HOJA DE EJERCICIOS 1: Lógica proposicionalEDyL 2013-2014

[Fecha de publicación : 2013/09/17]
[Fecha de entrega: 2013/09/26, 09:00]
[Resolución en clase: 2013/09/26]

EJERCICIO 1: Transforma las siguientes FBFs a forma normal conjuntiva (FNC) indicando las reglas de equivalencia utilizadas. Una vez en FNC, determina cuáles son UNSAT, tautologías o SAT sin ser tautología.

$$[(p\Rightarrow(q\wedge r)) \Rightarrow \neg r] \equiv \neg(\neg p \vee(q\wedge r)) \vee \neg r \equiv (\neg\neg p \wedge \neg(q\wedge r)) \vee \neg r \equiv$$
$$(p \wedge (\neg q\vee\neg r)) \vee \neg r \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge\neg r)) \vee \neg r \equiv$$
$$(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$$

SAT, pero no tautología

$$[(q\wedge r)\Rightarrow p] \Leftrightarrow (p \vee \neg r \vee \neg q) \equiv$$
$$[[(q\wedge r)\Rightarrow p] \Rightarrow (p \vee \neg r \vee \neg q)] \wedge [(p \vee \neg r \vee \neg q) \Rightarrow [(q\wedge r)\Rightarrow p]] \equiv$$
$$[\neg[\neg(q\wedge r) \vee p] \vee (p \vee \neg r \vee \neg q)] \wedge [\neg(p \vee \neg r \vee \neg q) \vee [\neg(q\wedge r) \vee p]] \equiv$$
$$[[q \wedge r \wedge \neg p] \vee p \vee \neg r \vee \neg q] \wedge [(\neg p \wedge r \wedge q) \vee \neg q \vee \neg r \vee p] \equiv$$
$$[[q \wedge r \wedge \neg p] \vee p \vee \neg r \vee \neg q] \equiv$$
$$[q \vee p \vee \neg r \vee \neg q] \wedge [r \vee p \vee \neg r \vee \neg q] \wedge [\neg p \vee p \vee \neg r \vee \neg q]$$

SAT, tautología

EJERCICIO 2: Utilizando directamente tablas de verdad (no está permitido utilizar reglas de equivalencia), determinar

(1) Determinar el número de interpretaciones posibles

(2) Determinar el número de interpretaciones que son modelo

(3) Especificad todas las interpretaciones, indicando las que son modelo

para las siguientes fórmulas bien formadas

	Nº de interpretaciones	Nº de modelos
$[(p\Rightarrow(q\wedge r)) \Rightarrow \neg r]$	**8**	**5**
$[(q\wedge r)\Rightarrow p]\Leftrightarrow(p\vee\neg r\vee\neg q)$	**8**	**8**

Interpretaciones y modelos:

$[(p\Rightarrow(q\wedge r)) \Rightarrow \neg r]$

p	**q**	**r**	**$(q\wedge r)$**	**$p\Rightarrow(q\wedge r)\equiv \neg p \vee (q\wedge r)$**	**$[p\Rightarrow(q\wedge r)] \Rightarrow \neg r \equiv$ $\equiv \neg [p\Rightarrow(q\wedge r)] \vee \neg r$**	
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**Modelo**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**Modelo**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**Modelo**
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**Modelo**
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**Modelo**
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	

$[(q\wedge r)\Rightarrow p]\Leftrightarrow(p\vee\neg r\vee\neg q)$

p	q	r	$(q\wedge r)$	$(q\wedge r)\Rightarrow p \equiv \neg(q\wedge r)\vee p$	$(p\vee\neg r\vee\neg q)$	$[(q\wedge r)\Rightarrow p]\Leftrightarrow(p\vee\neg r\vee\neg q)$	
F	F	F	F	V	V	V	Modelo
F	F	V	F	V	V	V	Modelo
F	V	F	F	V	V	V	Modelo
F	V	V	V	F	F	V	Modelo
V	F	F	F	V	V	V	Modelo
V	F	V	F	V	V	V	Modelo
V	V	F	F	V	V	V	Modelo
V	V	V	V	V	V	V	Modelo

EJERCICIO 3 [Adaptado de Rosen, sec. 1.1, ej. 58]:
Cinco amigos están jugando a "los lobisomes de Castronegro"[1]. Para determinar quién o quiénes de ellos, son lobisomes, contamos con la siguiente información: Rosa o Pilar o ambas son lobisome. O Xavier o Biktor, pero no ambos, son lobisome. Si Alberto es lobisome, también lo es Xavier. O bien Biktor y Rosa son lobisome o ninguno de los dos lo es. Si Pilar es lobisome también lo son Alberto y Rosa.

Utilizad los átomos

- R: "Rosa es lobisome"
- B: "Biktor es lobisome"
- P: "Pilar es lobisome"
- X: "Xavier es lobisome"
- A: "Alberto es lobisome"

La adivinanza se puede resolver mediante cualquier método de demostración válido (por prueba directa, mediante refutación, etc.)
No se puede emplear razonamiento semiformal, tablas de verdad o razonamiento por casos. Se debe utilizar únicamente inferencia, incluyendo resolución. Identifica la regla de inferencia empleada en cada paso.

SOLUCIÓN:
Base de conocimiento

$R \vee P$		[1]
$(X \wedge \neg B) \vee (\neg X \wedge B)$		[2]
$A \Rightarrow X$	$\equiv \neg A \vee X$	[3]
$(B \wedge R) \vee (\neg B \wedge \neg R)$		[4]
$P \Rightarrow (A \wedge R)$	$\equiv \neg P \vee (A \wedge R)$	[5]

Base de conocimiento en forma normal conjuntiva

$R \vee P$	[1]
$X \vee B$	[2.1]
$\neg B \vee \neg X$	[2.2]
$\neg A \vee X$	[3]
$B \vee \neg R$	[4.1]
$R \vee \neg B$	[4.2]
$\neg P \vee A$	[5.1]
$\neg P \vee R$	[5.2]

[1] La tradición del "lobisome", aunque algo oscura, se refiere a transformaciones de humanos en "lobo" según determinadas circunstancias.

Resolución directa

[1] + [5.2]	R	[6]
[6] + [4.1]	B	[7]
[7] + [2.2]	¬X	[8]
[8] + [3]	¬A	[9]
[9] + [5.1]	¬P	[10]

Rosa y Biktor son lobisome. Pilar, Xavier y Alberto no lo son.

EJERCICIO 4 [Adaptado de "Introducción a la Lógica Formal", A. Deaño, ej. 4]: Vamos a utilizar lógica formal para determinar la validez de la siguiente argumentación de Platón, muy simplificada a partir del original.

"Si lo Uno está en movimiento, éste habrá de ser, o de movimiento sin cambio en el estado, o de alteración. No puede tratarse de un movimiento de alteración, porque entonces lo Uno dejaría de ser Uno. Si se tratara de lo primero, tendría que ser, o bien rotación de lo Uno sobre sí mismo en el propio lugar en que se encuentra, o bien cambio de un lugar a otro. Ninguna de las dos cosas ocurre, sin embargo. Luego lo Uno no está sujeto a ningún tipo de movimiento."

Para determinar la validez de la argumentación anterior, se utilizarán los siguientes átomos:

p = 'lo Uno está en movimiento'
q = 'lo Uno sufre un movimiento sin cambio en el estado'
r = 'lo Uno sufre un movimiento de alteración'
s = 'lo Uno rota sobre sí mismo'
t = 'lo Uno cambia de un lugar a otro'

Se pide:

(a) Formulad la base de conocimiento.
(b) Determinad mediante inferencia si la base de conocimiento es satisfacible. **No se puede emplear razonamiento semiformal, tablas de verdad o razonamiento por casos**. Se debe utilizar únicamente inferencia, incluyendo resolución. Identifica la regla de inferencia empleada en cada paso.
(c) Interpretando el resultado de (b), determinad la validez de la argumentación de Platón.

SOLUCIÓN:

a. Base de conocimiento (FNC), incluyendo la negación de la conclusión de la argumentación ($\neg(\neg p) \equiv p$)

[1] $p \Rightarrow (q \vee r)$
$\neg p \vee (q \vee r)$
  [1.1] $\neg p \vee q \vee r$

[2] $\neg r$

[3] $q \Rightarrow (s \vee t)$

$\neg q \vee (s \vee t)$

[3.1] $\neg q \vee s \vee t$

[4] $\neg (s \vee t)$

$\neg s \wedge \neg t$

[4.1] $\neg s$

[4.2] $\neg t$

[5] p

b.Resolución

Res on p	[1.1]+[5]:	$q \vee r$	[6]
Res on r	[2]+[6]:	q	[7]
Res onq	[3.1]+[7]:	$s \vee t$	[8]
Res on s	[4.1]+[8]:	t	[9]
Res ont	[4.2]+[9]:	$\square$ Base de conocimiento UNSAT	

c.Dado que la base de conocimiento original era SAT y que, al incluir la negación de la conclusión se convierte en UNSAT, la argumentación de Platón es válida (refutación).

EJERCICIO 5:
Determinar si las siguientes aseveraciones sobre FBFs en lógica proposicional son coherentes con la definición de $\Delta \models$ w ("w es consecuencia lógica de Δ")

a. {True} $\models$ False
b. {False} $\models$ True
c. {P $\vee$ Q} $\models$ P
d. {P $\wedge$ Q} $\models$ P
e. Si {P} $\not\models$ Q entonces {P} $\models \neg$Q

donde P, Q son átomos distintos.
Justifica las respuestas. Las respuestas sin explicación se considerarán incompletas y no recibirán puntos.

SOLUCIÓN:
Usando la definición de $\Delta \models$ w (los modelos de Δ son también modelos de w):

a. {True} $\models$ False
Incorrecto
Correcto: {True} $\not\models$ False

Todas las interpretaciones son modelos de Δ = {True}
No hay ningún modelo para w = False

b. {False} $\models$ True
Correcto: {False} $\models$ True

No hay modelos para Δ = {False}.
Obviamente, todos los modelos de Δ = {False} (es decir, ninguno) son modelos de cualquier w

c. {P $\vee$ Q} $\models$ P
Incorrecto
Correcto: P $\vee$ Q $\not\models$ P

interpretación	P	Q		P $\vee$ Q		P
I1	F	F		F (no es un modelo)		-
I2	F	T		T		F
I3	T	F		T		T
I4	T	T		T		T

I2 es un modelo de [Δ = {P $\vee$ Q}], que no es un modelo de P

d. {P $\wedge$ Q} $\models$ P

Correcto: {P $\wedge$ Q} $\models$ P

interpretación	P	Q		P $\wedge$ Q		P
I1	F	F		F (no es un modelo)		-
I2	F	T		F (no es un modelo)		-
I3	T	F		F (no es un modelo)		-
I4	T	T		T		T

I4 es el único modelo de Δ = {P $\wedge$ Q} y es también un modelo de P

e. Si {P} $\not\models$ Q entonces {P} $\models \neg$Q

Incorrecto.

Átomos			Base de conocimiento Δ = {P}		w
P	**Q**		**P**		**Q**
F	F		F		-
F	T		F		-
T	F		T		F
T	T		T		T (no es modelo de ¬Q)

Q no es consecuencia lógica de P porque existe una interpretación que es modelo de P que no es modelo de Q (en concreto P = T, Q = F)

Átomos			Base de conocimiento Δ = {P}		w
P	**Q**		**P**		**¬Q**
F	F		F		-
F	T		F		-
T	F		T		T
T	T		T		F (no es modelo de ¬Q)

$\neg Q$ tampoco es consecuencia lógica de P porque existe una interpretación que es modelo de P que no es modelo de $\neg Q$ (en concreto P = T, Q = T)

Por lo tanto, $\{P\} \not\models Q$ y $\{P\} \not\models \neg Q$.