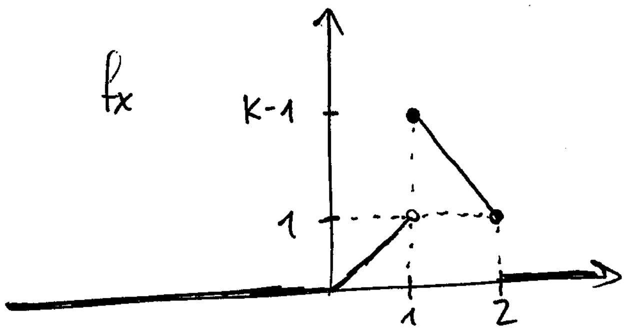
HOJA 2

1. Sea X una variable aleatoria con densidad $f_X(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } 0 \leq x < \\ K-x & , \text{ si } 1 \leq x \leq \\ 0 & , \text{ en el res} \end{cases}$

a) Hallar K tal que f_X sea efectivamente una densidad.

b) Hallar F_X y calcular $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{V}(X)$



a) Sabemos que $f_X \overset{(1)}{\geq} 0$ y $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx \overset{(2)}{=} 1$.

▷ Por (1) sabemos que $K \geq 2$

▷ Por (2) sabemos que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (K-x)\,dx =$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[-\frac{(K-x)^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2} + \frac{(K-1)^2}{2} - \frac{(K-2)^2}{2} = 1 \xrightarrow[K]{\text{despejar}}$$

$\Rightarrow \boxed{K=2}$. ~~porque K=1 no es posible~~

b) $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{para } x<0 \\ \int_0^x y\,dy = \frac{x^2}{2} & \text{para } x \in [0,1) \\ \int_0^1 y\,dy + \int_1^x (2-y)\,dy = \frac{1}{2} + \left[\frac{(2-y)^2}{2}(-1)\right]_{y=1}^{y=x} & \text{para } x \in [1 \\ 1 & \text{para } x \geq 2. \end{cases}$

$\cancel{\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_0^1 x.x\,dx}$

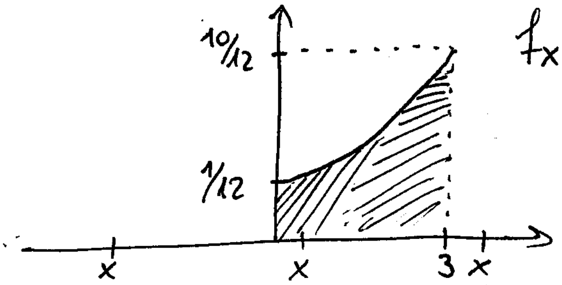
$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x.f_X(x)\,dx = \int_0^1 x.x\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2} = 1$$

$$\mathbb{V}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x-1)^2 . f_X(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)^2 x\,dx + \int_1^2 (x-1)^2(2-x)\,dx = \ldots$$

2.1 X variable aleatoria continua $f_X(x) = \begin{cases} \ldots \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus(0,3) \end{cases}$

a) Hallar K y F_X?

i- $f_X \geq 0 \Rightarrow K \geq 0$



\- $\int_{\mathbb{R}} f_X = 1 \Rightarrow K = 1/12$

$$\| $$

$$\int_0^3 K(1+x^2)dx = K\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3} = K(3+9) = 12K$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{para } x<0 \\ \int_0^x \frac{1+y^2}{12}dy = & \text{para } x \in [0,3) \\ 1 & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow = \frac{1}{12}\left[y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x(1+\frac{x^2}{3})}{12}$$

b) ¿$\mathbb{P}(x \in (1,2)) = \mathbb{P}(1 \leq x \leq 2)$?

$$\mathbb{P}(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 f_X(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1+x^2}{12}dx$$

continua

$\|$

me

$F_X(2) - F_X(1)$

ularlo

c) $\mathbb{P}(x \leq 1)$

$$\|$$

$$F_X(1) = \frac{1(1+1/3)}{12}$$

d) $$\mathbb{P}(x \leq 2 \mid x > 1) = ? = \frac{\mathbb{P}(\{x \leq 2\} \cap \{x \geq 1\})}{\mathbb{P}(x>1)} = \frac{\mathbb{P}(1 \leq x \leq 2)}{\mathbb{P}(x>1)} = \frac{\text{apartado b}}{1-\text{ap. c}}$$

$\boxed{3.}$ X variable aleatoria continua $f_X(x) = \begin{cases} ax^2+b, & x\in(0,2) \\ 0, & x\notin(0,2) \end{cases}$

Determina a y b sabiendo $\mathbb{P}(1/2 < X \le 1) \cong 0'1357$.

1.- $f_X \geq 0$

$\Downarrow$

$b \geq 0$

2.- $\int_{\mathbb{R}} f_X = 1$

$\Downarrow$

$\int_0^2 (ax^2+b)\,dx = \frac{8a}{3} + 2b$

3.- $\int_{1/2}^{1} f_X = 0'1357.$

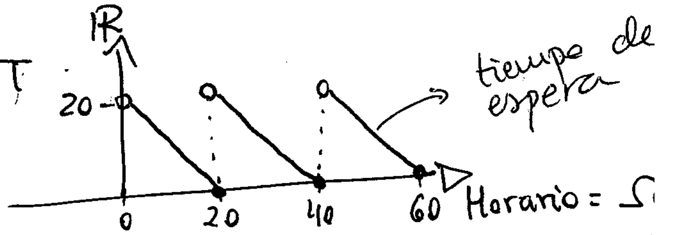
$\Downarrow$

$\left[\frac{ax^3}{3} + bx\right]_{x=1/2}^{x=1}$

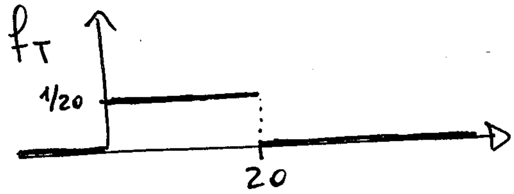
$\longleftrightarrow$ sist. de ecuaciones 2 incógnitas (a y b).

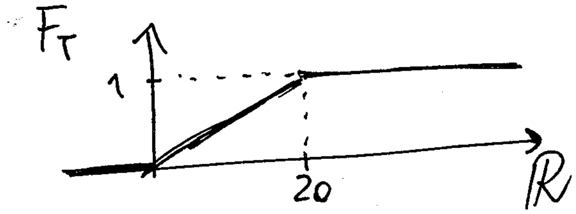
$\boxed{4.}$ Pasa un tren cada 20 minutos.

$T=$ "tiempo de espera" $T: \Omega \to \mathbb{R}$



F_X





idez $\nearrow$ $= (1+Y)$ — componente químico

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}$$

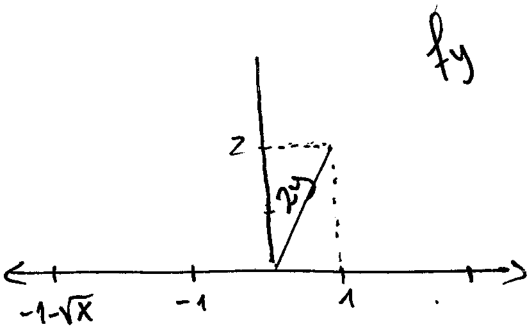
¿F_X? ¿f_X? ¿$\mathbb{E}(X)$? ¿$\mathbb{V}(X)$?

F_X? $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left((1+Y)^2 \leq x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \circledast & \end{cases}$

$\circledast$ $\mathbb{P}\left(-\sqrt{x} \leq (1+Y) \leq \sqrt{x}\right)$, $x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-1-\sqrt{x} \leq Y \leq -1+\sqrt{x}\right)$, $x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-1-\sqrt{x} \leq Y \leq -1+\sqrt{x}\right) = \int_{-1-\sqrt{x}}^{-1+\sqrt{x}} f_Y(y)\,dy \Rightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \underbrace{\int_0^{-1+\sqrt{x}} 2y\,dy}_{=(-1+\sqrt{x})^2} & \text{si } x \in [1,4) \\ \underbrace{\int_0^1 2y\,dy}_{=1} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$-1+\sqrt{x}$ puede estar en $(-1,0)$, en $(0,1)$ ó en $(1,\infty)$

1^er caso: $-1+\sqrt{x} < 0$
2º caso: $-1+\sqrt{x} \in [0,1)$
3^er caso: $-1+\sqrt{x} \geq 1$

$$f_X(x) = ? = F_X'(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{\cancel{2}(-1+\sqrt{x})}{\cancel{2}\sqrt{x}}, & x \in [1,4) \\ 0 & x \geq 4 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,dy = \int_1^4 x \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 (x - \sqrt{x})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{3/2}}{3}\right]_{x=1}^{x=4} = \ldots m$$

resultado $= m$

$$\mathbb{V}(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x)\,dx = \int_1^4 (x-m)^2 \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx$$

<u>Observación</u>

$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \cdot f_X(y)\,dy$; $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{g(Y)}(x)\,dx$

$F_{g(Y)}(x) = \mathbb{P}(g(Y) \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq g^{-1}(x)) = F_Y(g^{-1}(x))$

$Y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega \longmapsto y$, e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto x$ derivable con inversa derivab.

Entonces $f_{g(Y)}(x) = F_{g(Y)}'(x) = F_Y'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

Observación

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \cdot f_X(y)\,dy \quad ; \quad \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{g(Y)}(x)\,dx$$

$$F_{g(Y)}(x) = \mathbb{P}(g(Y) \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq g^{-1}(x)) = F_Y(g^{-1}(x))$$

$$Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto y \qquad \text{e} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto x$$

derivable con inversa derivable

Entonces
$$f_{g(Y)}(x) = F'_{g(Y)}(x) = \underbrace{F'_Y(g^{-1}(x))}_{f_Y(g^{-1}(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}}_{= [g^{-1}(x)]'}$$

Continuamos:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{g(Y)}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{f_Y(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} y = g^{-1}(x) \\ dy = \dfrac{dx}{g'(g^{-1}(x))} \end{array} \right] \text{cambio de variable} = \int_{\mathbb{R}} g(y) \cdot f_Y(y)\,dy$$

6.| En un país, la proporción de cierto aditivo en la gasolina determina su precio. Supongamos que en la producción de gasolina, la producción de adictivo es una variable aleatoria X con función de densidad:

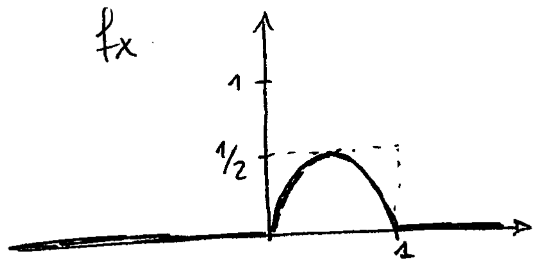
$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si $X < 0'5$ tendremos gasolina del tipo 1 a 80 pesos el litro, si $0'5 \leq X \leq 0'8$ tendremos gasolina del tipo 2 a 90 pesos el litro y si $X > 0'8$ tendremos gasolina del tipo 3 a 100 pesos el litro.

a) Representar gráficamente la densidad y calcular la función de distribución de X.

b) Calcular los porcentajes de producción de cada tipo de gasolina.

c) Calcular el precio medio por litro.



a) $$Y = \begin{cases} 80, & x < 0'5 \quad \text{tipo } 1 \\ 90, & x \in [0'5, 0'8) \quad \text{tipo } 2 \\ 100, & x \geq 0'8 \quad \text{tipo } 3 \end{cases}$$

$6x - x^2 \Rightarrow 6 - 12x = 0 \Rightarrow x = 1/2$ máximo

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x 6y(1-y)dy = \left[3y^2 - 3y^3\right]_{y=0}^{y=x} = 3x^2 - 2x^3, & x \in [0,1) \\ \int_0^1 6y(1-y)dy = 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

b) $\mathbb{P}(X < 0'5) = F_X(0'5) = 3 \cdot \frac{1}{2^2} - 2 \cdot \frac{1}{2^3}$

c) $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i \cdot \mathbb{P}(Y = y_i) = 80 \cdot \mathbb{P}(0'5) + 90 \cdot \mathbb{P}(x \in [0'5, 0'8)) + 100 \cdot \mathbb{P}(x \geq 0'8)$

7. En un puesto de feria en cierto país se ofrece la posibilidad de lanzar un dardo a unos globos. Si se consigue reventar un globo, se recibe el premio que figura en un papel contenido en el globo. Supongamos que la probabilidad de acertar con algún globo es 1/3.

Los premios se distribuyen de la siguiente manera:

40% de premios de 50 pesos
30% de premios de 100 pesos
20% de premios de 250 pesos
10% de premios de 1000 pesos

Si cada lanzamiento cuesta 150 pesos, ¿cuál es la ganancia esperada del dueño del puesto en cada lanzamiento?

globo

$\mathbb{P}(Gl) = 1/3$

ganancia

$G = 150 - P$

$$G = \{\underset{150-0}{150},\ \underset{150-50}{100},\ \underset{150-100}{50},\ \underset{150-250}{-100},\ \underset{150-1000}{-850}\}$$

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} P=50 \\ P=100 \\ P=250 \\ P=1000 \end{pmatrix} \begin{matrix} = 0'4 \\ = 0'3 \\ = 0'2 \\ = 0'1 \end{matrix}$$

$\mathbb{P}(G=150) = 2/3$

$\mathbb{P}(G=100) = 1/3 \cdot 0'4$

$\mathbb{P}(G=50) = 1/3 \cdot 0'3$

$\mathbb{P}(G=-100) = 1/3 \cdot 0'2$

$\mathbb{P}(G=-850) = 1/3 \cdot 0'1$

$$\mathbb{E}(G) = 2/3 \cdot 150 + 1/3 \cdot 0'4 \cdot 100 + \frac{1}{3} \cdot 0'3 \cdot 50 - \frac{1}{3} \cdot 0'2 \cdot 100 -$$

$$- 1/3 \cdot 0'1 \cdot 850 = 83'\widehat{3}$$

$$\mathbb{E}(G) = ? = \sum_{x_i} x_i \cdot \mathbb{P}(G = x_i)$$

8.| El ahorro en euros de una persona (durante cierto período de tiempo) es una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{-(x/500)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-(x/500)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Hallar la función de densidad.

b) Calcular la probabilidad de que el ahorro de una persona en este período esté entre −200 y 500 euros.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el ahorro de una persona sea inferior a 1000 euros, si se sabe que es mayor que 500?

a) $$f_X(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{-(x/500)^2} \cdot (-2x/500) \cdot (-1/500) \ , & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{-1}{2} \cdot e^{-(x/500)^2} \cdot (-2x/500) \cdot (-1/500) \ , & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

b) $$\underbrace{\mathbb{P}(-200 \leq X \leq 500)}_{= \int_{-200}^{500} f_X(x)\,dx} \overset{\text{v.a. continua}}{=} F_X(500) - F_X(-200)$$

c) $$\mathbb{P}(X \leq 1000 \mid X \geq 500) = \frac{\mathbb{P}(X \leq 1000 \cap X \geq 500)}{\mathbb{P}(X \geq 500)} = \frac{\mathbb{P}(500 \leq X \leq 1000)}{\mathbb{P}(X \geq 500)} =$$

$$\overset{\text{v.a. continua}}{=} \frac{F_X(1000) - F_X(500)}{\underbrace{1 - F_X(500)}_{= 1 - \int_{-\infty}^{500} f(y)\,dy \ \text{ó} \ \int_{500}^{\infty} f(y)\,dy}}$$

19.| Sea X una variable aleatoria con función de distribución:

$$F_\theta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \theta x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si} \quad x \geq \theta \end{cases} \qquad \text{donde} \quad \theta \in [0,1]$$

a) Hallar la distribución de $Y = X^2 - 2$

b) Hallar $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[e^x]$

c) Hallar los valores de θ para los que X es variable aleatoria continua y dar su función de densidad.

d) Hallar los valores de θ para los que X es discreta y dar su función de masa.

a) $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(x^2 - 2 \leq y) = \mathbb{P}(x^2 \leq y+2) = \begin{cases} 0 & , y \leq -2 \\ \circledast & , y \geq -2 \end{cases}$$

$\circledast$ $\mathbb{P}(-\sqrt{y+2} \leq x \leq \sqrt{y+2}) = \underbrace{F_X(\sqrt{y+2}) - F_X(-\sqrt{y+2}^{\,-})}_{\text{no es continua, hay que tener cuidado}}$

por la izquierda

$$\mathbb{P}(-\sqrt{y+2} \leq x \leq \sqrt{y+2}) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y+2}) - \mathbb{P}(X < -\sqrt{y+2}) =$$

v.a. no continua

$$= F_X(\sqrt{y+2}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{y+2}^{\,-})}_{= 0 \text{ porque } -\sqrt{y+2} \text{ siempre } < 0}$$

$$F_X(\sqrt{y+2}) = \begin{cases} \theta\sqrt{y+2} & , \text{si } \sqrt{y+2} < \theta, \ y \geq -2 \\ 1 & , \text{si } \sqrt{y+2} \geq \theta, \ y \geq -2 \end{cases}$$

Conclusión

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 & , y < -2 \\ \theta\sqrt{y+2} & , \overbrace{y \geq -2, \sqrt{y+2} < \theta \iff -\theta^2 - 2 < y < \theta^2 - 2}^{\iff y \in [-2, \theta^2 - 2]} \\ 1 & , y \geq -2, \sqrt{y+2} \geq \theta \iff y \geq \theta^2 - 2 \end{cases}$$

continua ni discreta

b) $$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot F_\theta'(x)\,dx + \theta \underbrace{\left[F_\theta(\theta) - F_\theta(\theta^-)\right]}_{\text{"salto"}} =$$

$$= \int_0^\theta x \cdot \theta\,dx + \theta\left[1-\theta^2\right] = \frac{\theta^3}{2} + \theta - \theta^3 = \theta - \frac{\theta^3}{2}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}(X^2-2) = \mathbb{E}(g(x)) = \int_{\mathbb{R}} (x^2-2) \cdot F_\theta'(x)\,dx + (\theta^2-2) \cdot \left[F_\theta(\theta) - F_\theta(\theta^-)\right]$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{\mathbb{R}} e^x \cdot F_\theta'(x)\,dx + e^\theta\left[F_\theta(\theta) - F_\theta(\theta^-)\right]$$

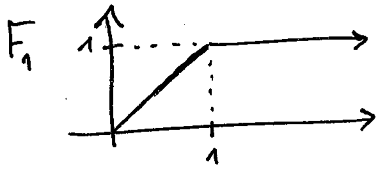
FÓRMULA USADA:

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot F_X'(x)\,dx + \sum_{x_i} g(x_i) \cdot \left[F_X(x_i) - F_X(x_i^-)\right]}$$

c) Valores θ para que X v.a. continua. ¿Densidad?

$\boxed{\theta = 1}$ $\Rightarrow$ X v.a. continua

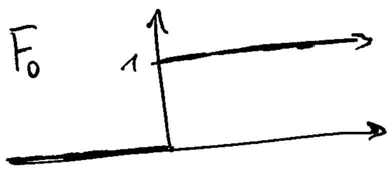
$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$



d) Valores θ para que X v.a. discreta. ¿Función de masa?

$\boxed{\theta = 0}$ $\Rightarrow$ X v.a. discreta

$X \in \{0\}$ $\qquad \mathbb{P}(X=0) = 1 = P_X(0)$



10 La variable aleatoria X = "duración en minutos de las llamadas telefónicas" viene dada por la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-x/2} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Determinar α, hallar la función de distribución y calcular la probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos.

a) Sabemos que $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^\infty \alpha e^{-x/2}dx = 1 \Rightarrow -2\alpha \int_0^\infty \frac{-1}{2} e^{-x/2}dx \Rightarrow -2\alpha \left[e^{-x/2}\right]_0^\infty =$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\left(-2\alpha\left[e^{-x/2}\right]_0^N\right) = \lim_{N\to\infty}\left(-2\alpha e^{-N/2} + 2\alpha\right) = 1 \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1/2$$

b) ¿F_X? $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^0 f dx + \int_0^\infty f dx & x > 0 \end{cases}$

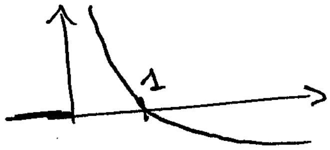
$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{e^{-y/2}}{2} dy = 1 - e^{-x/2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

c) $$¿\mathbb{P}(3 \leq x \leq 6)? = F_X(6) - F_X(3^-) \overset{\text{continua}}{=} F_X(6) - F_X(3) = e^{-3/2} - e^{-6/2}$$

$$\mathbb{P}(3 \leq x \leq 6) = \int_3^6 f_x dx$$

11. Consideramos la variable aleatoria $Y: (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

definida por:
$$Y(x) = \begin{cases} -2\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Calcular la función de distribución de Y, si $\mathbb{P}$ viene dada por la función de densidad:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,dx = \int_{A \cap [0,1]} 1\,dx$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(\underbrace{\{Y \leq y\}}_{A}) = \int_{\{Y \leq y\} \cap [0,1]} 1\,dx = ⊛$$

$$\{Y \leq y\} = \{x \in \mathbb{R} : -2\ln x \leq y, \text{ si } x \geq 0\} \cup \{x \leq 0, \text{ si } y > 0\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq e^{-y/2}\} \cup \{(-\infty, 0], \text{ si } y > 0\}$$

$$⊛ = \int_{\{Y \leq y\} \cap [0,1]} dx = \int_{\{x \geq e^{-y/2}\} \cap [0,1]} dx = \int_{[e^{-y/2}, \infty] \cap [0,1]} dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \int_{e^{-y/2}}^{1} dx & \text{si } y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-y/2} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

[13.] Supongamos que la función de densidad de la variable aleatoria X es $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Halla la función de distribución de la variable aleatoria $Y = g(X)$ donde:

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^{1/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$\{X \leq g^{-1}(y)\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y < 0 \\ [-y, y^2] & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

Entonces:

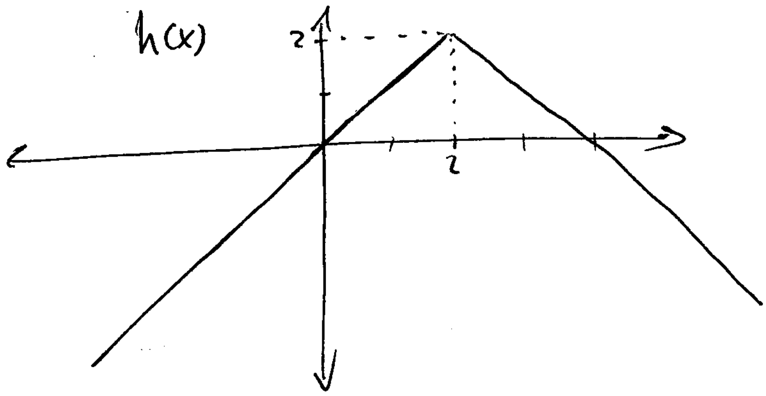
$$\mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ \mathbb{P}(x \in [-y, y^2]) & y > 0 \end{cases}$$

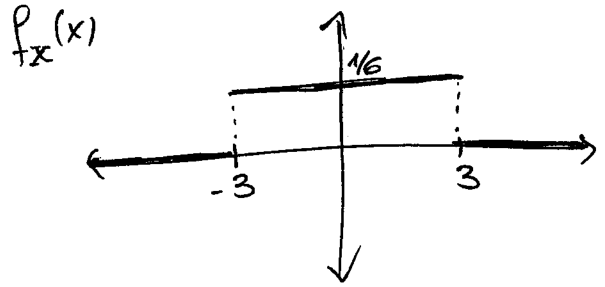
$$= \int_{-y}^{y^2} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-y}^{0} f(x)\,dx}_{=0} + \int_0^{y^2} f(x)\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x=y^2} = 1 - e^{-y^2}$$

$$\mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-y^2} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

11] La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo $(-3,3)$. Obtener la función de distribución de la nueva variable aleatoria $Y = h(X)$, donde:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 2 \\ 4-x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$





$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(h(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq h^{-1}(y)) = \mathbb{P}(X \in A_y^h)$$

$$A_y^h = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{para} \quad y \geq 2 \\ (-\infty, y] \cup [4-y, \infty) & \text{para} \quad y < 2 \end{cases}$$

Observación

Como $h(x) = \begin{cases} x \\ 4-x \end{cases}$

entonces $h^{-1}(y) = \begin{cases} y \\ 4-y \end{cases}$

porque $\begin{cases} y = x \Rightarrow x = y \\ y = 4-x \Rightarrow x = 4-y \end{cases}$

Entonces:

$$\mathbb{P}(X \in A_y^h) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1 & \text{para} \quad y \geq 2 \\ \int_{(-\infty,y] \cup [4-y,\infty)} f_X(x)\,dx & \text{para} \quad y \leq 2 \end{cases}$$

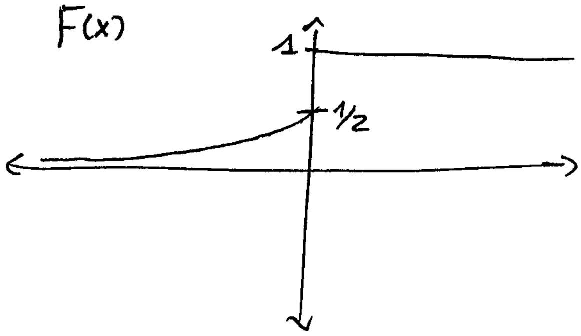
$$\mathbb{P}((-\infty, y] \cup [4-y, \infty)) = \begin{cases} \int_{-3}^{y} 1/6\,dx + \int_{4-y}^{3} 1/6\,dx & \to 4-y < 3 \Rightarrow \boxed{y > 1} \text{ e } \boxed{y < 2} \Rightarrow \boxed{y \in [1,2]} \\ \int_{-3}^{y} 1/6\,dx & \to 4-y > 3 \text{ e } \boxed{y > -3}; \quad \boxed{y < 1} \Rightarrow y \in [-3, 1) \\ 0 & \text{para} \quad \boxed{y < -3} \end{cases}$$

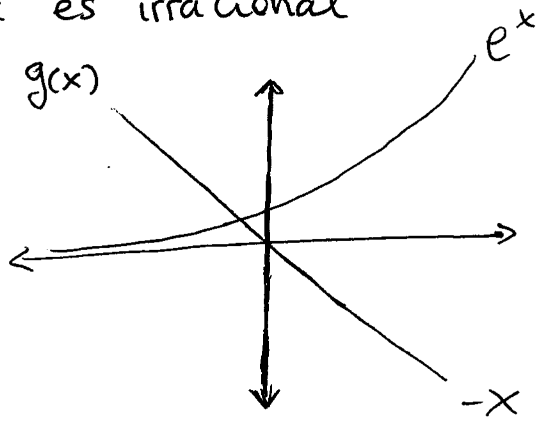
15.) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidades en el que $\mathbb{P}$ viene dado por la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Obtener la función de distribución inducida por la variable aleatoria

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$





$$F_Y(y) = \mathbb{P}(\{Y \leq y\}) = \mathbb{P}(\{e^x \leq y, x \in \mathbb{Q}\} \cup \{-x \leq y, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}) =$$

$$= \mathbb{P}(e^x \leq y, x \in \mathbb{Q}) + \mathbb{P}(-x \leq y, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}\{0\} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} + \int_{-\infty}^{y} F'(x)\,dx = \begin{cases} 1/2 & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} + \begin{cases} e^{y/2} & y < 0 \\ 1/2 & y \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} e^{y/2}, & y < 0 \\ 1, & y > 0 \end{cases}$$