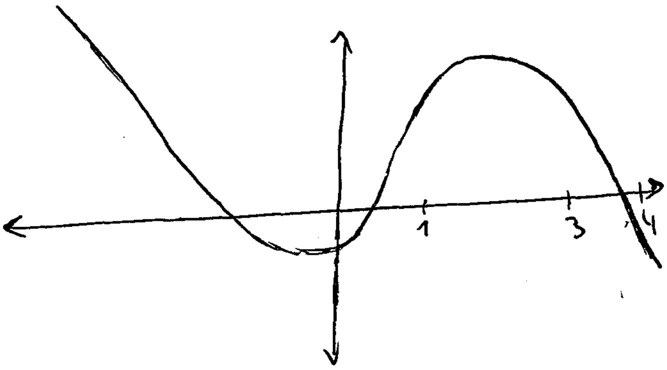
Bolzano

$$f(3) \approx 6'9$$
$$f(4) \approx -6'6$$

Bolzano

MÉTODO DE NEWTON

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



$$f'(x) = 6x - e^x$$
$$f''(x) = 6 - e^x$$
$$f''(x) > 0 \iff x < \ln 6 \approx 1'8$$

Para $x = 1 \to$ Newton converg a

Para $x = 4 \to$ Newton converg a r

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Calcular } \rho(A),\ \|A\|_{1\to 1},\ \|A\|_{\infty\to\infty},\ \|A\|_{2\to 2}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3-\lambda \\ -4-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 14$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{9-56}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-47}}{2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{47}}{2}$$

$$\rho(A) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{47}{4}} = \frac{\sqrt{56}}{2}$$

$\|A\|_{1\to 1} = 5$ (máximo suma columnas)

$\|A\|_{\infty\to\infty} = 6$ (máximo suma filas)

$\|A\|_{2\to 2} = \sqrt{\rho(A^tA)}$

Sea $A \in \mathbb{K}^{6\times 6}$ y sea $U = L_5^{-1} P_5 L_4^{-1} P_4 L_3^{-1} P_3 L_2^{-1} P_2 L_1^{-1} P_1 A$

$$\tilde{L}_3^{-1} = P_5 P_4 L_3^{-1} P_4 P_5$$

Sea $P_4 : 4 \longleftrightarrow 6$ y $P_5 : 5 \longleftrightarrow 6$ y

y $$L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuando $$\begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix} \xrightarrow{P_4} \begin{bmatrix} -c \\ -b \\ -a \end{bmatrix} \xrightarrow{P_5} \begin{bmatrix} -c \\ -a \\ -b \end{bmatrix}$$

entonces $$\tilde{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \text{igual} & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -c & 1 & & \\ & & -a & & 1 & \\ & & -b & & & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 , L_2 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \quad a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ encontrar $L_1 L_2$ y

a partir de esto dada $L \longrightarrow L^{-1}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ e & f & 1 \end{pmatrix}}_{L^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+d & 1 & 0 \\ b+cd+e & c+f & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1}\,? \longleftrightarrow \begin{cases} a+d = 0 \longleftrightarrow d = -a \\ b+cd+e = 0 \longleftrightarrow e = -b-cd = -b+ca \\ c+f = 0 \longleftrightarrow f = -c \end{cases}$$

Entonces, si $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b+ca & -c & 0 \end{pmatrix}$

1. $\|A\|_{\infty\to\infty} \leq \sqrt{n}\,\|A\|_{2\to 2} \qquad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

2. $\|A\|_{2\to 2} \leq \sqrt{n}\,\|A\|_{\infty\to\infty}$

OBSERVACIÓN

*1 $\|A\|_{p\to q} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p}$

*2 $\|Ax\|_q \leq \|A\|_{p\to q}\,\|x\|_p$

Primero lo demostramos para vectores:

a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$

a $\quad \|x\|_\infty = \max_{i\in\{1\dots n\}} |x_i| = \left(\max_{i\in\{1\dots n\}} |x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$

b $\quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \max|x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$

i) $\|Ax\|_\infty \overset{a}{\leq} \|Ax\|_2 \overset{*2}{\leq} \|A\|_{2\to 2}\,\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\cdot\|A\|_{2\to 2}\cdot\|x\|_\infty$

ii) $\|Ax\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|Ax\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|A\|_{\infty\to\infty}\|x\|_\infty \leq \sqrt{n}\cdot\|x\|_2\cdot\|A\|_{\infty\to\infty}$

$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{n}\,\|A\|_{\infty\to\infty} \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n$

Calcular la factorización $PA = LU$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{U^0 = A'}$

$\cancel{U^1 = L_1^{-1} A'}$

$\cancel{U^2 = L_2^{-1} L_1^{-1} A'}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1^{-1}} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 10/3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_2} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 10/3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2^{-1}} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 10/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

opuestos e intercambiados

Para 4x4

$$U = L_3^{-1} \underbrace{P_3 L_2^{-1}} P_2 L_1^{-1} P_1 A$$

$$L_3^{-1} \tilde{L}_2^{-1} \underbrace{P_3 P_2 L_1^{-1}} P_1 A$$

$$L_3^{-1} \tilde{L}_2^{-1} \tilde{L}_1^{-1} P_3 P_2 P_1 A$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \|A\|_{1\to 1} &= \max_i \sum_j |A_{ij}| \\ \|A\|_{\infty\to\infty} &= \max_j \sum_i |A_{ij}| \end{aligned}$$

calcular $\quad q = \dfrac{\|A\|_{1\to 1}}{\|A\|_{\infty\to\infty}}$

$q = 1$ porque A es simétrica.

Calcular : a) $L = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \overset{\text{def}}{=} \|A\|_{2\to 2}$ $\qquad$ b) $\ell = \min\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \min\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} =$

a)

$$\|A\|_{2\to 2} = \sqrt{\rho(A^t.A)}$$

$$A^t.A = A^2 = (U^t.D.U)(U^t.D.U) = U^t.D^2.U$$

A simétrica $\qquad$ matriz ortogonal

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda) - 3/4\right] =$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + \frac{21}{4}\right)$$

calculamos los λ y el máx $|\lambda|$ es $\rho(A^tA)$.

Entonces $\quad \|A\|_{2\to 2} = \sqrt{\rho(A^t.A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = 7/2$

b) $\quad C = A^t.A \;\longrightarrow\; C\,V_\lambda = \lambda V_\lambda \longrightarrow C$ semidef. positiva $\iff \lambda \geq 0$

autovector

$x \in \mathbb{R}^n \qquad x = \sum\limits_\lambda C_\lambda V_\lambda \qquad \|x\|_2^2 = \sum |C$

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle Cx, x\rangle = \sum_\lambda \lambda.|C_\lambda|^2$$

$$\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \sum_\lambda \lambda \frac{|C_\lambda|^2}{\sum |C_\lambda|^2} \qquad \Rightarrow \ell = \sqrt{\min\{|\lambda| \text{ autovalor } A^tA\}} =$$

$$= 1$$

CONCLUSIÓN

$$L = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\rho(A^t . A)} = \sqrt{\max\{|\lambda| \text{ autovalor de } A^tA\}}$$

$$\ell = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \min_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\min\{|\lambda| \text{ autovalor de } A^tA\}}$$

Si A es simétrica:

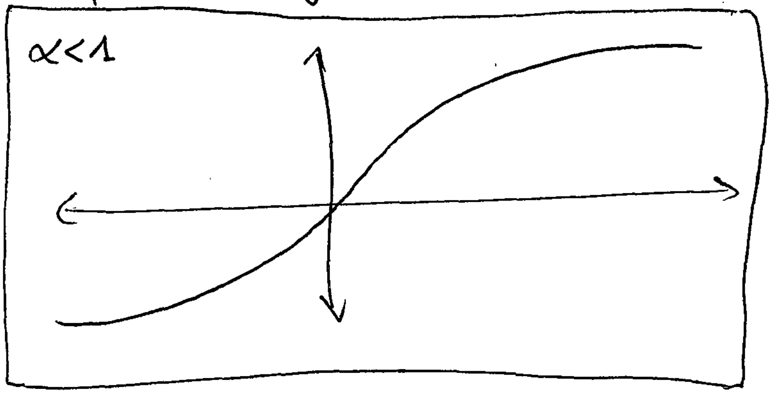
$$L = \max\{|\lambda| \text{ autovalor de } A\}$$

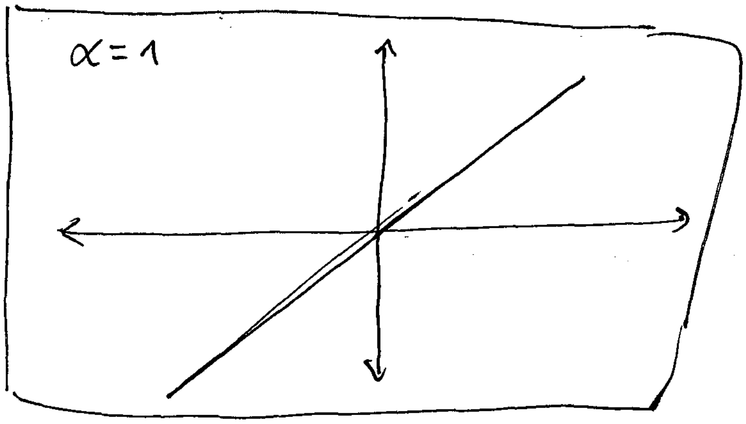
$$\ell = \min\{|\lambda| \text{ autovalor de } A\}$$

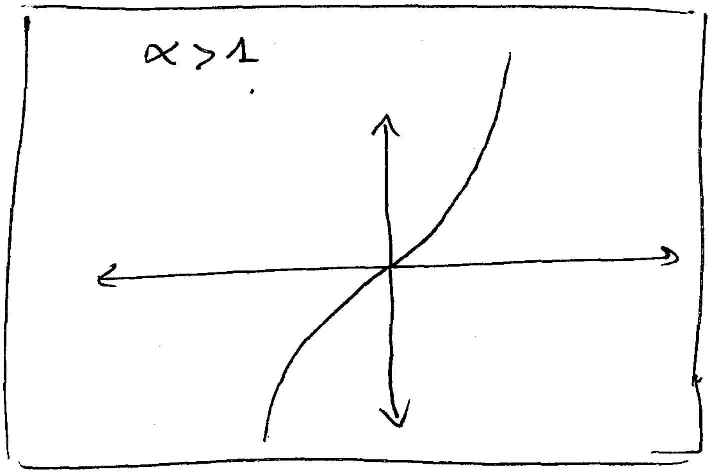
$$f(x) = \text{signo}(x) \cdot |x|^{\alpha}$$

$$\text{signo}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\alpha > 0$$







$$f'(x) = \alpha |x|^{\alpha-1}$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{|x|}{\alpha} \cdot \text{signo}(x) = \frac{x}{\alpha}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = g(x_k)$$

$$g(x) = x\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$|g'(x)| = \left|1 - \frac{1}{\alpha}\right|$$

$$|g'(x)| < 1 \iff \alpha > 1/2$$

Sean A, B matrices triangulares superiores.

Demostrar que AB es matriz triangular superior.

$$(AB)_{ij} = \sum_{K=1}^{n} A_{iK} \cdot B_{Kj} = \sum_{K=i}^{j} A_{iK} B_{Kj}$$

Si $K < i \Rightarrow A_{iK} = 0$

Si $K > j \Rightarrow B_{Kj} = 0$

Si $i > j$ no hay ningún término en la suma $\Rightarrow (AB)_{ij} = 0$

Sea A una matriz invertible que admite una factorización $LU \Rightarrow L$ y U son únicas.

Sea $A = L_1 U_1 = L_2 U_2 \iff U_1 = L_1^{-1} L_2 U_2 \iff U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$

como $U_1 U_2^{-1}$ es triangular superior y $L_1^{-1} L_2$ es triangular inferior $\Rightarrow$ si $U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 \Rightarrow U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{única}}}{Id}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = B_J(A) = -D_A^{-1} \cdot (L_A + U_A) = -\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4/3 \\ -7/4 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 4/3 \\ 7/4 & -\lambda & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{4}{3} \begin{vmatrix} 7/4 & -\lambda \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - 1/4\right) + \frac{4}{3}\left(7/8 - \frac{\lambda}{2}\right.$$

$$= -\lambda^3 + \lambda/4 + 7/6 - \frac{2}{3}\lambda =$$

$$= -\lambda^3 - \frac{5}{12}\lambda + 14/12$$

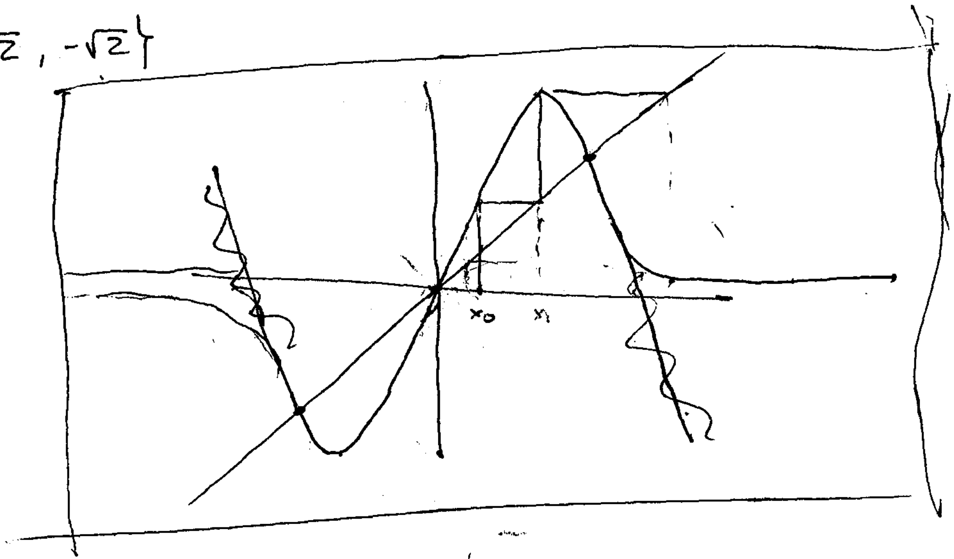
MOJAB

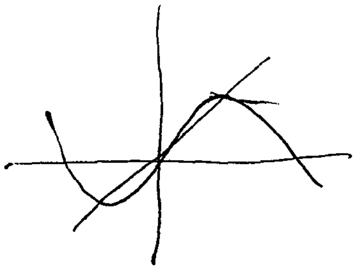
a) $\frac{5c}{1+c^4} = c \iff 5c = c + c^5 \iff 4c = c^5 \iff c^5 - 4c = 0 \iff$

$\iff c(c^4 - 4) = 0 \iff c(c^2-2)\underbrace{(c^2+2)}_{\emptyset} = 0$

$\boxed{c=0}$ $\boxed{c=\sqrt{2}}$ $\boxed{c=-\sqrt{2}}$

b) $F = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$





a)

$$y(x) = \tfrac{1}{2}x - x^3$$

$$\frac{1}{2}x - x^3 = x$$

$$x^3 + \frac{1}{2}x = 0$$

---

b) $g(\beta) = -\beta$

$$\frac{1}{2}\beta - \beta^3 = -\beta \implies -\beta^3 + \frac{3}{2}\beta = 0 \overset{\beta > 0}{\implies} \beta = \sqrt{3/2}$$

---

c) $g'(x) = \frac{1}{2} - 3x^2 \qquad |g'(x)| < 1 \iff |x| < \sqrt{2}/2$

$\cancel{g'(0) = 1/2}$

$|g(x)| < 1/\sqrt{2} \qquad \forall x \in (1/\sqrt{2}, \beta) \to \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left|\frac{1}{2}x - x^3\right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{-1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2}x - x^3 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} < x\left(\frac{1}{2} - x^2\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

EJERCICIOS CLASE INTERPOLACION

(1) Interpolación polinomial de $f(x) = e^{cx}$ $(c \neq 0)$ en $[a,b]$ con nodos cualesquiera.

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = |c|^n \cdot |f(x)| \leq \underbrace{\max\{f(a), f(b)\}}_{M} \cdot |c|^n$$

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| \leq \frac{(|c|(b-a))^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

(2) Ahora con $f(x) = \ln x$ en $[1,3]$

$$f'(x) = 1/x \quad , \quad f''(x) = -1/x^2 \quad , \ldots , \quad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

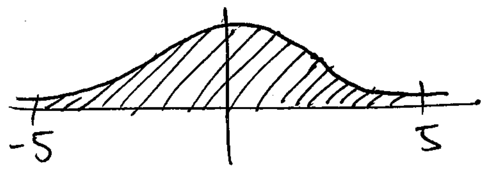
$$M = \max_{x \in [1,3]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| = n!$$

— nodos sin especificación: $\left|f(x) - P_n(x)\right| \leq \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \overbrace{2^{n+1}}^{(3-1)^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

— nodos equiespaciados: $\left|f(x) - P_n(x)\right| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{n!}{n^{n+1}} \cdot 2^{n+1} =$

$$= \frac{1}{4} \frac{n!}{(n+1)\, n^{n+1}} \cdot 2^{n+1}$$

(3) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ "fenomeno de Runge"



Sean $\{x_j\}_{j=0}^{n} \in \mathbb{K}$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$

1) Demostrar que son BASES de $\mathbb{P}_n$

i) $\{X^k\}_{k=0}^{n}$ (no dependen de $\{x_j\}$)

ii) $\{L_j\}_{j=0}^{n}$, $L_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$, $j=0,\dots,n$

iii) $\{N_k\}_{k=0}^{n}$, $N_0 = 1$, $N_k = \prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$, $k=1,\dots,n$

- Sabemos que $\forall$ polinomio de $\mathbb{P}_n \ni p$
  - $\exists \{a_j\}_{j=0}^{n}$: $p(x) = \sum a_j x^j$
  - $p(x) = \sum p(x_j) L_j(x)$
  - $p(x) = \sum p[x_0 \dots x_k] N_k(x)$

- Otra manera: demostrar que son linealmente independientes

i) $\sum_{k=0}^{n} c_k X^k = 0 \overset{?}{\iff} c_k = 0 \quad \forall k$

$\Downarrow$

$c_k = 0 \quad k=1,\dots,n, \quad c_0 = 0$

ii) $\sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ vale para los $\{x_j\}$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \underbrace{L_k(x_j)}_{\delta_{k,j}} = c_j = 0$$

iii) $0 = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot N_k(x) = c_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots$

$\Rightarrow c_n = 0 \Rightarrow \alpha_{n-1} = c_{n-1} = 0 \quad \dots\dots$ todos 0

2) ¿Como se escribe X^K en la base $\{L_j\}_{j=0}^n$?

¿Como se escribe $L_j(x)$ en la base $\{N_k\}_{k=0}^n$?

$$X^K = \sum_{j=0}^{n} (x_j)^K L_j(x) \quad , \quad f(x) = \sum f(x_j) L_j(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_n(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow L_j(x) = \sum_{k=0}^{n} ((V^t)^{-1})_{jk}$$

$$N_K(x) = \sum_{j=0}^{n} N_K(x_j) L_j(x) \quad K=0,\dots,n \quad = \sum_{j=K}^{n} N_K(x_j) L_j(x)$$

el resto cero

$$K \geq 1 \ , \quad N_K(x) = \prod_{i=0}^{K-1} (X - x_i)$$

$$L_j[x_0] = \delta_{j,0}$$

$$L_j(x) = \sum_{K=0}^{n} L_j[x_0 \dots x_K] N_K(x)$$

$$L_j[x_0,x_1] = \frac{\delta_{j,1} - \delta_{j,0}}{x_1 - x_0}$$

Calcular los nodos de Gauss en $[-1,1]$ para $n=2$ (3 ptos) ORDEN 5

Tenemos que comprobar $\int_{-1}^{1} f(x)dx = W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2)$

para $f(x) = \underbrace{1, x, x^2}, x^3, x^4, x^5$

$j=0,1,2 \quad W_j = \int_{-}^{1} L_j(x) = W_j(x_0, x_1, x_2)$

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} \quad ; \quad L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \quad ; \quad L_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-}{x_2-}$$

$$W_0 = \int_{-}^{1} L_0(x)dx = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\int_{-1}^{1}\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)}_{x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2}dx = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\left(\frac{2}{3}+2x_1x\right.$$

$$W_1 = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\left(\frac{2}{3}+2x_0x_2\right) \quad , \quad W_2 = \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\left(\frac{2}{3}+2x_0x_1\right)$$

para $f(x) = 1, x, x^2, \underline{x^3, x^4, x^5}$

Supongamos $x_1 = 0$ (por razones de simetría)

$$\Rightarrow W_0 = \frac{2/3}{x_0(x_0-x_2)} \quad , \quad W_1 = \frac{2/3+2x_0x_2}{x_0x_2} \quad , \quad W_2 = \frac{2/3}{x_2(x_2-x_1)}$$

exacta en P_3: $\int_{-1}^{1} x^3 dx \overset{0}{=} W_0x_0^3 + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{W_1}}x_1^3 + W_2x_2^3$

P_4: $\int_{-1}^{1} x^4 dx = W_0x_0^4 + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{W_1}}x_1^4 + W_2x_2^4$

P_5: $\int_{-1}^{1} x^5 dx \overset{0}{=} W_0x_0^5 + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{W_1}}x_1^5 + W_2x_2^5$

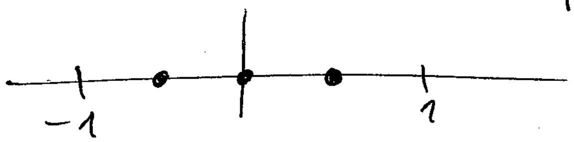
$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{x_0^{3}}{x_0(x_0-x_2)} + \dfrac{x_2^{3}}{x_2(x_2-x_0)} = \dfrac{x_0^{2}-x_2^{2}}{x_0-x_2} = x_0+x_2 \\[2ex] \dfrac{3}{5} = \dfrac{x_0^4}{x_0(x_0-x_2)} + \dfrac{x_2^4}{x_2(x_2-x_0)} = \dfrac{x_0^3-x_2^3}{x_0-x_2} = \dfrac{(x_0-x_2)(x_0^2+x_2^2+x_0x_2)}{(x_0-x_2)} \\[2ex] 0 = \dfrac{x_0^5}{x_0(x_0-x_2)} + \dfrac{x_2^5}{x_2(x_2-x_0)} = \dfrac{x_0^4-x_2^4}{x_0-x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -x_2 \\ \dfrac{3}{5} = x_0^2 \end{cases}$$

Solución: $x_0 = -\sqrt{3/5}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3/5}$

$\downarrow$ sustituimos

$W_0 = \frac{5}{9}$, $W_1 = \frac{8}{9}$, $W_2 = \frac{5}{9}$



EJERCICIO EXAMEN DE MÉTODOS ITERATIVOS

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, y sean $M, N \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertibles tal que $A = M - N$, definimos dos iteraciones:

i) $Mx_{n+1} = Nx_n + b$

ii) $Nx_{n+1} = Mx_n - b$

a) Demostrar que para ambas iteraciones si $\exists x = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow$
$\Rightarrow Ax = b$.

b) Demostrar que $\begin{cases} \text{si (i) converge} \Rightarrow \text{(ii) no converge} \\ \text{si (ii) converge} \Rightarrow \text{(i) no converge} \end{cases}$

c) Sean $a, b \neq 0$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$
encontrar condición sobre (a,b) tal que (i) converge.

d) Supongamos para (i) convergente demostrar que $\exists \rho \in (0,1)$ tal que $e_n = x_n - x$: $\|e_n\|_p = \rho^n \|e_0\|_p$ $\forall p$

a) demostramos que $x_n \to x \Rightarrow Ax_n \to b$

$x \mapsto Ax$ func. continu...

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} Ax_n = A \lim_{n\to\infty}$

$$Ax_n = Mx_n - Nx_n = Nx_{n-1} + b - Nx_n =$$

$= N(x_{n-1} - x_n) + b$ como $x_{n-1} - x_n$ tiende a cero

$\Rightarrow N(x_{n-1} - x_n) + b \to b \Rightarrow Ax_n \to b$ $\square$

b) (i) $x_{n+1} = M^{-1}Nx_n + M^{-1}b$

$B_1 = M^{-1}N$

(ii) $x_{n+1} = N^{-1}Mx_n + N^{-1}b$

$B_2 = N^{-1}M = B_1^{-1}$

λ autovalor de $B_1 \Leftrightarrow 1/\lambda$ es autovalor B_2

$$B_1 v = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda B_1^{-1} v \Leftrightarrow B_1^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v$$

$\rho(B_1) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ autovalor } B_1\}$

$\rho(B_2) = \max\{|1/\lambda|, \lambda \text{ autovalor } B_1\}$

Si $|\lambda| < 1 \Rightarrow B_1$ converge $\Rightarrow$ (i) converge $\Rightarrow |1/\lambda| > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow B_2$ diverge $\Rightarrow$ (ii) diverge

Si $|\lambda| > 1 \Rightarrow B_1$ diverge $\Rightarrow$ (i) diverge $\Rightarrow |1/\lambda| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow B_2$ diverge $\Rightarrow$ (ii) converge.

c) $B_1 = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -1/b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a/b \\ -a/b & 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{b}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow \rho(B_1) = \left|\frac{a}{b}\right|$

(i) converge $\Leftrightarrow |a| < |b|$

d) $e_n = x_n - x = (B_1 x_{n-1} + M^{-1}b) - (B_1 x - M^{-1}b) = B_1(x_{n-1} - x) =$

$= B_1 e_{n-1} = B_1^n e_0$: ahora queremos $\|B^n e_0\|_p = \rho^n \|e_0\|_p$

normas de matrices

NO CAEN

EJERCICIO DE INTEGRACIÓN

- Sea $\{s_j\}_{j=1}^{n} \subset [0,1]$, $\{w_j\}_{j=1}^{n} \longrightarrow$

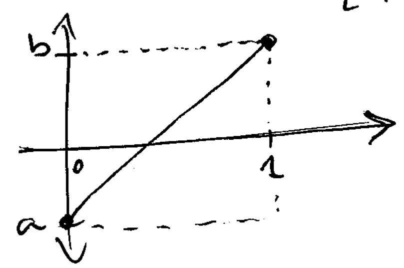
$$\longrightarrow I_{[0,1]}[f] = \sum_{j=1}^{n} w_j f(s_j) \approx \int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{ORDEN } m$$

y sea $K_{[0,1]}$ el núcleo de Peano de $I_{[0,1]}$:

$$\int_0^1 f(t)\,dt - I_{[0,1]}[f] = \frac{1}{m!}\int_0^1 f^{(m+1)}(t)\, K_{[0,1]}(t)\,dt$$

- Sea $I_{[a,b]}$ inducida de $I_{[0,1]}$ por cambio de variable.

Encontrar $K_{[a,b]}$



Sabemos hacer $\int_0^1 f(t)\,dt$ y queremos $\int_a^b f(x)\,dx$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[x = a + t(b-a)\right] = (b-a)\int_0^1 f\big(a + t(b-a)\big)\,dt$$

$$I_{[a,b]}[f] = (b-a)\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot f\big(a + s_j(b-a)\big)$$

$$K_{[a,b]}(x) = \int_a^b (y-x)_+^m\,dy - \sum_{j=1}^{n}(b-a)\,w_j\,\big(a + s_j(b-a) - x\big)_+^m =$$

$$= (b-a)\left[\int_0^1 \big(a + t(b-a) - x\big)_+^m\,dt - \sum_{j=1}^{n} w_j\big(a + (b-a)s_j - x\big)_+^m\right] =$$

$$\boxed{x = a + (b-a)s \quad : \quad s = \frac{x-a}{b-a}}$$

$$= (b-a)^{m+1}\left[\int_0^1 (t-s)_+^m\,dt - \sum_{j=1}^{n} w_j (s_j - s)_+^m\right] =$$

$$= (b-a)^{m+1}\cdot K_{[0,1]}(s) = \boxed{(b-a)^{m+1}\cdot K_{[0,1]}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)} \ \text{núcleo Peano } (a,b)$$

EJERCICIO Examen parcial

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 1 & 1 & q \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar la convergencia de J, G-S para $p = 1/2$, $q = -1$

b) Estudiar la convergencia de $J(p,q)$

c) Demostrar que J converge $\Leftrightarrow$ GS converge (p,q)

d) Cuál de los dos métodos converge más rápido.

b) $B_J = -D_A^{-1}(L_A + U_A) = -(L_A + U_A) = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

calculamos $\rho(B_J)$: $\max\{|\lambda|, \text{ autovalor } B_J\}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -p & 0 \\ -1 & -\lambda & -q \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -q \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -p & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - q) + \lambda p = -\lambda^3 + \lambda(p+q) = -\lambda(\lambda^2 - (p+q))$$

$$\rho(B_J) = \sqrt{|p+q|}$$

c) $B_{GS} = -(D_A + L_A)^{-1} \cdot U_A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_{GS} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p & 0 \\ 0 & p & -q \\ 0 & -p & q \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} p-\lambda & -q \\ -p & p-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - p)(\lambda - q) - pq = \lambda^2 - (p+q)\lambda \Rightarrow \rho(B_{GS}) = |p+q|$$

a) demostrado con esto.

d) $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2 \Rightarrow \rho(B_{GS}) < \rho(B_J)$

si son < 1

$f(x) = \operatorname{sen}(\omega x) \quad , \quad \omega \neq 0$

$X_i = -\frac{\pi}{2} + \frac{i-1}{n-1}\pi \qquad \text{por } i = 1, \dots, n$

p polinomio interpolador de f en $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ $\longrightarrow$ n puntos $p \in \mathcal{P}_{n-1}$

demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-\pi/2, \pi/2]} |f(x) - p(x)| = 0$

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) \Longrightarrow |f(x)-p(x)| \leq \frac{\max_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}|f^{(n)}(x)|}{n!}\left|\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\right|$$

$f'(x) = \omega.\cos(\omega x)$, $f''(x) = -\omega^2 \sin(\omega x)$, $\underline{|f^{(n)}(x)| \leq |\omega|^n}$

y $\left|\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\right| = \prod_{i=1}^{n}\underbrace{|x-x_i|}_{\pi} \leq \pi^n$

Entonces:

$$|f(x)-p(x)| \leq \frac{\max_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}|f^{(n)}|}{n!}\left|\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\right| \leq \frac{(\pi|\omega|)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Simpson orden 3 $\rightarrow$ en la fórmula con núcleo de Peano entre $f^{(IV)}$

$$I[f] = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \quad \text{orden } m \approx \int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - I[f] = \frac{1}{m!}\int_a^b f^{(m+1)}(x)\, K(x)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - I[f] \right| \leq \frac{\max_{x\in[a,b]} \left|f^{(m+1)}\right|}{m!} \int_a^b |K(x)|\, dx$$

punto medio (orden 1)

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{\max_{[a,b]} |f^{(2)}| (b-a)^3}{24}$$

$\rightarrow$ Calculamos el núcleo de Peano para punto medio en [0,

$$K_{[0,1]}(x) = \int_0^1 (y-x)_+\, dy - \left(\tfrac{1}{2} - x\right)_+ ,$$

$$\int_0^1 (y-x)_+\, dy = \int_x^1 (y-x)dy = \left.\frac{y^2}{2}\right]_x^1 - x(1-x)$$

$$\Rightarrow K_{[0,1]}(t) = \frac{1-t^2}{2} - t(1-t) - \left(\tfrac{1}{2} - t\right)_+ =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} - t - \left(\tfrac{1}{2} - t\right)_+ =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(t^2 - 2t + 1) - \left(\frac{1}{2} - t\right) & t \leq 1/2 \\ \frac{1}{2}(t^2 - 2t + 1) & t \geq 1/2 \end{cases}$$

$$K_{[0,1]}(t) = \begin{cases} t^2/2 , & t \leq 1/2 \\ \frac{(1-t)^2}{2} , & t \geq 1/2 \end{cases}$$

Entonces :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \leq \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}| \int_a^b |K_{[a,b]}(x)|\, dx =$$

$$= \max_{[a,b]} |f^{(2)}| \int_a^b \left| K_{[0,1]}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| dx \cdot (b-a)^2$$

$$t = \frac{x-a}{b-a} \qquad dt = \frac{dx}{b-a}$$

$$= \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}| \; (b-a)^3 \int_0^1 K_{[0,1]}(t)\, dt =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}| \; (b-a)^3 \; \cancel{2} \int_0^{1/2} \frac{t^2}{\cancel{2}}\, dt$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ estudiar la convergencia de Jacobi y Gauss-Seidel
demostrar que Jacobi converge $\Leftrightarrow$ GS lo hace

- Suponemos $a, d \neq 0$ porque si no, no hay iteración.

- $$B_J = -D_A^{-1}(L_A + U_A) = -\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ -c/d & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(B_J) = \max\{|\lambda|, \text{ autovalor de } B_J\}$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -b/a \\ -c/d & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{bc}{ad} \Rightarrow \rho(B_J) = \sqrt{\left|\frac{bc}{ad}\right|}$$

- $$B_{GS} = -(D_A + L_A)^{-1} U_A = -\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ \frac{-c}{ad} & 1/d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ 0 & \frac{bc}{ad} \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(B_{GS}) = \left|\frac{bc}{ad}\right|$$

demostrar que $$f[x_0 \ldots x_N] = \sum_{i=0}^{N} \frac{f(x_i)}{\prod_{k=0, k\neq i}^{n} (x_i - x_k)}$$

Por unicidad, dada f y dados $\{x_i\}_{i=0}^{N}$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ $\longrightarrow$ ① $\sum_{k=0}^{N} f[x_0 \ldots x_k] N_k(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) L_i(x)$ es el único pol. interpolador de f

② $$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{\prod_{l=0, l\neq i}^{N} (x - x_l)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{N} (x_i - x_j)}$$

① + ② $\Rightarrow$ $$\underbrace{\sum_{k=0}^{N} f[x_0 \ldots x_k] N_k(x)}_{= \alpha x^N + p_{N-1}(x)} = \underbrace{\sum_{i=0}^{N} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{N} (x_i - x_j)} \prod_{l=0, l\neq i}^{N} (x - x_l)}_{= \beta x^n + q_{n-1}(x)}$$

$$\alpha = \beta$$

$$\alpha = f[x_0 \ldots x_n], \quad \beta = \sum_{i=0}^{N} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{N} (x_i - x_j)}$$

EJ. 1 HOJA 6

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x) \cdot e^{x} \, dx = \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2} = 2'50917\ldots$$

$$I^{S}_{[a,b]}[f] = \frac{1}{3} I^{T}_{[a,b]}[f] + \frac{2}{3} I^{M}_{[a,b]}[f] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(f(a)+f(b))(b-a)}{2} + 2(b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4 f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right)$$

$a = -\pi/2$ | $f(a) = \operatorname{sen}(-\pi/2)\, e^{-\pi/2} = -e^{-\pi/2}$

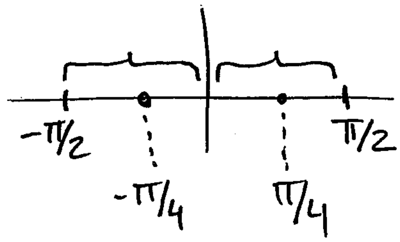
$b = \pi/2$ | $f(b) = e^{\pi/2}$

$f(x) = \operatorname{sen}(x) e^{x}$ | $f(0) = 0$

$$\Rightarrow I^{S}_{[-\pi/2, \pi/2]}[f] = \frac{\pi}{6}\left(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}\right)$$

$$\text{ERROR} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\, dx - I^{S}_{[-\pi/2, \pi/2]}[f] = \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2}\left(1 - \pi/3\right)$$

b) Punto medio compuesto con dos intervalos



$$\hookrightarrow I[f] = \frac{f(-\pi/4) + f(\pi/4)}{2} \cdot \pi$$

COTAS DE ERRORES TEÓRICAS

- interpolatorio: depende de n nodos #nodos
- Peano: depende del ORDEN m de la fórmula.

Punto medio compuesto

$$I_{[a,b]}[f] = \sum_{K=0}^{N-1} I^{\text{SIMPLE}}_{[a_K, a_{K+1}]}[f] \quad , \quad [a,b] = \bigcup_{0}^{N-1} [a_K, a_{K+1}]$$

$$I^{M}_{[-\pi/2,\, 0]}[f] + I^{M}_{[0,\, \pi/2]}[f]$$

interp. E^{I}
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_{[a,b]}[f] \right| \leq \frac{\max_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|}{(n+1)!} \int_a^b \left| \Pi_{n+1}(x) \right| dx$$

E^{P} Peano
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_{[a,b]}[f] \right| \leq \frac{\max_{[a,b]} \left| f^{(m+1)} \right|}{m!} \int_a^b \left| K(x) \right| dx$$

$$w_j = \int_a^b L_j(x)\,dx \quad , \quad \{L_j\}_{j=0}^{n} \text{ por } \{x_j\}_{j=0}^{n}$$

$$I_{[a,b]}[f] = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j) \text{ de orden } m \,, \quad f \in C^{m+1}([a,b])$$

$$E_{[-\pi/2,\, \pi/2]}[f] \leq E_{[-\pi/2,\, 0)}[f] + E_{[0,\, \pi/2]}[f]$$

$$E^{I}_{[a,b]}[f] \leq \max \left| f^{(1)} \right| \int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx = \max_{[a,b]} |f'| \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$E^{P}_{[a,b]}[f] \leq \frac{\max_{[a,b]} \left| f^{(2)} \right|}{24} (b-a)^3$$

Entonces:

$$E^{I}_{[-\pi/2,\pi/2]}[f] \leq \frac{\max_{[-\pi/2,0]} |f^{(1)}|}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\max_{[0,\pi/2]} |f^{(1)}|}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \frac{\max_{[-\pi/2,\pi/2]} |f^{(1)}|}{8}\pi^2$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot e^x \qquad f'(x) = (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \cdot e^x$$

$$E^{P}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}[f] \leq \frac{\max_{[-\frac{\pi}{2},0]} |f^{(2)}|}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\max_{[0,\pi/2]} |f^{(2)}|}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \leq \frac{\max_{[-\pi/2,\pi/2]} [f^{(2)}]}{12} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

Simpson:

$$E^{I}_{[a,b]}[f] \leq \frac{\max_{[a,b]} |f^{(3)}|}{6} \int_a^b \left|(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\right| dx$$

$$\left(\int_0^1 |x(x-1/2)(x-1)| = 1/32\right)$$

$$E^{I}_{[0,1]}[f] \leq \frac{\max_{[0,1]} |f^{(3)}|}{6} \int_0^1 |x(x-1/2)(x-1)|\,dx = \frac{\max_{[0,1]} |f^{(3)}|}{192}$$

$$E^{P}_{[0,1]}[f] \leq \frac{\max_{[0,1]} |f^{(4)}|}{6} \cdot \frac{1}{480}$$

orden m $\quad \displaystyle\int_a^b \underbrace{\left|K_{[a,b]}(x)\right|}_{(b-a)^{m+1} K_{[0,1]}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)} dx = (b-a)^{m+1} \int_a^b \left|K_{[0,1]}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| dx$

$$t = \frac{x-a}{b-a}$$

$$dt = \frac{dx}{b-a}$$

$$= \boxed{(b-a)^{m+2} \int_0^1 \left|K_{[0,1]}(t)\right| dt}$$

$$\int_0^1 \left|K_{[0,1]}(t)\right| dt = 1/480$$

Entonces:

$$\int_a^b \left|K_{[a,b]}(x)\right| dx = (b-a)^{m+2} \cdot \frac{1}{480}$$

SOLO PARA SIMPSON

$$I[f] = a\left(f(\alpha) + f(-\alpha)\right) + b f(\beta)$$

$$\approx \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \quad \text{al orden } 5$$

$\#$ nodos $= 3$ Orden máximo $= 2n+1 = 5$

$$\{x_j\}_{j=0}^{n} = \{-\alpha, \beta, \alpha\}$$

$$\int_{-1}^{1} dx$$

$$W_0 x_0^0 + W_1 x_1^0 + W_2 x_2^0$$

P_0 $\quad 2 = 2a + b$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx$$

P_1 $\quad 0 = b\beta$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx$$

P_2 $\quad 2/3 = 2a\alpha^2 + \cancel{b\beta^2}$

repetida

P_3 $\quad \cancel{0 = b\beta^3}$

P_4 $\quad 2/5 = 2a\alpha^4 + \cancel{b\beta^4}$

repetida

P_5 $\quad \cancel{0 = b\beta^5}$

$$\begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{1}{3a} \Rightarrow \alpha^4 = \dfrac{1}{9a^2} \\ \alpha^4 = \dfrac{1}{5a} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{9a^2} = \frac{1}{5a} \Rightarrow a = \frac{5}{9}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha^2 = 3/5$$

PARCIAL 2016

Sea $I[f] = pf(\alpha) + qf(-\alpha) \approx \int_{-1}^{1} f(x)dx$

encontrar p, q y $\alpha \in (0,1)$ tal que I sea exacta $\forall$ polinomio $g \in \mathcal{P}_4$ tal que $g(-1) = g(1) = 0$.

Demostrar que es exacta en $\mathcal{P}_5$ tal que $g(-1) = g(1)$

$$g(x) = (x+1)(x-1)\, \underset{\substack{\downarrow \\ 1,\ x,\ x^2}}{u(x)} \quad , \quad u \in \mathcal{P}_2$$

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)dx = I[(x+1)(x-1)] \\ \int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)x\,dx = I[(x+1)(x-1)x] \\ \int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)x^2\,dx = I[(x+1)(x-1)x^2] \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)dx = \int_{-1}^{1} (x^2-1)\,dx = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3} = p(\alpha^2-1) + q(\alpha^2-1)$$

$$\int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)x\,dx = \int_{-1}^{1} (x^3-x)dx = 0 = p\alpha(\alpha^2-1) - q\alpha(\alpha^2-1)$$

$$\int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)x^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^4 - x^2 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{15} = (p+q)\alpha^2(\alpha^2-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p+q)(\alpha^2-1) = -4/3 \\ (p-q)\alpha(\alpha^2-1) = 0 \\ (p+q)\alpha^2(\alpha^2-1) = \frac{-4}{15} \Leftrightarrow (p+q)(1-\alpha^2)\alpha^2 = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\alpha^2 = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \boxed{\alpha^2 =} \end{cases}$$

$$(p+q) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

$$p = q = \frac{5}{6}$$

$$I[f] = \frac{5}{6}\left(f\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + f\left(1/\sqrt{5}\right)\right)$$

b) $$\underbrace{\int_{-1}^{1} (x^2-1)\,x^3\,dx}_{\overset{\shortparallel}{0}} = \frac{5}{6}\left[\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-1\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^3 + \left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3\right]$$

función impar
intervalo simétrico

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix} = M+N \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

a) convergencia de $MX_{n+1} + NX_n = b$

$$X_{n+1} = M^{-1}(-NX_n + b) \longrightarrow B = -M^{-1}N$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = -M^{-1}N = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta-\alpha & \gamma & 0 \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ \beta-\alpha & \gamma-\lambda & 0 \\ -\beta & -\gamma & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 \\ \beta-\alpha & \gamma-\lambda \end{vmatrix} \qquad \rho = \max\{|\alpha|, |\gamma|\}$$

¿Que pasa si $\alpha = \gamma = 0$?

$$X_{n+1} = BX_n + \phi$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = BX_1 + \phi = B(BX_0 + \phi) + \phi = B\phi + \phi$$

$$X_3 = B(B\phi + \phi) + \phi = B\phi + \phi = X_2$$

NÚCLEO PEANO: SIMPSON en $[0,1]$

$$K(x) = \int_0^1 (y-x)_+^3\,dy - \frac{1}{6}\left(\underset{0}{(-x)_+^3} + 4\left(\tfrac{1}{2}-x\right)_+^3 + \underset{0}{(1-x)_+^3}\right) =$$

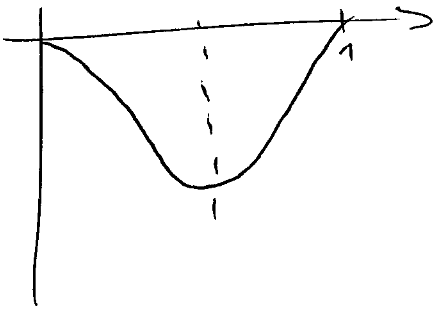
$$= \underbrace{\int_x^1 (y-x)^3\,dy}_{t=y-x} - \frac{1}{6}\left(4\left(\tfrac{1}{2}-x\right)_+^3 + (1-x)^3\right)$$

$$\int_0^{1-x} t^3\,dt = \frac{(1-x)^4}{4}$$

Entonces:

$$x \geq 1/2 \longrightarrow K(x) = \frac{(1-x)^4}{4} - \frac{(1-x)^3}{6}$$

$$x \leq 1/2 \longrightarrow K(x) = \frac{(1-x)^4}{4} - \frac{(1-x)^3}{6} - \frac{2\left(\frac{1}{2}-x\right)^3}{3}$$



$$= \int_0^1 \left|K_{[0,1]}(t)\right|dt =$$

$$= -2\int_{1/2}^1 \left(\frac{(1-x)^4}{4} - \frac{(1-x)^3}{6}\right)dx = \frac{1}{480}$$

EJ. 6 HOJA 5

Nodos equiespaciados $x_{j+1} = x_j + h$

$$\left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_n)\right| \leq n!\, h^{n+1} \qquad \forall x \in [x_0, x_1]$$

$[a,b]$ $\quad x_0 = a$, $x_n = b$ $\qquad h = \dfrac{b-a}{n}$

$$\left|\Pi_{n+1}(x)\right| \leq \frac{n!\,(b-a)^{n+1}}{n^{n+1}}$$

$$\left|f(x) - p(x)\right| = \frac{\max\left|f^{(n+1)}\right|}{(n+1)!}\left|\Pi_{n+1}(x)\right|$$

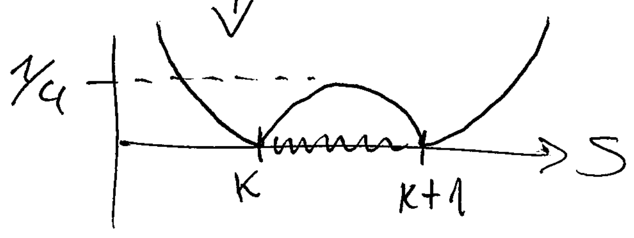
$$x_j = x_0 + jh$$

$x \in [x_0, x_n] \Rightarrow x = x_0 + sh$ para un $s \in [0,n]$

$$\prod_{j=0}^{n}(x-x_j) = h^{n+1}\underbrace{\prod_{j=0}^{n}(s-j)}_{\to q(s)} \qquad s \in (0,n)$$

decimos $K = \lfloor S \rfloor$: $K \leq S < K+1$

$$|q(s)| = \underbrace{\prod_{j=0}^{K-1}(s-j)}_{\prod_{j=0}^{K-1}(s-j) \,\leq\, \prod_{j=0}^{K-1}(K+1-j) \,=\, (K+1)!} \cdot \underbrace{(s-K)\cdot(s-(K+1))}_{} \cdot \underbrace{\prod_{j=K+2}^{n}|s-j|}_{\prod_{j=K+2}^{n}(j-s) \,\leq\, \prod_{j=K+2}^{n}(j-K) \,=\, (n-K)!}$$



$$|q(s)| \leq \frac{1}{4}(K+1)!\,(n-K)!$$

¿ $(K+1)!\,(n-K)! \leq n!$? cierto

$$\Longleftrightarrow \frac{n!}{K!\,(n-K)!} \geq K+1$$

demostrado usando el triángulo de