Hoja 8

1. Halla y resuelve las ecuaciones de Euler-Lagrange de los siguientes funcionales integrales que actúan sobre caminos $\alpha_0(t) = \mathbf{X}\big(u(t), v(t)\big) : [a,b] \to S$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1[\alpha_0] &= \int_a^b \frac{1}{2}\left((u')^2 + (v')^2\right) dt \,, \\ \mathcal{L}_2[\alpha_0] &= \int_a^b \sqrt{(u')^2 + (v')^4}\, dt \,,\end{aligned}$$

2. Fijamos $a < b$. Para caminos en el plano $\alpha(t) = \big(\, x(t)\,,\, y(t)\,\big)$, $t \in [a,b]$, definimos el siguiente funcional:
$$\mathcal{E}[\alpha] \;=\; \int_{t=a}^{t=b} \frac{1}{2}\left(\, x''(t)^2 + y''(t)^2 \,\right) dt \,.$$
Calcula la primera variación de este funcional, con un término de evaluación y un término integral que sea de la forma $\int_a^b \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{V}(t)\, dt$ siendo $\mathbf{V}(t)$ la velocidad inicial de deformación del camino. Es decir, que no queden derivadas de $\mathbf{V}$ en el integrando (tendrás que integrar por partes dos veces).

   Halla las ecuaciones de Euler-Lagrange y sus soluciones.

3. Sean $p = (u_0, v_0)$ y $q = (u_1, v_1)$ dos puntos del semiplano $S = \{(u,v) : v > 0\}$ con $u_0 < u_1$.

   (a) Si $\alpha(u) = \big(u, v(u)\big) : [u_0, u_1] \to S$ describe una curva con $\alpha(u_0) = p$ y $\alpha(u_1) = q$, comprueba que el área de la superficie de revolución parametrizada por $\mathbf{X}(u,\theta) = \big(\, v(u)\cos\theta\,,\, v(u)\operatorname{sen}\theta\,,\, u\,\big)$ es
$$\mathcal{L}[\alpha] = 2\pi \int_{u_0}^{u_1} v(u)\sqrt{1 + (v'(u))^2}\, du \,.$$

   (b) Entre todas las curvas suaves verificando las condiciones del apartado (a) encuentra (si la hay) la que nos da la superficie de revolución de área mínima.
   Ayuda: La ecuación $v = c_1\sqrt{1 + (v')^2}$ tiene solución $v(u) = c_1 \cosh \frac{u+c_2}{c_1}$

4. Sea S superficie regular con parametrización $\mathbf{X}(u,v)$, $u > 0$, y con métrica
$$Q \equiv \frac{2}{u^2}(du)^2 - 2du dv + u^2 (dv)^2 \,.$$
Calcula el vector curvatura geodésica respecto de Q de las siguientes curvas:
$$\begin{aligned}&\alpha(t) = \mathbf{X}(1, t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ &\beta(t) = \mathbf{X}\left(t, -\frac{1}{t}\right), \quad t > 0.\end{aligned}$$

5. Demuestra que el funcional descrito en el ejercicio 3. es $2\pi \,\mathrm{longitud}_Q[\alpha]$, siendo Q la siguiente métrica en el semiplano S:

$$Q \;=\; v^2\,(du)^2 + v^2\,(dv)^2 \;,$$

y relaciona la solución a dicho ejercicio con geodésicas de Q.

6. Halla las geodésicas del semiplano $\{(x, y) : x > 0\}$ dotado de la siguiente métrica:

$$Q \;=\; x^4\,(dx)^2 + x^2\,(dy)^2 \;.$$

7. Sea $\alpha(u) = (r(u), z(u))$ con $a \leq u \leq b$, $r(u) > 0$ y $\|\alpha'(u)\| = 1$ un perfil en el plano rz, y sea S la superficie de revolución que se obtiene al rotar α alrededor del eje z, con parametrización: $X(u, \theta) = (r(u)\cos\theta, r(u)\mathrm{sen}\,\theta, z(u))$. Demuestra que si un camino en S empieza en el paralelo $\{u = a\}$ y termina en el $\{u = b\}$, entonces tiene longitud mayor o igual a $b - a$. Demuestra que sólo puede tener longitud igual a $b - a$ si recorre un meridiano monótonamente.

8. Sea C el cilindro de revolución parametrizado por $\Phi(\theta, v) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, v)$ y consideremos en C las dos métricas siguientes:

$$Q_1 \equiv (d\theta)^2 + (dv)^2 \quad \text{y} \quad Q_2 \equiv (d\theta)^2 - 2d\theta dv + 2(dv)^2$$

Sean α y β las curvas en C definidas por:

$$\alpha(t) = \Phi(0, t) \quad \text{y} \quad \beta(t) = \Phi(t, t), \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

   (a) Demuestra que α y β son geodésicas para ambas métricas.
   (b) ¿Cuál de las dos curvas es más corta en la métrica Q_1? ¿Y en la Q_2?