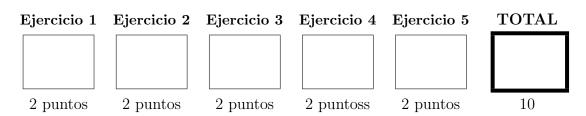
## TOPOLOGÍA. UAM, 24 de enero de 2017

APELLIDOS, NOMBRE:		
Grupo:		



- 1. a) Definir con precisión qué es un espacio topológico de Hausdorff.
  - b) Sea  $f:X\longrightarrow Y$  una aplicación inyectiva y continua del espacio topológico X en el espacio topológico de Hausdorff Y. Demostrar que, entonces, X es también de Hausdorff.
  - c) Aplicar el punto b) para demostrar que un subespacio de un espacio de Hausdorff es también de Hausdorff.
  - d) Utilizar el punto b) o el punto c) para demostrar que si un producto de espacios topológicos es un espacio de Hausdorff; entonces cada uno de dichos espacios es también de Hausdorff.
- 2. a) Definir con precisión qué es un espacio topológico compacto.
  - b) Demostrar que, si  $\{C_j\}_{j\in\mathbb{N}}$  es una familia de cerrados no vacíos de un espacio topológico compacto X, tales que  $\forall j\in\mathbb{N},\ C_{j+1}\subset C_j$ , entonces  $\bigcap_{j=1}^{\infty}C_j\neq\emptyset$ .
  - c) Sea  $f: \mathbb{R} \longrightarrow X$  una aplicación continua y cerrada de  $\mathbb{R}$ , con su topología usual en un espacio topológico compacto X. Usando la familia  $\{f([j, \to [)]_{j \in \mathbb{N}}, \text{ aplicar el punto b})$  para demostrar que existe algún  $x \in X$  tal que  $f^{-1}(x)$  es un conjunto infinito.

3. Considera la siguiente familia de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

$$\beta = \{(a,b) \ : \ a < b \ , \ a,b \in \mathbb{R} \ \} \cup \{(a,b) \setminus K \ : \ a < b \ , \ a,b \in \mathbb{R} \ \}$$
donde  $K = \{\frac{1}{n} \ : \ n = 1,2,3,\ldots\}.$ 

- a) Demuestra que  $\beta$  es una base para una topología en  $\mathbb R$  que es más fina que la topología usual.
- b) Denotaremos por  $\mathbb{R}_K$  a  $\mathbb{R}$  con la topología generada por la base  $\beta$ . Demuestra que  $(-\infty,0)$  con la topología usual es homeomorfo a  $(-\infty,0)$  con la topología de subespacio de  $\mathbb{R}_K$ .
- c) Demuestra que  $\mathbb{R}_K$  es conexo.
- **4.** En  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  se considera la topología  $\mathcal{T}_1$  producto de la topología usual en el primer factor  $\mathbb{R}$  por la topología discreta en el segundo factor  $\mathbb{R}$ .

Después se define en  $\mathbb{R}^2$  la siguiente relación de equivalencia  $\mathcal{R}$ :

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

- a) Demostrar que el espacio cociente X de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1)$  por la relación  $\mathcal{R}$  es homeomorfo a  $[0, \to [$  con su topología usual.
- b) Estudiar si la proyección canónica de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1)$  sobre X es abierta o cerrada.
- c) Repetir el ejercicio considerando en  $\mathbb{R}^2$  la topología usual  $\mathcal{T}$  en lugar de  $\mathcal{T}_1$ .
- 5. a) Explicar con detalle qué quiere decir que el espacio topológico Y sea un retracto de deformación fuerte ( o retracto deformación, para abreviar) del espacio topológico X. Poner algún ejemplo.
  - b) Enunciar y demostrar un resultado que relacione los grupos de homotopía de X y de Y cuando Y es un retracto de deformación de X.
  - c) Demostrar con detalle que el vaso vacío Y es un retracto de deformación del vaso lleno X. En concreto, tomar

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 \le 1) \land (0 \le z \le 1)\},$$

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ((x^2 + y^2 \le 1) \land (z = 0)) \lor ((x^2 + y^2 = 1) \land (0 \le z \le 1))\}$$

d) Determinar, razonadamente los grupos de homotopía de los espacios X e Y del punto anterior.