110-PROBA-generadores

April 23, 2018

Generadores aleatorios

Supongamos que queremos programar una función como $random()$ que es uniforme en el intervalo $[0,1]$. Los números reales en el intervalo los veremos, en el ordenador, como decimales, por ejemplo, con diez cifras. Si los multiplicamos por 10^{10} los podemos ver como enteros en el intervalo $[0,10^{10}]$, o como clases de restos módulo $n := 10^{10}+1$.

Los generadores (pseudo-)aleatorios funcionan, *grosso modo*, iterando una función adecuada f de $\mathbb{Z}_n$, con n muy grande, en sí mismo. El primer número aleatorio que se genera, digamos x_0 se llama la semilla, y salvo que indiquemos explícitamente lo contrario, el ordenador la genera cada vez usando, por ejemplo, el reloj interno de la máquina.

Los siguientes se obtienen iterando la función f, es decir, mediante $x_n := f^n(x_0)$. Es claro que este proceso no tiene de "aleatorio" sino la elección de la semilla, el resto es completamente "determinista".

Cuando un generador, por ejemplo en x_{m_0}, vuelve a un valor ya visitado, es decir, $x_{m_0} = x_{n_0}$ con $n_0 < m_0$ se produce un período: a partir de m_0 los números generados son los mismos que se generaron a partir de n_0, y ya no sirven para nada útil. Los buenos generadores son los que tienen períodos de longitud enormemente grande y que además visitan casi todos los elementos de $\mathbb{Z}_n$ antes de caer en un período.

Si fijamos explícitamente la semilla, los resultados son idénticos, cosa que por supuesto no ocurre si dejamos que SAGE elija la semilla usando el hardware de la máquina.

```
In [1]: set_random_seed(2^17); [randint(0,1) for n in srange(10^5)].count(1)
```

```
Out[1]: 49858
```

```
In [2]: set_random_seed(2^17); [randint(0,1) for n in srange(10^5)].count(1)
```

```
Out[2]: 49858
```

```
In [3]: [randint(0,1) for n in srange(10^5)].count(1)
```

```
Out[3]: 50027
```

Período

La instrucción $random()$ genera números en el intervalo $[0,1]$ de manera (aproximadamente) uniforme: la frecuencia con que el resultado en N repeticiones pertenece al subintervalo $[a,b]$ debe ser muy próxima a $b-a$. Una manera fácil de comenzar a estudiar la calidad de los generadores es, simplemente, comprobar si esta propiedad de uniformidad se mantiene cuando N crece. En general, se utilizan métodos *estadísticos*, los mismos que sirven para estudiar muestras de datos obtenidas del mundo real, para estudiar la uniformidad de los números suministrados por distintos generadores (pseudo-)aleatorios.

Uno de los primeros generadores de números aleatorios fué propuesto por von Neumann, puedes leer la descripción en wiki, y vamos a estudiarlo un poco.

```
In [4]: def vonneumann(L_digits):
            n = len(L_digits)
            if n%2 == 1:
                return "La semilla debe tener un numero par de digitos"
            else:
                L2 = (ZZ(L_digits,10)^2).digits(base=10,padto=2*n)
                L3 = L2[n//2:(3*n)//2]
                L3.reverse()
                return L3
```

La función debe aplicarse a la lista de dígitos de x_n para obtener la lista de dígitos de x_{n+1}.

```
In [5]: vonneumann(vonneumann([4,3,2,1]))

Out[5]: [2, 0, 0, 6]

In [6]: def periodo_vn(L_digits):
            L = []
            while L_digits not in L:
                L.append(L_digits)
                L_digits= vonneumann(L_digits)
            return len(L)

In [7]: periodo_vn([2,1])

Out[7]: 17

In [8]: time periodo_vn((12345678).digits(base=10))

CPU times: user 0 ns, sys: 0 ns, total: 0 ns
Wall time: 2.05 ms


Out[8]: 97

In [9]: def generador_vn(L_digits,M):
            n = len(L_digits)
            L = [L_digits]
            for int in xrange(M):
                L.append(vonneumann(L[-1:][0]))
            L1 = [(ZZ(x,10)/10^n).n() for x in L]
            return L1

In [10]: print generador_vn((12).digits(base=10),100)
```

```
[0.120000000000000, 0.410000000000000, 0.860000000000000, 0.930000000000000, 0.460000000000000
```

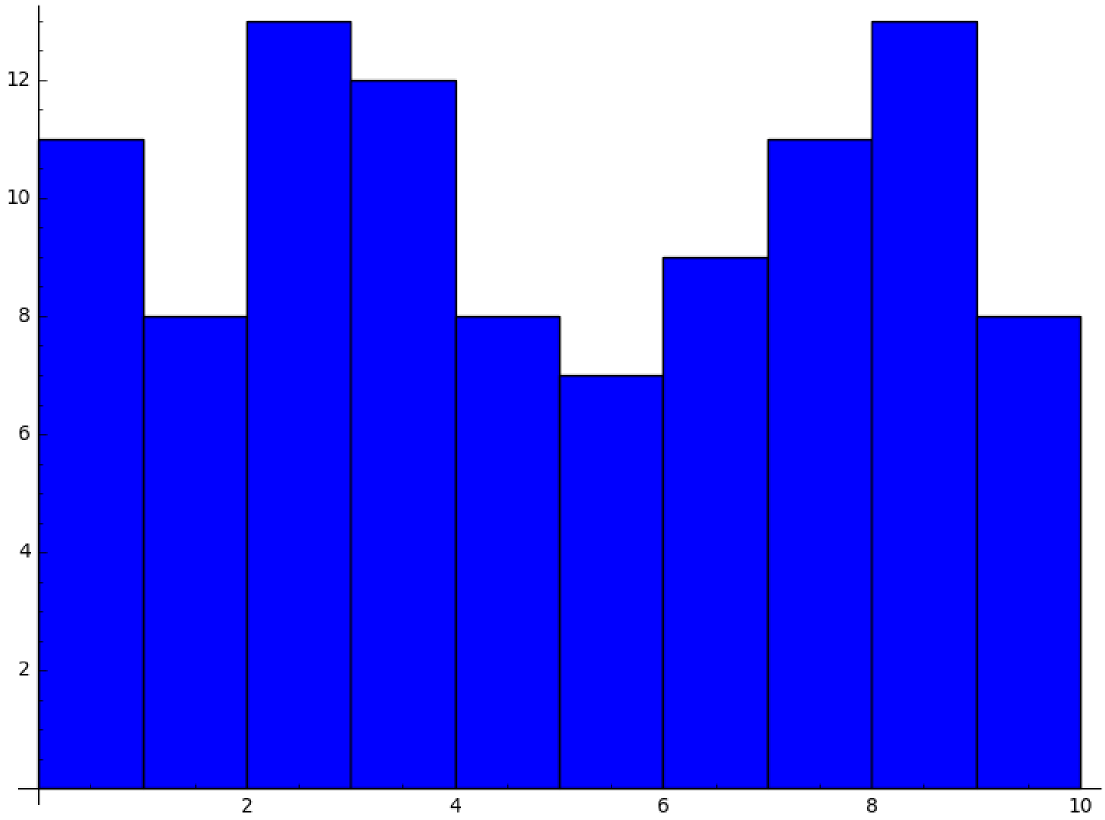
```
In [12]: def periodos():
             dict = {}
             for n in srange(1000,10000):
                 if n%1000 == 0:
                     print "mil más"
                 per = periodo_vn((n).digits(base=10))
                 if not dict.has_key(per):
                     dict[per]=1
                 else:
                     dict[per] += 1
             return dict
```

```
In [13]: %time print periodos()
```

```
mil más
mil más
mil más
mil más
mil más
mil más
mil más
mil más
mil más
{2: 10, 3: 14, 4: 69, 5: 45, 6: 81, 7: 69, 8: 114, 9: 112, 10: 149, 11: 142, 12: 147, 13: 148,
CPU times: user 4.61 s, sys: 300 ms, total: 4.91 s
Wall time: 4.57 s
```

3. Histogramas

```
In [14]: L = 10
         T = 100
         frecuencias = [0]*L
         for j in range(T):
              k = randint(0,L-1)
              frecuencias[k] += 1
         bar_chart(frecuencias,width=1).show(ymin=0)
```

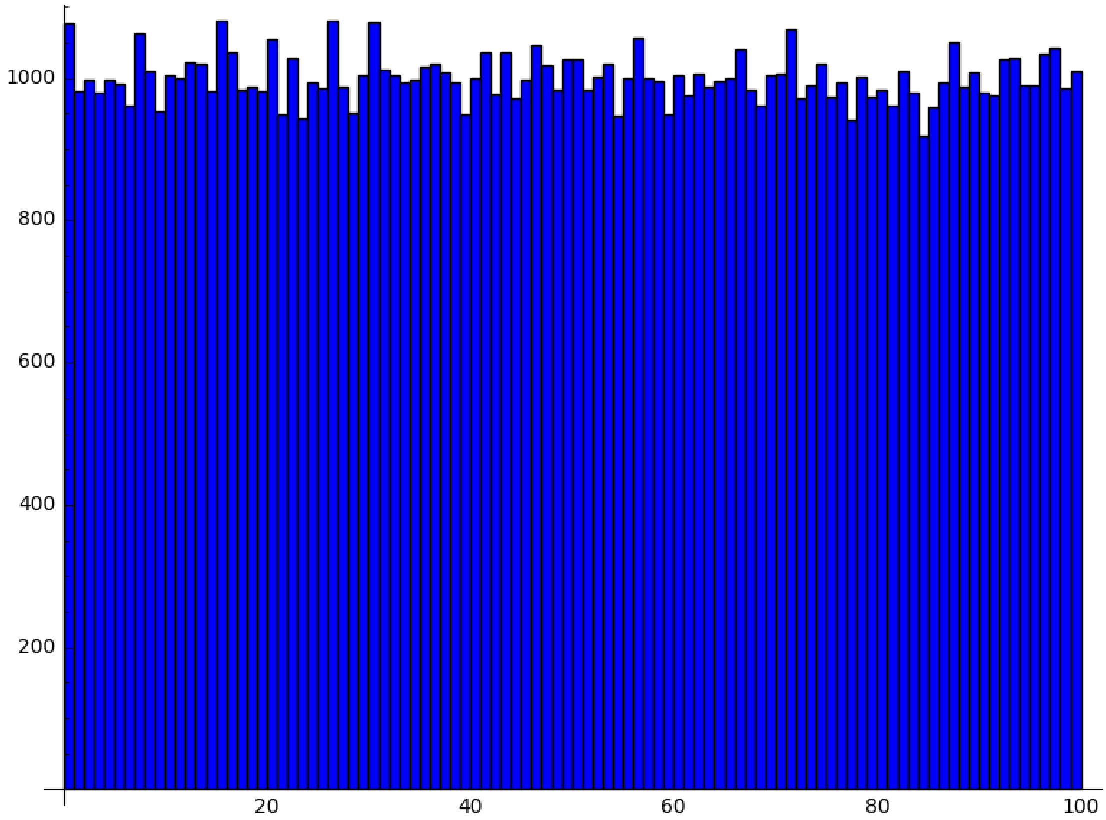



```
In [15]: def calc_frec(N,l):
             L = l*[0]
             for int in xrange(N):
                 x = random()
                 n = floor(x*l)
                 L[n] += 1
             return L
```

```
In [16]: calc_frec(1000,10)
```

```
Out[16]: [112, 108, 95, 90, 81, 123, 97, 103, 87, 104]
```

```
In [17]: bar_chart(calc_frec(100000,100),width=1).show(ymin=0)
```




```
In [18]: def error_porcen(N,l):
             L = l*[0]
             for int in xrange(N):
                 x = random()
                 n = floor(x*l)
                 L[n] += 1
             L1 = [(((x-(N/l))*l/N).n()) for x in L]
             return L1
```

```
In [19]: set_random_seed(2^17);calc_frec(1000,10);set_random_seed(2^17);error_porcen(1000,10)
```

```
Out[19]: [0.0700000000000000,
          -0.0200000000000000,
          0.0700000000000000,
          -0.0300000000000000,
          0.0600000000000000,
          0.0400000000000000,
          0.0400000000000000,
          -0.0800000000000000,
          -0.160000000000000,
          0.0100000000000000]
```

```
In [20]: set_random_seed(2^17);error_porcen(10000,10)

Out[20]: [0.0430000000000000,
          0.00300000000000000,
          0.0450000000000000,
          0.00400000000000000,
          -0.0340000000000000,
          -0.0420000000000000,
          0.0120000000000000,
          -0.0420000000000000,
          0.0150000000000000,
          -0.00400000000000000]

In [21]: set_random_seed(2^17);error_porcen(100000,10)

Out[21]: [-0.00270000000000000,
          -0.00600000000000000,
          0.0356000000000000,
          0.00170000000000000,
          -0.0144000000000000,
          -0.00620000000000000,
          0.00550000000000000,
          0.00260000000000000,
          -0.0114000000000000,
          -0.00470000000000000]

In [22]: set_random_seed(2^17);error_porcen(1000000,10)

Out[22]: [0.00187000000000000,
          -0.00301000000000000,
          -0.000430000000000000,
          0.00455000000000000,
          -0.00181000000000000,
          0.00157000000000000,
          0.00120000000000000,
          0.00133000000000000,
          -0.00562000000000000,
          0.000350000000000000]
```

Parece que los errores porcentuales van decreciendo al crecer N, la cantidad de números aleatorios que usamos.

4. Histogramas del generador de von Neumann

```
In [23]: def calc_frec_vn(N,l,semilla):
             L = l*[0]
             L1 = generador_vn(semilla.digits(base=10),N)
             for int in xrange(N):
                 n = floor(L1[int]*l)
                 L[n] += 1
             return L
```

In [24]: calc_frec_vn(10000,10,123456)

Out[24]: [9704, 25, 38, 37, 33, 33, 36, 23, 39, 32]

In [25]: calc_frec_vn(10000,10,3567831934)

Out[25]: [998, 1018, 981, 1013, 1037, 1028, 966, 1017, 988, 954]

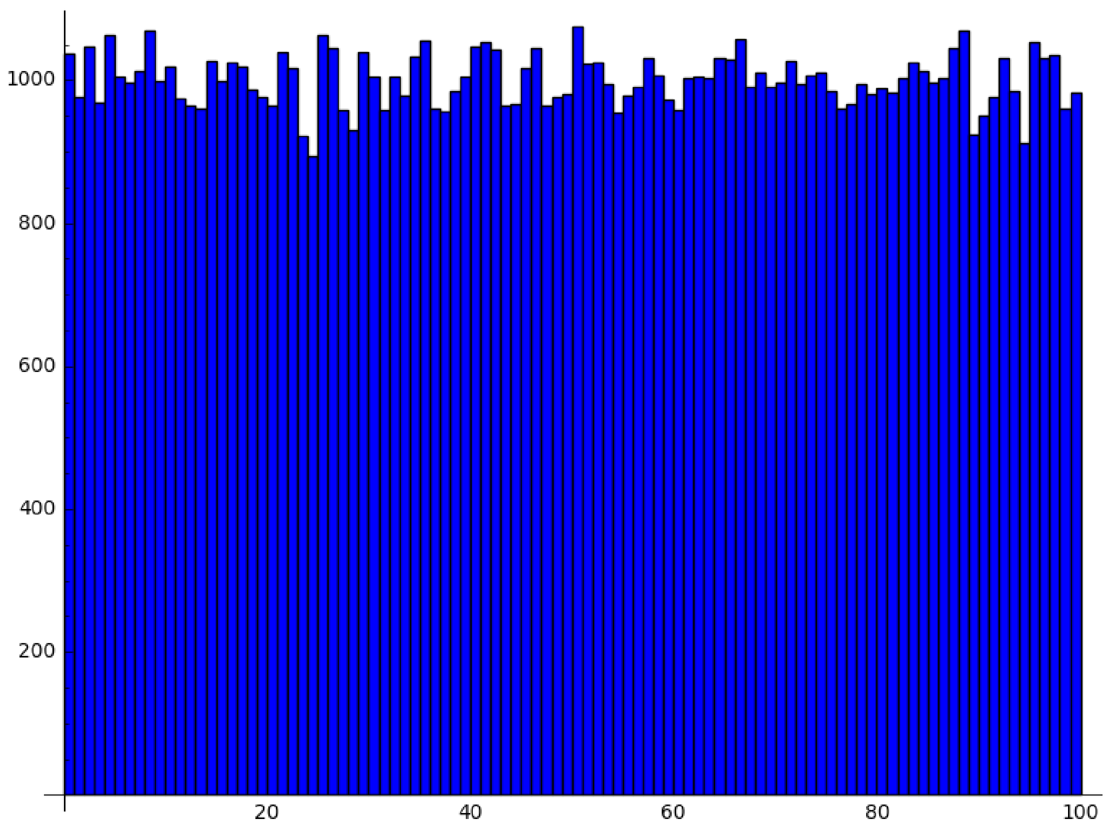
In [26]: calc_frec_vn(100000,10,3567831934)

Out[26]: [10171, 9950, 9869, 9941, 10056, 10052, 10077, 9921, 10049, 9914]

In [27]: calc_frec_vn(1000000,10,3567831934)

Out[27]: [101800, 98924, 99262, 98175, 101033, 101045, 101362, 98425, 100170, 99804]

In [28]: bar_chart(calc_frec_vn(100000,100,3567831934),width=1).show(ymin=0)



In [29]: periodo_vn((3567831934).digits(base=10))

Out[29]: 76977

6. Ejercicios
   Discutir, usando los histogramas y los errores porcentuales, la mala calidad del generador de von Neumann comparado con el que tiene Sage por defecto, que se llama "Mersenne Twister" y está considerado el mejor generador de números (pseudo-)aleatorios para uso general. La implementación estandar del Mersenne Twister produce enteros aleatorios de 32 bits con un período de longitud 219937 1.
   Los generadores modernos, como éste, utilizan funciones cuyos valores dependen de un cierto número k de valores anteriores, es decir, $x_n = F(x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$. Puedes consultar la Wikipedia si te interesa conocer más detalles.
   Un problema de los generadores aleatorios son las llamadas "correlaciones". Decimos que el generador produce "números autocorrelados" si, por ejemplo, el que ocupa la posición n "influye demasiado"en el que ocupa la $n + 1$, dónde esta "influencia" hay que entenderla en sentido estadístico. Las autocorrelaciones se pueden visualizar mediante un diagrama que represente una gran cantidad de puntos en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ con coordenadas (x_n, x_{n+1}), cada punto debe venir dado por un circulito de radio muy pequeño (por ejemplo, 1mm) con centro en el punto. Las autocorrelaciones, es decir, la "influencia"de cada número aleatorio en el siguiente se ven como bandas de puntos en el cuadrado bien distinguibles a simple vista. Implementar este proceso, primero generando una lista de pares que van a ser las coordenadas de los puntos, y luego averiguando cómo representar los puntos en el cuadrado unidad. Aplica esta idea al generador de von Neumann.

Durante bastante tiempo se utilizó en los ordenadores el generador de números pseudoaleatorios conocido como RANDU, que se define utilizando la transformación $x_{i+1} := (65539 \cdot x_i)\%2^{31}$ con los x_i números enteros. Los números aleatorios que genera RANDU son decimales y_i del intervalo $[0, 1]$, que se obtienen dividiendo los enteros x_i entre 2^{31}. Si queremos N números aleatorios empezamos con una semilla entera x_0, iteramos la transformación $N1$ veces, y una vez obtenidos los N valores x_j dividimos cada uno entre 2^{31}. Esta conversión de enteros a decimales conviene hacerla usando $round(y, 10)$ para redondear el decimal y a diez cifras decimales. Un generador tan simple no puede ser muy bueno, y en este ejercicio vamos a considerar esta cuestión.

Define las funciones necesarias para implementar RANDU en SAGE.

Genera una lista L con 10^6 números aleatorios decimales y_j, del intervalo $[0, 1]$, comenzando con la semilla entera $x_0 := 1638303916$, es decir, con $y_0 = 1638303916/2^{31}$, y NO LA IMPRIMAS en la pantalla.

Produce un histograma de los datos de la lista L, con 100 barras. £Tiene un aspecto uniforme?

Produce una lista $L1$ de 10^6 tripletas de decimales aleatorios (y_i, y_{i+1}, y_{i+2}) , con el primero y_i elegido aleatorialemte mediante el generador de Sage, y los otros dos obtenidos a partir de él usando RANDU. Selecciona las tripletas de $L1$ tales que $0.50y_{i+1}0.51$, y produce la lista $L2$ de duplas $(y_i, y_i + 2)$ correspondientes a las tripletas seleccionadas (es decir, aquellas tales que y_{i+1} cumple la condición). Representa gráficamente los datos contenidos en la lista $L2$ y discute las conclusiones que se pueden obtener sobre la aleatoriedad de RANDU.

```
In [ ]:
```