Topología, curso 2019-20

Hoja 2

1. Sea X un conjunto y A, B dos subconjuntos propios y no vacíos de X tales que $A \neq B$. Si la colección $\mathcal{T} = \{\varnothing, A, B, X\}$ es una topología de X, ¿qué condición deben cumplir A y B?

2. Sean X un conjunto y $a \in X$. Se considera la familia $\mathcal{T}_a$ de los subconjuntos U de X tales que o bien U es vacío, o bien $a \in U$. Decide razonadamente si $\mathcal{T}_a$ es una topología en X.

3. Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología sobre X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demuestra que $\mathcal{T}$ es la topología discreta de X.

4. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada (a,b) de U existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\big) \cup \big(\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big) \subset U.$$

Estudia si $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

5. (a) Si $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ es una colección de topologías en X, demuestra que $\bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ una topología?

(b) Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ una colección de topologías en X. Demuestra que existe una única topología en X que es la más pequeña que contiene a todas las $\mathcal{T}_\alpha$ y que también existe una única topología en X que es la más grande contenida en todas las $\mathcal{T}_\alpha$.

(c) Si $X = \{a, b, c\}$, consideramos las topologías $\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a,b\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b,c\}\}$. Encuentra la topología más pequeña que contiene a $\mathcal{T}_1$ y a $\mathcal{T}_2$, y la topología más grande contenida en $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$.

6. Se consideran las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{B}_1 & = & \{\,]\,a,b\,[\ :\ a<b\} \\
\mathcal{B}_2 & = & \{[\,a,b\,[\ :\ a<b\} \\
\mathcal{B}_3 & = & \{\,]\,a,b\,]\ :\ a<b\} \\
\mathcal{B}_4 & = & \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K \mid B \in \mathcal{B}_1\},\ \text{donde}\ \ K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \\
\mathcal{B}_5 & = & \{\,]\,a,+\infty\,[\ : a \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{B}_6 & = & \{\,]-\infty,a\,[\ : a \in \mathbb{R}\} \\
\mathcal{B}_7 & = & \{B \mid \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito }\}
\end{array}$$

(a) Demuestra que cada $\mathcal{B}_i$ es una base de alguna topología de $\mathbb{R}$.
(b) Compara entre sí estas siete topologías.
(c) Demuestra que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una subbase de la topología engendrada por $\mathcal{B}_1$.

7. Para cada punto (x,y) de $\mathbb{R}^2$ y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el siguiente conjunto $Q_r(x,y)$:
«cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x,y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x,y)».

Haz un dibujo que ayude a demostrar que $\mathcal{B} = \{Q_r(x,y) \colon (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ r > 0\}$ es base para una topología en $\mathbb{R}^2$.

8. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de sendas topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ de un mismo conjunto X, demuéstrese que

$$\mathcal{B} = \{B_1 \cap B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1,\ B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

es base de una topología más fina que $\mathcal{T}_1$ y que $\mathcal{T}_2$.

9. Encuentra una subbase para la topología discreta en el conjunto $X = \{1,2,3,4,5\}$ tal que todos sus miembros tengan más de un elemento.

10. (a) Demuestra que la colección numerable

$$\mathcal{B}'_1 = \{\,]\,a,b\,[\ :\ a<b, a,b \in \mathbb{Q}\}$$

es una base para la topología usual de $\mathbb{R}$.

(b) Demuestra que la colección

$$\mathcal{B}'_2 = \{[\,a,b\,[\ :\ a<b, a,b \in \mathbb{Q}\}$$

es una base que engendra en $\mathbb{R}$ una topología diferente a la topología del límite inferior (que es la engendrada por la colección $\mathcal{B}_2$ del ejercicio anterior).

11. Si $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ son topologías en X y $\mathcal{T}'$ es estrictamente más fina, ¿qué se puede decir acerca de las correspondientes topologías heredadas por un subconjunto $Y \subset X$?

12. Sea Y es espacio topológico obtenido restringiendo a $[-1, 1]$ la topología usual de $\mathbb{R}$. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos son abiertos de Y? ¿Cuáles son abiertos de $\mathbb{R}$?

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{x : 1/2 < |x| < 1\} \\ B & = & \{x : 1/2 < |x| \leq 1\} \\ C & = & \{x : 1/2 \leq |x| < 1\} \\ D & = & \{x : 1/2 \leq |x| \leq 1\} \\ E & = & \{x : 0 < |x| < 1 \text{ y } 1/x \notin \mathbb{N}\} \end{array}$$

13. Sean X e Y espacios topológicos, $\mathsf{A} \subset X \times Y$ y $\mathsf{A}_x = \{y \in Y : (x, y) \in \mathsf{A}\}$, $\mathsf{A}_y = \{x \in X : (x, y) \in \mathsf{A}\}$.

(a) Demuestra que si A es abierto en $X \times Y$, entonces, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, A_x y A_y son abiertos en Y y en X respectivamente.

(b) Si A_x y A_y son abiertos para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, ¿es A abierto en $X \times Y$?

14. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Sea $\mathcal{T}$ la topología producto en $X \times Y$ construida a partir de las topologías $\mathcal{T}_1$ de X y $\mathcal{T}_2$ de Y. Prueba que, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ (no necesariamente la «base producto»), entonces $\pi_1(\mathcal{B}) = \{\pi_1(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_1$ y $\pi_2(\mathcal{B}) = \{\pi_2(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_2$. ¿Se puede usar este hecho para resolver el ejercicio anterior?

15. Se considera la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B}$ del ejercicio 7. ¿Existen en $\mathbb{R}$ sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$?

Indicación: De existir, ambas topologías deberían ser menos finas que la usual.

16. Designemos por X, X' a un mismo conjunto con topologías $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ respectivamente. Del mismo modo, designemos por Y, Y' a un mismo conjunto con topologías $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$.

(a) Demuestra que si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$, entonces la topología producto en $X' \times Y'$ es más fina que la topología producto de $X \times Y$.

(b) ¿Es cierto el recíproco de (a)?

(c) ¿Qué se puede decir si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$, $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$?

17. (a) Demuestra que la colección de rayos abiertos de un conjunto totalmente ordenado A es una subbase de la topología del orden de A.

(b) Sea X un conjunto ordenado, con la topología del orden. Sea Y un intervalo o rayo en X, y sean $]\leftarrow, a[$ y $]a, \rightarrow[$ rayos abiertos en X. Demuestra que si $a \in Y$, entonces cada uno de los conjuntos $Y \cap]\leftarrow, a[$ y $Y \cap]a, \rightarrow[$ es un rayo abierto del conjunto ordenado Y, mientras que si $a \notin Y$, cada uno de estos conjuntos es o bien vacío o bien todo Y.

(c) Concluye que si Y es un intervalo o un rayo de X, entonces la topología del orden y la topología de subespacio sobre Y son la misma.

18. Demuestra que la colección numerable

$$\{]a, b[\times]c, d[\ : \ a < b, c < d, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

es una base para la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

19. Demuestra que la topología del orden del diccionario en el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es la misma que la topología producto $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ denota el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología discreta. Compara esta topología con la usual de $\mathbb{R}^2$.

20. Sea $\mathbb{R}$ la recta real con su topología usual, y $\mathbb{R}_l$ el mismo conjunto de los números reales, pero con la topología del límite inferior. Si L es una recta del plano, describe la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$. Las topologías en ambos casos son o deberían ser familiares.

21. Denotamos I al subconjunto $[0, 1]$ de los reales. Compara la topología producto en $I \times I$, la topología del orden del diccionario en $I \times I$, y la topología $I_d \times I$, donde I_d denota al cojunto I con la topología discreta.

22. Se considera el conjunto $\mathbb{R}^I$ de todas las funciones reales definidas en el intervalo unidad $I = [0, 1]$.

(a) Para cada $f \in \mathbb{R}^I$, cada subconjunto finito $F \subset I$ y cada número $\delta > 0$, sea

$$U(f, F, \delta) = \{g \in \mathbb{R}^I : |g(x - f(x))| < \delta, \forall x \in F\}$$

Demuestra que los conjuntos $U(f, F, \delta)$ forman una base para una cierta topología de $\mathbb{R}^I$

(b) Para cada $f \in \mathbb{R}^I$ y cada número $\epsilon > 0$, sea

$$V(f,\epsilon) = \{g \in \mathbb{R}^I : |g(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in I\}$$

Demuestra que los conjuntos $V(f,\epsilon)$ forman una base para una cierta topología de $\mathbb{R}^I$

(c) Compara las dos topologías de los apartados anteriores.

23. Demuestra que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable. Sugerencia: usar la distancia

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } x_1 = y_1 \\ |x-y| + 1, & \text{si } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

24. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las progresiones aritméticas, es decir los conjuntos de la forma

$$\{a + nb : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z},$$

que se obtienen fijando $a, b \in \mathbb{Z}$.

(a) Demuestra que $\mathcal{B}$ es base se una topología en $\mathbb{Z}$.

(b) Comprueba que todos los conjuntos de $\mathcal{B}$ son tamién cerrados.

(c) Utiliza esta topología para probar que hay infinitos números primos. Sugerencia: si hubiera sólo un número finito $p_1, \ldots, p_N$, y llamamos $B_j \in \mathcal{B}$ al conjunto de los múltiplos de p_j, tendríamos

$$\cup_{j=1}^N B_j = \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 1\},$$

que no es cerrado.