Variable Compleja I (CURSO 2019-20, **Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Teorema integral de Cauchy. Función primitiva

En primer lugar, conviene tener en cuenta que el estudio de las integrales de línea es importante y útil. No se ha desarrollado sólo por el amor al arte y, desde luego, no con el fin de complicar el ya complejo cuadro de las funciones holomorfas (analíticas). Dicho estudio surge de las necesidades naturales. Con frecuencia no disponemos de una fórmula explícita para una función analítica; incluso cuando se tiene, algunas propiedades de la función no son fáciles de deducir directamente de ella. En muchos casos, las funciones holomorfas vienen dadas como series funcionales (ya hemos visto algunos ejemplos), otras veces como productos infinitos (se verán ejemplos en Variable Compleja II) y a veces como integrales que dependen de un parámetro complejo, en ocasiones como funciones inversas locales de otras holomorfas o en otra forma. Al no tener una información completa sobre una función analítica, resulta útil poder obtener cierta información parcial.

Los matemáticos del siglo XIX (entre ellos, notablemente Cauchy) descubrieron que los valores de ciertas integrales de línea con frecuencia nos proporcionan información muy útil sobre la función. Por ejemplo, en relación con la Fórmula integral de Cauchy, hemos visto que basta conocer los valores de una función holomorfa sólo en una circunferencia para poder evaluar la función y sus derivadas en cualquier punto interior a la circunferencia. Resulta que este hecho se puede generalizar a cualquier contorno en lugar de una circunferencia. Recordemos que, por el Teorema de Jordan, cada contorno γ determina dos componentes conexas del complementario de su traza, $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$: un dominio acotado (el dominio interior a γ, al que a menudo denotamos D_{int}) y otro no acotado (el dominio exterior a γ, al que denotamos D_{ext}). Esto nos permitirá formular una versión más general de la fórmula integral de Cauchy, que se probará en esta entrega de apuntes, incluida la versión de la fórmula para las derivadas en un punto arbitrario en el interior del contorno, un resultado que se enunció pero no se demostró en la entrega anterior. Hablaremos también brevemente del índice de una curva respecto de un punto y de su significado geométrico.

Demostraremos también el teorema integral de Cauchy que es otro resultado fundamental en Variable Compleja. En su versión más sencilla, este teorema nos dice que si una curva suave a trozos, simple y cerrada (un contorno) está contenida en un dominio simplemente conexo donde una función es analítica, entonces la integral de la función a lo largo de la curva es igual a cero. Resulta fascinante poder evaluar una integral de línea de una función tan sólo conociendo alguna propiedad topológica de la curva y el hecho de que la función tiene derivada compleja, sin disponer de ningún otro tipo de información. Desde luego, no hay un análogo de este resultado en otros campos del análisis matemático. Lo más sorprendente es que esta propiedad, de hecho, caracteriza las funciones holomorfas de entre todas las funciones continuas en el dominio, según el Teorema de Morera.

Una versión más general del Teorema integral de Cauchy nos enseñará que, en un dominio simplemente conexo, la integral de una función analítica a lo largo de cualquier curva que una dos puntos dados tiene el mismo valor (es independiente del camino), lo cual nos permitirá definir las funciones primitivas. Al igual que en Cálculo, la diferencia de dos primitivas cualesquiera de la misma función será constante. Veremos también que, en un dominio simplemente conexo, la existencia de una prmitiva es equivalente a la holomorfía, gracias también a los conocimientos adquiridos previamente. Formularemos, aunque sin demostración, el Gran teorema acerca de los dominios simplemente conexos que nos dará una caracterización de dichos dominios en términos de las funciones que son holomorfas en ellos. Esto representa un importante nexo entre la topología del plano y la variable compleja.

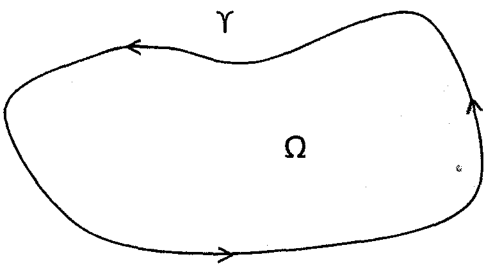
Si se dispone de suficiente tiempo, sería muy útil complementar la lectura de estos apuntes con la de los del Profesor Sánchez-Calle, al menos estudiando el esquema del desarrollo de la teoría allí expuesta, sin entrar en todos los detalles de la prueba. No obstante, en un principio, el material aquí tratado ya debería ser suficiente para poder resolver todos los ejercicios de la hoja 7 de problemas relacionados con el tema de integración compleja.

La fórmula de Green. Teorema integral de Cauchy

Teorema de Green. De los cursos anteriores conocemos la fórmula de Green. El enunciado que aquí nos interesa, se refiere a los dominios de Jordan acotados por una curva simple y cerrada y C^1 a trozos (lo que ya hemos llamado un contorno con anterioridad). Empezaremos recordándolo.

Teorema 1 *(Green). Si Ω es un dominio en el plano, acotado por un contorno γ, orientado positivamente (en el sentido contrario al de las agujas de reloj). Si las funciones $P, Q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 en $\overline{\Omega}$, entonces*

$$\boxed{\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.}$$



Observaciones. (1) En la literatura se pueden encontrar enunciados tanto más especiales como más generales que el que damos aquí. Es posible que en los cursos de Cálculo II o Análisis Matemático este teorema se haya formulado sólo para dominios un poco más especiales (con mejor frontera, por ejemplo los convexos o los que tengan frontera suave, simple y cerrada) pero aquí necesitaremos la versión general dada arriba.

(2) La integral doble que aparece en el lado derecho de la fórmula se puede tomar tanto sobre Ω como sobre $\overline{\Omega}$ puesto que la frontera Ω tiene medida de área nula y, por tanto, no influye en la integración. No obstante, la hipótesis sobre la continuidad de las derivadas parciales hasta la frontera es importante. No es suficiente pedir que sean continuas sólo en Ω (porque si, por ejemplo, no están acotadas cuando nos acercamos a la frontera del dominio, esto podría dar problemas).

Antes de ilustrar el uso del Teorema de Green en Variable Compleja, conviene recordar de la entrega de apuntes sobre las integrales de línea que, en una integral a lo largo de la curva γ, escribiremos con frecuencia $dz = dx + i dy$. Esto es natural: si la curva está parametrizada como $z = \gamma(t)$, es decir, $x + yi = u(t) + iv(t)$, entonces $\frac{dz}{dt} = \gamma'(t) = u'(t) + iv'(t) = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$, etc.

Ejercicio 1. *Sea f una función holomorfa en un dominio D y γ un contorno orientado positivamente que encierra un dominio Ω, donde $\Omega \cup \{\gamma\} \subset D$. Pruebe que*

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\,dz = 2i \iint_\Omega \overline{f'(z)}\,dx\,dy.$$

SOLUCIÓN. Escribiendo $f = u+iv$, tenemos que $\overline{f} = u-iv$. Además, al ser holomorfa en D, la función f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en D. Conocemos también la fórmula para la derivada de la función holomorfa $f = u+iv$: $f' = u_x + iv_x$ de la parte presencial del curso; por tanto, $\overline{f'} = u_x - iv_x$.

De los apuntes anteriores, sabemos que f es analítica y, en particular, su derivada es continua, luego f y, por tanto, u y v son de clase C^1 en D. Se cumplen todas las condiciones para poder aplicar el Teorema 1 de Green al recinto $\Omega \cup \{\gamma\}$, en una de las integrales con $P = u$, $Q = v$ y en la otra con $P = -v$, $Q = u$:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{f(z)}\,dz &= \int_\gamma (u-iv)(dx+i\,dy) = \int_\gamma u\,dx + v\,dy + i\int_\gamma u\,dy - v\,dx \\
&= \iint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial(-v)}{\partial y}\right) dx\,dy \\
&= \iint_\Omega (v_x - u_y)\,dx\,dy + i \iint_\Omega (u_x + v_y)\,dx\,dy \\
&= \iint_\Omega 2v_x\,dx\,dy + i \iint_\Omega 2u_x\,dx\,dy \\
&= 2\iint_\Omega (v_x + iu_x)\,dx\,dy = 2i \iint_\Omega (u_x - iv_x)\,dx\,dy \\
&= 2i \iint_\Omega \overline{f'(z)}\,dx\,dy. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

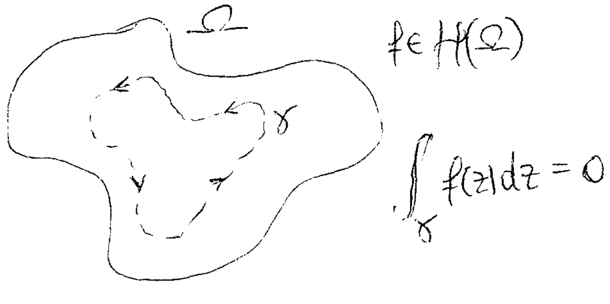
El Ejercicio 1 nos debería dar una pista obvia para resolver el primer ejercicio de la hoja 7.

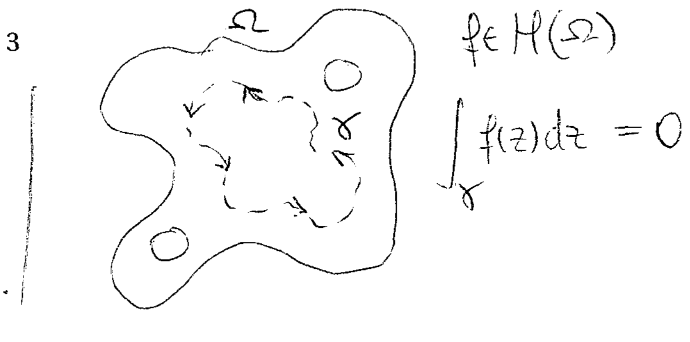
Teorema integral de Cauchy: versión para contornos. El Teorema integral de Cauchy es uno de los resultados fundamentales en Análisis complejo y tiene diferentes enunciados, más especiales o más generales. Empezaremos con una versión sencilla. Para poder enunciar y utilizar los teoremas de Cauchy que nos interesan en esta sección, consideraremos típicamente un contorno γ que, junto con su dominio interior, está contenido en un dominio Ω donde cierta función f es holomorfa (analítica).

Antes de enunciar y demostrar el resultado, es muy importante resaltar que la demostración dada abajo es posible gracias a la versión suficientemente general del Teorema de Green formulada en el Teorema 1 y al trabajo hecho en los apuntes anteriores, con la demostración de la Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias. Sin este último resultado hubiera sido mucho más difícil demostrar cualquier versión del Teorema integral de Cauchy. Tanto es así que incluso el enunciado para los rectángulos o triángulos (cuya demostración se debe a Goursat) requiere un trabajo muy serio y unos razonamientos muy precisos. Recomendamos como lectura complementaria los apuntes del Profesor Antonio Sánchez-Calle (disponibles en Moodle y en la página web) para consultar la prueba de este resultado, una auténtica joya de las matemáticas, y la definición de la función primitiva.

Teorema 2 *(Teorema integral de Cauchy, enunciado básico para curvas simples). Sea Ω un dominio simplemente conexo en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y γ un contorno (curva simple y cerrada, C^1 a trozos) cuya traza está contenida en Ω. Entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Otro enunciado (equivalente): Sea Ω un dominio arbitrario en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y γ un contorno cuya traza está contenida en Ω junto con el dominio D_{int} interior a γ: $\overline{D_{\text{int}}} = D_{\text{int}} \cup \{\gamma\} \subset \Omega$. Entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.





DEMOSTRACIÓN. Cabe observar que, cuando Ω es un dominio simplemente conexo y $\{\gamma\} \subset \Omega$, entonces Ω contiene junto con γ al dominio interior acotado por γ. Por tanto, la primera versión del enunciado es un caso especial del segundo enunciado.

El segundo enunciado también se puede deducir del primero, así que ambos son equivalentes. Basta reducir el dominio inicial hasta obtener uno que sea simplemente conexo y contenga a la traza de la curva y al dominio interior. Eso se puede conseguir, por ejemplo, de la siguiente manera: recubrimos la traza de γ por discos abiertos contenidos en Ω y, usando la compacidad de la traza, escogemos un subrecubrimiento finito de la misma por discos abiertos. Uniendo esos discos con D_{int} (que tiene intersección no vacía con cada uno de ellos), se obtiene un dominio contenido en Ω y simplemente conexo que, a su vez, contiene a $\overline{D_{\text{int}}} = D_{\text{int}} \cup \{\gamma\}$. (Esta afirmación requiere un razonamiento más detallado y el uso de algunos ejercicios de Topología pero no daremos más detalles aquí.) Por tanto, el segundo enunciado se puede deducir del primero.

Veamos ahora cómo se prueba el primer enunciado. Éste se sigue fácilmente del Teorema de Green, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En efecto, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f = u + iv$, entonces f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en Ω. Además, sabemos de la última entrega de apuntes que f es derivable infinitas veces. Tal y como ya comentamos en la solución del Ejercicio 1, esto significa que es de clase C^1 en Ω. (Este detalle es muy importante porque, cuando se elige otro método para demostrar el teorema, el principal escollo consiste en probar este hecho antes de saber que holomorfía implica analiticidad.) Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Green, empezando por la misma cuenta que en una de las entregas anteriores de los apuntes y en el Ejercicio 1 y obteniendo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma u\,dy + v\,dx \\ &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 + i\cdot 0 = 0. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Las aplicaciones del Teorema integral de Cauchy en la práctica suelen ser fáciles. Una vez fijada la función f, lo importante es elegir correctamente el dominio Ω. Ilustraremos esto con algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1. *Si γ es el rectángulo con los vértices i, 0, 4 y $4+i$, entonces $\int_\gamma e^{-3z^2+12}dz = 0$. La justificación es simple: la función $f(z) = e^{-3z^2+12}$ es analítica en todo el plano (entera), así que podemos tomar $\Omega = \mathbb{C}$, un dominio simplemente conexo. Obviamente, γ es suave a trozos, simple y cerrada (recomendamos escribir una parametrización como ejercicio) y $\{\gamma\} \subset \Omega$.*

Obsérvese que normalmente tenemos la flexibilidad de reducir el dominio Ω si nos conviene; lo importante es que el contorno γ esté contenido en él. En el ejemplo anterior, nos hubiera valido en lugar de $\Omega = \mathbb{C}$ tomar como Ω, el disco $D(0,7)$ o cualquier otro disco o rectángulo abierto que contuviese al rectángulo indicado.

Ejercicio 2. *Calcule la siguiente integral, justificando la respuesta: $\int_{|z-i|=1} \dfrac{dz}{z^2+9}$.*

SOLUCIÓN. En este caso la orientación de la curva, que es la circunferencia de centro i y radio 1, va a ser irrelevante ya que la integral será igual a cero. En efecto, la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$ es holomorfa en todos los puntos del plano salvo en los ceros del denominador, que son $\pm 3i$.

Podemos escoger el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -2 < \operatorname{Im} z < \frac{5}{2}\}$, que es simplemente conexo (al ser una banda horizontal abierta), contiene a la circunfencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 1\}$ y, además, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, así que el resultado de integración es cero en virtud del Teorema integral de Cauchy.

Ejercicio 3. *Sea* $\gamma = C(2,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$ *con cualquier orientación. Calcule* $\int_\gamma \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\, dz$.

SOLUCIÓN. Obsérvese que $g(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ ya no es analítica en todo el plano porque el denominador se anula en los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Es un ejercicio sencillo pero instructivo demostrar que ésos son los únicos ceros en todo el plano, usando la definición de la función seno a través de la función exponencial. De hecho, ya hemos visto ejercicios análogos en los apuntes sobre las series y funciones elementales y en las hojas de problemas.

Escojamos, por tanto, un dominio reducido, por ejemplo, $\Omega = D(2; \frac{10}{9}) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < \frac{10}{9}\}$. Este disco es simplemente conexo y no contiene a ninguno de los puntos z_n (la comprobación para $z_1 = \pi$ requiere un poco de cálculo mientras que para el resto de los puntos z_n esto es bastante obvio). Por tanto, g es holomorfa en Ω) y contiene a la curva γ. Aplicando el teorema de Cauchy, se deduce que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\, dz = 0. \qquad \blacksquare$$

Los últimos ejercicios nos muestran claramente cómo razonar en el segundo ejercicio de la hoja 7.

Generalizaciones del teorema de Cauchy

Veremos que, en un dominio simplemente conexo, la integral de línea de una función analítica (holomorfa) a lo largo de cualquier curva cerrada (no necesariamente simple) es nula.

Existen varias generalizaciones del teorema de Cauchy. Aquí formularemos una de ellas. En la literatura se pueden encontrar versiones aún más generales del teorema que, según las hipótesis topológicas, pueden constituir una versión homotópica u homológica del resultado. Es importante notar que no se pide que la curva sea simple y que, debido a ello, la demostración de este resultado requiere bastante trabajo. Usaremos esta versión general en lo que queda del curso pero no daremos una demostración completa.

Teorema 3 *(Teorema integral de Cauchy, versión general). Sea* Ω *un dominio simplemente conexo en el plano,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* γ *una curva cerrada y* C^1 *a trozos cuya traza está contenida en* Ω*. Entonces* $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Nos limitaremos a abordar sólo dos casos especiales.

Caso de los polinomios. Parametrizando la curva como $z = \gamma(t)$, $a \le t \le b$, escribiendo $dz = \gamma'(t)\, dt$ como antes y teniendo en cuenta que $\gamma(a) = \gamma(b)$, al tratarse de una curva cerrada, por el Teorema fundamental del cálculo (adaptado a las funciones complejas de una variable real) vemos que

$$\int_\gamma (z-c)^n\, dz = \int_a^b (\gamma(t)-c)^n \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \left(\frac{1}{n+1}(\gamma(t)-c)^{n+1}\right)' dt = \frac{1}{n+1}(\gamma(t)-c)^{n+1}\Big|_a^b = 0,$$

para $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 0$. (Más adelante, cuando hablemos del índice de una curva, veremos que esto es falso para $n = -1$.) Una vez que hayamos visto la teoría de la función primitiva, se notará que aquí, en el fondo, hemos usado el hecho elemental de que la función z^n tiene primitiva (obvia) en todo el plano.

Si $f = P$, un polinomio, recordando del álgebra que todo polinomio puede escribirse como $P(z) = Q(z-c)$, donde Q es otro polinomio que tiene el mismo grado, se seguirá por la linealidad de la integral de línea que

$$\int_\gamma P(z)\, dz = \int_\gamma Q(z-c)\, dz = 0.$$

Caso local. Nos referimos al caso de una curva suave a trozos y cerrada (no necesariamente simple) cuya traza está contenida en un disco $D(c;R) \subset \Omega$, donde $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Sabemos de la entrega anterior que f puede desarrollarse en serie de potencias centrada en c y convergente en $D(c;R)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Dicha serie converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $D(c;R)$ y, en particular, en $\{\gamma\}$. Por un teorema visto en los apuntes sobre las integrales de línea, podemos integrar la serie de f término a término, obteniendo

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-c)^n\,dz = 0,$$

debido a la comprobación ya hecha para los polinomios. ■

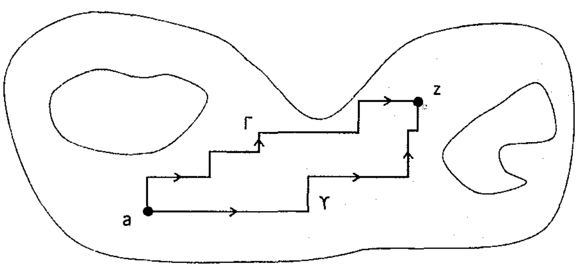
Observación. Es importante notar que la prueba es mucho más difícil en el caso de una curva cuya traza no está contenida solamente en un disco de Ω. No daremos ninguna demostración de este caso general. Una forma de abordar esta dificultad, integrando sobre los caminos poligonales con los lados paralelos a los ejes, puede consultarse en los apuntes del Prof. A. Sánchez-Calle pero es imporante advertir un detalle sutil.

En la última página de sus apuntes, la indicación al lado del dibujo con dos línes poligonales que se cruzan: "al superponer las dos poligonales se obtienen rectángulos a los que se les puede aplicar el apartado anterior" es sólo una indicación esquemática que no pretende ser una prueba detallada (por muy obvia que parezca intuitivamente la afirmación). Una demostración rigurosa de este hecho, a partir de los axiomas de geometría euclídea de David Hilbert (usando, por ejemplo, inducción transfinita y varias herramientas geométricas) llenaría probablemente varias páginas. En otras palabras, no existe ninguna forma de trivializar este resultado: todas las demostraciones exigen un trabajo arduo.

En palabras de algunos matemáticos sabios: al igual que la energía potencial que corresponde a una cierta altura es constante, la dificultad del trabajo que se exige para probar un mismo teorema de distintas maneras también debe ser la misma (no se puede probar algo importante haciendo sólo unas pocas manipulaciones fáciles o triviales).

Función primitiva de una función holomorfa

Dando por hecho la versión general del Teorema 3 de Cauchy: *para una función holomorfa en un dominio simplemente conexo, su integral a lo largo de cualquier contorno contenido en el dominio, es nula,* se deduce fácilmente que la integral de la función holomorfa desde un punto hasta otro no depende del camino elegido. Por ejemplo, el siguiente dibujo ilustra este hecho para dos caminos poligonales desde el punto a hasta el punto z. Obsérvese que el dominio allí representado no es simplemente conexo (tiene dos "agujeros") pero, debido a la versión alternativa que tenemos del Teorema de Cauchy, sabemos que el resultado sigue siendo cierto mientras el contorno no rodee a ninguno de los agujeros (componentes del complementario de Ω).



Este hecho nos permite definir correctamente la función primitiva de una función holomorfa.

Teorema 4 *(Existencia de la función primitiva). Sea Ω un dominio simplemente conexo y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Entonces existe una función $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. La continuidad de f (que se sigue de su diferenciabilidad compleja) garantiza la existencia de las integrales de la función sobre cualquier curva cerrada y suave a trozos. Fijemos un punto $a \in \Omega$, como en el dibujo anterior (pero recordando que esta vez tenemos la hipótesis de que Ω es simplemente conexo). Si $z \in \Omega$ es cualquier otro punto y γ y Γ son dos curvas suaves a trozos desde a hasta z, entonces $\gamma + \Gamma^-$ es una curva cerrada y C^1 a trozos (que empieza y termina en a). Por el Teorema integral de Cauchy (caso general), se sigue que

$$0 = \int_{\gamma+\Gamma^-} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\Gamma^-} f(z)\,dz$$

y, por tanto, $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz$, por las propiedades básicas de las integrales de línea. Conclusión: la integral de línea desde a hasta z no depende de la elección de la curva suave a trozos y podemos escribir $\int_a^z f(w)\,dw$ para denotar a cualquiera de ellas, ya que todas tienen el mismo valor. Esto nos permite definir la función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$\boxed{F(z) = \int_a^z f(w)\,dw, \qquad z \in \Omega.}$$

$a \in \Omega$ fijado

Aún queda por comprobar que la función definida de esa manera, en efecto, tiene derivada compleja y que ésta es precisamente la función inicial. La tarea se reduce a comprobar que

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{z+h} f(w)\,dw - \int_a^z f(w)\,dw}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_z^{z+h} f(w)\,dw}{h} = f(z).$$

Para justificar la penúltima igualdad, sirven los razonamientos mencionados en las observaciones a continuación de la prueba (uniendo los caminos de a a z y de z a $z+h$).

La comprobación final del límite es análoga a la que se hace para segmentos horizontales en los apuntes de Sánchez-Calle pero es más general. Puesto que la integral $\int_z^{z+h} f(w)\,dw$ no depende del camino (suave a trozos) desde z hasta $z+h$, sin pérdida de generalidad podemos tomar el segmento $[z, z+h]$ como camino. Puesto que su longitud es precisamente $\ell([z,z+h]) = |(z+h)-z| = |h|$, teniendo en cuenta la estimación básica para las integrales de línea de una entrega anterior de apuntes:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\int_z^{z+h} f(w)\,dw}{h} - f(z) \right| &= \frac{\left|\int_z^{z+h} f(w)\,dw - f(z)h\right|}{|h|} = \frac{\left|\int_z^{z+h} f(w)\,dw - f(z)\int_z^{z+h} dw\right|}{|h|} \\
&= \frac{\left|\int_z^{z+h} (f(w)-f(z))\,dw\right|}{|h|} \le \frac{\ell([z,z+h]) \cdot \max_{[z,z+h]} |f(w)-f(z)|}{|h|} \\
&= \max_{[z,z+h]} |f(w)-f(z)| \to 0, \qquad h \to 0,
\end{aligned}$$

debido a la continuidad de f en el punto z. ■

Definición. La función F del Teorema 4 se denomina la *función primitiva* de f en Ω.

Observaciones. (1) En la demostración dada arriba, a primera vista parece que sólo usamos la continuidad de f pero no es asi. La independencia de la integral del camino es fundamental ya que se ha usado dos veces en la prueba. Las funciones continuas no necesariamente tienen esta propiedad. Por tanto, la hipótesis de que f sea holomorfa es fundamental.

(2) Como en el cálculo, no existe sólo una función primitiva de f. No obstante, la primitiva de una función holomorfa fija es única salvo un sumando constante (y por eso con frecuencia diremos *la primitiva*): si F_1 y F_2 son dos primitivas de la misma función holomorfa f, entonces $F = F_1 - F_2$ es holomorfa en Ω y satisface la condición

$$F' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

en Ω y, debido a un resultado conocido, F es constante. En otras palabras, si F_1 es una primitiva de F, toda primitiva es de la forma $F = F_1 + C$ para una constante compleja C.

(3) La primitiva obviamente depende de la elección del "punto base" a. Si cambiamos el punto inicial del camino de integración de a a otro punto $b \in \Omega$, la primitiva variará en un sumando, ya que

$$F(z) = \int_a^z f(w)\,dw = \int_a^b f(w)\,dw + \int_b^z f(w)\,dw = F(b) + F_1(z).$$

(4) Finalmente, si como punto base para definir la primitiva tomamos un punto $c \in \Omega$ y $a, b \in \Omega$ son otros dos puntos y sumamos dos caminos, uno desde c hasta a y otro desde a hasta b para obtener un camino desde c hasta b, se sigue que

$$F(b) = \int_c^b f(z)\,dz = \int_c^a f(z)\,dz + \int_a^b f(z)\,dz = F(a) + \int_a^b f(z)\,dz$$

y, por tanto, obtenemos la *versión compleja del Teorema fundamental del cálculo*:

$$\boxed{\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a).}$$

Al igual que en Cálculo, podemos interpretar que la constante C se cancela en la identidad anterior, así que la integral desde a hasta b no depende de la primitiva F elegida, es decir, no depende del punto base c elegido.

Ejercicio 4. *Sea γ una curva C^1 a trozos desde el origen hasta el punto π. Calcule la integral*

$$\int_\gamma \cos z\,dz.$$

SOLUCIÓN. De las propiedades básicas de las funciones trigonométricas estudiadas antes sabes que tanto el coseno como el seno son funciones enteras y $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, $F(z) = \operatorname{sen} z$ es la primitiva de $f(z) = \cos z$, salvo una constante que se le puede sumar (es decir, todas las primitivas son de la forma $F_C(z) = \operatorname{sen} z + C$, con $C \in \mathbb{C}$). Según la versión compleja del Teorema fundamental del cálculo, se sigue que

$$\int_\gamma \cos z\,dz = \int_{[0,\pi]} \cos z\,dz = F(\pi) - F(0) = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 5. *Sea γ una curva C^1 a trozos desde el punto 1 hasta el punto i, con la traza contenida en el semiplano superior abierto (salvo el punto inicial 1). Calcule la integral*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

SOLUCIÓN. Realmente no sabemos casi nada de γ (podría ser un arco de circunferencia o algo muchísimo más complicado) pero sabemos lo suficiente. Según las condiciones del problema, la traza $\{\gamma\}$ forma parte del dominio simplemente conexo $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, donde podemos definir el logaritmo como función holomorfa, mediante la fórmula habitual:

$$\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

También sabemos de los apuntes sobre los logaritmos que su derivada en el dominio indicado es $(\log z)' = \frac{1}{z}$. En otras palabras, la función logaritmo es la primitiva de $\frac{1}{z}$ (salvo un sumando constante). Por ejemplo, eligiendo como punto base $a = i/2$, cualquier primitiva tendrá la forma

$$F(z) = \int_{i/2}^{z} \frac{1}{w}\, dw = \log z + C,$$

para cierta constante $C \in \mathbb{C}$. Entonces podemos calcular la integral a lo largo de nuestra curva γ desconocida (pero con traza contenida en un dominio donde la primitiva está definida, que es el semiplano superior), obteniendo de la versión compleja del Teorema fundamental del cálculo (y de la determinación elegida del logaritmo):

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = F(i) - F(1) = \log i - \log 1 = \log i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2} i. \qquad \blacksquare$$

Obviamente, el Ejercicio 4 y el Ejercicio 5 nos ayudarán con el cuarto problema de la hoja 7.

Un recíproco del teorema de Cauchy

Resulta que el recíproco del teorema de Cauchy es cierto, siempre bajo la hipótesis natural de continuidad (para poder integrar a lo largo de una curva suave a trozos). De hecho, no hace falta exigir que la integral a lo largo de cada contorno sea cero. Basta con pedirlo para los triángulos. Con un triángulo nos referimos a la curva cerrada y simple, suave a trozos formada por tres segmentos, orientados de forma natural: $[a, b] + [b, c] + [c, a]$, donde a, b y c son tres puntos distintos en el plano.

El teorema que enunciamos a continuación se debe al matemático italiano Giacinto Morera (1856-1909). Conviene notar que los triángulos en el enunciado se pueden sustituir por rectángulos o por circunferencias, aunque es más fácil trabajar con rectángulos y triángulos.

Teorema 5 (Morera). *Sea Ω un dominio en el plano y f una función continua en Ω. Si para todo triángulo T contenido en Ω junto con su interior se tiene $\int_T f(z)\, dz = 0$, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Enunciado equivalente: Sea Ω un dominio simplemente conexo en el plano y f una función continua en Ω. Si para todo triángulo T contenido en Ω se tiene $\int_T f(z)\, dz = 0$, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Daremos sólo una indicación. Ya hemos comentado la equivalencia entre los dos enunciados en otros resultados. Aquí se procedería de forma totalmente análoga para verificarla.

Para ver que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, basta ver que es holomorfa en cada disco $D(a; R)$ contenido en Ω. En un disco así podemos definir la primitiva de f mediante la fórmula $F(z) = \int_a^z f(w)\, dw$. (La continuidad de f garantiza la existencia de las integrales de la función sobre cualquier contorno y, en particular, sobre cualquier segmento y triángulo.) La clave de la hipótesis sobre los triángulos consiste en lo siguiente: considerando el triángulo T con los vértices a, z y $z + h$ contenido en $D(a; R)$. Entonces

$$0 = \int_T f(w)\, dw = \int_a^z f(w)\, dw + \int_z^{z+h} f(w)\, dw + \int_{z+h}^a f(w)\, dw = F(z) + \int_z^{z+h} f(w)\, dw - F(z+h),$$

con lo cual obtenemos $\int_z^{z+h} f(w)\,dw = F(z+h) - F(z)$ y podemos razonar como en la demostración del Teorema 4, aplicando razonamientos completamente análogos para probar que $F' = f$ en $D(a;R)$. ■

Como acabamos de ver, el Teorema integral de Cauchy no era un simple capricho de los matemáticos del siglo XIX por descubrir nuevas curiosidades. Gracias a los teoremas de Cauchy y de Morera, ahora sabemos que podemos caracterizar las funciones analíticas de entre todas las funciones continuas en un dominio simplemente conexo, como aquellas cuyas integrales sobre todos los triángulos se anulan.

Fórmula integral de Cauchy: versiones más generales

Conviene comentar que tanto el teorema integral de Cauchy como la fórmula integral de Cauchy admiten dos versiones equivalentes. En una de ellas, el dominio es simplemente conexo y el contorno es arbitrario. En la otra, el dominio es arbitrario pero el contorno tiene que estar contenido en él junto con su dominio interior. (Véase el enunciado del Teorema 2.)

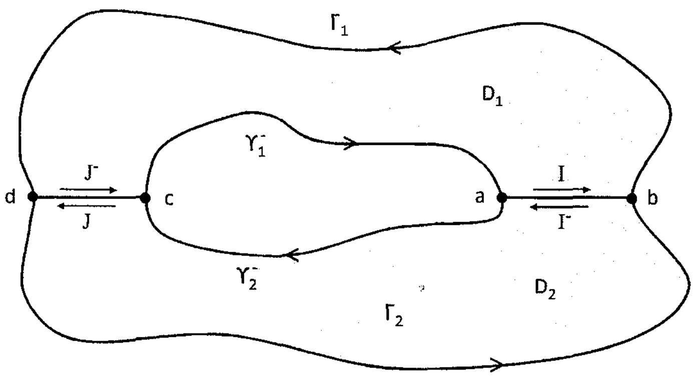
Sea Ω un dominio en el plano acotado por dos contornos, Γ y γ, de manera que la traza de γ esté contenido en el dominio interior a Γ. Tal y como ya hicimos en los cursos de cálculo, orientaremos la frontera $\partial\Omega$ de manera que, al recorrerla en el sentido que dicta su parametrización, el dominio nos quede siempre a la izquierda; eso significa darle al contorno Γ la orientación positiva y a γ, la negativa: γ^-.

Dominios acotados por dos contornos disjuntos. El procedimiento empleado en la demostración del siguiente resultado es bastante frecuente en Análisis complejo y conviene recordarlo.

Proposición 1. *Sean γ y Γ dos contornos tales que $\overline{D_{\text{int}}(\gamma)} = D_{\text{int}}(\gamma) \cup \{\gamma\} \subset D_{\text{int}}(\Gamma)$ (geométricamente, Γ "rodea" a la curva γ y a su dominio interior) y sea D el dominio acotado por ambas curvas γ y Γ. Sean Γ y γ ambas orientadas positivamente. Si Ω es un dominio tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. No daremos ninguna demostración rigurosa pero es fácil ver que podemos "cortar D en dos trozos", uniendo un punto de $\{\gamma\}$ con otro en $\{\Gamma\}$ mediante un segmento $I = [a,b]$, $a \in \{\gamma\}$, $b \in \{\Gamma\}$, por ejemplo, eligiendo $a \in \{\gamma\}$ y $b \in \{\Gamma\}$ tal que $|a-b| = \text{dist}(a,\{\Gamma\})$. Con eso se asegurará de que ningún punto interior del intervalo I tiene intersecciones con ninguna de las dos curvas. (Por supuesto, existen otras formas de elegir los segmentos I y J pero la elección indicada aquí es una opción segura.) De manera análoga, podemos unir otro punto en γ con otro en Γ mediante un segmento $J = [c,d]$, $c \in \{\gamma\}$, $d \in \{\Gamma\}$ y de manera que $I \cap J = \emptyset$. En general, los intervalos I y J no están necesariamente contenidos en la misma recta, como parece quedar reflejado en el dibujo (es decir, su posición puede ser más general).



Si denotamos como $I^- = [b,a]$ y $J^- = [d,c]$ a los mismos segmentos pero con orientación opuesta (como curvas recorridas en el sentido contrario) y por Γ_1, Γ_2 a los dos arcos que componen la curva Γ y que unen b con d y por γ_1, γ_2 a los dos arcos que componen la curva γ y que unen a con c, obtendremos dos nuevos contornos:

$$C_1 = I \cup \Gamma_1 \cup J^- \cup \gamma_1^-, \qquad C_2 = I^- \cup \gamma_2 \cup J^- \cup \Gamma_1.$$

Estos dos contornos, por el Teorema de Jordan (mencionado en apuntes anteriores) acotan dos dominios simplemente conexos, D_1 y D_2, respectivamente. A ambos contornos se les puede aplicar el Teorema 2 para obtener

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 0 = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Por tanto,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0.$$

Escribiendo ambas integrales como sumas de integrales a lo largo de diferentes trozos y observando que las integrales a lo largo de I e I^- se cancelan y lo mismo para J e J^-.

$$0 = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f(z)\,dz,$$

lo cual implica la conclusión deseada. ■

Fórmula integral de Cauchy: versión para contornos. En los apuntes anteriores, demostramos la Fórmula integral de Cauchy para circunferencias. Ahora veremos que el resultado sigue siendo válido para contornos arbitrarios.

Teorema 6 *(Fórmula integral de Cauchy para contornos). Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y Γ un contorno con orientación positiva tal que tanto su traza como el dominio interior acotado por ella están contenidos en Ω. Entonces*

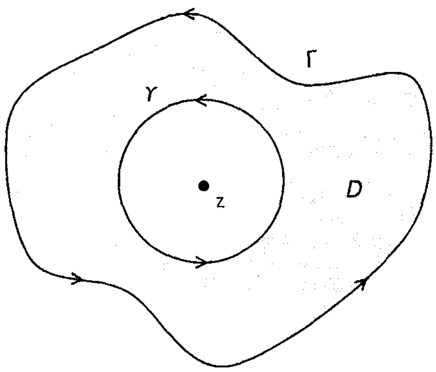
$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z),} \tag{1}$$

para todo z en el dominio interior a Γ.

Asimismo, se tiene la fórmula para las derivadas de orden n:

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw.}$$

DEMOSTRACIÓN.



Sea $z \in D_{\text{int}}(\Gamma)$ un punto arbitrario. Entonces existe $r > 0$ tal que $\overline{D}(z; r) \subset D_{\text{int}}(\Gamma)$. Si llamamos γ a la circunferencia de radio r centrada en z, es inmediato que estamos en condiciones de aplicar la Proposición 1 a la función $g(w) = f(w)/(w-z)$, que es holomorfa en todos los puntos w del dominio D acotado por las curvas γ y Γ (nótese que $z \notin D$). Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z),$$

donde la primera igualdad se sigue de la Proposición 1 y la segunda de la versión básica de la Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias (vista en la entrega anterior de los apuntes).

Puesto que antes ya habíamos demostrado la fórmula para las derivadas calculadas *en el centro* de la circunferencia γ, aplicando la Proposición 1 a la función $g(w) = f(w)/(w-z)^{n+1}$, también obtenemos la fórmula

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = f^{(n)}(z). \qquad \blacksquare$$

En el caso particular cuando f es la función constante uno, obtenemos la siguiente consecuencia del Teorema 6.

Corolario 1. *Sea Ω un dominio en el plano y Γ un contorno con orientación positiva tal que tanto su traza como el dominio interior acotado por ella están contenidos en Ω. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 1,$$

para todo z en el dominio interior a Γ.

Índice de una curva respecto de un punto

Sea Γ un contorno que encierra una región $D_{\text{int}}(\Gamma)$ y z un punto tal que $z \notin \overline{D_{\text{int}}(\Gamma)} = D_{\text{int}}(\Gamma) \cup \{\Gamma\}$. Puesto que $\text{dist}(z, \overline{D_{\text{int}}(\Gamma)}) > 0$, existe un dominio Ω tal que $\overline{D_{\text{int}}(\Gamma)} \subset \Omega$ y $z \notin \Omega$. Por tanto, $f(w) = 1/(w-z)$ es holomorfa como función de la variable w en Ω (puesto que el denominador no se anula). Según el Teorema integral de Cauchy, se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 0.$$

Junto con el Corolario 1, esta observación nos dice que, si $z \notin \{\Gamma\}$ y Γ tiene orientación positiva, entonces

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in D_{\text{int}}(\Gamma) \\ 0, & \text{si } z \in D_{\text{ext}}(\Gamma) \end{cases}.}$$

índice del punto z respecto de la curva Γ

Obsérvese que, geométricamente, en el primer caso la curva Γ da una vuelta alrededor de z y en el segundo no da ninguna vuelta alrededor de dicho punto. El valor $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw$ se suele llamar el *índice* del punto z respecto de la curva Γ. Puede definirse en situaciones mucho más generales, donde no se pide que Γ sea una curva simple. Veamos el resultado pertinente.

Teorema 7. *Sea γ una curva suave a trozos y cerrada (no necesariamente simple). Entonces para todo $z \notin \{\gamma\}$, el número*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw$$

es entero.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos parametrizar γ de manera que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. Puesto que γ es C^1 a trozos, tenemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw = \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds.$$

Si definimos la función $F : [0,1] \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula

$$F(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds,$$

obviamente, se cumple

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = \int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw.$$

Además, por el Teorema fundamental del cálculo,

$$F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\left((\gamma(t)-z)e^{-F(t)}\right) = \gamma'(t)e^{-F(t)} - F'(t)(\gamma(t)-z)e^{-F(t)} = \gamma'(t)e^{-F(t)} - \gamma'(t)e^{-F(t)} = 0.$$

Se sigue que la función $(\gamma(t)-z)e^{-F(t)}$ es constante y, por tanto, por un lado:

$$(\gamma(t)-z)e^{-F(t)} = (\gamma(0)-z)e^{-F(0)} = \gamma(0)-z = \gamma(1)-z$$

(al ser la curva cerrada, se cumple $\gamma(1) = \gamma(0)$) y también

$$(\gamma(t)-z)e^{-F(t)} = (\gamma(1)-z)e^{-F(1)} = (\gamma(1)-z)e^{-F(1)}.$$

Se sigue que $(\gamma(1)-z)e^{-F(1)} = (\gamma(1)-z)$. Puesto que $z \notin \{\gamma\}$, es imposible que $\gamma(1)-z=0$, luego $e^{-F(1)} = 1$, así que (¡por fin llegamos a usar esos ejercicios con la exponencial y el logaritmo en una demostración!) $-F(1) = 2\pi i m$, para cierto $m \in \mathbb{Z}$. Escribiendo $k = -m$, vemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw = F(1) = 2\pi i k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

y el resultado queda demostrado. ∎

Definición. El índice de una curva γ, cerrada y suave a trozos, respecto de un punto $z \notin \{\gamma\}$ es el número entero

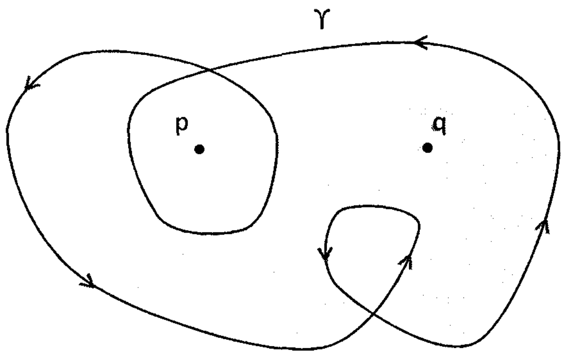
$$\boxed{\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw.}$$

Observaciones. (1) Es obvio que el índice es negativo para las curvas simples orientadas negativamente, debido a las propiedades básicas de la integral de línea (al revertir la orientación, se produce un cambio de signo).

(2) El significado geométrico del índice es el número de vueltas que da la curva γ alrededor del punto z. No daremos ninguna justificación formal de este hecho que, por otra parte, es claro de los casos de curvas simples,

cerradas y suaves a trozos y también se puede ver si parametrizamos una circunferencia recorrida n veces y calculamos el índice respecto de su centro.directamente.b

Para una curva cerrada y suave a trozos pero no simple, a diferencia de un contorno, no es aplicable el teorema de Jordan. Por ejemplo, en la figura abajo es fácil apreciar que no podemos hablar de un dominio interior y otro exterior a la curva γ representada allí. Basta fijarse en cualquiera de las dos regiones acotadas y en blanco (sin sombrear) que no se pueden considerar ni una cosa ni la otra.



Ejemplo 2. *Para los puntos p y q indicados en la figura de arriba, es obvio que γ da dos vueltas alrededor de p y sólo una alrededor de q. Por tanto,* $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = 2$, $\mathrm{Ind}_\gamma(q) = 1$, *lo cual nos dice que*

$$\int_\Gamma \frac{1}{w-p}\, dw = 4\pi i, \qquad \int_\Gamma \frac{1}{w-q}\, dw = 2\pi i,$$

sin la necesidad de de conocer la parametrización de γ ni realizar ningún cálculo.

El Ejemplo 2 nos ayudará a resolver el tercer problema de la hoja 7, una vez representada gráficamente la curva e identificados los puntos de interés.

El gran teorema acerca de los dominios simplemente conexos

Tal vez ya sepamos de Topología (o de nuestras clases presenciales) que un dominio (abierto y conexo) Ω en el plano es simplemente conexo si y sólo si Ω es homeomorfo al disco unidad, $\mathbb{D}$, si y sólo si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ es conexo en $\hat{\mathbb{C}}$. Se trata de caracterizaciones topológicas de los dominios simplemente conexos de entre todos los dominios planos. Una vez vistos los conceptos desarrollados en esta entrega, podemos enunciar el siguiente resultado que nos proporciona diferentes caracterizaciones de tales dominios en términos de conceptos de Variable Compleja. Pueden añadirse más apartados pero no lo haremos aquí.

Teorema 8 *(Gran teorema acerca de los dominios simplemente conexos). Sea Ω un dominio en el plano. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) Ω es simplemente conexo;

(b) Para toda $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para todo contorno γ en Ω, se cumple la condición $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$;

(c) Para toda $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ existe una función primitiva en Ω;

(d) Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω existe un logaritmo en Ω, es decir, una función $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = e^L$ en Ω;

(e) Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω existe una raíz en Ω, es decir, una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = g^2$ en Ω.

DEMOSTRACIÓN. No daremos una demostración completa de este resultado, sólo algunas implicaciones.

(a) $\Leftrightarrow$ (b): Es el contenido de los teoremas de Cauchy y de Morera.

(a) $\Rightarrow$ (c): Es el contenido del Teorema 4.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sea Ω un dominio simplemente conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y supongamos que f no se anula en Ω. Fijemos un punto $a \in \Omega$. Todo punto $z \in \Omega$ puede conectarse con a mediante una curva C^1 a trozos (por ejemplo, una línea poligonal con los lados paralelos a los ejes). Puesto que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, la función $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, dado que Ω es simplemente conexo, podemos definir la función primitiva de f'/f mediante la fórmula

$$L(z) = \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw,$$

tomando la integral a lo largo de cualquier curva γ suave a trozos desde a hasta z. Por el Teorema 4, se cumple $L' = f'/f$, es decir, $f' = L'f$ en Ω.

Definiendo $g = e^{-L}f$ como en una entrega anterior de apuntes, vemos que es una función holomorfa en Ω y cumple $g' = -L'e^{-L}f + e^{-L}f' = e^{-L}(f' - L'f) = 0$ en Ω. Por el teorema visto antes ya citado varias veces, $g = e^{-L}f$ es constante en Ω y, por tanto, $L = \log f + C$, como en los apuntes anteriores. Puesto que $L \in \mathcal{H}(\Omega)$, lo mismo se sigue para $\log f$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Sabiendo que existe $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ como en el apartado (d), podemos definir $g = e^{L/2} \in \mathcal{H}(\Omega)$, obteniendo $g^2 = e^L = f$. ■

¿Por qué la exposición en estos apuntes es diferente de la de otros textos?

Podría decirse que los teoremas de Cauchy -la fórmula integral y el teorema integral- son el corazón de la variable compleja pues de ellos se deducirán otros muchos resultados que veremos al final del curso. Además, puede observarse de cualquier texto que presente demostraciones completas de unas versiones suficientemente generales de esos resultados que eso suele llevar mucho tiempo y esfuerzo. Este año hemos elegido otro camino para llegar a los teoremas de Cauchy, cambiando el orden más frecuente y evitando varios resultados auxiliares. ¿Dónde están las diferencias principales en las formas de abordar este tema entre las distintas fuentes?

Existen numerosos textos de Variable Compleja y en distintos idiomas. La mayoría de los autores de dichos textos suele demostrar primero alguna versión suficientemente general del Teorema integral de Cauchy para deducir a continuación la Fórmula integral de Cauchy. Al hacer eso, se observa que en un principio sólo se sabe que una función holomorfa tiene derivada pero así no se tiene el hecho (nada trivial) de que tiene derivada continua. Eso significa que, a la hora de aplicar la Fórmula de Green se necesitan hipótesis adicionales y, por tanto, se require mucho trabajo adicional para demostrar el Teorema integral de Cauchy. El teorema es fácil para una circunferencia, como ya hemos comprobado, pero es muy difícil incluso para un rectángulo o un triángulo (siendo esos dos casos bastante parecidos). De eso trata una primera versión del teorema de Cauchy. La prueba dada por Goursat (dividiendo, de forma sucesiva, el rectángulo o triángulo en cuatro más pequeños que lo componen para deducir una contradicción) es muy instructiva para cualquiera que se quiera iniciar en los secretos del análisis matemático.

¿Cómo hemos conseguido llegar al mismo sitio evitando ese gran esfuerzo? Lo hemos logrado haciendo otro esfuerzo serio, esencialmente equivalente, usando la idea ingeniosa del autor desconocido con la regla de Leibniz y la fuerza bruta del cálculo, deduciendo primero la forma más sencilla de la Fórmula integral de Cauchy (para circunferencias). Eso nos ha permitido demostrar que holomorfía implica analiticidad y que, en particular, toda función holomorfa tiene derivada continua. Y eso es lo que ha hecho que el uso del teorema de Green pareciera casi trivial y nos ha posibilitado unas aplicaciones adicionales para deducir el Teorema integral de Cauchy para los contornos arbitrarios.

Preparado por José Pedro Moreno y Dragan Vukotić, profesores de la asignatura en 2019-20

Variable Compleja I **(CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Ceros de funciones analíticas

En esta entrega de apuntes veremos las propiedades básicas de los ceros de una función holomorfa. Resultará que una función analítica no idénticamente nula comparte ciertas propiedades de factorización con los polinomios y que, además, sus ceros han de cumplir cierta condición topológica muy rígida.

Orden (multiplicidad) de un cero

Una versión más fuerte de la unicidad de la serie de Taylor. Empezaremos por el siguiente resultado auxiliar que arroja más luz sobre algo que ya sabíamos antes: la unicidad de la serie de Taylor y que será clave para el resto de los resultados.

(*) **Teorema 1.** *Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y supongamos que en cierto punto $c \in \Omega$ se cumple la condición $f^{(n)}(c) = 0$ para todo $n \geq 0$. Entonces $f \equiv 0$ en Ω (es decir: $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$).*

Enunciado equivalente: Si Ω es un dominio en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c;R) \subset \Omega$ (con $R > 0$), entonces $f \equiv 0$ en Ω

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, veamos la equivalencia de ambos enunciados. Son equivalentes porque resulta que sus hipótesis son equivalentes. En efecto, si para un $R > 0$ se cumple que $D(c;R) = \{z : |z-c| < R\} \subset \Omega$, entonces f tiene en desarrollo único en serie de Taylor que converge en $D(c;R)$. Suponiendo que $f^{(n)}(c) = 0$ para todo $n \geq 0$, se sigue que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n = 0$ para todo $z \in D(c;R)$. Recíprocamente, si $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c;R) \subset \Omega$, de la unicidad de su desarrollo en serie de Taylor en $D(c;R)$ se desprende que todos los coeficientes de Taylor en $z = c$ son nulos y, por tanto, $f^{(n)}(c) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Veamos ahora cómo se demuestra el segundo enunciado. Sabiendo que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c;R) \subset \Omega$, veremos a continuación que $f \equiv 0$ en Ω, usando una cadena de discos abiertos a los que se aplicará el mismo razonamiento que en el párrafo anterior.

Sea p cualquier otro punto en Ω ($p \neq c$). Demostraremos que $f(p) = 0$ y, dado que p es arbitrario, el resultado se seguirá. Como ya sabemos, podemos unir c con p mediante una curva simple y suave a trozos. Conviene usar una línea poligonal L con los lados paralelos a los ejes, como en otras pruebas. Eligiendo δ tal que $0 < \delta \leq \operatorname{dist}(L, \partial\Omega)$, es inmediato que $L \subset \bigcup_{z \in L} D(z;\delta)$, así que tenemos un recubrimiento de L por discos abiertos del mismo radio δ, todos ellos contenidos en Ω. Debido a la compacidad de L, podemos elegir un subrecubrimiento finito:

$$L \subset \bigcup_{k=1}^{m} D(c_k;\delta) \subset \Omega, \qquad c_k \in L, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Podemos renombrar los puntos c_k de manera que, si $L : [0,1] \to \mathbb{C}$, $L(t_k) = c_k$, con $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = 1$. Es decir, que al recorrer L desde su punto inicial hasta su punto final, primero pasemos por c_1, luego por c_2, etc., hasta c_m. Añadiendo hasta dos discos más si fuera necesario, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_1 = c$, $c_m = p$ (abusando de notación, el número de discos se seguirá llamando m). Recordando que L es una línea poligonal y teniendo en cuenta el orden elegido de los puntos c_k, $1 \le k \le m$, puede demostrarse (aunque no daremos una prueba rigurosa de este hecho) que cada dos discos consecutivos se cortan:

$$D(c_k,\delta) \cap D(c_{k+1},\delta) \neq \emptyset, \qquad 1 \le k \le m-1.$$

También podemos hacer la siguiente modificación del recubrimiento si fuera preciso. Si $c_2 \in D(c_1;\delta)$, no modificamos nada. Si $c_2 \notin D(c_1;\delta)$, razonamos como sigue. Puesto que existe un punto $c \in D(c_1,\delta) \cap D(c_2,\delta)$, por la desigualdad triangular vemos que

$$|c_1 - c_2| \le |c_1 - c| + |c - c_2| < 2\delta.$$

Ahora es inmediato que el punto medio $q = (c_1 + c_2)/2$ del segmento $[c_1, c_2]$ tiene distancia inferior a δ de cada uno de los extremos del intervalo:

$$|c_1 - q| = |c_2 - q| = \frac{|c_1 - c_2|}{2} < \delta.$$

Por tanto, $q \in D(c_1,\delta)$ y $c_2 \in D(q;\delta)$. Vamos a ampliar la colección de discos $D(c_k;\delta)$ añadiendo el disco $D(q;\delta)$. Razonando de manera similar con c_2 y c_3 y continuando el proceso, si fuera necesario, podemos añadir hasta $m-1$ discos más, todos ellos de radio δ, hasta obtener un nuevo recubrimiento finito (por $n \le 2m-1$ discos y con los centros renombrados como a_k, $1 \le k \le n$):

$$L \subset \bigcup_{k=1}^{n} D(a_k;\delta) \subset \Omega, \qquad c_k \in L, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

con $a_1 = c$, $a_n = p$ y con la propiedad de que $a_2 \in D(a_1,\delta)$, $a_3 \in D(a_2,\delta)$, $\dots$, $p = a_n \in D(a_{n-1},\delta)$. Es decir, el centro de cada disco pertenece al disco anterior en la cadena.

¿Qué conseguimos con esto? Puesto que ya sabemos que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c;R)$, se tiene que $D(a_1;\delta) = D(c;\delta) \subset D(c;R)$ y $a_2 \in D(a_1;\delta)$. Cada disco abieto es un conjunto abierto, así que existe un disco más pequeño $D(a_2;r) \subset D(a_1;\delta)$ tal que $f(z) = 0$ en todos los puntos de $D(a_2;r)$. Esto significa que también todas las derivadas de f se anulan en $D(a_2;r)$ y, en particular, en el punto a_2. (Obsérvese que no nos vale sólo que $f(a_2) = 0$, necesitamos que todas las derivadas se anulen en dicho punto.) Aplicando el mismo razonamiento con la serie de Taylor que al principio de la demostración, esta vez al disco $D(a_2;\delta)$ en cuyo centro se anulan todas las derivadas de f, se sigue que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a_2;\delta)$. Continuando así, vemos que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a_3;\delta)$, etc., hasta obtener que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(a_n;\delta) = D(p;\delta)$. En particular, $f(p) = 0$. ■

Observación. El Teorema 1 nos dice que si una función analítica en un dominio se anula sólo en un disco, entonces se anula en todo el dominio. Es un ejemplo más de los diversos principios de rigidez para las funciones analíticas que no se dan en Variable real.

Un objetivo de estos apuntes es demostrar una versión aún más fuerte de este resultado, llamada el Principio de los ceros aislados. Éste nos dirá que es suficiente que una función holomorfa en un dominio se anule en una sucesión con un punto de acumulación en el dominio para que sea idénticamente nula en el dominio. Entonces, ¿Por qué hemos probado primero un resultado más débil? Porque lo usaremos en la demostración de algunos resultados que siguen. El primero de ellos se usa con frecuencia, aunque no siempre se enuncia de forma explícita en los textos.

Corolario 1. *Sea Ω un dominio en el plano, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, y supongamos que los desarrollos en serie de Taylor de f y de g coinciden en un disco $D(c;R) \subset \Omega$. Entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Considerando la diferencia $h = f - g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y la diferencia de las series de Taylor correspondientes, el enunciado es equivalente a la siguiente implicación:

Si la serie de Taylor de h es cero en $D(c;R) \subset \Omega$, entonces $h(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ (es decir, $h \equiv 0$ en Ω).
Pero la condición de que la serie de Taylor de h sea cero en $D(c;R)$ es equivalente, por la unicidad de sus coeficientes (véanse los apuntes sobre holomorfía), que $h^{(n)}(c) =$ para todo $n \geq 0$. Con estas condiciones, el Teorema 1 implica inmediatamente que $h \equiv 0$ en Ω y el resultado queda demostrado. ∎

El orden de un cero de una función analítica. Ahora veremos que cada cero de una función analítica da lugar a una factorización como las que ya vimos en la factorización de polinomios, asi que también podremos hablar del orden (o de la multiplicidad) de un cero.

Corolario 2. *Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ y supongamos que existe un punto $c \in \Omega$ tal que $f(c) = 0$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0, \qquad f^{(m)}(c) \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $f \not\equiv 0$, se sigue directamente del Teorema 1 que existe, al menos, un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k)}(c) \neq 0$. Eligiendo m como el menor índice con esta propiedad, se sigue la afirmación formulada en el enunciado. ∎

Proposición 1. *Sea Ω un dominio en el plano, $c \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y supongamos que $f(c) = 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0$, $f^{(m)}(c) \neq 0$;

(b) $f(z) = (z-c)^m g(z)$, *para todo* $z \in \Omega$, *donde* $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, *viene dada por*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-c)^m}, & si \ z \in \Omega \setminus \{c\} \\ a_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}, & si \ z = c \end{cases}$$

y $g(c) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. La implicación que más nos interesa es la directa y es la que probaremos primero y detalladamente.

(a) ⇒ (b): Supongamos que f satisface la condición (a). Sea $R > 0$ tal que $D(c;R) \subset \Omega$. Sabemos entonces que f se puede desarrollar en serie de Taylor convergente en $D(c;R)$. Escribiendo $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ y teniendo en cuenta que, por hipótesis, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ y $a_m \neq 0$, dicha serie tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-c)^n = (z-c)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-c)^{n-m}, \tag{1}$$

ya que es fácil ver (y lo hemos comentado en los apuntes sobre series de potencias) que las dos últimas series de potencias en la cadena de igualdades tienen el mismo radio de convergencia.

Definamos la función g como

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-c)^m}, & \text{si } z \in \Omega \setminus \{c\} \\ a_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}, & \text{si } z = c \end{cases}.$$

Por la regla del cociente, g tiene derivada en cada punto $z \in \Omega \setminus \{c\}$, así que sólo queda por ver que también es derivable en $z = c$. En virtud de (1), la restricción de g al disco $D(c;R)$ coincide con la serie de potencias

$\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-c)^{n-m}$, que es una función holomorfa en $D(c;R)$. Por tanto, g también es holomorfa en $z=c$ y luego en todo Ω. Obviamente, $g(c)=\frac{f^{(m)}(c)}{m!}\neq 0$.

Puesto que ambas funciones $f(z)$ y $(z-c)^m g(z)$ son holomorfas en Ω y coinciden en el disco $D(c;R)$, aplicando el Corolario 2, concluimos que $f(z)=(z-c)^m g(z)$ en Ω. Con esto quedan probadas todas las afirmaciones del apartado (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): No escribiremos todos los detalles meticulosamente ya que las cuentas son un poco engorrosas, pero el esquema de la comprobación deberia verse con claridad. Si suponemos que la relación entre f y g es como en el apartado (b), la regla de Leibniz para la derivada m-ésima del producto (fácil de demostrar por inducción):

$$(uv)^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(z)v^{(n-k)}(z)$$

implica fácilmente que

$$f^{(n)}(z)=\left((z-c)^m g(z)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m(m-1)\dots(m-k+1)(z-c)^{m-k}g^{(n-k)}(z), \qquad 0\le n\le m.$$

Evaluando en $z=c$ las derivadas de orden $n=0,1,\dots,m$, vemos que $f(c)=f'(c)=\dots=f^{(m-1)}(c)=0$ puesto que en cada una de ellas todos los sumandos se anulan en c, mientras que

$$f^{(m)}(c)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}m(m-1)\dots(m-k+1)(z-c)^{m-k}|_{z=c}\,g^{(m-k)}(c)=m!g(c)\neq 0,$$

ya que son nulos todos los términos de la suma menos el último. ■

Definición. El número m al que se refieren el Corolario 2 y la Proposición 1 se denomina el *orden* (o la *multiplicidad*) del cero $z=c$ de la función f. Si $m=1$, se dice que c es un *cero simple* y si $m=2$, se suele decir que c es un *cero doble* de f.

Ejemplo 1. *La función $f(z)=ze^z$ tiene un cero, $z=0$, puesto que la exponencial no se anula. Se trata de un cero simple puesto que $f(0)=0$ y $f'(z)=(1+z)e^z$ y, por tanto, $f'(0)=1\neq 0$. En este caso, es obvio quiénes son $(z-c)^m$ y g en la Proposición 1: son z y e^z, respectivamente.*

Ejemplo 2. *La función $f(z)=1-\cos z$ también tiene un cero en $z=0$: $f(0)=1-\cos 0=0$. Puesto que*

$$f'(z)=\operatorname{sen} z,\quad f'(0)=0,\qquad f''(z)=\cos z,\quad f''(0)=\cos 0=1\neq 0,$$

se sigue que $z=0$ es un cero de orden dos (o cero doble) de f. En este caso, los factores de la Proposición 1 son: $(z-c)^m=z^2$ y $g(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$, para $z\neq 0$ y $g(0)=1/2$. Volveremos a este tipo de ejemplos cuando hablemos de las singularidades evitables en la siguiente entrega.

Principio de los ceros aislados (Teorema de la unicidad)

El siguiente resultado nos indica que los ceros de una función analítica (no idénticamente nula), no pueden acumularse en el dominio de su analiticidad. En otras palabras, basta suponer una hipótesis mucho más débil que la del Teorema 1 (la anulación en un disco). Es otro ejemplo más de la rigidez de las condiciones que describen el comportamiento de una función holomorfa (analítica).

Teorema 2 *(Principio de los ceros aislados). Sea Ω un dominio en el plano y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si existe un punto $c \in \Omega$ y una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en Ω de puntos distintos de c tales que $\lim_{n\to\infty} z_n = c$ y $f(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \equiv 0$ en Ω.*

Dicho de otra manera, si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y no es la constante nula, para todo cero $z = c$ de f en Ω existe un $r > 0$ (dependiente de c) tal que en el disco agujereado $D(c; r) \setminus \{c\}$ no hay ceros de f. (Los ceros de una función analítica no idénticamente nula son puntos aislados.)

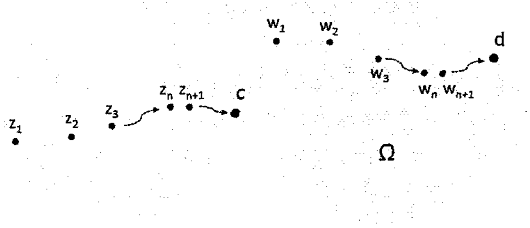
DEMOSTRACIÓN. Puesto que f es holomorfa en Ω, es continua allí. Dado que $c = \lim_{n\to\infty} z_n$, se sigue que $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Sea $R > 0$ tal que $D(c; R) \subset \Omega$. La serie de Taylor de f converge en $D(c; R)$ y, debido al cero que tiene f en $z = c$, tiene la forma $f(z) = a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \ldots$. Para ver que $f \equiv 0$ en Ω, basta demostrar que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(c; R)$, según el Teorema 1. Por tanto, nos basta demostrar que $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Lo haremos por inducción.

Ya sabemos que $a_0 = f(c) = 0$. Supongamos ahora que, para cierto $m \in \mathbb{N}$, se cumple $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ y veamos que también $a_m = 0$. Si definimos la función $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ como en la Proposición 1,

Recordemos que, por hipótesis, $z_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, podemos evaluar

$$g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n - c)^m} = 0.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, se sigue de la continuidad de g (y de cómo está definida en $z = c$) que $a_m = g(c) = 0$. Esto concluye la demostración inductiva. ■



Es importante resaltar que el teorema no es válido si los ceros de f se acumulan en un punto $d \in \partial\Omega$. Veremos algunos ejemplos a continuación.

Ejemplo 3. *Si $\mathbb{D}$ es el disco unidad y disponemos de la siguiente información de una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$:*

$$f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces ya podemos determinar f explícitamente. En efecto, los puntos $\frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}$ todos pertenecen a $\mathbb{D}$ puesto que $\left|\frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, son todos distintos de $c = \frac{1}{3}$ y convergen a dicho punto cuando $n \to \infty$. El Teorema 2 implica que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$.

Ejemplo 4. *(La hipótesis acerca de la acumulación de los ceros en un punto del dominio es imprescindible.) Consideremos la función $f(z) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{z}$. Evidentemente, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Es claro que $f(\frac{1}{n}) = \operatorname{sen}\pi n = 0$ y los puntos $\frac{1}{n} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Sin embargo, el punto límite no está en el dominio de holomorfía de la función, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sino en su frontera. Por tanto, no nos está permitido aplicar el Principio de los ceros aislados para concluir que la función f es nula. De hecho, sabemos que no lo es porque es fácil encontrar muchos puntos en los que la función tiene, por ejemplo, valor 1.*

Corolario 3 *(Teorema de unicidad). Sea Ω un dominio en el plano y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si existe un punto $c \in \Omega$ y una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en Ω de puntos distintos de c tales que $\lim_{n\to\infty} z_n = c$ y $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \equiv g$ en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema 2 a la diferencia $h = f - g$. ∎

Ejercicio 1. *Encuentre todas las funciones enteras que satisfagan la condición $f(z) = f(2z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$, usando el Teorema de la unicidad.*

SOLUCIÓN. Fijemos un punto $w \in \mathbb{C}$ arbitrario pero distinto de 0. Aplicando la condición $f(z) = f(2z)$ al punto $z = w/2$, vemos que $f(w) = f(w/2)$. Siguiendo de manera análoga, obtenemos que $f(w/2) = f(w/4)$, etc. Por inducción se sigue que

$$f(w) = f\left(\frac{w}{2}\right) = f\left(\frac{w}{4}\right) = f\left(\frac{w}{8}\right) = \ldots = f\left(\frac{w}{2^n}\right) = \ldots, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Es inmediato que la función constante $g(z) = f(w)$ coincide con f en todos los puntos $\frac{w}{2^n}$. Puesto que w es fijo, $\frac{w}{2^n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ (basta tomar el módulo para verlo). Por el Corolario 3, se sigue que $f \equiv g$, es decir, $f \equiv f(w)$: es una función constante. Obviamente, toda función constante cumple la condición dada. ∎

Ejercicio 2. *Halle razonadamente todas las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ que cumplan la condición $f(1/n) = 2/n^2$.*

SOLUCIÓN. Consideremos la sucesión $z_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Despejando n, vemos que $n = 1/z_n$, luego $n^2 = 1/z_n^2$, así que $2/n^2 = 2z_n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que las funciones f y $g(z) = 2z^2$, ambas holomorfas en $\mathbb{D}$, coinciden en los puntos z_n, $z_n \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \in \mathbb{D}$. Por el Teorema de la unicidad (Corolario 3), se sigue que $f(z) = 2z^2$ para todo $z \in \mathbb{D}$. ∎

Corolario 4. *Sea Ω un dominio en el plano y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función tal que $f \not\equiv 0$ en Ω. Entonces f tiene, como mucho, una cantidad numerable de ceros en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Si f no tiene ceros, no hay nada que demostrar. Si tiene, al menos, un cero, debido al Teorema 2, cada cero $z = c$ de f en Ω es aislado: existe un $r > 0$ (dependiente de c) tal que en el disco $D(c; r)$ no hay más ceros de f aparte de c. En cada disco $D(c; r/2)$ (de la mitad de radio -¡importante!) podemos elegir un punto con las partes real e imaginaria ambas racionales (y distinto de c). Esto establece una función entre el conjunto de los ceros de f y los puntos con ambas coordenadas racionales (que es numerable).

Es fácil ver que dicha función es inyectiva: usando la desigualdad triangular, puede verse que ningún punto puede ser común a dos discos distintos $D(c_1; r_1/2)$ y $D(c_2; r_2/2)$: si existiese tal punto w, satisfaría las desigualdades $|c_1 - w| < r_1/2$ y $|w - c_2| < r_2/2$ y entonces la desigualdad triangular nos daría $|c_1 - c_2| < r_1/2 + r_2/2 \le \max\{r_1, r_2\}$. Pero la última desigualdad es imposible puesto que $c_2 \notin D(c_1; r_1)$ y $c_1 \notin D(c_2; r_2)$ y, por tanto, $|c_1 - c_2| \ge r_1$ y $|c_1 - c_2| \ge r_2$.

Una vez comprobado que tenemos una función inyectiva entre el conjunto de los ceros de f en Ω y los racionales, se sigue que los ceros forman un conjunto, como mucho, numerable. ∎

Ejemplo 5. *Cualquier cantidad de ceros, finita o numerable, es posible. Daremos ejemplos de cada situación en el caso cuando $\Omega = \mathbb{C}$ (funciones enteras).*

La función $f(z) = e^z$ no tiene ceros.

Un polinomio de grado n, $n \in \mathbb{N}$, tiene exactamente n ceros, contando las multiplicidades (y, por supuesto, es fácil dar un ejemplo de un polinomio con todos los ceros distintos).

La función $f(z) = \operatorname{sen} z$ tiene una cantidad infinita numerable de ceros: ya hemos visto que sus ceros son precisamente los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (que no se acumulan en ningún punto en el plano).

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador en 2019-20 (ayuda técnica: Prof. José Pedro Moreno)

Variable Compleja I **(CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)**

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

7: Singularidades aisladas, series de Laurent y residuos

En esta entrega de apuntes estudiaremos las funciones que son holomorfas salvo en puntos aislados (que se denominarán singularidades aisladas) y analizaremos los posibles comportamientos cerca de esos puntos (en el sentido de la existencia del límite finito o infinito, acotación, etc.). Veremos también, aunque muy brevemente, los desarrollos en series centradas en esos puntos y llamadas series de Laurent. Dichas series serán distintas de las series de Taylor porque en lugar de converger en un disco, serán convergentes en una corona, al contener potencias negativas.

De especial inerés será una característica numérica relacionada con cada singularidad aislada, llamada residuo. El residuo de una función en una singularidad aislada, de nuevo, tendrá relaciones con ciertas integrales sobre curvas del mismo tipo ya visto antes y que tendrá multitud de aplicaciones, tanto prácticas (en diversos cálculos) como teóricas (para deducir teoremas cualitativos). En la entrega que viene a continuación, veremos el sencillo pero importante Teorema de los residuos que ha encontrado su uso en un sinfín de aplicaciones concretas en Análisis, desde las series de Fourier hasta la teoría analítica de números.

Singularidades aisladas. Clasificación

En esta sección estableceremos un nexo entre la teoría de los ceros de funciones analíticas y los teoremas de Cauchy y sus aplicaciones vistos antes. Como preámbulo de la teoría, empezaremos con un resultado auxiliar, análogo de una regla conocida de los cursos de Cálculo.

La regla de L'Hôpital para funciones analíticas. Conocemos varias versiones de la regla de L'Hôpital (L'Hospital) para las funciones reales de una variable real. Es conveniente saber que dicha regla no es válida para las funciones complejas de una variable real, precisamente debido a los problemas que surgen con algunas funciones exponenciales como las que aparecen en la fórmula de Euler. Sin embargo, la versión básica sigue siendo cierta para las funciones holomorfas, esencialmente porque tiene que ver con la propia definición de la derivada compleja.

Proposición 1 *(Regla de L'Hôpital para funciones analíticas). Sea Ω un dominio, $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ tales que $f(a) = g(a) = 0$. Si existe el límite (finito) $\lim_{z\to a} f'(z)/g'(z)$, entonces tambien existe $\lim_{z\to a} f(z)/g(z)$ y*

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideramos primero el caso cuando $g'(a) \neq 0$. Por la definición de la derivada y las hipótesis sobre f y g, obtenemos

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)},$$

puesto que el último límite obviamente existe y es finito (tanto cuando $f'(a) \neq 0$ como cuando $f'(a) = 0$).

Consideremos ahora el caso cuando $g'(a) = 0$. Puesto que existe límite finito $\lim_{z\to a} f'(z)/g'(z)$, se sigue que $f'(a) = 0$, así que tanto f como g tienen en a un cero de orden mayor que uno. Si el orden del cero de g en

a es 2, entonces (por un teorema de los apuntes sobre los ceros de las funciones analíticas) $g(z) = (z-a)^2 G(z)$, con $G \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $G(a) \neq 0$, mientras que $f(z) = (z-a)^2 F(z)$, con $F \in \mathscr{H}(\Omega)$. (No podemos afirmar que $F(a) \neq 0$ -y tampoco lo necesitaremos- porque el orden del cero que tiene f en a podría ser superior y entonces F podría tener como factor otra potencia adicional de $z-a$). Entonces

$$\lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to a} \frac{2(z-a)F(z) + (z-a)^2 F'(z)}{2(z-a)G(z) + (z-a)^2 G'(z)} = \lim_{z\to a} \frac{2F(z) + (z-a)F'(z)}{2G(z) + (z-a)G'(z)} = \frac{F(a)}{G(a)} = \lim_{z\to a} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Ahora se ve claramente cómo debería continuar el análisis si g tuviese un cero de orden mayor que 2 en $z=a$. Omitiremos los detalles. ■

Ejemplo 1. *Usando la Regla de L'Hôpital dos veces seguidas, calculamos dos límites análogos a los ya conocidos de los cursos de Cálculo:*

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{(1-\cos z)'}{(z^2)'} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{(\operatorname{sen} z)'}{z'} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{1} = \frac{1}{2}.$$

El segundo límite conocido, obviamente, era $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$.

Singularidades aisladas: definición y tipos de singularidades. Vamos a estudiar los posibles comportamientos de una función holomorfa en un entorno agujereado de un punto.

(*) **Definición**. Diremos que una función f tiene una singularidad aislada en el punto $z=a$ si f es holomorfa (analítica) en $\{z \in \Omega : z \neq a\}$, siendo Ω un conjunto abierto que contiene al punto a. Puesto que cada dominio contiene un disco abierto y cada disco abierto es un dominio, esto es equivalente a la condición de que f sea holomorfa en un disco agujereado $D^*(a;R) = D(a;R) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < R\}$.

Existen tres posibilidades en cuanto al comportamiento de f cerca de la singularidad aislada en $z=a$:

(1) f está acotada en algún disco agujereado $D^*(a;r)$, donde $0 < r \leq R$.

(2) $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ (en otras palabras, $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$);

(3) no se cumple ninguna de las condiciones (1) y (2).

(*) **Definición**. En el caso (1) diremos que f tiene una singularidad evitable en $z=a$, en el caso (2), que tiene un polo en el punto a y, en el caso (3), que f tiene una singularidad esencial en a.

Existen ejemplos de cada una de las tres situaciones en la definición anterior. Los iremos dando a continuación, mientras estemos analizando cada uno de los posibles casos.

Singularidades evitables. El término "singularidad evitable" está justificado por el siguiente teorema.

Ejemplo 2. *(a) Debido a la cancelación, es obvio que la función*

$$f(z) = \frac{z^2-4}{z+2}$$

es igual a $z-2$ *cuando* $z \neq -2$. *Puesto que* $z-2$ *tiene límite finito cuando* $z \to -2$, f *está acotada en un entorno agujereado de dicho punto y, por tanto, tiene una singularidad evitable en* $z=-2$.

(b) Un ejemplo menos trivial: lo mismo sucede con la función

$$g(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2}$$

ya que $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$, *como se desprende del valor de uno de los límites en el Ejemplo 1.*

Teorema 1 *(Teorema de la singularidad evitable de Riemann). Sea f holomorfa en un disco agujereado $D^*(a;r)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *f está acotada en $D^*(a;r)$;* $\equiv$ singularidad aislada evitable

(b) *Existe el límite finito $L = \lim_{z\to a} f(z)$ y, además, la extensión continua de f al disco $D(a;r)$:*

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in D^*(a;r), \\ L, & \text{si } z = a \end{cases}$$

es, de hecho, holomorfa en $D(a;r)$.

DEMOSTRACIÓN. Es obvio que (b)$\Rightarrow$(a), así que sólo necesitamos demostrar que (a)$\Rightarrow$(b).

La clave de la demostración está en definir la siguiente función:

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & \text{si } z \in D^*(a;r), \\ 0, & \text{si } z = a \end{cases}.$$

Por hipótesis, f tiene una singularidad aislada en $z = a$, así que existe una constante M tal que $|f(z)| \le M$ para todo $z \in D^*(a;r)$. Por tanto, para todo $z \in D^*(a;r)$ se cumple $|(z-a)f(z)| \le M|z-a|$, lo cual implica que $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$. Luego existe

$$g'(a) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)-g(a)}{z-a} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0.$$

Puesto que, por hipótesis, g tiene derivada en todos los puntos de $D^*(a;r)$, esto demuestra que $g \in \mathscr{H}(D(a;r))$. Por la definición de g, también sabemos que $g(a) = 0$, así que g tiene un cero de multiplicidad, al menos, dos en $z = a$. Por un teorema de los apuntes sobre los ceros de las funciones analíticas, se sigue que existe una función $h \in \mathscr{H}(D(a;r))$ tal que $g(z) = (z-a)^2 h(z)$ en $D(a;r)$. (Según dicho teorema, si $z = a$ es un cero doble de g, tendremos $h(a) \neq 0$ y si no es un cero de orden superior, h tendrá algún factor adicional $(z-a)^m$ pero eso no será relevante para nuestra prueba ya que nos basta con tener el factor cuadrático.) Puesto que se cumple

$$(z-a)^2 f(z) = g(z) = (z-a)^2 h(z), \qquad \forall z \in D^*(a;r),$$

se sigue que $f(z) = h(z)$ para todo $z \in D^*(a;r)$. Dado que $h \in \mathscr{H}(D(a;r))$, se sigue que h es continua en $z = a$ y, por tanto, existe $\lim_{z\to a} h(z) = h(a) = L$. Puesto que f coincide con h en todo el disco agujereado $D^*(a;r)$, también se tiene $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} h(z) = L$. Esto demuestra que $\tilde{f} \equiv h$ en $D(a;r)$, así que $\tilde{f} \in \mathscr{H}(D(a;r))$. ∎

Observación. Gracias al Teorema 1, una función que es holomorfa en un dominio Ω, salvo en un punto $a \in \Omega$ donde tiene una singularidad evitable, puede extenderse hasta una función holomorfa en todo Ω, definiendo sus valores en las singularidades adecuadamente. Por tanto, puede considerarse -a todos los efectos- como una función holomorfa en todo Ω. Lo mismo ocurre con una función con una cantidad finita de singularidades evitables en Ω, ya que se pueden considerar entornos agujereados de cada singularidad de manera que sean disjuntos dos a dos, con lo cual no habrá problemas para definir la extensión.

Ejercicio 1. *Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unidad, con orientación positiva. Calcúlese el valor exacto de la integral*

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1-\cos z}{z^2}\, dz.$$

SOLUCIÓN. La función $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable ya que del Ejemplo 1 sabemos que

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, aplicando el Teorema de la singularidad evitable de Riemann y dando a la función el valor $1/2$ en el origen, podemos extender f hasta una función entera. Según el Teorema Integral de Cauchy, dado que $\mathbb{T}$ es una curva simple cerrada y rectificable en el plano, la integral es igual a cero. ■

Polos. Analizaremos ahora el comportamiento de una función analítica cerca de un polo y estableceremos ciertas relaciones con los ceros de funciones analíticas.

Ejemplo 3. *Las funciones*

$$f(z) = \frac{z^2-2}{(z-1)^2}, \qquad g(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

tienen polos, respectivamente, en $z=1$ y en $z=0$. Obsérvese que no hay cancelaciones en la fracción que representa la función f.

La función f no tiene otros polos. Sin embargo, la función g tiene una cantidad infinita numerable de polos. Se trata de los puntos $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, que son los únicos ceros de la función entera seno, como ya sabemos de otras entregas de apuntes y de las hojas de ejercicios.

Proposición 2. *Si una función f, holomorfa en un entorno agujereado $D^*(a;R)$ del punto $z=a$, tiene un polo en $z=a$, entonces puede escribirse como*

$$\boxed{f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^m}}$$

ado un lo

para un único número natural m, donde F es analítica en un disco $D^*(a;\rho)$, con $0<\rho\le R$ y $F(a)\neq 0$.

Además, el índice m que aparece en la fórmula es el único $m\in\mathbb{N}$ tal que $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$ existe como límite finito no nulo, porque para los valores $n<m$ se tiene que $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z)=\infty$ y para los naturales $n>m$ se cumple $\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = 0$.

Demostración. Según la definición de un polo, sabemos que $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$. Obviamente, $f\not\equiv 0$ en $D^*(a;R)$; entonces sabemos de los apuntes anteriores que los ceros de f en $D^*(a;R)$ son aislados: forman un conjunto, como mucho, numerable y no pueden acumularse dentro de $D^*(a;R)$. Tampoco pueden acumularse en $z=a$: si hubiera una sucesión $(z_n)_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ y $f(z_n)=0$, entonces $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$ no se cumpliría. Por tanto, podemos encontrar un entorno agujereado $D^*(a;r)$, con $0<r\le R$, tal que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in D^*(a;r)$. Podemos definir entonces la función $g=1/f$, que será holomorfa en $D^*(a;r)$ y, además, tendrá la propiedad de que

$$\lim_{z\to a} g(z) = \frac{1}{\lim_{z\to a} f(z)} = 0.$$

Por el Teorema 1 de Riemann, g tiene una singularidad evitable en $z=a$ y su extensión holomorfa, a la que (abusando de notación) también llamaremos g, tiene un cero en $z=a$. Por la factorización vista en la entrega anterior de apuntes, $g(z)=(z-a)^m h(z)$, para cierta función $h\in\mathscr{H}(D(a;r))$ con $h(a)\neq 0$. Por la continuidad de h, ésta no se anula en algún disco $(D(a;r))$ con $0<\rho\le R$. Finalmente, en $D^*(a;\rho)$ se cumple la igualdad

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^m h(z)} = \frac{F(z)}{(z-a)^m}$$

para la función $F = 1/h \in \mathscr{H}(D(a;\rho))$; obviamente, $F(a)\neq 0$.

De la fórmula anterior para f, es inmediato que para $n<m$ se tiene que

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = \lim_{z\to a}\frac{F(z)}{(z-a)^{m-n}} = \infty$$

y para los $n>m$ se cumple

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)^{n-m}F(z) = 0. \qquad ■$$

Definición. El número m al que se refiere la Proposición 2 se denomina el orden del polo $z = a$. Si $m = 1$, hablamos de un polo simple en $z = a$ y si $m = 2$, de un polo doble.

Ejemplo 4. *La función g del Ejemplo 3 tiene un polo simple en $z = 0$ puesto que*

$$\lim_{z\to 0} z\,g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} \cdot \cos z = 1 \cdot \cos 0 = 1\,.$$

La función f del mismo ejemplo tiene un polo doble en $z = 1$, ya que

$$\lim_{z\to 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1} (z^2 - 2) = -1 \neq 0, \infty.$$

Obsérvese que $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \infty$, *mientras que* $\lim_{z\to 1}(z-1)^n f(z) = 0$, *para* $n > 2$.

Singularidades esenciales. Comenzaremos con un ejemplo.

Ejemplo 5. *La función $e^{1/z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad esencial, ya que no está acotada en ningún entorno del origen ni tampoco tiende al infinito cuando $z \to 0$. Por ejemplo:*

- *la sucesión $z_n = 1/n \to 0$ y $f(z_n) = e^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$;*
- *la sucesión $\zeta_n = -1/n \to 0$ pero $f(\zeta_n) = e^{-n} \to 0$ cuando $n \to \infty$;*
- *la sucesión $w_n = 1/(2\pi n i)$ también tiende a 0 cuando $n \to \infty$; sin embargo, $f(w_n) = e^{2\pi n i} = 1 \to 1$.*

Resulta que este comportamiento es típico de una función analítica (holomorfa) cerca de una singularidad esencial. Lo afirma el siguiente resultado.

Teorema 2. *(Teorema de Casorati-Weierstrass). Si f tiene en $z = a$ una singularidad esencial, entonces para todo $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existe una sucesión $(z_n)_n$ tal que $z_n \neq a$,* $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ *y* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

DEMOSTRACIÓN. Partimos de la hipótesis que $f \in \mathcal{H}(D^*(a;R))$ para cierto $R > 0$.

Consideremos primero el caso $w = \infty$. Puesto que $z = a$ no es una singularidad evitable de f, la función no puede estar acotada en ningún entorno agujereado del punto a. En particular, existe $z_1 \in D^*(a;R)$ tal que $|f(z_1)| > 1$. Por la misma razón, existe $z_2 \in D^*(a;\frac{R}{2})$ tal que $|f(z_2)| > 2$. Continuando inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos la existencia de un punto $z_n \in D^*(a;\frac{R}{n})$ tal que $|f(z_n)| > n$. Evidentemente, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

Veamos ahora el caso de un punto $w \in \mathbb{C}$. Si existe una sucesión de puntos $(z_n)_n$ tal que $z_n \neq a$, $z_n \to a$ y, de hecho, $f(z_n) = w$ para cada n, el resultado se sigue trivialmente. Si no existe tal sucesión, entonces existe un entorno agujereado $D^*(a;r)$ de a, con $0 < r \leq R$, donde f no toma el valor w. En este caso, la función $g = \frac{1}{f-w}$ es holomorfa en $D^*(a;r)$ y, por tanto, tiene una singularidad aislada en $z = a$. Además, en el mismo entorno agujereado tenemos la identidad $f = w + \frac{1}{g}$.

Si la singularidad aislada de g en a fuese evitable con $\lim_{z\to a} g(z) = 0$, tendríamos $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ y, por tanto, a sería un polo de f, contrario a nuestra hipótesis. Si la singularidad aislada de g en a fuese evitable con $\lim_{z\to a} g(z) \neq 0$, entonces existiría el límite finito $\lim_{z\to a} f(z)$ y a sería una singularidad evitable de f, lo cual tampoco es posible. Sólo queda la opción de que $z = a$ sea una singularidad esencial de g. Entonces, por la primera parte de la demostración, existe una sucesión infinita de puntos $z_n \in D^*(a;R)$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$. Entonces, de nuevo por la relación entre f y g, se sigue que, para la misma sucesión se satisface $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$, que es lo que queríamos demostrar. ■

Finalmente, conviene advertir que no toda singularidad es una singularidad aislada, como nos muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. *La función* $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{z}}$ *tiene una singularidad aislada en cada uno de los puntos* $z_n = \frac{1}{n}$ *ya que el denominador se anula en* z_n *y el numerador no. Por tanto,* $\lim_{z\to z_n} f(z) = \infty$ *y cada* z_n *es un polo. Sin embargo,* $z = 0$ *es otra singularidad dado que la función no está definida allí, pero no es aislada: puesto que* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, *no existe ningún* $R > 0$ *tal que* f *sea holomorfa en* $D^*(0;R)$.

Series de Laurent

El teorema que enunciamos a continuación fue demostrado en 1842 por el matemático e ingeniero militar francés Pierre Alphonse Laurent (1813-1854), cuyo nombre se pronuncia aproximadamente como Lorán en castellano. El resultado ya se encontraba en 1841 en los cuadernos de Mûnster del "padre del análisis moderno", el gran matemático alemán Karl T.W. Weierstrass (1815-1897) aunque esos apuntes no se publicaron hasta 1894.

Teorema 3. *Si* f *es holomorfa en la corona* $\{z : r < |z-a| < R\}$, *con* $0 \le r < R \le +\infty$, *entonces se puede desarrollar en serie doble de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

que converge absoluta y uniformemente en cada circunferencia $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho\}$, $r < \rho < R$. *Los coeficientes* a_n *son únicos y vienen dados por la fórmula*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Definición. Esta serie se denomina la serie de Laurent de f en la corona $\{z : r < |z-a| < R\}$. La parte de la suma con los índices negativos: $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ se denomina la parte principal de la serie de Laurent.

Observaciones. (1) La convergencia (puntual, absoluta, uniforme) de una serie doble, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)$ debe entenderse como sigue: simplemente, para la convergencia (de cualquier tipo mencionado) de una serie así, ha de exigirse el mismo tipo de convergencia de ambas series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{-1} f_n(z).$$

(2) Se admiten todos los tipos posibles de coronas como, por ejemplo,

$$\{z : 1 < |z-a| < 2\}, \qquad \{z : 0 < |z-a| < 1\}, \qquad \{z : 1 < |z-a| < +\infty\},$$

entre otras. Veremos algunos ejemplos a continuación.

(3) Debido a la falta de tiempo, esta vez no daremos ninguna demostración del Teorema 3. Sólo nos limitamos a indicar que la prueba se sigue de una versión de la Fórmula integral de Cauchy para "curvas" compuestas por dos circunferencias, una dentro de otra.

(*) **Teorema 4.** *Para las coronas de tipo* $\{z : 0 < |z-a| < R\}$, *la forma que tiene la serie de Laurent indica el tipo de singularidad aislada, según la siguiente clasificación:*

- *Cuando* $z = a$ *es una singularidad evitable, la parte principal es nula:* $c_{-1} = c_{-2} = \ldots = 0$. *En otras palabras, la serie de Laurent coincide con la de Taylor, que converge en todo el disco* $D(a;R)$.
- *Cuando* $z = a$ *es un polo de* f *de orden* m, *la parte principal de la serie de Laurent se reduce a la suma finita* $\sum_{n=-m}^{-1} c_n(z-a)^n$, *siendo* $c_{-m} = \lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) \neq 0$.

- *Cuando $z = a$ es una singularidad esencial de f, la parte principal de la serie de Laurent tiene infinitos términos no nulos.*

Ejemplo 7. *Como ya sabemos, la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable y, por tanto, puede considerarse como una función entera (definiendo que sea 1 su valor en el origen). Su serie de Laurent en la corona $\{z : 0 < |z-a| < +\infty\}$ se obtiene, simplemente, dividiendo la serie de Taylor de la función seno en el plano por z en dicha corona:*

$$\frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

y, evidentemente, coincide con una serie de potencias que converge en todo el plano. La convergencia es uniforme en cada circunferencia centrada en el origen.

Ejemplo 8. *La serie de Laurent de $f(z) = e^{3/z}$ se obtiene fácilmente del desarrollo de Taylor de la función exponencial:*

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

convergente absolutamente para todo w complejo y uniformemente en cada subconjunto compacto del plano. Sustituyendo $w = 3/z$, se obtiene una serie en z convergente en todo $z \neq 0$:

$$f(z) = e^{3/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n! z^n} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{2z^2} + \frac{9}{2z^3} + \frac{27}{8z^4} + \dots$$

Obviamente, la parte principal tiene infinitos términos no nulos y se trata de una singularidad esencial en $z = 0$ (como ya sabemos del Ejemplo 5, donde aparece una función muy similar). La convergencia de la serie de Laurant obtenida es uniforme en cada circunferencia centrada en el origen.

Ejercicio 2. *La función $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ tiene un polo simple en $z = 0$; también tiene otro en $z = 1$. Halle los desarrollos de f en serie de Laurent en cada una de las coronas*

(a) $\{z : 0 < |z| < 1\}$;

(b) $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$.

SOLUCIÓN. La serie de Laurent de f en la corona $\{z : 0 < |z| < 1\}$ puede obtenerse a partir del desarrollo de la serie geométrica, convergente en el disco unidad:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{-1}{z(1-z)} = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{-1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

siendo la parte principal simplemente $\frac{1}{z}$. La convergencia es uniforme y absoluta en cada circunferencia centrada en el origen y contenida en este dominio.

La serie de Laurent de la misma función en la corona $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$, donde f también es holomorfa, puede obtenerse mediante un procedimiento similar, usando también una serie geométrica pero buscando el desarrollo en potencias de $z-1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-(-(z-1))} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-1} = \sum_{m=-1}^{\infty}(-1)^{m+1}(z-1)^m, \end{aligned}$$

siendo la parte principal $\frac{1}{z-1}$. La serie obviamente converge cuando $|z-1| < 1$, por las propiedades de las series geométricas (o por el Teorema 3).

Como vemos, en ambos casos se trata de polos simples y, por tanto, la parte principal de cada serie de Laurent sólo tiene un término: en un caso, el término con $\frac{1}{z}$ y en el otro, el término con $\frac{1}{z-1}$. ■

Por supuesto, también existe un desarrollo de Laurent de la función del Ejercicio 2 en la corona no acotada $\{z : 1 < |z| < +\infty\}$. Lo dejamos como ejercicio.

Sugerencia: conviene usar de nuevo la serie geométrica, esta vez teniendo en cuenta que cada punto z en la corona indicada satisface la condición $|z| < 1$, lo cual es equivalente a una condición que nos conviene: $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$.

Residuos: definición y cálculo

Residuos: definición. Veremos ahora un nuevo concepto relacionado con el comportamiento de una función cerca de su singularidad aislada.

Proposición 3. *Consideremos una función $f \in \mathscr{H}(D^*(a;R))$, $R > 0$. Si $0 < r < R$ y C_r denota a la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$ con orientación positiva, entonces la integral*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\,dz$$

no depende del valor de $r \in (0, R)$.

Demostración. Si $0 < \rho < r < R$ y consideramos las circunferencias correspondientes C_ρ y C_r, ambas con orientación positiva (y siendo ambas curvas suaves, simples y cerradas), entonces la curva C_ρ está en el dominio acotado por la curva C_r y ambas curvas están en el dominio $D^*(a;R)$ donde f es holomorfa. Por una proposición vista en la entrega de apuntes sobre el Teorema de Cauchy y la función primitiva, sabemos que

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz = \int_{C_r} f(z)\,dz$$

y el resultado se sigue. ■

Definición. El valor constante de las integrales de arriba se denomina el residuo de f en $z = a$ y suele denotarse como $\mathrm{Res}(f;a)$.

Observación. Cuando $z = a$ es una singularidad evitable de f, entonces $\int_{C_\rho} f(z)\,dz = 0$ debido al Teorema integral de Cauchy y, por lo tanto, $\mathrm{Res}(f;a) = 0$. En el caso de un polo o una singularidad esencial, el residuo puede ser no nulo.

Se plantea la siguiente pregunta natural: ¿cómo calcular el residuo para lós demás tipos de singularidades aisladas?

El siguiente resultado nos dirá que, para calcular el residuo de una función de la forma $f(z) = \frac{F(z)}{z-a}$, con F holomorfa en un entorno agujereado de a y $F(a) \neq 0$, esencialmente hay que "quitar el denominador" y evaluar en a, quedando $\mathrm{Res}(f;a) = F(a)$. Por tanto, el cálculo del residuo es muy fácil para un polo simple. Para un polo de orden superior, el cálculo se complica y hay que involucrar las derivadas.

Proposición 4 *(Fórmulas para el residuo en un polo). Si $z = a$ es un polo simple de f, entonces*

$$\boxed{\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).}$$

Si a es un polo doble, entonces

$$\boxed{\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}[(z-a)^2 f(z)]'.}$$

Más generalmente, si es un polo de orden m, entonces

$$\boxed{\operatorname{Res}(f;a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración para un polo simple es inmediata. Al ser $z = a$ un polo simple de f, ésta se puede escribir en un entorno agujereado $D^*(a;R)$ del punto a como $f(z) = \frac{F(z)}{z-a}$, con $F \in \mathscr{H}(D(a;R))$, según la Proposición 2. Sea $0 < r < R$. La definición del residuo y la Fórmula integral de Cauchy implican inmediatamente que

$$\operatorname{Res}(f;a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F(z)}{z-a}\,dz = F(a) = \lim_{z\to a}F(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

En el caso de un polo de orden m, todo es similar: en un entorno agujereado $D^*(a;R)$ del punto a tenemos que $f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^m}$, con $F \in \mathscr{H}(D(a;R))$ y, por la Fórmula integral de Cauchy para la derivada de orden $m-1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F(z)}{(z-a)^m}\,dz = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F(z)}{(z-a)^m}\,dz \\ &= \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}(a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}F^{(m-1)}(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejemplo 9. *El residuo en el polo simple $z = 0$ de la función g del Ejemplo 3 es*

$$\operatorname{Res}(g;0) = \lim_{z\to 0} z g(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\cos z = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z}\cdot\lim_{z\to 0}\cos z = 1.$$

El residuo en el polo doble $z = 1$ de la función f del Ejemplo 3 es

$$\operatorname{Res}(f;1) = \lim_{z\to 1}[(z-1)^2 f(z)]' = \lim_{z\to 1}(z^2-2)' = \lim_{z\to 1}2z = 2.$$

Cálculo del residuo a partir de la serie de Laurent. Si una función f es holomorfa en $D^*(a;R)$, hay un método eficaz para calcular $\operatorname{Res}(f;a)$.

(*) **Proposición 5**. *Si f tiene una singularidad aislada en $z = a$ y en $D^*(a;R)$ se desarrolla en serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

entonces $\operatorname{Res}(f;a) = c_{-1}$.

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\,dz$$

prop. 3

DEMOSTRACIÓN. La serie de Laurent de f converge uniformemente en la circunferencia de radio r centrada en el origen, $0 < r < R$. Integrándola término a término, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}(z-a)^n\,dz = c_{-1}.$$

La última igualdad está justificada debido a la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}(z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \geq 0, \\ 1, & \text{si } n = -1, \\ 0, & \text{si } n < -1. \end{cases}$$

La igualdad en el primer caso se sigue por el Teorema integral de Cauchy, al ser $(z-a)^n$ una función entera. La segunda igualdad se obtiene de la Fórmula integral de Cauchy para la función constante uno y la tercera, de la Fórmula integral de Cauchy para las derivadas de la misma función.

Por supuesto, los mismos cálculos se pueden comprobar -con bastante facilidad- parametrizando la circunferencia y empleando cálculos directos de integral de línea. ■

Ejemplo 10. *Consideremos de nuevo la función* $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ *del Ejercicio 2, con un polo simple en* $z = 0$. *Según la fórmula de arriba, vemos que* $\mathrm{Res}(f;0) = c_{-1} =$ -1.

Asimismo, para la función $e^{3/z}$ *y su singularidad esencial en el origen, considerando la serie de Laurent de* f *calculada en el Ejemplo 8, obtenemos* $\mathrm{Res}(f;0) = c_{-1} = 3$.

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20

Variable Compleja I (CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Teorema de los residuos y sus aplicaciones

En esta entrega continuamos con la teoría desarrollada en los apuntes anteriores y formulamos el Teorema de los residuos. Dicho resultado tiene numerosas aplicaciones en Análisis en general. Por un lado, están las aplicaciones cuantitativas al cálculo de integrales, de las que veremos varios ejemplos en este entrega de apuntes. Por otro lado, existen también aplicaciones cualitativas muy importantes, que nos permiten deducir los resultados básicos de la llamada Teoría geométrica de funciones, como el principio del argumento, teorema de Rouché, teorema de la aplicación abierta o el principio del módulo máximo. Las veremos en la siguiente entrega de apuntes.

En este entrega, destacaremos algunas de las numerosas aplicaciones del Teorema de los residuos al cálculo de integrales de funciones complejas y reales. Debido a la falta de tiempo, nuestra selección será muy limitada e incluso el último ejercicio resuelto se puede omitir en una primera lectura.

Teorema de los residuos. Algunas aplicaciones directas

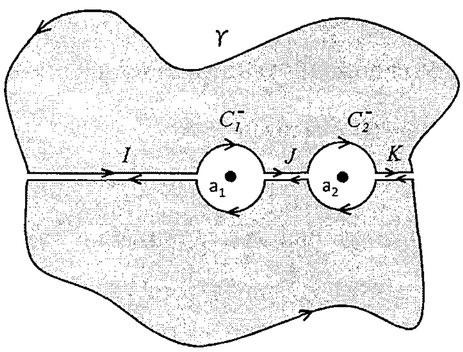
Teorema de los residuos. ¿Cómo integrar a lo largo de un contorno una función con varias singularidades aisladas dentro de dicho contorno? La respuesta viene dada por el siguiente resultado fundamental.

Teorema 1 *(Teorema de los residuos). Sea Ω un dominio y γ un contorno contenido en Ω, junto con su dominio interior, $D_{\text{int}}(\gamma)$. Sea f una función analítica en Ω, salvo en las singularidades aisladas $a_1, a_2, \ldots, a_n$, todas ellas contenidas en $D_{\text{int}}(\gamma)$. Entonces*

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f; a_k).}$$

Observación. La fórmula integral de Cauchy constituye el caso especial $n = 1$ de este teorema (un polo simple), mientras que la fórmula de Cauchy generalizada para la derivada de orden n corresponde al caso de un polo de orden mayor que uno.

DEMOSTRACIÓN. Basta rodear cada singularidad a_k mediante una circunferencia C_k de radio pequeño (para que los discos cerrados correspondientes estén contenidos en Ω y sean disjuntos). Ilustramos la prueba en el dibujo para el caso de dos singularidades.



La demostración sigue exactamente la misma idea que una proposición de los apuntes sobre el teorema de Cauchy, con un contorno γ dentro de otro, Γ. También divideremos el dominio entre ambas curvas en dos dominios, esta vez usando $n+1$ segmentos (que, en el caso $n=2$ representado en el dibujo, son tres: I, J y K), obteniendo dos contornos, uno superior y otro inferior. La integral a lo largo de cada uno de los contornos es cero y, debido a las cancelaciones de las integrales en direcciones opuestas (la integral sobre I y sobre I^-, etc.), resulta que

$$\int_\gamma f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k^-} f(z)\,dz = 0$$

y, por tanto,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; a_k). \qquad \blacksquare$$

Cálculo de ciertas integrales complejas usando el Teorema de los residuos. Veremos primero unos ejemplos de aplicación directa del Teorema 1.

Ejercicio 1. *Siendo $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva, calcule $\int_\mathbb{T} e^{3/z}\,dz$.*

SOLUCIÓN. Obviamente, $z=0$ es la única singularidad aislada de $f(z) = e^{3/z}$ en el plano. Ya sabemos de un ejemplo de la entrega anterior que $\operatorname{Res}(e^{3/z}; 0) = 3$. Por el Teorema de los residuos, obtenemos que

$$\int_\mathbb{T} e^{3/z}\,dz = 6\pi i. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 2. *Evalúe la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{2\,dz}{4z^2-1},$$

donde γ es la circunferencia unidad: $\gamma = \{z : |z| = 1\}$, dotada de la orientación positiva.

SOLUCIÓN. El problema se puede resolver de distintas maneras. En una entrega anterior ya vimos una, usando fracciones simples para poder aplicar la Fórmula integral de Cauchy. He aquí otra solución, vía el teorema de los residuos. La función

$$f(z) = \frac{2}{4z^2-1} = \frac{1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

evidentemente tiene dos polos simples en el plano complejo: $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_2 = -\frac{1}{2}$, ambos dentro de la curva γ, que es simple, cerrada y C^1. Por tanto, aunque la fórmula integral de Cauchy no sea aplicable directamente, el *Teorema de los residuos* sí lo es:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f; a_1) + \operatorname{Res}(f; a_2)\right).$$

Para evaluar esos residuos, utilizamos la fórmula habitual para el residuo en un polo simple:

$$\operatorname{Res}(f; a_1) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

De manera análoga, $\operatorname{Res}(f; a_2) = -\frac{1}{2}$ y, por consiguiente,

$$\int_\gamma \frac{2}{4z^2-1}dz = \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} = 0. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 3. *(a) Determine las singularidades aisladas de la función* $f(z) = \dfrac{e^z}{\cos z - 1}$ *situadas dentro de la circunferencia* $\gamma = \{z : |z-6| = 1\}$.

(b) Después calcule la integral $I = \int_\gamma f(z)\,dz$.

SOLUCIÓN. (a) Las únicas singularidades de f son polos y son exactamente los puntos en los que $\cos z = 1$. Se trata de los puntos $z_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; es fácil encontrarlos aplicando las técnicas conocidas de los ejercicios de temas anteriores. En efecto, la ecuación $\cos z = 1$ significa que $e^{iz} + e^{-iz} = 2$, es decir, $e^{2iz} + 1 = 2e^{iz}$. La sustitución $w = e^{iz}$ nos da la ecuación cuadrática $w^2 + 1 = 2w$ cuya única solución es $w = 1$, es decir: $e^{iz} = 1$ y eso nos lleva a la conclusión deseada como en varios ejercicios vistos con anterioridad.

De todos estos puntos z_n, $n \in \mathbb{Z}$, sólo $z_1 = 2\pi$ está dentro de la circunferencia γ. En efecto, $|2\pi - 6| < 1$. Para $n \geq 2$, es inmediato que $|2\pi n - 6| = 2\pi n - 6 \geq 4\pi - 6 > 1$, mientras que para $n \leq 0$, $n = -m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego $|2\pi n - 6| = |-2\pi m - 6| = 2\pi m + 6 \geq 6 > 1$. Por tanto, el único polo a tener en cuenta es $z_1 = 2\pi$.

(b) No sería fácil trabajar con la serie de Laurent alrededor de $z = 2\pi$ ya que el denominador no es un polinomio, así que calculamos el residuo de forma directa.

En primer lugar, comprobamos el orden de este polo. Veamos primero que no es simple. Recordemos que las funciones seno y coseno complejas también son periódicas con periodo 2π: $\cos(z-2\pi) = \cos z$, $\operatorname{sen}(z-2\pi) = \operatorname{sen} z$. Esto nos permite hacer el cambio de variable $w = z - 2\pi$ en el límite para simplificar los cálculos. Aplicando primero dicha periodicidad, luego el cambio de variable en el límite y, finalmente, una proposición de la entrega anterior (Regla de L'Hôpital), vemos que

$$\lim_{z\to 2\pi} (z-2\pi)\frac{e^z}{\cos z - 1} = \lim_{z\to 2\pi} \frac{(z-2\pi)e^z}{\cos(z-2\pi) - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{we^{w+2\pi}}{\cos w - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{e^{w+2\pi} + we^{w+2\pi}}{-\operatorname{sen} w} = \infty$$

puesto que el numerador tiende a $e^{2\pi}$ y el denominador a cero.

Veamos ahora que el polo es doble. Recordando que $\lim_{w\to 0} \dfrac{w}{\operatorname{sen} w} = 1$, vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2\pi} (z-2\pi)^2 \frac{e^z}{\cos z - 1} &= \lim_{z\to 2\pi} \frac{(z-2\pi)^2 e^z}{\cos(z-2\pi) - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{w^2 e^{w+2\pi}}{\cos w - 1} = \lim_{w\to 0} \frac{2we^{w+2\pi} + w^2 e^{w+2\pi}}{-\operatorname{sen} w} \\
&= -\lim_{w\to 0} 2e^{w+2\pi} \frac{w}{\operatorname{sen} w} - \lim_{w\to 0} we^{w+2\pi} \frac{w}{\operatorname{sen} w} = -2e^{2\pi}
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos calcular el residuo usando la fórmula para el residuo en un polo doble y el mismo cambio de variable que antes, recordando que $e^{2\pi i} = 1$, $\lim_{w\to 0} \frac{\cos w - 1}{w^2} = -\frac{1}{2}$, $\lim_{w\to 0} e^w = 1$ y aplicando primero un poco de álgebra y, al final, L'Hopital dos veces:

$$\begin{aligned}
I &= \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 2\pi) = 2\pi i \lim_{z\to 2\pi} \left(\frac{(z-2\pi)^2 e^z}{\cos z - 1}\right)' \\
&= 2\pi i \lim_{z\to 2\pi} \frac{\left(2(z-2\pi)e^z + (z-2\pi)^2 e^z\right)(\cos z - 1) + (z-2\pi)^2 e^z \operatorname{sen} z}{(\cos z - 1)^2} \\
&= 2\pi i \lim_{w\to 0} \frac{\left(2we^w + w^2 e^w\right)(\cos w - 1) + w^2 e^w \operatorname{sen} w}{(\cos w - 1)^2} = 2\pi i \frac{\lim_{w\to 0} \frac{(2we^w + w^2 e^w)(\cos w - 1) + w^2 e^w \operatorname{sen} w}{w^4}}{\lim_{w\to 0} \frac{(\cos w - 1)^2}{w^4}} \\
&= 8\pi i \lim_{w\to 0} \frac{\left(2we^w + w^2 e^w\right)(\cos w - 1) + w^2 e^w \operatorname{sen} w}{w^4} = 8\pi i \lim_{w\to 0} e^w \left(\frac{\cos w - 1}{w^2} + \frac{2(\cos w - 1) + w \operatorname{sen} w}{w^3}\right) \\
&= 8\pi i \left(-\frac{1}{2} + \lim_{w\to 0} e^w \frac{2(\cos w - 1) + w \operatorname{sen} w}{w^3}\right) = 8\pi i \left(-\frac{1}{2} + \lim_{w\to 0} \frac{2(\cos w - 1) + w \operatorname{sen} w}{w^3}\right) \\
&= 8\pi i \left(-\frac{1}{2} + \lim_{w\to 0} \frac{w \cos w - \operatorname{sen} w}{3w^2}\right) = 8\pi i \left(-\frac{1}{2} + \lim_{w\to 0} \frac{-w \operatorname{sen} w}{6w}\right) = -4\pi i. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

A continuación veremos diversas aplicaciones de carácter cuantitativo y relativas al cálculo de integrales reales (trigonométricas o de ciertas integrales impropias).

Aplicacion del Teorema de los residuos a la integración de ciertas funciones trigonométricas

Sea $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad con la orientación positiva. Podemos parametrizarla, escribiendo cada punto $z \in \mathbb{T}$ como

$$\boxed{z = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.}$$

Además, como ya sabemos de clase, se deduce de la fórmula de Euler que

$$\boxed{z + \frac{1}{z} = e^{it} + e^{-it} = 2\cos t,} \qquad \boxed{z - \frac{1}{z} = e^{it} - e^{-it} = 2i \operatorname{sen} t.}$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),} \qquad \boxed{\operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = -\frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

para los puntos $z = e^{it} \in \mathbb{T}$. Observemos que $dz = ie^{it}\,dt = iz\,dt$ y, por tanto, $dt = dz/(iz)$.

Cuando u es una función elemental de dos variables reales, todo esto nos permite escribir las diferentes integrales trigonométricas de la forma

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt$$

como integrales de una función compleja sobre el contorno $\mathbb{T}$:

$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt = \int_{\mathbb{T}} u\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz},$$

transformando así la integral inicial de una función real en otra integral de una función de la variable z. En nuestros ejemplos, esta nueva función de z será analítica y con frecuencia racional, así que luego podremos aplicar la Fórmula integral de Cauchy o el Teorema de los residuos.

Ejercicio 4. *Calcule el valor de la integral*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5 - 4\operatorname{sen} t}\,dt.$$

SOLUCIÓN. De manera similar a las deducción de las fórmula de arriba, también obtenemos

$$\boxed{\cos(2t) = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right),} \qquad z = e^{it} \in \mathbb{T}.$$

Aplicando las fórmulas indicadas, se deduce que

$$I = \int_{\mathbb{T}} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 - \frac{2}{i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{\mathbb{T}} \frac{z^4 + 1}{2z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}\,dz$$

La función obtenida

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{2z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}$$

tiene tres polos: un polo doble $z = 0$ y dos simples: $z = 2i$ y $z = i/2$. Esto es cierto porque $z = 2i$ y $z = i/2$ son los ceros del polinomio $-2z^2 + 5iz + 2$, lo cual permite la siguiente factorización:

$$-2z^2 + 5iz + 2 = -2(z - \frac{i}{2})(z - 2i)$$

y, por tanto,

$$f(z)=\frac{z^4+1}{2z^2(-2z^2+5iz+2)}=\frac{z^4+1}{-4z^2(z-\frac{i}{2})(z-2i)}.$$

Dos de los polos se encuentran dentro de $\mathbb{T}$: el polo simple $i/2$ y el doble $z=0$. Aplicando las fórmula habituales para el cálculo del residuo en un polo (simple y doble, respectivamente), después de un cálculo rutinario basado en la proposición de la entrega anterior de apuntes para el cálculo del residuo en un polo, obtenemos:

$$\operatorname{Res}(f;\frac{i}{2})=\frac{17i}{24},\qquad \operatorname{Res}(f;0)=\frac{-5i}{8}.$$

Por el Teorema de los residuos, obtenemos

$$I=2\pi i\cdot\left(\operatorname{Res}(f;\frac{i}{2})+\operatorname{Res}(f;0)\right)=-\frac{\pi}{6}. \qquad \blacksquare$$

Aplicacion del Teorema de los residuos al cálculo de integrales impropias

El cálculo de residuos es muy efectivo para evaluar ciertas integrales impropias de funciones racionales, combinaciones de racionales y trigonométricas y otras. Debido a la falta de tiempo, este año veremos sólo algunos de los muchos tipos de integrales que se pueden calcular por este método.

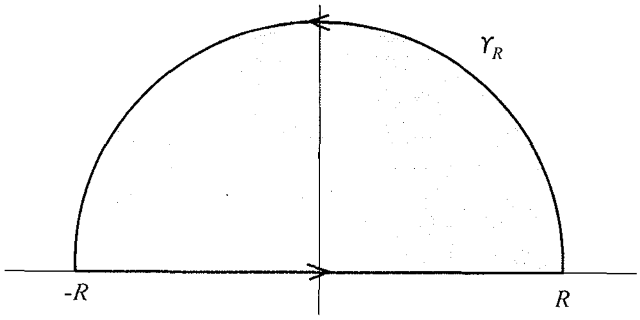
Para calcular una integral impropia: $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, normalmente consideramos la función compleja $f(z)$ (u otra muy similar y relacionada con ella) y la integramos a lo largo de un contorno convenientemente elegido. Un contorno básico y usado con frecuencia es el contorno γ_R compuesto por el intervalo $I_R=[-R,R]$ y por una semicircunferencia, C_R, desde R hasta $-R$, situada o bien en el semiplano superior o bien en el inferior, con la siguiente idea:

(1) para evaluar $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{I_R} f(z)\,dz$, identificamos las singularidades aisladas en el dominio interior a γ_R y usamos el Teorema de los residuos (o, en algunos casos especiales cuando hay sólo una singularidad aislada dentro del contorno, la Fórmula integral de Cauchy);

(2) observamos que $\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R} f(z)\,dz=I$;

(3) demostramos que, cuando $R\to+\infty$, la integral $\int_{C_R} f(z)\,dz$ tiende a cero;

(4) pasando al límite cuando $R\to+\infty$, obtenemos finalmente el valor de la integral I.



Si la función $f(x)$ involucra alguna función trigonométrica, por ejemplo, $\cos x$, conviene reemplazar esa parte de la función por e^{ix} y hacer las modificaciones correspondientes en la función compleja $f(z)$.

Si nos encontramos con algún polo u otro tipo de singularidad de f en el contorno básico γ_R, entonces será necesario modificar un poco el contorno para evitar que éste pase por las singularidades (por ejemplo, reemplazando una parte del segmento I_R por una semicircunferencia pequeña). A veces es incluso conveniente considerar otro contorno diferente (un rectángulo u otro) pero no trataremos aquí estos ejemplos.

Ejercicio 5. *Calcule la integral*

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz,$$

donde $R>1$, $\gamma_R = I_R + C_R$, $I_R = [-R,R]$, C_R *es la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta* $-R$ *y la curva* γ_R *está orientada en el sentido positivo.*

SOLUCIÓN. Puesto que $z^2+1=(z-i)(z+i)$, se observa que

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}.$$

Por tanto, f es analítica en el conjunto abierto $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\ z\neq \pm i\}$ y tiene dos polos dobles en el plano: $z=i$ y $z=-i$. Sin embargo, sólo el polo $z=i$ se encuentra en el interior de la curva γ_R (ya que, por un lado, $R>1$ y, por otro lado, el polo $z=-i$ está en el semiplano inferior). Hallamos el valor del residuo en $z=i$ según la fórmula para un polo doble, vista antes:

$$\operatorname{Res}(f;i)=\lim_{z\to i}[(z-i)^2f(z)]'=\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=\frac{-2}{(2i)^3}=\frac{1}{4i}=-\frac{i}{4}.$$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz=2\pi i\operatorname{Res}(f;i)=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Obsérvese que, alternativamente, podríamos haber usado la Fórmula integral de Cauchy para la derivada en lugar del Teorema de los residuos para obtener el mismo resultado. ∎

Los cálculos como el del Ejercicio 5 serán muy importantes a la hora de evaluar diversas integrales impropias de funciones reales.

Antes de comenzar con cálculos de ciertas integrales impropias, conviene recordar que si $p\in\mathbb{R}$ y $c>0$, la integral impropia

$$\int_c^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$$

converge si y sólo si $p>1$, tal y como se puede comprobar directamente (y se vio en su día en Cálculo I).

Ejercicio 6. *Compruebe la convergencia de la integral*

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y evalúela, usando el teorema de los residuos.

SOLUCIÓN. En primer lugar, la integral converge ya que

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

y ambas integrales convergen. La integral sobre el intervalo $[0,1]$ converge porque no es impropia sino una integral habitual de Riemann de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. La convergencia de la integral impropia sobre el intervalo $(1,+\infty)$ se justifica fácilmente usando el *criterio de comparación*, ya que

$$\frac{1}{(x^2+1)^2}<\frac{1}{x^4},\qquad x>1,$$

y $\int_1^{\infty}(1/x^4)\,dx$ converge.

Para calcular I, utilizaremos el método de los residuos. Consideraremos el contorno ya habitual: $\gamma_R = I_R + C_R$, donde $I_R = [-R, R]$ y C_R es la semicircunferencia de radio R en el semiplano superior centrada en el origen, desde R hasta $-R$; le daremos a γ_R la orientación positiva, de modo que el intervalo I_R se recorrerá desde $-R$ hasta R y C_R, desde R hasta $-R$.

Cuando $R > 1$, la función $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ tiene un polo doble, a saber, $z = i$, dentro de γ_R. Usando el Teorema de los residuos, en el Ejercicio 5 hemos evaluado la integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = \frac{\pi}{2}.$$

Observemos que su valor es independientemente de R, siempre y cuando $R > 1$. Por otro lado, parametrizando el intervalo I_R simplemente como $z = x$, $-R \le x \le R$, obtenemos

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

Dejando que $R \to +\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz + \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx,$$

puesto que en los apuntes sobre intgrales de línea demostramos (véase el lema con dos polinomios) que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\, dz = 0.$$

Dado que $f(x) = 1/(x^2+1)^2$ es una función par, se sigue que

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx = 2I$$

y, por tanto, $I = \pi/4$. ■

El método de los residuos también es útil cuando tenemos una integral mixta, involucrando una función racional y otra trigonométrica. Primero necesitamos ver un resultado auxiliar que se usa con frecuencia.

Lema 1 *(Lema de Jordan). Para todo $R > 0$ se cumple la desigualdad*

$$0 < \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\, dt < \frac{\pi}{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando la *desigualdad de Jordan* vista en los cursos de Cálculo: $\operatorname{sen} t \ge \frac{2}{\pi} t$, para todo $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, y la simetría de la gráfica de la función $e^{-R\operatorname{sen} t}$ respecto a la recta vertical $t = \pi/2$, obtenemos que

$$\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen} t}\, dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\operatorname{sen} t}\, dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\, dt = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right) < \frac{\pi}{R}.$$

La positividad de la integral es obvia. ■

Ejercicio 7. *Sea C_R la semicircunferencia del ejemplo anterior. Demuestre que*

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\, dz \to 0, \qquad R \to +\infty.$$

SOLUCIÓN. Por la desigualdad triangular, para $|z| = R > 0$ y R suficientemente grande (por ejemplo, $R > 2$ será suficiente), obtenemos $|(z-1)^2+1| \geq |z-1|^2 - 1 \geq (R-1)^2 - 1$. Escribiendo $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, observemos también que en C_R se cumple

$$|e^{iz}| = |e^{iR\cos t - R\,\mathrm{sen}\, t}| = e^{-R\,\mathrm{sen}\, t}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que en C_R: $dz = Re^{it}\,dt$ y aplicando el Lema 1 de Jordan, obtenemos

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\,dz\right| \leq \int_{C_R} \left|\frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}\right| |dz| \leq \frac{R}{(R-1)^2-1} \int_0^\pi e^{-R\,\mathrm{sen}\, t}\,dt < \frac{\pi}{(R-1)^2-1} \to 0$$

cuando $R \to +\infty$. ■

Recordemos que, para dos funciones positivas f, $g : (a, +\infty) \to (0, +\infty)$, la notación $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, significa que el cociente $f(x)/g(x)$ tiene límite finito y no nulo cuando $x \to +\infty$. En este caso, las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ convergen o divergen a la par, según el *criterio asintótico*.

Ejercicio 8. *Usando el teorema de los residuos, evalúe las siguientes integrales:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}, \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x\,dx}{(x-1)^2+1},$$

comprobando previamente su convergencia.

SOLUCIÓN. La integral I es convergente. Primero observemos que

$$\left|\frac{\cos x}{(x-1)^2+1}\right| \leq \frac{1}{(x-1)^2+1} \sim \frac{1}{x^2}, \qquad x \to \infty.$$

Dado que $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ converge, el *criterio asintótico* demuestra que converge la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2+1}$ y entonces, según el *criterio de comparación*, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}$ converge absolutamente. De manera análoga, se demuestra que converge absolutamente la integral $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}$, mientras que la integral desde -1 hasta 1 de la misma función tiene valor finito, al ser la integral de una función continua en un intervalo finito y cerrado (el denominador no se anula). La comprobación es completamente similar para la integral del seno.

Una vez demostrada la convergencia, pasamos a la evaluación de las integrales usando el Teorema de los residuos. Integraremos la función convenientemente elegida (siguiendo la recomendación de sustituir una función trigonométrica básica por una exponencial relacionada):

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)^2+1}$$

sobre el mismo contorno $\gamma_R = I_R + C_R$ que en los ejemplos anteriores. Hemos elegido esta función en lugar de una con funciones trigonométricas motivados por la conocida identidad de Euler: $e^{iz} = \cos z + i\,\mathrm{sen}\, z$ (que, dicho sea de paso, sigue siendo válida para los valores complejos de z). Esta elección de f simplificará los cálculos.

Determinemos las singularidades aisladas de f. Es fácil ver que $(z-1)^2+1 = 0$ si y sólo si $z-1 = \pm i$, es decir, los ceros del denominador son $z = 1 \pm i$. Así obtenemos la factorización

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1-i)(z-1+i)}$$

De los dos polos simples de f, sólo $z = 1+i$ se encuentra dentro de γ_R, cuando R es suficientemente grande: $R > |1+i| = \sqrt{2}$. Es fácil calcular el residuo en este polo:

$$\operatorname{Res}(f;1+i)=\lim_{z\to 1+i}(z-1-i)f(z)=\lim_{z\to 1+i}\frac{e^{iz}}{z-1+i}=\frac{e^{-1+i}}{2i}.$$

Según el teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=2\pi i\cdot \operatorname{Res}(f;1+i)=2\pi i\cdot\frac{e^{-1+i}}{2i}=\pi e^{-1}(\cos 1+i\operatorname{sen} 1).$$

Una vez más, tenemos

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

En el Ejercicio 7 ya hemos demostrado que $\int_{C_R} f(z)\,dz\to 0$, cuando $R\to+\infty$, utilizando el *lema de Jordan*. Finalmente, pasando al límite cuando $R\to+\infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{e}(\cos 1+i\operatorname{sen} 1)=\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1}.$$

Igualando las partes reales e imaginarias en los dos extremos de la igualdad anterior, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x-1)^2+1}=\frac{\pi}{e}\cos 1,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1}=\frac{\pi}{e}\operatorname{sen} 1.$$

■

La complicación en el siguiente (y último) ejercicio reside en la necesidad de definir correctamente la función elegida como función analítica (es decir, hay que elegir un dominio conveniente para definir el logaritmo para que sea holomorfo), además de modificar el contorno. Este último ejemplo se puede omitir en una primera lectura.

Ejercicio 9. *Calcule la integral*

$$I_p=\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\,dx,$$

comprobando previamente su convergencia para todo $p\in(-1,1)$.

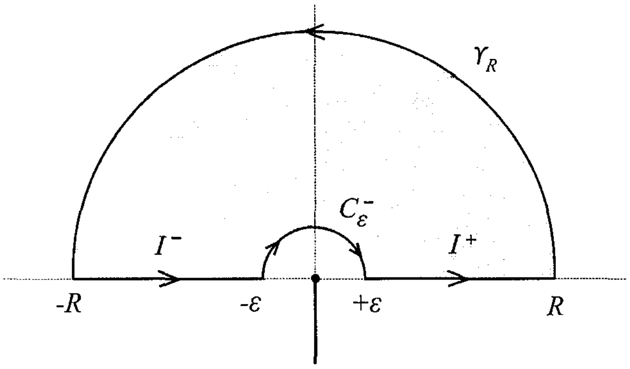
SOLUCIÓN. Cerca de $x=0$, la función $x^p/(1+x^2)\sim x^p$ y la integral $\int_0^1 x^p\,dx$ converge si y sólo si $p>-1$. Por tanto, la integral $\int_0^1\frac{x^p}{1+x^2}\,dx$ converge si y sólo si $p>-1$. Cuando $x\to+\infty$, la función $x^p/(1+x^2)\sim 1/x^{2-p}$ y $\int_1^{+\infty} 1/x^{2-p}\,dx$ converge si y sólo si $p<1$. Por consiguiente, I_p converge si y sólo si se cumplen a la vez ambas condiciones: $p>-1$ y $p<1$.

Consideraremos la función compleja $f(z)=z^p/(1+z^2)$ definida en un dominio adecuado. Por ejemplo, podemos definir la función $z^p=e^{p\log z}$, eligiendo la siguiente determinación del logaritmo:

$$\log z=\ln|z|+i\arg z,\qquad z\in\Omega=\{z\in\mathbb{C}:-\pi/2<\arg z<(3\pi)/2\},$$

el plano menos el semieje imaginario negativo.

Conviene elegir el siguiente contorno: $\gamma_{R,\varepsilon}$ en Ω: $\gamma_{R,\varepsilon}=C_R+I^-+C_\varepsilon^-+I^+$, donde R es grande y ε pequeño, $C_R=\{z=Re^{it}:\ 0\le t\le\pi\}$ es la semi-circunferencia de centro en el origen y radio R contenida en el semiplano superior, recorrida en el sentido positivo desde R hasta $-R$, $I^-=[-R,-\varepsilon]$ (intervalo en el semieje real negativo), $C_\varepsilon^-=\{z=\varepsilon e^{it}:\ \pi\ge\varepsilon\ge 0\}$ es una semi-circunferencia contenida en el semiplano superior, de centro en el origen y radio ε y recorrida en el sentido negativo desde $-\varepsilon$, pasando por $i\varepsilon$, hasta ε (de ahí que normalmente se escriba $\pi\ge\varepsilon\ge 0$ para indicar la dirección del movimiento) y, por fin, $I^+=[\varepsilon,R]$, un intervalo en el semieje real positivo. De esta forma el contorno, junto con el dominio interior que acota, se queda dentro del dominio Ω donde está definido el logaritmo complejo.



Nuestra función f es holomorfa en Ω, salvo en un polo simple, $z = i$, que se encuentra en el interior del contorno. Teniendo en cuenta que $i = e^{\pi i/2}$ y, por tanto, $i^p = e^{\pi i p/2}$, calculamos el residuo correspondiente:

$$\operatorname{Res}(f;i) = \frac{i^p}{2i} = \frac{\cos(\pi p)/2 + i\operatorname{sen}(\pi p)/2}{2i}$$

Es fácil ver que

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \pi R \cdot \frac{R^p}{R^2-1} \to 0, \qquad R \to +\infty,$$

ya que $p+1 < 2$. De manera similar,

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \le \pi\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^p}{1-\varepsilon^2} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0^+,$$

teniendo en cuenta que $p+1 > 0$.

Cuando $z \in I^-$, tenemos que $z = x < 0$ y por tanto $\log z = \ln(-x) + \pi i$. Con la determinación del logaritmo escogida, calculamos

$$z^p = e^{p\log z} = e^{p\ln(-x)+p\pi i} = e^{p\pi i} = (\cos(\pi p) + i\operatorname{sen}(\pi p)) \cdot (-x)^p$$

y, por tanto,

$$\int_{I^-} f(z)dz = (\cos(\pi p) + i\operatorname{sen}(\pi p)) \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{(-x)^p}{1+x^2} dx = (\cos(\pi p) + i\operatorname{sen}(\pi p)) \int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^p}{1+x^2} dx$$

(cambiando x por $-x$).

Puesto que $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ cuando $R \to +\infty$ y $\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$ cuando $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos en el límite que

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res}(f;i) &= \pi(\cos\frac{\pi p}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi p}{2}) = \lim_{R\to+\infty,\,\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz \\ &= (\cos(\pi p) + i\operatorname{sen}(\pi p)) \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Tomando las partes reales y usando la identidad $\cos(2x) + 1 = \cos^2 x$, obtenemos

$$\pi\cos\frac{\pi p}{2} = (\cos(\pi p) + 1) \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx = 2\cos^2\frac{\pi p}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx,$$

Despejando la integral, se sigue que

$$I_p = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}. \qquad \blacksquare$$

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20, con la ayuda técnica de José Pedro Moreno

Variable Compleja I (CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Aplicaciones cualitativas de los teoremas integrales

En esta entrega de apuntes veremos varios resultados cualitativos acerca del comportamiento de funciones analíticas que constituyen el comienzo de un área que se suele denominar Teoría geométrica de funciones. Puede resultar un tanto sorprendente que unos resultados de carácter, aparentemente, cuantitativo como el Teorema de los residuos y su versión especial, la fórmula integral de Cauchy, tengan implicaciones importantes de carácter cualitativo (teoremas de tipo geométrico-topológico que describen el comportamiento de la imagen de un dominio por una función holomorfa).

A continuación veremos que de las pruebas de estos resultados cuantitativos ya conocidos se deduce el Principio del argumento, el primero de los teoremas que vamos a considerar, lo cual nos servirá para probar el Teorema de Rouché, otro de carácter cuantitativo. De él ya obtendremos un resultado puramente cualitativo (métrico-topológico) como es el Teorema de la aplicación abierta para las funciones analíticas. Este resultado nos permitirá deducir otro resultado cualitativo: el Principio del módulo máximo. A partir de éste probaremos el Lema de Schwarz, una herramienta muy útil en la teoría geométrica de funciones. Este último resultado nos permitirá finalmente identifiar las aplicaciones holomorfas y biyectivas del disco sobre sí mismo (llamadas automorfismos del disco). Por tanto, podríamos decir que todos los resultados cualitativos que veremos en estos apuntes son, en el fondo, consecuencias del Teorema de los residuos o de la Fórmula integral de Cauchy.

Principio del argumento. Teorema de Rouché

En esta sección aprenderemos cómo contar el número de ceros que tienen ciertas funciones analíticas en un dominio. Por tanto, estos primeros resultados también tienen un carácter cuantitativo.

Como siempre, usaremos la palabra contorno para describir una curva cerrada y simple, C^1 a trozos. Empezamos con una observación fácil pero relevante que formularemos como lema.

Lema 1. *Sea Ω un dominio en el plano y γ un contorno, contenido en Ω junto con el dominio que acota y orientado positivamente. Si f es una función holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en la traza $\{\gamma\}$, entonces f tiene un número finito de ceros en el dominio D_{int} interior a la traza (el dominio acotado por γ).*

DEMOSTRACIÓN. El cierre del dominio D_{int} es un conjunto cerrado y acotado y, por tanto, compacto. Si f tuviese infinitos ceros distintos en $\overline{D_{\text{int}}}$, digamos $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, por compacidad existiría una subsucesión de los ceros $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente a un punto $c \in \overline{D_{\text{int}}}$. Si el punto c estuviese en D_{int}, por el Principio de los ceros aislados, f sería idénticamente nula, lo cual es imposible (ya que no se anula en la traza de γ). Por tanto, la subsucesión $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ sólo puede converger a un punto $d \in \{\gamma\}$, pero entonces por la continuidad de f obtendríamos $f(d) = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = 0$, lo cual es imposible por las hipótesis sobre f. Contradicción. Por tanto, sólo puede haber una cantidad finita de ceros de f en el dominio interior a γ. ■

Recordemos que cada cero de una función analítica no idénticamente nula tiene un orden finito (multiplicidad finita). Puesto que algunos ceros pueden ser múltiples (de orden mayor que uno), contaremos cada cero teniendo en cuenta su multiplicidad, de manera que, por ejemplo, un cero simple, un cero doble y otro de orden 4 contarán como 7 ceros en total. Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el primer resultado que nos interesa.

Teorema 1 *(Principio del argumento). Sea Ω un dominio en el plano y γ un contorno, contenido en Ω junto con el dominio D_{int} que acota y orientado positivamente. Si f es una función holomorfa en Ω tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en γ y con N ceros en el dominio interior a γ (teniendo en cuenta las multiplicidades), entonces*

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N.}$$

DEMOSTRACIÓN. Ya constatamos en el Lema 1 que f sólo puede tener una cantidad finita de ceros en el dominio interior a γ. Sean esos ceros: a_1 (con multiplicidad m_1), a_2 (con multiplicidad m_2), ..., a_k (con multiplicidad m_k). Por hipótesis, el número total de ceros en el interior de γ es $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = N$.

Recordemos una simple fórmula para la derivada del producto de N funciones, probablemente ya conocida de otras asignaturas. Si $f = f_1 f_2 \ldots f_N$, entonces por la regla del producto obtenemos (en todos los puntos donde f no se anula)

$$f' = f_1' f_2 f_3 \cdots f_m + f_1 f_2' f_3 \cdots f_m + \ldots f_1 f_2 \cdots f_{m-1} f_m'$$

y, por tanto, en los mismos puntos se tiene

$$\frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \ldots + \frac{f_m'}{f_m}$$

Como consecuencia de esta fórmula general, obtendremos una especial para la función holomorfa f que cumple las condiciones del teorema. Teniendo en cuenta los ceros de f en el interior de γ y sus multiplicidades, por uno de los teoremas de la entrega de apuntes sobre los ceros de las funciones analíticas, se sigue que

$$f(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots(z-a_k)^{m_k} g(z),$$

donde g es holomorfa en Ω y no tiene ceros ni en el dominio interior a γ ni en la traza de γ. Por la fórmula anterior para las derivadas, dado que $((z-a_j)^{m_j})' = m_j(z-a_j)^{m_j-1}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m_1 z-a_1)^{m_1-1}}{(z-a_1)^{m_1}} + \frac{m_2(z-a_2)^{m_2-1}}{(z-a_2)^{m_2}} + \ldots + \frac{m_k(z-a_k)^{m_k-1}}{(z-a_k)^{m_k}} + \frac{g'(z)}{g(z)} \\
&= \frac{m_1}{z-a_1} + \frac{m_2}{z-a_2} + \ldots + \frac{m_k}{z-a_k} + \frac{g'(z)}{g(z)},
\end{aligned}$$

para todo $z \in \overline{D_{\text{int}}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Teniendo en cuenta que g no se anula ni en D_{int} ni en la traza de γ y, por tanto, no se anula en el compacto $\overline{D_{\text{int}}}$, usando la continuidad de g podremos identificar para cada punto de $\overline{D_{\text{int}}}$ un disco abierto (pequeño y contenido en Ω) donde g no se anula. Puesto que estos discos recubren el compacto $\overline{D_{\text{int}}}$, podemos extraer un subrecubrimiento finito cuya unión es un dominio D tal que $\overline{D_{\text{int}}} \subset D \subset \Omega$ y g no se anula en D. Por tanto, la función $g'/g \in \mathcal{H}(D)$ y podemos aplicar el Teorema integral de Cauchy a γ para deducir que $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = 0$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{m_1}{z-a_1}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{m_2}{z-a_2}\,dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{m_k}{z-a_k}\,dz = m_1 + m_2 + \ldots m_k = N,$$

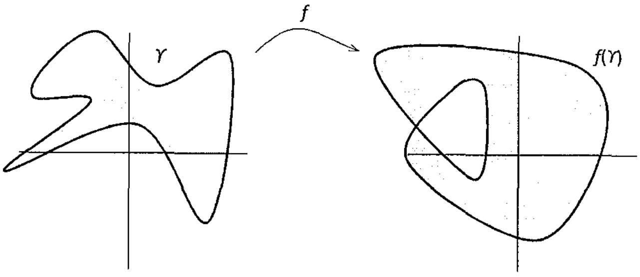
aplicando a cada una de las k integrales la Fórmula integral de Cauchy (con una función constante en el numerador). ■

Observación. ¿Por qué el Teorema 1 se denomina Principio del argumento? Existen para ello razones geométricas que procedemos a explicar. Por razones topológicas obvias, la imagen $f(\gamma)$ de una curva γ, suave a trozos y cerrada, por una función holomorfa f también es una curva suave a trozos y cerrada, así que también se podrá hablar de su índice respecto de distintos puntos. Haciendo el cambio de variable $w = f(z)$, para $z \in \{\gamma\}$, obtenemos $dw = f'(z)\,dz$ y, por tanto,

$\mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(0)$

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w}\,dw = \cancel{\mathrm{Ind}_\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f, \tag{1}$$

donde, como recordaremos de otras entregas de apuntes, $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-0}$ es el índice de la curva γ respecto al origen, es decir, el número de vueltas que da γ alrededor del origen. En la fórmula (1), hemos usado la notación $\Delta_\gamma \arg f$ para denotar la variación total del argumento de punto f a lo largo de γ (el cambio del argumento del punto $f(z)$ cuando z recorre la curva γ), que viene a ser lo mismo que 2π por el número de vueltas que da γ alrededor del origen (siendo, por ejemplo, 2π el cambio de argumento que corresponde a una vuelta en el sentido positivo alrededor del origen). De ahí la última igualdad y el nombre del teorema.

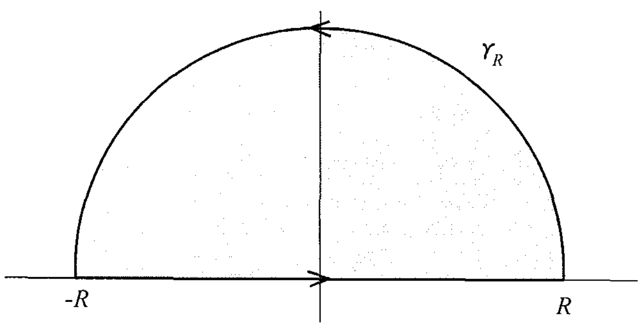


Las aplicaciones del Principio del argumento en problemas suelen ser técnicamente algo más complicadas que las de otros teoremas que veremos a continuación y por eso no están recogidas en los problemas de la hoja correspondiente. No obstante, incluiremos un ejercicio típico (que se puede omitir en una primera lectura).

Ejercicio 1 *Demuestre que el polinomio* $p(z) = z^4 + iz + 1$ *tiene exactamente dos ceros en el semiplano superior* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

SOLUCIÓN. Aplicaremos el método de observar la variación total del argumento de $f(z)$ mientras z recorre la frontera de un dominio "suficientemente grande" y contenido en el semiplano superior. (Otros métodos de solución son posibles.)

Dado que p tiene sólo una cantidad finita de ceros en el plano y, por consiguiente, en el semiplano superior, existe una cota finita para los módulos de sus ceros. Esto significa que para R suficientemente grande, cualquiera que sea un cero de p en el semiplano superior, estará contenido en el dominio interior a la curva γ_R, donde γ_R es una vez más la curva compuesta por el segmento $I_R = [-R, R]$ de la recta real y por la semicircunferencia C_R contenida en el semiplano superior desde el punto R hasta el punto $-R$, orientada en el sentido positivo.



Para ver cuántos ceros puede haber dentro del contorno γ_R, utilizamos el principio del argumento y contamos el número de vueltas que da la curva imagen $p(\gamma_R)$ alrededor del origen.

Para los puntos $z = x \in [-R, R]$ tenemos $p(x) = x^4 + 1 + ix$; es decir, $\operatorname{Re} p(x) \geq 1 > 0$, mientras que la parte imaginaria puede tomar tanto valores positivos como negativos; por tanto, los puntos $p(x)$ están todos en el primer cuadrante y en el cuarto, así que la curva imagen $p(I_R)$ cruza el eje real pero no da ninguna vuelta alrededor del origen (sólo tiene una "pequeña" variación del argumento).

Para los puntos $z \in C_R$, podemos escribir $p(z) = z^4\left(1 + \dfrac{i}{z^3} + \dfrac{1}{z^4}\right)$.
Haciendo $R = |z|$ suficientemente grande, podemos hacer los valores i/z^3 y $1/z^4$ tan próximos a cero como se quiera, así que el valor $p(z)$ será muy próximo al valor z^4. Para $z \in C_R$ tenemos $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, con lo cual $z^4 = R^4 e^{4it}$ y $0 \leq 4t \leq 4\pi$. Dado que el argumento de z^4 cambia desde 0 hasta 4π cuando z recorre la curva C_R, lo mismo pasará con el argumento de $p(z)$, salvo quizás una diferencia muy pequeña que recuperamos moviéndonos por el intervalo I_R, así que en total $p(z)$ da dos vueltas alrededor del origen cuando z recorre la curva γ_R. Según el Principio del argumento, la función p tiene dos ceros en el interior de γ_R. Dado que para R suficientemente grande no hay ceros fuera de γ_R, el número total de ceros de p en el semiplano superior tiene que ser dos. ■

Una consecuencia bastante directa del Principio del argumento es el llamado teorema de Rouché que probaremos a continuación. En lo que sigue, usaremos $N_\gamma(f)$ para denotar el número de ceros que tiene la función f en el dominio interior a un contorno γ.

Teorema 2 *(Teorema de Rouché). Sea Ω un dominio en el plano y γ un contorno contenido en Ω junto con el dominio que acota. Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y satisfacen la desigualdad $|f(z)| > |g(z)|$ para todo z en γ, entonces las funciones f, $f-g$ y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en el dominio interior a γ: $N_\gamma(f) = N_\gamma(f-g) = N_\gamma(f+g)$, contando multiplicidades.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $|-g| = |g|$, basta demostrar que $N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g)$. Entonces se seguirá que $N_\gamma(f) = N_\gamma(f-g)$ aplicando la igualdad anterior al par f y $-g$ en lugar del par f y g.

Veamos, pues, la prueba de $N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g)$. La hipótesis $|f| > |g|$ en $\{\gamma\}$ implica que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \{\gamma\}$. Por tanto, también se cumple $\left|\frac{g}{f}\right| < 1$ en $\{\gamma\}$. Puesto que $|w| = |-w| \geq \operatorname{Re}(-w) = -\operatorname{Re} w$ para todo $w \in \mathbb{C}$, se sigue que $\operatorname{Re} w \geq -|w|$ y, en particular, que $\operatorname{Re}\frac{g}{f} > -1$ en $\{\gamma\}$ y, por tanto,

$$0 < \operatorname{Re}\left(1 + \frac{g}{f}\right) \leq \left|1 + \frac{g}{f}\right| < 2 \qquad \text{en } \{\gamma\}.$$

Esto significa que la curva imagen $\left(1 + \frac{g}{f}\right)(\gamma)$ está completamente ubicada en el semiplano derecho abierto y, por tanto, no da ninguna vuelta alrededor del origen. En otras palabras, el cambio de argumento a lo largo de γ de la función $1 + \frac{g}{f}$ es cero. Observando que el cambio total del argumento del producto es la suma de los cambios del argumento de los factores, vemos que

$$\Delta_\gamma \arg(f+g) = \Delta_\gamma \arg\left(f\left(1 + \frac{g}{f}\right)\right) = \Delta_\gamma \arg f + \Delta_\gamma \arg\left(1 + \frac{g}{f}\right) = \Delta_\gamma \arg f.$$

Según la observación después del Teorema 2 y la fórmula (1), se sigue que $N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g)$. ■

El siguiente ejercicio ilustra el uso del Teorema de Rouché en la práctica y es uno de los tipos de problemas muy comunes en los exámenes de Variable Compleja en todas partes.

Ejercicio 2 *Halle el número de soluciones de la ecuación* $3z^4+7z^3-z+2=0$ *en el disco unidad* $\mathbb{D}$ *y en su exterior* $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|>1\}$.

SOLUCIÓN. Lo que buscamos es el número de ceros de la función $f+g$ en el interior de la circunferencia unidad, $\gamma=\{z:\ |z|=1\}$, donde $f(z)=7z^3$ y $g(z)=3z^4-z+2$. Ambas son enteras y en $\{\gamma\}$ satisfacen la desigualdad

$$|f(z)|=7>6\ge 3|z|^4+|-z|+2\ge|3z^4-z+2|=|g(z)|$$

debido a la desigualdad triangular. Por tanto, tenemos en γ la desigualdad estricta $|f(z)|>|g(z)|$ y podemos aplicar el Teorema de Rouché: el número de ceros de la función $(f+g)(z)=3z^4+7z^3-z+2$ en el disco unidad $\mathbb{D}$ es igual al de la función f. Ya sabemos que éste es igual a 3, teniendo en cuenta las multiplicidades. Por tanto, la función $f+g$ tiene 3 ceros en $\mathbb{D}$.

Al ser un polinomio de grado 4, la función $f+g$ tiene 4 ceros en el plano, contando las multiplicidades. Es fácil ver que no tiene ningún cero en la circunferencia unidad $\gamma=\partial\mathbb{D}$; esto se sigue de la desigualdad demostrada arriba y la desigualdad triangular: $|f+g|\ge|f|-|g|>0$ en γ. Por tanto, sólo tiene un cero en el exterior del disco.

Ejercicio 3 *Sea* Ω *un dominio plano que contiene al disco unidad,* $\mathbb{D}$ *y* f *una función holomorfa en* Ω *tal que* $|f(z)|<1$ *para todo* z *que cumple* $|z|=1$. *Demuestre que* f *tiene en* $\mathbb{D}$ *exactamente un punto fijo (un punto a tal que* $f(a)=a$*).*

SOLUCIÓN. Decir que a es un punto fijo de f es equivalente a decir que a es una solución de la ecuación $z-f(z)=0$. El Teorema de Rouché nos ayudará a contar el número de ceros de esta función en $\mathbb{D}$. Dado que en la circunferencia unidad las funciones f y z, ambas holomorfas en Ω, cumplen la desigualdad estricta $|f(z)|<1=|z|$, se sigue por Rouché que $z-f(z)$ tiene en $\mathbb{D}$ el mismo número de ceros que la función identidad, que es exactamente uno. ■

Observación. Es importante notar que la desigualdad en las condiciones del Teorema de Rouché: $|f(z)|>|g(z)|$ tiene que ser estricta. El enunciado sería falso con la hipótesis $|f(z)|\ge|g(z)|$. Conviene pensar en un ejemplo. (Nótese que las aplicaciones del teorema con esta desigualdad más débil suelen ser un error tradicional en los exámenes de desarrollo.)

Teorema de la aplicación abierta. Principio del módulo máximo

En esta sección abordamos un par de aplicaciones cualitativas fundamentales del del teorema de Rouché (y, por ende, de los teoremas integrales vistos antes). En Topología vimos el concepto de una aplicación abierta y ahora veremos que Variable Compleja nos proporciona una cantidad abundante de ejemplos de tales aplicaciones: ¡todas las funciones holomorfas no constantes! Por supuesto, seguimos trabajando con la topología usual del plano.

Teorema 3 *(Teorema de la aplicación abierta). Sea* Ω *un dominio en el plano y* f *una función holomorfa en* Ω. *Entonces bien* f *es constante, bien es una aplicación abierta: para todo* $U\subset\Omega$ *abierto en el plano, el conjunto* $f(U)$ *es también abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f no es constante y veamos que es una aplicación abierta. Sea $U \subset \Omega$ un abierto y $b \in f(U)$ un punto arbitrario. Hemos de ver que b es un punto interior de $f(U)$; en otras palabras, que existe $\delta > 0$ tal que $D(b;\delta) \subset f(\Omega)$.

Puesto que $b \in f(U)$, existe $a \in U$ tal que $b = f(a)$. El razonamiento que sigue suele usarse con frecuencia en la teoría geométrica de funciones y conviene analizarlo y recordarlo. Sea $g(z) = f(z) - b$. Entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(a) = 0$ y g no es idénticamente nula, puesto que $f \not\equiv b$. Sea m el orden del cero $z = a$ de la función g (de los apuntes sobre los ceros, sabemos que es un número natural). Por el Principio de los ceros aislados, existe un disco abierto centrado en a que no contiene otros ceros de g aparte de a. Reduciendo su radio si fuese necesario, obtenemos un $r > 0$ tal que $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}(a;r) \setminus \{a\}$. Enseguida veremos por qué nos interesa tener un disco cerrado contenido en Ω en lugar de un disco abierto. Lo que sigue también forma parte del razonamiento típico al que aludimos.

Consideremos la circunferencia $C = \{z : |z - a| = r\}$, el borde del disco fijado. Sea $\delta = \min\{|g(z)| : z \in C\}$. El mínimo se alcanza al ser $|g|$ una función continua en Ω y $C \subset \Omega$ un conjunto compacto. Además, $\delta > 0$ porque la función $|g|$ no se anula en la circunferencia C (por eso necesitabamos un disco cerrado). Veremos a continuación que el número δ fijado es el δ que buscamos desde el comienzo de la prueba, demostrando que $D(b;\delta) \subset f(\Omega)$.

Basta ver que, para todo $w \in D(b;\delta)$ se tiene $w \in f(\Omega)$. Sea $w \in D(b;\delta)$ arbitrario; entonces $|w - b| < \delta$. Ahora viene un truco muy típico: para todo $z \in C$ obtenemos

$$|g(z)| \geq \delta > |w - b| = |(f(z) - b) - (f(z) - w)| = |g(z) - (f(z) - w)|.$$

Acabamos de ver que en la curva C, una función holomorfa g tiene módulo estrictamente más grande que otra, $g - (f - w)$. Por el Teorema de Rouché, en el interior de C, que es el disco abierto $D(a;\delta)$, la función más grande, g, tiene el mismo número de ceros que la diferencia de las dos: $g - [g - (f - w)] = f - w$. Pero la función g tiene, por lo menos, m ceros allí (teniendo en cuenta las multiplicidades), siendo $m \geq 1$. Por tanto, $f(z) - w$ tiene en el mismo disco, al menos, un cero, lo cual quiere decir que $w = f(z)$ para, al menos un punto $z \in D(a;\delta)$. Y eso significa que $w \in f(\Omega)$. El teorema queda demostrado. ■

Observación. Un razonamiento muy análogo al que acabamos de ver en la demostración del Teorema 3 se usa para probar, por ejemplo, que si una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es inyectiva en Ω, entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Y también para probar un recíproco parcial: si $f'(z) \neq 0$ para un punto $z \in \Omega$, entonces f es inyectiva en un entorno abierto del punto z. No podemos ver estos resultados ahora pero se podrán ver en el curso optativo de Variable Compleja II. En el curso 2020-21 lo impartirá el profesor José L. Fernández quien, aunque lleva casi dos décadas dedicándose a las diversas aplicaciones de Combinatoria y Probabilidad (por ejemplo, en Matemática Financiera o en Variable Compleja), en los años 90 estaba reconocido como uno de los máximos expertos mundiales en el campo de la Teoría geométrica de funciones.

El siguiente ejemplo debe compararse con algunos ejercicios de las hojas de problemas del principio del curso, donde vimos que, por ejemplo, una función holomorfa no puede tomar sólo valores reales sin ser constante.

Ejercicio 4. *Explique razonadamente por qué, si f es holomorfa en un dominio $\Omega \neq \emptyset$, es imposible que $f(\Omega) = \mathbb{R}$ o que $f(\Omega) = \overline{\Omega}$ (cuando $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}$).*

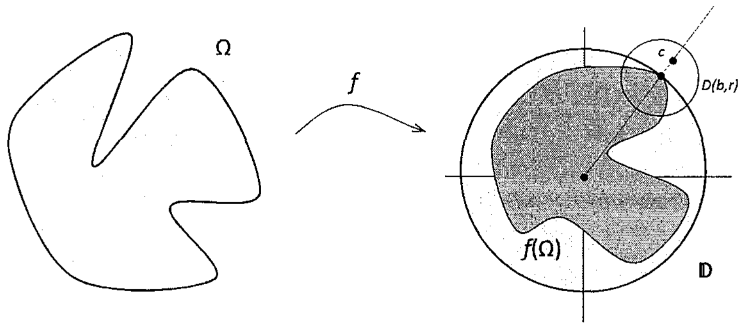
SOLUCIÓN. El conjunto $\mathbb{R}$ no es abierto en $\mathbb{C}$ ya ningún disco puede estar contenido en $\mathbb{R}$. Según el Teorema de la aplicación abierta, sabemos que o bien f es abierta, en cuyo caso $f(\Omega)$ es abierto y no puede ser $\mathbb{R}$, o bien es constante, en cuyo caso $f(\Omega)$ es un conjunto que consiste en un único punto y tampoco puede ser $= \mathbb{R}$.

El razonamiento es análogo para $\overline{\Omega}$: es un conjunto cerrado. Los únicos subconjuntos de $\mathbb{C}$ que son abiertos y cerrados a la vez son el $\emptyset$ y $\mathbb{C}$; al ser $\overline{\Omega}$ distinto de ambos, no puede ser abierto. Luego, por el Teorema de la aplicación abierta, $f(\Omega) \neq \overline{\Omega}$, salvo que f sea constante: $f \equiv c$, pero en ese caso obtenemos $f(\Omega) = \{c\} \neq \overline{\Omega}$ (nótese que Ω contiene un disco). ■

En los enunciados de varios teoremas aparecen ciertas desigualdades (acotaciones) para las funciones analíticas consideradas. En unos textos esas desigualdades se escriben como estrictas y en otros no. El siguiente ejercicio nos explica por qué es irrelevante cómo se escriben (siempre y cuando f no sea constante, que suele ser un caso trivial).

Ejercicio 5. *Demuestre la siguiente afirmación. Si f es holomorfa y no constante en un dominio Ω donde cumple $|f(z)| \leq 1$ entonces, de hecho, $|f(z)| < 1$ en Ω.*

SOLUCIÓN. ■



Supongamos que $|f(a)| = 1$ para cierto $a \in \Omega$. Sea $b = f(a)$. Puesto que f no es constante, es una aplicación abierta y, por tanto, $f(\Omega)$ es un conjunto abierto. Dado que $b \in f(\Omega)$, existe un radio $r > 0$ tal que el disco abierto $D(b;r) = \{z : |w - b| < r\}$ está contenido en $f(\Omega)$. Teniendo en cuenta que $|b| = 1$, es obvio que el disco $D(b;r)$ contiene un punto c tal que $|c| > 1$; por ejemplo, podemos tomar $c = (1 + \frac{r}{2|b|})b$ ya que $|b - c| = \frac{r}{2} < r$. Pero $c \in D(b;r) \subset f(\Omega)$ así que $c = f(z)$ para cierto $z \in \Omega$ y $|f(z)| = |c| = |b| + \frac{r}{2} = 1 + \frac{r}{2} > 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis de que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, concluimos que $|f(z)| < 1$ para todo z en Ω. ■

El razonamiento que acabamos de ver en el Ejercicio 5 es, esencialmente, el procedimiento que se usa para demostrar el siguiente imporante teorema, otro de los pilares del análisis complejo.

Teorema 4 *(Principio del módulo máximo, primera versión). Sea Ω un dominio en el plano y f una función holomorfa en Ω. Si $|f|$ alcanza su máximo en un punto del dominio Ω, entonces f es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Una vez visto el Ejercicio 5, la demostración es inmediata. Si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$, entonces la función $g = f/M$ cumple las condiciones del ejercicio mencionado. Por tanto, si g (o, equivalentemente, f) no es constante, se cumple, de hecho, $|g(z)| < 1$, es decir, $|f(z)| < M$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, $|f|$ no alcanza su máximo en Ω, salvo que sea constante. ■

Observaciones. (1) Dicho en un lenguaje menos formal, el Principio del módulo máximo nos indica que la gráfica de la función $|f| : \Omega \to \mathbb{R}$, vista como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se erige sobre el dominio Ω en el plano, es un "paisaje sin picos".

(2) Es importante notar que sí puede haber "valles" porque no tenemos un "Principio del módulo mínimo", al menos no uno calcado al Principio del módulo máximo (sin condiciones adicionales). Por ejemplo, la función

$f(z) = z$ que, obviamente, cumple $|f(z)| = |z| \geq 0$, alcanza su módulo mínimo (cero) en el disco unidad, y precisamente en el origen.

Para las funciones que tienen unas propiedades más fuertes, existe una formulación algo diferente del principio del módulo máximo. El siguiente teorema se refiere al caso cuando f, aparte de ser holomorfa en un dominio acotado Ω, es también continua en la clausura de Ω y nos aporta más: no sólo nos dice que la función no alcanza su módulo máximo en el dominio sino que lo alcanza obligatoriamente en la frontera del dominio.

Teorema 5 *(Principio del módulo máximo, segunda versión). Sea Ω un dominio acotado en el plano y f una función holomorfa en Ω y continua en su cierre $\overline{\Omega}$. Entonces*

$$\boxed{\max_{\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{\partial\Omega} |f(z)|.}$$

Es decir, el módulo máximo en este caso sólo se puede alcanzar en el borde del dominio si f no es constante. (Si es constante, se alcanza trivialmente en todo $\overline{\Omega}$.)

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que, al ser continua, la función $|f|$ alcanza su máximo en el conjunto compacto $\overline{\Omega}$. Si f no es constante, según el Teorema 4, el módulo máximo no se puede alcanzar en Ω y, por tanto, se tiene que alcanzar en $\partial\Omega$. ■

Observación. Conviene notar que este resultado nos dice que si f es holomorfa en Ω, un dominio acotado, y continua en su cierre $\overline{\Omega}$ y $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \partial\Omega$, entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$. Usaremos este detalle con frecuencia.

El siguiente ejercicio es un obvio modelo de pregunta de tipo test para un examen de esas características.

Ejercicio 6. *Sea $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ el disco unidad y $\overline{\mathbb{D}}$ su cierre. Sea f una función no constante, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. Sólo una de las siguientes situaciones es posible. ¿Cuál de ellas?*

(a) $|f| \leq 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = -3$;
(b) $|f| \leq 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(1) = 3$;
(c) $|f| \leq 3$ en $\overline{\mathbb{D}}$, $f(0) = 3(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})$;
(d) Se cumple $f(1/2) = 4$; ademas, si $x^2 + y^2 = 1$ entonces $|f(x + iy)| = 3$.

SOLUCIÓN. Dado que f no es constante, debe alcanzar su máximo en el borde del dominio. En las condiciones (a) y (c), la función está acotada por 3 en módulo pero sus valores en los puntos indicados en el dominio también son números de módulo 3, lo cual contradice al Principio del módulo máximo (su segunda versión, Teorema 5). En el apartado (d), la situación es aún peor porque la segunda condición implica que $|f| \leq 3$ en todo el disco (también por el Teorema 5) pero en un punto en el interior tiene módulo 4, lo cual es imposible.

Sin embargo, la situación indicada en (b) es posible, siendo el punto $z = 1$ un punto del borde del dominio. Un ejemplo concreto sería la función $f(z) = z + 2$ que cumple las condiciones del apartado (b). ■

El siguiente ejercicio require un manejo delicado. Debido a su carácter "teórico", también se puede omitir en una primera lectura.

Ejercicio 7. *Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $|f(z)| \leq 1 - |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces $f \equiv 0$.*

SOLUCIÓN. Si f es constante, digamos $f \equiv C$, entonces $|C| \le 1 - |z|$ para todo z en $\mathbb{D}$. Dejando que $|z| \to 1^-$, obtenemos $|C| \le 0$ y se deduce que $C = 0$, lo cual prueba la afirmación del problema.

Nos queda ver que es imposible el caso de una función f no constante. La idea principal consiste en demostrar que, bajo las hipótesis del problema, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Dejando que $\varepsilon \to 0^+$, esto implicará que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}$, lo cual estará en contradicción con nuestras hipótesis. Para completar esta reducción al absurdo, sólo nos queda hacer demostrar de forma rigurosa la afirmación "para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $|f(z)| < \varepsilon$".

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si $|z| > 1 - \varepsilon$, entonces por las hipótesis del problema, $|f(z)| \le 1 - |z| < \varepsilon$. Veamos qué es lo que ocurre en el resto del disco, es decir, cuando $|z| \le 1 - \varepsilon$. El conjunto $K_\varepsilon = \{z : |z| \le 1 - \varepsilon\}$ es cerrado y acotado y, por tanto, compacto así que la función continua $|f|$ alcanza en él su máximo:

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

para cierto $z_0 \in K_\varepsilon$. Si este máximo fuera $\ge \varepsilon$, entonces el módulo máximo de $|f|$ en $\mathbb{D}$ sería justo $|f(z_0)|$ ya que en el resto f tiene módulo menor que ε. Pero el Principio del módulo máximo (su primera versión, Teorema 4, ya que la función no está definida en el borde de $\mathbb{D}$) nos dice que una función holomorfa y no constante no puede alcanzar su módulo máximo en un punto del dominio (en este caso, no puede hacerlo en z_0). Por lo tanto, se sigue que

$$\max_{K_\varepsilon} |f(z)| < \varepsilon,$$

así que $|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto completa la demostración. ■

Lema de Schwarz. Automorfismos del disco

Lema de Schwarz. El siguiente resultado es una consecuencia del Principio del módulo máximo y resulta muy útil en la teoría de funciones analíticas en el disco unidad.

Teorema 6 *(Lema de Schwarz). Sea f una función holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, que cumple las siguientes condiciones: $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le 1$ para todo z en $\mathbb{D}$. Entonces:*

(a) $|f(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

(b) $|f'(0)| \le 1$.

Si se cumple la igualdad en (a) para un $z \ne 0$ o en (b), entonces f es una rotación: $f(z) = \lambda z$ para cierto número λ tal que $|\lambda| = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que por hipotesis $f(0) = 0$, al ser f diferenciable en el origen, se sigue que

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0).$$

Consideremos la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{si } 0 < |z| < 1, \\ f'(0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Obviamente, g tiene una singularidad evitable en el origen (es holomorfa en $\mathbb{D}$ salvo en $z = 0$ y allí tiene límite finito). Por el Teorema de la singularidad evitable de Riemann, $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$.

Sea r un valor arbitrario tal que $0 < r < 1$ y consideremos un w arbitrario con $|w| = r$. Entonces

$$|g(w)| = \frac{|f(w)|}{r} \le \frac{1}{r}.$$

Por el Teorema 5, se sigue que $|g(z)| \le \frac{1}{r}$, para todo z con $|z| \le r$.

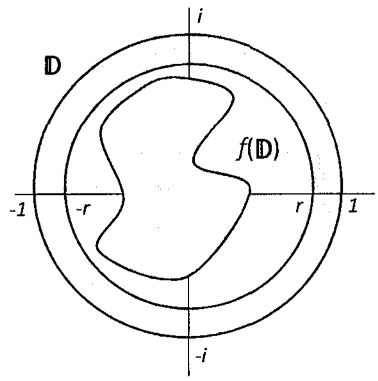
Puesto que para cualquier $z \in \mathbb{D}$ fijo podemos encontrar un $r \in (0,1)$ tal que $|z| \le r$, por lo expuesto tendremos también $|g(z)| \le \frac{1}{r}$. Manteniendo z fijo y dejando que $r \to 1^-$, se sigue que $|g(z)| \le 1$. Puesto que esto se cumple para $z \in \mathbb{D}$ arbitrario, se sigue que $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces, por la definición de g, se tiene la desigualdad $|f(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Para $z = 0$ se cumple lo mismo por hipótesis: $f(0) = 0$. Esto demuestra el apartado (a).

(b) Tanto si se cumple la igualdad en (a) para un $z \neq 0$: $|f(z)| = |z|$ (es decir, $|g(z)| = 1$) o se cumple en (b): $|f'(0)| = |g(0)| = 1$, concluimos que $|g|$ alcanza su máximo en un punto en $\mathbb{D}$. Por el Teorema 4, se sigue que g es constante, digamos $g \equiv \lambda$, con $|\lambda| = 1$. Por tanto, $f(z) = \lambda z$, para el mismo valor λ. ■

Observaciones. (1) Debido al resultado del Ejercicio 5, la hipótesis "$|f(z)| \le 1$ para todo z en $\mathbb{D}$" en el Lema de Schwarz es equivalente a la aparentemente más fuerte "$|f(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{D}$". Por eso con frecuencia también enunciamos el Lema de Schwarz tomando como hipótesis $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ (es decir, si $|z| < 1$, entonces $|f(z)| < 1$) pero es absolutamente indiferente cuál de las dos formulaciones se elige.

(2) Recordemos que, geométricamente, la multiplicación de un número complejo por una constante fija de módulo uno no altera su módulo, sólo su arguménto, sumándole un valor fijo. Por tanto, la función de multiplicación $z \mapsto \lambda z$, con $|\lambda| = 1$, representa una rotación en el plano.

(3) Obsérvese que el Lema de Schwarz es un "principio de automejora": sabiendo que una función holomorfa está acotada por uno (y algo más), concluimos que automáticamente, en cada punto z, está acotada por una cantidad inferior a uno, a saber, por $|z|$. Eso también nos dice que, para cualquier función holomorfa, acotada por uno y que fija el origen, la imagen de un disco de radio r y centrado en el origen está estrictamente contenida en el mismo disco de radio r, sin tocar su borde (o sea, tal f es contractiva en un sentido estricto). Véase la figura abajo.



Ejercicio 8. *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le |z+3/2|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Demuéstrese que $|f(1/2)| \le 1$ y hállense todas las funciones para las que se cumple la igualdad.*

SOLUCIÓN. Consideremos la función auxiliar

$$g(z) = \frac{f(z)}{z+3/2}.$$

Dado que $z \neq -3/2$ para todo $z \in \mathbb{D}$, g es holomorfa en $\mathbb{D}$ y, por hipótesis, cumple $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, $g(0) = 0$, así que podemos aplicar el Lema de Schwarz a esta función para deducir que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir, $|f(z)| \le |z||z+3/2|$. En particular, para $z = 1/2$, se obtiene que $|f(1/2)| \le 1$.

Si se cumple la igualdad en $|f(1/2)| \le 1$, esto significa que $|g(1/2)| = 1/2$ y, por tanto, tenemos la igualdad en el Lema de Schwarz. Sabemos que esto sólo es posible cuando $g(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$, es decir, cuando $f(z) = \lambda z(z+3/2)$, $|\lambda| = 1$. ■

Ejercicio 9. *Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y cumple la desigualdad $|zf(z)| \le e^{\operatorname{Im} z}$ en $\mathbb{D}$. Demuestre que entonces se tiene la desigualdad más fuerte $|f(z)| \le e^{\operatorname{Im} z}$ en $\mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. (Conviene observar que la desigualdad es más fuerte porque $|zf(z)| \le |f(z)|$ en $\mathbb{D}$.)

Consideremos la función g dada por $g(z) = zf(z)e^{-z}$. Es obvio que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y, por hipótesis, $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, puesto que $|e^z| = e^{\operatorname{Im} z}$. Por el Lema de Schwarz se sigue que $|g(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, $|g(z)| \le 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Es decir, $|zf(z)| \le |z|e^{\operatorname{Im} z}$ en $\mathbb{D}$ y, por tanto, $|f(z)| \le e^{\operatorname{Im} z}$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. La desigualdad para $z = 0$ se sigue por continuidad, pasando al límite cuando $z \to 0$. ■

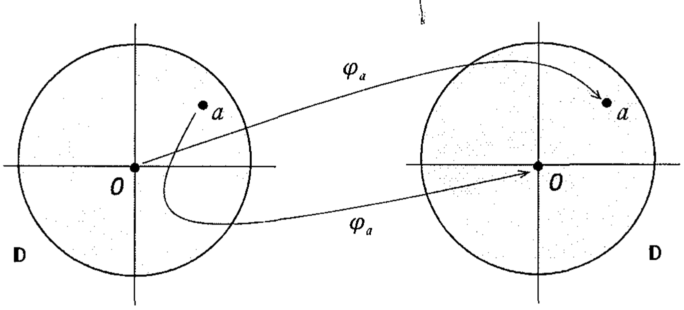
Automorfismos del disco. Este año no podremos cubrir el tema de las aplicaciones conformes en su integridad pero, al menos, veremos unos elementos mínimos a través del estudio de los automorfismos del disco. Dado un dominio Ω en el plano y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, diremos que f es un automorfismo de Ω si f es, además, una función biyectiva.

En Variable Compleja es posible carácterizar todos los automorfismos de ciertos dominios planos. El caso más básico es el de los automorfismos del disco. Ya hemos desarrollado suficientes herramientas para ocuparnos de este caso. Empezaremos con algunos ejemplos, uno obvio y el otro conocido de la primera hoja de problemas de este curso (aunque el enunciado no se llegó a formular en estos términos).

Ejemplo 1. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. La rotación R_λ, definida en el disco unidad $\mathbb{D}$ como $R_\lambda(z) = \lambda z$, es un automorfismo de $\mathbb{D}$: obviamente, es holomorfa en el disco y es fácil comprobar que es tanto inyectiva como suprayectiva: por ejemplo, dado w con $|w| < 1$, existe $z \in \mathbb{D}$ tal que $R_\lambda(z) = w$, a saber, $z = \overline{\lambda} w$ (recordemos que $1 = |\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda}$), lo cual muestra que es sobreyectiva.*

Ejercicio 10. *Sea $a \in \mathbb{D}$ y definamos la función φ_a en $\mathbb{D}$ como $\varphi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$. Entonces φ_a es un automorfismo de $\mathbb{D}$. Además, φ_a tiene las siguientes propiedades: $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$ (intercambia el origen y el punto a, es una involución: $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Además,*

$$\varphi_a'(z) = -\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}, \qquad \varphi_a'(a) = -\frac{1}{1-|a|^2}. \tag{2}$$



SOLUCIÓN. Veamos primero que $\varphi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Debido a la cancelación del término $2\operatorname{Re}\{\overline{a}z\}$, tenemos que

$$1-|\varphi_a(z)|^2 = 1-\frac{|a-z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{|1-\overline{a}z|^2-|a-z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{1+|az|^2-|a|^2-|z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Dado que el denominador es positivo y $1-|a|^2 > 0$, se sigue que

$$|\varphi_a(z)| < 1 \iff 1-|\varphi_a(z)|^2 > 0 \iff 1-|z|^2 > 0 \iff |z| < 1.$$

Esto nos dice que $\varphi_a(z) \in \mathbb{D}$ si y sólo si $z \in \mathbb{D}$; en particular, $\varphi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Puede comprobarse directamente que $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$. Es decir, φ_a es su propia inversa o lo que llamamos una *involución*. Por tanto, para cada $w \in \mathbb{D}$, el punto $\varphi_a(w) \in \mathbb{D}$ es su preimagen por φ_a, así que φ_a es supra-yectiva: $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Sabiendo que φ_a es una involución, es fácil ver que φ_a es inyectiva porque de la condición $\varphi_a(z) = \varphi_a(w)$ se sigue que

$$z = \varphi_a(\varphi_a(z)) = \varphi_a(\varphi_a(w)) = w.$$

Por supuesto, esto se puede comprobar también directamente. Lo dejamos como ejercicio fácil.

Las fórmulas (2) para la derivada se comprueban de forma rutinaria. ■

Observación. Es fácil ver que la composición de dos automorfismos es un automorfismo (de hecho, puede verse que los automorfismos forman un grupo respecto a la operación de composición). Por lo expuesto, toda transformación de la forma

$$\boxed{f(z) = \lambda\varphi_a(z) = (R_\lambda \circ \varphi_a)(z), \quad |a| < 1, \quad |\lambda| = 1,} \tag{3}$$

es un automorfismo del disco. Dejamos como un ejercicio fácil comprobar que la composición en el orden inverso, $\varphi_a \circ R_\lambda$ también tiene la misma forma, $R_\mu \circ \varphi_b$, para ciertos μ con $|\mu| = 1$ y $b \in \mathbb{D}$ convenientemente elegidos. Ahora veremos que no existe ningún otro tipo de automorfismo del disco.

Teorema 7. *Todo automorfismo del disco unidad* $\mathbb{D}$ *es de la forma* (3) *para ciertos* a *y* λ *con* $|\lambda| = 1$ *y* $|a| < 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea f un automorfismo de $\mathbb{D}$. Para demostrar que tiene la forma que se afirma en el teorema, buscamos el único cero posible de f. Puesto que $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es sobreyectiva, existe $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$. Consideremos la composición $g = f \circ \varphi_a$. (Esta técnica es muy común y conviene tenerla en cuenta para sus aplicaciones en diversos ejercicios donde se "mueven" los puntos en el disco de forma conveniente.) Entonces $g \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y, además, $g(0) = f(\varphi_a(0)) = f(a) = 0$. Por tanto, g cumple las condiciones del Lema de Schwarz. Por tanto, $|g'(0)| \le 1$.

Puesto que g es un automorfismo del disco, es inmediato que su función inversa $h = g^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ también lo es. Es claro que h es biyectiva pero ¿por qué es holomorfa en $\mathbb{D}$? Porque así nos lo dice el Teorema de la aplicación inversa visto antes (y, para poder aplicarlo, necesitamos otro teorema no visto pero mencionado en estos apuntes: la derivada de una función holomorfa e inyectiva no se anula). Puesto que $h(0) = 0$, aplicando de nuevo el Lema de Schwarz se sigue que $|h'(0)| \le 1$. Por el Teorema de la aplicación inversa,

$$1 \ge |h'(0)| = \left|\frac{1}{g'(0)}\right|,$$

luego $|g'(0)| = 1$, así que se cumple la igualdad en Schwarz. Por tanto, g es una rotación: $g(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$, es decir, $f(\varphi_a(z)) = \lambda z$. Puesto que φ_a es una involución, aplicando la última fórmula a $\varphi_a(z)$ en lugar de z, obtenemos

$$f(z) = f(\varphi_a(\varphi_a(z))) = \lambda\varphi_a(z). \qquad ■$$

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20, con la ayuda técnica del Prof. José Pedro Moreno