Hoja 5

Derivadas de orden superior. Polinomios de Taylor. Máximos y mínimos

1.- Definamos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la existencia de las siguientes derivadas parciales y, en su caso, calcular sus valores:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

2.- Sea

$$f(x,y) = x\,y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0\,.$$

Compruébese que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$. ¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de las derivadas de orden segundo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en el origen?

3.- El cambio de variable $x = u + v$, $y = u\,v^2$ transforma $f(x,y)$ en $g(u,v)$. Calcular el valor de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto en el que $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en dicho punto.

4.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x\,e^{x+y}$. $\qquad (b)$ $f(x,y) = \operatorname{sen} x\,y + \cos x\,y$. $\qquad (c)$ $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

5.- Comprobar que la función $f(x,y) = e^y \cos x$ no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$.

6.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\,x\,y$. $\qquad (b)$ $f(x,y) = x^2 + y^2 + x\,y - 2\,x - 4\,y + 10$.

(c) $f(x,y) = x\,y$. $\qquad (d)$ $f(x,y) = 3\,x^2 - 4\,y^2 + x\,y$.

(e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. $\qquad (f)$ $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 - x^4y^2$.

(g) $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$. $\qquad (h)$ $f(x,y) = x\,y\,e^{x-y}$.

(i) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. $\qquad (j)$ $f(x,y) = e^{xy} + x^2$.

7.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = (x+y)^2$. $\qquad (b)$ $f(x,y) = \ln(2 + \operatorname{sen} x\,y)$.

8.- Comprobar que la función $f(x,y) = x^2y^2$ tiene un mínimo absoluto en todos los puntos de los ejes x e y y que, sin embargo, el criterio de la matriz Hessiana para los extremos locales no nos proporciona ninguna información en este caso.

9.- Considérese el polinomio $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$ y la función $g(t) = f(t, ct)$ de $t \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que $(0,0)$ es un punto crítico degenerado para f y que aunque g tiene un mínimo en $t = 0$, el punto $(0,0)$ no es un mínimo local de f.

10.- (a) Demostrar que, para dos números no negativos arbitrarios, a y b, se cumple la desigualdad

$$\frac{a+b+1}{3} \geq \sqrt[3]{a\,b}$$

y que la igualdad es posible si y sólo si $a = b = 1$.

(b) Deducir del apartado anterior que las medias aritmética y geométrica de tres números no negativos x, y y z satisfacen la desigualdad

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x\,y\,z}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $x = y = z$.

11.- Escribir un número dado $a > 0$ como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

12.- Calcular las distancias máxima y mínima del origen a la elipse dada por la ecuación $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$.

13.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f(x,y) = x^3 + 3\,xy^2$ en la región

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}.$$

14.- Hallar los extremos de la función $f(x,y) = x^2 - 3\,x\,y + y^2$ bajo la restricción $x^2 + y^2 \leq 2$.

15.- (a) Explicar por qué el conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + y^2 \leq 25\}$ es compacto.

(b) Hallar razonadamente los extremos de la función $f(x,y) = x^4 + x^2 + 2y^2$ en K.

16.- Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + (x-2)^2 + y^2}$$

en el conjunto $K = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 9\}$. ¿Por qué se alcanzan?

17.- Para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 + a(2x^2 + y^2)$, se pide:

(a) Hallar sus máximos y mínimos relativos (locales) según los distintos valores del parámetro a.

(b) Hallar los valores máximo y mínimo de la función sobre el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ en los casos $a = -1$ y $a = 5$.

18.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo V_0. Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

19.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

20.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?

HOJA 5

$\boxed{1.}$

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - \overset{\nearrow 0}{\cancel{f(0,0)}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \underbrace{f(h,0)}_{=0} = 0 = f_x(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot f(0,h) = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1 = f_y(0,0)$$

$$f_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2) - 2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - \overset{\nearrow 0}{\cancel{f_x(0,0)}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)}{h} = 0$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-3h^4+2h^4}{h^4} + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$\boxed{2.}$ Sea $f(x,y) = xy \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$

Comprobar que $f_{yx}(0,0) = -1$ y $f_{xy}(0,0) = 1$ ¿qué se puede decir acerca de la continuidad de f_{xy} y f_{yx} en $(0,0)$?

$$f_x = \frac{(3yx^2 - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_y = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - 2y^2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

Si $f \in C^2((0,0)) \Rightarrow f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ pero como

$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0) \Rightarrow f \notin C^2((0,0))$

$\boxed{3.}$ El cambio de variable $x = u+v$, $y = uv^2$ transforma $f(x,y)$ en $g(u,v)$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial v \partial u} = f_{uv}(1,1)$

Sabiendo: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

$$f(x,y) = f(u+v, uv^2)$$

$$g(u,v) = (f \circ G)(u,v) \quad , \quad G(u,v) = (u+v, uv^2)$$

$$\nabla g(u,v) = \nabla f(G(u,v)) \cdot DG(u,v)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$DG(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

$$g_u(u,v) = f_x(G(u,v)) + v^2 f_y(G(u,v)) \quad : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla g_u = \nabla f_x \cdot DG + D\left(v^2 f_y(G(u,v))\right)$$

$$g_{uv} = f_{xx} + 2uv f_{xy} + 2v f_y + v^2 (f_{yx} + 2uv f_{yy})$$

$$g_{uv}(1,1) = f_{xx}(G(1,1)) + 2f_{xy}(G(1,1)) + 2f_y(G(1,1)) +$$

$$+ f_{yx}(G(1,1)) + 2f_{yy}(G(1,1)) =$$

$$= f_{xx}(2,1) + 2f_{xy}(2,1) + 2f_y(2,1) + f_{yx}(2,1) +$$

$$+ 2f_{yy}(2,1) = 8$$

4. Polinomio de Taylor de orden 2 en $(0,0)$ de:

$\boxed{f_x = e^{x+y} + x e^{x+y}}$ $\boxed{f_y = x e^{x+y}}$

a) $f(x,y) = x e^{x+y}$

$$P_{2,(0,0)}(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\, Hf(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= 0 + (1,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\, Hf(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} e^{x+y} + e^{x+y} + x e^{x+y} & e^{x+y} + x e^{x+y} \\ e^{x+y} + x e^{x+y} & x e^{x+y} \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{2,(0,0)}(x,y) = (1,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} =$$

$$= x + \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)\begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix} = x + x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} = x + x^2 + xy$$

$f(x,y) = \operatorname{sen} xy + \cos xy$

b) $$P_{2,(0,0)}(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\, Hf(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} = 1 + \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 1 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2}$$

$$= 1 + xy$$

c) $f(x,y) = e^{x^2} + y^2$ $\boxed{f_x = e^{x^2} \cdot 2x}$ $\boxed{f_y = 2y}$

$$P_{2,(0,0)}(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\, Hf(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\, Hf(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} =$$

$$= 1 + \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 1 + \frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} = 1 + x^2 + y^2$$

$\boxed{5.}$ Comprobar que la función $f(x,y) = e^y \cos x$ no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$.

Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, ∇f está bien definido $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} -e^y \operatorname{sen}(x) = 0 \\ e^y \cos(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right\} \emptyset$$

$\boxed{6.}$ Hallar los puntos críticos y ~~determina~~ clasificar:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

$f \in C^2$

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + 2y = 0 \\ 2y + 2x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{x = -y}$$

$f(-y,y) = 0$

$f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\qquad$ valor mínimo absoluto $\forall p \in \{x = -y\}$

$f(p)$ es el valor mínimo absoluto ~~$\forall p$~~

$f(p)$ es el valor mínimo absoluto. $\forall P = (-t,t) \in \mathbb{R}^2$ es un punto mínimo absoluto de f.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 4y + 10$

$f \in C^2$

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow (2x + y - 2,\ 2y + x - 4) = \vec{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y - 2 = 0 \\ 2y + x - 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x = \\ y = \end{array}$$

$\boxed{P(2,0)}$

$$Hf(0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} 2 > 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{definida positiva} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ P es un punto mínimo relativo de f.

c) $f(x,y) = xy$

$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow (y, x) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P = (0,0)}$

$Hf(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Un punto $P \in D_f$ es un punto de silla si es un punto crítico y el signo de la segunda derivada depende de la dirección en que se calcule.

- Tomamos la dirección $x=y$

$f(x,x) = x^2$; P es un mínimo

- Tomamos la dirección $x=-y$

$f(-y,y) = -x^2$; P es un máximo

$\Rightarrow P$ es un punto de silla.

d) $f(x,y) = 3x^2 - 4y^2 + xy$

$\nabla f(x,y) = \vec{0}$; $\begin{matrix} 6x + y = 0 \\ -8y + x = 0 \end{matrix}$ $\quad P = \vec{0}$

$Hf(P) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow P$ punto de silla

e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow P_1 = (0,0) \\ \Rightarrow P_2 = (1,1) \end{matrix}$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; P_1 es un punto de silla

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; P_2 es un máximo relativo

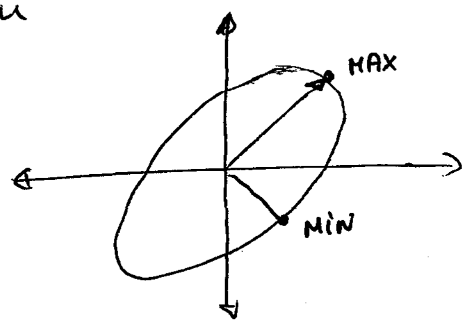
$6 > 0$

$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} > 0$

$\boxed{12.}$

centrada en origen

Elipse: $\underbrace{x^2 + 2xy + 3y^2}_{g(x,y)} = 9$



$\text{dist}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} \text{minimizar } \text{dist}(x,y) \Longleftrightarrow \text{minimizar } (\text{dist}(x,y))^2 \\ \text{maximizar } \text{dist}(x,y) \Longleftrightarrow \text{maximizar } (\text{dist}(x,y))^2 \end{cases}$$

$\nabla f = (2x, 2y)$

$\nabla g = (2x+2y, 2x+6y)$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \lambda(x+y) \\ y = \lambda(x+3y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - \lambda y = 0 \\ -\lambda x + (1-3\lambda)y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-3\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Elipse y } (0,0) \notin \text{Elipse}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-3\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 4\lambda + 1 \rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{2} = \lambda_\pm$$

Buscamos (x_0, y_0) solución de $\begin{pmatrix} 1-\lambda_+ & -\lambda_+ \\ -\lambda_+ & 1-3\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = t V_0$ con $V_0 = \begin{pmatrix} 1-\lambda_+ \\ \lambda_+ \end{pmatrix}$

Hay que imponer $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in E$ (salen dos valores $t_\pm$)

Evaluamos $f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 = |tV_0|^2 = t^2 |V_0|^2$

Lo mismo con λ_-

$\boxed{10.}$ $$\frac{a+b+1}{3} \geq \sqrt[3]{ab}$$ y la igualdad es posible si y solo si $a=b=1$.
$a,b \geq 0$

$$f(a,b) = \frac{\sqrt[3]{ab}}{a+b+1} \quad ; \quad ¿f(a,b) \leq 1/3?$$

$\nabla f = (0,0) \Rightarrow$ encontramos (a,b)

$$\nabla f = \left(\frac{1}{3} \frac{a^{-2/3}\, b^{1/3}}{1+a+b} - \frac{(ab)^{1/3}}{(1+a+b)^2} \,,\; \frac{1}{3} \cdot \frac{b^{-2/3} . a^{1/3}}{1+a+b} - \frac{(ab)^{1/3}}{1+a+b} \right) = (0,0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{a^{-2/3}\, b^{1/3}}{1+a+b} - \frac{(ab)^{1/3}}{(1+a+b)^2} = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{b^{-2/3} . a^{1/3}}{1+a+b} - \frac{(ab)^{1/3}}{1+a+b} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{a=b=1}$$

Escribimos $\left\{ \begin{array}{l} a = r\cos\theta \\ b = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right.$, $a,b > 0 \rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

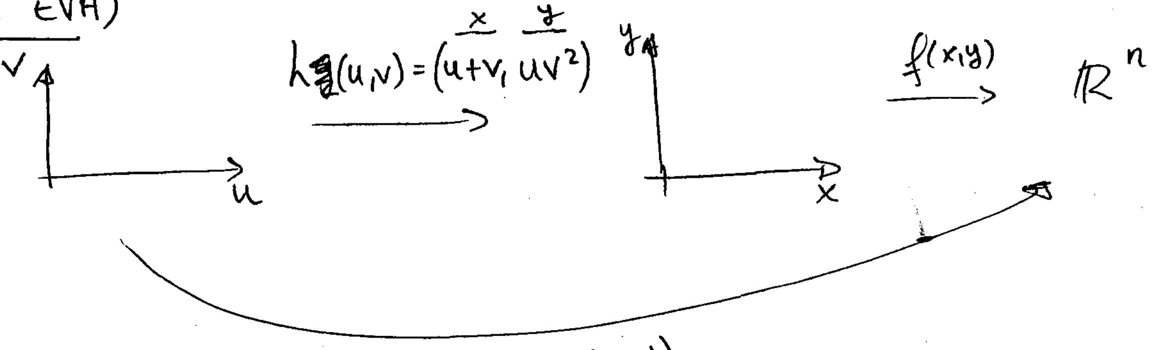
$$0 < f(a,b) = \frac{r^{2/3} (\cos\theta\, \mathrm{sen}\,\theta)^{1/3}}{1 + r(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)} \leq \frac{r^{2/3}}{1+Cr} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Inacabado

$\boxed{3.}$ (HECHO POR EVA)

$x = u + v$

$y = u \cdot v^2$



$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

$$¿\ \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v)\Big|_{(1,1)}\ ?$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{=v^2}\right)\Big|_{(1,1)} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v^2\right)\Big|_{(1,1)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot v^2\right)\Big|_{(1,1)} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\Downarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}\cdot v^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 2v\Big|_{(1,1)} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{1} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{2u.v.} + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{1} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{2uv}\right)v^2 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{1}\cdot 2v\Big|_{(1,1)}$$

$$= 1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 8$$

$\boxed{4.}$ (HECHO POR EVA)

a) $f(x,y) = x \cdot e^{x+y}$

$$P_2(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left(f_{xx}(0,0)(x-0)^2 + f_{yy}(0,0)(y-0)^2 + 2f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0)\right)}_{(x-0,\, y-0)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\Big|_{(0,0)} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}}$$

$$f_{xx} = 2e^{x+y} + xe^{x+y}\Big|_{(0,0)} = 2$$

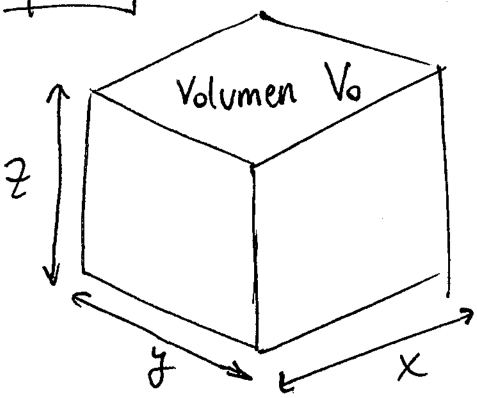
$$f_{xy} = e^{x+y} + xe^{x+y}\Big|_{(0,0)} = f_{yx}(0,0) = 1$$

$$f_{yy} = x \cdot e^{x+y}\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$P_2(x,y) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2}\left(2 \cdot x^2 + 0 \cdot y^2 + 2 \cdot 1 \cdot x \cdot y\right) =$$

$$= x + \frac{1}{2}\left(2x^2 + 2xy\right) = x + x^2 + xy$$

18.



x, y, z dimensiones laterales de la caja

volumen fijo $V_0 = xyz = g(x,y,z)$

$$S(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2xz$$

Queremos minimizar f en $\Omega = \{(x,y,z) \mid x,y,z > 0\}$ con la restricción $g(x,y,z) = xyz = V_0$

$$\nabla S = \lambda \nabla g \Rightarrow (y+z,\ x+z,\ x+y) = \lambda(yz,\ xz,\ xy)$$

$$\begin{cases} y+z = \lambda yz & \to \text{ecuación a} \\ x+z = \lambda xz & \to \text{ecuación b} \\ x+y = \lambda xy & \to \text{ecuación c} \\ xyz = V_0 & \to \text{ecuación d} \end{cases}$$

Sabemos que $x, y, z > 0$

$a \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (dividiendo a) por yz)

$b \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

$c \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = y = z \Rightarrow$$ ~~cuadra~~ caja es un cubo

Finalmente, $V_0 = xyz \Rightarrow$ donde se minimiza (si es que lo hace) debe ser $x = y = z = V_0^{1/3}$

Otra forma sería despejar z como $z = \frac{V_0}{xy}$ y entonces

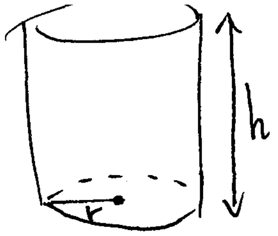
$$S(x,y) = 2xy + 2y\frac{V_0}{xy} + 2x\frac{V_0}{xy} =$$

$$= 2xy + \frac{2V_0}{x} + \frac{2V_0}{y}$$

Gradiente igualado a cero despejamos $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

Hessiana $\Rightarrow$ def. positiva $\Rightarrow \sqrt[3]{V_0}$ es mínimo

$\boxed{14.}$



$$\pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$$

$$S(r,h) = \pi r^2 + 2\pi r h$$

$$S(r) = \pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r}\frac{1}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} = \pi r^2 + \frac{2}{r}$$

Como en cálculo I ...

Otra forma: sabemos $\begin{cases} \pi r^2 h = 1 \\ S(r,h) = \pi r^2 + 2\pi r h \end{cases}$

Queremos minimizar $S(r,h)$ en $\Omega = \{(r,h) \mid r,h > 0\}$ bajo la estricción $g(r,h) = \pi r^2 h = 1$

$$\nabla S = \lambda \nabla g \Rightarrow (2\pi r + 2\pi h,\ 2\pi r) = \lambda(2\pi r h,\ \pi r^2)$$

$$\begin{cases} 2\pi r + 2\pi h = \lambda 2\pi r h \Rightarrow r + h = \lambda r h & a) \\ 2\pi r = \lambda \pi r^2 \Rightarrow 2 = \lambda r & b) \\ \pi r^2 h = 1 & c) \end{cases}$$

$$a \Leftrightarrow \lambda = \frac{r+h}{rh} = \frac{1}{h} + \frac{1}{r}; \qquad b \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{r}$$

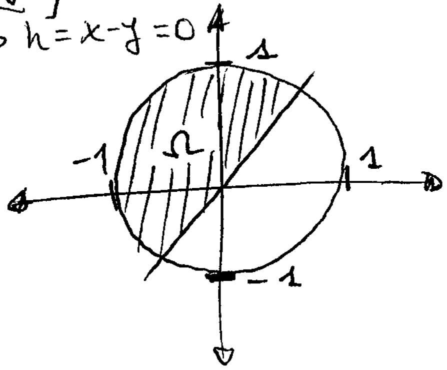
$$\begin{cases} \frac{1}{h} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{1}{r} \Rightarrow h = r \\ \pi r^2 h = 1 \Rightarrow \pi r^3 = 1 \Rightarrow r = \sqrt[3]{1/\pi} = h \end{cases}$$

$\boxed{13.}$ máximos y mínimos (absolutos) de $f(x,y) = x^3 + 3xy^2$

en la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{g} \, , \, \underbrace{x \leq y}_{h} \}$

$h \Rightarrow h = x - y = 0$

Ω es cerrado y acotado $\Rightarrow$ compacto



• $\boxed{f \text{ en } \operatorname{int}\Omega}$

$\nabla f = \left(3x^2 + 3y^2, \, 6xy\right)$

$\nabla f = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2 = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 0 \Rightarrow x = y \\ 6xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x=0 \Rightarrow y^2=0 \Rightarrow y=0 \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P_1 = (0,0)}$ pero esto es de la frontera $\Rightarrow$ en el intΩ NO HAY NINGÚN PUNTO CRÍTICO

• $\boxed{f \text{ en } \partial\Omega}$ $\qquad \nabla g = (2x, 2y) \qquad \nabla h = (1,-1)$

$\nabla f = \lambda_1 \nabla g + \lambda_2 \nabla h$

$(3x^2+3y^2, \, 6xy) = \lambda_1(2x, 2y) + \lambda_2(1,-1)$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2 = \lambda_1 2x + \lambda_2 \\ 6xy = \lambda_1 2y - \lambda_2 \\ x^2+y^2 = 1 \\ x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$; $\boxed{P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

• $\boxed{\text{Puntos no suaves}}$

—

• $\boxed{\text{Evaluamos } P_2 \text{ y } P_3 \text{ en la función}}$

$f(P_2) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$ $\rightarrow$ máximo absoluto

$f(P_3) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{2}$ $\rightarrow$ mínimo absoluto

$\boxed{9.}$ (HECHO POR EVA)

$$f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2) = y^2 - 3x^2y - yx^2 + 3x^4 = 3x^4 + y^2 - 4yx^2$$

$g(t) = f(t, ct) \quad t \in \mathbb{R}$

Estudiamos el punto $(0,0)$ y corroboramos que es un punto crític

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(0,0)} = \left(12x^3 - 8yx,\ 2y - 4x^2\right)\Big|_{(0,0)} = (0,0) \text{ pto. crític}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 8y & -8y \\ -8x & 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 0$$

$(0,0)$ no es mínimo local $0 = f(0,0) \not< f(x,y) \quad \forall (x,y) \in$ a un entorn del $(0,0)$ $\Rightarrow$ quiero ver que $\exists\, f(x,y)$ cerca de $(0,0)$ tal que $f(x,y) < 0 = f(0,0)$

COMPLETAMOS CUADRADOS:

$$3x^4 + 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4xy^2 = 3\left(x^2 + \left(y/\sqrt{3}\right)^2\right) - 4yx^2$$

$$f(x,y) = \underbrace{3\left(x^2 - \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}_{3\left(x^4 + \frac{y^2}{3} - 2x^2\frac{y}{\sqrt{3}}\right)} + 6x^2\frac{y}{\sqrt{3}} - 4yx^2 = 3\left(x^2 - \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{6}{\sqrt{3}} + 4\right)yx$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \\ y = \varepsilon}}{=} 3\cdot 0 - \left(\frac{6}{\sqrt{3}} + 4\right)\varepsilon \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 < 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0) \text{ no es un mínim}$$

$\boxed{8.}$ $f(x,y) = x^2y^2$

$$\nabla f(x,y) = \left(2y^2x\,,\ 2yx^2\right)$$

$$\begin{cases} 2y^2x = 0 \\ 2yx^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\,,\ (x,0)\ \text{ y }\ (0,y)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4yx & 2x^2 \end{pmatrix} = 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2 = 0 \quad \forall\, (0,y) \text{ ó } (x,0)$$

$$f(x,y) = x^2y^2 \geq 0 = f(0,y) = f(x,0) \Rightarrow \text{mínimos absolutos}$$

$\boxed{9.}$

12.

$$d\left[(x,y)-(0,0)\right] = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f(x,y) = x^2+y^2$$

restricción de la elipse:

$$\underbrace{x^2+2xy+3y^2}_{g(x,y)} = 9$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2x,2y) = \lambda(2x+2y,\ 2x+6y) \\ x^2+2xy+3y^2=9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda(x+y) \\ y = \lambda(x+3y) \\ x^2+2xy+3y^2 = 9 \end{array}\right.$$

...