Ecuaciones diferenciales

Lista 1 $\qquad$ 2ºM/3ºDG, Curso 2018-19

Los recomendados estan marcados con un (*)

1. (*) a) Comprobar que, para cada valor de la constante C, la función

$$y = e^{x^2}(C + \int_0^x e^{-t^2} dt)$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$y' = 2xy + 1.$$

b) Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ dos funciones de la familia anterior, correspondientes a dos valores distintos de la constante C. Hallar la ecuación diferencial que satisface $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$.

2. (*) a) Hallar los valores de m para los cuales $y = e^{mx}$ es solución de la ecuación diferencial

$$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 0.$$

b) A partir de combinaciones lineales de las soluciones encontradas en el apartado anterior, hallar una solución que verifique las condiciones

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1.$$

3. (*)Comprobar que para cada valor de la constante $C > 0$, la identidad

$$Cx - y\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = 0$$

define y como función de x. Hallar la ecuación diferencial que satisfacen todas las funciones de la familia. Hallar $y(0)$ e $y'(0)$ para cada una de ellas.

4. (*) a) Utilizando las isoclinas, esbozar las soluciones de $y' = y^2 - 1$.

b) Resolver explícitamente la ecuación $y' = y^2 - 1\,, \quad y(0) = 0$ y comparar el resultado con lo obtenido por el método de isoclinas empleado anteriormente.

5. (*) Trazando algunas isoclinas, esbozar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $y' = \operatorname{sen}(y + x)$, $\qquad$ b) $x' = \sqrt{t^2 + x^2}$

6. (*) a) Describir geométricamente la familia de curvas

$$x^2 + y^2 + 2Cx = 0$$

y calcular una ecuación diferencial que satisfacen todas ellas.

b) Determinar la ecuación diferencial de la familia de curvas

$$y(x) = x\cos(x + C).$$

7. (*) Dada la ecuación diferencial

$$y' = (1 + x)y + 1 - 3x + x^2,$$

calcular los primeros términos del desarrollo de Taylor de la solución que satisface $y(0) = 0$.

8. (*) Esbozar las siguientes familias uniparamétricas de curvas y hallar sus trayectorias ortogonales:

a) $xy = C$.

b) $y = Ce^x$.

c) $y = Cx^n$, donde n es un entero positivo. Explicar qué sucede con las trayectorias ortogonales cuando aumentamos el valor del entero n.

9. (*) Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de parábolas

$$y^2 - Cx = C^2/4.$$

10. (*) Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencias definida por

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2.$$

Interpretar el resultado geométricamente.

11. (*) Hallar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias uniparamétricas de curvas expresadas en coordenadas polares:

$$a)\, r = C(1 + \cos\theta). \qquad b)\, r = 2C\mathrm{sen}\theta.$$

12. (*) Hallar las curvas que satisfacen las condiciones geométricas siguientes:
a) El segmento de la tangente limitado por los ejes coordenados tiene como punto medio al punto de tangencia.
b) La proyección sobre el eje OX de la parte de la tangente entre (x, y) y el eje OX tiene longitud 1.
c) El ángulo entre el radio polar y la tangente es constante.
d) La curva pasa por $(0, 0)$ y está contenida en el primer cuadrante, de modo que el área bajo la curva desde $(0, 0)$ hasta (x, y) es un tercio del área del rectángulo que tiene a esos puntos como vértices opuestos.

13. (*) Para cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes, hallar la solución particular que satisface la condición inicial dada:

- $y' = e^{3x-2y}$, con $y(0) = 0$.
- $e^{-y} + (1 + x^2)y' = 0$, con $y(0) = 0$.
- $xyy' = (x + 1)(y + 1)$, con $y(1) = 0$.

14. (*) Según la *Ley de enfriamiento de Newton* la tasa de variación de la temperatura en un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura con el ambiente. Si una barra de hierro a 100ºC se enfría a 90ºC en 5 segundos cuando se deja a una temperatura ambiente de 20ºC, ¿cuánto tardará en estar a 30ºC?

15. En una sala que está a una temperatura de 20ºC nos sirven dos tazas de café, a una temperatura de 40ºC. Disponemos de leche fría, a una temperatura de 10ºC. En una de las tazas echamos una cantidad de leche fría igual a la de café contenido en su interior, y esperamos cinco minutos. En la otra taza esperamos cinco minutos, y después agregamos la leche. Determinar cual de las dos tazas tiene el café con leche más caliente.

16. (*) Una bola de naftalina tiene inicialmente un radio de 1 cm. Al cabo de un mes su radio se ha reducido a 0,5 cm. Suponiendo que la naftalina se evapora a un ritmo proporcional a la superficie de contacto con el aire, hallar la evolución del radio de la bola en función del tiempo.

17. Un día comenzó a nevar por la mañana y siguió cayendo la nieve de forma constante todo el día. A las 12 del mediodía una quitanieves comenzó a limpiar una carretera, con velocidad inversamente proporcional al espesor de la nieve depositada. Sabiendo que a las 2 de la tarde había limpiado 2 km., y que a las 4 de la tarde había limpiado 1 km. más, determinar a qué hora comenzó a nevar.

18. Cuatro hormigas situadas en las esquinas de una mesa cuadrada de lado 1 comienzan a andar simultaneamente a la misma velocidad, cada una en la dirección de su vecina más próxima en la dirección contraria a las agujas del reloj. Tomando coordenadas polares con origen en el centro de la mesa y eje polar a lo largo de una diagonal, hallar la trayectoria de la hormiga que parte del eje polar.

19. (*) Una población de bacterias que sigue la Ley de Malthus (la tasa de variación es proporcional al número de individuos) se duplica al cabo de 24 horas. ¿Cuánto tardará en triplicarse?

20. (*) Supongamos que una población sigue el modelo $p' = bp^2 - ap$ con $a, b > 0$.
a) Representar en un diagrama de fases, clasificando los puntos críticos del sistema.
b) Demostrar que si $p(t_0) < a/b$, entonces la población tiende a extinguirse.

21. (*)Dada la ecuación $y' = \cos y$, sin encontrar las soluciones explícitamente, estudiar su comportamiento cualitativo (en particular, clasificar los puntos críticos según su estabilidad).