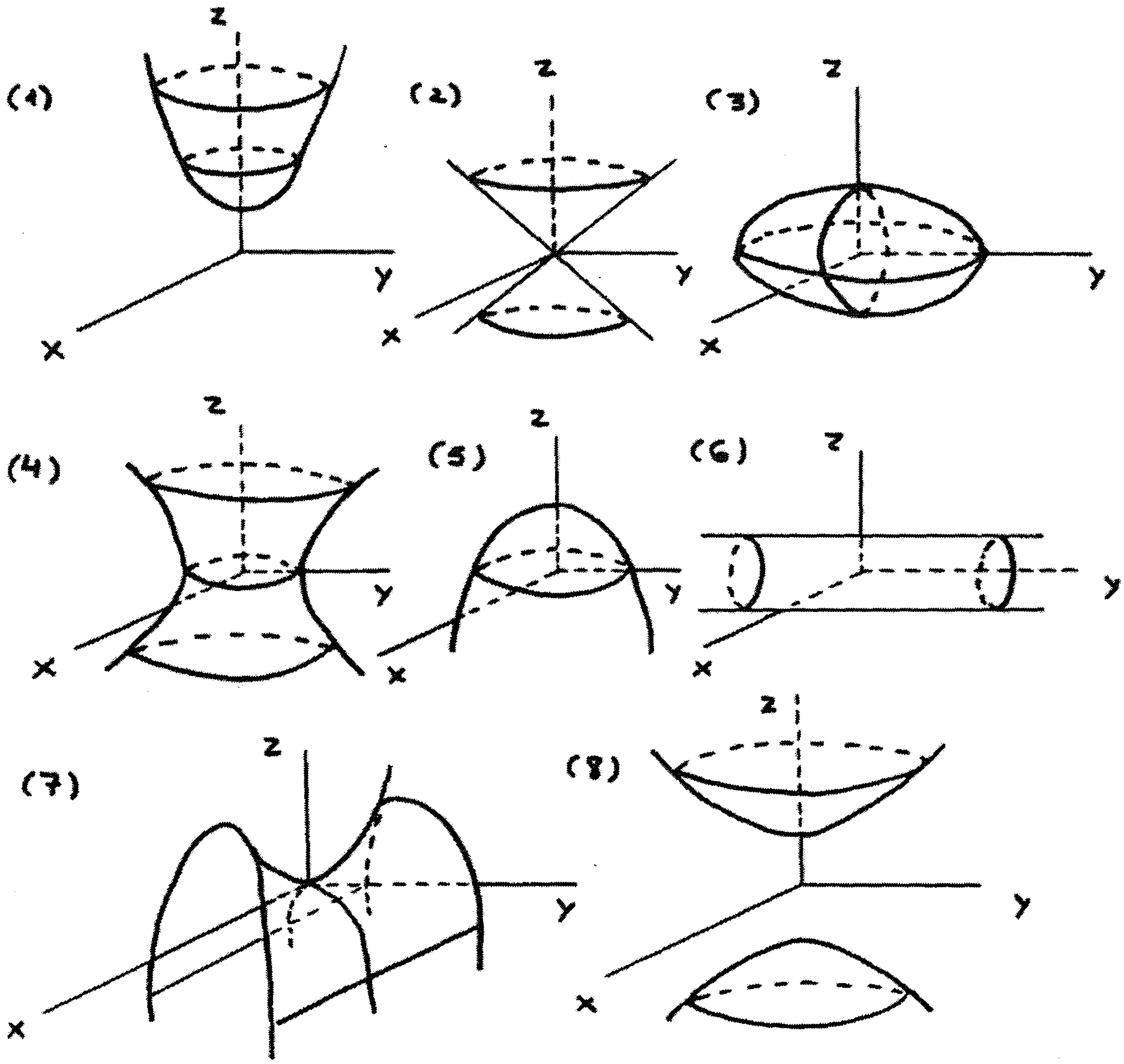
Hoja 0: pasatiempo

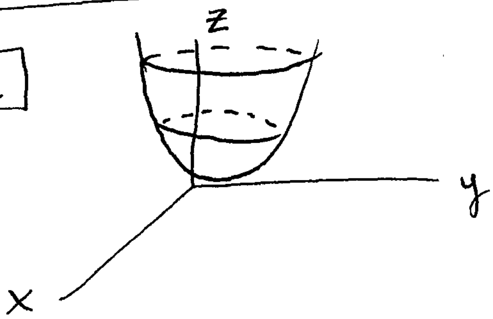


Emparejar cada uno de los 8 dibujos con su correspondiente ecuación.

(a) $z = 1 - x^2 - y^2$.	(b) $z = x^2 + y^2 + 1$.	(c) $x^2 + z^2 = 4$.
(d) $z^2 = x^2 + y^2$.	(e) $z = x^2 - y^2$.	(f) $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.
(g) $z^2 = 1 + x^2 + y^2$.	(h) $z^2 = x^2 + y^2 - 1$.	

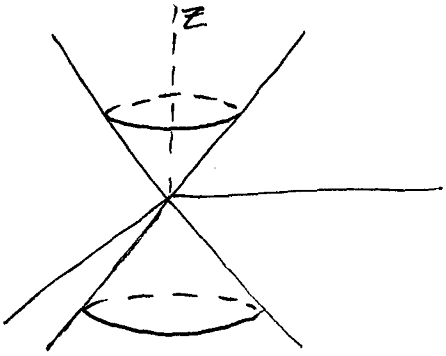
HOJA 0: pasatiempo

$\boxed{1}$



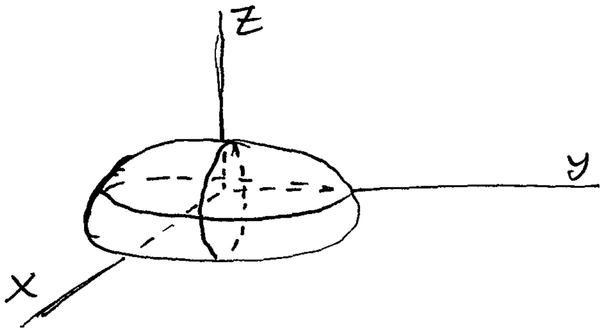
$$\boxed{z = x^2 + y^2 + 1}$$

$\boxed{2}$



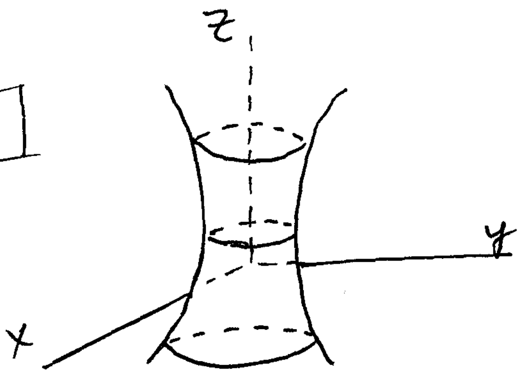
$$\boxed{z^2 = x^2 + y^2}$$

$\boxed{3}$



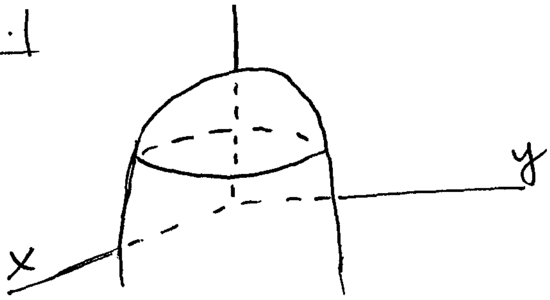
$$\boxed{4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16}$$

$\boxed{4}$



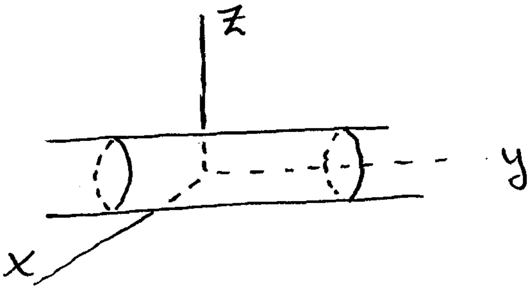
$$\boxed{z^2 = x^2 + y^2 - 1}$$

5.



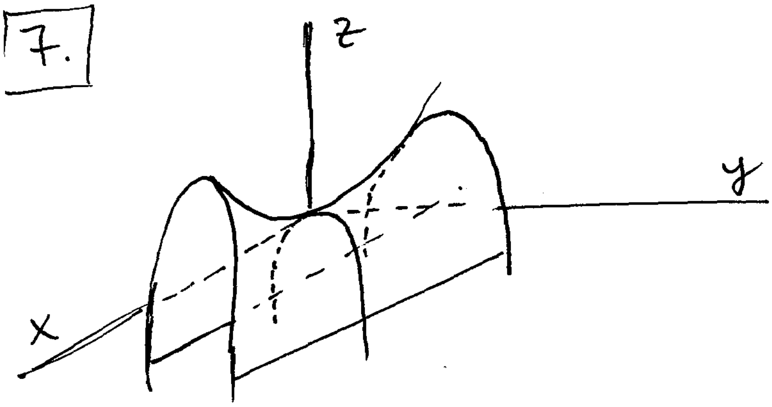
$$\boxed{z = 1 - x^2 - y^2}$$

6.



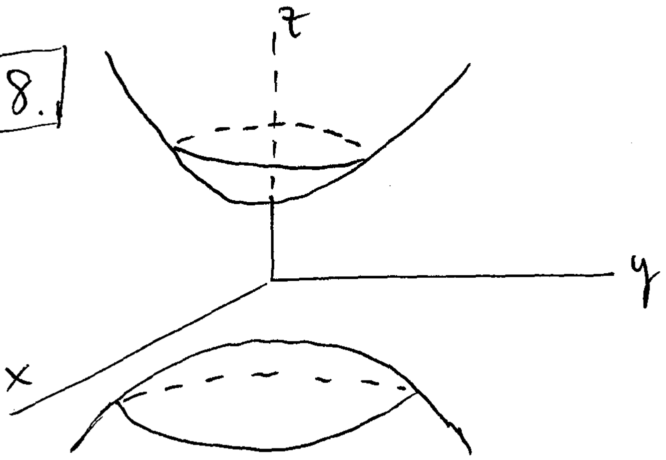
$$\boxed{x^2 + z^2 = 4}$$

7.



$$\boxed{z = x^2 - y^2}$$

8.



$$\boxed{z^2 = 1 + x^2 + y^2}$$

Cálculo II.
1º de Grado en Matemáticas y Doble Grado Informática-Matemáticas. Curso 2016-17.
Departamento de Matemáticas

Hoja 1

Introducción al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

(*) LEMA: Sean $x, y \perp u$ y $z = \alpha x + \beta y$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ $z \perp u$.
Dem: $\langle z, u\rangle = \langle \alpha x + \beta y, u\rangle = \langle \alpha x, y\rangle + \langle \beta y, u\rangle = \alpha \langle x, y\rangle + \beta\langle y, u\rangle$ 0 0 $= 0$

1.- Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

(b) $\|x-y\| \cdot \|x+y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(c) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x+y\| = \|x-y\|$.

(d) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$.

2.- (a) Determinar todos los valores posibles del parámetro real λ para que los vectores $\lambda\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ y $\lambda\mathbf{i}+\mathbf{j}-\lambda\mathbf{k}$ (en $\mathbb{R}^3$) sean ortogonales.

(b) Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $\mathbf{x} = (4, b, 1)$ e $\mathbf{y} = (a, b, 0)$ sean ortogonales en $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál es el lugar geométrico, en el plano ab, determinado por tales a y b?

(c) Hallar dos vectores ortogonales a $(1,1,1)$ que no sean paralelos entre sí. ¿Se pueden elegir dos que sean también mutuamente ortogonales? (*)

3.- (a) Sean $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Determinar el ángulo entre los vectores $u = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $v = \sqrt{5/3}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) Lo mismo para el ángulo entre los vectores $(1,-1,0)$ y $(0,1,-1)$.

(c) Explicar la diferencia entre los valores $\|3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\| \cdot \|2\mathbf{j} + \mathbf{k}\|$ y $|(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} + \mathbf{k})|$. ¿Puede decidirse que ambos valores son diferentes, sin necesidad de calcularlos explícitamente?

4.- Calcúlese el coseno del ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.

5.- Comprobar que las siguientes funciones tienen todas las propiedades que se requieren de una métrica en $\mathbb{R}^n$:

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k|, \qquad d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.$$

6.- Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y cóncava con $f(0) \geq 0$.

(a) Demuestre que $f(tx) \geq tf(x)$ para todos $x \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$;

(b) Use lo anterior para demostrar que f es subaditiva, es decir, $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

(c) Deduzca que las funciones $d(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \|x-y\|$ y $\delta(x,y) = \dfrac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}$ definen sendas métricas en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

7.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^2$ cuando

$$x_k = \Big(\frac{\ln k}{k}, k^{1/k}\Big), \quad x_k = \Big(\sqrt{k^2+2} - k, \frac{(-1)^k}{k}\Big), \quad x_k = \Big(\frac{\operatorname{sen} k}{k}, k(e^{1/k} - 1)\Big).$$

8.- Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, se pide hallar su frontera y decidir si es abierto o cerrado.

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\big\}, \quad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\big\}.$$

9.- Determinar el cierre, el interior y la frontera de los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < 1\}, \qquad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1,\, x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$$

10.- (a) Sea A el conjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión del segmento horizontal $I_0 = \{(x,0) : 0 \le x \le 1\}$ y los segmentos verticales cerrados I_n de altura 1 y de extremo inferior $P_n = (1/n, 0)$, $n = 1,2,3,\dots$ Demostrar que A no es cerrado (Indicación: falta el segmento vertical en $x=0$).

(b) Sea

$$B = \Big\{\Big(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le 1\Big\}.$$

Demostrar que B no es cerrado. (Indicación: utilizar la caracterización de cerrados por medio de sucesiones).

11.- Demostrar que la unión arbitraria de abiertos es abierta. Mediante un ejemplo, comprobar que aunque sea abierto cada A_i de una familia infinita $\{A_i\}_i$, la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ no es necesariamente un conjunto abierto. ¿Qué ocurre con las familias de conjuntos cerrados?

12.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son compactos? Razonar la respuesta.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \le 1,\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\}, \qquad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| = 1\}.$$

13.- Decimos que x es un *punto de acumulación* de $E \subset \mathbb{R}^n$ si toda bola abierta de centro x contiene un punto de E distinto de x. Escribimos E' para denotar al conjunto de puntos de acumulación de E.

(a) Dado el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por $A = \left\{\frac{1}{k} : k = 1,2,\dots\right\}$, hallar A'. Lo mismo para $A = \mathbb{Q}$.

(b) Determinar los conjuntos A' y $\overline{A}$ para $A = \{(0,2)\} \cup \big([0,1] \times [0,1)\big) \subset \mathbb{R}^2$.

(c) Probar que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.

(d) Probar que $\overline{E} = E \cup E'$.

14.- Probar que $\mathbb{R}^2$ es completo (es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente), siguiendo los pasos indicados. (Este razonamiento se puede generalizar a $\mathbb{R}^N$, $N \ge 2$.)

(a) Probar que $\max\{|a|,|b|\} \le \|(a,b)\| \le \sqrt{2}\,\max\{|a|,|b|\}$.

(b) Sea $\{v_n\}_k$ una sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que $v_n = (a_n, b_n)$. Probar que $\{v_n\}_n$ es de Cauchy si y sólo si las sucesiones de números reales $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$.

(c) Usando que $\mathbb{R}$ es completo, concluir que $\mathbb{R}^2$ es completo.

HOJA 1: INTRODUCCIÓN AL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$

$\boxed{1.}$ Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera, probar:

$\boxed{|x|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x} = \langle x,x\rangle}$

a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ → IDENTIDAD DEL PARALELOGRAMO

- $|x+y|^2 = \overrightarrow{x+y}\cdot\overrightarrow{x+y} = \underbrace{\vec{x}\cdot\vec{x}}_{|\vec{x}|^2} + \underbrace{\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{x}}_{2\vec{x}\cdot\vec{y}} + \underbrace{\vec{y}\cdot\vec{y}}_{|\vec{y}|^2}$

- $|x-y|^2 = \overrightarrow{x-y}\cdot\overrightarrow{x-y} = \underbrace{\vec{x}\cdot\vec{x}}_{|\vec{x}|^2} + \underbrace{-\vec{x}\cdot\vec{y} + -\vec{y}\cdot\vec{x}}_{-2\vec{x}\vec{y}} + \underbrace{\vec{y}\cdot\vec{y}}_{|\vec{y}|^2}$

$\rightarrow |x+y|^2 + |x-y|^2 = |\vec{x}|^2 + \cancel{2\vec{x}\cdot\vec{y}} + |\vec{y}|^2 + |\vec{x}|^2 + \cancel{(-2\vec{x}\vec{y})} + |\vec{y}|^2 =$

$= 2|\vec{x}|^2 + 2|\vec{y}|^2$

b) $\|x-y\|\cdot\|x+y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

Usando lo probado en el (a) sabemos:

$\underbrace{|x-y|^2\cdot|x+y|^2}_{C^2} = (\underbrace{|x|^2+|y|^2}_{A} \underbrace{-}_{-} \underbrace{2\langle x,y\rangle}_{B})(\underbrace{|x|^2+|y|^2}_{A} \underbrace{+}_{+} \underbrace{2\langle x,y\rangle}_{B}) =$

Con $C = |x-y|\cdot|x+y|$; $C^2 = \underset{\geq 0}{A^2} - \underset{\geq 0}{B^2} \leq A^2 = (|x|^2 + |y|^2)$

Así pues, hemos probado $C^2 \leq A^2 \Rightarrow C \leq A$ con $C, A \geq 0$.

c) $\langle x,y\rangle = 0 \iff \|x+y\| = \|x-y\|$

$\Updownarrow$

$x \perp y$ "x es ortogonal a y"

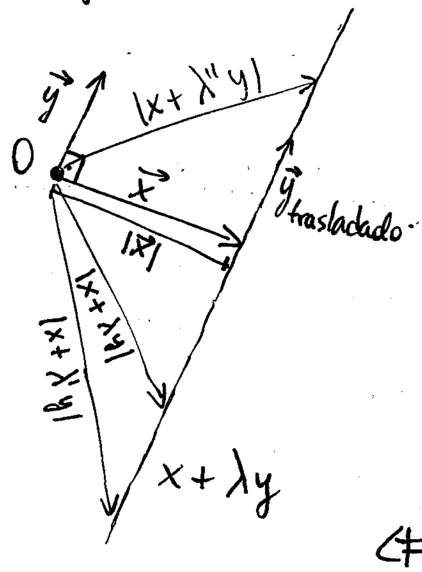
De nuevo, usando lo probado en (a).

$$\left.\begin{array}{l} 2\langle x,y\rangle = |x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2 \\ 2\langle x,y\rangle = |x-y|^2 - |x|^2 - |y|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\langle x,y\rangle = |x+y|^2 - |x-y|^2$$

Si $\langle x,y\rangle = 0 \iff |x+y|^2 - |x-y|^2 = 0 \iff |x+y|^2 = |x-y|^2 \iff$

$\iff |x+y| = |x-y|$ porque $|x \pm y| \geq 0$ porque es el módulo de un vector

d) $\langle x,y\rangle = 0 \iff \|x + \lambda y\| \ldots$



Pasa esto $\iff \vec{y} \perp \vec{x} \iff \langle x,y\rangle = 0$

<u>Dem</u>: $|x+\lambda y| \geq |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \iff$

$\iff |x+\lambda y|^2 \geq |x|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \iff$

$\iff |x|^2 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \iff$

$\iff |x|^2 \leq |x|^2 + \lambda^2 |y|^2 + 2\lambda \langle x,y\rangle \iff$

$$\iff 0 \leq \underbrace{\lambda^2 |y|^2 + 2\lambda \langle x,y\rangle}_{\equiv \varphi(\lambda)}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \|x+\lambda y\| \geq \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- Si $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda) = \lambda^2 |y|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\|x+\lambda y\| \geq \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0$

Vemos que si $\varphi(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0$

- <u>caso 1:</u> Sea $\langle x,y\rangle \neq 0$ y $\langle x,y\rangle > 0$

Entonces $\varphi(\lambda) = \underbrace{2\lambda \langle x,y\rangle}_{<0 \text{ si } \lambda<0} \underbrace{\left[1 + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\|y\|^2}{2\langle x,y\rangle}\right]}_{>0 \text{ si } 1+\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\|y\|^2}{\langle x,y\rangle} > 0}$

si $\lambda < 0$ y $|\lambda|$ es suficientemente pequeño, $\varphi(\lambda) < 0$ (contradicción)

e) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$

OS: Esta desigualdad implica que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es continua en todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Dem: Recordemos la desigualdad triangular: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

Entonces: $|x| - |y| = |(x-y)+y| - |y| \leq (|x-y| + |y|) - |y| = |x-y| \quad (1)$

Asimismo: $|x| - |y| = |x| - |(y-x)+x| \geq |x| - (|y-x| + |x|) = |x| - (|x-y| + |x|) = -|x-y| \quad (2)$

$|v| = |-v|$

Con (1) y (2) $\Rightarrow -|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y| \Rightarrow \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x-y|$

$\boxed{2.}$ a) Determinar $\lambda \in \mathbb{R}$ para que $\underbrace{\lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}_{\vec{u}} \perp \underbrace{\lambda\vec{i} + \vec{j} - \lambda\vec{k}}_{\vec{v}}$

Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

$\langle u, v \rangle = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1} \wedge \boxed{\lambda = 2}$

b) Hallar a y b para que $\vec{x} = (4, b, 1)$ e $\vec{y} = (a, b, 0)$ sean ortogonales. ¿Lugar geométrico en el plano al de tales valores?

$\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 4a + b^2 = 0$ (parábola en el plano ab)

c) Hallar 2 vectores en $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1,1,1)$ que no sean paralelos entre sí. ¿Se pueden elegir perpendiculares?

Sean $\begin{cases} x = (-1, 1, 0) \perp (1,1,1) \\ y = (0, 1, -1) \perp (1,1,1) \end{cases} \quad \langle x, y \rangle = 1 \neq 0$

Buscamos $z = x + \alpha y$ con $\vec{x} \perp \vec{z} \Rightarrow \vec{x} \cdot \overrightarrow{x + \alpha y} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{|x|^2}_{2} + \alpha \underbrace{\langle x, y \rangle}_{1} \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$; $z = x - 2y = (-1, -1, 2) \perp \vec{x}$

Por otra parte, $z \perp (1,1,1)$ porque z es una combinación lineal de vectores ortogonales a $(1,1,1)$

5.| Probar que son distancias ...

a) $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k|$ b) $d_1(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

OBSERVACIÓN: La distancia euclídea es $d_2(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$

Si $1 \leq p \leq \infty$, $d_p(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$

Una distancia debe cumplir 3 propiedades (axioma de la distancia)

i) Positividad: $d(x,y) \geq 0$ y es igual a cero $\Leftrightarrow$ $x = y$.

ii) Simetría: $\forall x,y$, $d(x,y) = d(y,x)$

iii) (Desigualdad triangular): $\forall x,y,z$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

a) Veamos d_∞:

i) (Positividad) Es claro que $d_\infty(x,y) \geq 0$ $\forall x,y$ (valor absoluto)

$d_\infty(x,y) = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k| = 0$

Si $1 \leq k \leq n$, $0 \leq |x_k - y_k| \leq \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k - y_k| = 0$ $\forall k = 1,\dots,n$

$\Leftrightarrow |x_k - y_k| = 0$ $\forall k = 1,\dots,n$

$\Leftrightarrow x = y$

ii) (Simetría) $d_\infty(y,x) = \max\limits_{1\leq k\leq n} |y_k - x_k| = \max\limits_{1\leq k\leq n} |-(x_k - y_k)| =$

$= \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k| = d_\infty(x,y)$

iii) (Desigualdad triangular): Sean $x,y,z \in \mathbb{R}^n$:

$d(x,z) = \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k - z_k| = \max\limits_{1\leq k\leq n} |(x_k - y_k) + (y_k - z_k)| \leq$

$\leq \max\limits_{1\leq k\leq n} \left[|x_k - y_k| + |y_k - z_k| \right] \leq d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$

b) Veamos d_1:

i) (Positividad): $d_1(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y$ (valor absoluto)

$$d_1(x,y)=0 \iff \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i-y_i|}_{\geq 0} = 0 \iff \begin{array}{l} x_1-y_1=0 \\ x_2-y_2=0 \\ \vdots \\ x_n-y_n=0 \end{array} \iff x=y$$

ii) (Simetría): $d_1(y,x) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = \sum_{i=1}^{n} |-(x_i-y_i)| =$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = d_1(x,y)$$

iii) (Desigualdad triangular): Si $x,y,z \in \mathbb{R}^n$

$$d_1(x,z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|(x_i-y_i)+(y_i-z_i)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i| + |y_i-z_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i-z_i| =$$

$$d_1(x,y) + d_1(y,z)$$

$\boxed{6.}$ Sea $f: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C y cóncava con $f(0) \geq 0$.

a) Probar que si $x \geq 0$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $f(tx) \geq t f(x)$

Como f es cóncava en $[0,\infty)$, dado $x \geq 0$ y $0 \leq t \leq 1$

$$f(tx) = f(tx + (1-t).0) \underset{\substack{\text{cóncava} \\ f \text{ por encima} \\ \text{de la cuerda}}}{\geq} t f(x) + \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \underbrace{f(0)}_{\geq 0} \geq t f(x).$$

b) Probar que f es subaditiva $(f(a+b) \leq f(a) + f(b))$

- Si $a=0$ ó $b=0$

$$f(a+0) = f(a) \leq f(a) + \underbrace{f(0)}_{\geq 0}$$

- Si $a,b > 0 \Rightarrow a+b > 0$

$$f(a) = f\Big(\underbrace{\frac{a}{a+b}}_{\in(0,1)}(a+b)\Big) \geq \frac{a}{a+b} \cdot f(a+b) \quad [1]$$

$$f(b) = f\Big(\underbrace{\frac{b}{a+b}}_{\in(0,1)}(a+b)\Big) \geq \frac{b}{a+b} \cdot f(a+b) \quad [2]$$

Sumando [1] y [2] $\quad f(a) + f(b) \geq \underbrace{\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right)}_{=1} f(a+b)$

c) Deducir que $d(x,y) = \text{arctg}\,\|x-y\|$ y $\delta(x,y) = \frac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}$ son distancia en $\mathbb{R}^n$.

d y δ son de la forma $f(\|x-y\|)$ con $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f(t) = \text{arctg}\, t$ (para d) y $g(t) = \frac{t}{1+t}$ (para δ)

Esas funciones son ≥ 0 (en $[0,\infty)$) y se anulan si y solo si $t=0$.

En particular, la positividad y la simetría de d y δ son inmediatas.

En cuanto a la desigualdad triangular, se deduce si podemos probar que f y g son <u>subaditivas</u> y <u>no decreciente</u>

p. ej: $d(x,z) = f(\|x-z\|) = f(\underbrace{\|(x-y)+(y-z)\|}_{\leq \|x-y\|+\|y-z\|}) \underset{\substack{f \text{ no} \\ \text{decreciente}}}{\leq} f(\underbrace{\|x-y\|}_{\geq 0} + \underbrace{\|y-z\|}_{\geq 0}) \leq$

$\underset{f \text{ subadichiva}}{\leq} f(\|x-y\|) + f(\|y-z\|) = d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,y)$: $f'(t) = (\text{arctg}\, t)' = \frac{1}{1+t^2} > 0 \Rightarrow f$ es de hecho, <u>creciente</u> en $[0,\infty)$

$f''(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)' = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow f$ es <u>cóncava</u> en $[0,\infty)$

$\delta(x,y)$: $g'(t) = \left(\frac{t}{1+t}\right)' = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ si y solo si $t \geq 0$

$\Rightarrow g$ <u>creciente</u> en $[0,\infty)$

$g''(t) = \left(\frac{1}{(1+t)^2}\right)' = \frac{-2t}{(1+t)^4} \leq 0$ si y solo si $t \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g$ <u>cóncava</u> en $[0,\infty)$

7. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

a) $$X_K = \Big(\underbrace{\frac{\ln K}{K}}_{\downarrow\,(L'H)\ 0},\ K^{1/K}\Big) \qquad K^{1/K} \longrightarrow e^{\frac{\log K}{K}} \quad \Big[\tfrac{\log K}{K} \longrightarrow 0\Big] \longrightarrow e^{0} = 1$$

$$\lim_{K\to\infty} X_K = (0, 1)$$

c) $$X_K = \Big(\frac{\operatorname{sen} K}{K},\ K\big(e^{1/K} - 1\big)\Big)$$

$$\frac{-1}{K} \le \frac{\operatorname{sen} K}{K} \le \frac{1}{K}$$

$$\frac{-1}{K} \xrightarrow{K\to\infty} 0, \qquad \frac{1}{K} \xrightarrow{K\to\infty} 0 \qquad \text{L. Sandwich} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} K}{K} \to 0$$

$$K\big(e^{1/K} - 1\big) = \frac{e^{1/K} - 1}{1/K} \overset{L'H}{=} \frac{\cancel{-1/K^2}\cdot e^{1/K}}{\cancel{-1/K^2}} = e^{1/K} \xrightarrow[K\to\infty]{} 1$$

$$\lim_{K\to\infty} X_K = (0, 1)$$

8. Hallar frontera y decidir si es abierto o cerrado:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 - y^2}_{f(x,y)} = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in \{1\}\} = f^{-1}(\{1\})$$

f es continua en todo $\mathbb{R}^2$

$\{1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ (porque $\{1\}^c = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ es abierto).

y como f es continua y $\{1\}$ es cerrado $\Rightarrow$ A es cerrado en $\mathbb{R}^2$

Si una función es continua y toma valores de un conjunto cerrado/abierto, su imagen será otro conjunto cerrado/abierto

Frontera $A = \partial A = \bar{A} \setminus \text{int} A$

$\bar{A}$ → cierre de A: el menor cerrado que contiene a A.

$\Rightarrow$ Como A cerrado $\Rightarrow \bar{A} = A$

Si veo que $\text{int} A = \emptyset \Rightarrow \partial A = \bar{A} = A$

$$\text{int} A \subset \underbrace{f^{-1}(\underbrace{\text{int}\{1\}}_{=\emptyset})}_{=\emptyset} \Rightarrow \emptyset \subset \text{int} A \subset \emptyset \Rightarrow \text{int} A = \emptyset.$$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : |x|<1 \ , |y|<1\}$

$\boxed{9.}$

a) Cierre, interior y frontera de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y|<1\}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y|<1\} = f^{-1}((-\infty,1))$ con $f(x,y)=|x-y|$

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, entonces:

$\begin{cases} \text{Si } B \subset \mathbb{R} \text{ es cerrado, } f^{-1}(B) \text{ es cerrado en } A. \\ \text{Si } B \subset \mathbb{R} \text{ es abierto, } f^{-1}(B) \text{ es abierto en } A. \end{cases}$

f es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y $(-\infty,1)$ es abierto en $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

- Cierre de A $(\bar{A})$

$$\bar{A} = \overline{f^{-1}((-\infty,1))} \in f^{-1}(\overline{(-\infty,1)}) = f^{-1}((-\infty,1]) =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x-y| \leq 1\}$$

Obs: $B \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow B \subset \bar{B} \subset \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\bar{B})$: cerrado en $\mathbb{R}^2$ porque $\bar{B}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y f es continua en $\mathbb{R}^2$.

Para ver que $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x-y| \leq 1\} := A_1$ hacemos lo siguiente:
Sea $(x_0,y_0) \in A_1$ y sea $0 \leq t \leq 1$. Entonces $t(x_0,y_0) \in A$ porque

$$|tx_0 - ty_0| = \underset{\wedge}{t}\,|x_0-y_0| < 1$$

Haciendo $t \to 1^+$, $\underbrace{t(x_0,y_0)}_{\in A} \mapsto (x_0,y_0) \Rightarrow (x_0,y_0) \in \bar{A} \Rightarrow A_1 \subset \bar{A}$;

como $\bar{A} \subset A_1 \Rightarrow \bar{A} = A_1 \Rightarrow \bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x-y| \leq 1\}$

- Interior de $A = \text{int}A = A$ porque A es abierto.
- Frontera de $A = \partial A = \bar{A} \setminus \text{int}A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x-y| \leq 1\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x-y| <$

$\Rightarrow \partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x-y| = 1\}$

continuación 9

b) Cierre, interior y frontera de $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=1 \wedge x^2+y^2+z^2\leq 1\}$

$$B = B_1 \cap B_2 \begin{cases} B_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=1\} \\ B_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2\leq 1\} \end{cases}$$

$B_1 = f^{-1}(\{1\})$ con $f(x,y,z) = x+y+z$

$B_2 = g^{-1}((-\infty,1])$ con $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

f y g son continuas en $\mathbb{R}^3$; $\{1\}$ y $(-\infty,1]$ son ambos cerrados en $\mathbb{R} \Rightarrow B_1 \wedge B_2$ son cerrados en $\mathbb{R}^3$.

Como B es intersección finita de cerrados $\Rightarrow B$ es cerrado

- Cierre de $B = \bar{B} = B$ porque B es cerrado.

- Sabemos que $\operatorname{int} B \subset \operatorname{int} B_1$

B_1 es un plano en $\mathbb{R}^3$, por lo que cogiendo un punto p (por muy pequeño que sea) tal $p_0(x_0,y_0,z_0)$ no existe un $r>0$ tal que $B_r(p_0) \in B_1 \Rightarrow \operatorname{int} B_1 = \emptyset$.

Como $\operatorname{int} B \subset \operatorname{int} B_1$ y $\operatorname{int} B_1 = \emptyset \Rightarrow \operatorname{int} B = \emptyset$.

- $\partial B = \bar{B} \setminus \operatorname{int} B \Rightarrow \partial B = \bar{B} \setminus \emptyset \Rightarrow \partial B = \bar{B} = B$ (cerrado)

$\boxed{12.}$ (teorema)

Criterio: $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto $\Longleftrightarrow$ es cerrado y acotado.

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} = A$

Es acotado porque $A \subset [-1, 1]$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: Dado $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$

"a distancia $< \varepsilon$ existe un irracional"

$\Downarrow$

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 1\} \supsetneq A$

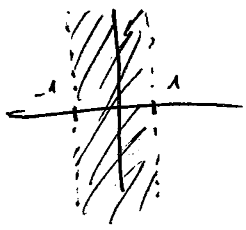
$\Rightarrow A$ no es cerrado $\Rightarrow A$ no es compacto.

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\} =$

$= f^{-1}((-\infty, 1])$ con $f(x,y) = |x|$

f es continua en $\mathbb{R}^2$ y $(-\infty, 1]$ es cerrado en $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow B$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.



Sin embargo, B no es acotado $\Rightarrow$

$\Rightarrow B$ no es compacto

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| = 1\}$

$C = f^{-1}(\{1\})$ con $f(x,y) = |x| + |y|$

f es continua en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow C$ es cerrado

Además C es acotado:

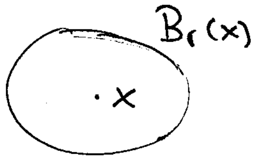
Si $(x,y) \in C \Rightarrow |x|, |y| \leq 1 \Rightarrow x^2, y^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2 \Rightarrow$

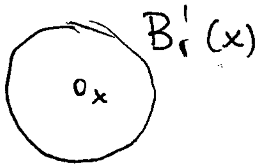
$\Rightarrow C \subset \overline{B}_{\sqrt{2}}(0,0)$

$\Rightarrow C$ es compacto.

13.

Decimos que x es de acumulación de $E \subset \mathbb{R}^n$ ($x \in E'$) $\iff \forall r>0$, $B'_r(x) \cap E \neq \emptyset$, siendo $B'_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\} =$
$= \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < |y-x| < r\}$





a) Determinar A' y después para $A = \mathbb{Q}$

$A = \left\{\frac{1}{k} : k = 1,2,\dots\right\} \subset \mathbb{R}$ $\qquad A \subset [0,1]$

Afirmo que $A' = \{0\}$

a.1) si $x=0$, $0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ y $\frac{1}{k} \neq 0 \ \forall k \Rightarrow 0 \in A'$

a.2) -Sea $x<0$ Entonces $B'_{|x|}(x) \subset (-\infty, 0) \subset A^c$. Si $0<r<|x|$

$\Rightarrow B'_r(x) \cap A \neq 0 \Rightarrow x \notin A'$.

a.3) Si $x>1$, $B'_{x-1}(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin A'$

a.4) si $0 < x \leq 1$

Como $a_k = \frac{1}{k}$ es monótona decreciente y ~~..~~ tiende a cero,

$\exists!\ k = 1,2,\dots$ tal que $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$

a.4.1) si $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ tomo $\delta = \min\left\{\underbrace{\frac{1}{k} - x}_{>0}, \underbrace{x - \frac{1}{k+1}}_{>0}\right\} > 0$

$\Rightarrow B'_\delta(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \notin A'$.

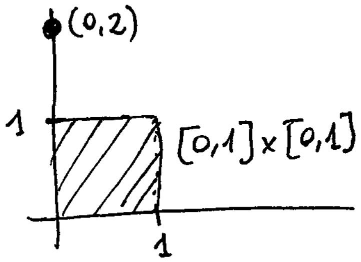
a.4.2) si $x = \frac{1}{k}$ tomo $\delta = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0$ y

$B'_\delta(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \notin A'$.

Por lo tanto, $A' = \{0\}$

$\rightarrow B = \mathbb{Q}$ y $B' = \mathbb{R}$ ya que todo x real se puede escribir como límite de una sucesión de racionales, todos los cuales son $\neq x$.

b) $A = \{(0,2)\} \cup ([0,1] \times [0,1])$ en $\mathbb{R}^2$



$$\overline{A} = [0,1]^2 \cup \{(0,2)\}$$

$A' = [0,1]^2$ ya que para el elemento $(0,2)$ coges un $0<r<1$ y $B'_r(0,2) \cap A = \emptyset \Rightarrow (0,2) \notin A'$.

c) $E \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado $\Leftrightarrow E' \subset E$

Dem

a) $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall r>0,\ B_r(x) \cap E \neq \emptyset$

En particular si $x \in E'$ y $r>0$, $\emptyset \neq B'_r(x) \cap E \subset B_r(x) \cap E$

$\subset \Rightarrow x \in \overline{E} = E \Leftrightarrow E$ es cerrado

b) Veamos que si $E' \subset E \Rightarrow E$ es cerrado:

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en E convergente a $x \in \mathbb{R}^N$.

Queremos probar que $x \in E$, Hay dos casos:

i) $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x \ \forall n \geq N$. Como x_n es una sucesión en E, en particular, $x \in E$

ii) Si no ocurre lo anterior, $\nexists N$ tal que $x_n = x \ \forall n \geq N$. Elegimos una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ del siguiente modo: Eligimos n_1 como el 1^{er} n t.q. $x_n \neq x$.

inacabado $\to$ mucha mierda.

d) $\overline{E} = E \cup E'$

d.1) Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en E convergente a $x \in \mathbb{R}^n$ $x \notin E$. Entonces $x_n \neq x \ \forall n \Rightarrow x \in E'$. Por tanto, $x \in \overline{E} \setminus E \Rightarrow x \in E' \Rightarrow \overline{E} \subset E \cup E'$

d.2) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en E' convergente a $x \in \mathbb{R}^n$

bla bla bla $\Rightarrow E \cup E' \subset \overline{E} \Rightarrow \overline{E} = E \cup E'$