# Segunda repesca Análisis Matemático 2018-2019

**Apellidos y nombre:** **DNI:**

**Nota:** Cada apartado de los problemas vale un punto. Éstos problemas son para entregarlos como máximo el miércoles 26 de diciembre hasta el mediodía via email por documento escaneado (os doy algo más de tiempo que a los de Matemáticas en consideración de las especiales fechas que son). La calificación del segundo control se tomará como el máximo del control ordinario y de la repesca. La presentación a ésta prueba es voluntaria.

**Problema 1.** Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Probar:

**1.** Si existe $L = \lim_{\|x\|\to\infty} f(x)$ (con $L \in \mathbb{R}$), entonces $f$ es uniformemente continua y acotada.

**2.** Si $f$ es $C^1$ y existe $v = \lim_{\|x\|\to\infty} \nabla f(x)$ (con $v \in \mathbb{R}^n$), entonces $f$ es Lipschitz en $\mathbb{R}^n$.

**3.** Si $n = 1$, $f$ es $C^1$ y $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = \infty$, $f$ no puede ser uniformemente continua.

**Problema 2.** Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada simétrica: $A = A^T$. En $\mathbb{R}^n$ definimos $Q(x) = \langle A\,x, x\rangle$ (con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto escalar en $\mathbb{R}^n$) la forma cuadrática asociada a $A$. Probar:

**1.** Probar que $Q(x)$ tiene la propiedad de que $\exists C < \infty$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |Q(x)| \leq C\|x\|_2^2.$$

**2.** Probar la identidad

$$Q(x+y) = Q(x) + 2\langle A\,x, y\rangle + Q(y),\ x, y \in \mathbb{R}^n$$

y usarla junto con 1.) para probar que $Q(x)$ es diferenciable y calcular $\nabla Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

**3.** Si $Q(x)$ tiene la propiedad de que $Q(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (esto es, $Q(x)$ es definida positiva), entonces existe $c > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ c\|x\|_2^2 \leq Q(x) \leq C\|x\|_2^2$$

**4.** Si $Q(x)$ es definida positiva, $S = Q^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 1\}$ es una hipersuperficie compacta y $C^\infty$ en $\mathbb{R}^n$; ¿cuál es ésta hipersuperficie cuando $A$ es la matriz identidad?

**Problema 3.** Probar las siguientes afirmaciones:

**1.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $A, B \subset X$ conexos por arcos. Entonces, si $A \cap B \neq \emptyset$ y $X = A \cup B$, $X$ es conexo por arcos.

**2.** Sea $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ ($\| \cdot \|$ es la norma euclídea). Probar, usando la proyección estereográfica $\Pi : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N = (0, \ldots, 0, 1)\} \mapsto \mathbb{R}^{n-1}$ ($N$ es el "polo norte") dada por

$$\Pi(x', x_n) = \frac{x'}{1 - x_n}; \text{ inversa } \Pi^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{S}^{n-1},\ \Pi^{-1}(u) = \left( \frac{2u}{\|u\|^2 + 1}, \frac{\|u\|^2 - 1}{\|u\|^2 + 1} \right)$$

(con $x = (x', x_n)$; $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$) que $\Pi$ y $\Pi^{-1}$ son efectivamente inversas, y que $\Pi^{-1}$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^{n-1}$ y $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$; hacer algo similar con $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{S = (0, \ldots, 0, -1)\}$.

**3.** Usar 1.) y 2.) para deducir que $\mathbb{S}^{n-1}$ es conexa por arcos si $n \geq 2$.