UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, grupo 721, 2018-2019

Ejercicios 1 a 7

1. A. Sea $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $\|\cdot\|$ la norma asociada. Demostrar las siguientes identidades:

1. *Identidad del paralelogramo.*
$$\Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|^2 + \Big\|\frac{x-y}{2}\Big\|^2 = \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}\,.$$

2. *Identidad de polarización.*
$$\langle x\,,y\rangle = \Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|^2 - \Big\|\frac{x-y}{2}\Big\|^2 .$$

Interpretar geométricamente estas identidades.

B. Supongamos ahora que E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de una norma $\|\cdot\|$ que satisface la Identidad del Paralelogramo. Teniendo en cuenta la Identidad de Polarización definimos
$$B(x,y) = \Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|^2 - \Big\|\frac{x-y}{2}\Big\|^2 ,$$
que, obviamente, satisface $B(x,x) = \|x\|^2$, así como $B(x\,,y) = B(y\,,x)$ y $B(x,0) = 0$.

1. Demostrar la identidad
$$2\,B(x\,,y) = B(x+z\,,y) + B(x-z\,,y)\,.$$
Comprobar que, en particular, se verifica
$$2\,B(x\,,y) = B(2x\,,y)$$
y también
$$B(x+z\,,y) = B(x\,,y) + B(z\,,y)\,.$$

2. Demostrar que todos los $p\,,q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, satisfacen
$$B(p\,x\,,y) = p\,B(x\,,y)\,, \qquad q\,B(\frac{x}{q}\,,y) = B(x\,,y)\,.$$
Teniendo en cuenta que para cada y fijo la función $x \to B(x,y)$ es continua, concluir que
$$B(\lambda\,x\,,y) = \lambda\,B(x\,,y) \qquad \text{para todo} \quad \lambda\in\mathbb{R}\,,\lambda>0\,.$$

3. Demostrar que todo $\lambda \in \mathbb{R}\,, \lambda < 0$ satisface

$$\lambda\, B(x\,,y) - B(\lambda\, x\,,y) = \lambda\, B(0\,,y) = 0\,.$$

En conclusión, $B(x\,,y)$ es un producto escalar en E y su norma asociada es la norma original $\|\cdot\|$ de E.

2. Considérense las funciones

$$A(x,y) = \max\,\{\,2\,|x|\,,\sqrt{x^2+y^2}\,\}\,,$$

$$B(x,y) = \max\,\{\,|x-y|\,,\,|y|\,\}\,,$$

definidas en $\mathbb{R}^2$.

Demostrar que estas funciones son normas en $\mathbb{R}^2$. Dibujar la bola unidad de cada una de ellas. Comprobar que para $A(x,y)$ la desigualdad triangular no es estricta, incluso para vectores que no son linealmente independientes.

3. Sea (X,d) un espacio métrico.

A. Demostrar que la métrica satisface las siguientes propiedades:

1.
$$\big|d(x,y) - d(y,z)\big| \le d(x,z)\,.$$
En particular, para cada $y \in X$ fijo, la función $d(\cdot\,,y)$ es uniformemente continua en X.

2. Si $x\,,y \in B(c,r)$ entonces $d(x,y) < 2r$.

3. Si $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset$ entonces $d(x,y) < r+s$.

B. Dado un subconjunto A de X, se define

$$\operatorname{dist}(x\,,A) = \inf\big\{\,d(x,a)\ :\ a \in A\,\big\}\,. \tag{1}$$

1. Demostrar que todos los $x,y \in X$ satisfacen
$$\big|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)\big| \le d(x,y)\,.$$
En particular, la función $\operatorname{dist}(\cdot\,,A)$ es uniformemente continua en X.

2. Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $d(x_0,A) > 0$.
Demostrar que si $L \ge 0$ satisface
$$\big|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)\big| \le L\,d(x,y)\,,\qquad \text{para todos los } x\,,y \in X\,,$$
entonces $L \ge 1$.

C.

1. Demostrar que si A es compacto en X, entonces para cada $x \in X$ existe algún $a \in A$ tal que $\operatorname{dist}(x, A) = d(x, a)$.
2. Obśervese que $A \subset \{ x \in X : \operatorname{dist}(x, A) = 0 \}$. Demostrar que A es cerrado si y sólo si

$$\{ x \in X : \operatorname{dist}(x, A) = 0 \} \subset A. \tag{2}$$

4. Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y d una distancia en E.

A. Demostrar que son equivalentes:

1. Existe una norma $\|\cdot\|$ en E tal que $d(x, y) = \|x - y\|$.
2. La función d satisface:

$$\begin{cases} d(\lambda\, x\,, \lambda\, y) = |\lambda|\, d(x\,, y)\,, \\ d(x + z, y + z) = d(x, y)\,, \end{cases} \tag{3}$$

en todos los $x\,, y\,, z \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

B. Comprobar que las funciones

$$d_1(x, y) = \min\, \{1\,, |x - y|\,\}\,,$$
$$d_2(x, y) = |x - y| + \big||x| - |y|\big|$$

son distancias en $\mathbb{R}$ y que definen los mismos abiertos en $\mathbb{R}$ que la distancia estándar $|x - y|$. Estudiar si estas dos distancias satisfacen las identidades en (3).

5. Considérese el espacio vectorial $\mathbb{R}^{m\times n}$ formado por las matrices $m \times n$ de números reales.

A. Demostrar que

$$\langle \mathbf{A}\,, \mathbf{B}\rangle = \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}$$

es un producto escalar. ¿Cuál es, de entre las normas de matrices, la norma asociada a este producto escalar?

Demostrar que

$$\left|\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\right|^2 \le \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} \cdot \operatorname{traza} \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\,.$$

B. Supongamos ahora que $m = n$. Demostrar:

1. $\left|\operatorname{traza} \mathbf{A}\right|^2 \le n \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$.
2. $\operatorname{traza} \mathbf{A}^2 \le \operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$.
3. $$\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{B} \le \frac{\operatorname{traza} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} + \operatorname{traza} \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B}}{2}\,.$$

C. Seguimos suponiendo que $m = n$. Considérense los subespacios vectoriales $\mathcal{S}_n$ y $\mathcal{K}_n$ formados por las matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente.

1. Demostrar que $\mathcal{K}_n$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{S}_n$.
2. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ¿cuál es su proyeccción ortogonal sobre $\mathcal{S}_n$?
3. Calcular la distancia entre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y el subespacio $\mathcal{S}_n$.

6. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} ,$$

donde $1 \le p < +\infty$.

A. Dados $1 \le p < q < +\infty$, demostrar:

1. Si $\|x\|_p = 1$, entonces $\|x\|_q \le 1$.
2. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se verifica

$$\|x\|_q \le \|x\|_p .$$

B. Demostrar que para todo $0 < \alpha < 1$ se verifica

$$\big|a^\alpha - b^\alpha\big| \le |a - b|^\alpha , \qquad \text{en todos los } 0 < a\,, b \in \mathbb{R} .$$

C. Sea ahora

$$\|x\|_\infty = \max \big\{ \, |x_i| \; : \; i = 1, 2, \ldots, n \, \big\} .$$

Demostrar que todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty .$$

7. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea y sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, propio y no-vacío.

A. Supongamos que K es cerrado y sea $x_0 \notin K$. Demostrar que existe $k \in K$ tal que

$$\|x_0 - k\| \le \|x_0 - \xi\| \qquad \text{para todo} \quad \xi \in K .$$

Es decir, este $k \in K$ satisface

$$\|x_0 - k\| = \operatorname{dist}(x_0\,, K) .$$

B. Supongamos que K es, además, convexo y consideremos el subespacio

$$H_k = \big\{ \, \xi \in \mathbb{R}^n \; : \; \langle \xi - k\,, x_0 - k \rangle \le 0 \, \big\} .$$

Demostrar que $K \subset H_k$.