LÓGICA DE PREDICADOS

Blanco (x): evalúa a "Verdadero" si solo si el objeto X es blan

↑

predicado

blanco[1]

Igual (x,y): evalúa a "Verdadero" si solo si el objeto x es igual al objeto y.

↑

predicado

igual[2]

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

FUNCIÓN (REFERENCIA A OBJETO)

Operación

INPUT: lista de términos

OUTPUT: referencia a otro término.

Ej: mejorAmigoDe[1]

EVALUACIÓN: mejorAmigoDe (Ana)

ELACIÓN = PREDICADO (BOOLEANO)

Operación

INPUT: lista de términos

OUTPUT: valor de verdad ("V" o "F")

Ej: Hijo[2]

EVALUACIÓN: Hijo (Marcos, Ana)

("V" si solo si Marcos es hijo de Ana).

Ejemplo

Base de conocimiento: "Marcos es padre de Ana. El padre de Ana es feliz"

$$\left\{ \begin{array}{l} Padre(Marcos, Ana) \\ Feliz(Marcos) \\ \forall x \; Padre(padreDe(x), x) \end{array} \right\} \vdash \left\{ \begin{array}{l} Padre(Marcos, Ana) \\ Feliz(padreDe(Ana)) \end{array} \right\}$$

Las funciones son CONSTANTES

PREDICADO O RELACIÓN

$Padre^2$: relación "ser padre de"

ej: $Padre(x, y)$ evalúa a "verdadero" si solo si x es padre de y.

FUNCIÓN

$padreDe^1$: función cuya evaluación nos devuelve una referencia al objeto que es padre de su único argumento.

ej: $padreDe(x)$ es una referencia al objeto que es padre de x.

Término → Objeto
Término → Variable
Término → Evaluación de función

ÁTOMO → Evaluación de un predicado

ERROR GRAVE UTILIZAR UN PREDICADO DENTRO DE LA LISTA DE ARGUMENTOS DE UNA FUNCIÓN.

$\forall x$ Loves(x,x) → "todos se aman"

$\forall x \forall y$ Loves(x,y) → "Todos aman a todos"

$\exists x \exists y$ Loves(x,y) → "Alguien ama a alguien"

$\forall x \exists y$ Loves(x,y) → "Todos aman a alguien" (que podría ser distinto para cada uno".

$\exists x \forall y$ Loves(y,x) → "Existe (al menos) una persona a la que todos aman"
↓
"Existe alguien a quien todos aman".

$\forall x \exists y$ Loves(y,x) → "Para cualquier persona, hay alguien que lo ama".

$\exists x \forall y$ Loves(x,y) → "Existe alguien que ama a todos".

CUANTIFICADORES

- Cuantificador universal $(\forall)$ → "AND MÚLTIPLE"

PROPOSICIONALIZACIÓN

$$\forall x \ \text{Amarillo}(x)$$
$$x \in \{O_1, O_2, O_3\}$$
$$\equiv \text{Amarillo}(O_1) \wedge \text{Amarillo}(O_2) \wedge \text{Amarillo}(O_3)$$

- Cuantificador ~~uni~~ existencial $(\exists)$ → "OR MÚLTIPLE"

PROPOSICIONALIZACIÓN

$$\exists x \ \text{Amarillo}(x)$$
$$x \in \{O_1, O_2, O_3\}$$
$$\equiv \text{Amarillo}(O_1) \vee \text{Amarillo}(O_2) \vee \text{Amarillo}(O_3)$$

- Para todo $(\forall)$ $\Longrightarrow$ (implica)

  ej: "todos los que están en la UAM son inteligentes"

  $$(\forall x) \ [\text{En}(x, \text{UAM}) \Rightarrow \text{INTELIGENTE}(x)]$$

- Existe $(\exists)$ $\wedge$ (and)

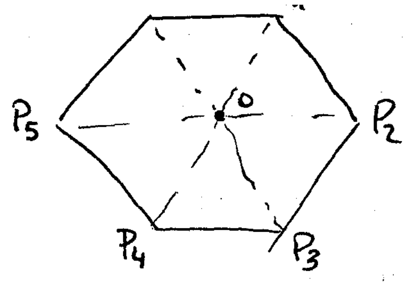
  ej: "hay gente en la UAM"

  $$(\exists x) \ [\text{En}(x, \text{UAM}) \wedge \text{INTELIGENTE}(x)]$$

mod(n, 6) Nombre: mod

Tipo: entero

Resto de la división entera $n/6$



$\forall n$ Equilátero$(O, p(n), p(mod(n+1/6),$

"Todos los que aman a todos los animales son amados por alguien"

$\forall x$ $\forall z$ $\exists y$

OBJETOS

Jack
Curiosity
Tuna

PREDICADOS

$Animal^1$
$Loves^2$
$Kills^2$
? $isNamed^2$ → no va a ser útil.

$Loves(y, x)$
$Animal(z)$
$Loves(x, z)$

$$\forall x \left[\forall z \left[Animal(z) \Rightarrow Loves(x,z) \right] \Rightarrow \left(\exists y \; Loves(y,x) \right) \right]$$

"Jack loves all animals".

$\forall z \left(Animal(z) \Rightarrow Loves(Jack, z) \right)$

"Jack or Curiosity killed the cat, who is named Tuna".

$Kills(Jack, Tuna) \lor Kills(Curiosity, Tuna)$

"Curiosity killed the cat".

$kills(Curiosity, Tuna)$.

"Anyone who kills an animal is loved by no one."

$\forall x$ ... $\exists y$ ... $\neg\exists z$

$$\forall x \left[\left[\exists y \left(Animal(y) \land Kills(x,y) \right) \right] \Rightarrow \left(\neg \exists z \; loves(z,x) \right) \right]$$

Def. recursiva $\begin{cases} 0! = 1 & \text{(caso base)} \\ n! = n\,(n-1)! \end{cases}$

$3! = 3 \cdot 2! = 6$

$\quad \llcorner 2 \cdot 1! = 2$

$\qquad \llcorner 1 \cdot 0! = 1$

$\qquad\quad \llcorner 1$

"Nubes": Hay nubes

"Llueve" : Está lloviendo

"Solo llueve cuando hay nubes"

Llueve $\Rightarrow$ Nubes

EXERCISE EDyL 2016-2017 2016/10/14

Formalization in predicate logic: Specify the constants, variables, functions and predicates and explain their meaning.

"The sum of the angles of a triangle is π"

Objects	Name	Type
	π	real

Variables	Name	Type
	$p_1, p_2, \ldots$	points
	$\theta_1, \theta_2, \ldots$	angles
	$s_1, s_2, \ldots$	segments
	$x, y, \ldots$	objects

Functions	Name	Arity	Description (including the types of the arguments)	Type of the result of its evaluation
	t	3	$t(p_1, p_2, p_3)$: triangle formed by the points p_1, p_2, p_3	triangle
	a	2	$a(s_1, s_2)$: angle formed by segments s_1, s_2	angle
	s	2	$s(p_1, p_2)$: segment formed by points p_1, p_2	segment
	sum	2	$sum(\theta_1, \theta_2)$: measure of the angle that is the result of summing angles θ_1, θ_2	Radians i.e. Real in $[0,2\pi)$

~~$sum(\theta_1, \theta_2, \theta_3$~~

Predicates	Name	Arity	Description (including the types of the arguments)
	NonZeroLength	1	NonZeroLength(s): Segment s has non-zero length
	Triangle	3	Triangle(s_1, s_2, s_3): Segments s_1, s_2, s_3 form a triangle
	Equal	2	Equal(x,y) : x is equal to y

$$\forall s_1, s_2, s_3 \left[Tria(s_1,s_2,s_3) \Rightarrow Equal\left(sum(a(s_1,s_3), sum(a(s_2,s_3), a(s_1,s_2))), \pi\right)\right]$$

$$Equal(sum(sum(\theta_1, \theta_2)), \theta_3), \pi)$$

$$\cancel{Equal(\theta_1, \theta_2, \theta_3}$$

$$\cancel{Equal(sum(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \pi)}$$

"There is no life in a planet unless its atmosphere contains oxygen"

Objects

Name	Type
Oxygen	~~real~~ gas
Life	abstract object

Variables

Name	Type
p, p1, p2…	planets

Functions

Name	Arity	Description (including the types of the arguments)	Type of the result of its evaluation

Predicates

Name	Arity	Description (including the types of the arguments)
~~Atmosphere(x)~~	1	~~Atmosphere contains x oxygen~~
~~Ha~~		
ToHave(x,y)	2	x has y
Atmosphere(x,y)	2	Atmosphere of x has y

$$\forall p \left\{ ToHave(p, Life) \Rightarrow Atmosphere(p, Oxygen) \right\}$$

5

HOJA DE EJERCICIOS 2: Lógica de predicados EDyL 2016-2017

[Fecha de publicación: 2016/10/04]
[Fecha de entrega: 2016/10/11, 09:00]
[Resolución en clase: 2016/10/11]

NOTA: Incluye explicaciones para tus respuestas. Un ejercicio cuya respuesta es correcta, pero que no incluye explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 1:

Utilizando los predicados

P(x):	"x es un paciente"
T(x,y):	"x tiene y"
C (x):	"x es un corazon"
A (x):	"x es un ataque al corazon"
R (x,z):	"x está expuesto al riesgo z"
L(x):	"x es un nivel de colesterol"
N(x) :	"x es normal"
E(x):	"x es elevado"
V(x):	"x es un ventrículo"
I(x,y):	"x es igual a y"

formaliza las siguientes sentencias como FBFs de la lógica de predicados

(i) Algunos ($\exists x$) pacientes que tienen ($\exists n$) niveles elevados de colesterol tienen ataques al corazón ($\exists R$)

$$\exists x, n, R \left[P(x) \wedge L(n) \wedge E(n) \wedge T(x,n) \wedge A(R) \wedge T(x,R) \right]$$

(ii) Todos los pacientes que tienen niveles altos de colesterol están expuestos al riesgo de un ataque al corazón

Mejor la primera

$$\forall x \left[\exists n \left(P(x) \wedge L(n) \wedge E(n) \wedge T(x,n) \right) \Rightarrow \exists z \left(A(z) \wedge R(x,z) \right) \right]$$

$$(\forall x, n) \left[\left(P(x) \wedge L(n) \wedge E(n) \wedge T(x,n) \right) \Rightarrow \exists z \left(A(z) \wedge R(x,z) \right] \right.$$

(iii) Todos los corazones normales tienen dos ventrículos

$$\forall x \left\{ \left[C(x) \wedge N(x) \right] \Rightarrow \left[\exists y,z \left[V(y) \wedge V(z) \wedge T(x,y) \wedge T(x,z) \wedge \neg I(y,z) \wedge \left(\forall d \left(V(d) \wedge T(x,d) \right) \Rightarrow \left(V(d) \wedge I(x,d) \right) \right) \right] \right\}$$

También estaría bien (bastante)

$$\forall x \left[P(x) \Rightarrow \left[\left(\exists n \left(L(n) \wedge E(n) \wedge T(x,n) \right) \right) \Rightarrow \left(\exists z \; A(z) \wedge R(x,z) \right) \right] \right]$$

EJERCICIO 2:

Utilizando los predicados

H(x):	"x es una persona"
P(x,y):	"x es progenitor (padre o madre) de y"
A(x,y):	"x es un ancestro de y"
S(x,y):	"x es hermano o hermana de y"
I(x,y):	"x es igual a y"

formaliza las siguientes sentencias como FBFs de la lógica de predicados

(i) Todas las personas tienen dos progenitores

$$\forall x \left\{ H(x) \Rightarrow \left[\exists y,z \left(P(y,x) \wedge P(z,x) \right) \right] \right\}$$

(ii) Dos personas son hermanos si tienen algún progenitor común.

$$\forall x,y,z \left\{ \left[P(x,y) \wedge P(x,z) \right] \Rightarrow S(y,z) \right\}$$

(iii) Un ancestro de alguien es o bien un progenitor de esa persona, o el ancestro del progenitor de esa persona.

$$\forall y\ \exists x,z \left\{ \left[A(x,y) \Rightarrow P(x,y) \right] \vee A(x, P(z,y)) \right\}$$

(i)

$$\forall x \left[H(x) \Rightarrow \exists y,z \left[P(y,x) \wedge P(z,x) \wedge \neg I(y,z) \wedge \forall w \left(P(w,x) \Rightarrow \left(I(w,y) \vee I(w,z) \right) \right) \right] \right]$$

(ii)

$$\forall x,y \left[\left(H(x) \wedge H(y) \right) \Rightarrow \left[S(x,y) \Leftrightarrow \left(\neg I(x,y) \wedge \exists z \left(P(z,x) \wedge P(z,y) \right) \right) \right] \right]$$

(iii)

$$\forall x \left[H(x) \Rightarrow \forall y \left[A(y,x) \Leftrightarrow \left(P(y,x) \vee \exists u \left(A(y,u) \wedge P(u,x) \right) \right) \right] \right]$$

EJERCICIO 3:

Consideremos las variables x,y,z,...

V(x): x es un votante
C(x): x es un candidato
G(x,y): A x le gusta y
F(x,y): x vota a favor de y

Formaliza como FBF's en lógica de predicados las siguientes frases en lenguaje natural, de manera lo más literal posible.

a) "A algunos votantes les gustan todos los candidatos"

$$\exists x \{ V(x) \wedge [\forall y (C(y) \Rightarrow G(x,y))] \}$$ ✓

b) "No a todos los votantes les gustan todos los candidatos"

$$\neg \forall x \{ V(x) \Rightarrow [\forall y (C(y) \wedge G(x,y))] \}$$ ✓

c) "Los votantes solo votan a favor de los candidatos que les gustan"

$$\cancel{\forall x,y [V(x) \Rightarrow F(x, G(x,y))]} \quad \forall x,y \{ (V(x) \wedge C(y)) \Rightarrow (F(x,y) \Rightarrow G(x,y)) \}$$

$\equiv$

d) "Los votantes no votan a favor de un candidato, a menos que les guste (en cuyo caso, puede que voten a favor del candidato o no)"

$$\cancel{\forall x \forall y \{ V(x) \Rightarrow [\neg F(x,y) \vee F(x, G(x,y))] \}}$$

$\equiv$

$$\forall x,y \{ (V(x) \wedge C(y)) \Rightarrow (F(x,y) \Rightarrow G(x,y)) \}$$

EJERCICIO 4:

Escribe las siguientes frases en lógica de predicados utilizando:

Constantes:

- PT: Planeta Tatooine
- R: arco iris
- U: paraguas

Variables:

- $o, o_1, o_2, \ldots$: objeto
- $p, p_1, p_2, \ldots$: lugar
- $s, s_1, s_2, \ldots$: situación
- $x, x_1, x_2, \ldots$: persona

Predicados:

Rains(s):	Llueve en la situación s
Snows(s):	Nieva en la situación s
Freezes(s):	La temperatura está debajo de cero en la situación s
Sunny(s):	El sol brilla en la situación s
Cloudy(s):	Está nublado en la situación s
In(x,s):	x está en la situación s.
Sees(x,o,s):	x ve el objeto o en la situación s
L(x,p,s):	x está el lugar p en la situación s
Wet(x,s):	x está mojado en la situación s
Carries(x,o,s):	x lleva el objeto o en la situación s.

a) "Uno se moja cuando llueve" [Ejemplo]

$\forall x,s\ [In(x,s) \wedge Rains(s) \Rightarrow Wet(x,s)]$

b) "Cuando llueve, solo se mojan los que no llevan paraguas"

$\forall x,s \{[Rains(s) \wedge Carries(x,U,s)] \Rightarrow \neg Wet(x,s)\}$

$\forall x,s \{[Rains(s) \wedge Wet(x,s)] \Rightarrow \neg Carries(x,U,s)\}$

c) "Solo se puede ver el arco iris cuando llueve y hace sol"

$\forall s \forall x \{Sees(x,R,s) \Rightarrow [Rains(s) \wedge Sunny(s)]\}$

$\forall s \{(\exists x\ Sees(x,R,s)) \Rightarrow [Rains(s) \wedge Sunny(s)]\}$

d) "En el planeta Tatooine, cuando llueve y brilla el sol, todos ven el arco iris"

$\forall x,s \{[L(x,PT,s) \wedge Rains(s) \wedge Sunny(s)] \Rightarrow Sees(x,R,s)\}$

$In(x,s)$

1

e) "No nieva a menos que haya nubes y la temperatura esté debajo de los cero grados"

$\forall s \left\{ \left[\text{Freezes}(s) \wedge \text{Cloudy}(s) \right] \Rightarrow \text{Snows}(s) \right\}$

EJERCICIO 5 [Adaptación de "Introducción a la Lógica Formal", A. Deaño, ej. 81]:
Escribe las siguientes frases sobre geometría plana como FBFs utilizando las siguientes variables, funciones y predicados:

Variables: p,q,... [puntos]
r,s,t,u... [rectas]
θ, ϕ... [ángulos en radianes]

Predicados: Paralelas(<recta-1>,<recta-2>): <recta-1> y <recta-2> son paralelas.

Perpendiculares(<recta-1>,<recta-2>): <recta-1> y <recta-2> son perpendiculares.

Pertenece(<punto>,<recta>): <punto> pertenece a <recta>

Recto(<ángulo>): El ángulo cuyo valor es <ángulo> es recto

Cero(<ángulo>): El ángulo cuyo valor es <ángulo> es cero

Función: ángulo(<recta-1>,<recta-2>):
evalúa al ángulo que forman las rectas <recta-1>,<recta-2>

No se puede utilizar el predicado de igualdad
No olvides utilizar paréntesis para delimitar el ámbito de las variables.

a) "Dos rectas son paralelas cuando no se cruzan en ningún punto" [Ejemplo]

$\forall$r,s [Paralelas(r,s) $\Leftrightarrow$ [$\neg\exists$p (Pertenece(p,r) $\wedge$ Pertenece(p,s))]]

b) Dos rectas son perpendiculares cuando el ángulo que forman es recto ($\pi/2$)

$$\forall r,s \left[Perpendiculares(r,s) \Leftrightarrow Recto(ángulo(r,s)) \right] \checkmark$$

c) "Dos rectas que formen un ángulo cero o bien son coincidentes, o bien son paralelas"

$$\forall r,s \left\{ Cero(ángulo(r,s)) \Leftrightarrow \left[Paralelas(r,s) \lor \left[\forall p \left(Pertenece(p,r) \Leftrightarrow Pertenece(p,s) \right) \right] \right] \right\}$$

EJERCICIO 6 [Adaptación de "Introducción a la Lógica Formal", A. Deaño, ej. 81]:

Escribe las siguientes frases sobre geometría plana como FBFs utilizando las siguientes variables, funciones y predicados:

Variables:	p,q,...	[puntos]
	r,s,t,u...	[rectas]

Predicados: Paralelas(<recta-1>,<recta-2>): <recta-1> y <recta-2> son paralelas.

Pertenece(<punto>,<recta>): <punto> pertenece a <recta>

Función: perpendicular(<recta>,<punto>):
evalúa a la recta perpendicular a <recta> que contiene a <punto>

Se pueden utilizar los predicados de igualdad (=) y desigualdad (≠).
No olvides utilizar paréntesis para delimitar el ámbito de las variables.

a) "Dos rectas son paralelas cuando no se cruzan en ningún punto" [Ejemplo]

$$\forall r,s\ [\text{Paralelas}(r,s) \Leftrightarrow [\neg\exists p\ (\text{Pertenece}(p,r) \wedge \text{Pertenece}(p,s))\ ]]$$

b) "Dos rectas no paralelas y diferentes entre sí se cruzan un único punto"

$$\forall r,s \left\{ \neg\text{Paralelas}(r,s) \wedge (r \neq s) \Rightarrow [\exists p\, (\text{Pertenece}(p,r) \wedge \text{Pertenece}(p,s) \wedge \wedge \neg\exists q\, [p \neq q \wedge \text{Pertenece}(q,r) \wedge \text{Pertenece}(q,s)]] \right\}$$

c) "Dos rectas perpendiculares a dos rectas paralelas dadas, de forma que las perpendiculares sean distintas entre sí, son paralelas"

$$\forall r,s,p \left\{ \text{Paralelas}(r,s) \Rightarrow [\text{Paralelas}(\text{Perpendicular}(r,p),\ \text{Perpendicular}(s,\neg p))] \right\}$$

b) $\forall r,s \left\{ (\neg\text{Paralela}(r,s) \wedge (r \neq s)) \Leftrightarrow \exists p \left[\text{Pertenece}(p,r) \wedge \text{Pertenece}(p,s) \wedge \forall q \right. \right.$

$\left. \left. \forall q\, [(\text{Pertenece}(q,r) \wedge \text{Pertenece}(q,s)) \Rightarrow (q=p)] \right] \right\}$

$\boxed{6}$

c)

$$\forall_{p,q,r,s} \left\{ \left[\text{Paralelas}(r,s) \wedge \left(\text{Perp}(r,p) \neq \text{Perp}(r,p) \right) \right] \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow \text{Paralelas}\left(\text{Perp}(r,p) \; , \; \text{Perp}(s,q) \right) \right\}$$