

ANÁLISIS MATEMÁTICO

GRADO EN CC. MATEMÁTICAS, 2018-2019

Ejercicios 27 a 33

27. Dada $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, consideramos la sucesión de sumas parciales cuyo término general es

$$\mathbf{S}_{N} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \mathbf{X}^{n}.$$

1. Demostrar que esta sucesión $\left\{\mathbf{S}_{N}\right\}_{N}$ es una sucesión de CAUCHY. Su límite permite definir la función exponencial de la matriz \mathbf{X} ,

(7)
$$\exp \mathbf{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{X}^n.$$

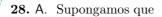
- 2. Calcular $\exp 0$ y $\exp I$.
- 3. Demostrar que toda norma de matrices verifica

$$\|\exp \mathbf{X}\| \le e^{\|\mathbf{X}\|}$$

4. Demostrar

$$\exp(\mathbf{I} + \mathbf{X}) = \exp \mathbf{I} \cdot \exp \mathbf{X}$$

5. Calcular $(d \exp)_{\mathbf{I}}$, esto es, la diferencial en \mathbf{I} de la función que lleva \mathbf{X} a $\exp \mathbf{X}$. Calcular también $(d \exp)_{\mathbf{0}}$.



$$f: \mathbb{R}^{k \times k} \longrightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$$

es diferenciable en todo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Calcular $(dg)_{\mathbf{A}}$, siendo $g(\mathbf{X}) = \mathbf{X} f(\mathbf{X})$.

B. Utilizar el Principio de Inducción y el apartado anterior para calcular $(df)_{\mathtt{A}}$ cuando

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^n$$
,

siendo $n \in \mathbb{N}$.

- $\sf C.$ Calcular una expresión para $(d\exp)_{\sf A} {\bf X}$. ¡Atención! no se pide el estudio de la convergencia de las series que intervienen en el cálculo.
 - D. Comprobar que AX = XA implica

$$e^{\mathbf{A} + \mathbf{X}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{X}}$$

$$(d \exp)_{\mathbf{A}} \mathbf{X} = e^{\mathbf{A}} \mathbf{X} = \mathbf{X} e^{\mathbf{A}}.$$

en la expresión obtenida en el apartado anterior.

29. Considérese la función f(x) definida en los $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que f es continua en todo punto $x \in$

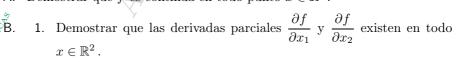
1. Demostrar que para todo vector \mathbf{u} de \mathbb{R}^2 existe $D_{\mathbf{u}}f(0)$, la derivada В. en 0 de f según \mathbf{u} , y calcularla. Demostrar que la función

$$\mathbf{u} \longrightarrow D_{\mathbf{u}} f(0)$$

2. Demostrar que f no es diferenciable en 0. C. Demostrar que f es diferenciable en todo $a \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$. Calcular $(df)_a$, cada $D_{\mathbf{u}}f(a)$ y la matriz jacobiana Df(a).

30. Considérese la función
$$f(x)$$
 definida en los $x=(x_1\,,x_2)\in\mathbb{R}^2$ mediante
$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} (x_1^2+x_2^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\,,&x\neq 0\,,\\ 0\,,&x=0\,. \end{array}\right.$$

A. Demostrar que f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}^2$.



2. Estudiar la continuidad de estas dos funciones en 0 .

1. Demostrar que f es diferenciable en 0.

2. Demostrar que f es diferenciable en todo $x \in \mathbb{R}^2$.

31. Dada una función continua $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, considérese la función

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida

$$f(x) = \varphi(x) \sin x_1, \qquad x = (x_1, x_2).$$

- 1. Demostrar que f es diferenciable en 0, incluso si φ no lo es.
- Calcular, para cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, el valor de $(df)_{\scriptscriptstyle 0} \mathbf{u}$.
- 32. Demostrar que en cada uno de los casos siguientes la función f es de clase C^1 . Calcular su diferencial en cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - 1. Dadas $g\,:\,\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y $h\,:\,\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^1 , se define f

$$f(x,y) = \int_0^x g(t,0) dt + \int_0^y h(x,t) dt.$$

2. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua,

$$f(x,y) = \int_{a}^{x+y} g(t) dt.$$

3. Con a y g como en el apartado anterior,

$$f(x,y) = \int_{a}^{x \sin y} g(t) dt.$$

33. El Teorema de Euler para funciones homogéneas. Sea f una función definida en un abierto Ω de \mathbb{R}^n . Se dice que f es homogénea de grado p en Ω cuando

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$$

- $f(\lambda\,x)=\lambda^p\,f(x)$ se verifica para todos los $\lambda\in\mathbb{R}$ y $x\in\Omega$ tales que $\lambda\,x\in\Omega$.
 - 1. Demostrar que si f es homogénea de grado p en Ω y es diferenciable en xentonces

(8)
$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = p f(x).$$

Demostrar que si f es diferenciable en Ω y satisface (8) en todo $x \in \Omega$ entonces fes homogénea de grado p en $\Omega\,.$