ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 0: Repaso de Álgebra Lineal e introducción a la Geometría.

EJERCICIO A. Sean $u_1 = (1,1)$ y $u_2 = (-1,1)$ vectores de $\mathbb{R}^2$, y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que

$$f(u_1) = u_1 \quad \text{y} \quad f(u_2) = -u_2. \tag{1}$$

1. Demuestra que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

2. Decide, de manera razonada, si f está completamente determinada por las condiciones descritas en (1).

3. Describe geométricamente el efecto que tiene f al ser aplicada a un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$.

4. Escribe la matriz de f respecto a la base $\mathcal{B}$.

5. Calcula la imagen de $(1,3)$ por f.

6. Sea (a,b) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Calcula su imagen por f y expresa sus coordenadas respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.

7. Usando el apartado anterior, calcula las imágenes por f de los vectores de la base canónica. ¿Qué observas?

EJERCICIO B. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & +\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Describe las imágenes por g de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

9. Calcula el determinante de A. ¿Es g inyectiva?

10. A la vista de tu respuesta a la pregunta anterior, da una cota para la dimensión de la imagen de g.

11. Describe la imagen de g: fijado un vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ da condiciones necesarias y suficientes para que (a,b,c) esté en la imagen de g.

12. Describe los subespacios invariantes por g.

13. Da una interpretación geométrica del efecto que tiene g al actuar sobre los vectores de $\mathbb{R}^3$.

14. Repite los apartados anteriores con la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO C. Sea $F := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, z + t = 0\}$ y sea G el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 1)\}$.

15. Da una base de F.

16. ¿Cuál es el mínimo número de ecuaciones lineales homogéneas que necesitamos para describir G? Da un ejemplo de sistema lineal homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea G. ¿Es este sistema único con esta propiedad?

17. Da una base del subespacio $F + G$.

18. Describe el subespacio $F \cap G$ usando dos procedimientos distintos.

19. Comprueba que se verifica la fórmula de Grassman sobre las dimensiones de los subespacios que aparecen en el problema.

EJERCICIO D. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\vec{x} = \vec{0}. \tag{2}$$

Contesta de manera razonada a las siguientes preguntas **sin hacer ningún cálculo.**

20. Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada es C. Al resolver el sistema de ecuaciones (2), ¿qué información obtenemos sobre h? Obtenemos el núcleo de h.

21. Observa que

$$C\vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿Qué información nos da el número de soluciones del sistema sobre los vectores columna de C?
Sabremos si son l. dep o l. indep.

22. Sea ahora $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera. Observa que

$$C\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{se puede escribir como} \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

¿Qué significa, en términos de h, que el sistema (2) tenga o no solución?

23. ¿Qué significa, en términos de los vectores columna de C que el sistema (2) tenga o no solución?

Repaso números complejos

24. Libro *Álgebra lineal y Geometría*, Hernández, Vazquez, Zurro. Sección 3.1: 1-5; sección 3.2: 1, 2, 3, 5, 6; Sección 3.3: 1-3.

HOJA 0

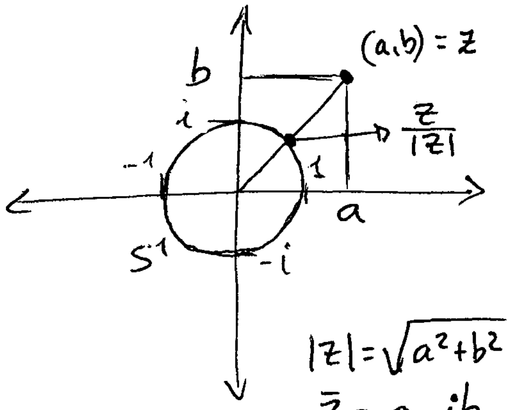
REPASO Nos COMPLEJOS

$z \in \mathbb{C}$ $\qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$\overset{\shortparallel}{a+ib}$

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$(a,b)(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$



$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\bar{z} = a - ib$

$S^1 = \{ \underset{\overset{\shortparallel}{\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha}}{e^{i\alpha}} \mid \alpha \in [0, 2\pi] \}$

Demostrar las siguientes igualdades:

$$\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2}$$

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + ib_1 \\ z_2 = a_2 + ib_2 \end{cases}$$

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{a_1+ib_1 + a_2+ib_2} = \overline{a_1 + a_2 + (b_1+b_2)i} = (a_1+a_2) - (b_1+b_2)i$$

$$= a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\boxed{\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2}$$

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + ib_1 \\ z_2 = a_2 + ib_2 \end{cases}$$

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)} = \overline{a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i} =$$

$$= a_1a_2 - b_1b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)i = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$$

(*) Para $z \neq 0$

$$1 = \overline{z . z^{-1}} = \bar{z} . \overline{z^{-1}} \Rightarrow (\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$$

$$z . \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 = |\bar{z}|$$

Hallar el módulo y el argumento de los siguientes números complejos. (sin hacer las operaciones)

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$$

Buscar α (argumento) tal que $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

a) $\underset{\overset{\shortparallel}{z}}{(1+i)}\underset{\overset{\shortparallel}{\bar z}}{(1-i)} = |z|^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha = 0$

b) $$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{4}{4}\cdot\left(e^{\pi/6\, i}\right)^2 = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$1+\sqrt{3}i = 2\left(\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\cos\alpha}+\underbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\operatorname{sen}\alpha}i\right) = 2e^{\pi/6\, i}$$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

NOTA:

$$\left|\frac{a+bi}{a-bi}\right| = \left|\frac{z}{\bar z}\right| = \left|z\cdot\frac{1}{\bar z}\right| = \left|z\cdot(\bar z)^{-1}\right| = |z|\,\left|(\bar z)^{-1}\right| = |z|\cdot\left|\overline{z^{-1}}\right| =$$

$$= |z|\,|z^{-1}| = |z\cdot z^{-1}| = 1$$

otra forma:

$$\left|\frac{a+bi}{a-bi}\right| = \left|\frac{z}{\bar z}\right| = \frac{|z|}{|\bar z|} \Rightarrow \text{como } |z| = |\bar z| \Rightarrow \frac{|z|}{|\bar z|} = 1$$

Calcula:

a) $i^{431}(3-3i) = -i(3-3i)$

NOTA:

$$i^n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 4 \\ i & n \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & n \equiv 2 \mod 4 \\ -i & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

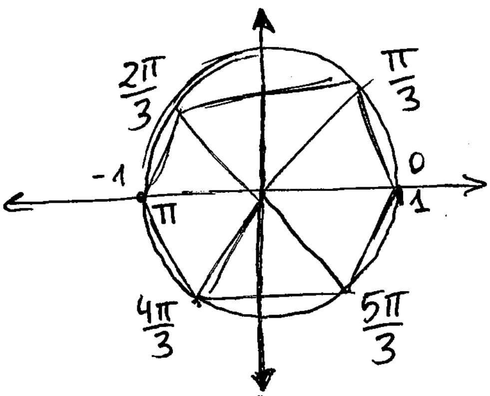
$i^{431} = -i$

$$-i \cdot 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{4}$$

$$|z| = 3\sqrt{2}$$

Calcular las raíces sexta de la unidad: $z^6 = 1$ en $\mathbb{C}$



$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$1,\ e^{\pi/3 i},\ e^{\frac{2\pi}{3}i},\ -1,\ e^{\frac{4\pi}{3}i},\ e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

$$e^{\frac{k\pi}{3}i} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ALGEBRA LINEAL

$f: V_{\mathbb{K}} \longrightarrow V$ aplicación lineal

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$\begin{cases} f(\lambda v) = \lambda f(v) \\ f(v+w) = f(v) + f(w) \end{cases}$$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \qquad a_i \in \mathbb{K}$

$f(v) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$

$M_{BB'}(f)$ por columnas las coordenadas de $f(v_i)$ en B.

$M_{BB'}(f)\,[v]_{B'} = [f(v)]_B$

$$M_{BB'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & \cdots & f(v_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{array}$$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$B' = \{w_1, \dots, w_n\}$

matriz de cambio de base:

$M_{BB'} = M_{BB'}(id)$

$M_{B'B} = M_{BB'}^{-1}$

Ej. A | $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (1,-1)$ $\in \mathbb{R}^2$ $\qquad f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = -u_2$

1. Demostrar que son base: se veu que son l. indep. y como $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow \langle u_1, u_2 \rangle$ generan $\mathbb{R}^2$. $\Rightarrow$ son base.

2. Está bien definida?

Sí, porque u_1 y u_2 son base.

$\forall v \in V \Rightarrow v = a_1 u_1 + a_2 u_2$ para ciertos $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$.

$$f(v) = a f(v_1) + b f(v_2) = a u_1 - b u_2$$

4. Matriz de f respecto de la base B

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Imagen de $(1,3)$ por f.

$$(1,3) = 2u_1 + u_2$$

$$f(1,3) = 2f(u_1) + f(u_2) = 2(1,1) - (-1,1) = (3,1)$$

6. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calcular su imagen y coord. respecto de $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.

$u_1 = e_1 + e_2$
$u_2 = -e_1 + e_2$

$$\Rightarrow M_{CB} = \begin{array}{c|cc} & u_1 & u_2 \\ \hline e_1 & 1 & -1 \\ e_2 & 1 & 1 \end{array}$$

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_C(f) = M_{CB} \cdot M_B(f) \cdot M_{BC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Ej. B}}$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal. $\quad C = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$A = M_C(g) = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{2} & 0 \\ -2/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{2} \\ \underbrace{0}_{g(e_1)} & \underbrace{-2/\sqrt{2}}_{g(e_2)} & \underbrace{0}_{g(e_3)} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\det A = 0}$

g biyectiva $\Leftrightarrow |M_C(g)| \neq 0$

$\mathbb{R}^3 \cong \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$

g biyectiva $\Leftrightarrow$ g inyectiva $\Leftrightarrow$ g sobreyectiva

g no es inyectiva ya que $\det A = 0$.

Como g no inyectiva $\Rightarrow \operatorname{Ker} g \neq \{0\} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} g \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} g \leq 2$

$\operatorname{Im} g = \langle (0,-1,0), (1,0,-1), (0,1,0) \rangle = \langle (0,1,0), (1,0,-1) \rangle =$

$= \{(a,b,-a) \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$

$$|xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x & -2/\sqrt{2} & 0 \\ 2/\sqrt{2} & x & -2/\sqrt{2} \\ 0 & 2/\sqrt{2} & x \end{vmatrix} = x(x^2+4)$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

se supone que esto describe los espacios g-invariantes

Ker g:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{(a,b,c) \,/\, a = c \wedge b = 0\} = \langle \underbrace{(1,0,1)}_{v_1} \rangle$

$\operatorname{Im} g = \langle \underbrace{(0,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(1,0,-1)}_{v_3} \rangle$

$$A\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{v_2}} = \begin{pmatrix}2/\sqrt{2}\\0\\-2/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}v_3$$

$$A\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{v_3} = \begin{pmatrix}0\\-4/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \frac{-4}{\sqrt{2}}v_2$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = ?$$

$$M_{g\{v_1,v_2,v_3\}} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -4/\sqrt{2}\\0 & 2/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

No se sabe porqué hizo esto

12.

$\operatorname{Ker} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, g(v) = 0\}$

$\operatorname{Im} g = \{g(v) \,/\, v \in \mathbb{R}^3\}$

$V = \mathbb{R}^3$

$W < V$

$g(w) \in W \quad \forall w \in W$

~~g es invaria~~ W es g-invariante

(W es fijado por g si $g(w) = w \quad \forall w \in W$)