Geometría de Curvas y Superficies. Curso 2016-17.
Universidad Autónoma de Madrid. Departamento de Matemáticas.

Hoja 7

1. Sea S_1 la superficie dada por la siguiente parametrización:

$$\mathbf{X}(u,v) = \left(u\cos v \,,\, u\mathrm{sen}\, v \,,\, u+v \right) ,$$

y sea S_2 el hiperboloide de una hoja con parametrización:

$$\Phi(z,\theta) = \left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta \,,\, \sqrt{1+z^2}\mathrm{sen}\,\theta \,,\, z \right) .$$

Encuentra una isometría local $h : S_1 \to S_2$ siguiendo las indicaciones:

(a) Calcula $I_{\mathbf{X}}$ e I_{Φ}.

(b) Plantea $\mathbf{X}(u,v) \overset{h}{\longmapsto} \Phi\big(z(u,v)\,,\,\theta(u,v)\big)$, para ciertas funciones $z(u,v), \theta(u,v)$, y escribe el sistema de EDPs que éstas tienen que satisfacer para que h sea isometría local.

(c) Calcula las funciones $K_{\mathbf{X}}(u,v)$ y $K_{\Phi}(z,\theta)$. Aplica el teorema egregio de Gauss y determina una de las dos funciones $z(u,v)$ o $\theta(u,v)$.

(d) Vuelve ahora la sistema de EDPs y completa el cálculo de h.

2. Considera las superficies S_1 y S_2 parametrizadas respectivamente por:

$$\mathbf{X}(u,v) = (u\cos v, u\mathrm{sen}\, v, v)$$
$$\mathbf{Y}(u,v) = (u\cos v, u\mathrm{sen}\, v, \log u)$$

(a) Demuestra que la curvatura gaussiana de S_1 en el punto $\mathbf{X}(u,v)$ coincide con la curvatura gaussiana de S_2 en el punto $\mathbf{Y}(u,v)$.

(b) Demuestra que la función de S_1 en S_2 definida por $\mathbf{X}(u,v) \mapsto \mathbf{Y}(u,v)$ no es una isometría local.

(c) Demuestra que no hay ninguna isometría local entre S_1 y S_2.

3. Encuentra las geodésicas en:

(a) El cilindro circular $x^2+y^2=1$.

(b) El cono circular $x^2+y^2=z^2$ con $z>0$.

Sugerencia: Una isometría local entre superficies lleva geodésicas en geodésicas.

4. Interpretando línea recta como geodésica, decide, razonadamente, cuales de las siguientes propiedades de la geometría euclidea en el plano son ciertas para un cono circular.

(a) Dados dos puntos en el plano hay una línea recta pasando por ellos.

(b) Dados dos puntos en el plano hay una única línea recta pasando por ellos.

(c) Dos línea rectas se intersecan como mucho en un punto.

(d) Existen líneas rectas que no se intersecan.

CILINDRO	CONO
V	V
F, ∞	F
F	depende del ángulo
V	F

depende del ángulo del cono

(e) Una línea recta puede continuarse indefinidamente.

(f) Una línea recta define la distancia mas corta entre cualquier par de puntos en ella.

(g) Una línea recta no puede insersectarse a sí misma transversalmente, es decir con dos vectores tangentes no paralelos en el punto de intersección.

5. Sea $\gamma(t)$ una curva con rapidez uno en el helicoide S parametrizado por:

$$\mathbf{X}(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, v).$$

(a) Demuestra que

$$(u')^2 + (1+u^2)(v')^2 = 1$$

(b) Demuestra que si γ es una geodésica en S, entonces

$$v' = \frac{a}{1+u^2}, \qquad \text{con } a \text{ constante.}$$

(c) Encuentra las geodésicas correspondientes a $a = 0$ y $a = 1$.

6. Sea $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ una curva plana parametrizada por longitud de arco y sea S el cilindro formado por las rectas verticales que cortan a γ, con parametrización

$$\mathbf{X}(u,v) = (x(u), y(u), v).$$

(a) Encuentra las geodésicas en S.

(b) Demuestra que para una curva espacial birregular α las siguientes condiciones son equivalentes:

i. Existe un cilindro en el cual α es geodésica.

ii. La tangente unitaria $\mathbf{t}_\alpha$ forma un ángulo constante con una dirección fija en $\mathbb{R}^3$.

hecho hoja anterior

iii. La tangente unitaria $\mathbf{t}_\alpha$ traza una circunferencia, o parte de ella.

iv. El cociente τ_α/k_α es constante.

Sugerencia: Parametrizar por arco y rotar para que la dirección fija en ii. sea vertical, entonces $\mathbf{t}_\alpha(s) = (a\cos\theta(s), a\operatorname{sen}\theta(s), b)$ donde a, b constantes con $a^2+b^2 = 1$ y $\theta(s)$ es una cierta función.

7. Considera un círculo de latitud C, parametrizado por longitud de arco, en la esfera unidad. Fijado un punto P en C, determina el efecto de trasladar paralelamente un vector unitario tangente a C en P a lo largo del círculo.

HOJA 7

$\boxed{1.}$ $S_1: \mathbb{X}(u,v) = (u\cos v,\ u \operatorname{sen} v,\ u+v)$
$S_2: \Phi(z,\theta) = \left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta,\ \sqrt{1+z^2}\operatorname{sen}\theta,\ z\right)$ } Dado enunciado

a) Calcular $I_{\mathbb{X}}$ e I_Φ.

$\mathbb{X}_u = (\cos v,\ \operatorname{sen} v,\ 1)$
$\mathbb{X}_v = (-u\operatorname{sen} v,\ u\cos v,\ 1)$

$E = 2$
$G = u^2+1$
$F = 1$

$$I_{\mathbb{X}} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & u^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_z = \left(\frac{\cancel{2}z}{\cancel{2}\sqrt{1+z^2}}\cos\theta,\ \frac{\cancel{2}z}{\cancel{2}\sqrt{1+z^2}}\operatorname{sen}\theta,\ 1\right)$$

$$\Phi_\theta = \left(\sqrt{1+z^2}(-\operatorname{sen}\theta),\ \sqrt{1+z^2}\cos\theta,\ 0\right)$$

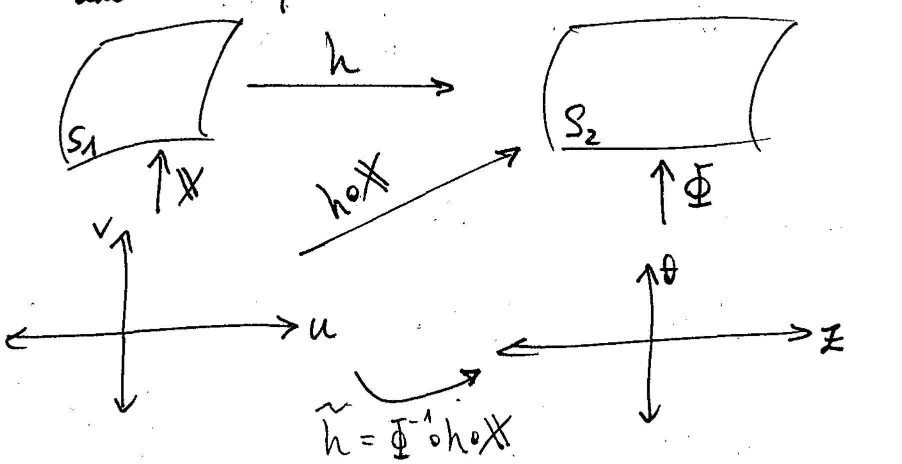
$$I_\Phi \equiv \begin{pmatrix} \frac{1+2z^2}{1+z^2} & 0 \\ 0 & 1+z^2 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbb{X}(u,b) \xmapsto{\ h\ } \Phi(z(u,v),\ \theta(u,v))$ ciertas funciones $z(u,v)$, $\theta(u,v)$

$h: S_1 \longrightarrow S_2$

$h(\mathbb{X}(u,v)) \underset{(*)}{=} \Phi(z(u,v),\ \theta(u,v))$

Queremos que h sea isometría local.



$(u,v) \xmapsto{\ \tilde h\ } (z(u,v),\ \theta(u,v))$

$h\circ\mathbb{X} = \Phi\circ\tilde h$ es parametrización de S_2

h isometría local $\iff (I_{\mathbb{X}(u,v)}) = (I_{h\circ\mathbb{X}(u,v)})$

$\tilde\Phi(u,v) = h\circ\mathbb{X}(u,v) \overset{(*)}{=} \Phi(z(u,v),\ \theta(u,v))$

$$\tilde\Phi_u(u,v) = \Phi_z(z(u,v),\ \theta(u,v))\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) + \Phi_\theta(z(u,v),\ \theta(u,v))\frac{\partial\theta}{\partial u}(u,v) =$$

$$= \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cos\theta,\ \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\operatorname{sen}\theta,\ 1\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \left(\sqrt{1+z^2}(-\operatorname{sen}\theta),\ \sqrt{1+z^2}\cos\theta,\ 0\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}$$

tiene que z y θ son funciones de u, v.

$$E_{\tilde{\Phi}}(u,v) = \langle \Phi_u(u,v), \Phi_u(u,v) \rangle = \left(\frac{z^2}{1+z^2}+1\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + (1+z^2)\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2$$

Los otros coeficientes se calculan análogamente:

$$F_{\tilde{\Phi}}(u,v) = \left(\frac{1+2z^2}{1+z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} + (1+z^2)\frac{\partial \theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial v}$$

$$G_{\tilde{\Phi}}(u,v) = \left(\frac{1+2z^2}{1+z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + (1+z^2)\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2$$

Otra forma de calcular lo anterior:

$$\tilde{\Phi}_u = \underset{\text{jacobiano}}{D\Phi} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\Phi}_v = D\Phi \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad D\Phi = \left(\Phi_z \,\middle|\, \Phi_\theta\right)_{3\times 2}$$

$$E_{\tilde{\Phi}} = \langle \tilde{\Phi}_u, \tilde{\Phi}_u \rangle = \tilde{\Phi}_u^T \Phi_u = \left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) \underbrace{D\Phi^T D\Phi}_{(I_\Phi)} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} \end{pmatrix}$$

Lo mismo para $F_{\tilde{\Phi}}$, $G_{\tilde{\Phi}}$.

Sistema de EDPs:

$$\begin{cases} E_{\tilde{\Phi}}(u,v) = \left(\frac{z^2}{1+z^2}+1\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + (1+z^2)\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 = 2 \\ F_{\tilde{\Phi}}(u,v) = \left(\frac{1+2z^2}{1+z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + (1+z^2)\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} = 1 \\ G_{\tilde{\Phi}}(u,v) = \left(\frac{1+2z^2}{1+z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + (1+z^2)\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 = u^2+1 \end{cases}$$

c) Calcula K_X y K_Φ (curvaturas de Gauss).

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(\operatorname{sen} v - u\cos v, -\cos v - u \operatorname{sen} v, u)}{\sqrt{1+2u^2}}$$

$$X_{uu} = (0,0,0) \qquad X_{uv} = (-\operatorname{sen} v, \cos v, 0) \qquad X_{vv} = (-u\cos v, -u\operatorname{sen} v, 0)$$

$$e = \langle X_{uu}, N\rangle = 0 \qquad f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{-1}{\sqrt{1+2u^2}} \qquad g = \langle X_{vv}, N\rangle = \frac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}}$$

$$K_{\mathbb{X}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{1}{1+2u^2}}{2u^2+1} = -\frac{1}{(1+2u^2)^2}$$

Después de hacer cálculos parecidos: $K_{\Phi} = \dfrac{-1}{(1+2z^2)^2}$

Aplicando ahora el T$^{\underline{mo}}$ Egregium de Gauss, si h es isometría local $h: S_1 \to S_2$, se tiene que cumplir

$K_{\Phi}\left(z(u,v), \theta(u,v)\right) = K_{\mathbb{X}}(u,v)$, de donde $\dfrac{-1}{(1+2u^2)^2} = \dfrac{-1}{(1+2z(u,v)^2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow z(u,v) = \pm u$

TEOREMA EGREGIUM GAUSS

$$\boxed{\text{Isometría local} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} K_{\mathbb{X}} = K_{\Phi}}$$

ej. 2 contraejemplo

d) Completar el cálculo de h.

Escojamos $z(u,v) = u$. Entonces el sistema de EDPs queda:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u^2}{1+u^2} + 1\right) \cdot 1 + (1+u^2)\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 = 2 \\ (1+u^2)\dfrac{\partial\theta}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = 1 \\ (1+u^2)\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = 1+u^2 \end{cases}$$

$\longrightarrow \dfrac{1+2u^2}{1+u^2} + (1+u^2)\dfrac{1}{(1+u^2)^2} = 2 \Rightarrow \dfrac{1+2u^2+1}{1+u^2} = 2$

$\longrightarrow \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \dfrac{\varepsilon}{1+u^2}$

$\longrightarrow \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \varepsilon \in \{\pm 1\}$

$$\Rightarrow \theta(u,v) = \varepsilon v + \underbrace{f(u)}_{= \varepsilon \arctan(u) + c}$$

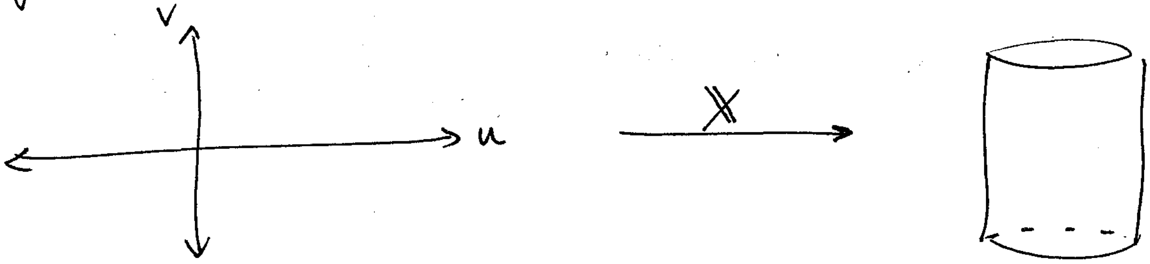
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \theta(u,v) = \varepsilon(v + \operatorname{arctg}(u)) + c \\ z(u,v) = u \end{array} \quad \text{con} \quad \varepsilon \in \{1,-1\}}$$

4.

a) Geodésicas del cilindro $x^2+y^2=1$

Vamos a usar que isometrías locales mandan geodésicas en geodésicas.

$\mathbb{X}(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ da una isometría local de $\mathbb{R}^2 (\subset \mathbb{R}^3)$ y el cilindro.

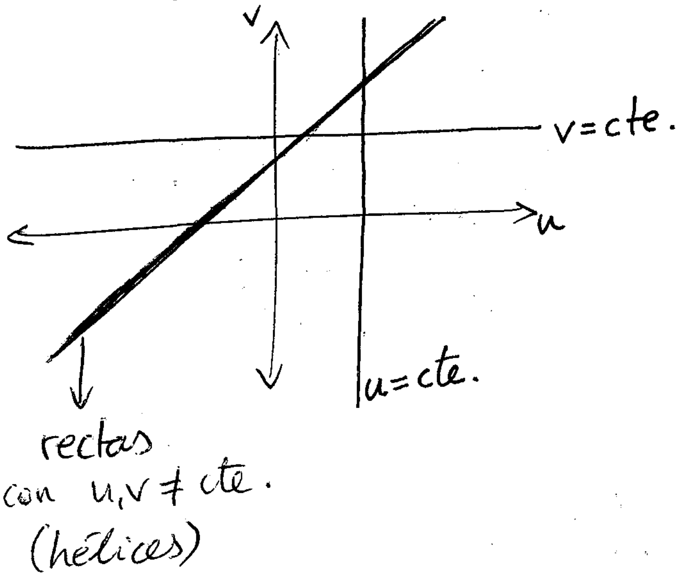


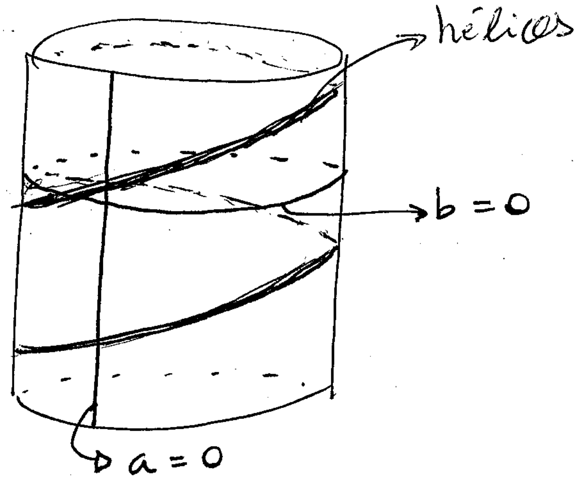
Las geodésicas del plano son rectas parametrizadas por parámetro proporcional a arco, es decir:

$\alpha(t) = t(a,b) + (c,d) \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$

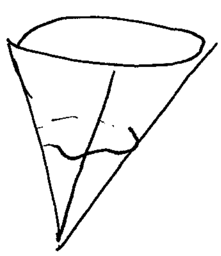
Entonces las geodésicas del cilindro son:

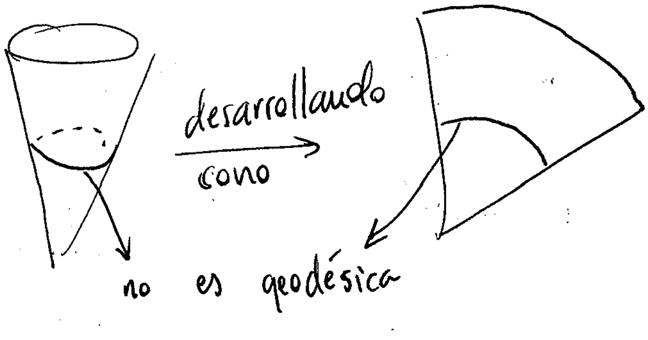
$\gamma(t) = (\mathbb{X} \circ \alpha)(t) = (\cos(at+c), \operatorname{sen}(at+c), bt+d) \quad \begin{array}{l} t\in\mathbb{R} \\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{array}$





b) Idea





EJERCICIO 3 - VERSIÓN 2017-2018

¿Existe parametrización $\mathbb{X}(u,v)$ tal que:

a) $E=G=1$, $F=0$
$e=1$, $f=0$, $g=-1$

b) $E=1$, $F=0$, $G=\cos^2 u$
$e=\cos^2 u$, $f=0$, $g=-1$?

a) $E=\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u\rangle = \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v\rangle = G$

Como $F=0=\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\rangle$ $\quad \mathbb{X}_u \perp \mathbb{X}_v$

$\langle \mathbb{X}_u, N\rangle = 0$ y derivando

$e=\langle \mathbb{X}_{uu}, N\rangle = -\langle \mathbb{X}_u, N_u\rangle$

Tma de Egregium de Gauss (en su demo. usando los símbolos de Christoffel)

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \Psi(E,G,F,\text{ derivadas de } E,G,F)$$

Esto quiere decir que E,G,F dependen de e,g,f (o viceversa) pueden estar sobredeterminadas

e.d., las 6 ecuaciones del enunciado pueden estar sobredeterminadas

Relaciones entre coeficientes de la 1ª y 2ª f.f. son las ecuaciones de estructura:

- Ecuaciones de Codazzi-Mainardi (2)
- Ecuaciones de Gauss (1)

↳ Codifica Tma de Schwarz de derivadas cruzadas para $\mathbb{X}$, p. ej., $(\mathbb{X}_{uu})_v = (\mathbb{X}_{uv})_u$

Entonces, una forma de bordar el problema es:

$$\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u\rangle = 1 = \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v\rangle \xrightarrow{\text{derivamos con resp. } u} \langle \mathbb{X}_{uu}, \mathbb{X}_u\rangle = 0 \quad [1]$$

$$\xrightarrow{\text{derivamos con resp. } v} \langle \mathbb{X}_{uv}, \mathbb{X}_u\rangle = 0 \quad [2]$$

$$\vdots$$

$$\langle \mathbb{X}_{vv}, \mathbb{X}_v\rangle = 0 \quad [3]$$

$$\langle \mathbb{X}_{vu}, \mathbb{X}_v\rangle = 0 \quad [4]$$

De [2]+[4] sacamos que $\mathbb{X}_{uv} \parallel N$

Continuaríamos buscando relaciones y buscamos contradicciones. (porque las hay en este ejercicio)

CASO GENERAL

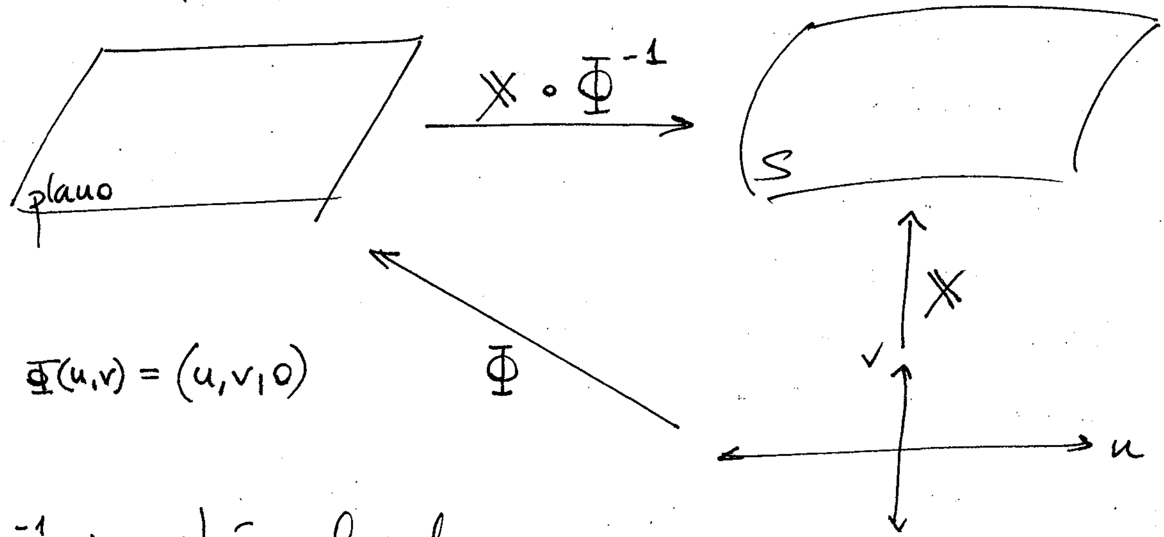
Esto que hemos visto es el método general de abordar este problema.

OTRA FORMA: (Más rápida)

Si existiese, la curvatura de Gauss sería $K = \frac{-1}{1} = -1$.

Sabemos que el plano (param. con coord. cartesianas) tiene la misma 1FF que ⓐ. $\Longrightarrow$ podemos definir una isometría local entre el plano y la posible superficie de ⓐ.

Entonces, repitiendo, como $E = G = 1$, $F = 0$ son los coef. de la 1FF del plano, la parametrización $\mathbb{X}$ nos da isometría local entre plano y esa superficie que suponemos que existe



$\Phi(u,v) = (u,v,0)$

$\mathbb{X} \circ \Phi^{-1}$ isometría local

$$\text{Si } (I_{\Phi}) \equiv (I_{\mathbb{X}}) \overset{\text{hipótesis ⓐ}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

param. plano $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Entonces S es localm. isométrica al plano

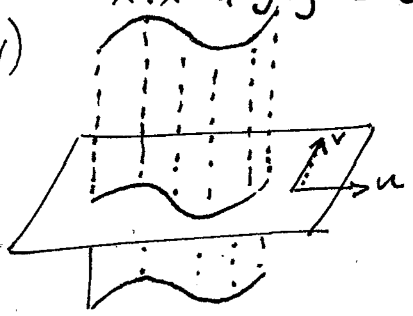
Pero entonces tendría que tener curvatura de Gauss cero, pero eso contradice lo que hemos calculado al principio de esta página ($K = -1$).

b) Igual, solo que ahora la superficie es localm. isométrica a la esfera (por la 1FF), pero $K = -1$ y la de la esfera es siempre positiva.

$\boxed{6.}$ $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ curva param. por arco $\rightarrow x'^2 + y'^2 = 1$

$x'.x'' + y'.y'' = 0$ (*)

S cilindro "generalizado": $\mathbb{X}(u,v) = (x(u), y(u), v)$



a) Geodésicas de S.

$$\boxed{\gamma : I \longrightarrow S \quad \gamma \text{ geodésica si } (\gamma'')^T \equiv 0}$$

Sea $\gamma(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ curva genérica de S.

Es geodésica si solo si $(\gamma''(t))^T = 0 \quad \forall t$

$$\gamma'(t) = \mathbb{X}_u(u(t), v(t)).u'(t) + \mathbb{X}_v(u(t), v(t)).v'(t)$$

$$\gamma''(t) = \mathbb{X}_{uu}(u'(t))^2 + \mathbb{X}_{uv}u'(t)v'(t) + \mathbb{X}_u u''(t) + \mathbb{X}_{uv}u'v' + \mathbb{X}_{vv}(v')^2 + \mathbb{X}_v$$

$$\boxed{\text{Recuerdo: } (\gamma'')^T = 0 \iff \gamma'' \parallel N \iff \langle \gamma'', \mathbb{X}_u \rangle = 0 = \langle \gamma'', \mathbb{X}_v \rangle}$$

Antes de nada calculamos:

$\mathbb{X}_u = (x'(u), y'(u), 0)$; $\mathbb{X}_{uu} = (x''(u), y''(u), 0)$

$\mathbb{X}_v = (0,0,1)$; $\mathbb{X}_{vv} = (0,0,0)$

$\mathbb{X}_{uv} = (0,0,0)$

Entonces: $\gamma''(t) = (x''.(u')^2 + x'.u'', \; y''(u')^2 + y'.u'', \; v'')$

$$\Rightarrow 0 = \langle \gamma'', \mathbb{X}_u \rangle = \langle \gamma''(t), \mathbb{X}_u(u(t), v(t)) \rangle =$$

$$= \langle (x''.u'^2, y''.u'^2, 0) + (x'.u'', y'.u'', v''), (x', y', 0) \rangle \overset{\text{utilizando (*)}}{=} u''$$

$x'^2 + y'^2 =$

$x'.x'' + y'.y''$

Análogamente:

$$0 = \langle \gamma'', \mathbb{X}_v \rangle = \langle (x''.u'^2, y''.u'^2, 0) + (x'.u'', y'.u'', v''), (0,0,1) \rangle = v''$$

Por lo tanto, $\begin{cases} u'' = 0 \\ v'' = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{integrando}} \begin{cases} u(t) = at + b \\ v(t) = ct + d \end{cases}$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

Las geodésicas son: $\gamma(t) = (x(at+b), y(at+b), ct+d)$

b) Por el ej. H3-11 el (ii), (iii) y (iv) están demostrados.
Ver que esto es equivalente a (i): $\exists$ cilindro en el cual α es geodésica.

Vamos a ver que (i) $\Rightarrow$ (ii):
Suponemos que existe cilindro parametrizado como $\mathbb{X}(u,v) = (x(u), y(u), v)$ con $x'^2 + y'^2 = 1$ y α es geodésica en ese cilindro.

Por a) $\alpha(t) = \left(x(at+b),\ y(at+b),\ ct+d\right)$ y entonces

$$\alpha'(t) = \left(x'(at+b).a\ ,\ y'(at+b).a\ ,\ c\right)$$

tiene pinta que su ángulo es const. con el eje Z.

$$\left(\measuredangle\left(t_\alpha,\ \underset{\text{eje } z}{(0,0,1)}\right)\right) = \left\langle t_\alpha, (0,0,1)\right\rangle = \left\langle \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, (0,0,1)\right\rangle =$$

ángulo que forma t_α con $(0,0,1)$ eje z

$$= \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \quad \text{constante}$$

Ahora vamos a ver que (ii) $\Rightarrow$ (i): suponemos que $\measuredangle(t_\alpha, (0,0,1)) = c_1 = \text{constante}$.
Podemos usar $\alpha(s) = (x_0(s), y_0(s), z_0(s))$ curva general param. por arco

$$\Rightarrow t_\alpha = \alpha'(s) = (x_0'(s),\ y_0'(s),\ z_0'(s)) \xRightarrow{\text{por hipótesis}} z_0' = \text{cte.} = c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_0(s) = c''.s + d'' \xRightarrow{\text{param. por arco}} (x_0')^2 + (y_0')^2 + (c_2)^2 = 1$$

Definimos:
$$x_0'(s) = \sqrt{1-(c'')^2}\cos\theta(s)$$
$$y_0'(s) = \sqrt{1-(c'')^2}\,\text{sen}\,\theta(s)$$

Queda por ver que esa α está metida en el cilindro $\mathbb{X}(u,v) = (x(u), y(u), v)$ y es geodésica en él
(a lo mejor hay que definir x, y de forma ligeramente diferente).

H7 - EJ7

$w(t)$ campo a lo largo de α.

$$K_g(t,w)\,\|\alpha'(t)\| = K_g(t,X_u)\,\|\alpha'(t)\| + \theta'(t)$$

$$w(t) = r(t)\,(\cos\theta(t)\,X_u(t) + \operatorname{sen}\theta(t)\,J X_u(t))$$

$w(t)$ es paralelo $\Longleftrightarrow D_t w(t) = 0 \Longleftrightarrow \|w(t)\| = c$ constante

y $K_g(t,w) = 0 \;\; \forall t$

Paralelo de la esfera:

$$X(u,v) = (\operatorname{sen}v\cos u,\ \operatorname{sen}v\operatorname{sen}u,\ \cos v) \qquad 0 < v < \pi$$

$$v = v_0 \qquad K_g(t,X_u)\,\|\alpha'(t)\| = \frac{-\lambda_v}{\mu}u' + \frac{\mu_u}{\lambda}v'$$

$$X_u = (-\operatorname{sen}v\operatorname{sen}u,\ \operatorname{sen}v\cos u,\ 0) \qquad E = \operatorname{sen}^2 v$$

$$F = 0$$

$$X_v = (\cos v\cos u,\ \cos v\operatorname{sen}u,\ -\operatorname{sen}v) \qquad G = 1$$

$$ds^2 = \lambda^2 du^2 + \mu^2 dv^2 \qquad \lambda = \operatorname{sen}v \qquad \mu = 1$$

$$\alpha(t) = X(t,v_0) \qquad \alpha'(t) = X_u(t,v_0) \qquad \|\alpha'(t)\| = \operatorname{sen}v_0$$

$$\lambda(u,v) = \operatorname{sen}v \qquad \lambda_u(u,v) = 0 \qquad \lambda_v(u,v) = \cos v$$

$$\mu(u,v) = 1 \qquad \mu_u(u,v) = 0 \qquad \mu_v(u,v) = 0$$

$$K_g(t,X_u)\cdot\operatorname{sen}v_0 = -\cos v_0$$

$$\theta'(t) = -K_g(t,X_u)\,\|\alpha'(t)\| = \cos v_0$$

$$\theta(t) = \cos v_0 \cdot t$$

$$w(t) = c\left(\cos\theta(t)\,\frac{1}{\operatorname{sen}v_0}X_u(\alpha(t)) + \operatorname{sen}\theta(t)\,X_v(\alpha(t))\right)$$

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \theta'(t)\,dt = -\int_a^b K_g(t,X_u)\,\|\alpha'(t)\|\,dt = -\int_C K_g(t,X_u)$$

H7. EJ 5

$\mathbb{X}(u,v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\,v,\ v)$

$E = 1+v^2 \qquad F=0 \qquad G=1$

$\gamma(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$

$\gamma'(t) = u'\mathbb{X}_u + v'\mathbb{X}_v$

$\|\gamma'(t)\|^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = (1+v^2)u'^2 + v'^2 = 1$

b) $u' = \dfrac{a}{1+u^2}$ costaute teorema de Claroit (o algo así)

$\langle \gamma'(t), \mathbb{X}_u(t)\rangle = a$

$\langle u'\mathbb{X}_v + v'\mathbb{X}_v, \mathbb{X}_u\rangle = Eu' + Fv' = Eu' = (1+v^2)u'$

c) $a=0$

$\hookrightarrow u'=0 \Rightarrow u=u_0$

$\mathbb{X}(u_0,v) = v(\cos u_0,\ \mathrm{sen}\,u_0,\ 0) + (0,0,u_0)$

H7. EJ. 5 Rehecho $\mathbb{X}(u,v) = (v\cos u\ ;\ v\,\mathrm{sen}\,u;\ u)$

$\mathbb{X}_u = (-v\,\mathrm{sen}\,u,\ v\cos u,\ 1)$ $E = 1+v^2$

$\mathbb{X}_v = (\cos u,\ \mathrm{sen}\,u,\ 0)$ $F=0 \qquad G=1$

a) $\gamma(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t)) \qquad \gamma'(t) = u'\mathbb{X}_u + v'\mathbb{X}_v$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|^2 = (1+v^2)u'^2 + v'^2 = 1$

b) Igual que arriba

el teorema dice que si la I solo depende de v, γ es una geodésica $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \langle\gamma'(t), \mathbb{X}_u\rangle = \text{const}$

c) $\boxed{a=0}$

$\hookrightarrow u'(1+v^2) = 0 \Rightarrow u'=0 \rightarrow$

$\Rightarrow u=u_0 \Rightarrow \gamma(t) = \mathbb{X}(u_0, t)$

$\boxed{a=1}$

$\hookrightarrow u'(1+v^2) = 1$

$u'^2(1+v^2) + v'^2 = 1 \Rightarrow u' + v'^2 = 1$ ... falta algo

H7 - E2

$\mathbb{X}(u,v) = (v\cos u,\ v\,\mathrm{sen}\,u,\ u)$

$\mathbb{Y}(u,v) = (v\cos u,\ v\,\mathrm{sen}\,u,\ \log v)$

$\mathbb{X}_u = (-v\,\mathrm{sen}\,u,\ v\cos u,\ 1)$ $\qquad$ $\mathbb{Y}_u = (-v\,\mathrm{sen}\,u,\ v\cos u,\ 0)$

$\mathbb{X}_v = (\cos u,\ \mathrm{sen}\,u,\ 0)$ $\qquad$ $\mathbb{Y}_v = (\cos u,\ \mathrm{sen}\,u,\ \frac{1}{v})$

$E_{\mathbb{X}} = 1+v^2 \quad F_{\mathbb{X}} = 0 \quad G_{\mathbb{X}} = 1 \quad E_{\mathbb{Y}} = v^2 \quad F_{\mathbb{Y}} = 0 \quad G_{\mathbb{Y}} = 1 + \frac{1}{v^2}$

a)
Para $\mathbb{X}$:

$$K_{\mathbb{X}} = \frac{-\lambda_{vv}}{\lambda} = \frac{-1}{\lambda^4} = \frac{-1}{(1+v^2)^2}$$

$$\lambda = (1+v^2)^{1/2} \qquad \lambda_v = \frac{1}{2}(1+v^2)^{-1/2}\cdot 2v = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$\lambda_{vv} = (1+v^2)^{1/2} + v\left(-\tfrac{1}{2}(1+v^2)^{-3/2}\,2v\right) = (1+v^2)^{-3/2}(1+v^2-v^2) = (1+v^2)^{-3/2} = \frac{1}{\lambda^3}$$

$$\lambda = v \qquad \mu = \frac{\sqrt{1+v^2}}{v}$$

Para $\mathbb{Y}$:

$$K_{\mathbb{Y}} = \frac{-1}{\lambda\mu}\left(\left(\frac{\lambda_v}{\mu}\right)_v + \left(\frac{\mu_u}{\lambda}\right)_u\right) = \frac{-1}{(1+v^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(1+v^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(1+v^2)^2}$$

$$\lambda_v = 1 \qquad \mu = \sqrt{G}$$

)

$f(\mathbb{X}(u,v)) = \mathbb{Y}(u,v)$ no es isometría

$f\circ\mathbb{X}(u,v) = \mathbb{Y}(\bar u,\bar v) \qquad \bar u = \bar u(u,v) \qquad \bar v = \bar v(u,v)$

$f\circ\mathbb{X}(\bar u,\bar v) = \mathbb{Y}(\bar u(u,v),\ \bar v(u,v)) \qquad \bar u = u \qquad \bar v = v$

$Df(\mathbb{X}(u,v))\cdot\mathbb{X}_u(u,v) = \bar u_u \mathbb{Y}_{\bar u} + \bar v_u \mathbb{Y}_{\bar v} = \mathbb{Y}_{\bar u}$

Si es isometría: $\|Df(\mathbb{X}(u,v))\cdot\mathbb{X}(u,v)\| = \|\mathbb{Y}_{\bar u}(\bar u(u,v),\bar v(u,v))\|$

$\|\mathbb{X}_u(u,v)\| = E_x(u,v) = 1+v^2$

$\|\mathbb{Y}_{\bar u}(\bar u,\bar v)\| = E_{\mathbb{Y}}(u,v) = v^2$

c) $K_{\mathbb{Y}}(\bar{u}(u,v), \bar{v}(u,v)) = K_{\mathbb{X}}(u,v)$

$$\frac{1}{(1+v^2)^2} \qquad\qquad \frac{1}{1+v^2}$$

$\Longrightarrow \bar{v} = \varepsilon v \qquad \varepsilon = \pm 1 \Longrightarrow \bar{v}_u = 0 \qquad \bar{v}_v = \varepsilon$

$\|\bar{u}_u \mathbb{Y}_{\bar{u}}\|^2 = \|\mathbb{X}_u\|^2$

$\bar{u}_u^2 E_{\mathbb{Y}} \qquad E_{\mathbb{X}}$

$\bar{u}_u^2 E_{\mathbb{Y}} = 1+v^2$

$$\bar{u}_u^2 = \frac{1+v^2}{v^2}$$

$$\bar{u}_u = \frac{\sqrt{1+v^2}}{v} \Rightarrow \bar{u}(u,v) = \frac{\sqrt{1+v^2}}{v} u + \alpha($$

$f\circ\mathbb{X}(\bar{u},\bar{v}) = \mathbb{Y}(\bar{u}(u,v), \bar{v}(u,v)) \qquad \bar{u}=u \qquad \bar{v}=v$

$Df(\mathbb{X}(u,v))\mathbb{X}_u(u,v) = \bar{u}_u \mathbb{Y}_{\bar{u}} + \bar{v}_u \mathbb{Y}_{\bar{u}} = \bar{u}_u \mathbb{Y}_{\bar{u}}$

$Df(\mathbb{X}(u,v))\mathbb{X}_v(u,v) = \bar{u}_v \mathbb{Y}_{\bar{u}} + \bar{v}_v \mathbb{Y}_{\bar{v}}$

$1 = \|\mathbb{X}_v\|^2 = E_{\mathbb{Y}} \bar{u}_v^2 + G_{\mathbb{Y}} \bar{v}_v^2 =$

Para demostrar que no existe una isometría suponemos que existe y llegamos a una contradicció