TIM 1: Espacios de medida

1.1. Álgebras y σ-álgebras

1. Sea $\mathcal{F}$ una colección finita de $\mathcal{P}(X)$. Demostrar que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra si y sólo si $\mathcal{F}$ es álgebra.

2. Sea $X = \{a, b, c, d\}$, comprobar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X, donde

$$\mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\big\}.$$

3. Sean $A, B \subset X$. Describir la σ-álgebra generada por $\mathcal{C} = \{A, B\}$, es decir, $\sigma(\mathcal{C})$.

4. Una colección de conjuntos $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ es un álgebra si y sólo si $X \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es cerrada para diferencias (es decir, $A \setminus B \in \mathcal{F}$ siempre que $A, B \in \mathcal{F}$).

5. Supongamos que $X \in \mathcal{F}$ y que $\mathcal{F}$ es cerrada para la complementación y para uniones finitas disjuntas. Demostrar que $\mathcal{F}$ no es necesariamente un álgebra.

6. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Demostrar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra si y sólo si es un álgebra cerrada para uniones numerables disjuntas.

7. Demostrar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X si y sólo si $\mathcal{F}$ cumple

(a) $X \in \mathcal{F}$

(b) $\mathcal{F}$ es cerrada para diferencias.

(c) $\mathcal{F}$ es cerrada para uniones numerables disjuntas.

8. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la familia constituida por todos los conjuntos A tales que $x \in A$ si y sólo si $x + 1 \in A$. Probar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra y que $\{x\} \notin \mathcal{F}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Se consideran las siguientes colecciones de $\mathcal{P}(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \{A \subset X : \ A \text{ es finito ó } \complement A \text{ es finito}\},\\
\mathcal{F}_2 &= \{A \subset X : \ A \text{ es numerable ó } \complement A \text{ es numerable}\},\\
\mathcal{F}_3 &= \{A \subset X : \ A \subset B \text{ ó } \complement A \subset B\}, \quad \text{donde } B \subset X \text{ es fijo.}
\end{aligned}$$

(a) Demostrar que $\mathcal{F}_1$ es σ-álgebra cuando y sólo cuando X es finito.

(b) Demostrar que $\mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_3$ son σ-álgebras.

10. Demuestra o da un contraejemplo para las siguientes afirmaciones.

(a) La unión de álgebras no es necesariamente un álgebra.

(b) Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ y cada $\mathcal{F}_n$ es un álgebra, entonces $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ es un álgebra.

(c) La unión de σ-álgebras no es necesariamente una σ-álgebra incluso cuando $\mathcal{F}$ no es finito.

(d) Si $\{\mathcal{F}_n\}$ es una colección creciente de σ-álgebras ($\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$), la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ puede no ser una σ-álgebra.

Sugerencia: Para los apartados (c) y (d) se puede usar el conjunto de los números naturales y σ-álgebras del tipo $\mathcal{F}_3$ del problema anterior.

11. Sea X un conjunto no vacío. Describir $\sigma(\mathcal{H})$, donde

(a) $\mathcal{H} = \{A_1, A_2, \dots\}$ es una *partición* (numerable) de X, es decir, los elementos de $\mathcal{H}$ son dos a dos disjuntos y la unión de todos ellos es X.

(b) $\mathcal{H}$ es la colección de los subconjuntos finitos de X. Distinguir si X es numerable o no.

12. Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ no vacío y $B \subset X$ fijo. Consideramos el conjunto de *trazas*

$$\mathcal{E}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{E}\}.$$

Queremos demostrar que $\sigma(\mathcal{E}_B) = \sigma(\mathcal{E})_B$ (sobre B). Para ello Demostrar:

(a) $\sigma(\mathcal{E})_B$ es una σ-álgebra sobre B y por tanto $\sigma(\mathcal{E}_B) \subset \sigma(\mathcal{E})_B$.

(b) $\mathcal{F} = \{A \in \sigma(\mathcal{E}) : A \cap B \in \sigma(\mathcal{E}_B)\}$ es una σ-álgebra sobre X y por tanto $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$.

(c) Finalmente, $\sigma(\mathcal{E}_B) = \sigma(\mathcal{E})_B$.

13. Demostrar que cada una de las siguientes colecciones de intervalos genera la σ-álgebra boreliana usual sobre la recta real:

$$\{]a,b[: a,b \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{]a,b] : a,b \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{[a,b[: a,b \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{[a,b] : a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

$$\{]\leftarrow, a] : a \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{]\leftarrow, a[: a \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{[a, \rightarrow[: a \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{]a, \rightarrow[: a \in \mathbb{Q}\}.$$

14. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $f, g : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ funciones reales tales que los conjuntos

$$\{x \in X : f(x) > \lambda\}, \quad \{x \in X : g(x) > \lambda\} \in \mathcal{F}, \qquad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que los siguientes conjuntos también pertenecen a $\mathcal{F}$

$$\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}, \quad \{x \in X : f(x) = \lambda\}, \quad \{x \in X : f(x) < g(x)\}.$$

1.2. Espacios de medida

15. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finito y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = \mu(X)$. Probar que $\mu(B) = \mu(A \cap B)$, para todo $B \in \mathcal{F}$.

16. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Demostrar que $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$, para todo $A, B \in \mathcal{F}$.

17. Sea X un conjunto infinito no numerable. Sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}$ formada por los subconjuntos numerables o cuyo complementario es numerable, se define la aplicación

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ numerable,} \\ 1 & \text{si } \complement A \text{ numerable.} \end{cases}$$

Demostrar que μ es una medida de probabilidad sobre $(X, \mathcal{F})$.

18. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $B \in \mathcal{F}$ un conjunto medible fijo. Consideramos la σ-álgebra $\mathcal{F} \cap B$ (ver el problema 12). Demostrar que la aplicación $\mu_B : \mathcal{F} \cap B \to [0, \infty]$ definida mediante $\mu_B(C) = \mu(C)$ es una medida sobre $(B, \mathcal{F} \cap B)$ llamada la *restricción de μ a B*.

19. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Demostrar que existe una partición de X, $\{B_n\}$ (los B_n son disjuntos y $\bigcup B_n = X$), tal que $\mu(B_n) < \infty$, para todo n.

20. Sea X un conjunto numerable. Definimos para $A \subset X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito} \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito} \end{cases}$$

(a) Probar que μ es finitamente aditiva, pero no numerablemente aditiva.

(b) Encontrar $\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $A_n \uparrow X$ y $\mu(A_n) = 0$, para todo n.

21. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito. Sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, y ν la restricción de μ a $\mathcal{G}$. Probar con un ejemplo que $(X, \mathcal{G}, \nu)$ no es necesariamente σ-finito.

22. Sea X un conjunto numerable y $f : X \to [0, \infty]$ una función positiva. Definimos

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x), \quad A \subset X \quad (\mu(\emptyset) = 0).$$

Demostrar que μ es una medida sobre $(X, \mathcal{P}(X))$. ¿Es σ-finita?

23. Sea X un conjunto arbitrario (posiblemente no numerable) y $f : X \to [0, \infty]$ una función positiva. Se define la suma de $f(x)$ en X mediante

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) : F \subset X \text{ y } F \text{ finito} \right\}.$$

Consideramos el conjunto $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$.

(a) Si A no es numerable, Demostrar que $\sum_{x \in X} f(x) = \infty$.
Sugerencia: $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n = \{x \in X : f(x) > 1/n\}$, luego existirá un A_n no numerable.

(b) Si A es numerable, entonces $\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(b(n))$, donde $b : \mathbb{N} \to A$ es cualquier biyección (entre $\mathbb{N}$ y A) y la suma de la derecha se entiende como una serie usual.
Sugerencia: Si $B_N = b(\{1, \ldots, N\})$, cualquier F finito de A está contenido en algún B_N.

(c) Demostrar que $\mu(B) = \sum_{x \in B} f(x)$, para $B \subset X$ es una medida sobre $(X, \mathcal{P}(X))$.

1.3. Medidas exteriores. Extensión de medidas

24. Dado un conjunto X, consideramos la aplicación

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ 1 & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Demostrar que μ^* es una medida exterior y hallar los conjuntos μ^*-medibles.

25. Sea X un conjunto no numerable. Consideramos la aplicación

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable}, \\ 1 & \text{si } A \text{ es no numerable}. \end{cases}$$

Demostrar que μ^* es una medida exterior y hallar los conjuntos μ^*-medibles.

1.4. La medida de Lebesgue

26. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Demostrar que $m(A) = 0$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos $\{I_n\}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y la suma de sus longitudes es menor que ϵ.

27. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ con $m(A) > 0$. Demostrar que para cualquier $\alpha < 1$, existe un intervalo abierto I verificando que $m(I \cap A) > \alpha\, m(I)$.
Sugerencia: Tener en cuenta que $m(A) = \text{ínf}\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} m((a_j, b_j)) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right\}$.

28. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(0) = 0, \qquad \text{y} \qquad f(x) = x \sin\frac{1}{x}, \qquad \text{para } x > 0.$$

Calcular la medida de Lebesgue del conjunto $A = \{x \in [0, 1/\pi] : f(x) \geq 0\}$.
Ayuda: Recordad que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n = \log 2$.

29. Sea H un espacio afín $n-1$ dimensional de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $m(H) = 0$.

30. Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Calcular $m(A)$, donde $A = \{x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : 0 \leq \lambda_j \leq 1\}$.

31. Sea U un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\overline{U} \subset \lambda U$, para todo $\lambda > 1$. Demostrar que ∂U (la frontera de U) es medible Borel y que $m(\partial U) = 0$.

1.5. Medidas de Lebesgue-Stieltjes

32. Sea F una función creciente y continua por la derecha y m_F la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada. Demostrar que:

(a) $m_F(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$.

(b) $m_F([a, b[) = F(b^-) - F(a^-)$.

(c) $m_F([a, b]) = F(b) - F(a^-)$.

(d) $m_F(]a, b[) = F(b^-) - F(a)$.

33. Sea F una función no decreciente y continua por la derecha. Demostrar que el conjunto $A = \{x : m_F(\{x\}) > 0\}$ es numerable. En particular, Demostrar que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función creciente tiene medida de Lebesgue cero.

34. Consideramos la función

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Comprobar que F es no decreciente y continua por la derecha.

(b) Consideramos m_F, la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F. Calcular:

(1) $m_F(\{1\})$.

(2) $m_F(\{2\})$.

(3) $m_F((1, 3])$.

(4) $m_F((1, 3))$.

(5) $m_F([1, 3])$.

(6) $m_F([1, 3))$.

35. Dar un ejemplo de una función de distribución F (es decir, creciente y continua por la derecha) tal que

$$m_F\left(]a,b[\right) < F(b) - F(a) < m_F\left([a,b]\right),$$

para algún a y b, siendo m_{F} la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F.

36. Sea $F(x)$ la función dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1), \\ 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0), \\ 2 + x^2 & \text{si } x \in [0, 2), \\ 9 & \text{si } x \in [2, \infty). \end{cases}$$

Calcular la medida de Lebesgue-Stieltjes correspondiente a F de los siguientes conjuntos:

(a) $A_1 = \{2\}$.

(b) $A_2 = [-1/2, 3)$.

(c) $A_3 = (-1, 0] \cup (1, 2)$.

(d) $A_4 = [0, 1/2) \cup (1, 2]$.

(e) $A_5 = \{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

1.6. El conjunto de Cantor

37. Sea G el conjunto de los números reales que se pueden representar en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n/5^n, \quad \text{donde } c_n \in \{0, 4\} \text{ para todo } n.$$

Probar que $m(G) = 0$. ¿Cuál es el cardinal de G?

38. Demuestra por reducción al absurdo que el conjunto de Cantor no es numerable. Para ello, supongamos que $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ donde cada c_n ($n \geq 1$) puede ser escrito de forma única en base 3 como

$$c_n = 0, c_1^n c_2^n c_3^n c_4^n \cdots, \quad \text{con} \quad c_i^n \in \{0, 2\}, \qquad i = 1, 2, \dots$$

Sugerencia: Usa el *argumento de la diagonal de Cantor* para encontrar un $c \in C - \{c_1, c_2, \dots\}$.

39. Consideramos $F(x) = \log(1 + x)$ $(x \geq 0)$, y sea m_F la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F. Calcular $m_F(C)$, donde C es el conjunto de Cantor.
Sugerencia 1: El conjunto de Cantor está contenido en 2^n intervalos de longitud $1/3^n$.
Sugerencia 2: Relacionar la medida m_F con m.

TIM 2: Integración en espacios de medida

2.1. Funciones medibles

40. Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset, (-\infty, 0], (0, \infty), \mathbb{R}\}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-\infty, 0], \\ 1, & \text{si } x \in (0, 1], \\ 2, & \text{si } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

(a) ¿Es la función f $\mathcal{F}$-medible?

(b) Describir *todas* las funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$.

41. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $f, g : X \to \mathbb{R}$. Demuestra o encuentra un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

(a) Si $|f|$ es medible, entonces f es medible.

(b) Si f^2 es medible, entonces f es medible.

(c) Si $f + g$ es medible, entonces f es medible o g es medible.

(d) Si $f \cdot g$ es medible, entonces f es medible o g es medible.

42. Demostrar que una función real f es medible si y sólo si f^2 y $\{f > 0\}$ son medibles.

43. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función medible tal que f es diferenciable a.e. Demostrar que existe una función medible en $[a, b]$ que es igual a f' a.e.

44. Probar que $f = \sup\{f_i : i \in I\}$ *no* es necesariamente medible aunque cada f_i lo sea.

45. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y $f : X \to [0, \infty]$ una función medible. Probar que existe una sucesión $\{h_n\}$ de funciones simples con soporte (conjunto de puntos donde la función no es cero) de medida finita tal que $0 \leq h_n \uparrow f$. ¿Es esta propiedad cierta si μ no es σ-finita?
Sugerencia: Si h es simple y $K \in \mathcal{F}$, $h1_K$ es simple y su soporte está contenido en K.

2.2. Límite superior e inferior

46. Encontrar $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ en los siguientes casos:

(a) $A_n = A$, si n es par y $A_n = B$, si n es impar.

(b) $A_n = (-2 - 1/n, 1]$, si n es par y $A_n = [-1, 2 + 1/n)$, si n es impar.

(c) $A_n = [0, a_n)$, siendo $a_n = 2 + (-1)^n(1 + 1/n)$.

(d) $A_n \uparrow A$ ó $A_n \downarrow A$.

(e) Los A_n son disjuntos dos a dos.

47. Sean A_n y B_n subconjuntos de X. Demostrar:

(a) $(\limsup A_n) \cap (\limsup B_n) \supset \limsup(A_n \cap B_n)$.

(b) $(\limsup A_n) \cup (\limsup B_n) = \limsup(A_n \cup B_n)$.

(c) $(\liminf A_n) \cap (\liminf B_n) = \liminf(A_n \cap B_n)$.

(d) $(\liminf A_n) \cup (\liminf B_n) \subset \liminf(A_n \cup B_n)$.

(e) En (a) y (d), las inclusiones opuestas no son ciertas en general.

(f) $\limsup A_n - \liminf A_n = \limsup(A_n - A_{n+1}) = \limsup(A_{n+1} - A_n)$.

(g) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$, entonces $A_n \cup B_n \to A \cup B$ y $A_n \cap B_n \to A \cap B$.

48. Probar que $1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n}$ y $1_{\limsup A_n} = \limsup 1_{A_n}$.

49. Supongamos que $\mu(\cup A_n) < \infty$. Demostrar que

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n) \leq \limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$

¿En cuál de estas desigualdades se utiliza la hipótesis del enunciado? Encontrar un ejemplo en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ donde los A_n sean intervalos y todas las desigualdades anteriores sean estrictas.

50. Sea μ la medida de contar en $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Construir una sucesión A_n tal que $\limsup A_n = \emptyset$, pero $\lim \mu(A_n) \neq 0$.

51. Sean $\{A_n\}$ conjuntos medibles tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Demostrar que $\mu(\limsup A_n) = 0$. En otras palabras, casi todo elemento $x \in X$ pertenece a lo sumo a un número finito de los A_n. Dicho de otro modo, el conjunto de los puntos $x \in X$ que pertenecen a infinitos de los A_n tiene medida cero. Este resultado se conoce como el *Primer lema de Borel-Cantelli.*

52. Supongamos que $\lim \mu(A_n) = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$. Demostrar que se verifica $\mu(\limsup A_n) = 0$.
Sugerencia: Tener en cuenta el apartado (f) del problema 47.

2.3. Integral de una función medible

53. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible con $f(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$. Demostrar que

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}).$$

54. Sea f una función medible e integrable. Demostrar que si f está acotada, entonces f^2 es también integrable. Si f no está acotada el resultado no es cierto en general. Encontrar un contraejemplo en este caso.

55. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| < \epsilon, \quad \text{siempre que } A \in \mathcal{F} \text{ y } \mu(A) < \delta.$$

Sugerencia: Proceder por reducción al absurdo. Tomar una sucesión A_n con $\mu(A_n) < 1/2^n$ que no verifique el enunciado. Considerar $B = \limsup A_n$ y usar el primer lemma de Borel-Cantelli para llegar a una contradicción.

56. Consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función suelo o parte entera. Demostrar que f es medible y calcular $\int_{(0,1)} f$.

57. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ una función medible. Demostrar la *desigualdad de Chebyshev*, es decir, para $\epsilon > 0$ y $\alpha > 0$, se verifica

$$\mu(\{|f| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^\alpha} \int_X |f|^\alpha \, d\mu.$$

58. Consideramos la medida delta de Dirac (concentrada en el punto a) sobre el espacio medible $(X, \mathcal{P}(X))$, es decir, $\delta_a(A) = 1_A(a)$, para $A \subset X$ y $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$.

(a) ¿Cuáles son las funciones medibles en este espacio?

(b) Calcular su integral de una función medible cualquiera f.

(c) ¿Cuáles son los funciones integrables en este espacio de medida?

59. En $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ consideramos μ la medida de contar, es decir, $\mu(A) = \text{card}(\text{A})$.

(a) ¿Qué funciones son integrables? ¿Cuánto vale su integral?

(b) Demostrar que si $f_n \to f$ en $\mathcal{L}^1(\mu)$, entonces $f_n \to f$ (puntualmente).

(c) Consideramos la sucesión

$$f_n(k) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostrar que f_n converge uniformemente, pero no converge en $\mathcal{L}^1(\mu)$.
Recordatorio: $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre el conjunto D si para cada $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, se tiene que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in D$.

(d) Probar que la sucesión

$$f_n(k) = \begin{cases} 1/k, & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

está en $\mathcal{L}^1(\mu)$ y converge uniformemente a una función que *no* está en $\mathcal{L}^1(\mu)$.

60. Si f es una función medible en un espacio completo y $f = g$ a.e., se tiene que g es medible y $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.

61. Calcular la integral de Lebesgue sobre el conjunto $[0, \pi/2]$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sin x$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \cos x, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si } \cos x \in \mathbb{Q}, \\ \sin^2 x, & \text{si } \cos x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

62. Calcular la integral de Lebesgue sobre $(0, \infty)$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = e^{-\lfloor x \rfloor}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{\lfloor x+1 \rfloor \lfloor x+2 \rfloor}$.

(c) $f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor !}$.

63. Definimos $f : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$ de la siguiente forma: $f(x) = \infty$, si $x \in C$, donde C es el conjunto ternario de Cantor en [0,1]; $f(x) = n$ en cada intervalo del complementario de C de longitud $\frac{1}{3^n}$. Demostrar que f es medible Lebesgue y calcular $\int_0^1 f(x)\, dx$.

2 4. Paso al límite bajo el signo integral

64. Sean $f_{2n-1} = 1_{[0,1)}$ y $f_{2n} = 1_{[1,2]}$, para $n = 1, 2, \ldots$. Comprobar que se verifica la desigualdad estricta en el Lema de Fatou (para funciones positivas).

65. Sea $f_n = \min\{f, n\}$, donde $f \geq 0$ medible. Demostrar que $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.

66. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finito. Demostrar que si $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ verifica que f_n converge uniformemente en X a la función f, entonces $f \in L^1(\mu)$ y $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

67. Probar con un contraejemplo que $f_n \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$ *no* implica necesariamente que $\lim \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f$.
Sugerencia: Considerar $f_n(x) = a_n/(1 + |x|)$ si $|x| \leq n$ y $f_n(x) = 0$ si $|x| > n$, para una sucesión $a_n \downarrow 0$ apropiadamente elegida.

68. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprobar que f_n verifica el lema de Fatou (para funciones positivas) con desigualdad estricta.

69. Sea f integrable sobre $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $\{E_n\} \subset \mathcal{F}$ tal que $E_n \downarrow E$, con $\mu(E) = 0$. Demostrar que $\lim \int_{E_n} f d\mu = 0$. ¿Se pueden rebajar la hipótesis sobre f del enunciado?

70. Sea $A \in \mathcal{F}$ y $f > 0$ medible e integrable. Comprobar que $\lim \int_A f^{1/n}\, d\mu = \mu(A)$.
Sugerencia: Usa (y vuelve a usar) el TCM.

71. Sea $f : X \to [0, \infty]$ una función medible tal que $\int f\, d\mu = c \in (0, \infty)$. Demostrar que para $\alpha > 0$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right] d\mu = \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ c, & \text{si } \alpha = 1, \\ 0, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Sugerencias: Recordar que $\log(1+x) \sim x$, cuando $x \to 0$. Además, para $\alpha \geq 1$ los integrandos están mayorados por αf. Cuando $\alpha < 1$ se puede usar el lema de Fatou.

72. Comprobar la siguiente identidad:

$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{1-x} \log\frac{1}{x}\, dx = 9\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)^2}.$$

73. Demostrar que

$$\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Sugerencia: Desarrollar en serie de potencias la función $1/(1-x)^2$.

74. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible e integrable y consideramos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

(a) Probar que $F(x)$ es continua.

(b) Demostrar que si $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, entonces $\sum_k |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \le \int_{\mathbb{R}} |f|$.

75. Para $x \ge 0$ y $n \ge 2$, comprobar que se verifica la desigualdad

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ge \frac{x^2}{4}.$$

Usar esta desigualdad para calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}}.$$

76. Consideramos la sucesión de funciones dadas por

$$f_n(x) = \frac{nx-1}{(1+x\log n)(1+x^2 n\log n)}, \quad x \in (0,1].$$

Comprobar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ y, sin embargo, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Sugerencia: Observar que $f_n(x) = \frac{-1}{x\log n+1} + \frac{nx}{(n\log n)x^2+1}$.

77. Calcular directamente el límite:

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} \int_a^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\, dx$$

distinguiendo los casos $a > 0$, $a = 0$ y $a < 0$. ¿En cuáles de estos tres casos podemos aplicar algún teorema de paso al límite bajo el signo integral? En esos casos, ¿qué teorema o teoremas de convergencia son aplicables?

78. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\, dx.$$

79. Para $t \in \mathbb{R}$, defimos

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(tx)\, dx.$$

Probar que $\varphi(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2/4}$ de las siguientes dos formas:

(a) Justificar que $\varphi'(t) = -\frac{1}{2} t\varphi(t)$ e integrar.

(b) Expandir el coseno en serie de potencias e integrar, justificando el paso al límite.

2 4. Espacios producto y teorema de Fubini

80. Demostrar que si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ son espacios de medida completos, el espacio producto $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu)$ *no* tiene por qué ser completo.
Sugerencia: Considerar $E = A \times B$, donde $\emptyset \neq A \in \mathcal{F}$ y $\mu(A) = 0$ y $B \subset Y$ con $B \notin \mathcal{G}$.

81. Sea μ la medida de contar sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

(a) Demostrar que la medida producto $\mu \times \mu$ coincide con la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

(b) Consideramos la función

$$f(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n, \\ -1, & \text{si } m = n+1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprobar que las sumas iteradas

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) \right) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) \right)$$

existen, pero son distintas. ¿Contradice esto el teorema de Fubini?

82. Sean $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-medible y $g : Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-medible. Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es medible Borel, entonces la función $H(x, y) = h\big(f(x), g(y)\big)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-medible.

83. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Para funciones $f\colon X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-medible y $g\colon Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-medible se considera la función $h(x, y) = f(x)g(y)$.

(a) DeDemostrar que h es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-medible.

(b) Demostrar que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$ entonces $h \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$ y

$$\int_{X\times Y} h(x, y)\, d(\mu\times\nu)(x, y) = \left(\int_X f(x)\, d\mu(x)\right) \left(\int_Y g(y)\, d\nu(y)\right).$$

84. Sean $(X, \mathcal{F}, m)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$, donde $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}(Y)$, m es la medida de Lebesgue y ν es la medida de contar. Consideramos el espacio producto $(X\times Y, \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}, m\times\nu)$ y el conjunto $D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$.

(a) Demostrar que $D \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.
Sugerencia: $D = \cap_1^\infty D_n$ con $D_n = \cup_{j=1}^n [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$.

(b) Comprobar que

$$\int_Y \left(\int_X 1_D(x, y) dm(x)\right) d\nu(y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_X \left(\int_Y 1_D(x, y) d\nu(y)\right) dm(x) = 1.$$

(c) Demostrar que $(m \times \nu)(D) = \infty$.
Sugerencia: Tener en cuenta que

$$(m \times \nu)(D) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^\infty m(A_j)\nu(B_j) : A_j \in \mathcal{F},\ B_j \in \mathcal{G} \text{ y } D \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j \times B_j \right\}.$$

(d) ¿Contradice este ejercicio el teorema de Fubini-Tonelli?

85. Consideramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \in [-1, 1]^2 - \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostrar que sus integrales iteradas existen y valen cero. ¿Es f integrable?

86. Sea $m > 0$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin^2 x}{x^2(x^2+y^2)(x^2+y^2+m^2)}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable.
Sugerencia: Demostrar que $|f(x,y)| \leq f_1(x) f_2(y)$, con f_1, f_2 integrables.

87. Sea $f : [-1,1] \to [0,\infty]$ una función positiva e integrable. Definimos, para $x \in (0,1]$,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f(t)\, dt.$$

(a) Probar que $g \in \mathcal{L}^1[0,1]$ si y sólo si $f(t)\log(1/|t|)$ es integrable en $[-1,1]$ y, en ese caso,

$$\int_0^1 g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(t) \log(1/|t|)\, dt.$$

(b) Si f es integrable, pero no es positiva, ¿qué implicaciones del "si y sólo si" se mantienen?

88. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones medibles Borel e integrables en $\mathbb{R}$.

(a) Probar que la función $(x,y) \mapsto f(x-y)$ es $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-medible.

(b) Probar que la *convolución* de f y g, $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy$, está bien definida en casi todo $x \in \mathbb{R}$ y, además, $f * g \in \mathcal{L}^1$.
Sugerencia: Usar el Teorema de Fubini-Tonelli.

89. Consideramos la función $S : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$S(T) = \int_0^T \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

(a) Demostrar que S es uniformemente continua. Es decir, $\sup_{T\in[0,\infty)} |S(T+h) - S(T)| \to 0$, cuando $h \to 0$.

(b) $\lim_{T\to\infty} S(T) = \pi/2$.
Sugerencia: Usar que $1/x = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$ (para $x > 0$), el teorema de Fubini y el TCD. Por favor, comprobar que todos los teoremas se aplican correctamente.

(c) S está acotada.

(d) La función $f(x) = \sin x/x$ no es integrable en $(0, \infty)$, es decir,

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Sugerencia: Demostrar que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$.

90. Demostrar que la función $f(x, y) = e^{-y} \sin(2xy)$ es integrable para $(x, y) \in [0, 1] \times [0, \infty)$, y deducir el valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 y}{y} e^{-y}\, dy.$$

Sugerencia: Calcular la integral $\int_0^1 \sin(2xy)\, dx$.

91. Consideramos la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \in [-1, 1]^2 - \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas de f son iguales, pero f *no* es integrable.

2 5. Integración en coordenadas polares

92. Sean Γ y β las funciones gamma y beta de Euler, respectivamente.

(a) Integrando por partes muestra la ecuación funcional de Γ: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, para $p > 0$.

(b) Haz un cambio de variable adecuado para ver que

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^\infty u^{2p-1}\, e^{-u^2}\, du.$$

(c) Muestra que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
Sugerencia: Calcula $\Gamma(1/2)^2$ usando la expresión del apartado (b), el Teorema de Fubini y el cambio a coordenadas polares en el plano.

(d) Haz un cambio de variable adecuado para ver que

$$\beta(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} v\, \cos^{2q-1} v\, dv.$$

(e) Muestra que

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Sugerencia: Usa la sugerencia del apartado (c) y (d) para calcular $\Gamma(p)\Gamma(q)$.

93. En $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m)$, determinar para qué valores de α existen y son finitas las siguientes integrales y calcular su valor en ese caso.

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+\|x\|^2)^\alpha}$.

(b) $\displaystyle\int_{\{\|x\|<R\}} \|x\|^\alpha \, dx$, para $R > 0$.

(c) $\displaystyle\int_{\{\|x\|<1\}} \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - \cdots + (-1)^{n+1} x_n^2}{\|x\|^\alpha} \, dx$.