PROBLEMAS. HOJA 2. Cadenas de Markov.

1. **Modelo de Leslie**. En dos reservas en las que está prohibida la caza, las autoridades encargan un estudio de la población de hembras de jabalí. En el estudio, se realiza durante años un censo en ambas reservas, contando la población de ejemplares menores de un año (jóvenes, sin capacidad de reproducción), y también la población de ejemplares mayores de un año (adultos, que ya pueden reproducirse), concluyendo que:
En la primera reserva cada ejemplar adulto da lugar, en promedio, a 1,5 nuevos ejemplares (jóvenes) cada año. Además, se estima que sobrevivirá un año más el $10\,\%$ de los ejemplares que están censados como jóvenes, y el $80\,\%$ de los adultos.
En la segunda reserva cada ejemplar adulto da lugar, en promedio, a 1,2 nuevos ejemplares (jóvenes) cada año. Además se estima que sobrevivirá un año más el $50\,\%$ de los ejemplares que están censados como jóvenes, y el $70\,\%$ de los adultos.

   a) ¿Cuál de las dos reservas deberá ser la elegida para comenzar a permitir la caza de algunos ejemplares sin riesgo de extinguir la población?

   b) En la reserva correcta, se decide permitir una cacería de ejemplares adultos justo antes de cada nuevo censo. Así, el porcentaje de supervivencia de adultos, contando tanto las condiciones naturales como el efecto de la caza, pasará a ser menor de lo que era originalmente, y los otros datos permanecerán igual. Si se quiere que a largo plazo la población permanezca estable, ¿cuál debe ser el nuevo porcentaje de supervivencia de adultos?

   c) Tras realizarse durante muchos años la caza en la reserva determinada en el apartado a) al ritmo adecuado para que se den las condiciones de estabilidad del apartado b), ¿qué porcentaje aproximado del total de la población será joven?

2. Dada una matriz de Leslie con autovalor positivo λ_1 determinar cual es el tanto por ciento de individuos que se pueden explotar a lo largo de cada año (caza, alimentación). Suponer que la explotación es uniforme, es decir la misma en todas las clase. Si la matriz de Leslie es

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

   Hallar el tanto por ciento de explotación.

3. **Modelo de Lefkovitch**. La matriz de transición para un modelo simplificado que representa el ciclo de vida de un insecto, con tres etapas (huevo, larva, adulto), es:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 2 \\ 3/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Realizar una proyección a largo plazo de la población saiendo que inicialmente hay 10 huevos, 5 larvas y 7 adultos.

4. Para beber agua un animal puede ir a un lago o a un río. Se sabe que no va al lago dos días seguidos y que si toma agua en el río la probabilidad de que el día siguiente beba agua en cada uno de los sitios es la misma.

   a) Esbozar el diagrama de este proceso de Markov y encontrar la matriz de transición P.

b) Hallar los autovalores y autovectores de P.

c) Calcular $\bar{P} = \lim_{n\to\infty} P^n$

d) Encontrar el vector de probabilidad π^t tal que $\pi^t \bar{P} = \pi^t$

5. **Gambler's ruin**. Toni y María juegan una sucesión de apuestas independientes donde se disputan 1 euro cada vez. Supongamos que Toni empieza con 2 euros y María con uno y que la probabilidad de que Toni gane un euro es p y de que lo gane María es $1-p$. El juego se acaba cuando uno de los dos se queda sin dinero.

   a) Encontrar el diagrama y la cadena de Markov correspondiente.

   b) Encontrar la probabilidad de que gane Toni

   c) Encontrar el tiempo que se esperará que dure el juego.

6. Un edificio consta de bajo y dos pisos. El ascensor del edificio realiza viajes de uno a otro piso y la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 por ciento de las veces finaliza en el segundo. Finalmente si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el de abajo.

   a) Encontrar la matriz de transición.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que a largo plazo el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos?

7. Se considera la Cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Demostrar que es una cadena de Markov regular.

   b) Si el proceso comienza en el estado 1, encontrar la probabilidad de llegar al estado 3 en exactamente dos pasos.

   c) Encontrar la distribución estacionaria.

8. Un viajante opera en tres ciudades: Madrid, Segovia y Toledo. Con tal de evitar desplazamientos innecesarios pasa todo el día en la misma ciudad y al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo, se desplaza a otra ciudad.
   Después de trabajar un día en Toledo, la probabilidad de tener que continuar allí al día siguiente es $0,4$, la de tener que viajar a Segovia es $0,4$, y la de tener que ir a Madrid es $0,2$.
   Si el viajante duerme un día en Segovia, con probabilidad $0,2$, tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el $60\,\%$ de los casos viajará a Toledo, mientras que irá a Madrid con probabilidad $0,2$.
   Si el viajante trabaja todo un día en Madrid, permanecerá en la ciudad al día siguiente con probabilidad $0,1$, irá a Segovia con probabilidad $0,3$, y a Toledo con probabilidad $0,6$.

   a) Si el viajante se encuentra hoy en Toledo, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que trabajar en la misma ciudad al cabo de cuatro días?

   b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el viajante está en cada una de las tres ciudades?

9. En un informe sobre la permanencia de los clientes entre las tres mayores compañías telefónicas de China (1) China Telecom, (2) China Unicom, y (3) China Mobile, las probabilidades de transferencia de los contratos de una compañía a otra son:

$$P = \begin{pmatrix} 0,84 & 0,06 & 0,10 \\ 0,08 & 0,82 & 0,10 \\ 0,10 & 0,04 & 0,86 \end{pmatrix}$$

Supongamos que un cliente está actualmente con China Unicom. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente esté en este mismo proveedor después de tres cambios de contrato?

10. Mendel estudió las características de la herencia en especies vegetales, particularmente guisantes. Supongamos que una particular especie de guisante puede ser o bien verde o amarillo, lo cual está determinado por un simple gen con verde (G) dominante sobre amarillo (g). Esto es, el material genético que determina el color de la planta (su "genotipo") puede ser uno de los tres posibles pares GG, Gg, o gg dependiendo de los genes que han pasado de sus padres. El verde es dominante porque las plantas con GG o Gg son verdes, mientras que sólo las gg son amarillas.

Consideremos los cruces con una planta amarilla, cuyo genotipo es por tanto gg. Las leyes de Mendel de recombinación genética se pueden expresar en la siguiente matriz de transición donde se recombinan los genotipos de la columna izquierda con una planta gg:

$$P = \begin{array}{c} GG \\ Gg \\ gg \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & ,5 & ,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo cruzando GG con gg obtenemos Gg con probabilidad 1, mientras que Gg con gg resulta en Gg o gg con probabilidad $,5$ cada una.
Supongamos que nuestra población inicial de plantas (para que sean cruzadas con guisantes amarillos) tiene la siguiente distribución $70\,\%$ GG, $20\,\%$ Gg y $10\,\%$ gg.

a) Calcular las probabilidades en la primera generación de cruce y las de la segunda generación.
b) Calcular la distribución de probabilidades a largo plazo.

11. Un amigo tuyo quiere comprar paneles solares para ponerlos en su casa de la sierra pero quiere saber cuantos días de sol habrá de media a lo largo de los años. En su pueblo han observado que el tiempo hoy depende de lo que ha ocurrido en los dos días precedentes. Solo distinguimos dos posibilidades soleado o nublado. Dan como fiables las siguientes probabilidades.

a) Si fue soleado hoy y ayer será soleado mañana con probabilidad $0,8$.
b) Si fue soleado hoy pero nublado ayer será soleado mañana con probabilidad $0,6$.
c) Si fue nublado hoy pero soleado ayer será soleado mañana con probabilidad $0,4$.
d) Si estaba nublado los dos dás será soleado mañana con probabilidad $0,1$.

Definir los estados para poder modelarlo como una cadena de Markov. A largo plazo determinar el tanto por ciento de días soleados.

12. Demostrar que $\lambda = 1$ siempre es un autovalor de una matriz estocástica.

13. Una partícula de gas se mueve por un tubo, de manera aleatoria, una posición h a la derecha o a la izquierda en cada momento τ.

a) Si definimos el conjunto de estados como $\mathbb{Z}$ diciendo que ocupa la posición $z \in \mathbb{Z}$ cuando la partícula está en zh. Identificar la matriz estocástica.

b) ¿Esta cadena de Markov es regular?

c) ¿Cuando es recurrente?

d) Llamo $u(x,t) = P(X_n = x)$. Analizar el comportamiento de esta probabilidad cuando h y τ son pequeños.

14. **Algoritmo de PageRank (Brin-Page)**. Tenemos cuatro páginas: La uno se conecta a la 2,3,4. La dos a la 3 y 4. La tres a la 1. La cuatro a la 1 y a la 3. Calcular la matriz estocástica y el ranking de cada página usando el algoritmo de Brin y Page.