Entregar por escrito el Jueves 13. Los ejercicios pueden hacerse en grupo; entregar en grupo, escribiendo por orden alfabético los nombres de todos los participantes, no penaliza.

Se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra.

1) Demostrar el siguiente (importante) corolario de la desigualdad de Hölder: si $f \in \mathcal{L}_p$, entonces $\|f\|_p = \sup_{\{g:\|g\|_q=1\}} \int fg$.

2) Demostrar las desigualdades de Hölder y Minkowski en los casos $p = 1$ y $p = \infty$.

3) Sea $X \in L^2$ una v.a.; hallar la constante c que mejor aproxima a X en L^2.

4) Sean $X, Y \in L^1$ variables aleatorias tales que para todo conjunto en $A \in \mathcal{A}$, se verifica que $\int_A X = \int_A Y$. Decidir razonadamente si $X = Y$ en casi todo punto (c.s.).

5) Dado el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ una sub-σ-álgebra. Probar que $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

6) Probar que si A y B son independientes, entonces también lo son A y B^c, A^c y B, y A^c y B^c.