Autómatas y Lenguajes

3er curso

1er cuatrimestre

Alfonso Ortega: alfonso.ortega@uam.es

UNIDAD 1: Modelos de cómputo y familias de lenguajes

TEMA 2: Gramáticas independientes del contexto y autómatas a pila

Autómatas a pila

Descripción informal: ejemplo introductorio 1

- Como autómata, los autómatas a pila poseen también las siguientes características analizadas en otros temas:
  - Capacidad de procesar cadenas de símbolos como entrada de su proceso
  - Capacidad de cambiar de estado interno como consecuencia de cada uno de los símbolos que se encuente en cada momento como entrada
  - Cabe señalar que el símbolo actual puede ser consumido o no en cada uno de los pasos de la computación
- Pero añaden también la posibilidad de manejar
  - Espacio de almacenamiento auxiliar con estructura de pila.
- Hasta ahora, sólo hemos podido analizar la característica de las transiciones entre estados.
- A continuación veremos cómo integrar en esas transiciones la manipulación de la pila.

Descripción informal: ejemplo introductorio 1

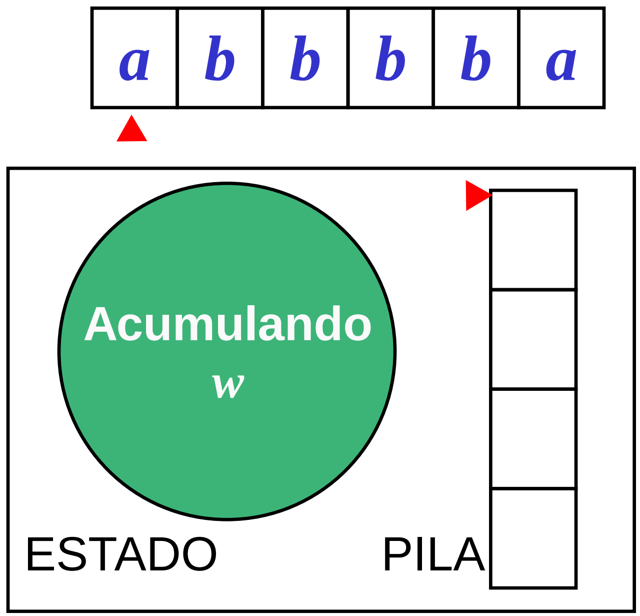
- Es curioso (y fundamental) cómo las características de la pila (el orden de salida es el opuesto al de entrada) condicionan la estructura de las cadenas que estos autómatas pueden reconocer.
- Durante este tema utilizaremos como ejemplo el siguiente lenguaje:

$$L=\{ww^{-1}|\ w\in\{a,b\}^*\}$$

- Los autómatas a pila utilizarán su pila para poder reconocer este lenguaje de la siguiente manera:
  - La idea consiste en utilizar la pila para almacenar la cadena w para, en el momento en el que se comience a reconocer w^{-1}, se disponga de una copia de w en el orden adecuado (la pila hace que el último símbolo de w sea el que ocupa su cima y será el primero que se deba encontrar en la entrada al tratar w^{-1})
  - La siguiente página muestra gráficamente esta circunstancia.

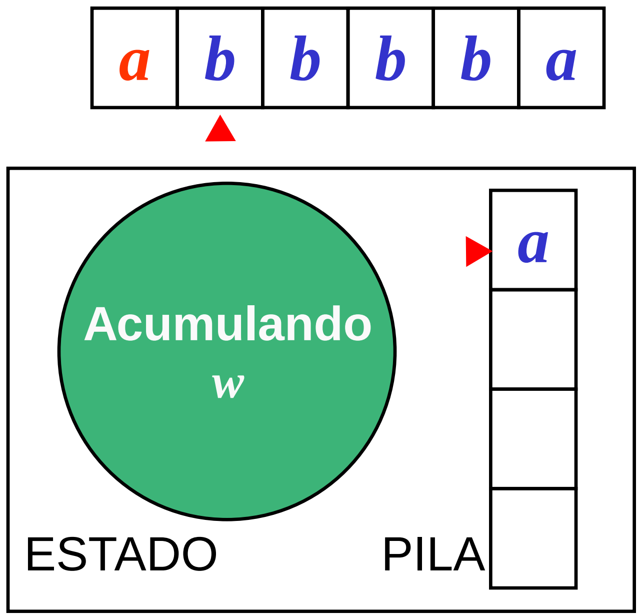
Descripción informal: ejemplo introductorio 1

- La palabra de entrada *abbbba* pertenece al lenguaje.
- Inicialmente se acumula en la pila



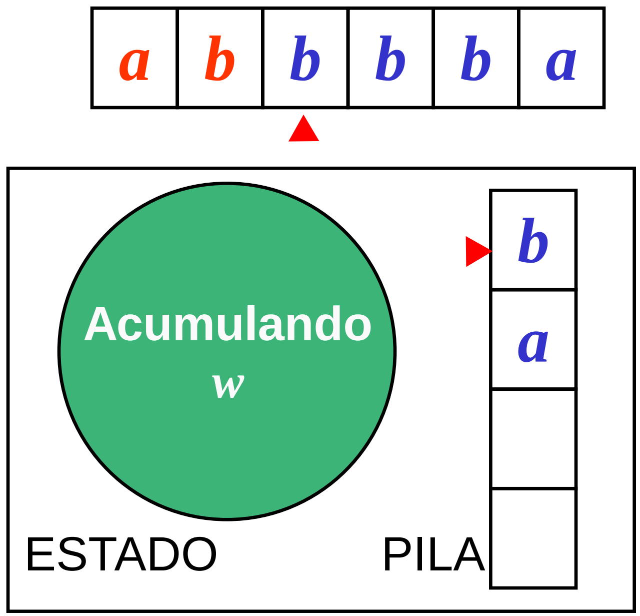
Descripción informal: ejemplo introductorio 1

- La palabra de entrada *abbbba* pertenece al lenguaje.
- Inicialmente se acumula en la pila



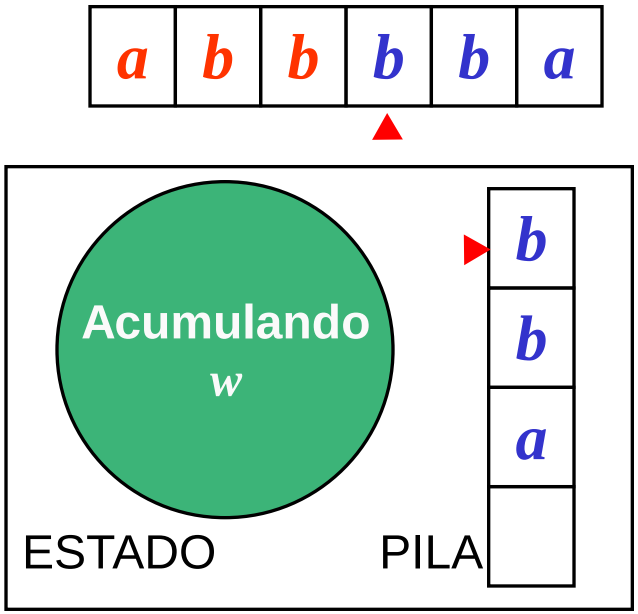
Descripción informal: ejemplo introductorio 1

- La palabra de entrada *abbbba* pertenece al lenguaje.
- Inicialmente se acumula en la pila



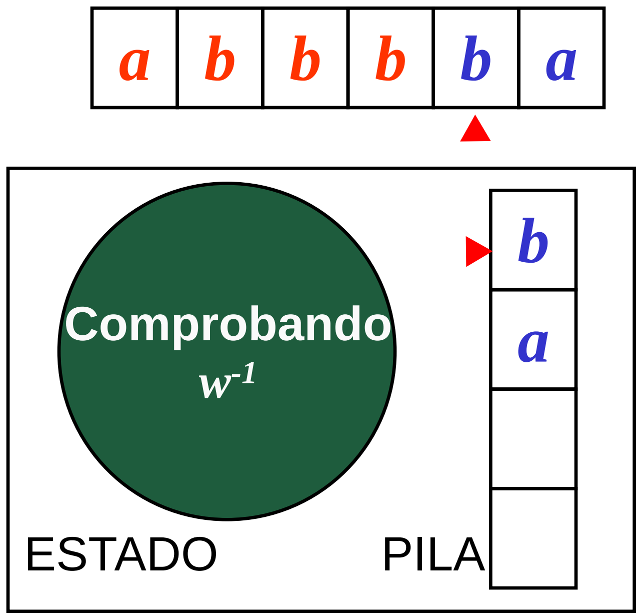
Descripción informal: ejemplo introductorio 1

- La palabra de entrada *abbbba* pertenece al lenguaje.
- Inicialmente se acumula en la pila



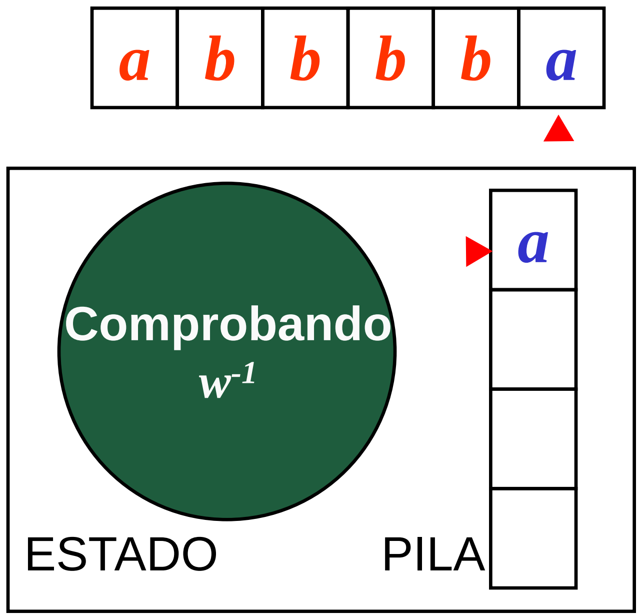
Descripción informal: ejemplo introductorio 1

- A partir de ahora, se puede comprobar que la pila y el resto de la entrada coinciden y contienen w^{-1}.



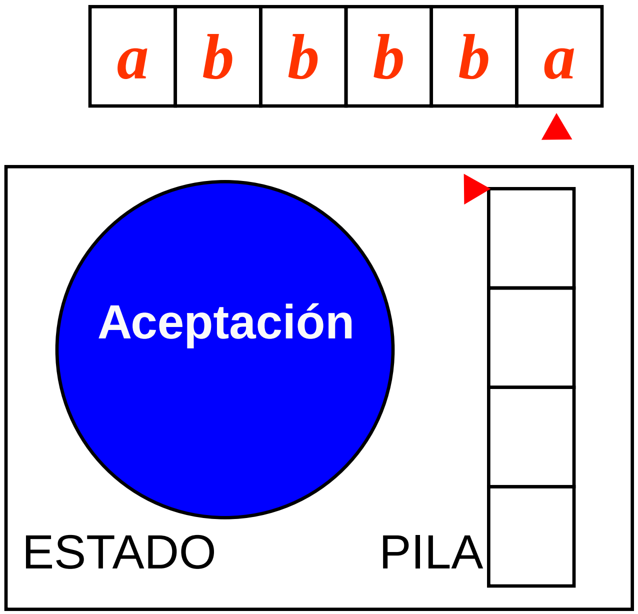
Descripción informal: ejemplo introductorio 1

- A partir de ahora, se puede comprobar que la pila y el resto de la entrada coinciden y contienen w^{-1}.



Descripción informal: ejemplo introductorio 1

- Y la palabra se puede aceptar



Descripción informal: ejemplo introductorio 1

- Queda solucionar el problema de la identificación del final de w y, por tanto, el comienzo de w^{-1}:
  - Mientras se está en el *estado de aceptación de* w, cada símbolo de la entrada puede ser:
    - O el siguiente de w.
    - O el primero de w^{-1}.
- Pero éste tipo de situaciones ya se verá que son propias de los dispositivos no deterministas por lo que no suponen una limitación para abordar el problema con un autómata a pila que ya veremos que puede ser no determinista.
- Intuitivamente, parece posible solucionar el problema con autómatas a pila. La clave ha sido poder almacenar una subcadena de entrada (w) arbitrariamente grande en el orden adecuado (en la pila).

Definición formal

- Formalmente un autómata a pila es una séptupla

$$A=(\Sigma, \Gamma, Q, A_0 , q_0, \delta, F)$$

- Donde:
  - Σ es el **alfabeto de entrada**.
  - Γ es el **alfabeto de la pila**.
  - Q es un conjunto finito no vacío de **estados**.
  - $A_0 \in \Gamma$ es el **símbolo inicial de la pila**.
  - $q_0 \in Q$ es el **estado inicial** del autómata.
  - $F \subseteq Q$ es el **conjunto de estados de finalización** del autómata.
  - $\delta: Q \times \Sigma \cup \{\lambda\} \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$ donde
    - $2^{Q \times \Gamma^*}$ es el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto $Q \times \Gamma^*$
    - la **función de transición** que a cada pareja de estado (q) y símbolo que ocupe la cima de la pila (A) le asigna el conjunto de estados al que puede transitar y las palabras que se introducen para cada estado en la pila
      - mediante el símbolo de entrada a: $\delta(q,a,A)$;o
      - sin consumir ningún símbolo de entrada (transición λ): $\delta(q,\lambda,A)$.

Definición formal: representaciones

- En general se utilizarán las siguientes representaciones
  - Para los elementos de Σ: $a, b, c, \ldots$
  - Para los elementos de Σ^*: $x, y, \ldots$
  - Para los elementos de Γ: $A, B, C, \ldots$
  - Para los elementos de Γ^*: $X, Y, \ldots$

Definición formal: observaciones

- El funcionamiento del autómata es como sigue:
  - **Inicialmente**:
    - En la pila se encuentra la información que se considere necesaria.
    - El autómata se encuentra en su estado inicial.
  - Funcionamiento **ante un símbolo** (a):
    - El autómata consulta la cima de la pila (A).
    - El autómata se encuentra en su (conjunto de) estado(s) actual(es).
    - Con el estado actual (p) (para cada uno de ellos):
      - El estado y la cima de la pila determinan la(s) acción(es) siguiente(s), para cada terna indicada por la función de transición ($(q,A,X)\in\delta(p,a)$)
        - Se extrae de la pila la cima (A)
        - Se inserta en la pila la cadena que especifica la función de transición (X)
        - Se transita al estado que determina la función de transición (q).

Definición formal: observaciones

- El funcionamiento del autómata es como sigue:
  - **Parada** del autómata: el autómata se detiene por alguna de las siguientes razones:
    - Se termina la cadena de entrada
    - Se llega a una situación en la que no hay transición especificada en el autómata (es $\emptyset$)

Ejemplo introductorio 1

- A continuación se muestra la definición formal del autómata a pila del ejemplo introductorio 1.

$$A_1=(\Sigma_1=\{a,b\},\ \Gamma_1=\{z, a, b\},\ Q_1=\{p, q\},\ z\ ,\ q_0=p,\ \delta,\ F=\emptyset)$$

- Donde δ se define como sigue:

$$\delta(p, a,z)=\{(p, az)\}$$
$$\delta(p, a,a)=\{(p, aa), (q,\lambda)\}$$
$$\delta(p, a,b)=\{(p, ab)\}$$
$$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$$
$$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$$
$$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$$
$$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$$
$$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$$
$$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$$

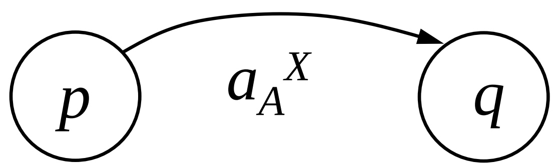
- Obsérvese que
  - Sólo se ha añadido la presencia de un símbolo inicial de pila (z)
  - Cuando la cima de la pila y la entrada coinciden se tiene que suponer que se está ya en w^{-1}.

Representaciones: diagramas de transición

- Los diagramas de transición que se han estudiado al principio del tema deben ser extendidos para mostrar las manipulaciones de la pila necesarias en cada transición.
- Para ello, las etiquetas de los arcos tendrán la siguiente estructura:

$$a_A{}^X$$

- Donde:
  - $a \in \Sigma_T$, es un símbolo de entrada.
  - $A \in \Gamma$, es un símbolo de pila.
  - $X \in \Gamma^*$, es una cadena de símbolos de pila.
- Y un arco etiquetado de esta forma entre los nodos p y q significa $\delta(p,a,A) \ni (q,X)$:



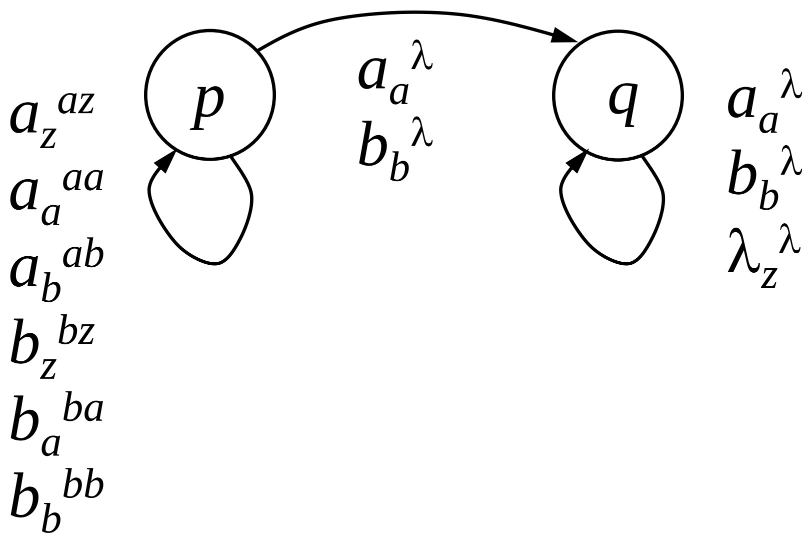
Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- A continuación se muestra la definición formal del autómata a pila del ejemplo introductorio 1.

$$A_1=(\Sigma_1=\{a,b\},\ \Gamma_1=\{z,\ a,\ b\},\ Q_1=\{p,\ q\},\ z\ ,\ q_0=p,\ \delta,\ F=\varnothing)$$

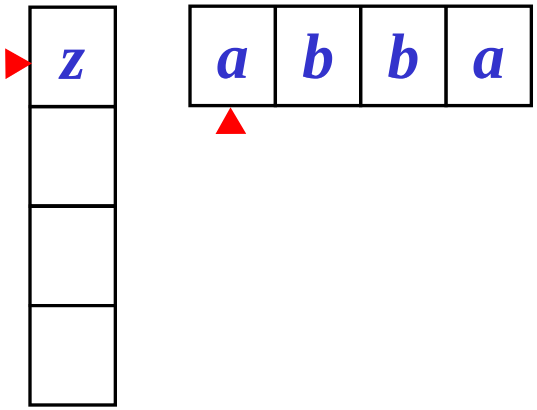
- Donde δ se define como sigue:

$\delta(p,\ a,z)=\{(p,\ az)\}$
$\delta(p,\ a,a)=\{(p,\ aa),\ (q,\lambda)\}$
$\delta(p,\ a,b)=\{(p,\ ab)\}$
$\delta(p,\ b,\ z)=\{(p,\ bz)\}$
$\delta(p,\ b,\ a)=\{(p,\ ba)\}$
$\delta(p,\ b,\ b)=\{(p,\ bb),\ (q,\ \lambda)\}$
$\delta(q,\ a,\ a)=\{(q,\ \lambda)\}$
$\delta(q,\ b,\ b)=\{(q,\ \lambda)\}$
$\delta(q,\ \lambda,\ z)=\{(q,\ \lambda)\}$

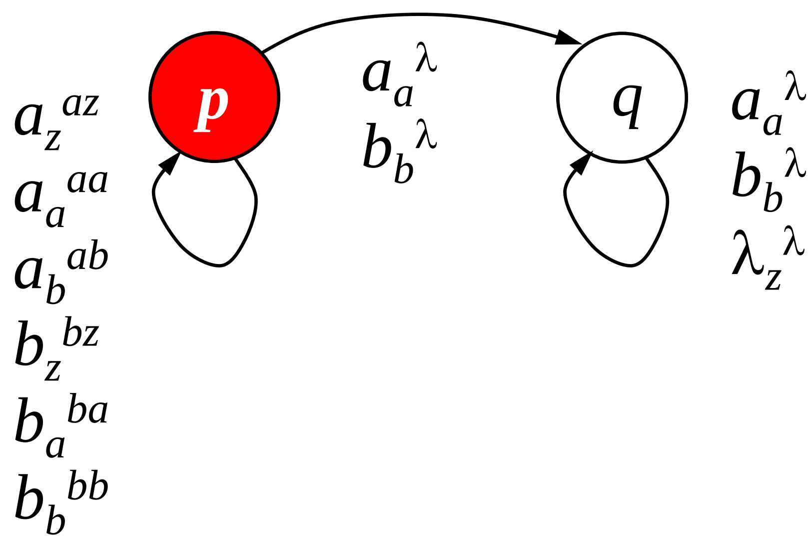


Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Veamos su comportamiento frente a la cadena *abba*: (se excluyen las ramas no deterministas que terminan sin éxito)



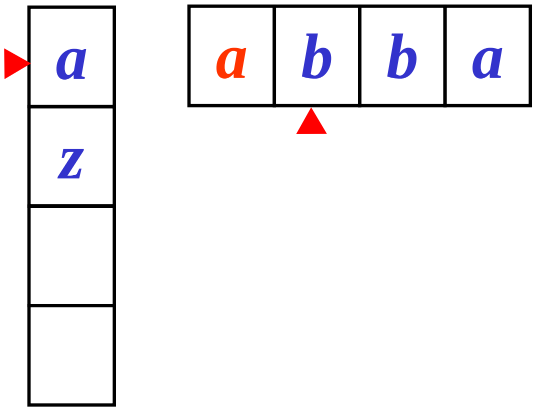
$\delta(p, a, z)=\{(p, az)\}$
$\delta(p, a, a)=\{(p, aa), (q, \lambda)\}$
$\delta(p, a, b)=\{(p, ab)\}$
$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$
$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$
$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$
$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$



Autómatas a pila

Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Veamos su comportamiento frente a la cadena *abba*: (se excluyen las ramas no deterministas que terminan sin éxito)



$\delta(p, a,z)=\{\mathbf{(p, az)}\}$

$\delta(p, a,a)=\{(p, aa), (q,\lambda)\}$

$\delta(p, a,b)=\{(p, ab)\}$

$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$

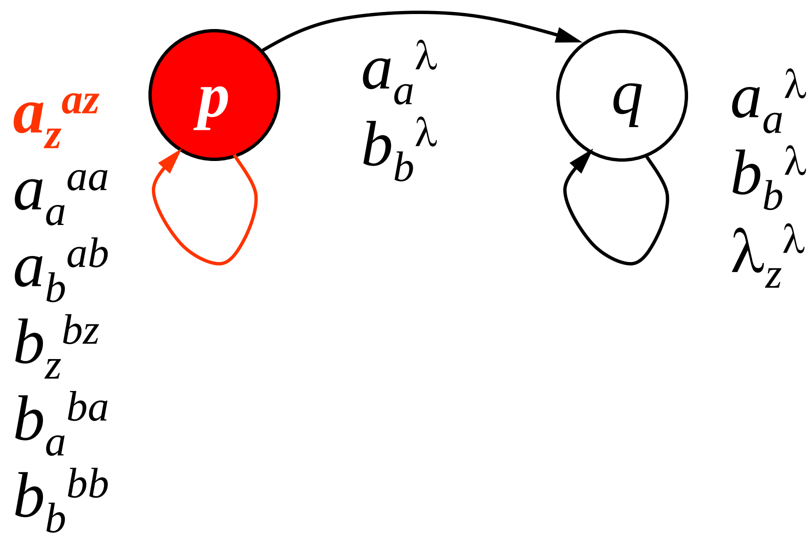
$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$

$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$

$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$

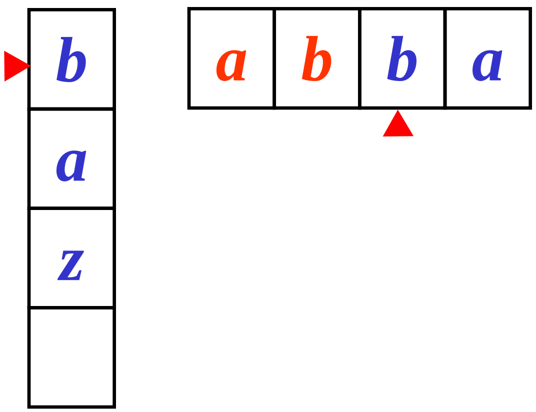
$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$

$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$

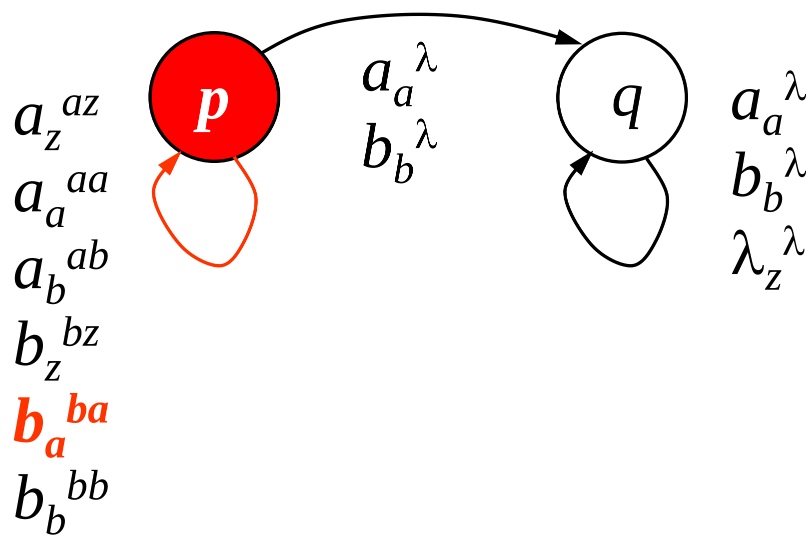


Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Veamos su comportamiento frente a la cadena *abba*: (se excluyen las ramas no deterministas que terminan sin éxito)

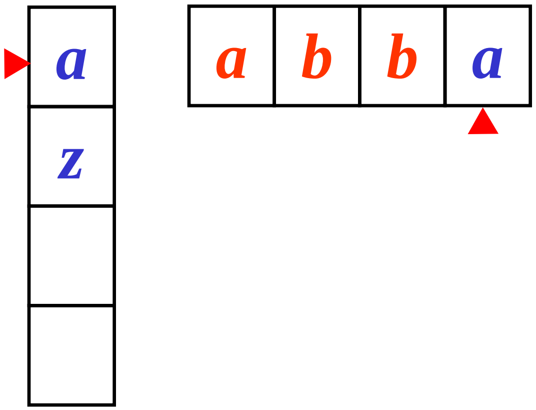


$\delta(p, a,z)=\{(p, az)\}$
$\delta(p, a,a)=\{(p, aa), (q,\lambda)\}$
$\delta(p, a,b)=\{(p, ab)\}$
$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$
$\delta(p, b, a)=\{\mathbf{(p, ba)}\}$
$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$
$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$

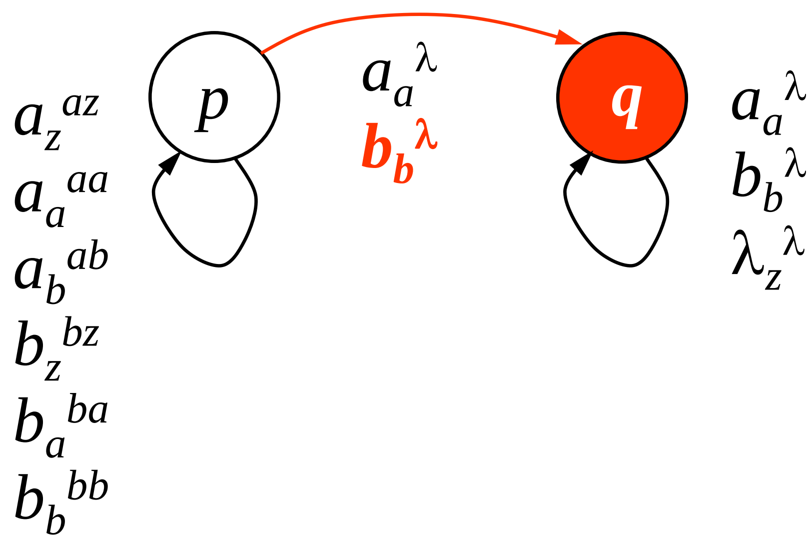


Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Veamos su comportamiento frente a la cadena *abba*: (se excluyen las ramas no deterministas que terminan sin éxito)

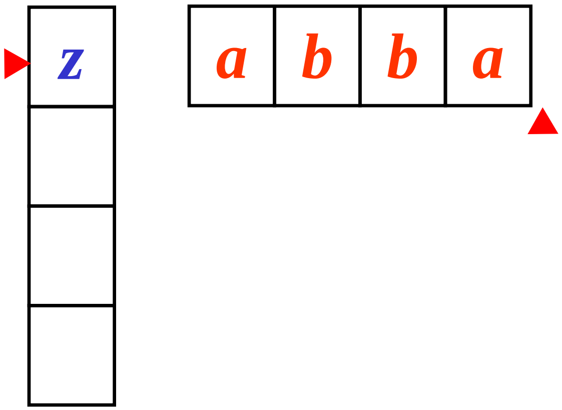


$\delta(p, a,z)=\{(p, az)\}$
$\delta(p, a,a)=\{(p, aa), (q,\lambda)\}$
$\delta(p, a,b)=\{(p, ab)\}$
$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$
$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$
$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), \mathbf{(q, \lambda)}\}$
$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$

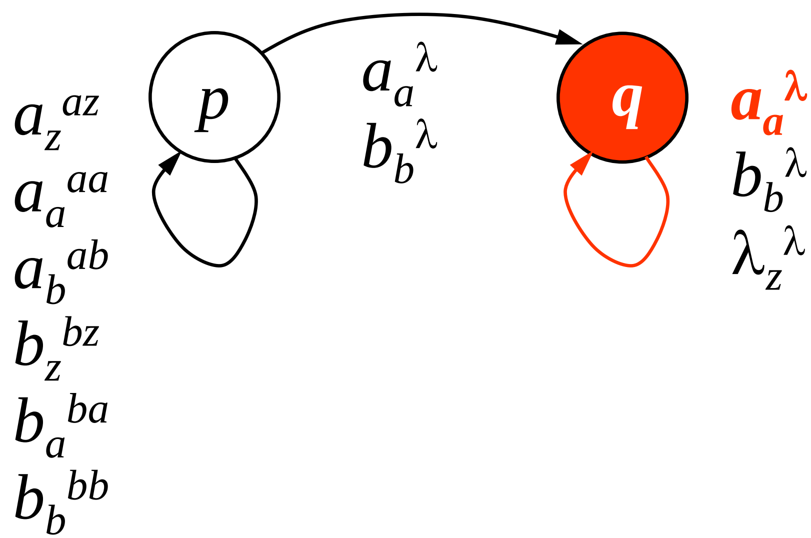


Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Veamos su comportamiento frente a la cadena *abba*: (se excluyen las ramas no deterministas que terminan sin éxito)

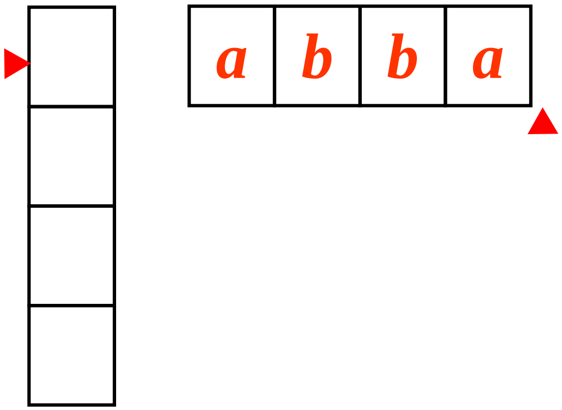


$\delta(p, a, z) = \{(p, az)\}$
$\delta(p, a, a) = \{(p, aa), (q, \lambda)\}$
$\delta(p, a, b) = \{(p, ab)\}$
$\delta(p, b, z) = \{(p, bz)\}$
$\delta(p, b, a) = \{(p, ba)\}$
$\delta(p, b, b) = \{(p, bb), (q, \lambda)\}$
$\delta(q, a, a) = \{\mathbf{(q, \lambda)}\}$
$\delta(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, \lambda, z) = \{(q, \lambda)\}$

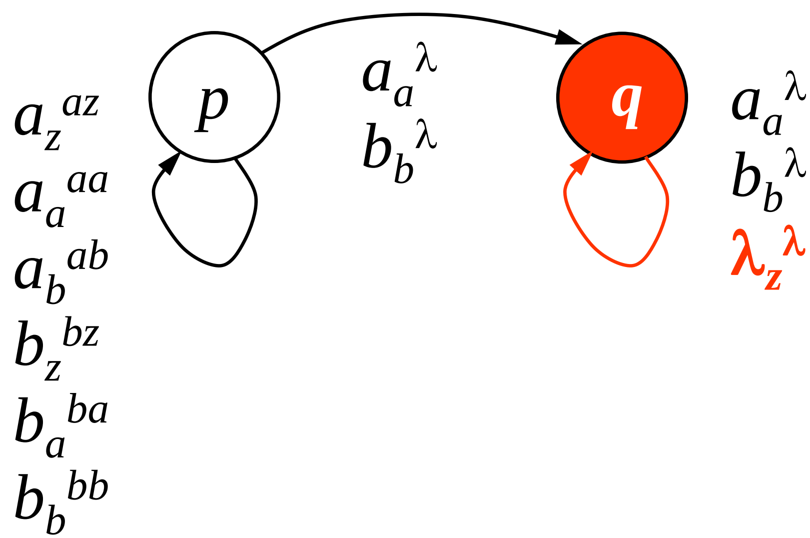


Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Veamos su comportamiento frente a la cadena *abba*: (se excluyen las ramas no deterministas que terminan sin éxito)



$\delta(p, a, z) = \{(p, az)\}$
$\delta(p, a, a) = \{(p, aa), (q, \lambda)\}$
$\delta(p, a, b) = \{(p, ab)\}$
$\delta(p, b, z) = \{(p, bz)\}$
$\delta(p, b, a) = \{(p, ba)\}$
$\delta(p, b, b) = \{(p, bb), (q, \lambda)\}$
$\delta(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, \lambda, z) = \{\mathbf{(q, \lambda)}\}$



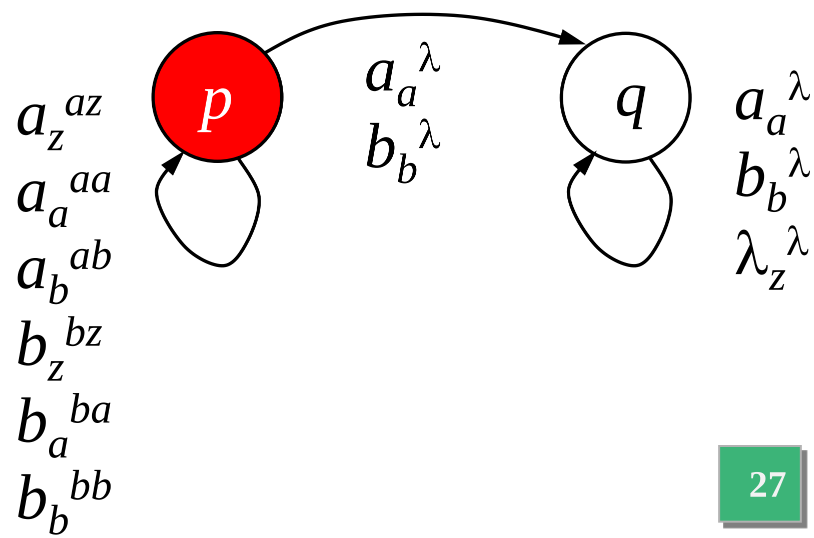
Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Para destacar el no determinismo, adjuntamos un diagrama con el árbol de descripciones instantáneas completo para otro caso bbbb

$(p,\ bbbb,\ z)$

$\delta(p,\ a,z)=\{(p,\ az)\}$
$\delta(p,\ a,a)=\{(p,\ aa),\ (q,\lambda)\}$
$\delta(p,\ a,b)=\{(p,\ ab)\}$
$\delta(p,\ b,\ z)=\{(p,\ bz)\}$
$\delta(p,\ b,\ a)=\{(p,\ ba)\}$

$\delta(p,\ b,\ b)=\{(p,\ bb),\ (q,\ \lambda)\}$
$\delta(q,\ a,\ a)=\{(q,\ \lambda)\}$
$\delta(q,\ b,\ b)=\{(q,\ \lambda)\}$
$\delta(q,\ \lambda,\ z)=\{(q,\ \lambda)\}$

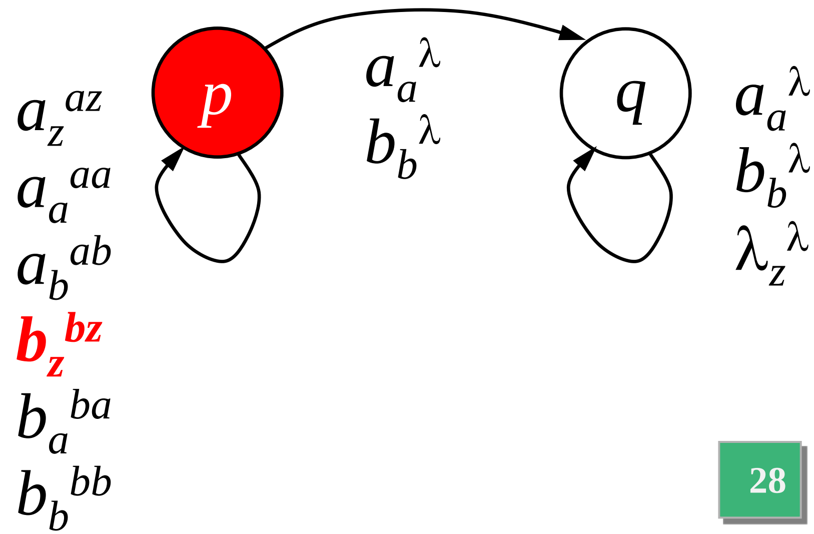


Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Para destacar el no determinismo, adjuntamos un diagrama con el árbol de descripciones instantáneas completo para otro caso bbbb

$(p, bbbb, z)$

$\xrightarrow[w]{} (p, bbb, bz)$



$\delta(p, a,z)=\{(p, az)\}$

$\delta(p, a,a)=\{(p, aa), (q,\lambda)\}$

$\delta(p, a,b)=\{(p, ab)\}$

$\delta(p, b, z)=\{\mathbf{(p, bz)}\}$

$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$

$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$

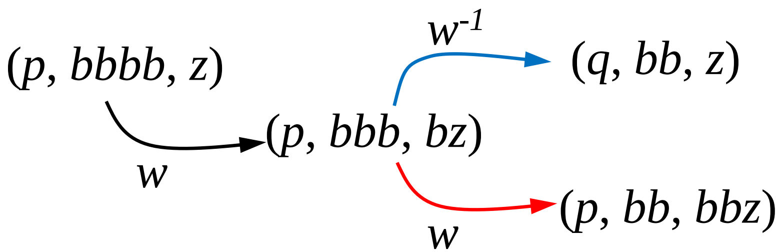
$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$

$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$

$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$

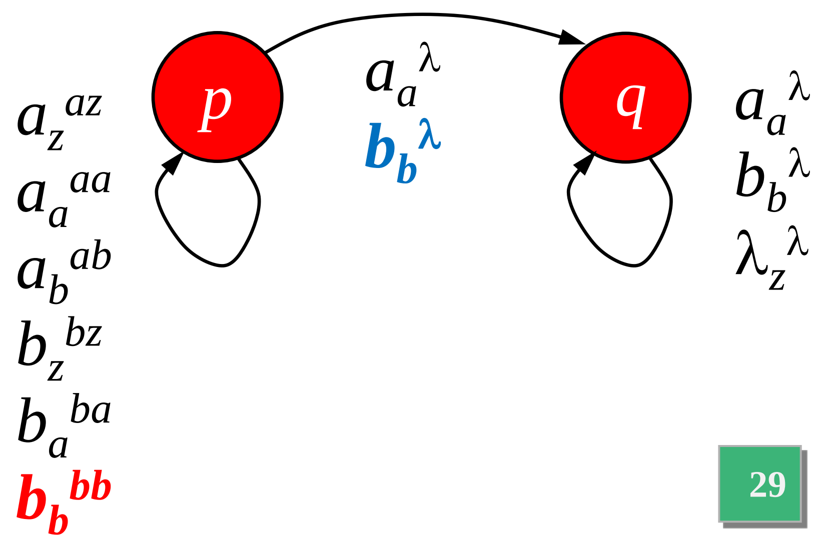
Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Para destacar el no determinismo, adjuntamos un diagrama con el árbol de descripciones instantáneas completo para otro caso bbbb



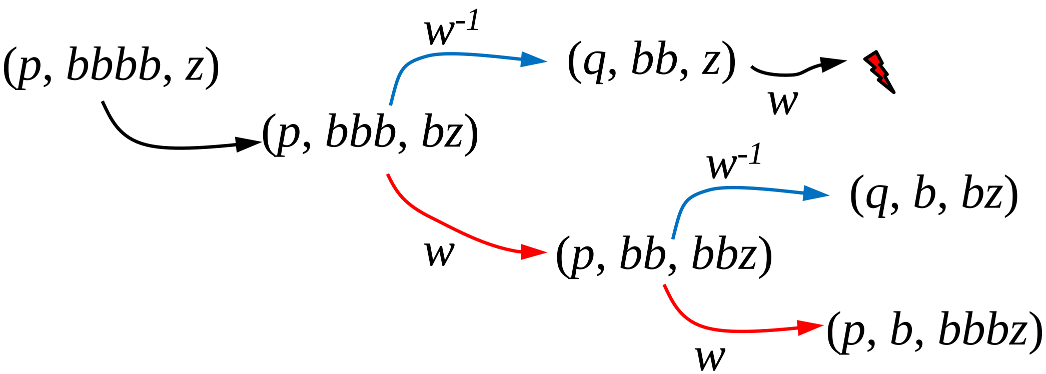
$\delta(p, a,z)=\{(p, az)\}$
$\delta(p, a,a)=\{(p, aa), (q,\lambda)\}$
$\delta(p, a,b)=\{(p, ab)\}$
$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$
$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$

$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$
$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$



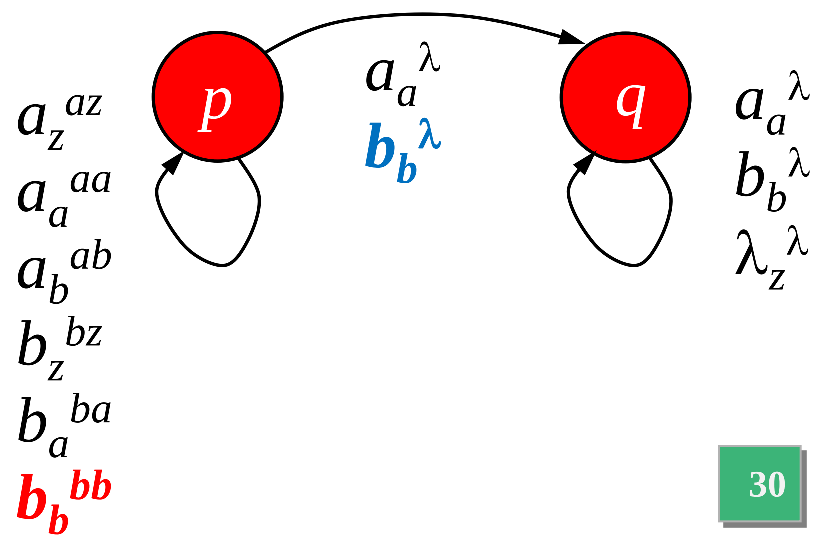
Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Para destacar el no determinismo, adjuntamos un diagrama con el árbol de descripciones instantáneas completo para otro caso *bbbb*, el supuesto de estar en la primera mitad de la cadena lo describimos como *w* y el de estar chequeando la segunda w^{-1}



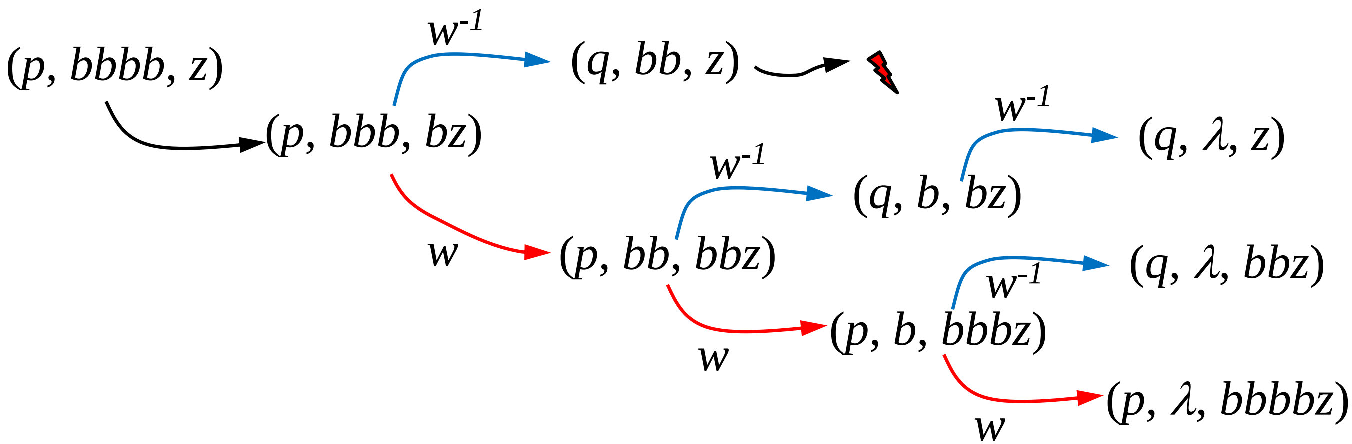
$\delta(p, a, z)=\{(p, az)\}$
$\delta(p, a, a)=\{(p, aa), (q, \lambda)\}$
$\delta(p, a, b)=\{(p, ab)\}$
$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$
$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$

$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$
$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$



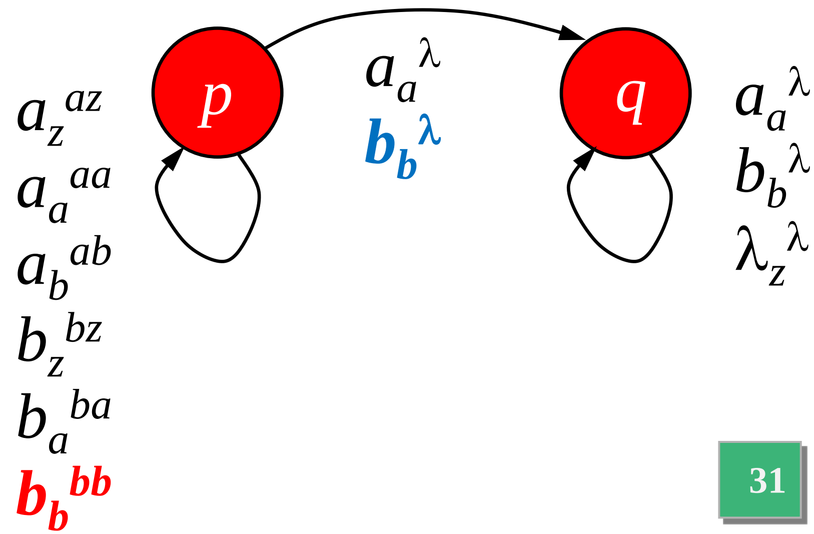
Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Para destacar el no determinismo, adjuntamos un diagrama con el árbol de descripciones instantáneas completo para otro caso *bbbb*, el supuesto de estar en la primera mitad de la cadena lo describimos como *w* y el de estar chequeando la segunda w^{-1}



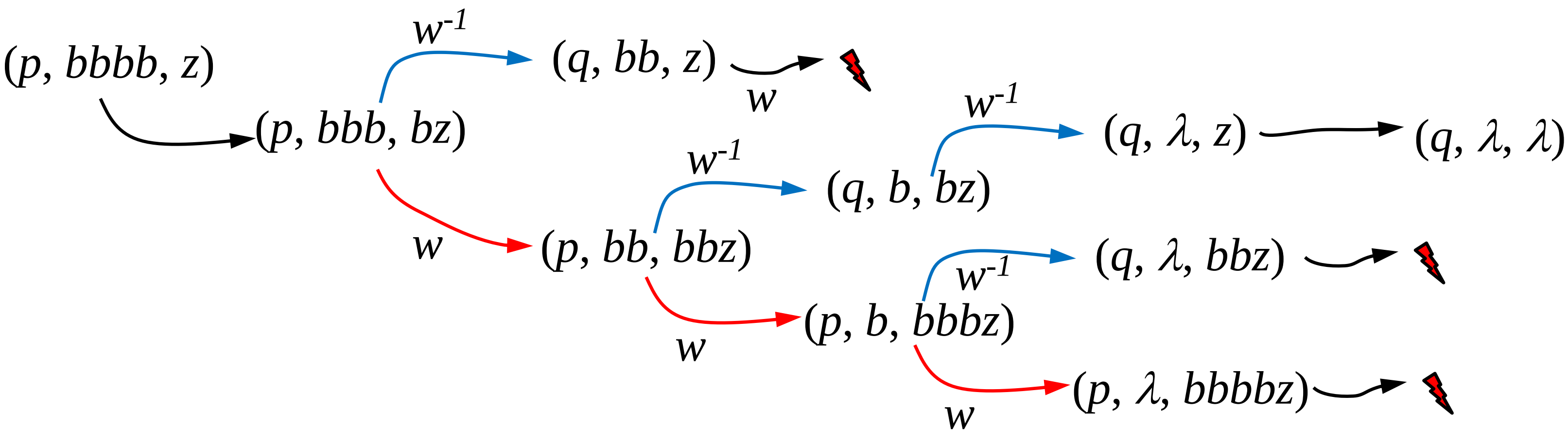
$\delta(p, a,z)=\{(p, az)\}$
$\delta(p, a,a)=\{(p, aa), (q,\lambda)\}$
$\delta(p, a,b)=\{(p, ab)\}$
$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$
$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$

$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$
$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$



Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Para destacar el no determinismo, adjuntamos un diagrama con el árbol de descripciones instantáneas completo para otro caso *bbbb*, el supuesto de estar en la primera mitad de la cadena lo describimos como *w* y el de estar chequeando la segunda w^{-1}



$\delta(p, a,z)=\{(p, az)\}$

$\delta(p, a,a)=\{(p, aa), (q,\lambda)\}$

$\delta(p, a,b)=\{(p, ab)\}$

$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$

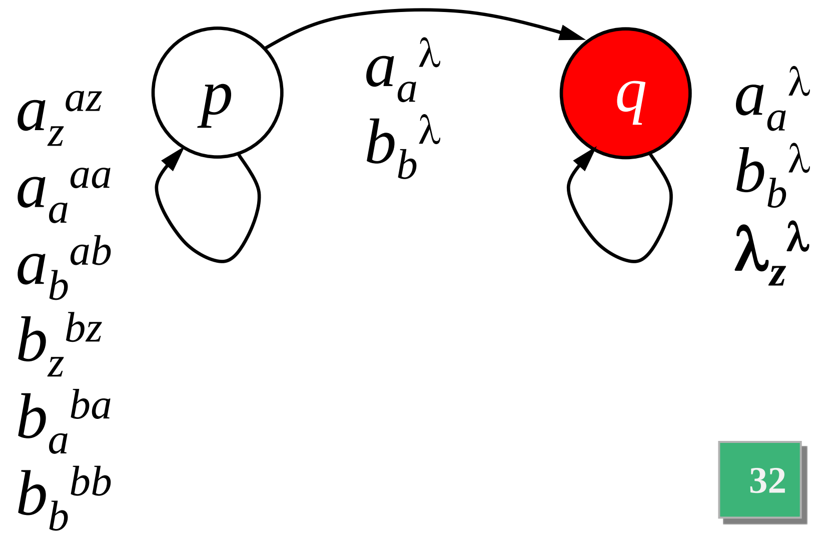
$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$

$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$

$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$

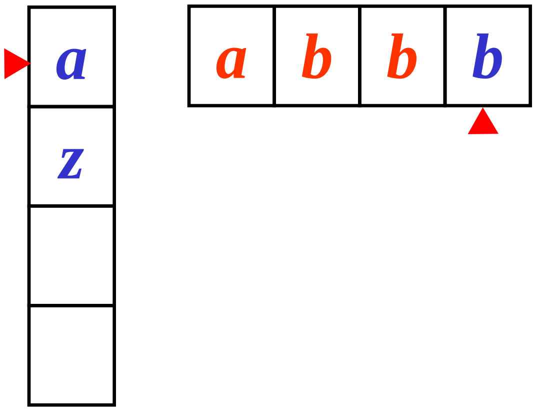
$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$

$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$

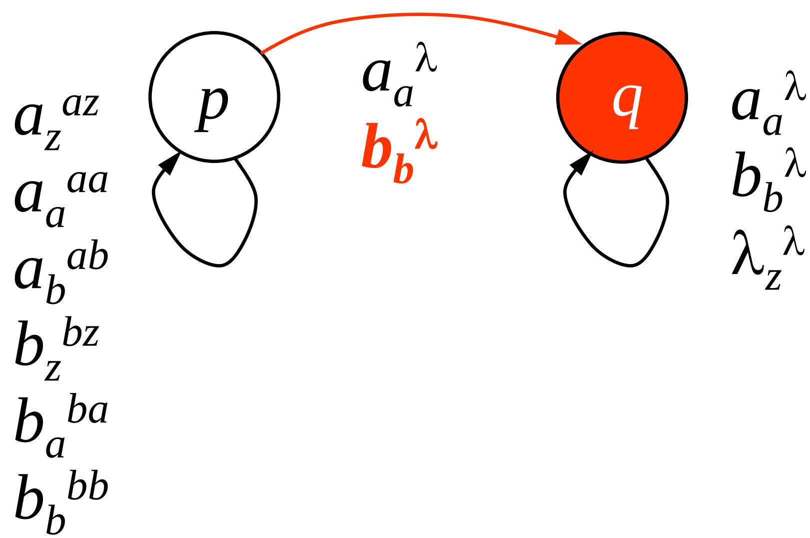


Diagramas de transición: ejemplo introductorio 1

- Supongamos que la cadena era $abbb$. No hay transición para q, b, a : el autómata termina sin completar la entrada.



$\delta(p, a,z)=\{(p, az)\}$
$\delta(p, a,a)=\{(p, aa), (q,\lambda)\}$
$\delta(p, a,b)=\{(p, ab)\}$
$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$
$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$
$\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}$
$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$
$\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}$



Descripción informal

- Obsérvese que la definición formal de autómata a pila, permite el no determinismo:

$$\delta: Q\times\Sigma\cup\{\lambda\}\times\Gamma\rightarrow 2^{Q\times\Gamma^*}$$

- La función de transición
  - especifica la posibilidad de transitar sin consumir entrada (transiciones λ)
  - devuelve un conjunto de pares, cada una de ellas es una rama no determinista a la que transita el autómata de forma simultánea.
- Es interesante, al menos, presentar las diferencias entre autómatas a pila deterministas y no deterministas.
- De manera similar al caso de los autómatas finitos, el no determinismo proviene de
  - Las transiciones λ
  - La posibilidad de, dado un estado, un símbolo de entrada y un símbolo en la cima de la pila, se realice más de una acción.

Definición formal

- Se dirá que un autómata a pila

$$(\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, \delta, F)$$

- Es **determinista** cuando:
  - Si hay una transición λ, en esas mismas circunstancias (mismo estado q y misma cima de la pila A) no hay transiciones que consuman símbolo de entrada:

$$\forall q \in Q, \forall A \in \Gamma \quad |\delta(q,\lambda,A)| > 0 \Rightarrow \quad \delta(q,a,A) = \varnothing \ \forall a \in \Sigma$$

  - No hay más de una transición para cada situación.

$$\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \forall A \in \Gamma \quad |\delta(q,a,A)| < 2$$

Definición formal

- En cualquier otro caso, se dirá que el autómata a pila es **no determinista.**

Autómatas a pila y determinismo

Ejemplos

- Si se recuerda la función de transición del ejemplo introductorio 1:
  - Las dos transiciones resaltadas en rojo y azul muestran que no es determinista.
  - Observe que la transición λ (resaltadas en color verde), por sí sola, no haría que el autómata fuese no determinista porque no transita en la misma situación con ningún símbolo de entrada.

$\delta(p, a, z)=\{(p, az)\}$

$\boldsymbol{\delta(p, a, a)=\{(p, aa), (q, \lambda)\}}$

$\delta(p, a, b)=\{(p, ab)\}$

$\delta(p, b, z)=\{(p, bz)\}$

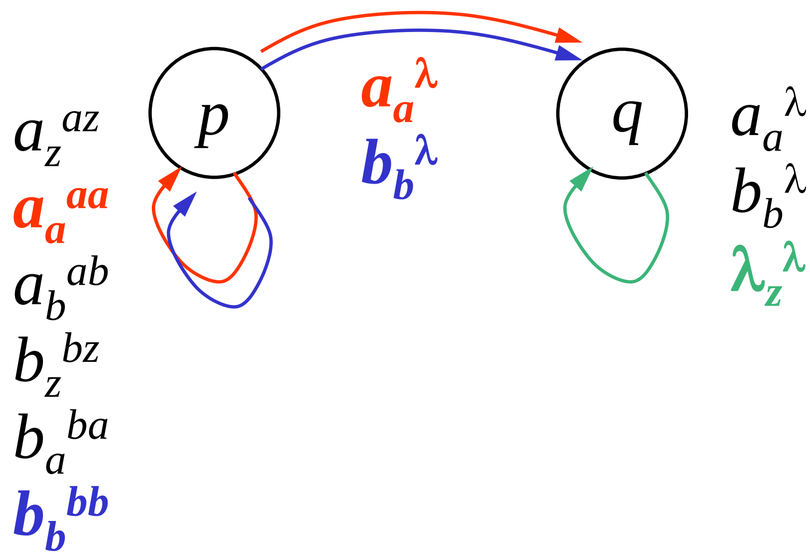
$\delta(p, b, a)=\{(p, ba)\}$

$\boldsymbol{\delta(p, b, b)=\{(p, bb), (q, \lambda)\}}$

$\delta(q, a, a)=\{(q, \lambda)\}$

$\delta(q, b, b)=\{(q, \lambda)\}$

$\boldsymbol{\delta(q, \lambda, z)=\{(q, \lambda)\}}$



Descripciones instantáneas

Concepto y definición:

- Para facilitar el estudio del funcionamiento de los autómatas a pila se suele representar el estado del autómata mediante cierta información que lo describe.
- Para ello se necesita el estado del autómata así como el contenido de la entrada y de la pila. Esta representación se llama **descripciones instantáneas**.

- Dado un autómata a pila

$$(\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, \delta, F)$$

  - **Una descripción instantánea** se definirá como una terna

$$(q, x, Z)$$

  - Donde:
    - $q \in Q$, que representa el estado en el que se encuentra el autómata en el instante considerado
    - $x \in \Sigma^*$, que representa la cadena que en el instante actual queda por procesar en la entrada
    - $Z \in \Gamma^*$, que representa el contenido de la pila en el instante actual.

Ejemplos

- La situación inicial del ejemplo introductorio 1 al analizar la cadena *abbbba*, es la siguiente:

$$(p, abbbba, z)$$

- Y, al terminar de analizarla es

$$(q, \lambda, \lambda)$$

Descripción de la computación de un autómata mediante descripciones instantáneas

- Se puede describir la computación de un autómata (esto es, su proceso de aceptación o rechazo de una cadena de entrada) mediante una sucesión de descripciones instantáneas.

- Para ello se define la **relación de precedencia ($\vdash$)** entre descripciones instantáneas: una descripción precede a otra si desde la primera se puede pasar a la segunda mediante la función de transición del autómata.
- Formalmente:

$$(q, az, AZ) \vdash (p, z, YZ) \Leftrightarrow \text{(def.)}$$

$$(p, Y) \in \delta(q, a, A) \;,, \; p,q \in Q, \;\; a \in \{\lambda\} \cup \Sigma, \;\; z \in \Sigma^*, A \in \Gamma, \; Y,Z \in \Gamma^*$$

- También se utilizará el **cierre reflexivo y transitivo de la relación de precedencia ($\vdash^*$)** para representar varios pasos de la función de transición, es decir, si d_i y d_j son dos descripciones instantáneas

$$d_i \vdash^* d_j \Leftrightarrow \exists \; d_{i0}, d_{i2},\ldots, d_{in} \text{ (descripciones instantáneas) } |$$

$$d_i = d_{i0} \vdash d_{i1} \vdash \cdots \vdash d_{in} = d_j$$

Lenguaje aceptado por un autómata a pila

Aceptación de una palabra por vaciado de pila: definición

- Se dirá que un autómata a pila **reconoce una palabra por vaciado de pila** si tras procesar la palabra la pila del autómata queda vacía.
- Se dirá que un autómata a pila **rechaza una palabra por vaciado de pila** si
  - tras procesarla la pila del autómata no está vacía.
  - o si, en algún instante, ante un símbolo de entrada, el autómata no tiene definida ninguna transición.

Aceptación de una palabra por estado final: definición

- Se dirá que un autómata a pila **reconoce una palabra por estado final** si tras procesar la palabra el autómata llega a uno de sus estados finales.
- Se dirá que un autómata a pila **rechaza una palabra por estado final** si
  - tras procesar la palabra el autómata llega a uno de sus estados no finales,
  - o si, en algún instante, ante un símbolo de entrada, el autómata no tiene definida ninguna transición.

Aceptación de una palabra por vaciado de pila: ejemplos

- Se ha podido observar previamente que el **ejemplo introductorio 1**, tras analizar la cadena la cadena $abbbba$, terminaba en la situación reflejada en la descripción instantánea

$$(q, \lambda, \lambda)$$

- Puede observarse que tiene la pila vacía, por lo que es un ejemplo de aceptación de una palabra por esta condición.

Lenguaje aceptado por un autómata a pila

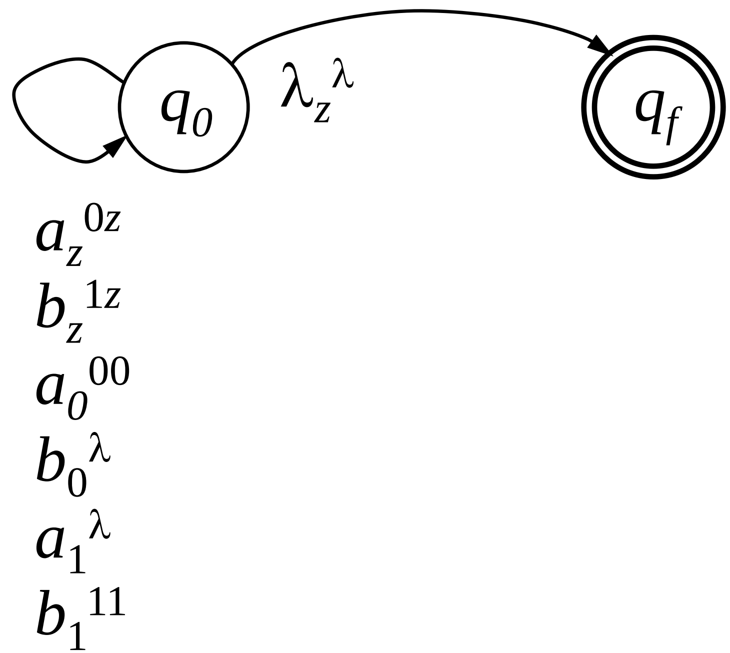
Aceptación de una palabra por estado final: ejemplo 1

- Considérese el siguiente autómata a pila:

$$(\Sigma=\{a,b\},\ \Gamma_2=\{z,\ 0,\ 1\},\ Q=\{q_0,\ q_f\},\ z\ ,\ q_0=p,\ \delta,\ F=\{q_f\})$$

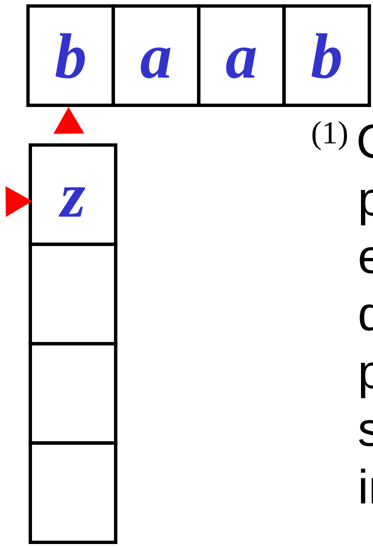
  - Donde δ se describe a continuación, mediante su definición y mediante el diagrama de transiciones.

$\delta(q_0, \lambda, z)=\{(q_f, z)\}$
$\delta(q_0, a, z)=\{(q_0, 0z)\}$
$\delta(q_0, b, z)=\{(q_0, 1z)\}$
$\delta(q_0, a, 0)=\{(q_0, 00)\}$
$\delta(q_0, b, 0)=\{(q_0, \lambda)\}$
$\delta(q_0, a, 1)=\{(q_0, \lambda)\}$
$\delta(q_0, b, 1)=\{(q_0, 11)\}$



Aceptación de una palabra por estado final: ejemplo 1

- Se puede analizar su comportamiento frente a la palabra de entrada *baab*.

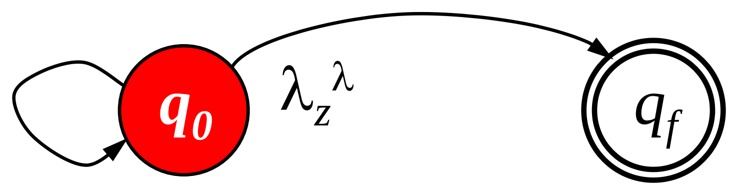


[1]$(q_0, baab, z)$

[1] Cada vez que en la cima está el símbolo z, se podría aplicar la primera transición que representa la hipótesis de haber completado el reconocimiento (se verá que en este caso es equilibrar el número de símbolos *a* y *b*). Esa transición lleva al estado final del que no se puede salir. Cualquier situación en la que se aplique esa transición sin terminar simultáneamente la entrada se terminará inmediatamente por no poder transitar de ninguna manera.

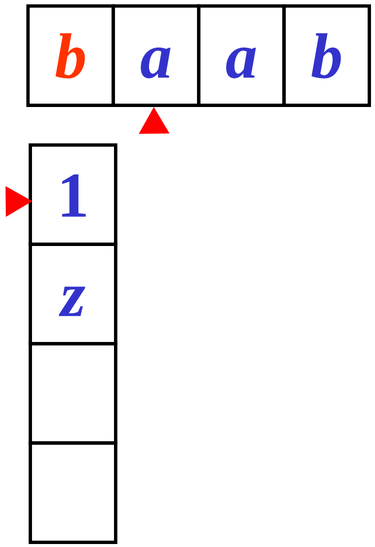
$\delta(q_0, \lambda, z)=\{(q_f, z)\}$
$\delta(q_0, a, z)=\{(q_0, 0z)\}$
$\delta(q_0, b, z)=\{(q_0, 1z)\}$
$\delta(q_0, a, 0)=\{(q_0, 00)\}$
$\delta(q_0, b, 0)=\{(q_0, \lambda)\}$
$\delta(q_0, a, 1)=\{(q_0, \lambda)\}$
$\delta(q_0, b, 1)=\{(q_0, 11)\}$

a_z^{0z}
b_z^{1z}
a_0^{00}
b_0^{λ}
a_1^{λ}
b_1^{11}



Aceptación de una palabra por estado final: ejemplo 1

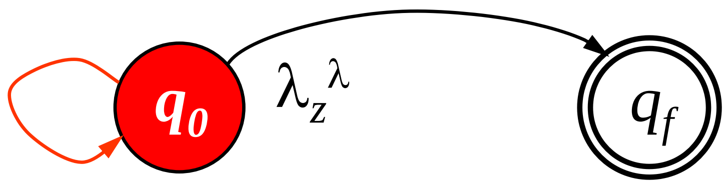
- Se puede analizar su comportamiento frente a la palabra de entrada *baab*.



$(q_0, baab, z) \vdash (q_0, aab, 1z)$

$\delta(q_0, \lambda, z)=\{(q_f, z)\}$
$\delta(q_0, a, z)=\{(q_0, 0z)\}$
$\delta(q_0, b, z)=\{(q_0, 1z)\}$
$\delta(q_0, a, 0)=\{(q_0, 00)\}$
$\delta(q_0, b, 0)=\{(q_0, \lambda)\}$
$\delta(q_0, a, 1)=\{(q_0, \lambda)\}$
$\delta(q_0, b, 1)=\{(q_0, 11)\}$

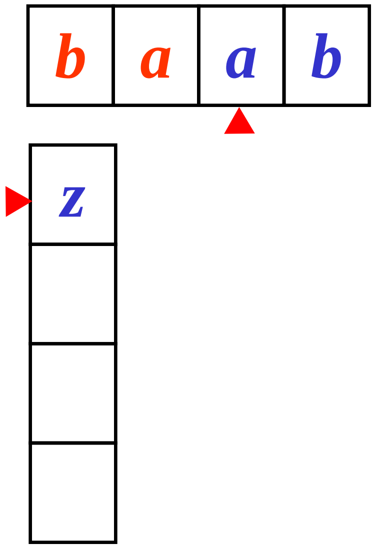
a_z^{0z}
b_z^{1z}
a_0^{00}
b_0^{λ}
a_1^{λ}
b_1^{11}



Lenguaje aceptado por un autómata a pila

Aceptación de una palabra por estado final: ejemplo 1

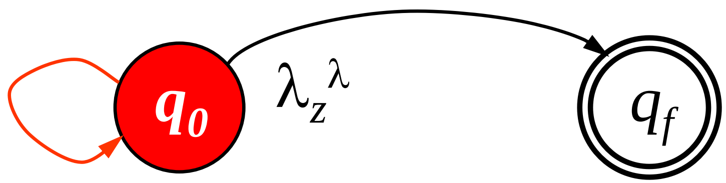
- Se puede analizar su comportamiento frente a la palabra de entrada *baab*.



$(q_0, baab, z) \vdash (q_0, aab, 1z) \vdash (q_0, ab, z)$

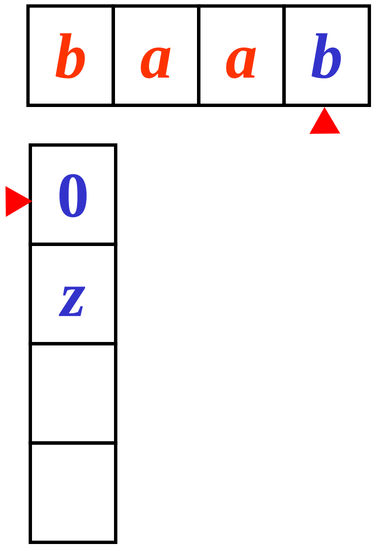
$\delta(q_0, \lambda, z)=\{(q_f, z)\}$
$\delta(q_0, a, z)=\{(q_0, 0z)\}$
$\delta(q_0, b, z)=\{(q_0, 1z)\}$
$\delta(q_0, a, 0)=\{(q_0, 00)\}$
$\delta(q_0, b, 0)=\{(q_0, \lambda)\}$
$\boldsymbol{\delta(q_0, a, 1)=\{(q_0, \lambda)\}}$
$\delta(q_0, b, 1)=\{(q_0, 11)\}$

a_z^{0z}
b_z^{1z}
a_0^{00}
b_0^{λ}
$\boldsymbol{a_1^{\lambda}}$
b_1^{11}



Aceptación de una palabra por estado final: ejemplo 1

- Se puede analizar su comportamiento frente a la palabra de entrada *baab*.



$(q_0, baab, z) \vdash (q_0, aab, 1z) \vdash (q_0, ab, z) \vdash (q_0, b, 0z)$

$\delta(q_0, \lambda, z)=\{(q_f, z)\}$

$\delta(q_0, a, z)=\{(q_0, 0z)\}$

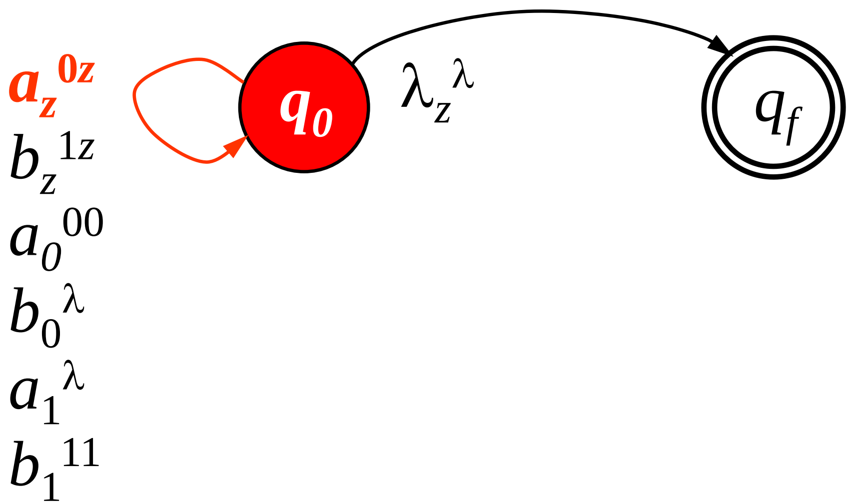
$\delta(q_0, b, z)=\{(q_0, 1z)\}$

$\delta(q_0, a, 0)=\{(q_0, 00)\}$

$\delta(q_0, b, 0)=\{(q_0, \lambda)\}$

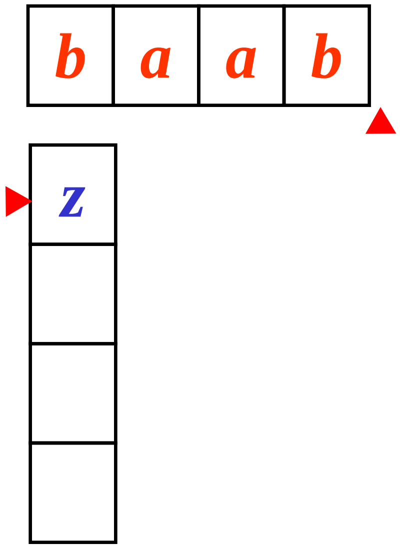
$\delta(q_0, a, 1)=\{(q_0, \lambda)\}$

$\delta(q_0, b, 1)=\{(q_0, 11)\}$



Aceptación de una palabra por estado final: ejemplo 1

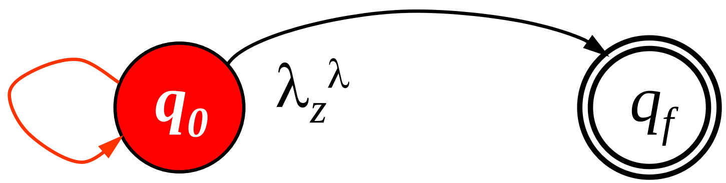
- Se puede analizar su comportamiento frente a la palabra de entrada *baab*.



$(q_0, baab, z) \vdash (q_0, aab, 1z) \vdash (q_0, ab, z) \vdash (q_0, b, 0z) \vdash (q_0, \lambda, z)$

$\delta(q_0, \lambda, z)=\{(q_f, z)\}$
$\delta(q_0, a, z)=\{(q_0, 0z)\}$
$\delta(q_0, b, z)=\{(q_0, 1z)\}$
$\delta(q_0, a, 0)=\{(q_0, 00)\}$
$\boldsymbol{\delta(q_0, b, 0)=\{(q_0, \lambda)\}}$
$\delta(q_0, a, 1)=\{(q_0, \lambda)\}$
$\delta(q_0, b, 1)=\{(q_0, 11)\}$

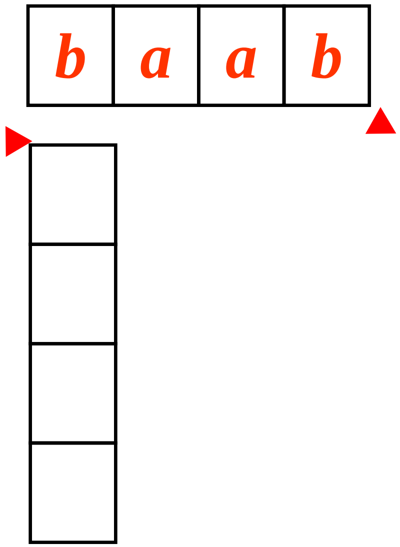
a_z^{0z}
b_z^{1z}
a_0^{00}
$\boldsymbol{b_0^{\lambda}}$
a_1^{λ}
b_1^{11}



Lenguaje aceptado por un autómata a pila

Aceptación de una palabra por estado final: ejemplo 1

- Se puede analizar su comportamiento frente a la palabra de entrada *baab*.



$(q_0, baab, z) \vdash (q_0, aab, 1z) \vdash (q_0, ab, z) \vdash (q_0, b, 0z) \vdash (q_0, \lambda, z) \vdash (q_f, \lambda, \lambda)$

$\boldsymbol{\delta(q_0, \lambda, z)=\{(q_f, z)\}}$

$\delta(q_0, a, z)=\{(q_0, 0z)\}$

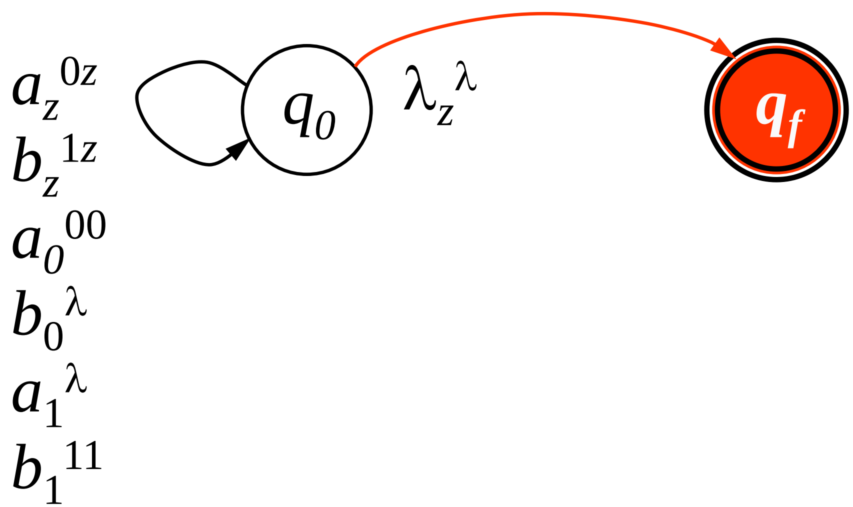
$\delta(q_0, b, z)=\{(q_0, 1z)\}$

$\delta(q_0, a, 0)=\{(q_0, 00)\}$

$\delta(q_0, b, 0)=\{(q_0, \lambda)\}$

$\delta(q_0, a, 1)=\{(q_0, \lambda)\}$

$\delta(q_0, b, 1)=\{(q_0, 11)\}$



Lenguaje aceptado por vaciado de pila: definición

- Dado un autómata a pila

$$A=(\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, \delta, F)$$

- Se define al **lenguaje aceptado por vaciado de pila por él** ($L_V(A)$) al conjunto de las palabras aceptadas por el autómata por vaciado de pila.
- Formalmente

$$L_V(A)=\{x \mid \exists p\in Q \;,,\; (q_0, x, A_0) \vdash^{*} (p, \lambda, \lambda)\}$$

Lenguaje aceptado por estado final: definición

- Dado un autómata a pila

$$A=(\Sigma, \Gamma, Q, A_0, q_0, \delta, F)$$

- Se define al **lenguaje aceptado por estado final por él** ($L_F(A)$) al conjunto de las palabras aceptadas por el autómata por estado final.
- Formalmente

$$L_F(A)=\{x \mid \exists p\in F, X\in\Gamma^{*} \;,,\; (q_0, x, A_0) \vdash^{*} (p, \lambda, X)\}$$

Lenguaje aceptado por vaciado de pila: ejemplo

- Ahora se puede afirmar que el lenguaje del ejemplo introductorio es aceptado por vaciado de pila

Lenguaje aceptado por estado final: ejemplo 1

- Se puede analizar con detalle ahora el funcionamiento del ejemplo 1.
- Puede observarse que
  - Los símbolos a (de más) de la entrada se transforman en 0 en la pila.
  - Los símbolos b (de más) de la entrada se transforman en 1 en la pila.
  - Cuando se dice “de más” en los puntos anteriores se hace referencia a que no estén equilibradas con el otro tipo de símbolo. Eso significa que
    - Cuando se encuentra un símbolo a (b) en la entrada,
      - si hay un 1 (0) en la pila, se elimina de la pila;
      - en otro caso, se añade a la pila un 0 (1) para anotar el símbolo no equilibrado.
  - Al comienzo, la pila contiene el símbolo z.
  - Por lo tanto, cada vez que la porción tratada de la entrada contiene el mismo número de símbolos a y b, en la pila sólo hay una z.
  - Siempre que en la cima de la pila hay una z hay una transición λ (no determinista) que lleva al estado final del que no se puede salir.
  - Por lo tanto, sólo se llega al estado final para las cadenas que terminan con un número igual de símbolos a y b.
- Formalmente

$$L=\{w\in\{a,b\}^{*} \mid \#_a(w)=\#_b(w)\}$$

Lenguaje aceptado por un autómata a pila

Equivalencias

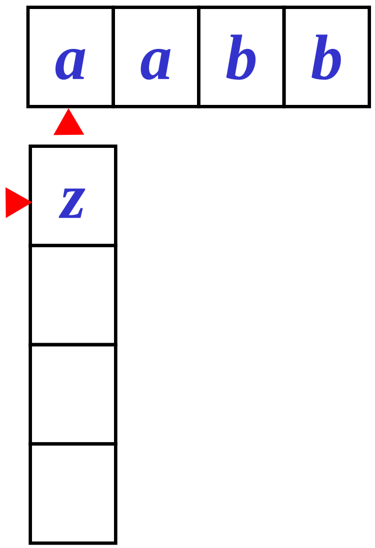
- Se puede demostrar (no es objetivo de este curso) que los lenguajes aceptados por los dos métodos observados son los mismos.
- Esto quiere decir que
  - Dado un autómata A que reconoce un lenguaje por vaciado de pila -$L_V(A)$- (idem. por estado final -$L_F(A)$-), se puede encontrar otro autómata A' que reconoce el mismo lenguaje por estado final (idem. por vaciado de pila) -$L_F(A')=L_V(A)$-
- A lo largo de este curso básicamente se utilizará para el diseño de autómatas a pila la técnica de aceptación por vaciado de pila.

Ejemplo 2

- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- La idea podría consistir en (se puede utilizar el símbolo z como inicial de la pila)
  - Mientras se reciban en la entrada símbolos a, reflejarlos en la pila como símbolos 1.

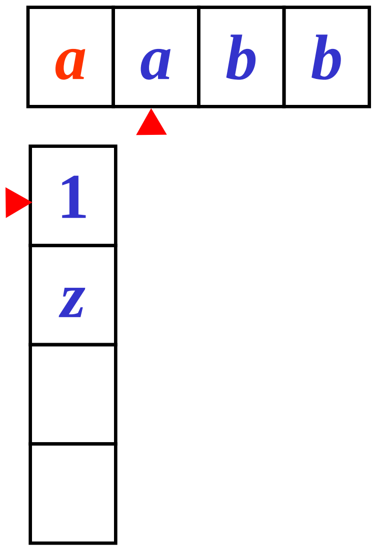


Ejemplo 2

- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- La idea podría consistir en (se puede utilizar el símbolo 0 como inicial de la pila)
  - Mientras se reciban en la entrada símbolos a, reflejarlos en la pila como símbolos 1.

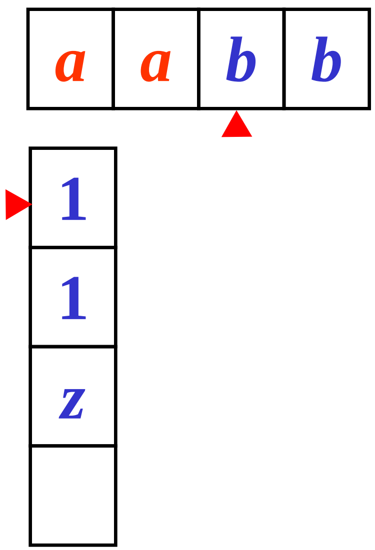


Ejemplo 2

- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- La idea podría consistir en (se puede utilizar el símbolo 0 como inicial de la pila)
  - Mientras se reciban en la entrada símbolos a, reflejarlos en la pila como símbolos 1.

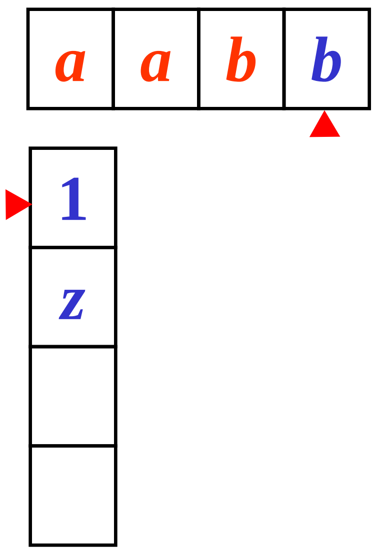


Ejemplo 2

- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- La idea podría consistir en
  - Cuando se comiencen a recibir símbolos b, se elimina un 1 por cada uno de ellos.

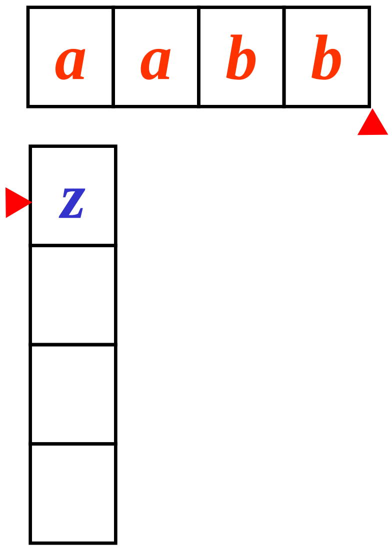


Ejemplo 2

- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n |\ n \geq 0\}$$

- La idea podría consistir en
  - Cuando se comiencen a recibir símbolos b, se elimina un 1 por cada uno de ellos.



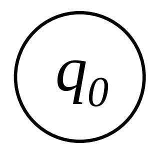
Autómatas a pila

Ejemplo 2

- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- Las transiciones necesarias se muestran a continuación:
  - Para acumular los símbolos a se utilizan los estados q_0 y q_1.



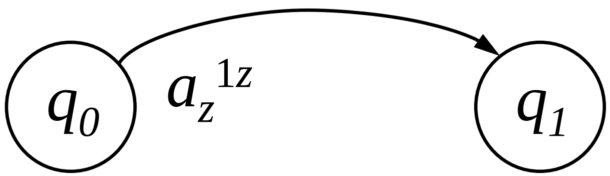
Ejemplo 2

- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n |\ n \geq 0\}$$

- Las transiciones necesarias se muestran a continuación:
  - Para acumular los símbolos a se utilizan los estados q_0 y q_1.
  - Con cada a transita de q_0 al estado q_1 añadiendo un 1 en la pila.

$\delta(q_0, a, z)=\{(q_1, 1z)\}$



Ejemplo 2

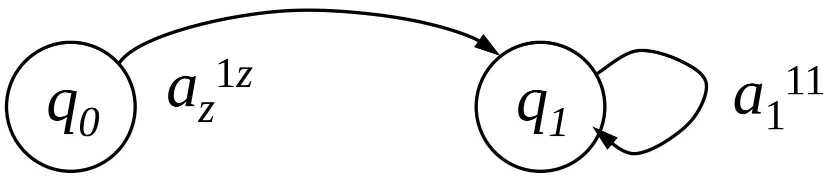
- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n |\ n\geq 0\}$$

- Las transiciones necesarias se muestran a continuación:
  - Para acumular los símbolos a se utilizan los estados q_0 y q_1.
  - Con cada a transita de q_0 al estado q_1 añadiendo un 1 en la pila y no se cambia de estado...

$\delta(q_0, a, z)=\{(q_1, 1z)\}$

$\delta(q_1, a, 1)=\{(q_1, 11)\}$



Ejemplo 2

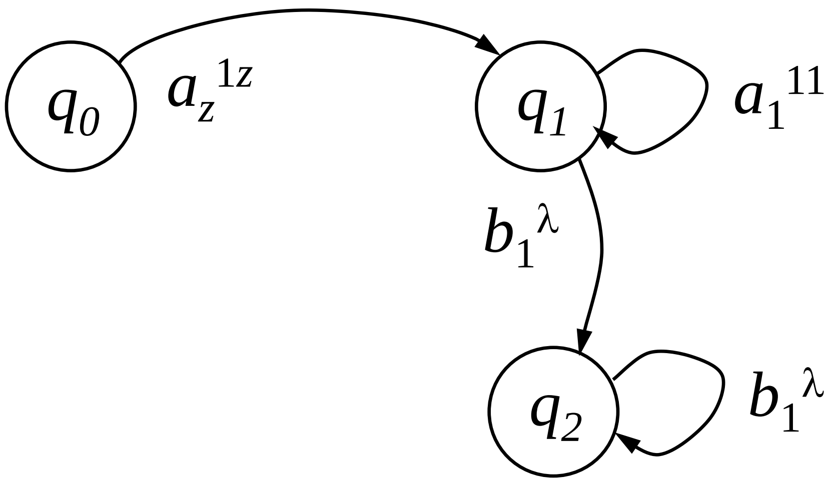
- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- Las transiciones necesarias se muestran a continuación:
  - ... hasta comenzar a recibir símbolos b. Se utiliza el estado q_2 para procesar los símbolos b.

$\delta(q_0, a, z)=\{(q_1, 1z)\}$

$\delta(q_1, a, 1)=\{(q_1, 11)\}$
$\delta(q_1, b, 1)=\{(q_2, \lambda)\}$
$\delta(q_2, b, 1)=\{(q_2, \lambda)\}$



Ejemplo 2

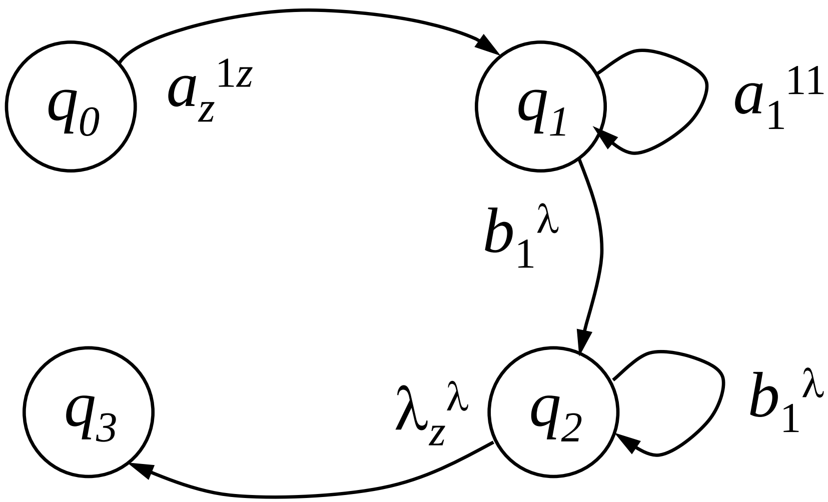
- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n |\ n \geq 0\}$$

- Las transiciones necesarias se muestran a continuación:
  - Se puede identificar que se ha llegado al fin de la pila cuando desde el estado q_2 se encuentra en la pila el símbolo z.
  - Si se termina la entrada en este instante, hay que vaciar la pila sin consumir entrada. Puede utilizarse el estado q_3.

$\delta(q_0, a, z)=\{(q_1, 1z)\}$

$\delta(q_1, a, 1)=\{(q_1, 11)\}$
$\delta(q_1, b, 1)=\{(q_2, \lambda)\}$
$\delta(q_2, b, 1)=\{(q_2, \lambda)\}$
$\delta(q_2, \lambda, z)=\{(q_3, \lambda)\}$



Ejemplo 2

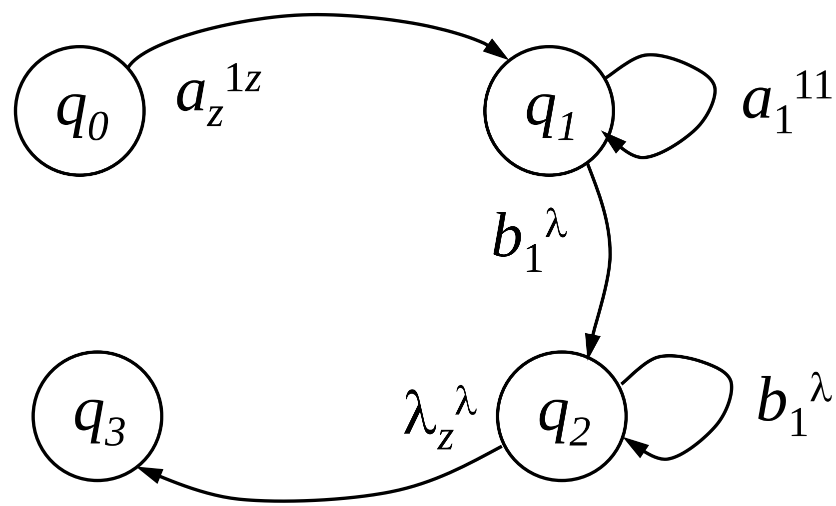
- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- Las transiciones necesarias se muestran a continuación:
  - Obsérvese que el nuevo estado podría ser final, no es necesario si se utiliza la técnica de vaciado de pila. Si se marca como final, el autómata reconocería el mismo lenguaje por estado final.

$\delta(q_0, a, z)=\{(q_1, 1z)\}$

$\delta(q_1, a, 1)=\{(q_1, 11)\}$
$\delta(q_1, b, 1)=\{(q_2, \lambda)\}$
$\delta(q_2, b, 1)=\{(q_2, \lambda)\}$
$\delta(q_2, \lambda, z)=\{(q_3, \lambda)\}$



Ejemplo 2

- Diseñar un autómata a pila para el lenguaje

$$L=\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- Las transiciones necesarias se muestran a continuación:
  - Obsérvese también que la palabra más corta es la vacía. Puede añadirse una transición λ similar desde el estado q_0.

$\delta(q_0, a, z)=\{(q_1, 1z)\}$
$\delta(q_0, \lambda, z)=\{(q_3, \lambda)\}$
$\delta(q_1, a, 1)=\{(q_1, 11)\}$
$\delta(q_1, b, 1)=\{(q_2, \lambda)\}$
$\delta(q_2, b, 1)=\{(q_2, \lambda)\}$
$\delta(q_2, \lambda, z)=\{(q_3, \lambda)\}$