Propiedad de separación de Hausdorff.

1. Demuestra que (X, T_X) es un espacio topológico con la propiedad de separación de Hausdorff si y sólo si

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$$

es un cerrado en el espacio producto $X \times X$, cuya topología viene generada por la base $\mathcal{B} := \{\mathcal{U} \times \mathcal{V} : \mathcal{U}, \mathcal{V} \in T_X\}$. De modo más general, se puede probar lo siguiente: si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e Y es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$.

2. Siguiendo con el ejercicio anterior, demostrar que el recíproco de la última afirmación no es cierto en general. Sin embargo, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta y sobre, y el conjunto $K = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$ entonces Y es Haussdorf.

3. Demuestrar que si f y g son funciones continuas definidas de X en Y siendo Y un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

4. Demostrar que si f y g son funciones continuas definidas de X en Y, siendo Y un espacio de Hausdorff, que coinciden en un subconjunto denso de X, entonces $f = g$.

5. Estudia la convergencia de la sucesión $(-n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ en $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$) y concluye que el límite de una sucesión no tiene por qué ser único cuando el espacio no es Hausdorff. Por otro lado, aunque $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\leftarrow})$ no es Hausdorff, sí que posee cierta propiedad de separación que el lector puede tratar de descubrir y enunciar.

6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_1. Demuestra que:
(i) Si X es finito, $\mathcal{T}$ es la topología discreta.
(ii) Si A es un subconjunto finito de X, A no tiene puntos de acumulación, es decir $A' = \emptyset$.
(iii) Enunciar una caracterización para los espacios métricos con un número finito de elementos que venga expresada en términos de su topología.

Funciones continuas. Homeomorfismos.

7. Demuestra que la función diagonal $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $d(x) = (x, x)$ es continua.

8. Sea $A = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Demuestra que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que sólo es un homeomorfismo con la del orden.

9. Sea $X = [0,1]$ con la topología usual e $Y = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico. Estudia si las siguientes funciones son continuas.

- $f\colon X \to Y$ dada por $f(t) = (t, t)$
- $g\colon X \to Y$ dada por $g(t) = (1/2, (2t+1)/4)$
- $h\colon X \to Y$ dada por $h(t) = (t, 1)$.

10. Halla una función continua y biyectiva del intervalo $(-1,1)$ en el conjunto

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ (x+1)^2+y^2=1\},$$

ambos con la topología usual. (*Más adelante sabremos demostrar que estos espacios no son homeomorfos.*)

11. Estudia si $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{(\,]}$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

12. Demuestra que los espacios $X=[0,2)\cup[4,5]$ e $Y=[0,3]$ son homeomorfos con la topología del orden.

13. Demuestra que $[0,\infty)\times[0,\infty)$, con la topología usual es homeomorfo a

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2<1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}.$$

14. Da un ejemplo de una función continua $f:X\to Y$ cuyo grafo $\{(x,f(x)) : x\in X\}$ no sea cerrado en $X\times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea. (*Indicación: Piensa en la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.*)

15. Prueba que existen funciones de $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{N}$ con la topología discreta que son sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{R}$ con la topología discreta que tengan tales propiedades. (*Indicación: la imagen inversa de $\mathbb{R}$ sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a,b)$ contiene siempre un número racional.*)

Topología cociente.

16. Sea $p_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la proyección en el primer factor.

1. Sea X el subespacio $(0\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times 0)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Sea g la restricción de p_1 a X. Demuestra que g es una aplicación cerrada pero que no es una aplicación abierta.
2. Sea Y el subespacio $(\overline{\mathbb{R}_+}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times 0)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Sea h la restricción de p_1 a Y. Demuestra que la aplicación h no es ni abierta ni cerrada, pero sí es una aplicación cociente. (*Indicación: $h^{-1}(U)\cap(\mathbb{R}\times 0)=U\times 0$.*)

17. Sea $p:X\to Y$ una aplicación y sea A un subespacio de X.

(i) Demuestra que si A es abierto en X y p es una aplicación abierta, entonces la restricción de p a A es una aplicación abierta

(ii) Concluye del apartado anterior que $p':A\to p(A)\colon x\mapsto p'(x):=p(x)$ es una aplicación abierta.

(iii) Demuestra que si A y p son cerradas, la restricción de p a A es cerrada, luego la aplicación p' (del aparatado (ii)) lo es.

18. Se considera el plano $X=\mathbb{R}^2$.

(i) Definimos una relación de equivalencia sobre X:

$$(x_0,y_0)\equiv(x_1,y_1) \quad \text{si} \quad x_0+y_0^2=x_1+y_1^2.$$

Identifica el espacio topológico cociente X^* con alguno conocido.

(ii) Repite el apartado anterior para la siguiente relación de equivalencia

$$(x_0,y_0)\equiv(x_1,y_1) \quad \text{si} \quad x_0^2+y_0^2=x_1^2+y_1^2.$$

19. Sea Z el subespacio $(\mathbb{R} \times 0) \cup (0 \times \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^2$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to Z$ la aplicación dada por $g(x, y) = (x, 0)$ si $x \neq 0$, y $g(0, y) = (0, y)$.

(i) Estudia si g es una aplicación continua, si es abierta y si es cerrada.

(ii) Demuestra que en la topología cociente inducida por g el espacio Z no es Hausdorff.