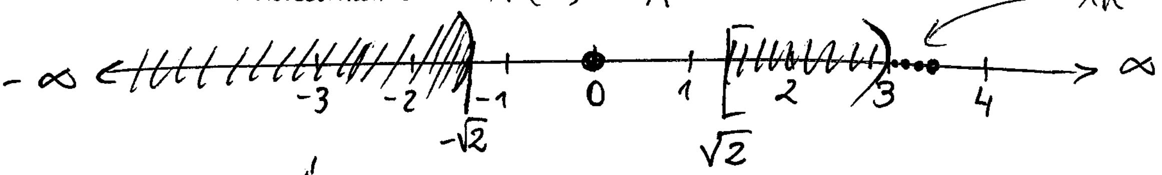
HOJA 2

1. $X = \mathbb{R}$ $\quad A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3) \cup \left\{ \frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$

Hallar $\mathring{A}, \bar{A}$ y A' para las siguientes top:

↳ adicionalmente $Fr(A) = \bar{A} \setminus Int(A)$ $\quad X_n = \frac{3n+10}{n+3}$



(1) La usual
$$\begin{cases} Int(A) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3) \\ \bar{A} = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3] \cup \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \cup \{0\} \\ A' = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3] \\ Fr(A) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 3\} \cup \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \end{cases}$$

(2) Cofinita
$$\begin{cases} Int(A) = \emptyset \\ \bar{A} = \mathbb{R} \quad (A \text{ es denso en } \mathbb{R}) \\ A' = \mathbb{R} \end{cases}$$

G abto si G^c es finito

K cerrado si K es finito (ó $K = X, \emptyset$)

(3) la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$Int(A) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3)$

$\bar{A} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 3] \cup \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

$A' = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3]$

HOJA 2

①

(1) $\text{Int}A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3)$

$\bar{A} = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3] \cup$ suc. $\cup \{0\}$

$A' = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3]$

(2) $\text{Int}A = \emptyset$ porque un abierto es el que su compl. es finito.

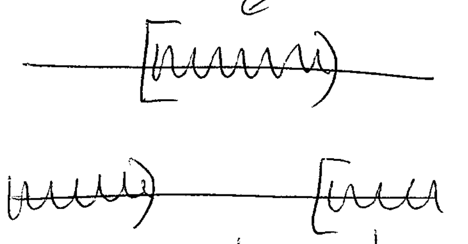
$\bar{A} = X$

$A' = \emptyset$ si esto está bien

(3) $\text{Int}A = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, 3)$

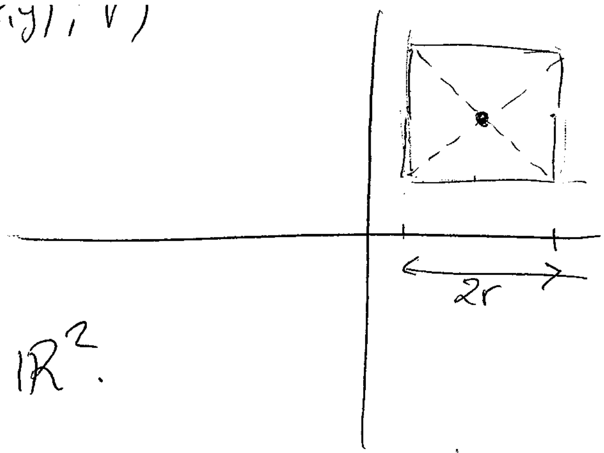
$\bar{A} =$

abierto



su complementario (debería ser cerrado) es unión de dos abiertos xD.

1) $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 0 < r \in \mathbb{R} \qquad D((x,y), r)$



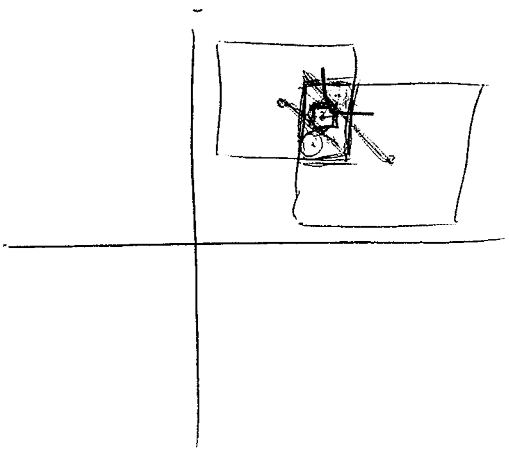
$\mathcal{B} = \{ B((x,y); r) : (x,y) \in \mathbb{R}, \ r > 0 \}$

base para una topología en $\mathbb{R}^2$.

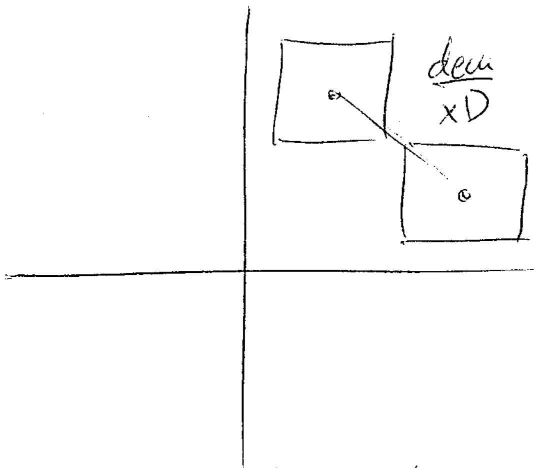
Utilizamos el teorema de bases y sub-bases:

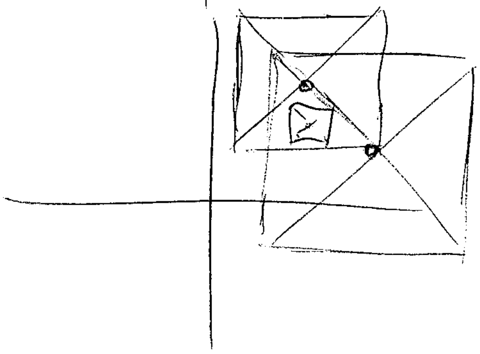
a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ ✓ (trivial)

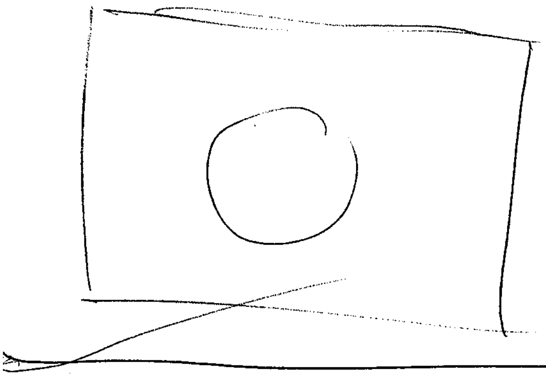
b) ¿Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow \forall p \in B_1 \cap B_2, \ \exists B_3 \in \mathcal{B}$ con $p \in B_3$ y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$?



$\Longrightarrow$ ¿Cómo formalizar esta cosa tan intuitiva?







$\overline{A^c} = Int(A)^c$ ✓

$\overline{A}^c = Int(A^c)$ ✓

~~Fr(A) =~~

---

4) viii) ¿ $Fr(A) = D$, $Fr(D) = A$ $\Longrightarrow A = D$? $\overline{E} = E \cup Fr(E)$

$Fr(D) = \overline{D} \cap \overline{D^c} = A \; (*)$

$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = D$

$$Fr(Fr(D)) = Fr(D) = Fr(A) \Longrightarrow A = D$$

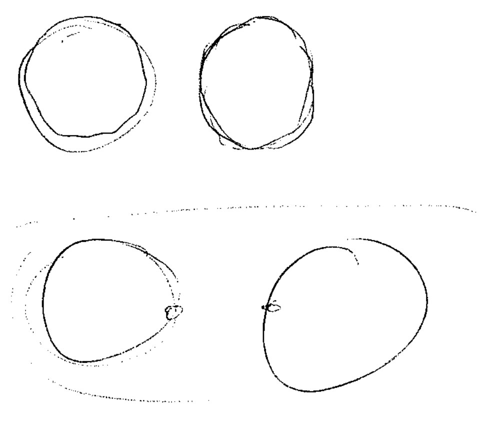
aplicando fronteras en $(*)$

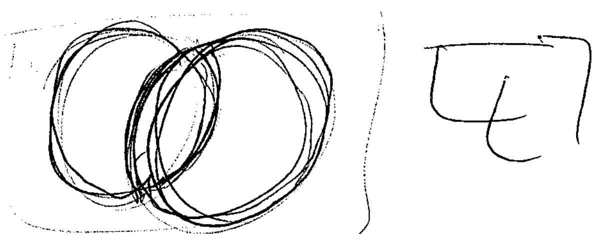
iv) A abto. $\Longrightarrow A \cap \overline{D} \subset \overline{A \cap D}$ ¿Qué pase si A no ab

$x \in A \cap \overline{D} \Longrightarrow$ $x \in A$, $x \in \overline{D}$ Hecho en foto móvil

iii) $\boxed{\subset}$ Foto móvil

$\boxed{\supset}$ Inacabado





HOJA 2

7.

i) Sea $x \in \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \Rightarrow \exists i \in I,\ x \in \overline{A_i} \Rightarrow \exists i \in I, \forall u \in \mathcal{U}_x : u \cap A_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow u \cap \left(\bigcup_{j\in I} A_j\right) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$

ii) Sea $n = \text{card}(I)$. Procedemos por inducción

- Si $n=2$, veamos que $A, B \subset X \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A\cup B}$

Por i) $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Sea ahora $x \in \overline{A\cup B} \Rightarrow \forall u \in \mathcal{U}_x$, $\overbrace{u \cap (A \cap B)}^{(u\cap A)\cup(u\cap B) \,=} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} u \cap A \neq \emptyset \\ \text{ó} \\ u \cap B \neq \emptyset \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \overline{A}$ ó $x \in \overline{B}$

- Si $n > 2$: $A_1, \dots, A_n \subset X$, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$

Sea $A := A_1$, $B = A_2 \cup \dots \cup A_n$. Por el caso $n=2$ subconjuntos se tiene que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$; pero por ind. en n, $\overline{B} = \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$. En consecuencia $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \overline{A_n}$. Por tanto, $\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n} =$

$= \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}$

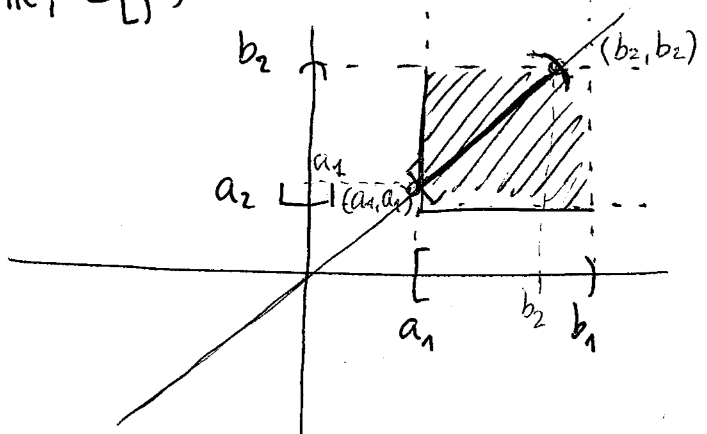
iii) $A_n = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, A_n cerrado en $\mathbb{R}$ para la top. usual $\Rightarrow \overline{A_n} = A_n$. Luego $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subsetneq \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$

iv) Cuando hay una cantidad infinita no es lo mismo un "para todo existe" que un "existe para todo".

$\boxed{8.}$ $X = \mathbb{R}^2$ $\quad (\mathbb{R}, \tau_{[)}) \times (\mathbb{R}, \tau_{[)})$ $\quad \{[a,b) \mid a<b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$

$A = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$

rde) $B = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$

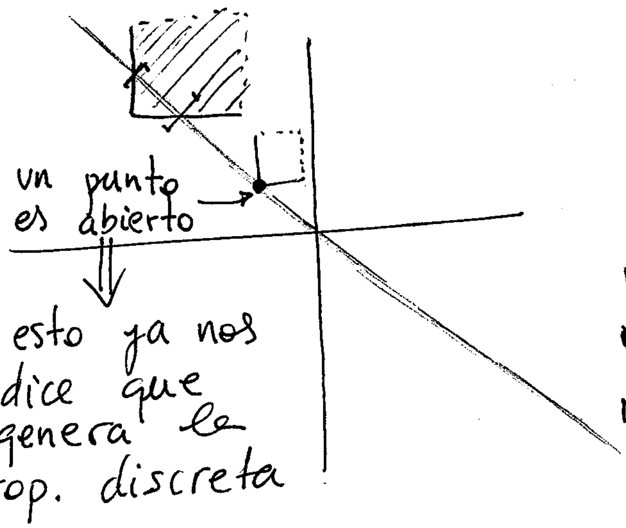


$$\begin{array}{ccc} (B, \tau_B) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, \tau_{[)}) \\ (b,b) & \longmapsto & b \end{array}$$

Hay que ver que es un homeomorfismo

- f continua: $f^{-1}([u,v)) = \{(x,x) \mid u \leq x < v\} = B \cap (\text{algo}) =$ ← abto en $\mathbb{R}^2$
  $= B \cap ([u,v) \times [u,v))$ abto $\Rightarrow f$ continua.
- f biyectiva: trivial
- f inversa: $f^{-1}: (\mathbb{R}, \tau_{[)}) \longrightarrow (B, \tau_B)$
  $b \longmapsto (b,b)$
- f^{-1} continua: Sea $g = f^{-1}$
  $g^{-1}(\{(x,x) \mid u \leq x \leq v\}) = [u,v)$ abto en $(\mathbb{R}, \tau_{[)})$
  $\Rightarrow g$ continua $\Rightarrow f^{-1}$ continua.

Ahora vamos a hacer lo mismo con A.



$A = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{array}{ccc} (A, \tau_A) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, \tau_d) \\ (a,-a) & \longmapsto & a \end{array}$$

- f biyectiva: trivial
- $g = f^{-1}: (\mathbb{R}, \tau_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_A)$ cont. (lo mismo)
- f cont. Veamos que $\forall (a,-a) \in A$ $\{(a,a)\}$ es abto. en A.

En efecto, $\{(a,-a)\} = A \cap \big([a, a+\varepsilon) \times [-a, -a+\varepsilon)\big)$

$\varepsilon > 0$, $K \cap A = \left(\bigcup_{p \in A} \{p\}\right) \cap K$ abto. en A. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ continua

9. i) A_x (para entenderlo mejor lo vamos a llamar A_{x_0})

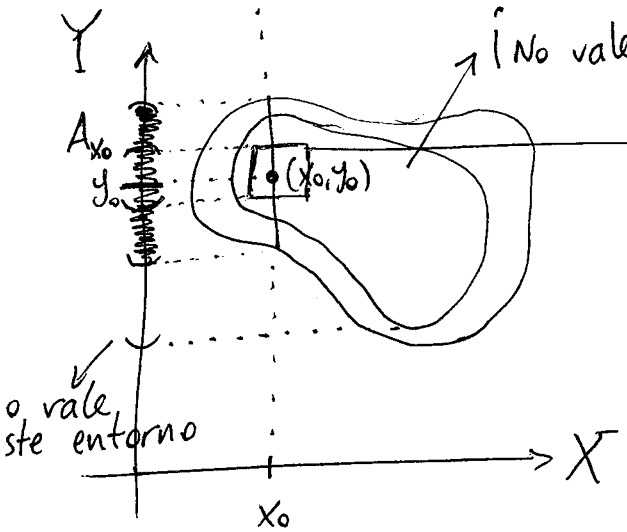
A_{x_0} abto. en Y:

Sea $y_0 \in A_{x_0} \Rightarrow (x_0, y_0) \in A$; como A es abto $\exists U_{x_0} \times V_{y_0} \in$

$\in \mathcal{U}_{(x_0,y_0)}$ con $\underset{\text{abto.}}{U_{x_0}} \in \beta_{x_0,X}$, $\underset{\text{abto.}}{V_{y_0}} \in \beta_{y_0,Y}$, $U_{x_0} \times V_{y_0} \subset A \Rightarrow$ ($U_{x_0} \times V_{y_0} \supset \{x_0\} \times V_{y_0}$)

$\Rightarrow pr_2(U_{x_0} \times V_{y_0}) = V_{y_0} \subset A_{x_0} \Rightarrow y_0 \in Int(A_{x_0})$

? $\to$ Sí, por esto $\to \{x_0\} \times V_{y_0}$



¡No vale cualquier entorno!

Es mejor utilizar entornos con forma "de caja" (aprovechamo que estamos en la topología producto)

Igual para ver que A_y abto. en X.

ii) Contraejemplo: $(0,1) \times (0,1)$ con el orden lexicográfico.