

# Ecuaciones diferenciales

LISTA 2

2ºM/3ºDG, CURSO 2018-19

1. (\*) Hacer un estudio cualitativo de las soluciones de las siguientes ecuaciones autónomas, atendiendo principalmente a:

- a). Crecimiento y decrecimiento, y posibles puntos críticos.
- b). Estabilidad. Existencia de asíntotas.

$$\begin{array}{ll} i) \frac{du}{dt} = |u|(1-u) & ii) \frac{du}{dt} = u^2(1-u) \\ iii) \frac{du}{dt} = 1 + u(1-u^2) & iv) \frac{du}{dt} = \sqrt{u}(1-u) \text{ (con } u \geq 0). \end{array}$$

2. (\*) Sea  $f$  una función continua, y supongamos que todo problema de valor inicial para la ecuación autónoma

$$x' = f(x)$$

tiene solución única.

- a) Demostrar que toda solución  $x(t)$  no constante es una función estrictamente monótona.
- b) Demostrar que si  $x(t)$  es una solución tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c,$$

entonces  $u(t) \equiv c$  también es solución.

3. (\*) Probar que el cambio  $z = ax + by + c$  transforma la ecuación  $y' = f(ax + by + c)$  en otra de variables separadas. Aplicar este método para resolver

- $y' = (x + y)^2$ .
- $y' = \sin(x - y - 1)$ .

4. (\*) Escoger un valor adecuado de  $k$  de manera que el cambio  $z = y/x^k$  transforme la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}$$

en una ecuación de variables separadas.

5. (\*) Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas

- $x \sin \frac{y}{x} y' = y \sin \frac{y}{x} + x$ .
- $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- $x^2 y' = y^2 + 2xy$ .
- $(x^3 + y^3)dx - xy^2 dy = 0$ .

6. (\*) Hallar la solución general de :

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}.$$

*Observación: la solución  $y = x$  no aparece típicamente representada en la fórmula de la solución general. Trátese de dar una explicación, aunque sea intuitiva, de este hecho. Nótese que  $y(x) = x$  e  $y(x) = -x$  son dos soluciones de b) bajo la condición  $y(0) = 0$ , es decir, ni siquiera hay unicidad. Estos temas se tratarán más adelante en el curso.*

7. (\*) Dada la ecuación

$$y' = G\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$$

- a) Si  $AE \neq BD$ , demostrar que se pueden elegir constantes  $h$  y  $k$  de modo que el cambio de variables  $x = z - h$ ,  $y = w - k$  la transforma en una ecuación homogénea.
- b) Si  $AE = BD$ , hallar un cambio de variables que reduzca la ecuación a una de variables separadas.
- c) Aplicar los resultados de los apartados anteriores para resolver:

$$\blacksquare \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6}$$

$$\blacksquare \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x+y-6}$$

8. (\*) Calcular la solución de los siguientes problemas de valor inicial

$$a) \quad \begin{cases} x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} \sin y + y \sin x + \frac{1}{x} + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})y' = 0 \\ y(\pi) = \pi \end{cases}$$

9. (\*) Determinar si las siguientes ecuaciones son exactas, y resolverlas en caso afirmativo.

$$\blacksquare (y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0.$$

$$\blacksquare (1 + y)dx + (1 - x)dy = 0.$$

$$\blacksquare (2xy^4 + \sin y) + (4x^2y^3 + x \cos y)y' = 0.$$

$$\blacksquare 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) = \sqrt{x^2 - y}y'.$$

$$\blacksquare 3x^2(1 + \log y)dx + (\frac{x^3}{y} - 2y)dy = 0.$$

10. (\*) Resolver primero como ecuación exacta y después como ecuación homogénea:

$$\frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3} + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y}y' = 0.$$

11. (\*) Hallar un factor integrante de la forma  $\mu = \mu(x + y^2)$ , para la ecuación

$$3y^2 - x + 2y(y^2 - 3x)y' = 0.$$

Calcular la solución general de la ecuación.

12. (\*) Las siguientes ecuaciones admiten un factor integrante de la forma  $\mu = \mu(x)$ ,  $\mu = \mu(y)$ ,  $\mu = \mu(x + y)$ , o  $\mu = \mu(xy)$ . Calcular la solución:

$$a) (x + y)dx + dy = 0 \quad b) 1 + (1 + (x + y) \tan y)y' = 0$$

$$c) (1 + xy)dx + x^2dy = 0 \quad d) y + (2x - ye^y)y' = 0$$

$$e) y + (x - 3x^2y^2)y' = 0.$$

13. Demostrar que si  $\mu_1(x, y)$  y  $\mu_2(x, y) \neq 0$  son dos factores integrantes de la ecuación

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

cuyo cociente no se reduce a una constante, entonces las curvas

$$\frac{\mu_1(x, y)}{\mu_2(x, y)} = C$$

son solución de la ecuación.

14. a) Hallar todas las soluciones de las ecuaciones

$$a) \quad tx' + (1 - t)x = 0, \quad b) \quad tx' + (1 - t)x = 1,$$

b) Calcular las soluciones que cumplen  $x(0) = 0$  y  $x(0) = 1$ , o demostrar que tales soluciones no existen.

15. Demostrar que si  $Q(t)$  es un polinomio de grado  $n$ , la ecuación

$$tx' + x = Q(t)$$

tiene exactamente una solución polinómica de grado  $n$ .

**16.** (\*) Sea  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable. Demostrar que si todas las tangentes a su gráfica pasan por un mismo punto, entonces es un segmento de recta, y que si todas las normales pasan por un mismo punto, es un arco de circunferencia.

**17.** (\*) Resolver las ecuaciones lineales:

- $x' + x = 2t e^{-t} + t^2$
- $y' - 2xy = 6x \exp(x^2)$
- $xy' - 3y = x^4$ .
- $(2y - x^3)dx = xdy$ .
- $y' + y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$ .
- $(x \log x)y' + y = 3x^3$ .

**18.** La ecuación  $y' + P(x)y = Q(x)y^n$  recibe el nombre de *Ecuación de Bernoulli* (observar que es lineal en los casos particulares  $n = 0$  y  $n = 1$ ). Demostrar que el cambio de variables  $z = y^{1-n}$  transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.

Aplicar el método anterior para resolver  $xy^2y' + y^3 = x \cos x$ .

**19.** Probar que la ecuación  $y' + P(x)y = Q(x)y \log y$  puede resolverse mediante el cambio  $z = \log y$ , y aplicar este método para resolver la ecuación  $xy' = 2x^2y + y \log y$ .

**20.** (\*) Resolver las siguientes ecuaciones de segundo orden:

- $yy'' + (y')^2 = 0$ .
- $xy'' = y' + (y')^3$ .
- $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$ .
- $2yy'' = 1 + (y')^2$ .

**21.** (\*) Resolver

$$a) \quad (y'')^2 + (y''')^2 = 1, \quad b) \quad y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$$

**22.** Una extensión natural de la ecuación lineal de primer orden es la *Ecuación de Riccati*

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$

Aunque, en general, esta ecuación no puede resolverse por métodos elementales, demostrar que si se conoce una solución particular  $y_1(x)$ , el cambio de variables  $z = y - y_1$  la transforma en una ecuación de Bernoulli.

a) Utilizar este método para resolver

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$$

sabiendo que la ecuación anterior tiene una solución particular  $y_1(x) = x$ .

b) Aplicar lo anterior para resolver la ecuación

$$2x^2y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy.$$