HOJA 5

$\boxed{1.}$ $\xrightarrow[PP.]{}$? $\xrightarrow[unif.]{}$?

a) $f_n(x) = \exp(-nx^2)$ en $[-1,1]$

$$f_n(x) \xrightarrow[PP]{} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } 0<|x|\leq 1 \end{array} \right\} \stackrel{def.}{=} f(x)$$

$f_n(0) = 1 \quad \forall n$

Si $x \neq 0$, $-nx^2 \longrightarrow -\infty \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow 0$

¿$f_n \xrightarrow[unif.]{} f$?

- Respuesta rápida: NO, porque las f_n son continuas pero el límite $f(x)$ no es continua en $x=0$.
- Norma infinito: $\|f_n - f\|_\infty \geq$? indep. de n

Si $x \neq 0$ $|f_n(x) - f(x)| = f(x)$. En $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \to nx^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1/\sqrt{n}) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ y $\|f_n - f\|_\infty \geq \frac{1}{e} \quad \forall n$

f) $f_n(x) = x^{-n} e^x$ en $(1,\infty)$

$f_n(x) \xrightarrow[PP]{n\to\infty} 0 \stackrel{def}{=} f(x)$ recordar: $x^n \longrightarrow \infty$ si $x>1$

¿$f_n \xrightarrow[unif]{} f$? $\equiv \|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \xrightarrow{?} 0$

para n fijo: $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-n}e^x = \infty \Longrightarrow \|f_n\|_\infty = \infty$

$f_n \xrightarrow[unif]{} f \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\begin{array}{l} \forall x \in (1,\infty) \\ \forall n \geq N \end{array}$

En este caso: $|f_n(x) - \underset{0}{\underset{|||}{f(x)}}| = |f_n(x)| = f_n(x) = x^{-n}e^x$

$x^{-n}e^x < \varepsilon \Rightarrow -n\log(x) + x < \log(\varepsilon) \Longrightarrow n\log x > x - \log\varepsilon \Longrightarrow$

$\Rightarrow n \geq \frac{x - \log\varepsilon}{\log x}$ ... Se necesitaría $N(\varepsilon) \geq \frac{x-\log\varepsilon}{\log x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

Imposible! $N=N($

2.1 $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ en $[0,1]$

a) $\xrightarrow[\text{pp}]{} ??$ $\xrightarrow[\text{unif.}]{} ??$

$n^2 x e^{-nx^2} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ (x \text{ fijo})}]{(*)} 0$

OJO: para $x=0$ $f_n(0)=0$ $\forall n \Rightarrow f_n(0) \to 0$

$x \neq 0$ $n^2 x e^{-nx^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (exponencial crece mucho más rápido que un polinomio)

$f_n \not\xrightarrow[\text{unif.}]{} 0$ Razón: $\|f_n - f\|_\infty \overset{f=0}{=} \|f_n\|_\infty$ no converge a 0 cuando $n\to\infty$

Si $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n^2 \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-1} = \frac{n^{3/2}}{e}$, e.d.,

máx porque es continua

$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \geq f_n(1/\sqrt{n}) \Rightarrow \|f_n\|_\infty \geq \frac{n^{3/2}}{e}$ que converge a ∞ cuando $n \to \infty$.

(*) $\sqrt{n}\,x = y \longrightarrow n^2 x^4 = y^4 \longrightarrow n^2 x = \frac{y^4}{x^3}$

$n^2 x e^{-nx^2} = \frac{y^4 e^{-y^2}}{x^3}$, ahora $n \to \infty \iff y \to \infty$ y

$\lim_{y\to\infty} y^4 e^{-y^2} = 0$

OJO: todo esto no es necesario, basta decir que exp() crece + rápido que pol.

b) Ver que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \overset{?}{=} \infty$ $\frac{d}{dx}\left(e^{-nx^2}\right) = -2nx e^{-nx^2}$

$\int_0^1 n^2 x e^{-nx^2} dx \overset{\text{inmediata}}{=} \left.\frac{-n}{2}\left(e^{-nx^2}\right)\right]_0^1 = \cdots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cdots = \infty$ FIN PROBLEMA

otros métodos

$\longrightarrow$ cambio variable $\sqrt{n}\,x = u$: $\int_0^{\sqrt{n}} n^{3/2} u e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{n}} = n \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} u e^{-u^2} du}_{\text{se puede calcular explícitam.}}$

$\int_0^{\sqrt{n}} u e^{-u^2} du \xrightarrow[n\to\infty]{\text{sin calcular explícitam.}} \int_0^\infty u e^{-u^2} du$ es finita

Razón: $u e^{-u^2} \leq \frac{C}{u^2}$ si $u \geq 1$ (e.d. $u^3 e^{-u^2} \leq C$ si $u \geq 1$)

e.d., $u^3 e^{-u^2} \leq C$ si $u \geq 1$

$\longrightarrow$ No! f_n tendría que converger uniformemente!

¿Se podría intercambiar $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n$ por $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = \int_0^1 \infty\, dx = \infty$?

$\lim_{u\to\infty} u^3 e^{-u^2} = 0 \Rightarrow \exists R$ tal que $u^3 e^{-u^2} \leq 1$ si $u \geq R$

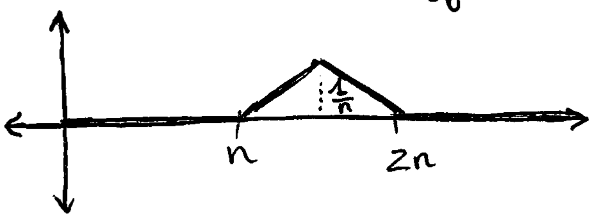
En $[1,R]$ $u^2 e^{-u^2}$ es continua $\Rightarrow$ está acotada $\Rightarrow u^2 e^{-u^2} \leq K$ si $1 \leq u \leq R$

$\Rightarrow u^2 e^{-u^2} \leq K+1$ si $u \geq 1$ $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{u^2}du$ finita

Dicho esto y como hemos comentado, en este caso se puede calcular $\int_0^1 n^2 x e^{-nx^2} dx$ y ver que $\longrightarrow \infty$.

$\boxed{4.}$ $f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} f$ en $[0,\infty)$ tal que existen $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n$ y $\int_0^\infty f$ pero no coinciden.

<u>Observación</u>: $\int_0^\infty (f_n - f) = \int_0^\infty f_n - \int_0^\infty f \not\to 0 \Leftrightarrow$ buscar f_n tal que $f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} 0$ pero $\int_0^\infty f_n \not\to 0$.



$\int_0^\infty f_n = \text{área}\Big($  $\Big) = \frac{1}{2}$

$\int_0^\infty f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ $\left(f_n \xrightarrow[PP]{} 0\right)$

$f_n(x) = 0$ a partir de $n \geq x$

$f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} 0$ Razón: $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ✓

$\int_0^\infty f = \int_0^\infty 0 = 0$

$$\underbrace{\lim \int_0^\infty f_n}_{= \frac{1}{2}} \neq \underbrace{\int_0^1 \lim f_n}_{= 0}$$

$\boxed{5.}$ $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$

a) ¿ $f_n \xrightarrow[pp]{} ?$ es uniforme ?

$$(\cos(\pi x))^{2n} \qquad r^{2n} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } |r|<1 \\ 1 & \text{si } |r|=1 \\ \infty & \text{si } |r|>1 \end{cases}$$

$\cos(\pi x) = \pm 1 \iff x \in \mathbb{Z}$

En otro caso $|\cos(\pi x)| < 1$.

$$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[pp.]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$f_n \not\xrightarrow[unif.]{}$ pues f_n es continua $\forall n \in \mathbb{N}$ y su límite pp no ∎

b) Describir $\lim\limits_{K\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(K!\,x)$

caso 1: Si $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{a}{b}$

si $K \geq b$, $f_n(\underbrace{K!\,x}_{\substack{\shortparallel \\ K!\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}}}) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

y por tanto, en este caso, $\lim\limits_{K\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(K!\,x)\right) = 1$

caso 2: si $x \notin \mathbb{Q}$, entonces $K!\,x \notin \mathbb{Z}$ sea cual sea K. $f_n(K!\,x) \equiv 0 \implies \lim\limits_{n} = 0 \implies \lim\limits_{K} = 0$

$\boxed{6.}$ $f_n = x^2 + \frac{1}{n}$, $g_n = \frac{1}{nx}$ $[1,\infty)$

a) Demostrar que f_n, g_n convergen unif.

$f_n \xrightarrow{\text{unif.}} x^2 = f(x)$ $\left(\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \longrightarrow 0\right)$

$g_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$ $\quad \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n}$ si $x \geq 1 \Rightarrow \|g_n\|_\infty = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$

Pero $f_n g_n \not\xrightarrow{\text{unif}}$ $h_n = f_n g_n = \dfrac{x^2 + \frac{1}{n}}{nx} = \dfrac{nx^2+1}{n^2x} \xrightarrow[\text{PP}]{} 0$

pero no lo hace unif. : Cogemos $x = \frac{1}{n} \Rightarrow h_n(\frac{1}{n}) = \dfrac{\frac{1}{n}+1}{1} \geq 1$

y $\|h_n\|_\infty \geq 1 \not\longrightarrow 0$

b) $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f = x^2$ pero $f_n^2 \not\xrightarrow{\text{unif}} f^2$ (parecido apartado anterior)

$f_n^2 - f^2 = \dfrac{2x^2}{n} + \dfrac{1}{n^2} \not\xrightarrow{\text{unif.}} 0$

$x = \sqrt{n}$

$\boxed{7.}$ $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ $\quad f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ en $\mathbb{R}$ y $f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x)$ si $x \neq 0$

pero no en 0.

$f_n(x) \xrightarrow[\text{PP}]{} 0$ $\begin{cases} \text{si } x = 0 & f_n(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{si } x \neq 0 & nx^2 \to \infty \text{ y } f_n(x) \to 0 \end{cases}$

Para ver $\xrightarrow{\text{unif.}}$: $|f_n(x)| \leq \begin{cases} a & \text{si } |x| \leq a \\ \frac{1}{na} & \text{si } |x| \geq a \end{cases}$

$\varepsilon > 0 \longrightarrow a = \varepsilon \longrightarrow n \geq N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}$

9.1 $x' + a(t)x = 0$

$a(t)$ es continua y periódica (de periodo T)

Demostrar que si $x(t)$ es solución, $y(t) \overset{def}{=} x(t+T)$ también lo es.

$$y'(t) = x'(t+T) \underset{\substack{\uparrow \\ x \text{ sol}}}{=} -\underset{\substack{\| \\ a(t) \\ \text{porque} \\ a(t) \text{ es periódica}}}{a(t+T)} \cdot \underset{y(t)}{\underline{x(t+T)}} \implies y'(t) + a(t)\,y(t) = 0$$

) Demostrar que $\exists C$, constante, tal que $x(t+T) = C\,x(t)$

CASO 1: $x(t) \equiv 0 \implies x(t+T) \equiv 0 \implies$ cualquier C vale

CASO 2: $x(0) \neq 0$

Sabemos que $x(t+T)$ es solución con valor $x(T)$ en $t=0$

con $C = \dfrac{x(T)}{x(0)}$.

$C\,x(t)$ es solución con valor $\dfrac{x(T)}{x(0)}\,x(0) = x(T)$ en $t=0$

Por unicidad $x(t+T) = C\,x(T)$ $\left(C = \dfrac{x(T)}{x(0)} \right)$

Observación: $x(0) = 0 \overset{\text{unic.}}{\implies} x(t) \equiv 0$

) ¿$a(t)$ tal que existe solución no trivial de periodo T?

Por ⓑ es periódica $\iff c = 1$, e.d. $x(T) = x(0)$

$$x' = -a(t)x \implies x(t) = x(0)\,e^{-\int_0^t a(s)\,ds}$$

$$x(T) = x(0) \iff e^{-\int_0^T a(s)\,ds} = 1 \iff \int_0^T a(s)\,ds = 0$$

$\boxed{11.}$ Indicaciones: $x' = a(t)x + b(t)$ a,b periódicas de periodo T

a) $x(0) = x(T) \implies x(t)$ es solución periódica $(x(t+T) = x(t))$

$$x(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}\left[c_1 + \int_0^t b(s)\,e^{-\int_0^s a(u)du}\,ds\right]$$

$$|F(\xi)-F(\eta)| = |\xi e^{rT} - \eta e^{rT}| = e^{rt}|\xi-\eta|$$ Como $r<0$, $e^{rT}<1$

y F es contractiva $\Rightarrow \exists!$ pto. fijo $\bar{\xi}$

$x(T,\bar{\xi}) = \bar{\xi} = x(0,\bar{\xi}) \Rightarrow x(t,\bar{\xi})$ es periódica de periodo T (por unicidad)

Razón

$y(t)=x(t+T)$ es solución

$$x'(t+T) = rx(t+T) + \underbrace{b(t+T)}_{b(t)}, \text{ e.d., } y'(t) = ry(t)+b(t)$$

$$y(0) = x(T) = x(0) = \bar{\xi} \quad (x(T,\bar{\xi}) = x(0,\bar{\xi}) = \bar{\xi}) \overset{\text{unic.}}{\Longrightarrow} \underset{\overset{\shortparallel}{x(t+T)}}{y(t)} = x(t)$$

$x_0(t) \overset{def}{=} x(t,\bar{\xi})$ es periódica de periodo T

$\left.\begin{array}{l} x_0(t) \\ y_0(t) = x(t+T,\bar{\xi}_0) \end{array}\right\}$ son soluciones en $\begin{array}{l} x_0(0) = \bar{\xi} \\ y_0(0) = \bar{\xi} \end{array}$ $\Rightarrow y_0 \equiv x_0$ e.d. $x_0(t+T) = x_0(t)$

b) $r<0 \Rightarrow$ cualquier solución $x(t)$ "converge" a $x_0(t)$ cuando $t\to\infty$.

$$x(t) - x_0(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$y(t) \overset{def.}{=} x(t) - x_0(t)$ es solución de la homogénea, e.d.,

$$y' = ry \Rightarrow y(t) = y(0)e^{rt}, \text{ e.d., } |y(t)| = |y(0)|e^{rt} \underset{r<0}{} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

10. (*) $x' = rx + b(t)$ donde $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$ y $b(t)$ periódica de periodo T.

i) $r<0$ $\quad F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ \xi \longmapsto x(T,\xi)$ donde $x(t,\xi)$ es la solución de (*) con $x(0) = \xi$

Observación: $x' - rx = b(t) \overset{\text{mult. por } e^{-rt}}{\Longrightarrow} \underbrace{\left(e^{-rt} x(t)\right)'}_{} = e^{-rt}(x'-rx) = e^{-rt} b(t)$

integral + TFC

$$\Rightarrow e^{-rt}x(t) - \underbrace{e^{-r0} \cdot x(0)}_{\xi} = \int_0^t e^{-rs} b(s)\, ds$$

$$x(t) = \xi e^{-rt} + e^{rt}\int_0^t e^{-rs}\, b(s)\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \xi e^{-rt} + e^{rt}\int_0^t e^{-rs} b(s)\, ds$$

Si G es $x' = g(t)x + b(t)$ y G es una primitiva de g, por ejemplo $\int_0^t g(s)\,ds$

$$\left(e^{-G(t)} x(t)\right)' = e^{-G(t)} x' - g(t) e^{-G(t)} x = e^{-G(t)}(x' - gx) =$$

$$= e^{-G(t)} b(t)$$

$F(t,x) = rx + b(t)$

$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = |r| = \text{const} \Rightarrow F: [a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\underbrace{\text{unif. Lipschitz}}_{\text{Lipschitz en } x \text{ y unif. en } t}$

$\Rightarrow \exists!$ en $[a,b]$ $\forall a,b \Rightarrow \exists!$ en $t \in \mathbb{R}$.

Demostrar que F tiene un único punto fijo

Razón

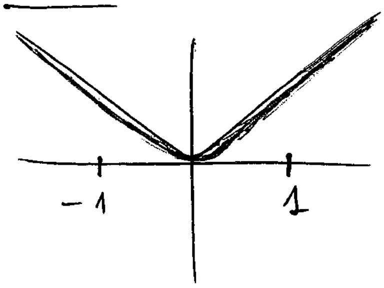
Vamos a ver que F es contractiva:

$$F(\xi) = x(T,\xi) = \xi e^{rT} + \int_0^T e^{r(T-s)} b(s)\, ds$$

$\underline{18.1}$ $\quad f_n \in C^1$ en $(-1,1)$

$f_n(x) \xrightarrow[\text{unif}]{} |x|$

<u>Visual</u>



(no lo ha hecho)