HOJA DE EJERCICIOS 1: Lógica proposicional EDyL 2014-2015

[Fecha de publicación: 2014/09/15]
[Fecha de entrega: 2014/09/25, 09:00]
[Resolución en clase: 2014/09/25]

NOTA: Incluye explicaciones para tus respuestas. Un ejercicio cuya respuesta es correcta, pero que no incluye explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 1: Transforma la siguiente FBF a forma normal conjuntiva (FNC) indicando las reglas de equivalencia utilizadas. Una vez en FNC, determina si es UNSAT, tautología o SAT sin ser tautología.

$(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \lor ((p \land q) \Rightarrow r)$

$\equiv (p \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \land (r \Rightarrow q))) \lor ((p \land q) \Rightarrow r))$ [ELIM. $\Leftrightarrow$]

$\equiv (\neg p \lor ((\neg q \lor r) \land (\neg r \lor q))) \lor (\neg(p \land q) \lor r))$ [ELIM. $\Rightarrow$]

$\equiv (\neg p \lor ((\neg q \lor r) \land (\neg r \lor q))) \lor (\neg p \lor \neg q \lor r))$ [INTRO $\neg$]

$\equiv \neg p \lor (\neg q \land \neg r) \lor (q \land r) \lor \neg q \lor r$ [distributiva + simpl.]

$\equiv \neg p \lor \neg q \lor r$

SAT, pero no tautología

EJERCICIO 2 (2 puntos): Utilizando directamente tablas de verdad (<u>no está permitido utilizar reglas de equivalencia</u>):

(1) Determinar el número de interpretaciones posibles

(2) Determinar el número de interpretaciones que son modelo

(3) Especificad todas las interpretaciones, indicando las que son modelo

para la siguiente fórmula bien formada

	Nº de interpretaciones	Nº de modelos
$(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \vee ((p \wedge q) \Rightarrow r)$	**8**	**7**

p	q	r		$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$		$(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \vee ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
V	V	V		V	V		V
V	V	F		F	F		F
V	F	V		F	V		V
V	F	F		V	V		V
F	V	V		V	V		V
F	V	F		V	V		V
F	F	V		V	V		V
F	F	F		V	V		V

EJERCICIO 3: Determina si la FBF Z es consecuencia lógica de la base de conocimiento Δ = {X $\vee$ Y, X $\Rightarrow$ Z, Y $\Rightarrow$ Z}

(i) Utilizando tablas de verdad:
   a. Indicad en la tabla de verdad las interpretaciones que son modelo de la base de conocimiento.
   b. ¿se cumple {X $\vee$ Y, X $\Rightarrow$ Z, Y $\Rightarrow$ Z} $\models$ Z ?

(ii) Utilizando inferencia (incluyendo resolución):
¿Se cumple {X $\vee$ Y, X $\Rightarrow$ Z, Y $\Rightarrow$ Z} $\vdash$ Z ?
Se puede utilizar cualquier método de demostración válido, incluyendo refutación.

SOLUCIÓN:

(i) Utilizando tablas de verdad

	Átomos				Base de conocimiento				FBF
	X	Y	Z		X $\vee$ Y	X $\Rightarrow$ Z $\equiv$ $\neg$X $\vee$ Z	Y $\Rightarrow$ Z $\equiv$ $\neg$Y $\vee$ Z		Z
I_1	F	F	F		F	T	T		
I_2	F	F	T		F	T	T		
I_3	F	T	F		T	T	F		
I_4	F	T	T		T	T	T		T
I_5	T	F	F		T	F	T		
I_6	T	F	T		T	T	T		T
I_7	T	T	F		T	F	F		
I_8	T	T	T		T	T	T		T

Modelos: I_4, I_6, I_8

Se cumple **{X $\vee$ Y, X $\Rightarrow$ Z, Y $\Rightarrow$ Z} $\models$ Z**

(ii) Utilizando refutación

X $\vee$ Y [1]
X $\Rightarrow$ Z$\equiv\neg$X $\vee$ Z [2]
Y$\Rightarrow$ Z$\equiv\neg$Y$\vee$ Z [3]
$\neg$Z [4] (negación de la meta)

[4] + [2] $\vdash_{\text{RES en Z}}$ $\neg$X [5]
[4] + [3] $\vdash_{\text{RES en Z}}$ $\neg$Y [6]
[5] + [1] $\vdash_{\text{RES en X}}$ Y [7]

$[6] + [7] \vdash_{RES\ en\ Y}$ □ [8]

Tras haber introducido la negación de la meta y aplicando inferencia, se llega a la cláusula vacía.
Por lo tanto, $\{X \vee Y, X \Rightarrow Z, Y \Rightarrow Z\} \vdash Z$

EJERCICIO 4: Paseando, oímos por azar la siguiente conversación entre un chico y una chica:

A dice: “Soy un chico”

B replica: “Soy una chica”

Sabemos que al menos uno de los dos miente. Vamos a determinar quién es el chico y quién es la chica utilizando lógica formal.

(i) Determina los átomos que son necesarios para resolver el problema, indicando su denotación.

Para átomos que se refieran a A, utiliza los símbolos: A, AA, AAA,…
Para átomos que se refieran a B, utiliza los símbolos: B, BB, BBB,…

Utiliza tantas filas de la tabla como sean necesarias.

SÍMBOLO	DENOTACIÓN
A	“A es una chica” (¬A: “A es un chico”)
B	“B es una chica” (¬B: “B es un chico”)
AA	“A dice la verdad” (¬AA: “A miente”)
BB	“B dice la verdad” (¬BB: “B miente”)

(ii) Formaliza la base de conocimiento

$AA \Leftrightarrow \neg A$[1]		"A dice la verdad sii es un chico"
$BB \Leftrightarrow B$	[2]	"B dice la verdad sii es un chica"
$A \Leftrightarrow \neg B$	[3]	"La conversación es entre un chico y una chica"
$\neg AA \vee \neg BB$	[4]:	"Al menos uno de los dos miente"

(iii) Determina quién es una chica, quién es un chico y quién o quiénes mienten. Resuelve el puzle mediante lógica formal utilizando cualquier método de demostración válido (por prueba directa, mediante refutación, etc.). No se puede emplear razonamiento semiformal, tablas de verdad o razonamiento por casos. Se debe utilizar únicamente inferencia, incluyendo resolución. Identifica la regla de inferencia empleada en cada paso.

$AA \Leftrightarrow \neg A \equiv (AA \Rightarrow \neg A) \wedge (\neg A \Rightarrow AA)$ [1] [Def. $\Leftrightarrow$ + $\wedge$elimination]

$AA \Rightarrow \neg A \equiv \neg AA \vee \neg A$ [1.1] [Def. $\Rightarrow$]

$\neg A \Rightarrow AA \equiv A \vee AA$ [1.2] [Def. $\Rightarrow$ + $\neg\neg$ elimin.]

$BB \Leftrightarrow B \equiv (BB \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow BB)$ [2] [Def. $\Leftrightarrow$ + $\wedge$elimination]

$BB \Rightarrow B \equiv \neg BB \vee B$ [2.1] [Def. $\Rightarrow$]

$B \Rightarrow BB \equiv \neg B \vee BB$ [2.2] [Def. $\Rightarrow$]

$A \Leftrightarrow \neg B \equiv (A \Rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \Rightarrow A)$ [3] [Def. $\Leftrightarrow$ + $\wedge$elimination]

$A \Rightarrow \neg B \equiv \neg A \vee \neg B$ [3.1] [Def. $\Rightarrow$]

$\neg B \Rightarrow A \equiv B \vee A$ [3.2] [Def. $\Rightarrow$ + $\neg\neg$ elimin.]

$\neg AA \vee \neg BB$ [4]

[4] + [1.2] [Res on AA]	$A \vee \neg BB$	[5]	
[5] + [2.2] [Res on BB]	$A \vee \neg B$	[6]	
[6] + [3.1] [Res on A]	$\neg B$	[7]	"B es un chico"
[7] + [3.2] [Res on B]	A	[8]	"A es una chica"
[7] + [2.1] [Res on B]	$\neg BB$	[9]	"B miente"
[8] + [1.1] [Res on A]	$\neg AA$	[10]	"A miente"

EJERCICIO 5 [adaptado de Rosen 7th ed., ej. 1.6 35]:

Considera el siguiente texto:

“Si Superman pudiera y quisiera prevenir el mal, lo haría. Si Superman no pudiera prevenir el mal sería un incapaz. Si no quisiera hacerlo, sería un malvado. Superman no previene el mal. Si Superman existiera, no sería ni un incapaz ni un malvado.”

(a) Codifica la base de conocimiento utilizando los siguientes átomos

P = “Superman puede prevenir el mal”
Q = “Superman quiere prevenir el mal”
A = “Superman previene el mal”
I = “Superman es un incapaz”
M = “Superman es un malvado”
S = “Superman existe”

(b) Demuestra mediante **refutación** a partir de la base de conocimiento que Superman no existe.
No se puede emplear razonamiento semiformal, tablas de verdad o razonamiento por casos. Se debe utilizar únicamente **inferencia**, incluyendo resolución. Identifica la regla de inferencia empleada en cada paso.

SOLUCIÓN:

(a) Base de conocimiento

$(P \wedge Q) \Rightarrow A \equiv \neg(P \wedge Q) \vee A \equiv \neg P \vee \neg Q \vee A$ [1] [DEF. $\Rightarrow$]

$\neg P \Rightarrow I \equiv \neg\neg P \vee I \equiv P \vee I$ [2] [DEF. $\Rightarrow$] + [$\neg\neg$ SIMP]

$\neg Q \Rightarrow M \equiv \neg\neg Q \vee M \equiv Q \vee M$ [3] [DEF. $\Rightarrow$] + [$\neg\neg$ SIMP]

$\neg A$ [4]
$S \Rightarrow (\neg I \wedge \neg M)$ [5]

(b) Prueba por refutación, utilizando inferencia

+ negación de la meta		¬¬S ≡S	[6]	[¬¬ SIMP]
[5] + [6]	[M.P.]	¬I ∧¬M	[7]	
		¬I	[7.1]	[∧ ELIM]
		¬M	[7.2]	
[2] + [7.1]	[RES. en I]	P	[8]	
[3] + [7.2]	[RES. en M]	Q	[9]	
[1] + [4]	[RES. en A]	¬P ∨ ¬Q	[10]	
[8] + [10]	[RES. en P]	¬Q	[11]	
[9] + [11]	[RES. en Q]	□	(cláusula vacía: contradicción)	

Luego, la meta (¬S: “Superman no existe”) es consecuencia lógica de la base de conocimiento.

EJERCICIO 6:

(i) ¿Qué quiere decir que una regla de inferencia

$$w_1 \quad |\!- \quad w_2$$

es válida (o correcta)?

(ii) Consideremos la regla de inferencia

Regla_1: $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \quad |\!- \quad (P \Rightarrow R)$

Demostrad de tres maneras distintas que es una regla de inferencia válida.

SOLUCIONES:

(i) La regla de inferencia

$$w_1 |\!- \ w_2$$

es correcta si se cumple que w_2 es consecuencia lógica de w_1

$$w_1 |= \ w_2$$

Es decir, si todas las interpretaciones que son modelos de $w_1$también son modelos de w_2 (en todas las asignaciones de valores de verdad a los átomos simbólicos en las que el valor de verdad de w_1 es *Verdadero*, el valor de verdad de w_2 también es *Verdadero.*)

(ii) Para demostrar que la regla de inferencia

$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \quad |\!- \quad (P \Rightarrow R)$

es válida, podemos utilizar

a. Tablas de verdad

P	Q	R		$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	$Q \Rightarrow R \equiv \neg Q \vee R$		$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R \equiv \neg P \vee R$
T	T	T		T	T		T	T
T	T	F		T	F		F	
T	F	T		F	T		F	
T	F	F		F	T		F	
F	T	T		T	T		T	T
F	T	F		T	F		F	
F	F	T		T	T		T	T
F	F	F		T	T		T	T

b. Inferencia directta

[1] $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)]$ |— [ELIM $\wedge$] $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ [1.1]

$Q \Rightarrow R \equiv \neg Q \vee R$ [1.2]

[1.1] + [1.2] [RES on Q] $\neg P \vee R \equiv P \Rightarrow R$

c. Refutación:

[1] $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)]$ |— [ELIM $\wedge$] $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ [1.1]

$Q \Rightarrow R \equiv \neg Q \vee R$ [1.2]

[2] $\neg(P \Rightarrow R) \equiv \neg(\neg P \vee R) \equiv P \wedge \neg R$ |— [ELIM $\wedge$] P [2.1]

$\neg R$ [2.2]

[1.1] + [1.2] [RES on Q] $\neg P \vee R$ [3]

[2.1] + [3] [RES on P] R [4]

[2.2] + [4] [RES on R] $\square$ [contradicción]

q.e.d.