$$\sum_{j=0}^{K} \alpha_j y_{n+j} = h\phi(t_n, y_n, \dots, y_{n+K-1}; h) \quad (MN) \quad H_{MN}$$

i) ϕ continua

ii) $\|\phi - \hat{\phi}\| \leq L \sum_j^{K-1} \|y_{n+j} - \hat{y}_{n+j}\|$ $\forall h<h$

iii) $f = 0 \Rightarrow \phi = 0$

Un MN es 0-estable si $\forall$PVI $\exists C>0$ t.q. $\forall \{u_n\}_{n=0}^N, \{v_n\}_{n=0}^N$ que satisfacen

$$\sum_{j=0}^{K} \alpha_j u_{n+j} - h\phi(-, u_{n+K-1}; h) = h\delta_n$$
$$\sum_{j=0}^{K} \alpha_j v_{n+j} - h\phi(-, v_{n+j-1}; h) = h\gamma_n$$

$$\Rightarrow \max_{K\leq n\leq N} \|u_n - v_n\| \leq C\left[\max_{0\leq n\leq K-1} \|u_n - v_n\| + \max_{0\leq n\leq N-K} \|\delta_n - \gamma_n\|\right].$$

0-estable quiere decir que $y(t_n)$ e y_n estarán cerca si las perturb. δ_n, γ_n y R_n son peq.

0-estable $\Leftrightarrow$ crit. raíz $\Leftrightarrow$ $\forall$raíz 1er pol. tienen mód. <1 y si $=1$ simples

Un MN es consist. $\Leftrightarrow$ cond. 1 & 2

Cond 1: $\sum \alpha_j = 0$

Cond 2: $\phi(t_n, y_n, \dots; 0) = \left(\sum j\alpha_j\right) f(t,y)$

Tma. Equiv: $\forall$m.n (MN) que satisface H_{MN}:
converg. $\Leftrightarrow$ consist + 0-estab.

0-estab. $\Leftrightarrow$ crit. raíz, consist. $\Leftrightarrow$ C1+C2 $\Bigg\}$ $\Leftrightarrow$ converg.

Un mn de K pasos es convergente si $\forall$PVI $\lim_{N\to\infty} \max_{K\leq n\leq N} \|y(t_n) - y_n\| = 0$ si $\lim_{N\to\infty} \max_{0\leq n\leq K-1} \|y(t_n) - y_n\| = 0$.

Un mn de K pasos es converg. ord. p si $\forall$PVI $\lim_{N\to\infty} \max \|y(t_n) - y_n\| = O(h^p)$ si $\lim \max \|y(t_n) - y_n\| = O(h^p)$.

Un mn de K pasos es consist. si $\forall$PVI $\lim_{h\to 0^+} \tau(h) = 0$.

Un mn de K pasos es consist. de ord. p si $\forall$PVI se tiene que $\lim_{h\to 0^+} \tau(h) = O(h^q)$, $f\in C^q$ $\forall q\leq p$.

CORO: Si mn (MN) es 0-estable y $\tau := \max_{0\leq n\leq N-K} \frac{\|R_n\|}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Rightarrow$ convergente.

si $\forall q\leq p$ $\tau = O(h^q)$, $f\in C^q$, $\Rightarrow$ converg. al menos orden p.

Obs: $R_n = \sum_{j=0}^{K} \alpha_j y_{n+j} - h\phi(t_n, y_n - y_{n+K-1}; h)$

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

(CS): $\sum_j a_{ij} = c_i$ $\forall i$

(1): $\sum b_i = 1$

(2): $\sum b_i c_i = \frac{1}{2}$

(3): $\sum b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$, $\quad \sum b_i a_{ij} c_j = b^T A c = \frac{1}{6}$

(4): $\sum b_i c_i^3 = \frac{1}{4}$, $\quad \sum b_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$, $\quad \sum b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}$, $\quad \sum_{ijk} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = b^T A^2 c = \frac{1}{24}$

$K_1 = f(t + c_1 h, y_n + h\sum^s a_{1j} K_j)$

$K_s = f(t + c_s h, y_n + h\sum^s a_{sj} K_j)$

$y_{n+1} = y_n + h\sum b_j K_j$

$\xi_1 = y_n + h\sum^s a_{1j} f(t_n + hc_j, \xi_j)$

$\xi_s = y_n + h\sum a_{sj} f(t_n + hc_j, \xi_j)$

$y_{n+1} = y_n + h\sum_j^s b_j f(t_n + hc_j, \xi_j)$

mn A-estable si $\mathbb{C}^- \subseteq D$

$D = \{z = \lambda h \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\}$

Los RK son siempre 0-estables $\Rightarrow$ [converg. $\Leftrightarrow$ consist.]

Un m.n. RK explícito s etapas no puede tener ord. $>$ s.

Para $p\geq 5$, $\nexists$ RK explícito de ord. p y $s = p$ etapas.

Para $p\geq 7$, $\nexists$ RK explícito de ord. p y $s = p+1$ etapas.

Para $p\geq 8$, $\nexists$ RK explícito de ord. p y $s = p+2$ etapas.

$R(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1} e$, $z\in\mathbb{C}$

RK A-estable $\Leftrightarrow$ $|R(z)| < 1$ $\forall z\in\mathbb{C}^-$

Obs: ningún RK explícito es A-estable.

$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$. Entonces $|R(z)| < 1$ $\forall z\in\mathbb{C}^-$ si $\begin{cases} \forall \text{ cero de } q \text{ tiene parte real positiva.} \\ |R(it)| \leq 1 \quad \forall t\in\mathbb{R}. \end{cases}$

RK orden p. $\Rightarrow R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + O(|z|^{p+1})$

RK explícito ord. p y $s = p$ etapas $\Rightarrow R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^s}{s!}$

It. punto fijo
$F(\phi) = \dots$
F contract. $h<0$
f cont. $\Rightarrow \phi^{[K]}$ cont.
K infinito cont. unif.
$\phi^{[K]} = \sum (\phi^{[j]} - \phi^{[j-1]})$
converg. compactos
$\|\phi^{[j]} - \phi^{[j-1]}\| = \|F(\phi^{[j-1]}) - F\| < O\|\phi^{j} - \phi\|$
$\| \; \| \leq O^{j-1} \| \; \|$
Weierstrass

$\|F(K)_i - F(\hat{K})_i\| = |f(t_n + c_i h, y_n + h\sum a_{ij} K_j) - f(-, h\sum a_{ij}\hat{K}_j)| \leq$

$\Rightarrow \|F(K) - F(\hat{K})\| = \sum_{i=1}^s |F(K)_i - F(\hat{K})_i| \leq L\sum_{i=1}^s |y_n - h\sum a_{ij} K_j - y_n - h\sum a_{ij}\hat{K}_j| \leq Lh\|A\|\sum |K_j - \hat{K}_j| \leq Lh\|A\|\,\|K - \hat{K}\|$

$|F(\xi)_i - F(\hat{\xi})_i| = |y_n + h\sum a_{ij} f(-,\xi_j) - y_n - h\sum a_{ij} f(-,\hat{\xi}_j)| \leq$

$\Rightarrow \|F(\xi) - F(\hat{\xi})\| = \sum |F(\xi)_i - F(\hat{\xi})_i| \leq Lh\|A\|\sum |\xi_j - \hat{\xi}_j| = Lh\|A\|\,\|\xi - \hat{\xi}\|$

$\|\phi(t_n, y_n; h) - \phi(t_n, \hat{y}_n; h)\| \leq \sum |b_i|\,\|K_i(y_n) - K_i(\hat{y}_n)\| \leq \|b\|\, s\, \boxed{\text{acotar } K}\, \|y_n - \hat{y}_n\|$

MLM k pasos si $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j})$ con $\alpha_k = 1$, $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$

Si $\beta_k \neq 0 \Rightarrow$ implícito | $\rho(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j$ | $\sigma(x) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j x^j$ | CONSISTENTE $\Leftrightarrow$ ($\rho(1) = 0$ y $\rho'(1) = \sigma(1)$)

Si $\beta_k = 0 \Rightarrow$ explícito

$R_n = C_0 Y(t_n) + C_1 h Y'(t_n) + \dots + C_p h^p Y^{(p)}(t_n) + O(h^{p+1})$ donde $C_q = \frac{1}{q!}\left[\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^q - q \sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{q-1}\right] = 0$

Si $C_q = 0 \ \forall q = 0, \dots, p \Rightarrow$ al menos orden p.

Si $C_{p+1} \neq 0 \Rightarrow$ el método no puede ser consist. ord $p+1$

Simétricos: $\alpha_j = -\alpha_{k-j}$ $\beta_j = \beta_{k-j}$ $\to$ siempre orden par

---

Barrera Dahlquist: el orden de convergencia de un MLM 0-estab. de k pasos satisface:
1) $p \leq k+2$ si k par ; 2) $p \leq k+1$ si k impar ; $p \leq k$ si $\beta_k \leq 0$ (particular, explícito)

Pol. estabilidad $\to \Pi(r,z) = \rho(r) - z\sigma(r) \to D = \{z \in \mathbb{C} : |r_i(z)| < 1,\ r_i$ raíces de $\Pi(r,z)\}$

$Fr(D) \subset \mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C} : \exists$ una raíz de $\Pi(r,z)$ mód $1\}$ $\quad D \cap \mathcal{F} = \emptyset$

$\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ Obs: $\mathcal{F}$ imagen curva cerrada divide $\mathbb{C}$ en dos. cada una de ellas está en D o en $\mathbb{C} \setminus D$

Cogemos $\bar{z} \in A_1$ si alguna raíz de $\Pi(r, \bar{z})$ tiene módulo $> 1 \Rightarrow D = A_2$.
si todas las raíces tienen mod. $< 1 \Rightarrow D = A_1$.

RK y MLM consist. $\Leftrightarrow$ consist. ord 1
$y_{n+1} = y_n + hf + h^{3/2}$ consist pero no

Obs: No existen MLM explícitos A-estables.
Obs: Si la región de estabilidad D es acotada no es A-estable.
$2^{\underline{a}}$ Barrera de Dahlquist: El mayor orden de consist. MLM A-estable es $p = 2$.
por ej. Simpson / Gauss-Legendre $\to s=2,\ p=4$, A-estab

Existen MLM con ord. consist. $p = 2k$ (maximales)
No son convergentes salvo $k=1$ y $k=2$.

Interpolamos $k-1$ nodos $L_j(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} \frac{t - t_{n+i}}{t_{n+j} - t_{n+i}}$

Matriz M de un RK: $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$. Obs: M simétrica
Si M es semidef. pos. y $b_i \geq 0\ \forall i \Rightarrow$ RK algebraicamente estab.
Un RK algebraicamente estable $\Rightarrow$ es A-estable.

cambio variable $t = t_n + sh$

$P_s(\tau) = \prod_{j=1}^{s} (\tau - c_j)$; $q_i(\tau) = \frac{P_s(\tau)}{(\tau - c_i)}$ $i = 1, \dots, s$; $a_{ij} = \int_0^{c_i} \frac{q_j(\tau)}{q_j(c_j)} d\tau$; $b_i = \int_0^1 \frac{q_j(\tau)}{q_j(c_j)} d\tau$

$$y(t_{n+k}) - y(t_{n+k-1}) = \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} f(t, y(t))\,dt = \sum_{j=0}^{k-1} f(t_{n+j}, y(t_{n+j})) \cdot h \int_{t+k-1}^{t+k} L_j(t)\,dt = \sum_{j=0}^{k-1} f(t_{n+j}, y(t_{n+j})) \cdot h \int_{k-1}^{k} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} \frac{s-i}{j-i}\,ds$$

$$R_n = y(t_{n+k}) - y(t_{n+k-1}) - \int_{t_{n+k-1}}^{t_{n+k}} \underbrace{P_k(t)}\,dt \Rightarrow \|R_n\| = C h^{k+1}$$ $+2$

grado $\leq k-1$ (interp. $k-1$ nodos)

$I(f) = b_1 f(c_1) + \dots + b_s f(c_s)$ integra de manera exacta pol. de grado $2s$ en $[0,1]$

$b_1 f(c_1) + \dots + b_s f(c_s) = \int_0^1 f(x)\,dx \to f(x) = 1, f(x) = x, \dots, f(x) = x^{s-1}$ $\to$ obtenemos c's $\to$ colocación b's coinciden