angeldavid.martinezm@uam.es | PRÁCTICAS CyN

**CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2016-2017.** **HOJA 1.**

**1)** Decir cuáles de las siguientes condiciones son *necesarias*, cuáles son *suficientes* y cuáles *son necesarias y suficientes* para que un número natural $n$ sea divisible por 6.

a) $n$ es divisible por 3;
b) $n$ es divisible por 12;
c) $n = 24$;
d) $n^2$ es divisible por 6;
e) $n$ es par y divisible por 3;
f) $n$ es par o divisible por 3.

**2)** Explica por qué son equivalentes las proposiciones: $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$ , $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$ , y confírmalo con la tabla de verdad de cada una de ellas.

**3)** En las siguientes proposiciones, $x$, $y$ son números reales. Traduce cada una de ellas a frases que no contengan ningún símbolo, sólo palabras. Explica cuáles son ciertas y escribe la negación de las que no lo sean.

a) $\forall x\, ((x > 0) \Rightarrow \exists y\, ((y > 0) \wedge (y^2 = x)))$
b) $\exists x\, \forall y\, ((y > x) \Rightarrow (y > 5))$
c) $\exists x\, (1 < x^2 < x)$
d) $\forall y\, \exists x\, ((x \in \mathbb{R}) \wedge (x^3 = y + 1))$

**4)** Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a símbolos y cuantificadores. Las respuestas no deben contener palabras.

a) El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva.
b) Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.

**5)** Razona con palabras por qué los siguientes pares de afirmaciones no son equivalentes en los números naturales, y explica cuáles de ellas son ciertas.

a) $\forall x\, \exists y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ y $\exists x\, \forall y\, (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ .
b) $\exists x\, \forall y,\ x < y < x + 2$ y $\forall x\, \exists y,\ x < y < x + 2$ .

**6)** Son ciertas las siguientes afirmaciones en los n'umeros naturales? Escribir su negación.

a) $\forall x\, \exists y,\ y < x$
b) $\exists x\, \forall y,\ \forall z, x < z < y$

**7)** Demuestra por reducción al absurdo que $\log_3 1215$ es irracional.

**8)** Se llama *cuadrado perfecto* a un número de la forma $a^2$ donde $a$ es un número natural. Demuestra que si un número natural $n > 0$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ no puede ser un cuadrado perfecto.

**9)** Halla una expresión para la suma de los primeros números naturales positivos: $1+2+\cdots+n$. Y otra para la suma de los $n$ primeros términos de la progresión aritmética: $a+kd$, $k = 0, 1, \ldots$

**10)** Halla la suma de las $n$ primeras potencias de $r$: $r^0 + r^1 + \cdots + r^{n-1}$. Halla una fórmula general para la suma de las $n$ primeros términos de una progresión geométrica $cr^k$, $k = 0, 1, \ldots$

**11)** Encuentra una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono de $n$ lados. *Indicación: recuerda que los ángulos de un triángulo suman* $\pi$ **radianes.**

**12)** Demostrar por inducción:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ , para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
b) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ , para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
c) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ , para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

**13)** a) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 2$, entonces $2^n > 1 + 2n$ .
b) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}, n > 4$, entonces $2^n > n^2 + 1$ .

c) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $a_n = 4^n + 6n - 1$ es divisible por 9.
d) Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $b_n = 7^n - 4^n$ es divisible por 3.

**14)** Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

**15)** Demostrar que todo número natural mayor que uno, es producto de números primos.

**16)** Probar que hay infinitos primos. Es decir, que hay más de $n$ primos distintos para todo $n \in \mathbb{N}$.

**17)** Demostrar que $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

**18)** Demostrar, para todo $q \neq 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, la igualdad

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{q^{2^{n+1}}-1}{q-1}.$$

**19)** Supongamos que $A \subset B \subset C$. Determinar $A \setminus B, A \setminus C$ y $A \cup B$.

**20)** Probar las siguientes igualdades para conjuntos arbitrarios $S, T, U$ y $V$. *(Indicación: los diagramas de Venn pueden ser útiles para orientarse, pero la demostración no debe depender de ellos).*

a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$
b) $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$
c) $(S \setminus (T \cap U)) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$
d) $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$
e) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$

**21)** Dar una descripción explícita del conjunto $\mathcal{P}(S)$ de partes de $S = \{a, b, 1, 2\}$.
Demostrar que $S \subset T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$. Concluir que $S = T$ si y sólo si $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T)$.

**22)** Probar, o demostrar que son falsas, las siguientes afirmaciones:

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ; b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ ; c) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ .

**23)** Sean $A, B, C$ conjuntos dados tales que $B \subset A$. Describir en cada caso los conjuntos $X$ que satisfacen las ecuaciones:

i) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$, si sabemos que $A \subset C$. ii) $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$, si sabemos que $A \cap C = \emptyset$ .

**18.** $q \neq 1; \quad n \in \mathbb{N}$

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{q^{2^{n+1}}-1}{(q-1)} =$$

$$=(q-1)\left[(q+1)(q^2+1)(q^{2^2}+1)\cdots(q^{2^n}+1)\right] = \boxed{q^{2^{n+1}}-1}$$

$$(q^2-1)(q^2+1)\cdots(q^{2^n}+1) = (q^4-1)(q^4+1)\cdots(q^{2^n}+1) =$$

$$=(q^8-1)(q^8+1)\cdots(q^{2^n}+1) = (q^{2^n}-1)(q^{2^n}+1) = (q^{2^n})^2 - 1 =$$

$$= q^{2^n}\cdot q^{2^n} - 1 = q^{2^n+2^n} - 1 = q^{2^n\cdot 2} - 1 = \boxed{q^{2^{n+1}}-1}$$

**21.** i) $S = \{a, b, 1, 2\}$

$P(S) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{1\}, \{2\}, \{a,b\}, \{a,1\}, \{a,2\}, \{b,1\}, \{b,2\}, \{1,2\}, \{a,b,1\}, \{a,b,2\}, \{a,1,2\}, \{b,1,2\}, \{a,b,1,2\}\}$

ii) $S \subset T \Leftrightarrow P(S) \subset P(T)$ → probar $S \subset T \Rightarrow P(S) \subset P(T)$ [1]
→ probar $P(S) \subset P(T) \Rightarrow S \subset T$ [2]

[1] $S \subset T$

$X \in P(S) \Rightarrow X \subset S \subset T \Rightarrow X \subset T \Rightarrow X \in P(T)$

$P(S) \subset P(T)$

[2] $P(S) \subset P(T)$

$S \subset S \Rightarrow S \in P(S) \subset P(T) \Rightarrow S \in P(T) \Rightarrow S \subset T$

iii) $S = T \Leftrightarrow P(S) = P(T)$ → probar $S = T \Rightarrow P(S) = P(T)$ [1]
→ probar $P(S) = P(T) \Rightarrow S = T$ [2]

[1] $\left.\begin{cases} S \subset T \Rightarrow P(S) \subset P(T) \\ S \supset T \Rightarrow P(S) \supset P(T) \end{cases}\right\} \Rightarrow P(S) = P(T)$

[2] $\left.\begin{cases} P(S) \subset P(T) \Rightarrow S \subset T \\ P(T) \subset P(S) \Rightarrow T \subset S \end{cases}\right\} \Rightarrow S = T$

20.

b) $(S\setminus(T\cup U)) = (S\setminus T)\cap(S\setminus U)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{i) } (S\setminus(T\cup U)) \subset [(S\setminus T)\cap(S\setminus U)] \\ \text{ii) } [(S\setminus T)\cap(S\setminus U)] \subset (S\setminus(S\cup U)) \end{array}}$$

i) Sea $x\in S\setminus(T\cup U)$

$x\in S$

$x\notin T\cup U \Rightarrow \begin{cases} x\notin T \\ x\notin U \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x\in S \ \wedge \ x\notin T \Rightarrow x\in S\setminus T \\ x\in S \ \wedge \ x\notin U \Rightarrow x\in S\setminus U \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in(S\setminus T)\cap(S\setminus U)$$

ii) Lo mismo pero al revés.

---

e) $(S\cup T)\times V = (S\times U)\cup(T\times V)$

i) $[(S\cup T)\times V] \subset [(S\times V)\cup(T\times V)]$

$x\in[(S\cup T)\times V]$

$x=(z,w)\in[(S\cup T)\times V] \Rightarrow \begin{cases} z\in(S\cup T)\Rightarrow z\in S \ \vee \ z\in T \\ w\in V \end{cases}$

<u>caso 1</u>: $z\in S \Rightarrow (z,w)\in S\times V \Rightarrow x\in[(S\times V)\cup(T\times V)]$

<u>caso 2</u>: $z\in T \Rightarrow (z,w)\in T\times V \Rightarrow x\in[(S\times V)\cup(T\times V)]$

ii) $[(S\times V)\cup(T\times V)] \subset [(S\cup T)\times V]$

$x\in[(S\times V)\cup(T\times V)] \Rightarrow x\in S\times V \ \vee \ x\in T\times V$

<u>caso 1</u>: $x\in S\times V \Rightarrow x=(z,w),\ \left.\begin{array}{l} z\in S\Rightarrow z\in S\cup T \\ w\in V \end{array}\right\} \Rightarrow (z,w)=x\in(S\cup T)\times V$

<u>caso 2</u>: $x\in T\times V \Rightarrow x=(z,w),\ \left.\begin{array}{l} z\in T\Rightarrow z\in S\cup T \\ w\in V \end{array}\right\} \Rightarrow (z,w)=x\in (S\cup T)\times V$

$\boxed{22.}$

a) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

$A = \{a\}$

$B = \{b\}$

$A \cup B = \{a, b\}$

FALSO, hemos encoutrado un contraejemplo.

$P(A \cup B) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$P(A) = \{\{\emptyset\}, \{a\}\}$

$P(B) = \{\{\emptyset\}, \{b\}\}$

$P(A) \cup P(B) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}\}$

b) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

i) $P(A \cap B) \subset (P(A) \cap P(B))$

$X \in P(A \cap B) \Rightarrow X \subset A \cap B \Rightarrow X \subset A \wedge X \subset B \Rightarrow$

$\Rightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B) \Rightarrow X \in P(A \cap B)$

ii) $(P(A) \cap P(B)) \subset P(A \cap B)$

$X \in (P(A) \cap P(B)) \Rightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow X \subset A \wedge X \subset B \Rightarrow X \subset A \cap B \Rightarrow X \in P(A \cap B)$

# EJERCICIOS CONJUNTOS Y NÚMEROS

angeldavid.martinezm@uam

**1.**

a) necesario

b) suficiente

c) suficiente

d) necesario y suficiente

e) necesario y suficiente

f) necesario

**7.** $\log_3 1215$ es irracional (demostración por reducción al absurdo)

$3^x = 1215$ ; $x$ es racional ; $x = p/q$ ; $p \wedge q$ → son primos, enteros +, $q \neq 0$

$3^{p/q} = \sqrt[q]{3^p}$ ; $1215 = 3^5 \cdot 5$

$$3^{p/q} = 3^5 \cdot 5 \Rightarrow \left(3^{p/q}\right)^q = \left(3^5 \cdot 5\right)^q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^p = 3^{5q} \cdot 5^q$$

$3^p$ ↳ $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3$ (p veces) ⟹ nunca aparece un 5 como factor ⟹ no es factorizable en 5

CONTRADICCIÓN

**4.**

b) ambas válidas

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \exists\, y \neq z \in \mathbb{R} \ (y^4 = x \wedge z^4 = x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \exists\, y, z \in \mathbb{R} \ (y^4 = x \wedge z^4 = x \wedge y \neq z)$$

**3.**

c) $\exists x \,(1 < x^2 < x)$ FALSO

Vamos a suponer que es cierto y que hay un $x_0 > 1$ y $x_0 > x_0^2$ y intentaremos llegar a una contradicción demostrando que es falso.

$$\boxed{x_0 > 1} \ ; \quad x_0 > x_0^2 \Rightarrow \frac{x_0}{x_0} > \frac{x_0^2}{\cancel{x_0}} \Rightarrow \boxed{1 > x_0}$$

CONTRADICCIÓN

Por lo que $\exists x (1 < x^2 < x)$ es falso.

$\boxed{\text{OTRA FORMA 3.C}}$

$\exists x\,(1 < x^2 < x)$ FALSO

$\forall x\left(\neg(1 < x^2 \wedge x^2 < x)\right)$

$\forall x\left(\neg(1 < x^2) \vee \neg(x^2 < x)\right)$

$\forall x\,(x^2 < 1 \vee x^2 > x)$ (ahora habría que demostrar que esto es cierto).

$\boxed{2.}$ $S \vee (\neg R) \Rightarrow T \equiv (\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$

Ambas proposiciones anteriores son equivalentes porque la verdad del teorema $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$ equivale a la verdad de su teorema contrarrecíproco: $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$

TEOREMA: $A \Rightarrow B$ $\equiv$ TEOREMA CONTRARRECÍPROCO: $\neg B \Rightarrow \neg A$

$$S \vee (\neg R) \Rightarrow T \equiv (\neg T) \Rightarrow \neg\left(S \vee (\neg R)\right) \equiv$$

$$\equiv (\neg T) \Rightarrow \neg S \wedge \neg\neg R \equiv (\neg T) \Rightarrow \neg S \wedge R$$

| $S$ | $R$ | $T$ | $\neg R$ | $S \vee (\neg R)$ | $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | V | V | F |
| F | F | V | V | V | V |
| F | V | F | F | F | V |
| F | V | V | F | F | V |
| V | F | F | V | V | F |
| V | F | V | V | V | V |
| V | V | F | F | V | F |
| V | V | V | F | V | V |

CONTINUACIÓN 2

| $S$ | $R$ | $T$ | $\neg S$ | $\neg T$ | $(\neg S) \wedge R$ | $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | F | F | V |
| F | V | F | V | V | V | V |
| F | V | V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | V | F | F |
| V | F | V | F | F | F | V |
| V | V | F | F | V | F | F |
| V | V | V | F | F | F | V |

Como se puede observar, ambas tablas son equivalentes.

$\boxed{6.}$ a) $x, y \in \mathbb{N}$

$\forall x \; \exists y \, , \; y < x$ contraejemplo $x = 0$ $y$?

neg. $\exists x \; \forall y \, , \; y \geq x \longrightarrow$ cierto para : $x = 0$

b) $x, y, z \in \mathbb{N}$

$\exists x \; \forall y , \forall z \quad x < z < y$

$\exists x \; \forall y , \forall z \quad (x \leq z) \wedge (z \leq y)$

neg. $\forall x \; \exists y \; \exists z \left[ (x \geq z) \vee (z \geq y) \right]$

**11.** Sea $n \geq 3$

Suma de los ángulos (en radianes) interiores de un polígono $= (n-2)\pi$

$$\boxed{\text{Suma ángulos interiores polígono} = (n-2)\pi} \equiv P(n) \qquad n \geq 3$$

$n =$ nº lados polígono

A) Cierto para $n = 3$

B) Para $n+1$ lados $\Rightarrow \boxed{S_{\text{ángulos}} = (n-1)\pi}$

polígono $n+1$ lados $=$ polígono $n$ lados $+$ triángulo

$$(n-2)\pi \qquad + \qquad \pi$$

$$(n-2)\pi + \pi = \pi\left((n-2)+1\right) = \pi(n-1) \quad \checkmark$$

**12.** b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}} \equiv P(n)$$

A) $P(1) = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$

B) $P(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i-1)} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}}^{\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+n+1} =$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$\boxed{8.}$ $n = a^2$ ; $\sqrt{n} = a$ $n, a, b > 0$

$n+1 = b^2$ ; $\sqrt{n+1} = b$ $n \in \mathbb{N}$

$$b^2 - a^2 = \cancel{n} + 1 - \cancel{n} \Rightarrow b^2 - a^2 = 1 \Rightarrow (b-a)(b+a) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 1 \end{cases}$$

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 0$$

No hay número natural $n > 0$, siendo cuadrado perfecto, que su siguiente también lo sea.

$$a^2 = n \Rightarrow 0^2 = 0 \Rightarrow n \not> 0$$

$\boxed{12.}$ c) $\boxed{1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1} \equiv P(n)$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

A) $P(1) \Rightarrow 1.1! = 2! - 1 \Rightarrow 1 = 2 - 1 \Rightarrow 1 = 1$ ✓

B) $P(n+1)$

$$\underbrace{1.1! + 2.2! + \dots + n.n!}_{\substack{\text{H.I} \\ = \\ (n+1)! - 1}} + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$$

$$(n+1)! \cancel{-1} + (n+1)(n+1)! = (n+2)! \cancel{-1} \Rightarrow (n+1)! + (n+1)(n+1)! = (n+2)! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1)! \left( n+1 + 1 \right) = (n+2)! \Rightarrow (n+1)!\,(n+2) = (n+2)!$$ ✓

$\boxed{13}$ c) $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a_n = 4^n - 6n - 1 \text{ divisible por } 9}$$

$$\boxed{P(n) \equiv 4^n - 6n - 1 = 9k}$$

A) $P(1) \Rightarrow 4^1 - 6.1 - 1 = 9k \Rightarrow 9 = 9k$ ✓

B) $P(n)$ cierto

$P(n+1)$

$$4^{n+1} - 6(n+1) - 1 = 9k'$$

$$4.4^n - 6n - 6 - 1 = 9k' \Rightarrow 3.4^n + \underbrace{4^n + 6n - 1}_{HI} + 6 = 9k' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3.4^n + 6 = 9k' \Rightarrow \cancel{3}(4^n + 2) = \cancel{9}^{3}k' \Rightarrow \boxed{4^n + 2 = 3k} \equiv Q(n)$$

A) $Q(1) = 4 + 2 = 3k \Rightarrow 6 = 3k$ ✓

B) $Q(n+1) = 4^{n+1} + 2 = 3k' \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4.4^n + 2 = 3k' \Rightarrow 3.4^n + \underbrace{4^n + 2}_{(H.I)'} = 3k' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3.4^n = 3k'$$ ✓

**14.**

$$\boxed{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k} \equiv P(n)$$

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = \underbrace{3}_{\text{múltiplo de } 3}\underbrace{n(n^2+3n+5)}_{\Downarrow} + \underbrace{9}_{\text{múltiplo de } 9}$$

Tenemos que demostrar que esto es múltiplo de 3

- Si $n$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow 3n(n^2+3n+5)$ ya es múltiplo de 9.

- Si $n$ no es múltiplo de 3 $\Rightarrow n^2+3n+5$ tiene que ser múltiplo de 3

$$\boxed{n^2+3n+5 = 3K} \equiv Q(n)$$

A) $Q(1) \Rightarrow 1^2 + 3.1 + 5 = 3K \Rightarrow 1+3+5 = 3K \Rightarrow 9 = 3K$ ✓

$Q(2) \Rightarrow 2^2 + 3.2 + 5 = 3K \Rightarrow 4+6+5 = 3K \Rightarrow 15 = 3K$ ✓

$Q(n+3)$

$$(n+3)^2 + 3(n+3) + 5 = 3K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 6n + 9 + 3n + 9 + 5 \Rightarrow \underbrace{n^2+3n+5}_{H.I = 3K} + 6n + 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{3K + 6n + 18}_{\text{Todo divisible entre } 3}$$

Queda demostrado que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9

**16.**

Supongamos que hay una cantidad finita de nos primos:

$P_1 = 2$

$P_2 = 3$

$P_3 = 5$

$\vdots$

$P_k =$ último primo

$$\boxed{q = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_k + 1}$$

→ Si es primo, lleva a contradicción, pues hemos establecido $P_k$ como el último primo $q > P_1 \ldots q > P_k$

→ Si NO es primo, se puede escribir como un compuesto:

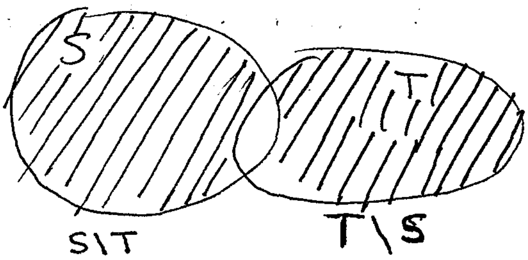
$q = r.s \quad r > 1,\ s > 1$, supongamos $r$ primo.

$(r \neq P_1) \wedge \ldots (r \neq P_k)$ contradicción


**20.**

a) $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$

El diagrama de Venn solo es una ayuda




$S \cup T - S \cap T$

$S \cup T \setminus S \cap T$

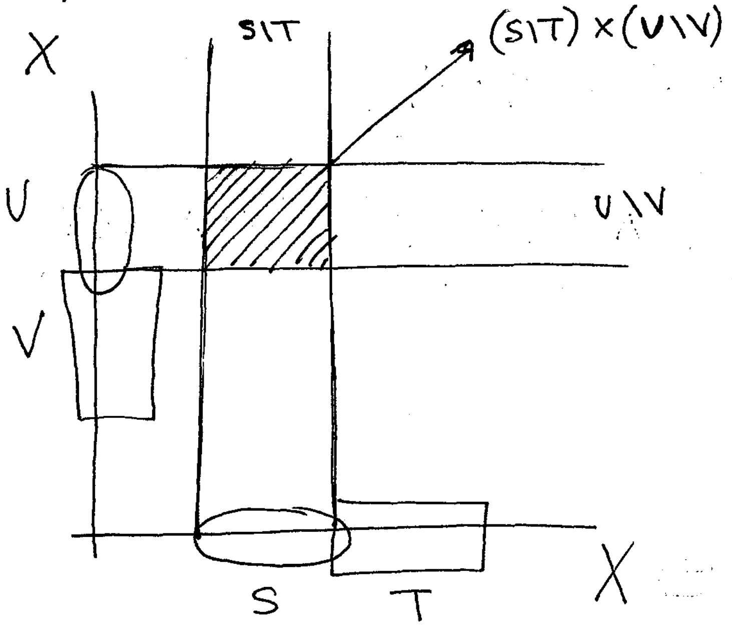
Dem

$(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cap T^c) \cup (T \cap S^c) = \left(S \cup (T \cap S^c)\right) \cap \left(T^c \cup (T \cap S^c)\right)$

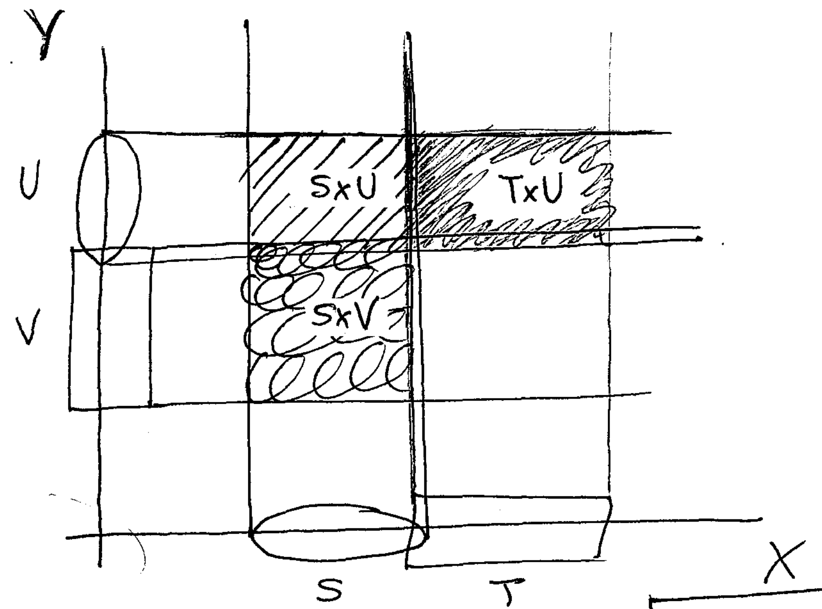
$= \left[(S \cup T) \cap \underbrace{\cancel{(S \cup S^c)}}_{\text{es todo}}\right] \cap \left[\underbrace{\cancel{(T^c \cup T)}}_{\text{es todo}} \cap (T^c \cup S^c)\right] =$

$= (S \cup T) \cap (T^c \cup S^c) = (S \cup T) \cap (T \cap S)^c = S \cup T \setminus (S \cap T)$

[20.] d) $\overline{(S \setminus T) \times (U \setminus V)} = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$ ?




$S, T \subset X$
$U, V \subset Y$




$(x,y) \in (1) \iff \left.\begin{array}{l} x \in S \setminus T \\ y \in U \setminus T \end{array}\right\}$ $\boxed{\begin{array}{c} (x \in S) \wedge (x \notin T) \\ \wedge \\ (y \in U) \wedge (y \notin V) \end{array}}$ comparar

Ahora hemos de probar que:

(a) $(x,y) \in S \times U \longrightarrow x \in S, \; y \in U$

(b) $(x,y) \notin (S \times V) \cup (T \times U)$

$(x,y) \notin S \times V$, (o bien $x \notin S$, o bien $y \notin V$)

$\wedge$

$(x,y) \notin T \times U \big( (x \notin T) \vee (y \notin U) \big)$

A demostrar:

$$\left[(x \notin S) \vee (y \notin V)\right] \wedge \left[(x \notin T) \vee (y \notin U)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[(x \notin S) \cancel{\wedge (x \notin T)}\right] \vee \left[(x \notin S) \cancel{\wedge (y \notin U)}\right] \vee \left[(y \notin V) \wedge (x \notin T)\right] \vee \\ &\vee \left[(y \notin V) \cancel{\wedge (y \notin U)}\right] \end{aligned}}$$