Teoría de la integral y de la medida

Hoja 7 *(medidas y σ-álgebras producto, medidas inducidas, el Teorema de Fubini)*

1.- Sea $d\nu$ la medida definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ por medio de

$$\nu(A) = \text{card}(A \cap \mathbb{Z}^2), \quad \forall A \subset \mathbb{R}^2.$$

Es decir, $d\nu$ es la medida que "cuenta" el número de puntos de coordenadas enteras que hay en un conjunto. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Si $d\nu_\phi$ es la medida inducida por $d\nu$ y ϕ en $\mathbb{R}$, calcular $\quad \nu_\phi([1,e]) \quad$ y $\quad \nu_\phi((e^2,e^3])$.

SOL: Por definición, $\quad \nu_\phi([1,e]) = \nu(\{(x,y) : \phi(x,y) \in [1,e]\}), \quad$ es decir, $\nu_\phi([1,e]) = \nu(\{(x,y) : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\}) =$ número de puntos de coordenadas enteras en el disco unidad $= 5$.

Por otro lado, $\nu_\phi((e^2,e^3]) = \nu(\{(x,y) : 2 < x^2+y^2 \leq 3\}) = \nu(\{(x,y) : \sqrt{2} < \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{3}\}) =$ número de puntos de coordenadas enteras en el anillo exterior al disco cerrado de radio $\sqrt{2}$ e interior al disco cerrado de radio $\sqrt{3}$. Este conjunto es el vacío (porque los puntos relevantes son $(0,0), (0,\pm1)$, $(\pm1,0)$, $(0,\pm2)$, $(\pm2,0)$, $(\pm1,\pm1)$ y todos están fuera de ese anillo). Por tanto $\nu_\phi((e^2,e^3]) = 0$.

2.- Si consideramos en $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ la medida de área de Lebesgue habitual, dm, y si $\varphi(x_1,x_2) = x_1 + x_2$, o $\varphi(x_1,x_2) = |x_1 - x_2|$, demostrar que las medidas inducidas dm_φ son medidas de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ y encontrar, en cada caso, la función de distribución.

SOL: Empezamos con el caso $\varphi(x_1,x_2) = |x_1 - x_2|$. De nuevo por definición, se tiene para un subconjunto Borel $A \subset \mathbb{R}$:

$$dm_\varphi(A) = m([0,1] \times [0,1] \cap \{(x_1,x_2) : |x_1 - x_2| \in A\}).$$

Como todos estos valores son finitos, deducimos que la medida inducida es de Lebesgue-Stieltjes y su función de distribución viene dada por:

$$F(t) = \begin{cases} -dm_\varphi((t,0]), & \text{si } t < 0, \\ 0, & \text{si } t = 0, \\ dm_\varphi((0,t]), & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Ahora bien, si $t < 0$ el conjunto $[0,1] \times [0,1] \cap \{(x_1,x_2) : |x_1 - x_2| \in (t,0]\}$ consta solo de la diagonal del cuadrado unidad y por tanto $F(t) = 0$. Por otro lado, si $0 < t < 1$, entonces el conjunto $[0,1] \times [0,1] \cap \{(x_1,x_2) : 0 < |x_1 - x_2| \leq t\}$ es la región comprendida dentro del cuadrado unidad y entre las dos rectas de $\mathbb{R}^2$ dadas por $x_2 = x_1 - t$ y $x_2 = x_1 + t$. Esto no da $F(t) = 1 - (1-t)^2 = 2t - t^2$. Finalmente, si $t \geq 1$ se tiene que el conjunto anterior es todo el cuadrado unidad (menos la diagonal) y por tanto $F(t) = 1$. Es decir,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ 2t - t^2, & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

NOTA: ver también los exámenes parciales 3 de los cursos 2007-08 y 2008-09.

Ejercicio 1 del Parcial 3, 2007-08 Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $dm = dx\,dy$ la medida de Lebesgue en X. Definimos $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de $\Phi(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Sea m_Φ la medida inducida por Φ y m en $\mathbb{R}$.

a- Calcular el valor de $m_\Phi([0,1])$

b- Demostrar que m_Φ tiene la forma $dm_\Phi(y) = W(y)\,dy$ y encontrar $W(y)$ explícitamente.

SOL: **1.a-** Por definición, $m_\Phi([0,1]) = m(\Phi^{-1}([0,1]))$. Ahora bien,

$$\Phi^{-1}([0,1]) = \{(x,y) : \Phi(x,y) \in [0,1]\} = \{(x,y) : 0 \leq \ln(x^2+y^2) \leq 1\} = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq e\}.$$

Se trata por tanto del anillo con radio interior 1 y radio exterior $\sqrt{e}$ de donde se deduce

$$m_\Phi([0,1]) = m(\Phi^{-1}([0,1])) = e\pi - \pi = (e-1)\pi.$$

1.b-

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\,dm_\Phi(y) = \int\int_X f(\ln(x^2+y^2))dx\,dy \overset{polares}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(\ln r^2) r dr d\theta$$
$$= 2\pi \int_0^\infty f(\ln r^2) r dr \overset{y=\ln r^2}{=} 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{y/2} \frac{1}{2} e^{y/2} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \pi e^y dy.$$

Luego $W(y) = \pi e^y$.

Ejercicio 2 del Parcial 3, 2008-09 Se considera sobre los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^2$ la medida de Lebesgue m y la función $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (0,1]$ dada por $\phi(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Si dm_ϕ denota la medida inducida por ϕ y m sobre los Borel de $(0,1]$,

- Probar que $dm_\phi([a,b]) = \pi \log \frac{b}{a}$, si $0 < a < b \leq 1$.
- Deducir que $\forall A \subset (0,1]$ Borel se tiene

$$m_\phi(A) = \pi \int_A \frac{1}{t} dt.$$

SOL: Por definición, $m_\phi(A) = m(\phi^{-1}(A))$, $\forall A$ Borel de $(0,1]$.
En particular, como
$\phi^{-1}([a,b]) = \{(x,y) : a \leq e^{-(x^2+y^2)} \leq b\} = \{(x,y) : \log\frac{1}{b} \leq x^2+y^2 \leq \log\frac{1}{a}\}$
es el anillo de radio interior $\sqrt{\log\frac{1}{b}}$ y radio exterior $\sqrt{\log\frac{1}{a}}$, se tiene

$$dm_\phi([a,b]) = \pi \log\frac{1}{a} - \pi\log\frac{1}{b} = \pi\log\frac{b}{a}.$$

Llamando $d\nu(t) = \pi\frac{1}{t}dt$ tenemos que tanto dm_ϕ como $d\nu$ son σ-finitas sobre los Borel de $(0,1]$ y coinciden en los intervalos de la forma $[a,b]$ puesto que

$$d\nu([a,b]) = \pi \int_a^b \frac{1}{t} dt = \pi \log\frac{b}{a}.$$

Por lo tanto coinciden en la mínima σ-álgebra que los contiene. Esto prueba el tercer apartado, que también podemos obtener de forma analítica usando la propiedades de la medida inducida y el teorema del cambio de variables: Dada f medible y positiva

$$\int_{(0,1]} f\,dm_\phi = \int_{\mathbb{R}^2} f(e^{-(x^2+y^2)})\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(e^{-r^2}) r dr d\theta$$
$$= 2\pi\int_0^\infty f(e^{-r^2}) r dr = \pi \int_o^1 f(t)\frac{1}{t} dt,$$

donde, en la última igualdad, hemos hecho el cambio $t = e^{-r^2}$.

3.- Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ, ν las medidas de contar en $\mathbb{N}$. Probar que $d(\mu \times \nu)$ es la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Si definimos

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \qquad\qquad\qquad m = n \\ -1 & \text{si} \qquad\qquad\qquad m = n+1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

comprobar que $\displaystyle\int |\, f \,|\, d(\mu \times \nu) = \infty$, y $\displaystyle\int (\int f d\mu) d\nu$, $\quad \displaystyle\int (\int f d\nu) d\mu)$ existen y son distintas.

SOL: En primer lugar $\{m\}, \{n\} \in \mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego $\{m\} \times \{n\} = \{(m,n)\} \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Además, todo $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pertenece a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ por ser la unión numerable de sus puntos. Se concluye por tanto que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
Por otro lado, $d(\mu \times \nu)(\{m\} \times \{n\}) = \mu(\{m\})\, \nu(\{n\}) = 1$ y
$d(\mu \times \nu)(A) = \displaystyle\sum_{(m,n) \in A} 1 = \operatorname{card}(A)$.
Esto nos dice que $d(\mu \times \nu)$ es la medida de contar en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
En particular, cualquier función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es medible y

$$\iint_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} f\, d(\mu \times \nu) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} f(m,n), \qquad \text{(si existe).}$$

Si f es la función dada,

$$\iint |\, f \,|\, d(\mu \times \nu) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} |f(m,n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{n+1} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \infty,$$

mientras que

$$\int (\int f d\mu) d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(n,n) + f(n+1,n)) = 0,$$

y

$$\int (\int f d\nu) d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) \right) = f(1,1) + \sum_{m=2}^{\infty} (f(m,m-1) + f(m,m)) = f(1,1) + 0 = 1.$$

4.- Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ $\quad (Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{M}$ medible; $g : Y \to \mathbb{R}$, $\mathcal{N}$ medible y h definida mediante $h(x,y) = f(x) g(y)$.

a). Demostrar que h es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ medible

b). Si $f \in L^1(\mu)$ $\quad$ y $\quad g \in L^1(\nu)$ $\quad$ entonces $\quad h \in L^1 d(\mu \times \nu)$ y además

$$\int_{X \times Y} h\, d(\mu \times \nu) = \left(\int_X f\, d\mu \right) \left(\int_Y g\, d\nu \right)$$

Sugerencia: empezar con funciones simples.

SOL: a) Esta es la parte más delicada. Siguiendo la sugerencia, supongamos que f y g son ambas funciones simples; es decir $f(x) = s(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k\, \chi_{A_k}(x)$, con $A_k \in \mathcal{M}$ y
$g(y) = t(y) = \sum_{j=1}^{J} d_j\, \chi_{B_j}(y)$, con $B_j \in \mathcal{N}$. Entonces, $h(x,y) = s(x) t(y)$ es medible porque

$$h(x,y) = s(x) t(y) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} c_k\, d_j \chi_{A_k}(x)\, \chi_{B_j}(y) = \sum_{k,j=1}^{K,J} c_k\, d_j \chi_{A_k \times B_j}(x,y),$$

con $A_k \times B_j \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, es una función simple de la σ-álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.
Para terminar usamos que, por ser f y g medibles en sus respectivas σ-álgebras, existen sucesiones de funciones simples $\{s_n(x)\}_n$ y $\{t_n(y)\}_n$ que convergen puntualmente a f y g respectivamente. Como $\lim_{n\to\infty} s_n(x)\, t_n(y) = f(x)\, g(y), \forall x, y$ deducimos que $h(x,y) = f(x)g(y)$ es medible.

b) Este apartado es una consecuencia del Teorema de Fubini ya que las secciones de h son $h_x(\cdot) = f(x)g(\cdot)$ y $h^y(\cdot) = f(\cdot)g(y)$ y

$$\iint_{X\times Y} |h|\, d(\mu \times \nu) = \left(\int_X |f|\, d\mu\right)\left(\int_Y |g|\, d\nu\right) < \infty.$$

5.- Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M}$-medible, $f \geq 0$, y sea $A_f = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

a) Probar que $A_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$). Sugerencia: empezar con f simple.

b) Dada una medida μ en $(X, \mathcal{M})$ σ-finita, probar que $\displaystyle\int_X f\, d\mu$ coincide con la medida producto $\pi = d\mu \otimes dy$ del conjunto A_f.

SOL: a) Si empezamos con la función simple $f(x) = s(x) = \sum_{k=1}^K c_k\, \chi_{B_k}(x)$, con $B_k \in \mathcal{M}$ disjuntos y $c_k > 0$, se tiene $A_s = \sum_{k=1}^K B_k \times [0, c_k)$ que claramente es $\mathcal{M}\otimes\mathcal{B}$-medible porque $B_k \times [0, c_k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}$. Además (con $dy = dm$ la medida usual de Lebesgue)

$$d(\mu \times m)(A_s) = \sum_{k=1}^K \mu(B_k) \cdot c_k = \int_X s\, d\mu.$$

Para la f dada, elegimos (*lema técnico*) una sucesión creciente de funciones simples positivas $\{s_n(x)\}_n$ con $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \forall x$. Entonces $A_f = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_{s_n}$, luego A_f es medible.

b) Por el TCM se cumple

$$d(\mu \times \nu)(A_f) = \lim_{n\to\infty} d(\mu \times \nu)(A_{s_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu, \qquad \text{q.e.d.}$$

6.- Sea $X = Y = [0,1]$, $\quad \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]}$ (álgebra de Borel en [0,1]), μ la **medida de Lebesgue** en $\mathcal{A}_1$, ν la **medida de contar** en $\mathcal{A}_2$. En el espacio de medida
$(X \times Y, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu \otimes \nu)$ se considera el conjunto $V = \{(x,y) : x = y\}$. Comprobar que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Sin embargo $\displaystyle\int_Y d\nu \int_X \chi_V d\mu = 0; \quad \int_X d\mu \int_Y \chi_V d\nu = 1.$

Sugerencia: Si $V_n = (I_1^j \times I_1^j) \cup \ldots \cup (I_n^j \times I_n^j)$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \ldots 2^n$, entonces $V = \cap_1^\infty V_n$. (Esto muestra que la hipótesis de que las medidas sean σ-finitas no se puede quitar).

SOL: Como cada $V_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, y V es la intersección numerable de ellos, se tiene $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ también. Además, si $\mu = m$ es la medida de Lebesgue tenemos para $y \in [0,1]$

$$\int_X \chi_V(x,y) d\mu(x) = \int_{\{y\}} 1\, dm = m(\{y\}) = 0, \text{ luego } \int_Y \left(\int_X \chi_V(x,y) d\mu(x)\right) d\nu(y) = 0,$$

mientras que, si $x \in [0,1]$,

$$\int_Y \chi_V(x,y) d\nu(y) = \nu(\{x\}) = 1, \quad \text{luego} \quad \int_X \left(\int_Y \chi_V(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_0^1 1\, dx = 1.$$

7.- Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Comprobar que $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\frac{\pi}{4}$, $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=-\frac{\pi}{4}$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el teorema de Fubini?

SOL: Hecho en clase. Ver los apuntes de clase del Capítulo 5.

8.- Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad -1\leq x\leq 1 \quad -1\leq y\leq 1 \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad x=y=0\end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas (con respecto a la medida de Lebesgue) coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en $[-1,1]\times[-1,1]$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el Teorema de Fubini?

SOL: Las integrales iteradas valen 0 porque tanto f_x como f^y son integrables (continuas y acotadas), impares y el dominio de integración es simétrico. f no es integrable porque

$$\iint_{[-1,1]\times[-1,1]}|f(x,y)|dxdy=4\int_0^1\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy=2\int_0^1\frac{1}{y(1+y^2)}dy=\infty.$$