CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2016-2017. HOJA 2.

1) ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? ¿Cuáles suprayectivas? ¿Es alguna de ellas biyectiva? (Empieza por asegurarte de que todas ellas son funciones, y entre los conjuntos que se indican).

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(m) = m + 2$;
b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(m) = 2m - 7$;
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$;
d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2 + 4x$;
e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n(n + 1)$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;
g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 + n + 1$;
h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(t) = t/(t + 1)$.

2) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |2x + 1/2| - 1/2$, hallar su imagen, y $f(\mathbb{Z})$.
Demuestra que f no es ni sobreyectiva ni inyectiva. Probar que, sin embargo, sí da una biyección entre $\mathbb{Z}$ y su imagen.

3) Sea $f : X \to Y$ una función. Definimos para cada subconjunto $A \subset Y$ la imagen inversa:

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

LIBRETA Dados subconjuntos $Z, W \subset Y$, demuestra que

a) $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$;
b) $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$;
c) $f(f^{-1}(Z)) = f(X) \cap Z$;
d) $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$.

HOJA 2 4) Estudiar si la siguiente función es inyectiva y/o sobreyectiva.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ A & \longrightarrow & f(A) = \{(n-1)/2 : (n \in A) \wedge (n \text{ es impar}\}. \end{array}$$

¿Quién es $f^{-1}(\emptyset)$?

HOJA 2 5) Sean $f, g : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow P = \{primos\}$ dos funciones definidas por
$f(n) =$ el mayor primo que divide a n , y $g(n) =$ el menor primo que divide a n.
a) Decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.
b) ¿Quién es $f^{-1}(\{3\})$? ¿Quién es $g^{-1}(\{3\})$?

6) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Dibuja los gráficos de las funciones f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$.
b) Encuentra las imágenes de cada una de las cuatro funciones anteriores y decide si son inyectivas y/o suprayectivas.

"LIBRETA" 7) Dadas funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, probar las siguientes afirmaciones:

a) f inyectiva y g inyectiva $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva.
b) f sobre y g sobre $\Rightarrow g \circ f$ sobre.
c) Si falta alguna de las dos hipótesis en los casos anteriores, la conclusión puede ser falsa.
d) Si g es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si lo es f, y es sobre si y sólo si lo es f.
e) Si además $X = Z$, la afirmación del apartado anterior también es cierta para $f \circ g$.

8) Sean A y B dos conjuntos finitos de m y n elementos respectivamente.
a) Hallar el número de funciones $f : A \longrightarrow B$.
b) Hallar el número de funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$.

9) Sea X un conjunto finito con n elementos.
¿Cuántos subconjuntos tiene $X \times X$? ¿Cuántas funciones hay de X en $X \times X$?

10) Para todo $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$, el número combinatorio $\binom{n}{k}$ se define como el número de subconjuntos de k elementos en un conjunto X que tenga n elementos.

A partir de la definición, demuestra las siguientes propiedades de los números combinatorios:

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$; d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, es decir, el conjunto X tiene en total 2^n subconjuntos; e) $\sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}$.

HOJA 2 **11)** Utilizar la definición de los números combinatorios $\binom{n}{k}$ para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k .$$

Derivar k veces esa igualdad, y evaluarla en $x = 0$ para demostrar que se tiene la siguiente expresión algebraica para los números combinatorios:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

HOJA 2 **12)** Utilizar el *principio de inclusión–exclusión* para responder:

(a) ¿Cuántos números naturales coprimos con 1000 hay entre 1 y 1000?

(b) ¿Cuántos números naturales coprimos con 360 hay entre 1 y 360?

HOJA 2 **13)** En una reunión de 4 personas, cada uno ha venido con su paraguas y los han dejado en un paragüero. Al final de la reunión, cada persona escoge un paraguas de forma aleatoria.

a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los paraguas de forma que ninguno se quede con el suyo?

b) Responder a la misma pregunta para el caso de n personas y n paraguas.

$\boxed{10.C}$ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n\cancel{-1}-k\cancel{+1})!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!\,k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\left[\cancel{k}+(n-\cancel{k})\right]}{k!(n-k)!} = \frac{n.(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\boxed{10.E}$ $\sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}$

$$\sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1} = \binom{n}{l+1} + \binom{n}{l}$$

→ último sumando; basta probar que: → $\sum_{k=l}^{n-1} \binom{k}{l} = \binom{n}{l+1} = \binom{n-1}{l+1} + \binom{n-1}{l}$

→ último sumand basta probar →

$$\sum_{k=l}^{n-2} \binom{k}{l} = \binom{n-1}{l+1} = \binom{n-2}{l+1} + \binom{n-2}{l}$$

→ último sumando; basta probar:

$$\sum_{k=l}^{n-3} \binom{k}{l} = \binom{n-2}{l+1} = \binom{n-3}{l+1} + \binom{n-3}{l}$$

→ y así continuament

[. . .]

$$\sum_{k=l}^{l+2} \binom{k}{l} = \binom{l+3}{l+1} = \binom{l+2}{l+1} + \binom{l+2}{l}$$

→ último sumando; basta probar: →

$$\sum_{k=l}^{l+1} \binom{k}{l} = \binom{l+2}{l+1} = \binom{l+1}{l+1} + \binom{l+1}{l}$$

→ último sumando; basta probar: →

$$\sum_{k=l}^{l} \binom{k}{l} = \binom{l}{l} = \binom{l+1}{l+1} = 1$$

12.

a) Coprimos con 1000, entre 1 y 1000.

$1000 = 2^3 \cdot 5^3$

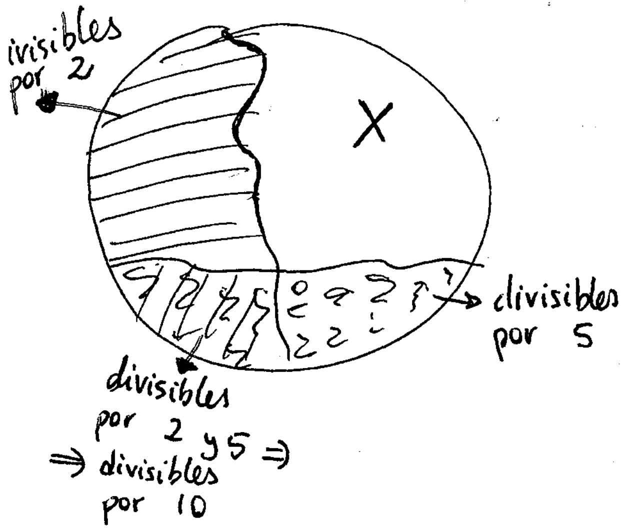
Principio de inclusión-exclusión: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{f \in P_k(\mathbb{N}_n)} \mathrm{Card}\,(\cap A_\ell) \right) = \mathrm{Card} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

$\mathrm{Card}\, A_2 - \mathrm{Card}\, A_{10} + \mathrm{Card}\, A_5$

$500 - 100 + 200 = 600$

$1000 - 600 = 400$

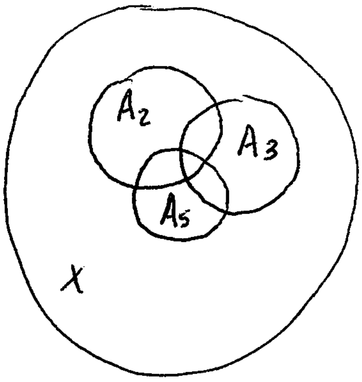
A_2 = múltiplos de 2
A_{10} = múltiplos de 10
A_5 = múltiplos de 5



X = TOTAL − div. por 2 − div. por 5 + + inters. div. 2 y 5

b) Coprimos con 360, entre 1 y 360

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$



Principio de inclusión-exclusión:
$\mathrm{Card} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{f \in P_k(\mathbb{N}_n)} \mathrm{Card}\,(\cap A_\ell) \right)$

A_2 = múltiplos de 2
A_5 = múltiplos de 5
A_3 = múltiplos de 3
X = coprimos con 360

2.1 $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto |2x + 1/2| - 1/2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN INYECTIVA

Definición: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ó

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\left.\begin{array}{l} f(-1/2) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow$ No es inyectiva, acabamos de encontrar un contraejemplo.

DEMOSTRACIÓN SOBREYECTIVA

$\left|2x + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$ siempre va a ser $\geq -\frac{1}{2}$

Por lo tanto todos los valores de $\mathbb{R}$ menores que $-\frac{1}{2}$ no tienen imagen $\Rightarrow$ no es sobreyectiva.

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \left|2x + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

$\boxed{1.}$

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$m \to m+2$

Def. inyectiva: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = x_1 + 2 \\ f(x_2) = x_2 + 2 \end{array}\right\} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + \cancel{2} = x_2 + \cancel{2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Sí que es inyectiva.

Def. sobreyectiva: la imagen del conjunto de salida es igual al conjunto de llegada

$\forall y \in Y, \exists! x \in X$ tal que $f(x) = y$

~~f(x)=y~~ $y = m + 2 \Rightarrow m = y - 2$

$-1 = m + 2 \Rightarrow \boxed{m = -3}$ pero $-3 \notin \mathbb{N}$

b) ~~f(m)~~ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$m \to 2m - 7$

Def. inyectiva: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = 2x_1 - 7 \\ f(x_2) = 2x_2 - 7 \end{array}\right\} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \cancel{2}x_1 - \cancel{7} = \cancel{2}x_2 - \cancel{7} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Sí que es inyectiva

Def. sobreyectiva: la imagen (rango) del conjunto de salida es igual al conjunto de llegada.

$\forall y \in Y \ \exists! x \in X$ tal que $f(x) = y$

$y = 2m - 7 \Rightarrow y + 7 = 2m \Rightarrow m = \dfrac{y+7}{2}$

~~Rang~~ $\mathrm{Dom}(m) = \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ sí que es sobreyectiva

Como es inyectiva y sobre $\Rightarrow$ biyectiva.

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x - x^3$

Def. inyectiva $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = x_1 - (x_1)^3 \\ f(x_2) = x_2 - (x_2)^3 \end{array}\right\} x_1 - (x_1)^3 = x_2 - (x_3)^3 \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

No es inyectiva

Def. sobreyectiva La imagen (rango) del conjunto de salida es igual al conjunto de llegada.

$\forall y \in Y \ \exists x \in X$ tal que $f(x) = y$.

$y = x - x^3 \Rightarrow y = x(1-x^2) \Rightarrow y = x(1-x)(1+x)$

Cogemos $y = 1$ y como $f(x)$ son tres factores los tres tienen que ser 1 (o dos (-1) y el otro uno). Si $x = 1 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow y = 1 \neq$

No es sobreyectiva

d) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$x \to x^2 + 4x$

Def. inyectiva $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = (x_1)^2 + 4(x_1) \\ f(x_2) = (x_2)^2 + 4(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1)^2 + 4(x_1) = (x_2)^2 + 4(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

No es inyectiva

Def. sobreyectiva La imagen (rango) del conjunto de salida es igual al conjunto de llegada.

$\forall y \in Y \ \exists! \, x \in X$ tal que $f(x) = y$

$y = x^2 + 4x \Rightarrow y = x(x+4)$

Escogemos $y = 1$, entonces como $f(x)$ está compuesto por dos factores, para que $f(x)$ sea igual a 1, los factores tienen que ser o ambos 1 o ambos (-1). Un factor es x, que si x es uno, el otro factor no lo es $1+4 = 5 \neq 1$

No es sobreyectiva.

e) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \to n(n+1)$

Def. inyectiva $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = x_1(x_1+1) \\ f(x_2) = x_2(x_2+1) \end{array}\right\} \Rightarrow x_1(x_1+1) = x_2(x_2+1) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

No es inyectiva

Def. sobreyectiva La imagen del conjunto de ~~llegada~~ salida es igual al conjunto de llegada.

$\forall y \in Y \ \exists! x \in X$ tal que $f(x) = y$.

$\boxed{y = n(n+1)}$

Escogiendo $y = 1$ $f(x)$ tiene que ser igual a 1. $f(x)$ está compuesta por dos factores, por lo que si $f(x)$ tiene que ser 1, solo puede serlo siendo ambos 1 o (-1).

Si $n = 1 \Rightarrow n+1 = 2 \neq 1 \Rightarrow f(x) \neq y \Rightarrow$ No es sobreyectiva

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \sqrt{x^2+1}$

Def. inyectiva $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = \sqrt{(x_1)^2+1} \\ f(x_2) = \sqrt{(x_2)^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(x_1)^2+1} = \sqrt{(x_2)^2+1} \Rightarrow (x_1)^2 + \cancel{1} = (x_2)^2 + \cancel{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2$$

A simple vista parece que $x_1 = x_2$, pero eso no es así, ya que al estar elevado al cuadrado x_2 puede ser uno de dos valores, uno y su opuesto negativo. Ejemplificando:

$(3)^2 = (-3)^2$; pero $x_1 = 3 \neq x_2 = -3$

No es inyectiva

Def. sobreyectiva La imagen del conjunto de salida es igual al conjunto de llegada.

$\forall y \in Y \ \exists! x \in X$ tal que $f(x) = y$

~~Dom (x) $y^2-1 \geq 0$ $y \geq 1$~~

~~$y \geq 1$~~

$y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y^2 = x^2+1 \Rightarrow x = \sqrt{y^2-1}$

~~Dom (x) = $[1, \infty)$~~

Dom (x) = $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$ Sí es sobreyectiva

g) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\quad n \longrightarrow n^2+n+1$

<u>Def. inyectiva</u> $\quad f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(n_1) = (n_1)^2 + n_1 + 1 \\ f(n_2) = (n_2)^2 + n_2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow (n_1)^2 + n_1 \cancel{+1} = (n_2)^2 + n_2 \cancel{+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1(n_1+1) = n_2(n_2+1) \Rightarrow n_1 \neq n_2$$

No es inyectiva

<u>Def. sobreyectiva</u> La imagen del conjunto de salida es igual al conjunto de llegada.

$\forall y \in Y \ \exists! x \in X$ tal que $f(x) = y$

$y = n^2+n+1$

Escogiendo $y = 2$, n^2+n tiene que ser igual a 1:

$$n^2+n-1 = 0 \Rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ la función no es sobreyectiva.

h) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$\quad t \longrightarrow t/t+1$

<u>Def. inyectiva</u> $\quad f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(t_1) = t_1/t_1+1 \\ f(t_2) = t_2/t_2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

~~se cumple para todo $\mathbb{R}$~~

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t_1 \cancel{+1}} = \frac{t_2}{t_2 \cancel{+1}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_1} = \frac{t_2}{t_2} \Rightarrow 1 = 1 \ \checkmark$$

Es inyectiva

<u>Def. sobreyectiva</u>

$\forall y \in Y \ \exists! x \in X$ tal que $f(x) = y$

$y = \frac{t}{t+1}$ Escogemos $y = 1$ y podemos comprobar que no hay ningún número dentro de $\mathbb{Q}$ que dividido entre su siguiente sea igual a $1 \Rightarrow$ CONTRAEJEMPLO ECONTRADO

No es sobreyectiva.

$\boxed{4.}$

a) $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$?

$f^{-1}(Z \cup W) = \{ x \in X : f(x) \in (Z \cup W) \} =$

$= \{ x \in X : (f(x) \in Z) \vee (f(x) \in W) \} =$

$= \{ (x \in X : f(x) \in Z) \cup (x \in X : f(x) \in W) \} =$

$= f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W)$ qed

b) $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$?

$f^{-1}(Z \cap W) = \{ x \in X : f(x) \in (Z \cap W) \} =$

$= \{ x \in X : (f(x) \in Z) \wedge (f(x) \in W) \} =$

$= \{ (x \in X : f(x) \in Z) \cap (x \in X : f(x) \in W) \} =$

$= f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$ qed

c) $f\left(f^{-1}(Z)\right) = f(X) \cap Z$?

$\Rightarrow$

$f\left(f^{-1}(Z)\right) = \{ f(x) : x \in f^{-1}(Z) \}$, por lo tanto:

$f\left(f^{-1}(Z)\right) \subset f(X) \wedge f\left(f^{-1}(Z)\right) \subset Z$

Entonces: $f\left(f^{-1}(Z)\right) \subset \left(f(X) \cap Z\right)$

$\Leftarrow$

Ahora, sea y un elemento cualquiera de $f(X) \cap Z$, entonces:

$y \in f(X) \wedge y \in Z$.

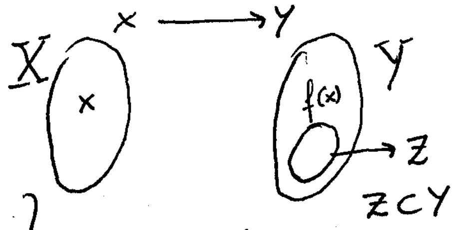
Luego existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Como $y \in Z$, entonces $x \in f^{-1}(Z)$ y

como $y \in f(X)$, entonces $y \in f\left(f^{-1}(Z)\right)$

Por lo tanto: $\left(f(X) \cap Z\right) \subset f\left(f^{-1}(Z)\right)$

- En conclusión: $f\left(f^{-1}(Z)\right) = f(X) \cap Z$



d) $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$?

$\Rightarrow$

$$x \in \left(X \setminus f^{-1}(Z)\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in X \Rightarrow f(x) \in Y \\ x \notin f^{-1}(Z) \Rightarrow f(x) \notin Z \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \in (Y \setminus Z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(Y \setminus Z)$$

$\Leftarrow$

$$x \in f^{-1}(Y \setminus Z) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \in Y \Rightarrow x \in X \\ f(x) \notin Z \Rightarrow x \notin f^{-1}(Z) \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \left(X \setminus f^{-1}(Z)\right)$$

- En conclusión: $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$

8.

$\underset{(m)}{A} \longrightarrow \underset{(n)}{B}$

a) nº funciones $f: A \to B$

n^m funciones

b) nº funciones inyectivas $f: A \to B$

Necesariamente ha de ser $\boxed{m \leq n}$ y el nº de funcio
inyectivas es: $\frac{m!}{(m-n)!}$

c) (añadido por mi) nº funciones sobreyectivas $f: A \to B$

Necesariamente ha de ser $\boxed{m \geq n}$ y el nº de funciones sobreyectivas es: $\sum_{K=0}^{n-1} (-1)^K \binom{n}{K} (n-K)^m$

d) (añadido por mi) nº funciones ~~sobreyectivas~~ biyectivas $f: A \to B$

Necesariamente ha de ser $\boxed{m = n}$ y el nº de funciones biyectivas es: $m!$ o $n!$ ya que $m = n$.

9. X finito con n elementos

- Subconjuntos $X \times X$?

Subconjuntos $X \times X$ = elementos $\mathcal{P}(X \times X) = 2^{\#\text{elementos } X \times X}$

- $X \times X$ (elementos) $= n.n = n^2$ elementos
- Subconjuntos $X \times X =$ elementos $\mathcal{P}(X \times X) = 2^{n^2}$

- Funciones $X \longrightarrow X \times X$?

- X tiene n elementos
- $X \times X$ tiene n^2 elementos
- Funciones $X \to X \times X = (n^2)^n = n^{2n}$ funciones.

11.) Utilizar la definición de los números combinatorios $\binom{n}{k}$ para probar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Vamos a realizar una demostración por inducción:

- CASO BASE: para $n=1 \Rightarrow (1+x)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1+x = \binom{1}{0} \cdot 1 + \binom{1}{1} x = 1+x$$

- Ahora suponiendo que la propiedad es cierta para n (hipótesis de inducción), vamos a demostrar la veracidad de la propiedad para $n+1$.

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

H.I.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = (1+x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k =$$ Aplicamos la pdad distributiva de la suma

$$1 \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right] + x \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} =$$

Deshacemos los sumatorios para observar la sucesión $= 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \dots + \binom{n}{n} x^n$

$$+ \binom{n}{0} x + \binom{n}{1} x^2 + \binom{n}{2} x^3 + \dots + \binom{n}{n} x^{n+1} =$$

$$= 1 + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] x + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right] x^2 + \dots \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] x^k + \dots$$

$$+ x^{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} x + \binom{n+1}{2} x^2 + \binom{n+1}{3} x^3 + \dots +$$

$$+ \binom{n+1}{k} x^k + \dots + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

Queda demostrado.