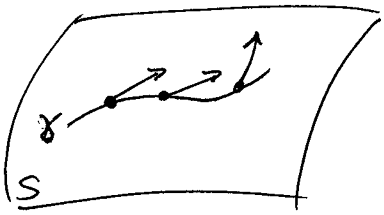
$\gamma : I \longrightarrow S$ curva

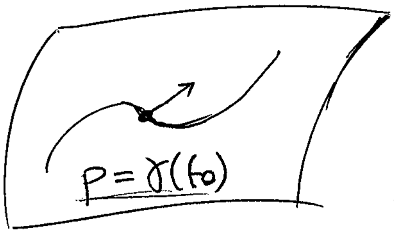
$W : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo diferenciable a lo largo de γ



Se dice campo tangente a S si $W(t) \in T_{\gamma(t)}S \quad \forall t \in I$

Decimos que W es paralelo a lo largo de γ si $\underbrace{(W'(t))^T}_{\frac{D}{dt}W(t)} = 0$.

$\frac{D}{dt}W(t)$ derivada covariante



$\exists$ único campo W a lo largo de γ tal que $\underbrace{\text{es paralelo}}_{(W')^T \equiv 0}$ y que $W(0) = W_0 \in T_pS$

$\Longrightarrow$ este W se llama transporte paralelo de W_0 a lo largo de γ.

γ geodésica $\Longleftrightarrow$ γ' es paralelo

$((\gamma')')^T \equiv 0$

Ejemplo: ejercicio H7-E7

$W(t) = a(t)X_u + b(t)X_v$ ...

$\langle W', X_u \rangle = 0 = \langle W', X_v \rangle$

TEOREMA EGREGIUM GAUSS

Isometría local $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $K_X = K_\Phi$

(contraejemplo ej. 2)

$\gamma : I \longrightarrow S$ curva es GEODÉSICA si $(\gamma'')^T \equiv 0$.

Es decir, $\gamma''(t)$ es normal a S $\forall t \in I$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \|\gamma'(t)\| = cte.$ $\forall t \in I$.

$(\gamma'')^T = 0 \iff \langle \gamma'', v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_pS$

$(\langle \gamma', \gamma' \rangle)' = 2 \langle \gamma'', \gamma' \rangle$

CURVAS

CURVAS PLANAS

VECTOR TANGENTE: $\mathbb{t}_\alpha(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ • $S(t) = \int \|\alpha'(t)\|\, dt$

VECTOR NORMAL: $\mathbb{n}_\alpha(t) = J\,\mathbb{t}_\alpha(t)$ con $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matriz de giro de $90°$

DIEDRO DE FRENET: base $\{\mathbb{t}_\alpha(t), \mathbb{n}_\alpha(t)\}$ positivamente orientada

CURVATURA: $K_\alpha(t) = \dfrac{\langle \mathbb{t}_\alpha'(t), \mathbb{n}_\alpha(t)\rangle}{V_\alpha(t)}$ ó $K_\alpha(t) = \dfrac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{V_\alpha(t)^3}$

↳ con signo

VECTOR CURVATURA: $\mathbb{K}_\alpha(t) = K_\alpha(t)\cdot \mathbb{n}_\alpha(t)$

$\theta(t) \equiv$ ángulo entre $\mathbb{t}_\alpha(t)$ y el eje OX : $\theta'(t) = K_\alpha(t)\cdot V_\alpha(t) \overset{\text{param. arco}}{=} K_\alpha(t)$

Como $\theta'(s) = K_\alpha(s) \Longrightarrow \theta(s) = \theta_0 + \int K_\alpha(u)\,du$ θ_0 poco importante

$\alpha'(s) = \mathbb{t}_\alpha(s) = \underbrace{\langle \mathbb{t}_\alpha(s), e_1\rangle}_{\cos\theta(s)} e_1 + \underbrace{\langle \mathbb{t}_\alpha(s), e_2\rangle}_{\operatorname{sen}\theta(s)} e_2 \Rightarrow \alpha(s) = X_0 + \int \alpha'(u)\,du$

Esto nos permite conseguir $\alpha(s)$ a partir de $K_\alpha(s)$

• REPARAMETRIZACIONES:

$\mathbb{t}_\beta(s) = \varepsilon(\varphi)\cdot \mathbb{t}_\alpha(\varphi(s))$ $K_\beta(s) = \varepsilon(\varphi)\cdot K_\alpha(\varphi(s))$

$\mathbb{n}_\beta(s) = \varepsilon(\varphi)\cdot \mathbb{n}_\alpha(\varphi(s))$ $\mathbb{K}_\beta(s) = \mathbb{K}_\alpha(\varphi(s))$

FÓRMULAS DE FRENET:

$\mathbb{t}_\alpha'(t) = V_\alpha(t)\cdot K_\alpha(t)\cdot \mathbb{n}_\alpha(t)$

$\mathbb{n}_\alpha'(t) = -V_\alpha(t)\cdot K_\alpha(t)\cdot \mathbb{t}_\alpha(t)$

CURVAS EN EL ESPACIO

• VECTOR TANGENTE: $\mathbb{t}_\alpha(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ $\mathbb{t}_\alpha'(t) = \dfrac{\alpha''}{\|\alpha'\|} - \dfrac{\langle \alpha'', \alpha'\rangle}{\|\alpha'\|^3}\alpha'$

• VECTOR NORMAL: $\mathbb{n}_\alpha(t) = \dfrac{\mathbb{t}_\alpha'(t)}{\|\mathbb{t}_\alpha'(t)\|}$

VECTOR BINORMAL: $\mathbb{b}_\alpha(t) = \mathbb{t}_\alpha(t) \times \mathbb{n}_\alpha(t)$

TRIEDO DE FRENET: base $\{\mathbb{t}_\alpha(t), \mathbb{n}_\alpha(t), \mathbb{b}_\alpha(t)\}$ positivamente orientada

CURVATURA: $K_\alpha(t) = \dfrac{\|\mathbb{t}_\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} \geq 0$

↳ sin signo

VECTOR CURVATURA: $\mathbb{K}_\alpha(t) = \dfrac{\mathbb{t}_\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \dfrac{\alpha''}{\|\alpha'\|^2} - \dfrac{\langle \alpha'', \alpha'\rangle}{\|\alpha'\|^4}\alpha'$

TORSIÓN: $\tau_\alpha(t) = -\dfrac{\langle \mathbb{b}_\alpha'(t), \mathbb{n}_\alpha(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|}$

$$\begin{aligned} t'_\alpha(t) &= K_\alpha(t).V_\alpha(t).n_\alpha(t) \\ n'_\alpha(t) &= -K_\alpha(t).V_\alpha(t).t_\alpha(t) + \tau_\alpha V_\alpha b_\alpha \\ b'_\alpha(t) &= -\tau_\alpha V_\alpha n_\alpha \end{aligned} \equiv \begin{pmatrix} t'_\alpha(t) \\ n'_\alpha(t) \\ b'_\alpha(t) \end{pmatrix} = V_\alpha \begin{pmatrix} 0 & K_\alpha & 0 \\ -K_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_\alpha \\ n_\alpha \\ b_\alpha \end{pmatrix}$$

PLANOS:

plano osculador $\rightarrow \text{span}\{t_\alpha(t), n_\alpha(t)\} + \alpha(t) \equiv \langle p-\alpha(t), \overbrace{t_\alpha(t) \times n_\alpha(t)}^{b_\alpha(t)} \rangle = 0$

plano normal $\rightarrow \text{span}\{n_\alpha(t), b_\alpha(t)\} + \alpha(t) \equiv \langle p-\alpha(t), \overbrace{n_\alpha(t) \times b_\alpha(t)}^{t_\alpha(t)} \rangle = 0$

plano rectificante $\rightarrow \text{span}\{t_\alpha(t), b_\alpha(t)\} + \alpha(t) \equiv \langle p-\alpha(t), \underbrace{t_\alpha(t) \times b_\alpha(t)}_{n_\alpha(t)} \rangle = 0$

FORMA CANÓNICA LOCAL:

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x(s) &= s - \frac{K_\alpha(s).s^3}{6} + R_x \equiv t_\alpha(s) \\ y(s) &= \frac{K_\alpha(s).s^2}{2} + \frac{K'_\alpha(s).s^3}{6} + R_y \equiv n_\alpha(s) \quad ? \\ z(s) &= \frac{K_\alpha(s).\tau_\alpha(s)}{6}s^3 + R_z \equiv b_\alpha(s) \end{aligned}$$

$K_\alpha(s) = K_\alpha(0)$ si s cerca de 0 !

REPARAMETRIZACIONES:

$$t_\beta(s) = \varepsilon(\varphi).t_\alpha(\varphi(s)) \qquad K_\beta(s) = K_\alpha(\varphi(s))$$

$$n_\beta(s) = n_\alpha(\varphi(s)) \qquad \tau_\beta(s) = \tau_\alpha(\varphi(s))$$

$$b_\beta(s) = \varepsilon(\varphi).b(\varphi(s))$$

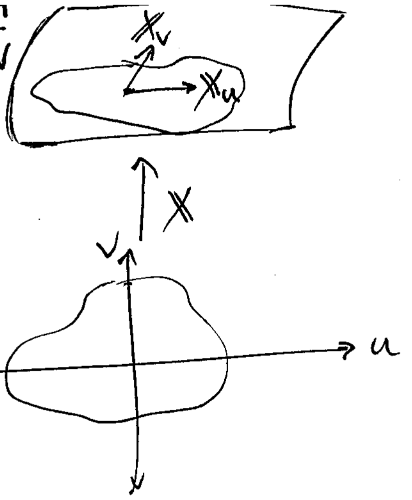
- CURVATURA Y TORSIÓN PARA CUALQUIER PARÁMETRO:

$$K_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

TEORÍA

RESUMEN



$\mathbb{X}_u$, $\mathbb{X}_v$

$\mathbb{X}_u : (u,v) \longmapsto \mathbb{X}_u(u,v) \in T_{\mathbb{X}(u,v)}S$

$$I_{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle & \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle \\ \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_u \rangle & \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle \end{pmatrix}$$

La primera forma fundamental te da información sobre los productos escalares con respecto a la base $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$ de T_pS.

$w_1, w_2 \in T_pS$

$$\langle w_1, w_2 \rangle = (a_1, b_1)\; I_{\mathbb{X}} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$w_1 = a_1\mathbb{X}_u + b_1\mathbb{X}_v \equiv (a_1, b_1)$

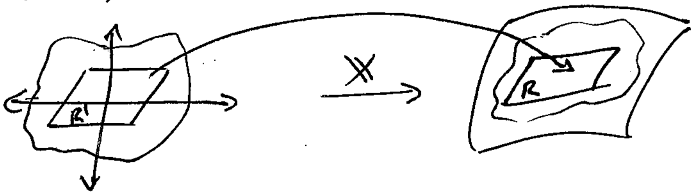
$w_2 = a_2\mathbb{X}_u + b_2\mathbb{X}_v \equiv (a_1, b_1)$

$\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$ base de T_pS

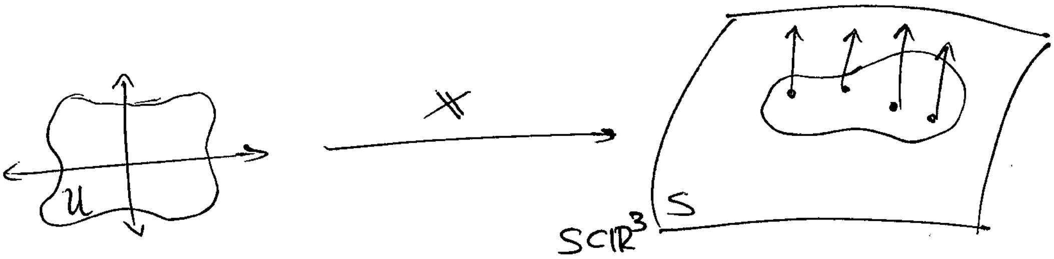
Elemento de área: $\sqrt{\det I_{\mathbb{X}}}$

$R \subset S$
$\parallel$
$\mathbb{X}(R')$

$$\text{Área}(R) = \int_{R'} \sqrt{\det(I_{\mathbb{X}})}\, du\, dv$$



$$N = \frac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|}$$



$S \subset \mathbb{R}^3$

$N : \mathcal{U} \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto N(u,v)$

$N : \mathbb{X}(\mathcal{U}) \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$

$N(\mathbb{X}(u,v)) \in \mathbb{R}^3$
$\parallel$
$N(p)$

$p = \mathbb{X}(u,v)$

$e = \langle \mathbb{X}_{uu}, N\rangle \qquad f = \langle \mathbb{X}_{uv} (= \mathbb{X}_{vu}), N\rangle \qquad g = \langle \mathbb{X}_{vv}, N\rangle$

$$\mathrm{II}_{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{X}_{uu}, N\rangle & \langle \mathbb{X}_{uv}, N\rangle \\ \langle \mathbb{X}_{uv}, N\rangle & \langle \mathbb{X}_{vv}, N\rangle \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz de la forma bilineal en la base $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$

$\mathrm{II}_{\mathbb{X}} : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \qquad p = \mathbb{X}(u,v)$

$$\underset{a_1\mathbb{X}_u + b_1\mathbb{X}_v}{\underset{\parallel}{(x}}, \underset{a_2\mathbb{X}_u + b_2\mathbb{X}_v}{\underset{\parallel}{y)}} \longmapsto \mathrm{II}_{\mathbb{X}}(x,y) := (a_1, b_1) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{TN(p)}{\underset{\equiv}{dN(p)}} : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{lineal}$$

$$\mathbb{X}_u \longmapsto N_u(p)$$

$$\mathbb{X}_v \longmapsto N_v(p)$$

Imagen de $dN(p)$ está contenida en T_pS

Podemos definir un endomorfismo de T_pS:

$$W : T_pS \longrightarrow T_pS$$

$$w \longmapsto W(w) := -dN(p)w$$

→ operador de Weingarten / operador de configuración / shape operator

- Autovalores de W son las <u>curvaturas principales</u> (k_1, k_2)
- Autovectores de W son las <u>direcciones principales</u>

$K = \underset{k_1 \cdot k_2}{\underset{\parallel}{\det(W)}} :=$ curvatura de Gauss

$H = \dfrac{\text{traza}(W)}{2} = \dfrac{k_1 + k_2}{2} :=$ curvatura media

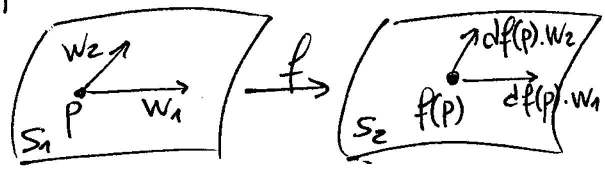
$\mathrm{I}, \mathrm{II} : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineales simétricas

PROPIEDAD: $\mathrm{II}(x,y) = \mathrm{I}(Wx, y)$

Viendo I, II como matrices: $W = \mathrm{I}^{-1} \cdot \mathrm{II}$

$$K = \det(W) = \det \mathrm{II} \cdot \det \mathrm{I}^{-1} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

DEFINICIÓN: $S_1 \xrightarrow{f} S_2$ aplicación diferenciable entre superficies regulares



- f isometría local si:

$$\left.\begin{array}{l} \langle df(p)w_1, df(p)w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle \\ \forall p \in S_1, \ \forall w_1, w_2 \in T_pS_1 \end{array}\right\} \overset{\sim}{\equiv} \left\{\begin{array}{l} X_1 \longleftarrow S_1 \\ X_2 \longleftarrow S_2 \\ \boxed{\mathrm{I}_{X_1} = \mathrm{I}_{X_2}} \end{array}\right.$$

- f aplicación conforme si $\exists \varphi$ tal que:

$$\left.\langle df(p)w_1, df(p)w_2 \rangle = \varphi(p) \langle w_1, w_2 \rangle\right\} \overset{\sim}{\equiv} \left\{\boxed{\mathrm{I}_{X_1} = \varphi(p)\, \mathrm{I}_{X_2}}\right.$$

$\uparrow$

f conforme $\Longleftrightarrow$ f preserva ángulos

- $X : \overset{(u,v)}{\overset{\cap}{U}} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ parametrización conforme si

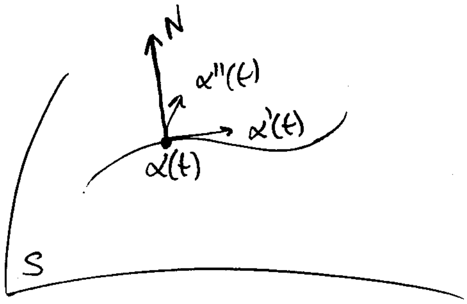
$$\mathrm{I}_X \equiv \varphi(u,v) \underbrace{Id}_{\substack{\text{III} \\ 1^{\text{a}} \text{ forma fundamental de} \\ \text{un plano en coord. cartesianas}}}$$

$p \in S$:

- <u>Elíptico</u> si $K_1, K_2 > 0$ ó $K_1, K_2 < 0$, e.d., $K > 0$
- <u>Hiperbólico</u> si $K_1 > 0, K_2 < 0$ ó $K_1 < 0, K_2 > 0$, e.d., $K < 0$
- <u>Parabólico</u> si $K_1 = 0, K_2 \neq 0$ ó $K_1 \neq 0, K_2 = 0$, e.d. $K = 0$, $W \neq 0$
- <u>Plano</u> si $K_1, K_2 = 0$, e.d., $K = 0$, $W = 0$.

$v \in T_pS$ asintótica si $\mathrm{II}(u,v) = 0$

$p \in S$ $\qquad I \xrightarrow{\alpha}$



$\mathbb{R}^3 = T_pS \oplus \mathrm{span}\, N_p$

$$\alpha'' = \overbrace{(\alpha'')^T}^{\text{tangente}} + \underbrace{\overbrace{(\alpha'')^\perp}^{\text{normal}}}_{\underbrace{\langle \alpha'', N\rangle}_{K_{n,\alpha}} N}$$

$K_{n,\alpha}$ CURVATURA NORMAL

$\alpha'' = K_\alpha \mathbb{N}_\alpha$ $\qquad K_{n,\alpha} = K_\alpha \langle \mathbb{N}_\alpha, N\rangle$

α param. por arco

base de $T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3 = \{\alpha'(t), N_{\alpha(t)} \times \alpha'(t), N_{\alpha(t)}\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle \alpha'', \alpha'\rangle = 0 \\ \langle \alpha'', N \times \alpha'\rangle =: K_{g,\alpha} \\ \langle \alpha'', N\rangle =: K_{n,\alpha} \end{array}}$$

$$\langle (\alpha'')^T, \alpha'\rangle \underset{\alpha' \text{ tangente}}{=} \langle \alpha'', \alpha'\rangle \overset{\text{param. por arco}}{=} 0$$

$\Longrightarrow (\alpha'')^T$ está en la dirección de $N \times \alpha'$

CURVATURA GEODÉSICA $K_{g,\alpha} = \langle \alpha'', N \times \alpha'\rangle$

$$\boxed{K_{n,\alpha} = K_\alpha \langle \mathbb{N}_\alpha, N\rangle = \langle \alpha'', N\rangle \overset{\text{Teorema}}{=} \mathrm{II}(\alpha', \alpha')}$$

$f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

f difeomorfismo local $\Leftrightarrow$ $df(p)$ invertible $\forall p \in \mathcal{U}$

$\to$ vale para f entre superficies

$df(p): T_pS_1 \longrightarrow T_pS_2$ $\quad$ ⊛ $\langle df(p)w_1, df(p)w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$

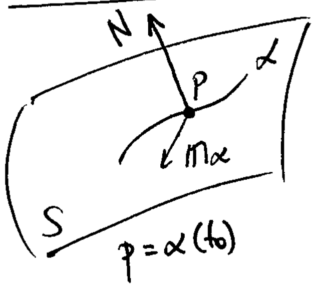
isometría local

Si f satisface ⊛ $\Rightarrow df(p)$ invertible

$\Downarrow$

f difeomorfismo

CURVATURA NORMAL



$$K_{n,\alpha} = K_\alpha \langle m_\alpha, N \rangle$$

$$K_{n,\alpha}(t) = \mathrm{II}(\alpha'(t), \alpha'(t))$$

k_1, k_2 son las curvaturas principales no se preservan necesariamente por isometrías

$K = k_1 k_2$ sí se preserva por isometrías $\Rightarrow$ T$^{\text{ma}}$ Egregium de Gauss

H ($\equiv$ curvatura media) no tiene por qué preservarse

$\to$ existe una isometría local entre un plano y un cilindro pero el plano en $\mathbb{R}^3$ tiene curvaturas principales 0 (multiplicidad 2), pero el cilindro tiene curv. ppales $0, \pm \frac{1}{r}$.

Observación: k_1 y k_2 son el máx. y mín. de todas las curvaturas normales de curvas en S.

$$\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathrm{II}_p(v,w) := \langle -(dN)_p v, w \rangle = \langle W_p \cdot v, w \rangle \overset{\text{simétrico}}{=} \langle v, W_p w \rangle$$

S superficie, $p \in S$

$I_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$, $I_p(v,w) = \langle v, w \rangle$

$\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{II}_p(v,w) = \langle W_p v, w \rangle$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ base de T_pS (e.g. $\{X_u, X_v\}$)

$$(W_p)_{\mathcal{B}} = (I_p)_{\mathcal{B}}^{-1} (\mathrm{II}_p)_{\mathcal{B}}$$

$X(u,v)$ umbilical $\Longleftrightarrow$ las curvaturas principales en $X(u,v)$ son iguales $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{II} = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Longleftrightarrow H^2 = K$

$$\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 = k_1 k_2 \Longrightarrow k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 = 4k_1k_2 \Rightarrow (k_1 - k_2)^2 = 0$$

SUPERFICIES REGULARES & PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

DEFINICIÓN SUPERFICIE REGULAR: En $\mathbb{R}^3$ una SUPERFICIE REGULAR es un subconjunto no vacío de S de $\mathbb{R}^3$ tal que para todo punto $p \in S$, existe un abierto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, un entorno V de p en $S \subset \mathbb{R}^3$ y una aplicación $\mathbb{X}$

$\mathbb{X}: \mathcal{U} \longrightarrow V \subset S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. $\mathbb{X}$ es diferenciable como aplicación U de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.
2. $\mathbb{X}: \mathcal{U} \longrightarrow V$ es un homomorfismo
3. para todo $q \in \mathcal{U}$, la diferencial $D\mathbb{X}(q): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La aplicación $\mathbb{X}$ se llama PARAMETRIZACIÓN o SISTEMA DE COORDENADAS de S. Su inversa se llama CARTA

$$\mathbb{X}: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset S \subset \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{X}(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big)$$

VECTORES COORDENADOS EN EL PUNTO $\mathbb{X}(u,v)$

$$\begin{cases} \mathbb{X}_u(u,v) = \dfrac{\partial \mathbb{X}}{\partial u}(u,v) = \big(x_u(u,v),\ y_u(u,v),\ z_u(u,v)\big) \\[2ex] \mathbb{X}_v(u,v) = \dfrac{\partial \mathbb{X}}{\partial v}(u,v) = \big(x_v(u,v),\ y_v(u,v),\ z_v(u,v)\big) \end{cases}$$

La condición 3 de la definición equivale a que $\mathbb{X}_u(u,v)$ y $\mathbb{X}_v(u,v)$ sean linealmente independientes.

PLANO TANGENTE O ESPACIO/RECTA NORMAL

S superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y $p \in S$. Un vector $x \in \mathbb{R}^3$ diremos que es un vector tangente a S en p si existe una curva diferenciable
$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$. En esta definición se puede tomar cualquier otro intervalo de definición para α y cualquier t_0 en dicho intervalo en vez de 0, simplemente reparametrizando la curva.

El subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de todos los vectores tangentes en p a S

$T_pS = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \text{ diferenciable tq. } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = x\}$

resulta ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 y, de hecho, $T_pS = d\mathbb{X}(q)(\mathbb{R}^2) \equiv D\mathbb{X}_q(\mathbb{R}^2)$, para cualquier parametrización $\mathbb{X}: \mathcal{U} \longrightarrow S$, donde $p \in \mathcal{U}$ tal que $\mathbb{X}(q) = p$. A este subespacio vectorial T_pS se le llama plano tangente (o espacio tangente) a S en p.

Al plano afín $p + T_pS$ le llamamos plano tangente afín a S en

Podemos considerar el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ perpendicular a T_pS:
$(T_pS)^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in T_pS\}$ que se le llama recta normal (o espacio normal), y sus elementos se le llaman vectores normales.

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = T_pS \oplus \underset{N(p)}{\underset{\shortparallel}{(T_pS)^{\perp}}}}$$

__Base T_pS__ $= \{\mathbb{X}_u(q), \mathbb{X}_v(q)\}$ con $\mathbb{X}(q) = p$.

__Base de $N(p)$__ $= \{\mathbb{X}_u(q) \times \mathbb{X}_v(q) . \, ^1/_{\text{módulo}}\}$ con $\mathbb{X}(q) = p$.

DIFERENCIAL DE UNA APLICACIÓN DEFINIDA EN UNA SUPERFICIE:

__DIFERENCIAL de una función diferenciable definida en una superficie__

Sea $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en una superficie regular S, y sea $p \in S$. La DIFERENCIAL de f en p es la aplicación lineal $df(p) : T_pS \longrightarrow S$, $df(p)x := (f \circ \alpha)'(0)$ donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ es una curva diferenciable en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$. Se prueba así que $df(p)x$ está bien definida y $(f \circ \alpha)'(0)$ es independiente de α (siempre que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$).

Si $\mathbb{X}$ es una parametrización de S alrededor de p, e.d., $p = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ entonces la matriz asociada a $df(p)$ en la base $\{\mathbb{X}_u(u_0,v_0), \mathbb{X}_u(u_0,v_0)\}$ es la matriz fila $\left((f \circ \mathbb{X})_u(u_0,v_0) \;,\; (f \circ \mathbb{X})_v(u_0,v_0) \right)$

Si f constante $\Longrightarrow df(p) = 0 \quad \forall p \in S$.

S conexa y $df(p) = 0 \quad \forall p \in S \Longrightarrow f$ es constante en S.

Si f tiene un extremo relativo en $p \Longrightarrow df(p) = 0$.

$f : S_1 \longrightarrow S_2$ aplicación diferenciable entre dos superficies regulares, $p \in S_1$, se define la diferencial de f en p como $df(p) : T_pS_1 \longrightarrow T_{f(p)}S_2$ y $df(p)x := (f \circ \alpha)'(0)$ (igual que arriba). Sean $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ param. reg. de S_1 y S_2 cerca de p y $f(p)$. Entonces la expresión en coordenadas de $\tilde{f} = \mathbb{X}_2^{-1} \circ f \circ \mathbb{X}_1$ puede escribirse como $\tilde{f}(u,v) = (\bar{u}(u,v), \bar{v}(u,v))$. La matriz de f en $p = \mathbb{X}(u_0,v_0)$ con respecto a $\{(\mathbb{X}_1)_u(q_1), (\mathbb{X}_1)_v(q_1)\}$ y $\{(\mathbb{X}_2)_{\bar{u}}(q_2), (\mathbb{X}_2)_{\bar{v}}(q_2)\}$ es:
$$df(p) \equiv \begin{pmatrix} \bar{u}_u(u_0,v_0) & \bar{u}_v(u_0,v_0) \\ \bar{v}_u(u_0,v_0) & \bar{v}_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL:

Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y $p \in S$. La PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL de S en p es la forma bilineal simétrica definida positiva

$$I_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I_p(x,y) := \langle x,y \rangle$$

Es decir, no es más que el producto escalar de $\mathbb{R}^3$ restringido a cada plano tangente. A veces se le llama 1FF a la forma cuadrática asociada, $x \in T_pS \longrightarrow I_p(x,x) = \langle x,x \rangle$.

Si tenemos una parametrización $\mathbb{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ y $p = \mathbb{X}(u_0,v_0) = \mathbb{X}(q)$ entonces la matriz de la 1FF de S en p en la base $B = \{\mathbb{X}_u(q), \mathbb{X}_v(q)\}$ como:

$$\boxed{(I_p)_B = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle & \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle \\ \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle & \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle \end{pmatrix}}$$

hemos omitido q por sencillez

Así si $x,y \in T_pS$ tienen coordenadas (x_1,x_2) y (y_1,y_2) en la base $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$ se tiene que

$$I_p(x,y) = \langle x,y \rangle = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Observación: I a veces se escribe como: $I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ y los coeficientes E, F, G son funciones diferenciables en el abierto $\mathcal{U}$ y además, $E > 0$, $G > 0$ y $EG - F^2 > 0$.

Observa que si $\alpha : I \longrightarrow S$ es una curva diferenciable en S dada por la imagen por $\mathbb{X}$ de una curva en $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, e.d., $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$, entonces la longitud por segmento de curva $\alpha|_{[a,b]}$ con $[a,b] \subset I$ se puede calcular como: $\underline{L(\alpha|_{[a,b]})} = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}\, dt = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}$

donde E, F, G han de evaluarse en $(u(t), v(t))$.

Asimismo, si R es una región de la superficie S contenida en $\mathbb{X}(\mathcal{U})$ entonces se define su área mediante:

$$\underline{A(R)} := \int_{\mathbb{X}^{-1}(R)} \|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|\, du\,dv = \int_{\mathbb{X}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2}\, du\,dv$$

ISOMETRÍAS Y APLICACIONES CONFORMES

Una aplicación diferenciable $f: S_1 \longrightarrow S_2$ entre superficies regulares se llama ISOMETRÍA LOCAL si conserva la 1FF, e.d., si:

$$\langle df(p)x, df(p)y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in T_pS_1 \text{ y todo } p \in S_1.$$

f es isometría local $\iff df(p): T_pS_1 \longrightarrow T_pS_2$ es isometría local entre espacios vectoriales $\forall p \in S_1$.

Las isometrías locales preservan el producto escalar, por lo tanto preservan ángulos, áreas y longitudes.

Que exista una isometría local entre S_1 y S_2 no quiere decir que sean superficies localmente isométricas, pero si existe una isometría local sobreyectiva $f: S_1 \longrightarrow S_2$, entonces S_1 y S_2 son localm. isométricas

Si $f: S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría local, entonces $\forall p \in S_1$ existe $X_1: U \longrightarrow S_1$ alrededor de p y $X_2: U \longrightarrow S_2$ alrededor de $f(p)$ tales que $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ y $G_1 = G_2$. En otras palabras, la matriz asociada a la primera forma fundamental de S_1 en la base $\{(X_1)_u, (X_1)_v\}$ coincide con la matriz asociada a la 1FF de S_2 en la base $\{(X_2)_u, (X_2)_v\}$. Recíprocamente, si S_1 y S_2 sup. reg. tienen parametrizaciones X_1 y X_2 tales que $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f = X_2 \circ X_1^{-1}: X_1(U) \longrightarrow X_2(U)$ es una isometría global entre los abiertos $X_1(U) \subset S_1$ y $X_2(U) \subset S_2$.]

Un concepto más débil que el de isometría local es el de aplicación CONFORME. $f: S_1 \longrightarrow S_2$ es conforme si existe una aplicación diferenciable positiva $\lambda: S_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\langle df(p)x, df(p)y \rangle = \lambda(p) \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in T_pS_1 \text{ y } \forall p \in S_1.$$

Se puede caracterizar las aplicaciones conformes de modo similar a las isometrías. Los coeficientes de la 1FF se preservan salvo por multiplicación por una función diferenciable positiva λ.

GEOMETRÍA EXTRÍNSECA DE SUPERFICIES

LA APLICACIÓN DE GAUSS: Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una param. de S. Sea S un campo unitario normal diferenciable definido localmente en S. Podemos tomar $\boxed{N(\mathbb{X}(u,v)) = \dfrac{\mathbb{X}_u(u,v) \times \mathbb{X}_v(u,v)}{\|\mathbb{X}_u(u,v) \times \mathbb{X}_v(u,v)\|}}$

Entonces N define una aplicación $N: \mathbb{X}(\mathcal{U}) \subset S \to \mathbb{S}^2$ denominada aplicación de Gauss.

OPERADOR DE WEINGARTEN Y SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Para entender como se curva S en p analizamos como varía N cerca de p. Para eso consideramos la diferencial de N en p, e.d:

$(dN)(p): T_pS \longrightarrow T_pS$, esto nos permite definir el OPERADOR DE WEINGARTEN W_p de S en p como esa diferencial con el signo cambiado

$$W_p: T_pS \longrightarrow T_pS \qquad W_p(x) := -(dN)(p)x$$

OJO: W es para cada $p \in S$.

El operador de Weingarten es autoadjunto: $\langle W_p x, y\rangle = \langle x, W_p y\rangle \;\; \forall x,y \in T_pS$, $p \in S$

La SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL se define a partir de de W_p. Esta es una forma bilineal simétrica en T_pS (pero no tiene por qué ser definida positiva) como:

$$\mathrm{II}_p: T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \mathrm{II}_p(x,y) = \langle x, W_p y\rangle$$

FORMAS MATRICIALES DE W y II

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base de T_pS, el OW (apl. lineal) y la 2FF (apl. bilineal) tienen una expresión matricial con respecto a esta base.

$W_p v_1 = \omega_{11} v_1 + \omega_{21} v_2$ y $W_p v_2 = \omega_{12} v_1 + \omega_{22} v_2 \Longrightarrow (W_p)_B = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}$.

Al ser W_p autoadjunto, si B es ortogonal $\Longrightarrow (W_p)_B$ matriz simétrica.

Por el contrario: $(\mathrm{II}_p)_B = \begin{pmatrix} \mathrm{II}_p(v_1,v_1) & \mathrm{II}_p(v_1,v_2) \\ \mathrm{II}_p(v_2,v_1) & \mathrm{II}_p(v_2,v_2) \end{pmatrix}$

Así si $x,y \in T_pS$ tienen coordenadas (x_1,x_2) y (y_1,y_2) en la base $\mathcal{B}$, se puede calcular $\mathrm{II}_p(x,y)$ como: $\mathrm{II}_p(x,y) = (x_1,x_2)\,(\mathrm{II}_p)_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. A diferencia de $(W_p)_B$, la matriz $(\mathrm{II}_p)_B$ es siempre simétrica.

II y W A PARTIR DE UNA PARAMETRIZACIÓN

$\mathbb{X}: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie regular S.

N campo normal unitario diferenciable en $\mathbb{X}(\mathcal{U})$.

Entonces la matriz de la segunda forma fundamental de S en un punto $p = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ con respecto a la base $\boxed{\mathcal{B} = \{\mathbb{X}_u(u_0,v_0), \mathbb{X}_v(u_0,v_0)\}}$ de vectores coordenados es: $\boxed{\mathrm{II}_p \equiv \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{X}_{uu}, N\rangle & \langle \mathbb{X}_{uv}, N\rangle \\ \langle \mathbb{X}_{uv}, N\rangle & \langle \mathbb{X}_{vv}, N\rangle \end{pmatrix}}$

donde se ha omitido la dependencia con (u_0, v_0).

Observemos que $e = \langle \mathbb{X}_{uu}, N\rangle = -\langle \mathbb{X}_u, N_u\rangle$ ya que $\langle \mathbb{X}_u, N\rangle = 0$, y análogamente $f = \langle \mathbb{X}_u, N_v\rangle = \langle \mathbb{X}_v, N_u\rangle$ y $g = \langle \mathbb{X}_v, N_v\rangle$.

Además como $\langle x, W_p y\rangle = \mathrm{II}_p(x,y)$ $x, y \in T_pS$ expresados en la base B, podemos deducir: $(x_1, x_2)\,(I_p)_B (W_p)_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\,(\mathrm{II}_p)_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (I_p)_B (W_p)_B = (\mathrm{II}_p)_B \Longrightarrow \boxed{(W_p)_B = (I_p)_B^{-1} (\mathrm{II}_p)_B}$

CURVATURAS PRINCIPALES, CURVATURA DE GAUSS Y CURVATURA MEDIA

El operador de Weingarten respecto a una base ortonormal es siempre simétrica (su matriz) por lo que es diagonalizable con autovalores reales.

Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ una base ortonormal: $W_p e_1 = K_1(p) e_1$ y $W_p e_2 = K_2(p) e_2$

Los autovalores $K_1(p)$ y $K_2(p)$ de W_p se llaman <u>CURVATURAS PRINCIPALES</u> de S en p. Cualquier autovector de W_p se denomina <u>DIRECCIÓN PRINCIPAL</u> de S en p. Así si $K_1(p) \neq K_2(p)$ las direcciones principales son los múltiplos no nulos de e_1 y e_2, y si $K_1(p) = K_2(p)$ todo vector no nulo es dirección principal.

Una <u>LÍNEA DE CURVATURA</u> es una curva diferenciable $\alpha: I \longrightarrow S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección principal $\forall t \in I$, e.d., $W_{\alpha(t)} \alpha'(t) = \lambda(t) \alpha'(t)$ $\forall t \in I$ y cierta función de curvatura $\lambda: I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Una <u>DIRECCIÓN ASINTÓTICA</u> de S en p es un vector $x \in T_pS$ no nulo tal que $\mathrm{II}_p(x,x) = 0$. Una <u>LÍNEA ASINTÓTICA</u> de S es una curva diferenciable $\alpha: I \to S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección asintótica $\forall t \in I$, es decir $\mathrm{II}_p(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0$.

La CURVATURA DE GAUSS de S en p se define como:

$\boxed{K(p) := \det W_p}$ o, equivalentemente, $\boxed{K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p)}$

La CURVATURA MEDIA de S en p es $\boxed{H(p) := \frac{1}{2}\,\mathrm{traza}(W_p)}$, o equivalentemente $\boxed{H(p) = \frac{1}{2}\left(k_1(p) + k_2(p)\right)}$

La curvatura de Gauss es invariante al cambio de signo de N, pero H(p) sí.

En coordenadas locales, las curvaturas de Gauss y media se pueden escribir como: $\boxed{K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}}$ $\boxed{H = \frac{1}{2} \cdot \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}}$

Un punto p en S es exactamente de uno de estos cuatro tipos:

- Elíptico, si $K(p) > 0 \equiv k_1(p)$ y $k_2(p)$ mismo signo
- Hiperbólico, si $K(p) < 0 \equiv k_1(p)$ y $k_2(p)$ signo opuesto
- Parabólico, si $K(p) = 0$ pero $W_p \neq 0$, e.d., $k_1(p) = 0$ y $k_2(p) \neq 0$ o $k_1(p) \neq 0$ y $k_2(p) = 0$
- Plano, si $K(p) = 0$ y $W_p = 0 \equiv k_1(p) = 0$ y $k_2(p) = 0$.

Además, un punto p se dice Umbilical si $k_1(p) = k_2(p)$. Una superficie es totalmente umbilical si todos sus puntos son umbilicales.

Sup. regular conexa y orientable es totalm. umbilical $\Longleftrightarrow$ abto. de un plano o una esfera.

LA ACELERACIÓN DE UNA CURVA: CURVATURAS GEODÉSICA Y NORMAL

$\alpha: I \longrightarrow S$ curva regular en una superficie regular S de $\mathbb{R}^3$.
Podemos suponer que α está param. por longitud de arco.
$\alpha''(s)$ no tiene por qué ser tangente ni normal a S. Puesto que $\forall p \in S$ podemos descomponer $\mathbb{R}^3$ como $T_pS \oplus \mathrm{span}\{N(p)\}$, podemos considerar las componentes (o proyecciones) tangencial $(\alpha'')^T$ y normal $(\alpha'')^\perp$ de α'', de forma que $\alpha''(s) = \alpha''(s)^T + \alpha''(s)^\perp$ $s \in I$.

<u>TRIEDRO DE DARBOUX</u> de α en s, base ortonormal positivamente orientad de $\mathbb{R}^3$, es: $\{\alpha'(s),\ N(\alpha(s)) \times \alpha'(s),\ N(\alpha(s))\}$

Como α param. por arco $\Longrightarrow \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0\ \forall s \Longrightarrow \langle (\alpha'')^T, \alpha' \rangle = 0\ \forall s$

$\Longrightarrow \langle (\alpha'')^T, N \circ \alpha \rangle = 0 \Longrightarrow$ <u>$(\alpha'')^T$ proporcional a $(N\circ\alpha) \times \alpha'$ $\forall s \in I$.</u>

$(\alpha'')^T$ tangente a S $\forall s \in I$

A la correspondiente constante de proporcionalidad se le denomina <u>CURVATURA GEODÉSICA</u> de α en S: $\boxed{K_{g,\alpha}(s) = \langle \alpha'', N(\alpha(s)) \times \alpha' \rangle = \langle \alpha'', (N\circ\alpha)\times\alpha' \rangle = K_\alpha \langle \mathbb{H}_\alpha, (N\circ\alpha)\times\alpha' \rangle}$

Por otro lado $(\alpha'')^\perp$ es un campo de vectores (normal a S) definido como $\boxed{(\alpha'')^\perp = \langle \alpha'', N\circ\alpha \rangle N(\alpha(s))}$. Se define <u>CURVATURA NORMAL</u> de α en S como el coeficiente de dicha expresión: $\boxed{K_{n,\alpha} = \langle \alpha'', N\circ\alpha \rangle}$ $s \in I$

Usando de nuevo que $\alpha'' = K_\alpha \mathbb{H}_\alpha$ se tiene que: $\boxed{K_{n,\alpha} = K_\alpha \langle \mathbb{H}_\alpha, N\circ\alpha \rangle}$

Dado el Triedro de Darboux (base ortonormal) se tiene que:

$\boxed{\alpha'' = K_{g,\alpha}(N\circ\alpha)\times\alpha' + K_{n,\alpha}(N\circ\alpha)}$, y tomando normas: $\boxed{K_\alpha^2 = K_{g,\alpha}^2 + K_{n,\alpha}^2}$

$$K_{g,\alpha} = K_\alpha \langle \mathbb{H}_\alpha, (N\circ\alpha)\times \mathbb{t}_\alpha \rangle = \frac{1}{|\alpha'|^3} \langle \alpha'', (N\circ\alpha)\times\alpha' \rangle$$

$$K_{n,\alpha} = K_\alpha \langle \mathbb{n}_\alpha, N\circ\alpha \rangle = \frac{1}{|\alpha'|^2} \langle \alpha'', N\circ\alpha \rangle$$

CURVATURA NORMAL Y SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

S superficie regular en $\mathbb{R}^3$ con campo normal unitario N

$\alpha : I \to S$ curva diferenciable en S.

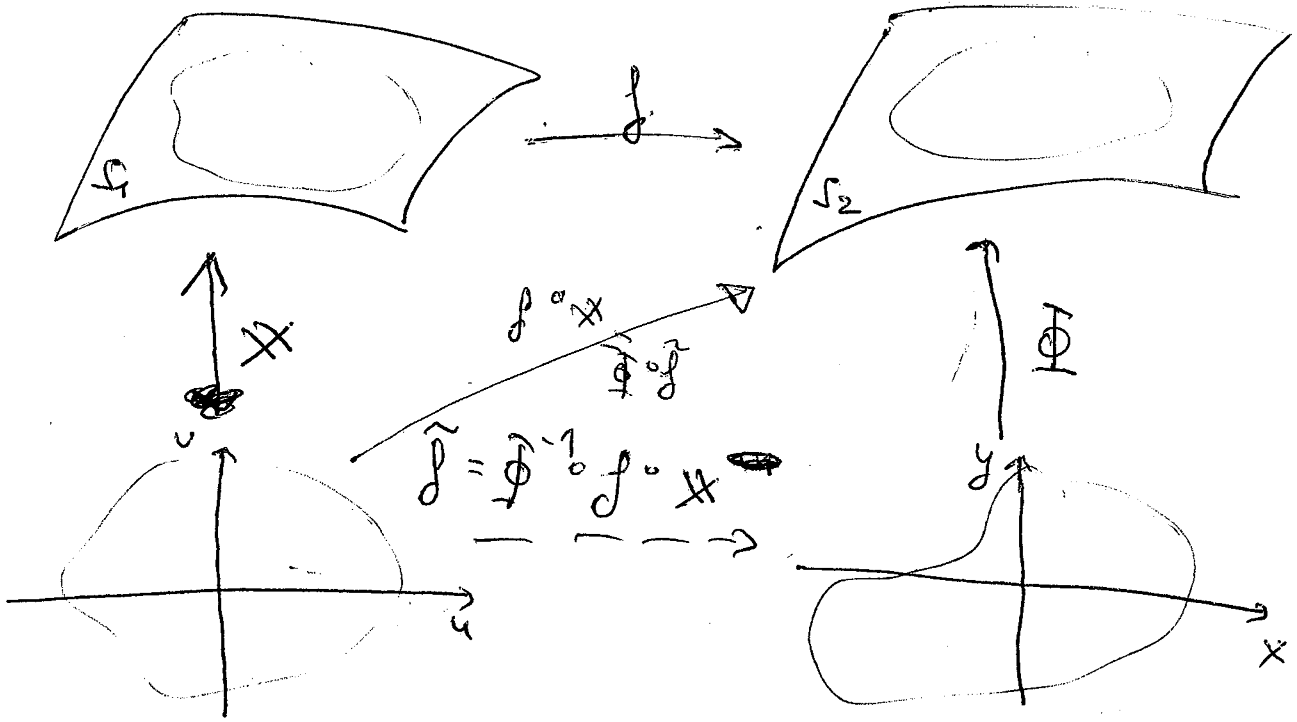
Derivando $\langle \alpha'(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0$ se obtiene: $\mathrm{II}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \langle \alpha''(t), N(\alpha(t)) \rangle$

Si α es regular se obtiene una relación entre la curvatura normal de α y la 2FF:

$$\boxed{K_{n,\alpha} = K_\alpha \langle H_\alpha, N \circ \alpha \rangle = \mathrm{II}(t_\alpha, t_\alpha)}$$

Así es posible definir la CURVATURA NORMAL $K_n(p, x)$ de S en p en la dirección de un vector unitario tangente $x \in T_pS$ como:

$$\boxed{K_n(p, x) := \mathrm{II}_p(x, x)}$$



$$\left(I_{\mathbf{x}(u,v)}\right) = \begin{pmatrix} E(u,v) & f(u,v) \\ F & G(u,v)\end{pmatrix} \qquad \left(I_{f\circ \mathbf{x}(u,v)}\right)$$

f isometría local $\iff I_{\mathbf{x}(u,v)} = I_{f\circ\mathbf{x}(u,v)} \quad \forall u,v$

Caso particular (e.g. HS-6)

$h: \mathbf{x}(u,v) \longmapsto \Phi(u,v) \quad ; \quad h(\mathbf{x}(u,v)) = \Phi(u,v)$

$h\circ \mathbf{x} = \Phi$

$\tilde{h} = \Phi^{-1}\circ h\circ \mathbf{x} = \Phi^{-1}\circ\Phi = id$

$\tilde{h}(u,v) = (u,v)$

$(I_{\mathbf{x}}) \equiv (I_{\Phi})$?

$\boxed{HS\text{-}13}$ $\quad h\circ\mathbf{x}(u,\theta) = \Phi(\theta, \operatorname{sen} u)$

$\tilde{h}(u,\theta) = \Phi^{-1}\circ \underbrace{h\circ\mathbf{x}(u,\theta)} = \Phi^{-1}\circ\Phi(\theta,\operatorname{sen}u) = (\theta, \operatorname{sen}u)$

$\left(I_{\mathbf{x}(u,\theta)}\right) \overset{?}{=} \left(I_{\underbrace{h\circ\mathbf{x}(u,\theta)}}\right)$

$h\circ\mathbf{x}(u,\theta) = \Phi(\theta,\operatorname{sen}u) = \underbrace{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen} u)}$

- $f: S_1 \longrightarrow S_2$ isometría local

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\langle (df)(p)v, (df)(p)w \rangle = \langle v, w \rangle$, $\forall p \in S_1$, $\forall v, w \in T_pS_1$

$df(p): T_pS_1 \longrightarrow T_{f(p)}S_2$

- $f: S_1 \longrightarrow S_2$ isometría $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ isometría local + biyectiva

---

- S_1, S_2 localmente isométricas

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in S_1$, $\exists U$ entorno abierto de p en S_1 y $f: U \longrightarrow f(U) \subset S_2$ con f isometría

y recíprocamente, $\forall q \in S_2$, $\exists V$ ent. de q en S_2

<u>Prop.</u> Si encuentras isometría local $f: S_1 \longrightarrow S_2$ sobre

$\Longrightarrow$ S_1 es localmente isométrica a S_2

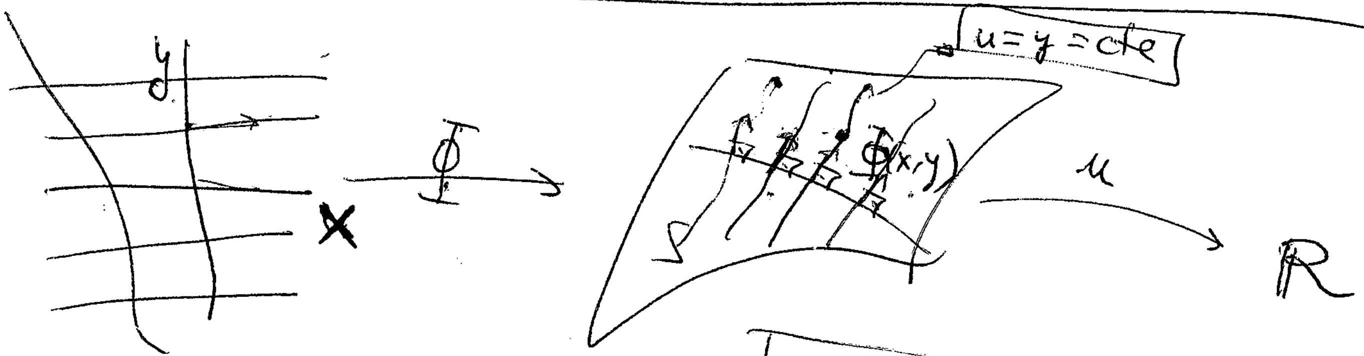
<u>Ej:</u> Cilindro ~ plano

Def. 1 $f: S_1 \longrightarrow S_2$ aplic. conforme.

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

Def. 2 $X: U \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow S$ parametrización,

es conforme si $(I_X) = \lambda(u,v)\, Id$.



$\beta(t)$
$(x(t), y(t))$ $\quad \alpha(t) = \Phi \circ \beta(t)$ $\quad \boxed{u(\Phi(x,y)) := y} \Longleftrightarrow \boxed{u = y}$

Tangentes a curvas $u = y = cte$ son Φ_x

$$\langle \alpha'(t), \Phi_x(\beta(t)) \rangle = 0$$

$$\boxed{\alpha'(t) = \Phi_x(\beta(t))\, x'(t) + \Phi_y(\beta(t))\, y'(t)}$$

$$= \langle \Phi_x(\beta(t))\, x'(t) + \Phi_y(\beta(t))\, y'(t), \Phi_x(\beta(t)) \rangle = 0$$

$$= E(\beta(t))\, x'(t) + F(\beta(t))\, y'(t)$$

$$(x', y') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

todo en la base $\{\Phi_x, \Phi_y\}$

$$u(x,y) = x^2 y - e^{x+y^3}$$

$$du = 2x\,dx\,y + x^2\,dy - e^{x+y^3}(dx + 3y^2\,dy)$$

$$\left| \begin{array}{l} u(x,y) = y \\ v(x,y) = x \ldots \end{array} \right|$$

$\boxed{I_{\Phi}(x,y)} = xy\,dx^2 + xy\,dx \ldots$

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

Df

$f^{-1}(c)$

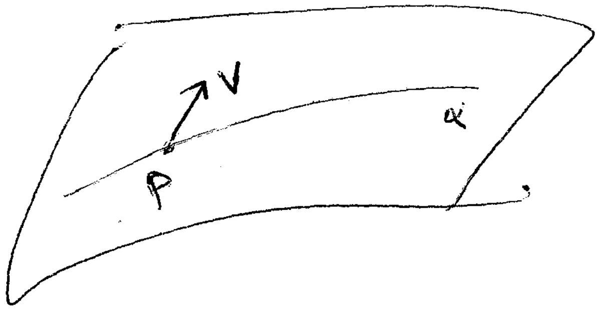
$p\in S$, $v\in T_pS$

$\cancel{\|v\|} =$

$\longrightarrow E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ $\quad$ $E(u,v)$ dados

---



$\alpha(t) = x(u(t), v(t))$

$\alpha: I \longrightarrow S$

$0\in I$, $p=\alpha(0)$

$\vec{v}\in T_pS$

Buscamos $V: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad$ $V(t)\in T_{\alpha(t)}S$ $\forall t$

$V(0) = \vec{v}$

$\left(V'(t)\right)^T = 0$

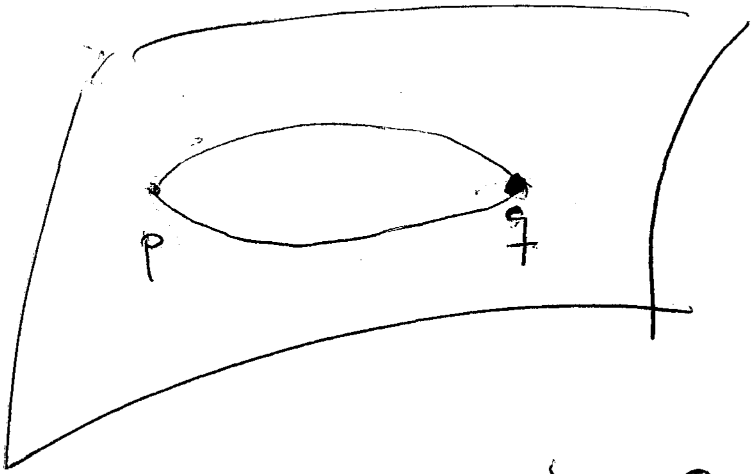
$x(u,v)$

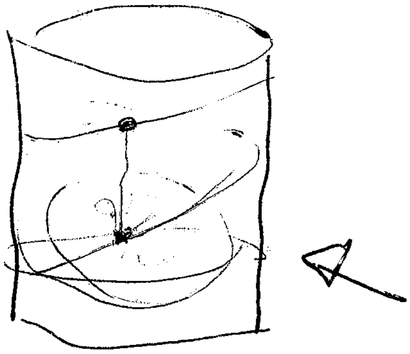
$\vec{v} = a\,x_u + b\,x_v$

$V(t) = a(t)\,x_u^{(u(t),v(t))} + b(t)\,x_v$

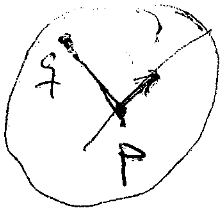
$V'(t) = a'\,x_u + a\left(x_{uu}\,u' + x_{uv}\,v'\right) + \dots$

$\langle V'(t), x_u\rangle = 0 = \langle V'(t), x_v\rangle$



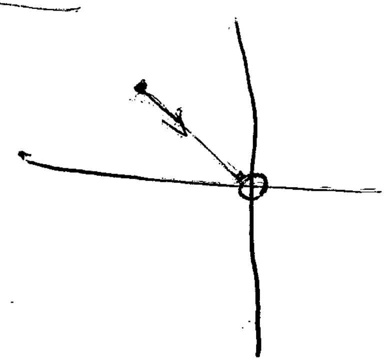


$(\gamma'')^T = 0$



$p \in S$, $v \in T_pS$

$\exists\, \gamma_v : I_v \longrightarrow S$, $I_v \subseteq \mathbb{R}$



$p, q \in S$, $\exists\, \gamma$ uniendo p, q

$L(\gamma) \le L(\alpha)$, $\forall \alpha$ uniendo p y q

$\Longrightarrow$ γ (reparam.) es geodésica

---

curva minimizante $\Longrightarrow$ geodésica

no en general
sí localmente

$f(at+b,\ ct+d)$

pol → como
ca → cil

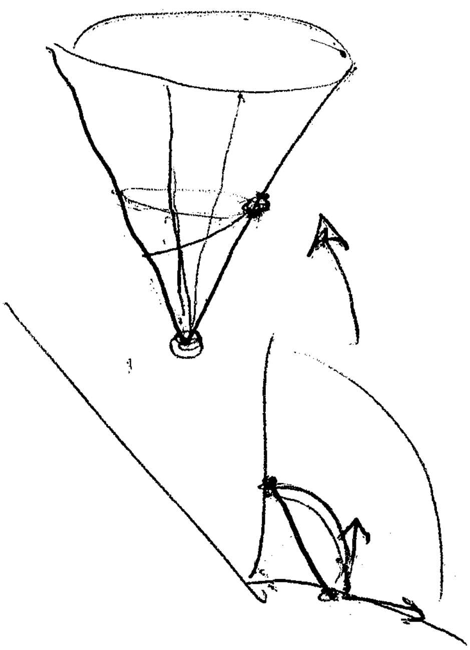
$I_x \circ I_\varphi$

$F = 0 \rightarrow X_u, X_v$ ortogonales

$f = 0 \Longrightarrow X_u, X_v$ direc. ppales

$\alpha \,/\, \alpha' = X_u(u(t), v(t))$

$(\alpha'')^T = \frac{D}{dt}\alpha' = \begin{pmatrix} X_{uu} u' \\ + X_{uv} v' \end{pmatrix}^T$

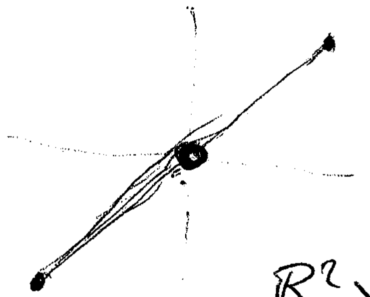


$\gamma(t) = X(u(t), v(t))$

$\gamma'(t) = X_u u' + X_v v'$

$I = \|\gamma'(t)\|^2 = E(u')^2 + F u'v' + G(v')^2$

$\boxed{(\gamma'')^T = 0}$



$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$