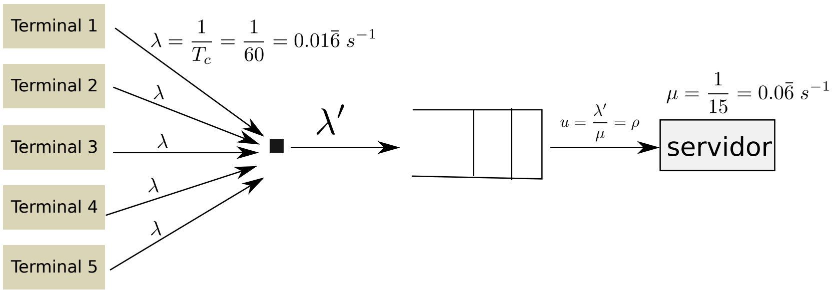

Figure 1: Modelo $M/M/1/\infty/5$.

1 Ejercicio 2-13

Un sistema de registro de incidencias se compone de una red de 5 terminales que realizan la entrada de datos manual, y un servidor, que recibe solicitudes tipo RPC para validar los datos introducidos en el cliente y almacenarlos en una base de datos. El tiempo que dicho servidor emplea para realizar las operaciones mencionadas se puede considerar distribuido exponencialmente con un valor esperado de 15 s. Cuando un cliente genera una petición, queda inactivo a la espera de recibir la respuesta del servidor. Una vez recibida dicha respuesta, el tiempo que tarda en generar una nueva petición es aleatorio y también se encuentra distribuido exponencialmente, con un valor medio de 1 minuto. Proponer un modelo de colas válido para este problema, y calcular la ocupación media del servidor y el tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones que son procesadas.

- Tiempo de servicio exponencial con valor esperado 15 s $\rightarrow T_s = 15 \rightarrow \mu = \frac{1}{T_s} = 0.0\bar{6}$ peticiones/segundo.
- Como el enunciado no dice nada respecto de la capacidad máxima de clientes que puede contenter el sistema, asumimos capacidad infinita.
- Una vez recibida una respuesta, el tiempo que tarda cada terminal en genrar generar una nueva petición (thinking time) es aleatorio y se encuentra distribuido exponencialmente, con un valor medio de 1 minuto $\rightarrow T_c = 1$ minuto $= 60$ segundos $\rightarrow \lambda = \frac{1}{T_c} = 0.01\bar{6}$ peticiones/segundo.

Por tanto, se tarda de un modelo $\mathbf{M/M/1/\infty/5}$ de acuerdo a la Figura 1.

1.1 Ocupación media del servidor

La ocupación media del servidor vendrá dada por ρ, la cual podemos calcular mediante la siguiente expresión:

$$\rho = 1 - p_0$$

Al haber un único servidor, la ocupación media del servidor es la probabilidad de que el sistema no esté vacío. Por tanto, ρ viene dada por el complementario de la probabilidad de que en el sistema no haya clientes (p_0) que podemos calcular como sigue:

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que en este caso $\lambda = \frac{1}{60}$ y $\mu = \frac{1}{15}$, entonces $\frac{\lambda}{\mu} = 0.25$ y la Ecuación 1 quedaría como:

$$\begin{aligned}
p_0 = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1} &= \left[\frac{5!}{5!} (0.25)^0 + \frac{5!}{4!} (0.25)^1 + \frac{5!}{3!} (0.25)^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{5!}{2!} (0.25)^3 + \frac{5!}{1!} (0.25)^4 + \frac{5!}{0!} (0.25)^5 \right]^{-1} \\
&\approx 0.199
\end{aligned}$$

Por, la ocupación media del servidor será:

$$\rho = 1 - p_0 = 1 - 0.199 = 0.801$$

Es decir, el servidor estará atendiendo la petición de un cliente el 80.1% del tiempo.

1.2 Tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones que son procesadas

El tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones que son procesadas viene dado por W.

Para calcular W podemos seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el número medio de clientes en el sistema L.
2. Obtener W a partir de L usando el Teorema de Little.

$$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{\mu}{\lambda}\rho = 5 - \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{60}} \cdot 0.801 = 5 - 4 \cdot 0.801 = 1.796 \; \textit{clientes}$$

Ahora calculamos el tiempo medio de estancia en el sistema (latencia) en función de L y la tasa **efectiva** de llegadas (IMPORTANTE: el Teorema de Little se calcula sobre la tasa efectiva de llegadas):

$$W = \frac{L}{\lambda'} \; .$$

La tasa efectiva de llegadas será:

$$\lambda' = \rho \cdot \mu = 0.801 \cdot \frac{1}{15} \approx 0.0535 \; s^{-1}$$

Y por tanto, el tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones que son procesadas es:

$$W = \frac{L}{\lambda'} = \frac{1.796}{0.0534} \approx 33.63 \; segundos$$