Topología

1. Bases de entornos de un punto

Una base de entornos de un punto x de un espacio topológico (X, τ) es una subfamilia $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ del sistema de entornos de x, $\mathcal{U}_x$, que verifica la propiedad:

$$\text{Para todo } U \in \mathcal{U}_x \text{ , existe } W \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } W \subset U \text{ .}$$

Los elementos de la familia $\mathcal{B}_x$ se llaman *entornos básicos de x*.

- *Ejercicio*. Sea (X, τ) un espacio topológico. Demuestra que

$$\mathcal{U}_x = \{\Omega \subset X \ : \ \exists V \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } W \subset \Omega\} \tag{1}$$

donde se han usado las notaciones de la definición anterior.

A continuación enunciaremos los resultados básicos respecto de las bases de entornos[1].

(A) Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\mathcal{B}_x$ una base de entornos de un punto $x \in X$ para la topología τ. Entonces:
  (i) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $x \in V$.
  (ii) Si $V_1, V_2 \in \mathbb{B}_x$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.
  (iii) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces existe $V_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que para cada $y \in V_0$ existe $W_y \in \mathcal{B}_y$ con $W_y \subset V$.
  (iv) Un subconjunto G de X es abierto si y solo si G contiene a un entorno básico de cada uno de sus puntos.

(B) Sea X un conjunto no vacío. Supongamos que para cada punto $x \in X$ está dada una familia $\mathcal{B}_x$ verificando:
  - Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $x \in V$.
  - Si $V_1, V_2 \in \mathbb{B}_x$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.
  - Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces existe $V_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que para cada $y \in V_0$ existe $W_y \in \mathcal{B}_y$ con $W_y \subset V$.

  Entonces, la familia definida por

$$\tau := \{G \subset X \ : \ \forall g \in G \ , \ \exists \Omega_g \in \mathcal{B}_g \ , \ \Omega_g \subset G\} \tag{2}$$

define una topología sobre X y la familia $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de x en X para la topología τ definida en (2).

[1] Su demostración es un ejercicio.

2. Bases y sub-bases para una topología

Sea (X,τ) un espacio topológico. Una base para τ es una subfamilia $\mathcal{B} \subset \tau$ que verifica

$$\tau = \left\{ \bigcup_{\Omega \in \mathcal{C}} \Omega \ : \ \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \right\}$$

A continuación enunciaremos los resultados básicos respecto de las bases[2].

(A) Sea (X,τ) un espacio topológico. Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto de la topología τ. Entonces, son equivalentes
  (i) $\mathcal{B}$ es una base para τ.
  (ii) Para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} \ : \ x \in \mathcal{B}\}$ es una base de entornos de x en la topología τ.

(B) Sea X un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X. Son equivalentes:
  (i) $\mathcal{B}$ es una base para una topología τ^* en X.
  (ii) La familia $\mathcal{B}$ satisface las condiciones:
    - $X = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{B}} \Omega$.
    - Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces para cada $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

- *Ejercicio*. Dado (X,τ) un espacio topológico, y dada una subfamilia $\mathcal{C}$ de τ, diremos que $\mathcal{C}$ es una *sub-base para* τ si la familia

$$\left\{ \bigcap_{j \in J} B_j \ : \ B_j \in \mathcal{C} \ , \ |J| < \aleph_0 \right\}$$

es una base para τ.

Argumenta si es cierto o falso el siguiente enunciado: " *Cualquier colección de subconjuntos de X es una sub-base para una topología sobre X. Además la topología obtenida es la mínima topología que contiene a la familia dada.*"

[2]Su demostración es un ejercicio.