[redacted] [redacted]

Sea el método numérico:

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\left(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\right)$$

Define el método de la forma pedida:

$$\begin{aligned}
y_{n+2} - y_n &= \frac{h}{3}\left(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f\left(t_n, y_n\right) + 4f\left(t_{n+1}, y_{n+1}\right) + f\left(t_{n+2}, y_{n+2}\right)\right) \\
&= \frac{h}{3}\left(f\left(t_n, y_n\right) + 4f\left(t_n + h, y_{n+1}\right) + f\left(t_n + 2h, y_{n+2}\right)\right) \\
&= h\Phi_f\left(t_n, y_n, y_{n+1}; h\right)
\end{aligned}$$

Define la función incremento:

$$\Phi_f\left(t_n, y_n, y_{n+1}; h\right) = \frac{f\left(t_n, y_n\right) + 4f\left(t_n + h, y_{n+1}\right) + f\left(t_n + 2h, y_n + h\Phi_f\left(t_n, y_n, y_{n+1}; h\right)\right)}{3}$$

Esto nos da una definición implícita. Utilizando el punto fijo de la función:

$$F\left(\Phi_f\right) = \frac{f\left(t_n, y_n\right) + 4f\left(t_n + h, y_{n+1}\right) + f\left(t_n + 2h, y_n + h\Phi_f\right)}{3}$$

Tal punto fijo existirá si $F\left(\Phi_f\right)$ es Lipschitz, lo cual se puede garantizar con un h lo suficientemente pequeño en relación con la constante de Lipschitz de $f(t, y)$.

¿De qué parámetros depende?

Depende de t_n, y_n, y_{n+1} y h. De ellos depende de forma no trivial. Como, además, $\alpha_2 = 1 \neq 0$, decimos que la función de incremento es de 2 pasos.

Función Incremento

[redacted]

02/10/2020

La función incremento de $y_{n+1} - y_n = hf(t_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta)y_{n+1})$, $\theta \in (0,1)$ es

$$\begin{aligned}
\phi(t_n, y_n; h) &= f(t_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta)y_{n+1}) \\
&= f(t_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta)(y_n + hf(t_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta)y_{n+1}))) \\
&= f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h\phi(t_n, y_n; h))
\end{aligned} \tag{1}$$

luego queda

$$y_{n+1} - y_n = h\phi(t_n, y_n; h) \tag{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f_n + (1-\theta) f_{n+1}) \quad \theta \in (0,1)$$

Definirlo de la forma $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\phi(t_n, y_n, \ldots, y_{n+k-1}; h)$

Identificar el punto fijo $\phi = F(\phi)$ y decir de que valores depende

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f_n + (1-\theta) f_{n+1})$$

$$y_{n+1} - y_n = h(\theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_{n+1}, y_{n+1}))$$

$$= h(\theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) \cdot f(t_n + h, y_n + h\phi_f))$$

$$\phi_f(t_n, y_n; h) = \underbrace{\theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_n + h, y_n + h\phi_f)}_{F(\phi_f)}$$

$\theta \in (0,1)$
$\theta = \text{cte}.$

La función incremento $\phi_f(t_n, y_n; h)$ depende de las variables t_n, y_n, h a través de la función f.

$$y_{n+2} = \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h f_{n+2}$$

Define el método de la forma $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\,\phi(t_n, y_n, \ldots, y_{n+k-1}; h)$.

Identifica el punto fijo $\phi = F(\phi)$ para determinar la función incremento y de qué variables depende esta función.

$$y_{n+2} = \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h f_{n+2}$$

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} h f_{n+2}$$

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} h f(t_{n+2}, y_{n+2})$$

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} h f(t_n + 2h, y_{n+2})$$

$$\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \underbrace{\frac{2}{3} f\left(t_n + 2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + h\,\phi_f\right)}_{F(\phi_f) = \phi_f}$$

ϕ_f, la función de incremento, depende de sus argumentos, t_n, y_n, y_{n+1}, h, a través de la función f.