Autómatas y Lenguajes.
Ejercicios sobre autómatas finitos y lenguajes regulares.

1. Diseña expresiones regulares para los siguientes lenguajes:

   a. $L = \{a^n b^m : n + m \text{ es impar}\}$.
   b. Conjunto de números binarios que contienen la subcadena 1010.
   c. Identificadores de un lenguaje de programación que empiezan con el símbolo @, seguido de una letra minúscula y cualquier combinación de letras minúsculas o números.

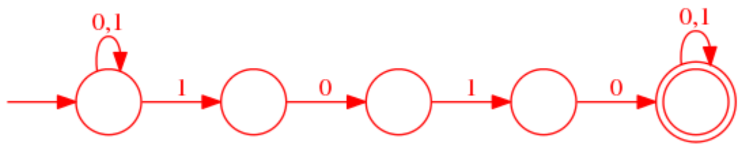
   Solución:
   a. `(aa)*(bb)*b + (aa)*a(bb)* ≡ (aa)*(a+b)(bb)*`
   b. (0+1)*1010(0+1)*
   c. @(a+b+...+z)(a+b+...+z+0+1+...+9)*

2. Diseña un autómata finito (determinista o no determinista) que reconozca cada uno de los siguientes lenguajes:

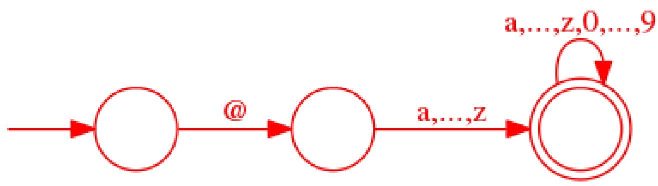
   a. Conjunto de números binarios que contienen la subcadena 1010.
   b. Identificadores de un lenguaje de programación que empiezan con el símbolo @, seguido de una letra minúscula y cualquier combinación de letras minúsculas o números.

   Solución:

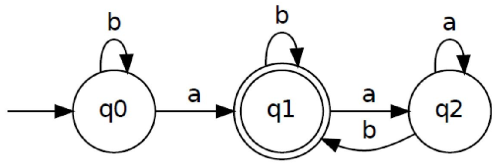
   a.



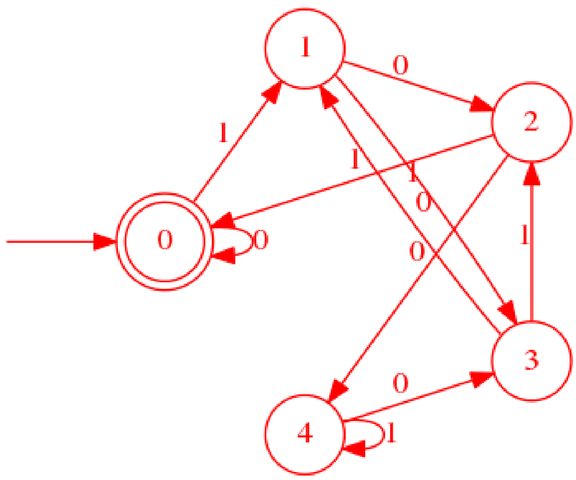
   b.



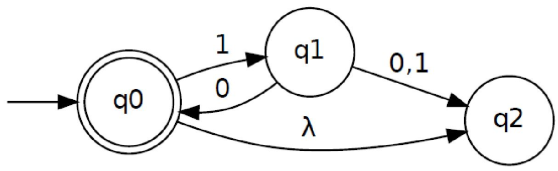
3. Indica cuál es el lenguaje aceptado por el siguiente autómata:



Solución: Cadenas formadas con los símbolos a y b que o bien son de la forma b*a o bien acaban en b y tienen al menos una a.



4. Para el autómata siguiente, encuentra $\delta^*(q_0, 1011)$ y $\delta^*(q_1, 01)$.



Solución: $\delta^*(q_0, 1011) = \{q_2\}$, $\delta^*(q_1, 01) = \{q_1\}$

Para $\delta^*(q_0, 1011)$

1. $\delta(q_0, 1)=\{q_1\}$ (a pesar de que hay que explorar las transiciones **λ** que llevarían a q_2 antes de procesar el 1 para luego morir la rama porque no puede transitar con 1
2. $\delta(q_1, 0)=\{q_0,q_2\}$
   - ambos están claros por las transiciones con 0 desde q_1.
   - *a* q_2 también se llega tras llegar a q_0 por las transiciones **λ** desde él.
3. $\delta(\{q_0,q_2\}, 1)=\{q_1\}$
   - $\delta(q_0, 1)=\{q_1\}$ como hemos visto antes
   - $\delta(q_2, 1)=\{\}$ ya que no puede transitar
4. $\delta(q_1, 1)=\{q_2\}$ ya que es la única posible.

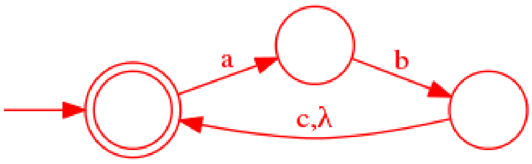
Para $\delta^*(q_1, 01)$ basta con mirar el razonamiento anterior desde el paso 2 al 3

5. Construye un autómata finito no determinista con tres estados que acepte el lenguaje

   $L = \{ab, abc\}^*$.

   ¿Es posible hacerlo con menos de tres estados?

   Solución:



No es posible hacerlo con menos de tres estados. **ME FALTARÍA UN ARGUMENTO yo calcularía el mínimo determinista... para poder ponerlo con certeza.**

6. Sea el lenguaje $L = \{a^n b^n : n < M\}$, con M un número entero positivo. Indica razonadamente si el lenguaje es o no regular.
   Solución: Es un lenguaje regular porque es finito.

8. Un nombre de variable válido en PHP empieza por el símbolo $, seguido de una letra o un underscore, seguido de cualquier número de letras, números o underscores. Las letras mayúsculas y minúsculas son distintas. Da una expresión regular para el nombre de una variable en PHP.
   Solución: $(a + … + z + A + … + Z + _)(0 + … + 9 + a + … + z + A + … + Z + _)*

9. Encuentra todas las cadenas en $L((a + b)^*b(a + ab)^*)$ de longitud menor que 4.
   Solución: b, ab, bb, ba, aab, abb, bab, bbb, aba, bba, baa

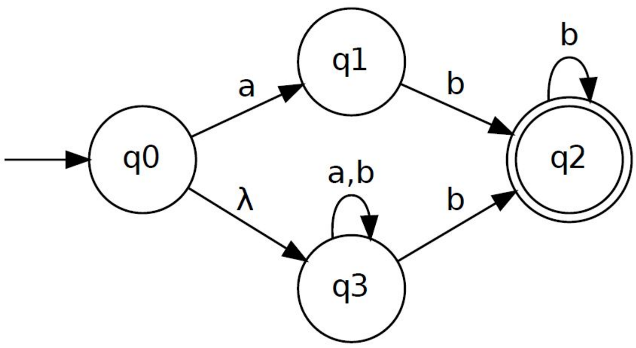
   Una explicación sistemática

- Hay una b obligatoria
  - Como prefijo y sufijo son opcionales, lo mínimo es que esté la b sola **b**
  - Lo que le precede es opcional pero considerando que lo que le sigue también tienen que pertencer los prefijos que den cadenas de hasta 3 letras
    - Con 1 letra de (a+b)*
      - a, b Que origina **ab** y **bb**
    - Con 2 letras de (a+b)*
      - aa, ab, ba, bb Que origina **aab abb bab bbb**
  - Ahora vemos que los sufijos son combinaciones de a y ab, como debe haber una b nos quedan a lo más dos letras más.

        - Añadiría los casos según lo que ya hayamos usado
            - Si no hay prefijo
                - Tenemos una b
                    - Con una letra sería a daría **ba**
                    - Con dos letras sería
                        - ab (la otra posible cadena) lo que daría bab que ya está
                        - aa (dos letras tomadas del conjunto sin coger ab) lo que daría **baa**
            - Si hay prefijo de longitud 1 en todos los casos sólo podemos añadir una leta más que sólo puede ser la a (la otra opción ab supera el número de letra)
                - ab, daría **aba**
                - ba, aría **baa**
            - Si hay prefijo de longitud 2 no puede haber sufijo... pasaríamos de tres.
- Recontando las resaltadas tenemos las once cadenas

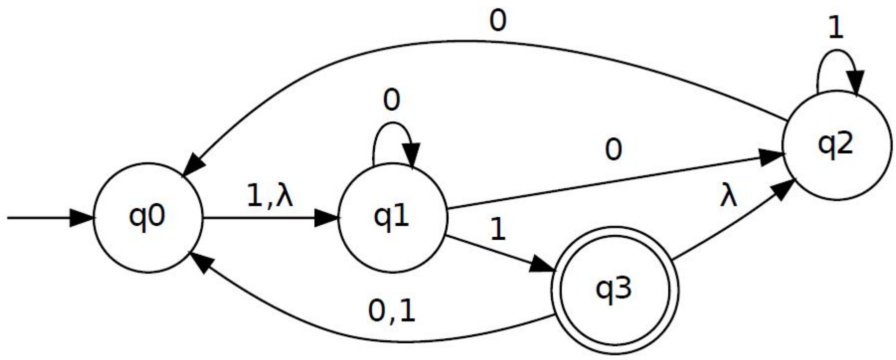
10. Encuentra una expresión regular para el lenguaje de las cadenas que contienen al menos una a y exactamente dos bs (sobre el alfabeto ∑ = {a, b}).
    Solución: a*aba*ba* + a*ba*aba* + a*ba*ba*a

11. Indica cuál es el lenguaje reconocido por el siguiente autómata finito. Es suficiente con dar la expresión regular correspondiente.



Solución: abb* + (a+b)*bb*

12. Para el autómata siguiente, encuentra $\delta^*(q_0, 1011)$, $\delta^*(q_0, 000)$ y $\delta^*(q_0, 010)$.



Solución:

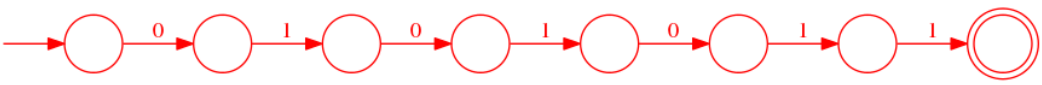
$\delta^*(q_0, 1011) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\delta^*(q_0, 000) = \{q_0, q_1, q_2\}$
$\delta^*(q_0, 010) = \{q_0, q_1\}$

13. Construye autómatas finitos para cada uno de los siguientes lenguajes.

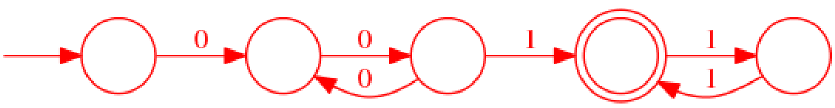
a. $L = \{0101011\}$.
b. $L = \{0^{2n}1^{2m+1} : n \geq 1,\ m \geq 0\}$.
c. Lenguaje formado por los números en sistema decimal que son múltiplos de 2.

Solución:

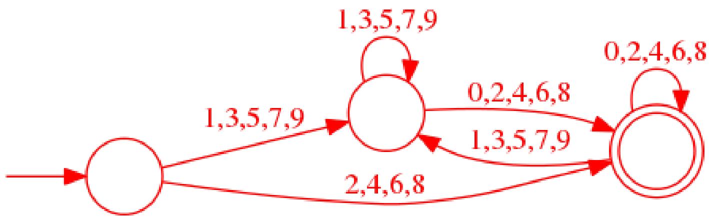
a.



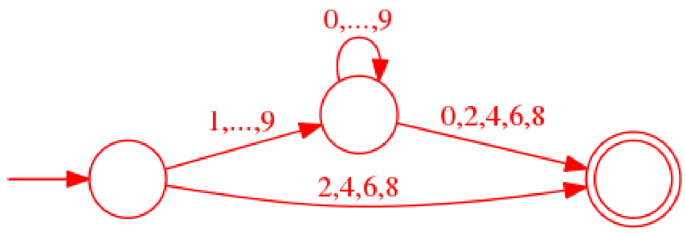
b.



c. Versión determinista:



c. Versión no determinista:

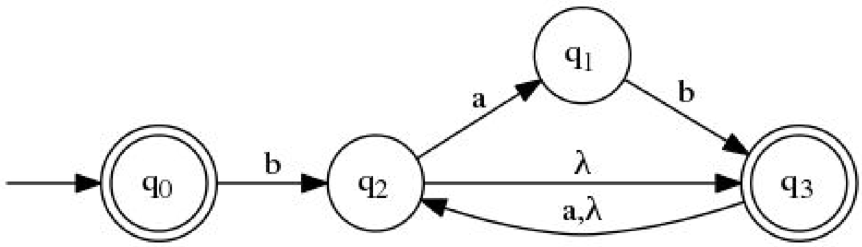


14. Responde a las siguientes cuestiones:

a. Encuentra todas las cadenas en $L((a^* + b)(b + ab^*))$ de longitud menor que 4 (2 puntos).
Solución: a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, abb, bab

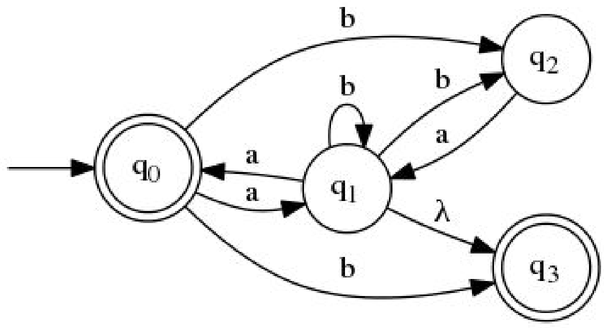
b. Encuentra una expresión regular para el lenguaje de las cadenas que contienen al menos dos *b*s (sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$) (1 punto).
Solución: (a+b)*b(a+b)*b(a+b)*

15. Indica cuáles de las siguientes cadenas son aceptadas por el autómata del dibujo: λ, baaa, baaab, baababaa, babbaa.



Solución: Las cadenas λ, baaa, baaab y baababaa son aceptadas, la cadena babbaa es rechazada. Una expresión regular para el lenguaje del autómata es λ + b(ab + a)*

16. Para el autómata siguiente, encuentra $\delta^*(q_0, \text{aaba})$ y $\delta^*(q_0, \text{baab})$, e indica razonadamente si el lenguaje aceptado por el autómata es {a+b}*.



Solución:

$\delta^*(q_0, \text{aaba}) = \{q_1, q_3\}$

$\delta^*(q_0, \text{baab}) = \{q_2, q_3\}$

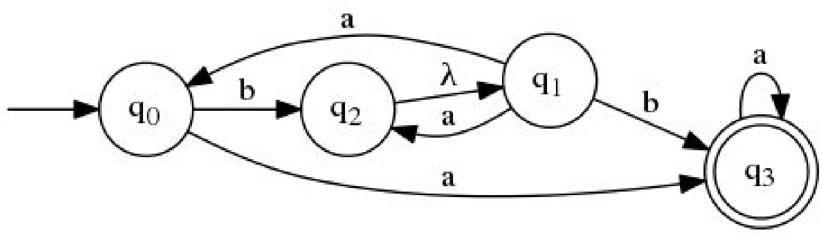
El lenguaje no puede ser {a+b}* porque, por ejemplo, el autómata no acepta la cadena aabb.

17. Responde a las siguientes cuestiones:

a. Encuentra todas las cadenas en *L((ab + a)* + aa*)* de longitud menor que 4 (2 puntos).
   Solución: λ , a, aa, ab, aaa, aba, aab

b. Encuentra una expresión regular para el lenguaje de las cadenas formadas con los símbolos {*a*, *b*} que tienen longitud impar (1 punto).
   Solución: (a+b)((a+b)(a+b))*

18. Indica cuáles de las siguientes cadenas son aceptadas por el autómata del dibujo: λ , aaaa, aaab, baaabaaa, baabbaaa.



Solución: Las cadenas aaaa, baaabaaa y baabbaaa son aceptadas, las cadena λ y aaab son rechazadas. Una expresión regular para el lenguaje del autómata es aa* + b(ab + a)*ba*. Informalmente podemos ver que el lenguaje contiene palabras que son de una de estas dos formas:

- O bien palabras formadas sólo por aes, con al menos una a.
- O bien palabras de la forma bv^nba^m, donde:
  - v es a o ab y n puede ser 0
  - m puede ser 0

19. Encuentra expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto {a, b}.

a. Cadenas que empiezan por *ab* y acaban por *b*.
   Solución: ab(a+b)*b + ab

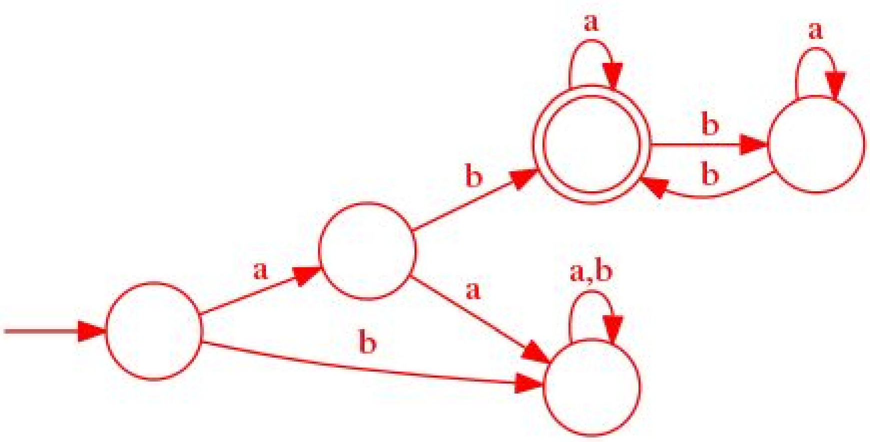
b. Cadenas que empiezan por *ab* ó acaban por *b*.
   Solución: ab(a+b)* + (a+b)*b

c. Cadenas que tienen un número impar de letras.
   Solución: (a+b)(aa+ab+ba+bb)* ó (a+b)((a+b)(a+b))*

d. Cadenas que empiezan por *ab* y tienen un número impar de *b*'s.
   Solución: aba*(ba*ba*)* ó ab(a+ba*b)*

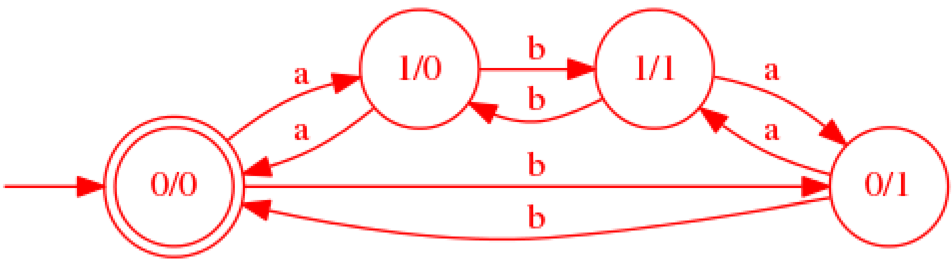
20. Diseña un autómata finito para el lenguaje de las cadenas con {a, b} que empiezan por *ab* y tienen un número impar de *b*'s.

Solución:



21. Diseña un autómata finito para el lenguaje de las cadenas formadas con los símbolos *a* y *b* que tienen un número par de *a*'s y un número par de *b*'s.

Solución:



22. Encuentra expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto {a, b}.

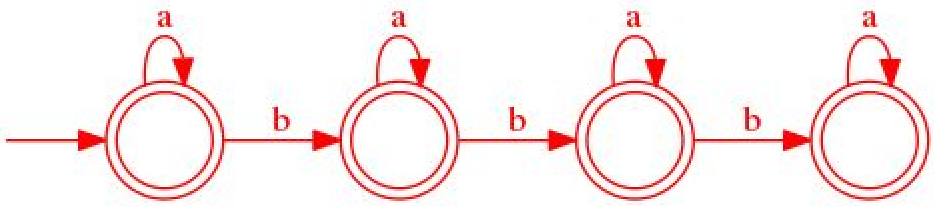
a. Cadenas que empiezan o acaban por *b*.
   Solución: b(a+b)* + (a+b)*b

b. Cadenas que empiezan por *b* y tienen un número par de letras.
   Solución: b(a+b)((a+b)(a+b))*

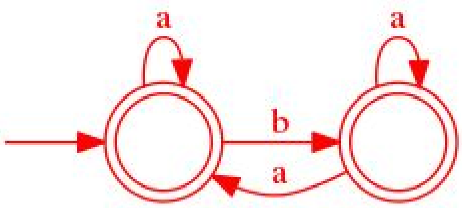
c. Cadenas que tienen como mucho tres *b*s.
   Solución: a* + a*ba* + a*ba*ba* + a*ba*ba*ba*

d. Cadenas que no tienen dos *b*s seguidas.
   Solución: a*ba*(aa*ba*)* + a*

23. Diseña un autómata finito (puede ser no determinista) para el lenguaje de las cadenas con {a, b} que tienen como mucho tres *b*s.



24. Diseña un autómata finito (puede ser no determinista) para el lenguaje de las cadenas con {a, b} que no tienen dos *b*s seguidas.



Es equivalente a quitar el ciclo (a) del estado de la derecha.