TOPOLOGÍA. UAM, 13 de diciembre de 2019

Apellidos, Nombre: ______________________________

Grupo: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	TOTAL
2 puntos	2 puntos	2 puntos	2 puntos	2 puntos	10

---

1. Considera el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topología de subespacio. Definimos en C la siguiente relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) & \\ (x_2, y_2) = 3(x_1, y_1) & \text{si } x_1^2 + y_1^2 = 1, \\ (x_2, y_2) = \frac{1}{3}(x_1, y_1) & \text{si } x_1^2 + y_1^2 = 9. \end{cases}$$

Considera el espacio cociente $X = C/\sim$.

1. Dibuja en C entornos de los puntos $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (2, 0)$ que sean saturados para la aplicación de paso al cociente $p : C \ni (x, y) \mapsto [(x, y)] \in X$.
2. ¿A qué subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es homeomorfo X?
3. Considera la aplicación $\phi : X \ni [(x, y)] \mapsto [(-x, -y)] \in X$. Demuestra que ϕ está bien definida y es continua. ¿Es ϕ un homeomorfismo?

---

2. Sea X un espacio topológico, y $A \subset X$ un subconjunto. Demuestra que si C es un subespacio conexo de X que interseca tanto a A como a $X \setminus A$, entonces C interseca a la frontera de A.

---

3. Considera los dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ siguientes:

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid x = 1\},$$
$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0\},$$

ambos con la topología inducida por la usual. Demuestra que A y B no son homeomorfos.

$\rightsquigarrow$ **dorso**

4. Sean τ y τ' dos topologías en un mismo conjunto X.

a) Demuestra que si $\tau \subset \tau'$ y (X, τ') es compacto, entonces (X, τ) lo es también.

b) Demuestra que si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff con respecto a τ y τ', entonces o bien τ y τ' coinciden, o bien no son comparables.

---

5. Sea X un espacio topológico conexo y Hausdorff, y sea $U \subset X$ un subespacio no vacío, abierto y compacto. Demuestra que $U = X$.

TIEMPO: 2 horas.