Definición de topología. Ejemplos de topologías.

1. Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología sobre X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demuestra que $\mathcal{T}$ es la topología discreta de X.

2. Sea X un conjunto con más de dos elementos.

(i) Define dos topologías $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ sobre X de modo que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no sea una topología.

(ii) Sea $\mathcal{T}_j$, $j \in J$ una familia de topologías sobre X. Prueba que $\bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j$ es también una topología sobre X.

3. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada (a,b) de U existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\big) \cup \big(\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big) \subset U.$$

Estudia si $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

4. Sean X un conjunto y a un elemento de X. Se considera la familia $\mathcal{T}_a$ de los subconjuntos U de X tales que o bien U es vacío, o bien $a \in U$. Estudia si $\mathcal{T}_a$ es una topología en X.

5. Sea (X,d) es un espacio métrico. Para cualesquiera x, y, x' e y' elementos de X, prueba que

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y').$$

Deduce de ello que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$ cuando $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0 = \lim_{n\to\infty} d(y_n,y)$.

I.2 Bases y entornos.

6. Se consideran las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty,b) \colon b \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_{\rightarrow} = \{(a,\infty) \colon a \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Demuestra que cada familia es una base de una topología sobre $\mathbb{R}$;

(ii) compara estas topologías, y

(iii) demuestra que la topología generada por $\mathcal{B}_{\leftarrow} \cup \mathcal{B}_{\rightarrow}$ es la usual.

7. Prueba que si $\mathcal{B}$ es una base para una topologia sobre X, entonces la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{B}$.

8. Sea $\mathcal{T}_j$, $j \in J$ una familia de topologías sobre X. Demuestra que existe una topología que contiene a todas las $\mathcal{T}_j$, para $j \in J$ y además es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

9. Para cada punto (x,y) de $\mathbb{R}^2$ y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el siguiente conjunto $B((x,y);r)$: el cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x,y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x,y). Haz un dibujo que te ayude a demostrar que

$$\mathcal{B} = \{B((x,y);r) \colon (x,y) \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

es una base para una topología en $\mathbb{R}^2$.