PROBABILIDAD II

Grado en Matemáticas

Tema 0
Repaso de teoría de la medida

Javier Cárcamo

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
javier.carcamo@uam.es

Tema 0: Repaso de teoría de la medida

Sea Ω un conjunto no vacío. Una colección de conjuntos $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (partes de Ω) se dice que es una σ-**álgebra** o **tribu** si

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(2) $\mathcal{F}$ es cerrada o estable para la complementación.

$$\text{Si } A \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c \in \mathcal{F}.$$

(3) $\mathcal{F}$ es estable para la unión numerable.

$$\text{Si } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}, \text{ entonces } \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

El par $(\Omega, \mathcal{F})$ se denomina **espacio medible** y los elementos de $\mathcal{F}$ **conjuntos medibles**.

Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-álgebras, entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es σ-álgebra.

Dado $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, se define

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{F}} \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \supset \mathcal{C} \text{ y } \mathcal{F}\ \sigma\text{-álgebra}\}.$$

El conjunto $\mathcal{C}$ se denomina **generador de la σ-álgebra** $\sigma(\mathcal{C})$.

Si (Ω, τ) es un espacio topológico, a la σ-álgebra $\sigma(\tau)$ se denomina **σ-álgebra Boreliana o de Borel asociada a** τ.

De interés especial para nosotros serán:

- $\Omega = \mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$, $\tau = \tau_u$ (topología usual).
- $\Omega = \mathbb{R}^k$ o $\overline{\mathbb{R}}^k$, $\tau = \tau_u$ (topología usual).

$\sigma(\tau_u) = \mathcal{B}$ σ-álgebra Boreliana (sin especificar la topología).

Espacios de medida

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Se dice que μ es una **medida (positiva)** en Ω si $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ verificando:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) σ-**aditividad** o **aditividad numerable**: $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos (i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$), entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

El triplete $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ se llama **espacio de medida**.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un **espacio de medida finita** si $\mu(\Omega) < \infty$.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un **espacio de medida σ-finita** si existe $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\mu(A_i) < \infty$, para todo i.

Propiedades de la medida

Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, decimos que A_n **crece** hasta A, $A_n \uparrow A$, si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ y $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, decimos que A_n **decrece** hasta A, $A_n \downarrow A$, si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ y $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

1. $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$ disjuntos, entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.
2. A, $B \in \mathcal{F}$, con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. A, $B \in \mathcal{F}$, con $A \subset B$ y $\mu(A) < \infty$, entonces $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.
4. $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$, entonces $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.
5. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ y $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.
6. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ con $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.
7. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Medidas sobre álgebras

Una colección $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se dice que es una **álgebra** si

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(2) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

(3) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Se dice que $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ es una **medida sobre el álgebra** $\mathcal{A}$ si

(1) $\mu_0(\emptyset) = 0$.

(2) σ-**aditividad**: $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tales que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i).$$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu_0)$ se dice σ-**finito** si existe $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tal que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\mu_0(A_i) < \infty$, para todo i.

Teorema de extensión

Teorema de extensión de Caratheodory (1948)

Sea $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ una medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$. Existe una medida $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow [0, \infty]$ que es una extensión de μ_0, es decir, $\mu_{|\mathcal{A}} = \mu_0$.

Si además $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_0)$ es σ-finito, entonces μ es única.

Los conjuntos $B \in \mathcal{F}$ con $\mu(B) = 0$ se llaman **conjuntos** μ-**nulos**
Un espacio de medida se dice **completo** si para todo conjunto μ-nulo B y para todo $A \subset B$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$.

Teorema de completación

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Existe un espacio medida $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ completo tal que $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$ y $\overline{\mu}$ es una extensión de μ.

Además, este espacio de medida $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ es único y se dice que es la **completación** de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Ejemplo: Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$

Dado $(a, b]$ $(a < b)$ intervalo semiabierto de $\mathbb{R}$ definimos $m((a, b]) = b - a$. Queremos extender esta aplicación.
Definimos el álgebra
$\mathcal{A} = \{$Uniones finitas de intervalos semiabiertos disjuntos$\}$ y

$$m : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$
$$A = \biguplus_{i=1}^{n} I_i \longmapsto m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i).$$

La aplicación m es una medida sobre $\mathcal{A}$.

Por tanto, podemos usar el Teorema de Caratheodory para obtener una extensión $(\mathbb{R}, \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ $(\mathcal{B}(\mathbb{R})$ =Borelianos).

El Teorema de completación permite obtener un espacio medible completo $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), m)$ extensión de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

Esto mismo funciona en $\mathbb{R}^d$ usando $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ y $m((\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_d - a_d)$.

Ejemplo: Medidas de Borel-Stieljes

Medida de Borel-Stieljes asociada a g

Sea $I \subset \mathbb{R}$ (intervalo) y $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funcion no decreciente y continua por la derecha.

Existe una única medida $m_g : \mathcal{B}(I) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $m_g((a, b]) = g(b) - g(a)$. A m_g se le llama la **medida de Borel-Stieljes asociada a** g.

Nota: Se tiene $m_g(\{x_0\}) = g(x_0) - g(x_0^-)$.

Nota: Si g, h son dos funciones continuas por la derecha y no decrecientes tales que $m_g = m_h$, entonces $g - h$ =constante.

Función de distribución de una medida

Dada $\mu : \mathcal{B}(I) \longrightarrow [0, \infty]$ medida finita, existe g no decreciente y continua por la derecha tal que $\mu = \mu_g$. Además, podemos tomar $g(x) = \mu(I \cap (-\infty, x])$ que se llama **función de distribución de** μ.

Funciones medibles y funciones simples

Sean $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega', \mathcal{F}')$ dos espacios medibles. Se dice que una función $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ es **$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-medible** si para todo $A \in \mathcal{F}'$, se tiene que $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}$ (**anti-imagen** de A por f).

Si $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es constante, entonces es medible.

Si $A \subset \Omega$, el **indicador de** A es la función $1_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $1_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ y $1_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$. ¿Cuándo 1_A es una función medible?

Una función $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **simple** si es medible y $f(\Omega)$ es finito.

Nota: $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es simple si y solo si $f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}$, con $A_i \in \mathcal{F}$ disjuntos.

Integral de una función medible

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Si $s = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ función simple positiva, se define la **integral de s con respecto a la medida** μ

$$\int_\Omega s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

$f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow [0, \infty]$ medible, existe $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ simples con $0 \leq s_n \uparrow f$. Se define la **integral de f con respecto a la medida** μ

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f, \ s \text{ simple}} \int_\Omega s \, d\mu.$$

$f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, entonces $f = f^+ - f^-$. Si $\int_\Omega f^+ \, d\mu < \infty$ o $\int_\Omega f^- \, d\mu < \infty$, **integral de f**

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu.$$

Si $\int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$, f se dice **μ-integrable** ($f \in \mathcal{L}^1(\mu)$).

Propiedades de la integral

$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene:

1. **Linealidad:** $af + bg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y
$$\int_\Omega (af + bg)\, d\mu = a \int_\Omega f\, d\mu + b \int_\Omega g\, d\mu.$$
2. **Monotonicidad:** Si $f \leq g$, entonces
$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu \quad \left(\text{En particular,} \quad \left| \int_\Omega f\, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f|\, d\mu. \right).$$
3. Sea $f \geq 0$. $\int_\Omega f\, d\mu = 0$ si y solo si $f = 0$ c.s. (casi seguramente). Es decir, $\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq 0\}) = 0$.
4. Si $f \geq 0$ y $\int_\Omega f\, d\mu < \infty$, entonces $\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) = \infty\}) = 0$, es decir, $f \neq \infty$ c.s.

Integral indefinida

$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, para $A \in \mathcal{F}$ se define
$$\int_A f\, d\mu = \int_\Omega f\, 1_A\, d\mu.$$

Proposición: Sea $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow [0, \infty]$ medible, la aplicación

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{F} &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\longmapsto \nu(A) = \int_A f\, d\mu, \end{aligned}$$

es una medida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Se denota $d\nu = f\, d\mu$. La función f se denomina la μ-**densidad** de la medida ν.

Teorema de la convergencia monótona

Hacia arriba: Si $f_n \uparrow f$ y existe k tal que $f_k^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$, entonces

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Hacia abajo: Si $f_n \downarrow f$ y existe k tal que $f_k^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$, entonces

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Lema de Fatou-Lebesgue

(a) Si $f_n \leq f$ y $f^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$, entonces

$$\int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n\, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

(b) Si $f_n \geq f$ y $f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$, entonces

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Teorema de la convergencia dominada

Si $f_n \to f$ y existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, entonces

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Continuidad absoluta de medidas

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y ν, μ dos medidas. Se dice que ν es **absolutamente continua con respecto a** μ y se denota $\nu << \mu$ si para todo $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$, entonces $\nu(A) = 0$.

Ejemplo:

Una medida μ se dice que se **concentra** en un conjunto $A \in \mathcal{F}$ si para todo $B \in \mathcal{F}$, se tiene que $\mu(B) = \mu(A \cap B)$.

Se dice que ν es **singular con respecto a** μ y se denota $\nu \perp \mu$ si existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$ y ν se concentra en A.

Ejemplo:

El Teorema de Radon-Nikodym

Teorema de descomposición de Lebesgue

Sean ν, μ dos medidas σ-finitas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Existen dos únicas medidas ν_c, ν_s tales que $\nu_c << \mu$ y $\nu_s \perp \mu$ con $\nu = \nu_c + \nu_s$. Esta descomposición se denomina **descomposición de Lebesgue** de la medida ν (con respecto a μ).

Teorema de Radon-Nikodym

Sean ν, μ dos medidas σ-finitas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que $\nu << \mu$. Existe una única función medible $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Es decir, $d\nu = f d\mu$.

A la función $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ se le llama la **derivada de Radon-Nikodym de** ν **con respecto a** μ. (f es la μ-**densidad de** ν.)