Topología, curso 2019-20

Hoja 1

1. Estudia si $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dibuja la bola $B(x,r)$ cuando **i)** $x = 0$ y $r = 1/2$; **ii)** $x = 1/2$ y $r = 1$.

2. Decide razonadamente si

i) $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ define una distancia en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

ii) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ define una distancia en $\mathbb{R}$.

3. Dado un conjunto no vacío, sea $\mathcal{F}$ la colección de todos sus subconjuntos finitos. Para $A \in \mathcal{F}$, sea $|A|$ el número de elementos de A.

i) Comprueba que $d(A,B) = |A \Delta B| = |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)|$ define una distancia en $\mathcal{F}$.

ii) Sea $\mathcal{F}$, concretamente, la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Para la distancia descrita en el apartado anterior y el punto $A = \{1,2\}$ en el espacio $\mathcal{F}$, describe la *esfera* $S(A,1) = \{B \in \mathcal{F} :\ d(A,B) = 1\}$.

4. Comprueba que los siguientes espacios de sucesiones con las distancias asociadas son espacios métricos:

i) $\mathbb{R}^\omega$ es el espacio de sucesiones de números reales $x = (x_n)$, y $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ la distancia

$$d(x,y) \;=\; \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} \qquad x \in \mathbb{R}^\omega, \quad y \in \mathbb{R}^\omega$$

¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = \{x_n\} = \{(1 - 2^{-n})^{-1}\}$ e $y = \{y_n\} = \{1\}$?

ii) ℓ_∞ es el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales, y $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ la función

$$d(x,y) \;=\; \sup\{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

iii) ℓ_2 es el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ de $\mathbb{R}$ tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$; y $d : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ la función

$$d(x,y) \;=\; \left(\sum_n |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$$

Indicación: Si $x = (x_n) \in \ell_2$, $y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y, además, $(\sum |x_n y_n|)^2 \leq (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

5. Sea $\mathbb{R}^\omega$ el conjunto de todas las sucesiones de números reales. Demuestra que

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}\right)$$

define una distancia en $\mathbb{R}^\omega$.

6. Demuestra la *desigualdad triangular inversa*: en un espacio métrico (X,d),

$$\forall x, y, z \in X, \quad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

7. Demuestra que si d es una distancia entonces $d'(x,y) = \min(d(x,y), 1)$ también lo es.

8. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $x, y \in X$ definimos

$$d^1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

Demuestra que d^1 es una distancia en X.

9. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Dados $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, demuestra que las siguientes expresiones $d(x,y)$ definen distancias en $X_1 \times X_2$:

i) $d(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$

ii) $d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$

iii) $d(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2}$

10. Sea $\{d_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ una sucesión de distancias, todas ellas en el mismo conjunto X, para las que se sabe que $d_n(x, y) \leq 1$ para todo n y para todos $x, y \in X$. Demuestra que $d = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}$ es una distancia en X.

11. Sea $\mathcal{C}[a, b]$ el conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ con valores reales. Dadas $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ definimos

$$d(f, g) = \int_a^b \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx$$

Demuestra que d es una distancia en $\mathcal{C}[a, b]$.

12. Si en un espacio métrico (X, d) se cumple que $x_n \to x$, $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$, demuestra que entonces $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

13. Sea (X, d) es un espacio métrico. Para cualesquiera x, y, x' e y' elementos de X, prueba que

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

Deduce de ello que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ cuando $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y)$.

14. Demuestra que en el espacio métrico $\mathbb{R}$ con la distancia usual, si $x_n \to x$ e $y_n \to y$ entonces

i) $x_n + y_n \to x + y$

ii) $x_n - y_n \to x - y$

iii) $x_n y_n \to xy$

iv) Si $y_n \neq 0$ para $n = 0, 1, \ldots$ e $y \neq 0$, entonces $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$

15. Sea $\{x_i\}$ una sucesión de elementos distintos de un espacio métrico (X, d), y supongamos que $\lim_{i\to\infty} x_i = x$. Sea f una aplicación inyectiva del conjunto $\{x_i\}$ en si mismo. Demuestra que $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = x$.

16. Demuestra que en un espacio métrico el complemento de un punto es un conjunto abierto. Deduce que todo conjunto de un espacio métrico es una intersección de conjuntos abiertos.

17. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestra que si $x, y \in X$ son dos puntos distintos, entonces existen dos conjuntos abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ e $y \in V$.

18. Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r < s$ dos números positivos. Demuestra que el conjunto $\{y \in X : r < d(x, y) < s\}$ es un conjunto abierto.

19. Sea (X, d) un espacio métrico. Un punto $x \in X$ se dice *aislado* si el conjunto $\{x\}$ es abierto. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

i) x no es un punto aislado

ii) Todo abierto U que contiene a x contiene infinitos puntos de X.

20. Sea (X, d) un espacio métrico. Si A es un subconjunto de X se define la *clausura* de A, denotada $\overline{A}$, como el conjunto de los puntos de X que son límite de sucesiones de puntos de A, esto es

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists \{x_n\} \subset A \text{ con } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}.$$

Demuestra que $X \setminus \overline{A}$ es un conjunto abierto.

21. Sean X e Y dos espacios métricos y $f, g :\ X \to Y$ dos funciones continuas.

i) Demuestra que $\{x \in X :\ f(x) = g(x)\}$ es un subconjunto cerrado de X.

ii) Si, además, $A \subset X$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, demuestra que, de hecho, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{A}$. (Se recomienda hacerlo de dos maneras distintas: directamente por sucesiones y deduciéndolo del apartado anterior.)

22. Sea (X, d) un espacio métrico infinito. Demuestra que X contiene un conjunto abierto U tal que U y $X \setminus U$ son conjuntos infinitos.

23. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subset X$, se define su *diámetro* como

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}.$$

Demuestra que $diam(A) = diam(\overline{A})$.

24. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio métrico (X, d). Definimos la *distancia* entre A y B como

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Observa que si A y B tienen algún punto en común entonces $d(A, B) = 0$, pero que el recíproco no es cierto. Demuestra que $d(\{x\}, B) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{B}$.

25. Sea x_0 un determinado punto en el espacio métrico (X, d). Demuestra que la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$ es continua. Análogamente, demuestra que si A es un determinado subconjunto no vacío de X entonces la función $g : X \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(\{x\}, A)$ es continua.

26. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice que es *denso* si todo abierto de X interseca a A.

i) Demuestra que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con la distancia usual.

ii) Demuestra que si f y g son dos funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y son tales que $f(x) = g(x)$ para todos los puntos x de un cierto subconjunto denso de X, entonces $f \equiv g$.

27. Demuestra que $d(x, y) = \text{mín}(|x - y|, 1 - |x - y|)$ define una distancia en $[0, 1)$. ¿Cuáles son las funciones $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ continuas en este espacio?

28. Demuestra que las operaciones algebraicas de suma, resta y multiplicación son funciones continuas si utilizamos las distancias usuales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$.

29. Demuestra que en un espacio métrico (X, d) todo punto es aislado si y sólo si toda función de X en un espacio métrico arbitrario es continua.