ELECTROMAGNETISMO

Cristina Gómez Navarro cristina.gomez@uam.es

3 parciales a lo largo del cuatrimestre → 40% NT

\+

Examen final → 60% NT

\+

Ejercicios en clase → 75% NP + Prácticas → 25% NP

$$\boxed{\text{NOTA FINAL}} = 60\%\ NT + 40\%\ NP$$

- Electrostático (interacción ~~que~~ entre cargas ~~inmóviles~~ e inmóviles).
- Leyes del electromagnetismo
- CCC y CCA.
- Energía potencial

vector $= (a_x, a_y, a_z)$ ...

dulo de un vector : $|\vec{v}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
tancia de la flecha)

Podemos representar un vector cualquiera con su ulo y el vector unitario en la dirección del ctor:

$$\boxed{\vec{V} = |\vec{v}| \cdot \hat{v} \dashrightarrow \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \; ; \quad |\hat{v}| = 1}$$

Suma y resta de vectores

$(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

Producto escalar de un vector.

$n\vec{V} = n(a_x, a_y, a_z) = (na_x, na_y, na_z)$

Producto escalar de dos vectores

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$ (resultado: escalar, un nº)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Si $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

* el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero, ya que $\cos 90° = 0$.

Producto vectorial de dos vectores

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \\ |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\; a_z b_x - a_x b_z,\; a_x b_y - a_y b_x)$

- Ejercicio: Hallar el ángulo entre $\underbrace{7\hat{j}+19\hat{k}}_{\vec{a}}$ y $\underbrace{-2\hat{i}-\hat{j}}_{\vec{b}}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta_{ab}$$

$$\cos\theta_{ab} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{(0,7,19).(-2,-1,0)}{\sqrt{7^2+19^2}.\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{0.(-2)+7.(-1)+0.19}{\sqrt{410}.\sqrt{5}} = \frac{-7}{\sqrt{410}.\sqrt{5}}$$

$$\arccos\frac{-7}{\sqrt{410}.\sqrt{5}} = 99^\circ$$

- Ejercicio: Hallar un vector ortogonal (perpend.) y unitario a los
ctores $\underbrace{\hat{i}+\hat{j}}_{\vec{a}}$ y $\underbrace{\hat{j}+\hat{k}}_{\vec{b}}$

calculamos $\vec{v}$ ortogonal: $\vec{v} = (1,1,0)\times(0,1,1) = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = (1,-1,1)$

calculamos $\vec{v}$ unitario ($\hat{v}$):

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) = \frac{\hat{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\hat{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{k}}{\sqrt{3}}$$

DERIVADAS:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 & f \text{ crece}\\ f'(x_0) < 0 & f \text{ decrece}\\ f'(x_0) = 0 & \text{puede ser máximo o mínimo}\end{cases}$$

ITEGRALES

Si $g(x) = f'(x) \longrightarrow \int g(x)\,dx = f(x)$

suma de elementos infinitesimales

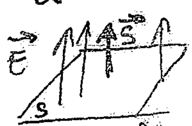
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

ADIENTE DE UNA f

$$(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

= derivadas parciales de f con respecto a x.

- FLUJO de un campo vectorial $\vec{E}$ a través de una superficie: $\vec{S}$



$$\Phi_E = \vec{E}.\vec{S} = |\vec{E}|.|\vec{S}|.\cos\theta$$

$\cos 90 \Rightarrow$ flujo nulo: $\vec{S}\perp\vec{E}$

$\cos 0 \Rightarrow$ flujo máx.: $\vec{S}\parallel\vec{E}$

θ = ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{S}$.

$$\boxed{\Phi_E = \int\vec{E}.d\vec{S}}$$

- Ejemplos gradiente de ...

$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcular su gradiente:

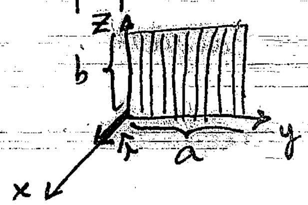
$$\vec{\nabla}_h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \left(2x+0+0,\ 0+2y+0,\ 0+0+2z\right) = (2x, 2y, 2z)$$

$a(x,y,z) = \operatorname{sen}(x+y+z) + x^2 y^3$, calcular su gradiente:

$$\vec{\nabla} a = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}\right) = \left(\cos(x+y+z) + y^3 2x,\ \cos(x+y+z) + x^2 \cdot 3y^2,\ \cos(x+y+z)\right)$$

- Ejemplos cálculos de flujos:

calcular el flujo de $\vec{E} = (3y^2, 5, 2)$ a través de la superficie:



$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{y=0}^{y=a} (3y^2, 5, 2)(b\,dy, 0, 0) = \int_{y=0}^{y=a} 3b \cdot y^2 \cdot dy =$$

$d\vec{s} = b \cdot dy \cdot \hat{\imath}$

$d\vec{s} = (b\,dy, 0, 0)$

$$= 3b \int_{y=0}^{y=a} y^2\, dy = \left[b y^3\right]_{y=0}^{y=a} = b a^3$$

CAMPOS CONSERVATIVOS y POTENCIAL

$\vec{E}$ es conservativo si $\vec{E} = \overbrace{\pm\nabla V}^{\text{gradiente de una función}} \longrightarrow \int_A^B \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\text{camino}} = \int_A^B \vec{\nabla} V \, dl = V\Big]_A^B$

$= \underbrace{V_B}_{\text{pto. final}} - \underbrace{V_A}_{\text{pto. inic}}$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{l} = W = \Delta E$$

Fuerza conservativa $\longrightarrow$ Energía potencial

$\vec{F} = m\cdot\vec{a}$ $\qquad E_c = \frac{1}{2} m v^2$

Fuerza $\longrightarrow$ Energía potencial

$\vec{F}$ $\qquad \vec{F} = -\nabla U$ $\qquad U$

Campos $\longrightarrow$ Energía potencial

$\vec{E}$ $\qquad \vec{E} = -\nabla V$

$\vec{F} = m\cdot\vec{a} \longrightarrow$ ¿Es conservativa? $\longrightarrow$ ¿cual es su U?

si $\vec{F}$ es conservativa $\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Delta U$

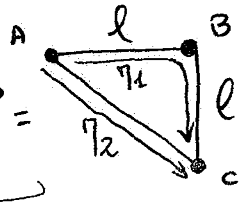
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}dt$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int m\cdot\vec{a}\, d\vec{r} = \int m\cdot\frac{d\vec{v}}{\cancel{dt}}\cdot\vec{v}\cancel{dt} = \int m\cdot\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int m\cdot v\cdot dv\cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} = \int m v\, dv$$

$= \frac{1}{2} m v^2 \longrightarrow$ energía potencial asociada a un movimiento con aceleración constante. (Energía cinética)

FUERZA DE ROZAMIENTO $= |F_{roz}| = \mu m g \longrightarrow$ siempre en dirección opuesta al movimiento.

Calcular el W_{roz} entre dos puntos.



$$W_{\gamma_1} = -(W_{AB} + W_{BC}) = -\underbrace{\int_A^B \mu m g(-\hat{u}_r)\, d\vec{r}}_{\substack{d\vec{r} = (dx,0,0) \\ \hat{u}_r = (-1,0,0)}} - \underbrace{\int_B^C \mu m g(-\hat{u}_r)\, d\vec{r}}_{\substack{d\vec{r} = (0,dy,0) \\ \hat{u}_r = (0,-1,0)}} =$$

$$= -\int_A^B \mu m g(-dx) - \int_B^C \mu m g(-dy) = \mu m g \int_A^B dx + \mu m g \int_B^C dy \Rightarrow W_{\gamma_1} = \mu m g l + \mu m g l =$$

$$= \boxed{2\mu m g l}$$

$$W_{T_2} = -\int_A \mu m g \, \hat{u}_r \, d\vec{r} = -\mu m g \int_A \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)ds =$$

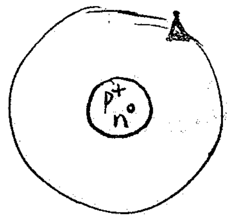
$d\vec{r} = (dx, dy, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)ds$

$\hat{u}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0)$

$$= -\mu m g \int \frac{-1}{2}ds - \frac{1}{2}ds = -\mu m g \int -1\, ds = \mu m g \; S\Big]_C^A = \mu m g \sqrt{l}$$

TEMA 2 CAMPO ELECTROSTÁTICO EN EL VACÍO

CARGA ELÉCTRICA



$q^e = q^{p^+}$ $\begin{cases} q^e = -1'6 \cdot 10^{-19}\ C \\ q_p = 1'6 \cdot 10^{-19}\ C \end{cases}$

unidad de carga
Coulomb = C

FUERZA DE INTERACCIÓN ENTRE DOS CARGAS

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = K \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$\begin{cases} q^+q^+ \text{ se repelen} \\ q^-q^- \text{ se repelen} \\ q^+q^- \text{ se atraen} \end{cases}$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \hat{u}_{r_{12}}}$$

$\hat{u}_{r_{12}} = -\hat{u}_{r_{21}}$

K = constante de Coulomb = $9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$

ε_0 = permitividad eléctrica del vacío = $= 8'85 \cdot 10^{-12}$ F/m

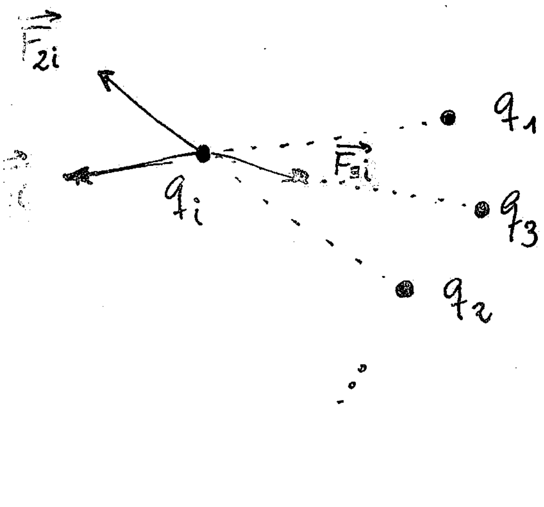
$\hat{u}_{r_{12}}$: vector unitario en la dirección $q_1 \rightarrow q_2$.

$F > 0$: repulsiva $F < 0$: atractiva

- SISTEMA INTERNACIONAL -

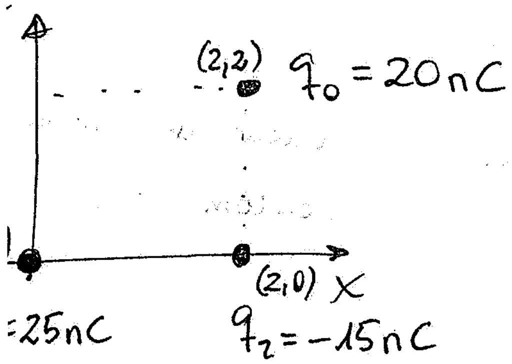
[r] = m (metro)
[q] = C (coulomb)
[F] = N (newton)

FUERZA TOTAL SOBRE UNA CARGA q_i DE UN CONJUNTO DE CARGAS CON NÚMERO TOTAL N



$$\vec{F}_{TOTAL_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ji} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{ij}^2} \hat{u}_{i}$$

Ejemplo: ¿Fuerza total sobre [illegible] q_0 [illegible]



$$\vec{F}_{Tq_0} = \vec{F}_{q_1 q_0} + \vec{F}_{q_2 q_0} =$$

$$= K\,\frac{q_1 q_0}{r_{10}^2}\hat{u}_{r_{10}} + K\,\frac{q_2 q_0}{r_{20}^2}\hat{u}_{r_{20}}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_{10} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \\ \vec{r}_{10} = (2,2) \end{array}\right\} \hat{u}_{r_{10}} = \frac{\vec{r}_{10}}{r_{10}} = \frac{(2,2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$r_{20} = 2 \quad , \quad \hat{u}_{r_{20}} = (0,1)$$

$$\vec{F}_{Tq_0} = K q_0 \left(\frac{q_1}{r_{10}^2}\hat{u}_{r_{10}} + \frac{q_2}{r_{20}^2}\hat{u}_{r_{20}} \right) =$$

$$= 9.10^9 \frac{N.m^2}{C^2} \cdot 20.10^{-9} C \left(\frac{25.10^{-9} C}{(2\sqrt{2})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{-15.10^{-9} C}{2^2}(0,1) \right) =$$

$$= \left(3'97.10^{-7}, -2'77.10^{-7} \right) N$$

CAMPO ELÉCTRICO

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

$\frac{N}{C}$ newton / coulomb

• Campo eléctrico que crea una carga puntual q_1 a su alrededor.

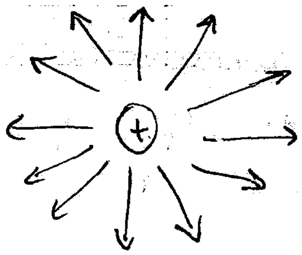
$$\vec{E} = K \frac{q_1}{r_{1p}^2} \hat{u}_{1p} \longrightarrow \vec{E} = K \frac{q_1}{r^2} \hat{u}_r$$

• Campo creado por N cargas

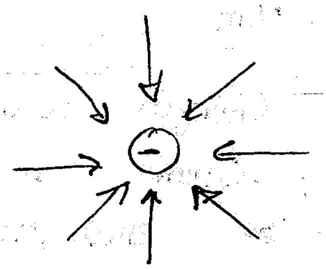
$$\vec{E}_{Tp} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_{ip} = \sum_{i=1}^{N} \frac{K \cdot q_i}{r_{ip}^2} \hat{u}_{ip}$$

▶ LÍNEAS DE CAMPO:

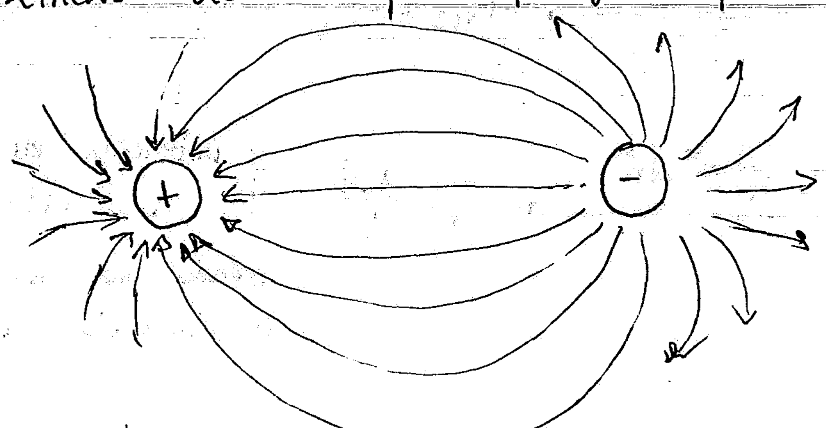
– Líneas de campo +q

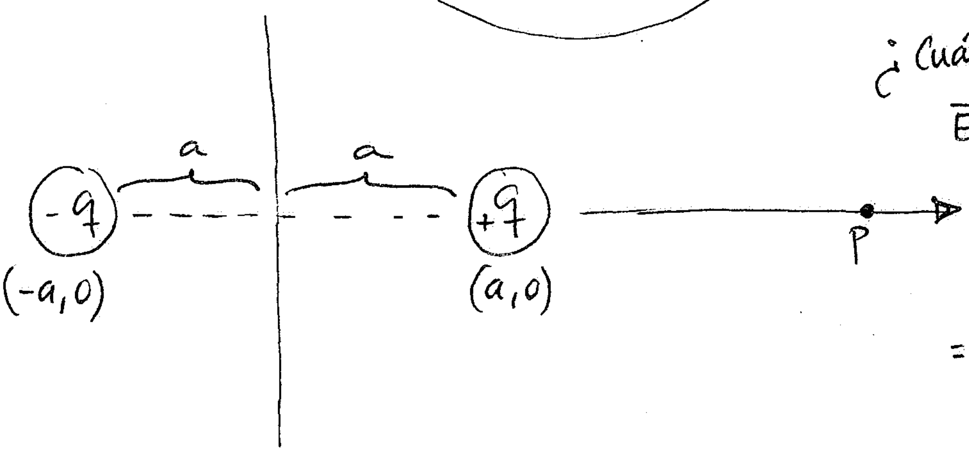


– Líneas de campo −q



– Líneas de campo +q y −q





¿Cuál es el $\vec{E}$ en el punto P?

$$\vec{E}_{TP} = \vec{E}_{+qP} + \vec{E}_{-qP} =$$

$$= K \frac{+q}{r_{pq^+}} \hat{u}_{pq^+} + K \frac{-q}{r_{pq^-}} \hat{u}_{pq^-}$$

$$= \frac{Kq}{(x-a)^2} \hat{\imath} + \frac{K(-q)}{(x+a)^2} \hat{\imath} =$$

$$= \boxed{Kq \frac{4ax}{(x^2-a^2)^2} \hat{\imath}}$$ CAMPO $\vec{E}$ que crea un dipolo

¿ $\vec{F}_e$ son conservativas? $\vec{F} = -\nabla U$

si F es conservativa $\rightarrow \exists U$ U = energía potencial electroestática

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{u}_r$$

$$U = -\int \vec{F} dr = \int k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{u}_r d\vec{r} = -kq_1q_2 \int \frac{\overbrace{\hat{u}_r d\vec{r}}^{dr}}{r^2} = -kq_1q_2\int\frac{dr}{r^2} = \left[\frac{-kq_1q_2}{-r}\right]_{r_{ref}}^{r}$$

$$= \frac{kq_1q_2}{r} - \frac{kq_1q_2}{r_{ref}}$$

Si $r_{ref} = \infty \Rightarrow \Delta U = \frac{kq_1q_2}{r}$

$J = N.m$

$\boxed{U = \frac{kq_1q_2}{r}}$ Energía potencial electroestática almacenada en un sistema de 2 cargas puntuales q_1 y q_2 que se encuentran a una distancia r.

$$\vec{F} = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{u}_{12} \xrightarrow{U = \int \vec{F}. d\vec{r}} U_{12} = \frac{kq_1q_2}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{u}_r \xrightarrow{V = \int \vec{E}. d\vec{r}} V = \frac{kq}{r}$$ (potencial electroestático o voltaje

creado por una carga q en cualquier pto. del espacio)

RESUMEN

FUERZAS ENTRE 2 CARGAS

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{u}_{r_{12}}$$

N

$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

CAMPO CREADO POR UNA CARGA en un pto. P. a una distancia $\vec{r}$ de q.

$$\vec{E} = K \cdot \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$$

N/C

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

$\vec{E} = -\nabla V$

ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA LMACENADA EN UN SISTEMA DE 2 CARGAS

$$U = K \frac{q_1 q_2}{r}$$

$J = N.m$

$U = q \cdot V$

POTENCIAL ELECTROESTÁTICO CREADO POR UNA CARGA

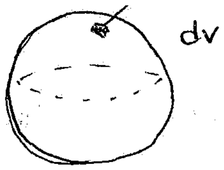
$$V = K \frac{q}{r}$$

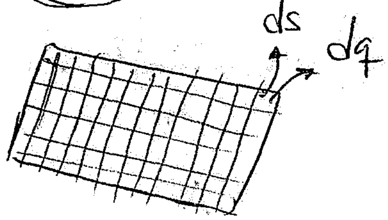
$V = \frac{J}{C} = \frac{N.m}{C}$

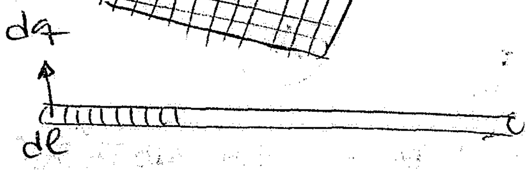
Energía acumulada en un sistema de N cargas

$$U = \sum_{\substack{[i \neq j] \\ [j < i]}} K \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{[i \neq j]} K \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS



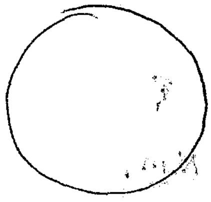




$$3D: \rho = \frac{Q}{V} = \frac{dq}{dv} \quad \frac{c}{m^3}$$

$$2D: \sigma = \frac{Q}{S} = \frac{dq}{ds} \quad \frac{c}{m^2}$$

$$1D: \lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dq}{dl} \quad \frac{c}{m}$$

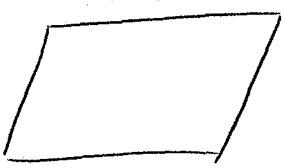


$$\rho \text{ cte} = \frac{dq}{dv} \Rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho\, dv}{r^2}\, \hat{u}_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho\, dv}{r^2}\, \hat{u}_r$$

$$\lambda \text{ cte} = \frac{dq}{dl} \Rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda\, dl}{r^2}\, \hat{u}_r \Rightarrow$$

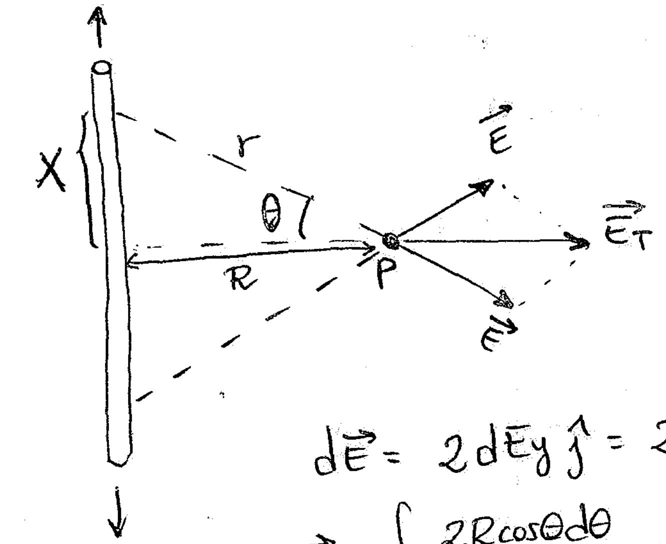
$$\Rightarrow \vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda\, dl}{r^2}\, \hat{u}_r$$



$$\sigma \text{ cte} = \frac{dq}{ds} \Rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma\, ds}{r^2}\, \hat{u}_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma\, ds}{r^2}\, \hat{u}_r$$

– Hilo infinito de carga con $\lambda = cte.$



$$r = \sqrt{R^2+x^2} = R\cos\theta$$

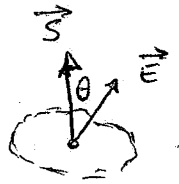
$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{R}{r}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{R} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{dx}{R}$$

$$d\vec{E} = 2dE_y\hat{j} = 2d\vec{E}\cos\theta\,\hat{j} = 2\,\frac{\lambda dx}{R^2/\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\cos\theta\,\hat{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int \frac{2R\cos\theta d\theta}{2\pi\varepsilon_0 \frac{\cos^2\theta R^2}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\cdot\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$



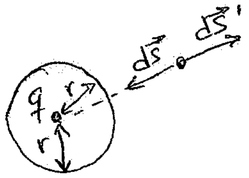
– Flujo y Teorema de Gauss

ϕ_s = Densidad de campo a través de una superficie

$$d\theta = E.ds.\cos\theta = \vec{E}.d\vec{s}$$

$$\phi_s = \int_s d\phi = \int_s E.ds.\cos\theta = \int_s \vec{E}.ds = E.S.\cos\theta$$

(*) Si el campo es creado por cargas no incluidas en S es cero.

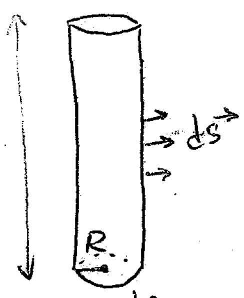


$$\vec{E}'ds + \vec{E}''ds = 0$$

$$\phi_s = \oint_s E.ds = \vec{E}\oint ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\pi r^2 = \boxed{\frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Varias cargas: $\boxed{\sum_i^n \frac{q_i}{\varepsilon_0}}$

λ cte



$\lambda = \frac{dq}{dl}$

$$\phi = \oint E.ds = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

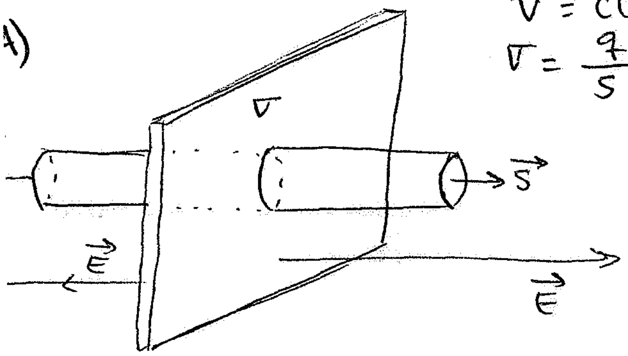
$$\oint E.ds = \oint_{lateral} E.ds + \cancel{\oint_{tapas} E.ds}^{\,0} = E\oint ds =$$

$$= E.2\pi RL = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$

a) q DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE EN UN PLANO

b) DOS PLANOS CON CARGAS IGUALES Y OPUESTAS

a)



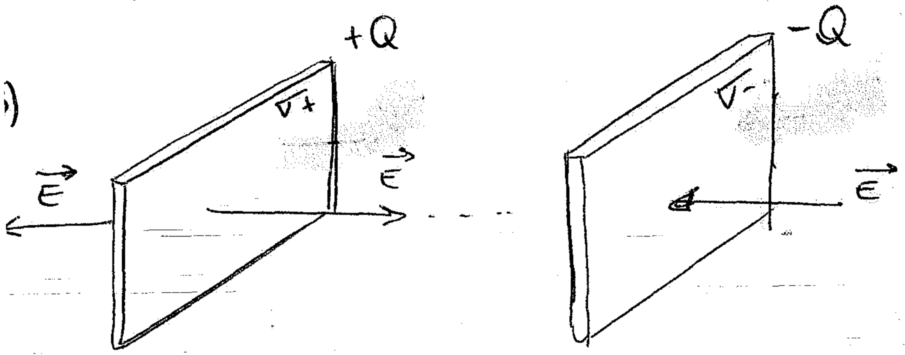
$\sigma = cte$

$\sigma = \frac{q}{S}$

$$\phi_E = E.S + E.S = 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

b)

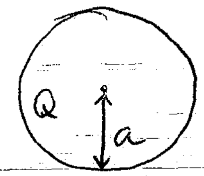


$$E = 2.\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

- $\vec{E}$ CREADO POR ESFERA CONDUCTORA UNIFORMEMENTE CARGADA.

$\rho\ cte = \frac{dq}{dv}$ $\qquad r = a$



$$\phi = \int_S \vec{E}\cdot ds = E\int_S ds = E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad \forall r / r \geq a}$$

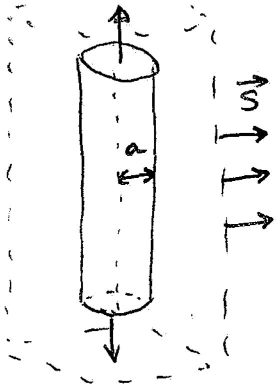
Si $r<a$, $E=0$ si Q está en la superficie de la esfera.

$$\frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\ ;\ r<a$$

$$\Rightarrow Q' = \frac{Qr^3}{a^3} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q'}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{Q.r^3/a^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{r<a} = \frac{Q.r}{4\pi\,\varepsilon_0 a^3}}$$

– FLUJO A TRAVÉS DE UN HILO / CILINDRO CONDUCTOR



$$\lambda = \frac{q}{L}$$

$\boxed{r \geq a}$

$$E(2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}}$$

$\boxed{r < a}$

$E = 0$ si considero que la carga está uniformemente distribuida

$q = \lambda L$

$$\frac{q'}{\pi r^2 L} = \frac{q}{\pi r^2 L} \Rightarrow q' = \frac{\lambda L r^2}{a^2} \Rightarrow E(2\pi r L) = \frac{q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{q'}{\varepsilon_0 2\pi r L} = \frac{\lambda . L . r^2}{\varepsilon_0 2\pi r L a^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda r}{2 . \pi . \varepsilon_0 . a^2}}$$

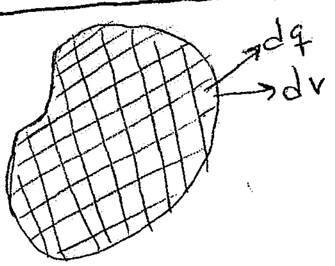
RESUMEN

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_{vol} K \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad ; \quad E = \frac{2K\lambda}{R}$$

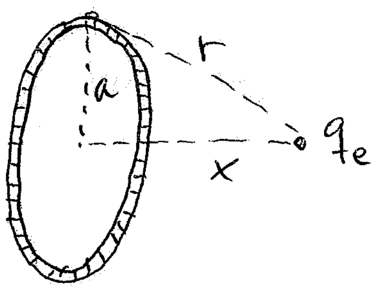
T^a Gauss

$$\phi_{neto} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \int \vec{E} . d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$



$$V = \int k \frac{dq}{r} \quad \text{ó} \quad V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

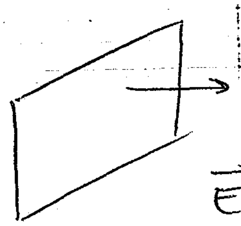
– Potencial creado por un anillo de carga en su eje



$$V = \int k \frac{dq}{r} = k \int \frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{x^2+a^2}} \int dq \Rightarrow \boxed{V = \frac{k}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot q}$$

– V creado por un plano de carga ∞.



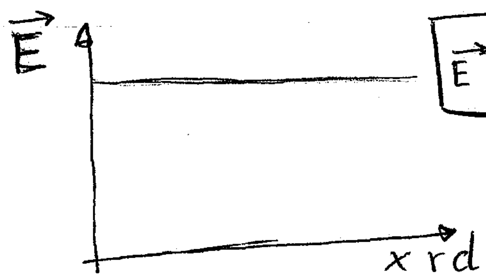
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{\imath}$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0, 0\right)(dx, dy, dz) =$$

$$= -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot x + C}$$



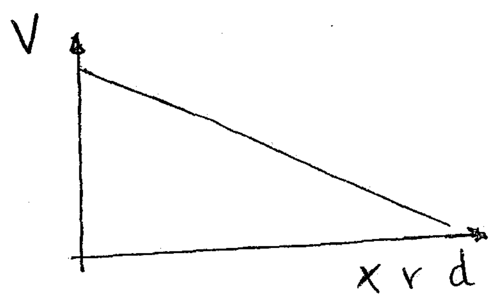
$$\boxed{\vec{E} = \vec{\nabla} V}$$

En el plano: $x = 0 \rightarrow V = V_0$

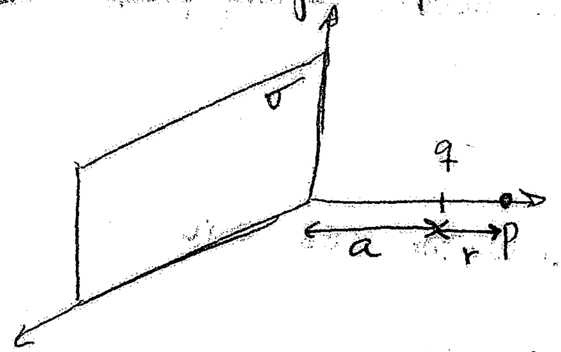
$$\boxed{V = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} x + V_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{V = V_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |x|}$$



Plano ∞ uniformemente cargado en $x=0$
Carga q en el eje x en $x=a$
Determinar el potencial en un punto P a una distancia r de la carga puntual.



$$\boxed{V_{TOTAL_P} = V_{qP} + V_{\sigma P}}$$

$$\left.\begin{aligned} V_\sigma &= V_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x| \\ V_q &= K\frac{q}{r} + C \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ para sumarlos necesitamos que tengan el <u>mismo origen</u>

$\Rightarrow$ Imponemos que en el plano $(x=0)$ V es cero $(V=0)$.

$$V_\sigma = V_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x| \longrightarrow \text{si } V=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = V_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot 0 \Rightarrow \boxed{V_0 = 0}$$

$$V_q = K\frac{q}{r} + C = \frac{Kq}{a} + C \Rightarrow \boxed{C = \frac{-Kq}{a}}$$

$$\boxed{V_{TOTAL} = \underbrace{-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|r+a|}_{V_{\sigma P}} + \underbrace{\frac{Kq}{r} - \frac{Kq}{a}}_{V_{qP}}}$$