UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 231

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día 13 de abril de 2016. Examen parcial.

1.1 (0.25)	1.2 (1.25)	1.3 (1.25)	1.4 (0.75)	2.1 (1)	2.2 (1.5)	2.3 (1)	2.4 (1)	2.5 (1.5)	Total (10)

1. PROBLEMA (4 puntos).

Una empresa tiene un servidor que recibe tráfico siguiendo un proceso Poisson con una tasa de 5 peticiones por segundo. El tiempo de proceso del servidor está distribuido de forma exponencial y tiene una media de duración de 125ms. El servidor tiene una cola de espera que se puede considerar infinito.

1.1 (0.25 puntos) Justificar razonadamente un modelo de colas válido para describir el escenario planteado. No se considerarán respuestas sin razonar.

Se trata de un sistema **M/M/1** debido a que:

- El tiempo de servicio está distribuido de forma exponencial.
- Solo hay un servidor.
- El tiempo entre llegadas está distribuido de forma exponencial.
- El tamaño de la cola se puede considerar infinito.

1.2 (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que en la cola de espera haya 3 ó más peticiones.

Esta será la probabilidad de que en el sistema haya 4 peticiones o más (3 en la cola y una en el servidor).

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{5}{8} = 0.375$$

$$Prob = \sum_{n=4}^{\infty} p_n = \sum_{n=4}^{\infty} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 \frac{\rho^4}{1-\rho} = \rho^4 = 0.152$$

1.3 (1.25 puntos) Calcular la fracción de peticiones que tardarán en ser procesadas por el sistema más de 1 segundo.

El tiempo de proceso es el tiempo de estancia en el sistema. Incluye espera en cola y servicio. Como sabemos que la distribución del tiempo de estancia en el sistema es exponencial, con parámetro, $\mu - \lambda$, tenemos que:

$$Frac = \mathrm{P}(t > 1) = 1 - \mathrm{P}(t \leq 1) = \exp(-(\mu - \lambda) \cdot 1) = \exp\big(-(8-5)\big) = 0.0497$$

1.4 (1.25 puntos) Tras realizar una monitorización del servidor, se han obtenido las siguientes medidas del tiempo de servicio, para 10 peticiones elegidas de forma aleatoria: 20ms, 30ms, 60ms, 40ms, 500ms, 60ms, 50ms, 50ms, 500ms, 10ms. Justificar si la elección del modelo de colas elegido anteriormente para hacer los cálculos es correcta o no.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 231

Apellidos Nombre

Ejercicio del día 13 de abril de 2016. Examen parcial.

Calculamos una estimación del factor cuadrático de variación, definido como la varianza entre la esperanza al cuadrado. No sabemos la media ni la varianza, pero podemos estimarla a partir de las muestras.

$$C2 = \frac{Var[S]}{E[S]^2} \approx \frac{(10^{-1}\sum_1^{10} t_i{}^2) - (10^{-1}\sum_1^{10} t_i)^2}{(10^{-1}\sum_1^{10} t_i)^2} = \frac{0.0341}{0.017424} = 1.95$$

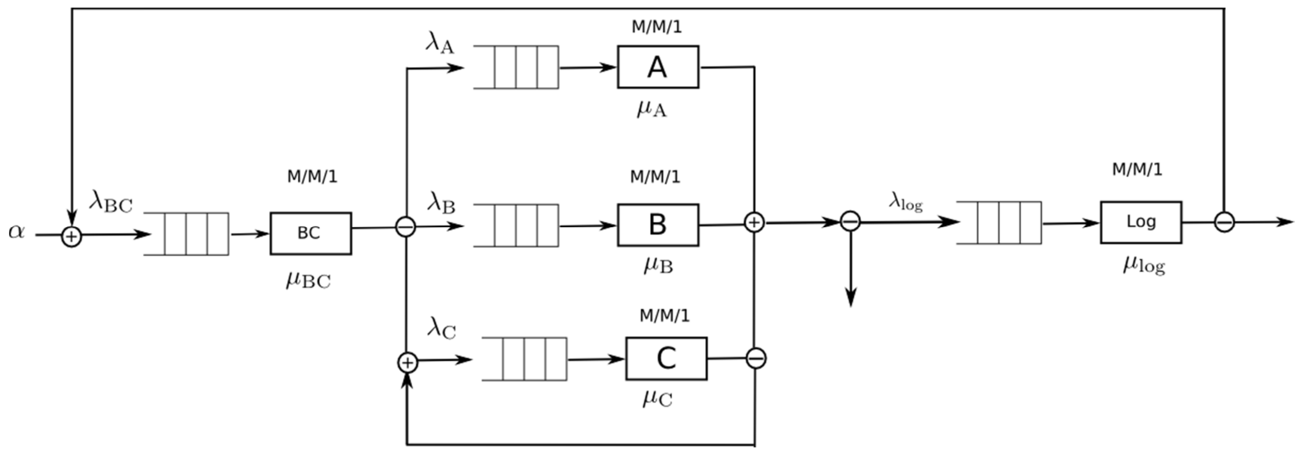
Como el coeficiente cuadrático de variación parece ser muy diferente de 1.0 (el de la exponencial), la distribución del tiempo de servicio es poco probable que sea exponencial, con lo que el modelo M/M/1 no sería adecuado.

2. PROBLEMA (6 puntos).

Una empresa tiene un complejo sistema de gestión. Dicho sistema recibe peticiones de los clientes según un proceso Poisson con una media de **5 peticiones por segundo**. Las peticiones son recibidas inicialmente por un balanceador de carga que reparte las peticiones entre 3 servidores: A, B y C. En promedio, la CPU del balanceador de carga tarda **50ms** en analizar cada petición. Los servidores A y B, tardan **200ms** en procesar cada petición, en promedio, cada uno. El servidor C tarda **100ms**. Se estima que 1 / 3 de las peticiones son para el servidor A, un tercio para el servidor B, y el tercio restante para el servidor C. El servidor C tiene un funcionamiento ligeramente distinto al de los servidores A y B. Se estima que un 25% de las peticiones que recibe el servidor C han de invocar otra petición en dicho servidor, tras ser procesadas por el servidor C. Estas peticiones son recibidas por el servidor C. Una vez una petición ha sido atendida (por el correspondiente servidor A, B ó C), ésta se ha de registrar en un servidor de log, con una probabilidad del 75%. En caso contrario, la petición se da por finalizada. El servidor de log tarda **125ms** en procesar cada petición, en promedio. Finalmente, se ha observado que si es necesario registrar la petición en el servidor de log, tras esto, con una probabilidad del 50% la petición necesitará invocar otra petición adicional en el sistema de gestión antes de darse por completada. Esta petición nueva será recibida por el balanceador de carga. En caso contrario la petición se da por finalizada.

Considerar que todos los tiempos están distribuidos de forma exponencial y que todos los servidores se encuentran en estado estacionario y que tienen una cola de tamaño infinito.

2.1 (1 puntos) Dibujar el diagrama de proceso del sistema completo, e indicar (no calcular) las tasas de llegada a la entrada de cada servidor. Indicar también la capacidad de cada servidor. Dar una explicación razonada sobre qué modelo, según la notación de Kendall, será aplicable a cada una de sus componentes. Indicar las suposiciones y teoremas utilizados.



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 231

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día 13 de abril de 2016. Examen parcial.

Cada uno de los subsistemas presentados en el diagrama se pueden modelar de acuerdo a un modelo M/M/1 aplicando el teorema de Jackson. Esto es así porque todos los tiempos están distribuidos de forma exponencial, cada subsistema tiene un único servidor, las colas son infinitas, la red es una red de colas abierta ya que la probabilidad de salir de la red es estrictamente mayor que 0, y según nos han indicado en el enunciado todos los sistemas están en estado estacionario.

2.2 (1.5 puntos) Calcular la tasa de llegadas efectiva a la entrada de cada servidor (Balanceador de Carga, A, B, C y Log).

Como los sistemas están en estado estacionario a la salida tendrán la misma tasa que a la entrada.

α=5p/s
$\lambda bc = \alpha+0.5\ \lambda log$
$\lambda A = 0.33\ \lambda bc$
$\lambda B = 0.33\ \lambda bc$
$\lambda C = 0.33\ \lambda bc + 0.25\ \lambda C$
$\lambda C = 0.33 / (1 – 0.25)\ \lambda bc = 0.33 / 0.75\ \lambda bc$
$\lambda log = 0.75\ (\lambda A + \lambda B + 0.75 * \lambda C) = 0.75\ \lambda bc$

$\lambda bc = \alpha+0.5 * \lambda log$
$\lambda bc = \alpha+0.5 * 0.75\ \lambda bc$
$\lambda bc = \alpha / (1 – 0.5 * 0.75) = 5 / (1-0.375) = 8$ p/s

Por tanto:

$\lambda A = 0.33 \cdot 8 = 2.67$ p / s
$\lambda B = 2.67$ p /s
$\lambda C = 0.33 / (1 – 0.25)\ 8 = 3.55$ p / s
$\lambda log = 0.75 \cdot 8 = 6$ p / s

Comprobamos que en efecto cada servidor está en estado estacionario.

$\lambda bc = 8 < \mu bc = 20$ p/s
$\lambda A = 2.67 < \mu A = 5$ p/s
$\lambda B = 2.67 < \mu B = 5$ p/s
$\lambda C = 3.55 < \mu C = 10$ p/s
$\lambda log = 6 < \mu log = 8$ p/s

2.3 (1 puntos) Calcular justificadamente el número medio de peticiones en todo el sistema.

Usamos el teorema de Jackson del que se deduce que el número total de peticiones es la suma de las peticiones en cada sub-sistema, cuyas probabilidades vendrían dadas por las fórmulas del modelo M/M/1.

$\rho bc = \lambda bc / \mu bc = 8 / 20 = 0.4$
$\rho A = \lambda A / \mu A = 2.67 / 5 = 0.53$
$\rho B = \lambda B / \mu B = 2.67 / 5 = 0.53$
$\rho C = \lambda C / \mu C = 3.55 / 10 = 0.36$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 231

Apellidos ... Nombre ...

Ejercicio del día 13 de abril de 2016. Examen parcial.

ρlog = λlog / μlog = 6 / 8 = 0.75

Lbc = ρbc / (1 – ρbc) = 0.4 / 0.6 = 0.67
LA = ρA / (1 – ρA) = 0.53 / 0.47 = 1.13
LB = ρB / (1 – ρB) = 0.53 / 0.47 = 1.13
LC = ρC / (1 – ρC) = 0.36 / 0.67 = 0.57
Llog = ρlog / (1 – ρlog) = 0.75 / 0.25= 3.0

Ltotal = Lbc + LA + LB + LC + Llog = 0.67 + 1.13 + 1.13 + 0.57 + 3.0 = 6.5 peticiones

2.4 (1 puntos) Calcular justificadamente el tiempo medio de respuesta de todo el sistema.

Usamos Little:

Wtotal = Ltotal / α = 6.5 / 5 = 1.3 segundos

2.5 (1.5 puntos) Determinar justificadamente un cuello de botella en el sistema descrito anteriormente. Proponer dos posibles soluciones a este problema. No se tendrán en cuenta respuestas no razonadas.

Un cuello de botella es el servidor de log. Tiene rho = 0.75, lo que indica que funciona el 75% del tiempo.

Posibles soluciones consisten en escribir menos veces en el log (reducir la probabilidad de acceder a este servidor), poner un servidor más rápido o conectar múltiples servidores a la misma cola de espera.

Formulario:

Modelo M/M/1

$$p_n = (1-\rho)(\rho)^n$$

$$\rho = \lambda / \mu$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$F_W(t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$$

Modelo M/M/c:

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & (n < c) \\ p_0 \dfrac{c^c}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^n & (n \geq c) \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

$$P_q = \frac{p_c}{1-\rho} = E_c(c,u)$$

$$L = \frac{P_q \rho}{1-\rho} + c\rho$$

Modelo M/M/c/c:

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (0 \le n \le c)$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \right]^{-1}$$

Modelo M/G/1:

$$L = \frac{\lambda^2 \mathrm{E}\left[S^2\right]}{2(1-\rho)} + \rho$$

$$\rho = \lambda/\mu$$

Modelo M/M/1/K:

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad (0 \le n \le K)$$

$$p_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} \right] & (\lambda \ne \mu) \\ \dfrac{1}{K+1} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu} \left[\dfrac{1-(\lambda/\mu)^K}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} \right] & (\lambda \ne \mu) \\ \dfrac{K}{K+1} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \dfrac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} \left[\dfrac{1-(K+1)(\lambda/\mu)^k + K(\lambda/\mu)^{K+1}}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} \right] & (\lambda \ne \mu) \\ \dfrac{K}{2} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

Modelo M/M/1//M

$$p_n = p_0 \binom{M}{n} n! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

$$\rho = 1 - p_0$$

$$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{\mu}{\lambda}\rho$$

Modelo M/M/c//M

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dbinom{M}{n} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & (0 \le n < c) \\ p_0 \dbinom{M}{n} \dfrac{n!}{c^{n-c} c!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & (c \le n < M) \end{cases}$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \binom{M}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{M} \binom{M}{n} \frac{n!}{c^{n-c} c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

$$\rho = 1 - \sum_{n=0}^{c-1} p_n \frac{c-n}{c}$$

$$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{c\mu}{\lambda}\rho$$