HOJA DE EJERCICIOS 1: Lógica proposicional EDyL 2015-2016

[Fecha de publicación: 2014/09/17]
[Fecha de entrega: 2014/09/24, 09:00]
[Resolución en clase: 2014/09/24]

NOTA: Incluye explicaciones para tus respuestas. Un ejercicio cuya respuesta es correcta, pero que no incluye explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

EJERCICIO 1:
Sean w_1, w_2 y w FBFS que cumplen simultáneamente:

$\{w_1, w_2\} \not\models w$ [w no es consecuencia lógica de la base de conocimiento $\{w_1, w_2\}$]

$\{w_1, w_2\} \not\models \neg w$ [¬w no es consecuencia lógica de la base de conocimiento $\{w_1, w_2\}$]

(1) Explica qué quiere decir que ni w ni ¬w no son consecuencia lógica de la base de conocimiento $\{w_1, w_2\}$. Pon un ejemplo.

Si $\{w_1, w_2\} \not\models w$
Hay algún modelo de $\{w_1, w_2\}$ que no es modelo de w.
Si $\{w_1, w_2\} \not\models \neg w$
Hay algún modelo de $\{w_1, w_2\}$ que no es modelo de ¬w.
Ejemplo $\{A, A \vee B\} \not\models B$; $\{A, A \vee B\} \not\models \neg B$

(2) Partiendo de la respuesta anterior, indica cuál es el número mínimo de modelos distintos que tiene la base de conocimiento $\{w_1, w_2\}$.

Hay al menos dos modelos distintos de $\{w_1, w_2\}$:
a. el que no es modelo de w (y por lo tanto es modelo de ¬w)
b. el que no es modelo de ¬w (y por lo tanto es modelo de w)

(3) Explica con detalle cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas, cuáles incorrectas y para cuáles no es posible determinar si son correctas o no.

a. $\{w_1 \wedge w_2\}$ es SAT
b. $\{\neg(w_1 \wedge w_2)\}$ es SAT
c. $\{w_1, w_2, w\}$ es SAT
d. $\{w_1, w_2, \neg w\}$ es SAT

a. Correcto. Dado que $\{w_1, w_2\} \models \{w_1 \wedge w_2\}$, todos los modelos de $\{w_1, w_2\}$ son modelos de $\{w_1 \wedge w_2\}$
Si $\{w_1, w_2\}$ es SAT $\{w_1 \wedge w_2\}$ también es SAT.

b. $\{w_1 \wedge w_2\}$ es SAT, pero podría ser tautología, por lo que no es posible determinar si $\{\neg(w_1 \wedge w_2)\}$ es SAT o UNSAT.

c. Correcto. Dado que $\{w_1, w_2\} \not\models \neg w$, la base de conocimiento que incluye la negación de $(\neg w)$, $\{w_1, w_2, w\}$ es SAT.

d. Correcto. Dado que $\{w_1, w_2\} \not\models w$, la base de conocimiento que incluye la negación de (w) $\{w_1, w_2, \neg w\}$ es SAT.

EJERCICIO 2:

Supongamos que tenemos una base de conocimiento Δ, una fórmula bien formada w y un conjunto de reglas de inferencia $\mathbb{R}$

(i) Expresa en lenguaje natural y explica en qué consiste la relación $\Delta \models w$.

La FBF w es consecuencia lógica de la base de conocimiento Δ si todas las interpretaciones que son modelo de Δ (es decir en las que las FBFs de las que se compone la base de conocimiento tiene valor de verdad "verdadero") son también modelo de w (es decir, esta FBF también tiene el valor de verdad "verdadero" en esa interpretación).

(ii) Expresa en lenguaje natural y explica en qué consiste la relación $\Delta \vdash_{\mathbb{R}} w$

La FBF w se puede derivar por inferencia a partir de la base de conocimiento Δ con las reglas de inferencia R si existe una secuencia de FBF's $w_1, w_{2,\dots,} w_{N-1}, w_N = w$ de forma que w_n o bien está en Δ o bien puede ser derivada aplicando alguna de las reglas de inferencia en R sobre alguna o algunas de las FBF's $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$, las cuales anteceden a w_n en la secuencia. Dicha secuencia constituye una prueba de w a partir de Δ con las reglas de inferencia R.

(iii) ¿Cuál es la propiedad que tiene el conjunto de reglas $\mathbb{R}$ en virtud de la cual si $\Delta \vdash_{\mathbb{R}} w$ entonces $\Delta \models w$?

$\mathbb{R}$ es un conjunto de reglas correcto

(iv) ¿Cuál es la propiedad que tiene el conjunto de reglas en virtud de la cual si $\Delta \models w$ entonces $\Delta \vdash_{\mathbb{R}} w$?

Se trata de un conjunto de reglas $\mathbb{R}$ completo

(v) ¿Hay algún conjunto de reglas de inferencia que, junto con algún método de razonamiento, cumpla $\Delta \vdash_{\mathbb{R}} w$ si y solo si $\Delta \models w$? Indica cuáles son tanto el conjunto de reglas como el método de razonamiento y explica en qué consiste este último.

Resolución con refutación sobre la forma normal conjuntiva tanto de la base de conocimiento Δ como sobre la meta w.

Los pasos son

1. Transformar Δ a forma normal conjuntiva Δ_{CNF}
2. Transformar $\neg w$ a forma normal conjuntiva $(\neg \mathrm{w})_{CNF}$
3. Construir la base de conocimiento extendida $\alpha_{CNF} = \{\Delta_{CNF}, (\neg \mathrm{w})_{CNF}\}$
4. Aplicar resolución hasta que se

a. Se deriva la cláusula vacía (α_{CNF}). Concluimos $\Delta \models w$
b. No se puede derivar la cláusula vacía ni (eliminando tautologías y cláusulas subsumidas) cláusulas nuevas. Concluimos $\Delta \not\models w$

EJERCICIO 3: Transforma la siguiente FBF a forma normal conjuntiva (FNC) indicando las reglas de equivalencia utilizadas. Una vez en FNC, determina si es UNSAT, tautología o SAT sin ser tautología.

$(\neg p \Leftrightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$

[elim $\Leftrightarrow$]

$\equiv [(\neg p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge ((q \wedge r) \Rightarrow \neg p)] \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$

[elim $\Rightarrow$]

$\equiv \neg[(\neg\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg(q \wedge r) \vee \neg p)] \vee (\neg(p \vee q) \vee r)$

[De Morgan + elim. $\neg\neg$]

$\equiv [\neg (p \vee (q \wedge r)) \vee \neg(\neg(q \wedge r) \vee \neg p)] \vee ((\neg p \wedge \neg q) \vee r)$

[De Morgan]

$\equiv [(\neg p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee (\neg\neg(q \wedge r) \wedge \neg\neg p)] \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

[elim. $\neg\neg$]

$\equiv (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (q \wedge r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

[distrib.]

$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

[elim. repetitions]

$\equiv (\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge r \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

[distrib.]

$\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

[simplif.]

$\equiv \neg p \vee r$

SAT (por ejempro {r := True}), pero no tautología

EJERCICIO 4: En una lejana isla, habitan dos tipos de criaturas pintorescas: los verosus y los falacius. Los verosus siempre dicen la verdad. Los falacius siempre mienten. En este caso, hay un grupo de tres criaturas, a quienes nos referiremos como A,B y C. ¿Podrías, utilizando lógica formal e inferencia, determinar qué tipo de criatura es C tras escuchar esta conversación?

A dice: "B es verosus"
B replica: "A y C son criaturas del mismo tipo"

(i) Determina los átomos que vas a utilizar en el razonamiento y su denotación

Átomo	Denotación
A	"A dice la verdad", "A es verosus"
B	"B dice la verdad", "B es verosus"
C	"C dice la verdad", "C es verosus"

(ii) Formaliza la base de conocimiento

[1] $A \Leftrightarrow B$
[2] $B \Leftrightarrow [(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)]$

(iii) Realiza inferencia para obtener nuevas FBFs a partir de la base de conocimiento

[1] $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ [1.1]

$B \Rightarrow A \equiv \neg B \vee A$ [1.2]

[2] $B \Leftrightarrow [(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \equiv$

$B \Rightarrow [(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \equiv \neg B \vee (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)]$

$\equiv (\neg B \vee A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee C)$

$\neg B \vee A \vee \neg C$ [2.1.1]

$\neg B \vee \neg A \vee C$ [2.1.2]

$[(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \Rightarrow B \equiv \neg[(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)] \vee B$

$\equiv (\neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee C)] \vee B \equiv (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (A \vee C \vee B)$

$\neg A \vee \neg C \vee B$ [2.2.1]

$A \vee C \vee B$ [2.2.2]

```
[1.1] + [2.1.2] |- [RES on B] ¬A ∨  C[4]
[1.2] + [2.2.2] |- [RES on B]  A ∨  C[5]

[4] + [5] |- [RES on A]  C [6]
```

(iv) Interpreta las nuevas FBFs para responder a la pregunta sobre a qué especie pertenece C

C es verosus.

EJERCICIO 5:
[adaptado de http://philosophy.hku.hk/think/logic/puzzles.php]
Ha habido un robo en el que sabemos está involucrada al menos una de tres personas, cuyos nombres son Alba, Blanca y Carlos. Sabemos que Carlos nunca comete robos si no es en colaboración con Alba. También sabemos que Blanca nunca actúa sola. ¿Qué se puede afirmar sobre la autoría del robo?

(i) Determina los átomos que vas a utilizar en el razonamiento y su denotación. Utiliza átomos que empiecen con A para realizar afirmaciones sobre Alba, con B para Blanca y con C para Carlos

A	Alba es autora del robo
B	Blanca es autora del robo
C	Carlos es autor del robo

(ii) Formaliza la base de conocimiento

```
[1] A ∨ B ∨ C     [Los autores del robo están entre A,B,C]
[2] C ⇒ A         [Carlos solo comete robos con Alba]
[3] B ⇒ (A ∨ C)  [Blanca nunca actúa sola]
```

(iii) Realiza inferencia para obtener nuevas FBFs a partir de la base de conocimiento. Estas nuevas FBFs, una vez interpretadas, proporcionan información sobre la autoría del robo.

```
[1] A ∨ B ∨ C
[2] C ⇒ A         ≡ ¬C ∨ A
[3] B ⇒ (A ∨ C) ≡ ¬B ∨ A ∨ C

[1]+[2] |– [RES en C] A ∨ B      [4]
[2]+[3] |– [RES en C] A ∨ ¬B     [5]
[1]+[3] |– [RES en B] A ∨ C      [6]
[2]+[6] |– [RES en C] A          [7]
```

No se pueden derivar más fórmulas nuevas mediante resolución.

(iv) Interpreta las nuevas FBFs para responder a la pregunta ¿Qué se puede afirmar sobre la autoría del robo?

Alba es una de las autoras del robo.
No sabemos si actuó sola o con colaboración de Blanca o Carlos (o ambos).

EJERCICIO 6 [adaptado de Rosen]
Tras interrogar a los sospechosos, Arsenio Lupin llega a la conclusión de que si Ada Lovelace, la encantadora de números, miente, Alan Turing también miente. Alan Turing y Charles Babbage no pueden estar los dos mintiendo. Charles Babbage y John von Neumann no pueden los dos haber dicho la verdad. Si John von Neumann miente, entonces Alan Turing dice la verdad.

Utilizando los átomos:

L: "Ada Lovelace dice la verdad"
A: "Alan Turing dice la verdad"
B: "Charles Babbage dice la verdad"
N: "John von Neumann dice la verdad"

(i) Formaliza las frases del enunciado.

"Si Ada Lovelace miente, Alan Turing también miente"
[1] $\neg L \Rightarrow \neg A$
"Alan Turing y Charles Babbage no pueden estar los dos mintiendo".
[2] $\neg(\neg A \wedge \neg B)$
"Charles Babbage y John von Neumann no pueden los dos haber dicho la verdad"
[3] $\neg(B \wedge N)$
"Si John von Neumann miente, entonces Alan Turing dice la verdad"
[4] $\neg N \Rightarrow A$

(ii) Transfórmalas a FNC.

[1] $\neg L \Rightarrow \neg A \equiv L \vee \neg A$
[2] $\neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv A \vee B$
[3] $\neg(B \wedge N) \equiv \neg B \vee \neg N$
[4] $\neg N \Rightarrow A \equiv N \vee A$

(iii) Utilizando inferencia deduce quién miente y quien dice la verdad.

[3] + [4]	$\vdash$RES en N	$A \vee \neg B$	[5]
[5] + [2]	$\vdash$RES en B	A	[6]
[6] + [1]	$\vdash$RES en A	L	[7]

Alan Turing y Ada Lovelace dicen la verdad. Sabemos que al menos uno de entre Charles Babbage y John von Neumann miente.

(iv) Imaginemos que, tras una reflexión con almohada acerca del misterio, el detective Arsenio Lupin llega a la conclusión de que al menos dos de los sospechosos mienten ¿Cómo formalizarías en forma de FBFs esta información? ¿Se puede derivar por inferencia información adicional incluyendo estas FBFs en la base de conocimiento?

[8] $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg N) \vee (\neg A \wedge \neg L) \vee (\neg B \wedge \neg L) \vee (\neg B \wedge \neg N) \vee (\neg L \wedge \neg N)$

De entre todas las posibles cláusulas posibles, podemos generar
[8.1] $\neg A \vee \neg L \vee \neg N$
[8.2] $\neg A \vee \neg L \vee \neg B$

Aplicando resolución

[6] + [8.1]	$\vdash_{\text{RES en A}}$	$\neg L \vee \neg N$	[9]
[7] + [9]	$\vdash_{\text{RES en L}}$	$\neg N$	[10]
[6] + [8.2]	$\vdash_{\text{RES en A}}$	$\neg L \vee \neg B$	[11]
[7] + [11]	$\vdash_{\text{RES en L}}$	$\neg B$	[12]

Charles Babbage y John von Neumann mienten.