Cálculo de Variaciones

D.Faraco y R.Orive

Madrid, Mayo 2020

Plan

- Introducción
- Braquistocrona.
- Marco del cálculo de variaciones
- Ecuaciones de Euler-Lagrange
- Variaciones. Integración por partes.
- Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones
- EDOs y Euler-Lagrange
- Braquistocrona es un cicloide

Introducción

Muchos problemas, por ejemplo, cuál es el camino entre dos puntos, tienen infinitas soluciones o no las tienen. Sin embargo, si a esos problemas se les añade que deben:

- Minimizar el error;
- Minimizar o maximizar el tiempo;
- Minimizar la distancia;
- Maximizar el benefecio;
- Minimizar el coste;

nos introduce dentro del campo del Cálculo de Variaciones. Este nos permite encontrar los mínimos o los máximos de estos problemas dentro de un conjunto infinito de funciones.

Newton: Principio de Conservación de la mecánica

- Segunda ley de Newton: $F = m \cdot a$
- Sea F una fuerza conservativa. El trabajo que se realiza para llevar una masa entre dos puntos no depende del camino. Matemáticamente, si C es una curva cerrada:

$$\int_C F ds = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -\nabla V,$$

donde se utilizar el teorema de Stokes, $rot(F) = 0$.

- Integramos ahora a lo largo de un camino L que va de A a B. Sean ds, dt los elementos de tiempo y posición, $ds = vdt$

$$\int_L F ds = \int_L m \frac{dv}{dt} v dt \Rightarrow V(A) - V(B) = \frac{1}{2} m v^2(B) - \frac{1}{2} m v^2(A)$$

$$V(B) + \frac{1}{2} m v^2(B) = V(A) + \frac{1}{2} m v^2(A)$$

La energía total se conserva

Bernoulli y la Braquistócrona

Origen del calculo de variaciones. En 1696, Jean Bernoulli reto a los matemáticos del mundo con la siguiente pregunta:
"Dados dos puntos A, B en un plano vertical. Encontrar el camino que una particula debe recorrer para minimizar el tiempo de viaje".
La longitud de una curva que une $A = (a, y_a)$ y $B = (b, y_b)$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

y el tiempo en recorrerla

$$T = \int_0^T dt = \int_A^B \frac{dt}{ds} ds = \int_A^B \frac{1}{v} ds = \int_a^b \frac{1}{v} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

La fuerza que actúa es la gravedad

$$F = -g(0,1) = -\nabla(mgy)$$

por lo que el potencial es $V = mgy$. De la conservación de la energía total resulta:

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgy_a \iff v = \sqrt{2g(y_a - y)}$$

Por tanto

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}}dx.$$

La pregunta de Bernoulli se reduce a encontrar la función y que minimice esta expresión con $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.
Respondieron, Johann y Jacobo Bernoulli, Leibniz, L'Hopital, Newton y Tschirnhaus. La discusión del problema por los hermanos Bernoulli dió lugar al Cálculo de Variaciones.
La respuesta de Newton no tenía ni explicación ni firma. Johann Bernoulli se lo atribuyó con la frase, por la garra se reconoce al león.

Cálculo de variaciones

Por tanto el cálculo de Variaciones trata de minimizar integrales funcionales. Suponemos que f, la densidad, depende de x, y, y'. Para precisar el problema necesitamos tres aspectos:

- El funcional:
$$J[y] = \int_{a,b} f(x, y, y')dx$$
- Las condiciones de frontera. $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$
- El espacio de funciones $C^1[a, b]$, $C^2[a, b]$, $D[a, b]$, las funciones continuas a trozos.

Objetivo: Hallar extremales del funcional (máximos o mínimos).

- Variaciones (varias normas)
- La primera y la segunda variación.
- La integración por parte de Lagrange.
- El lema fundamental del Cálculo de variaciones.
- Ecuación de Euler-Lagrange.

Ecuación de Euler-Lagrange

Idea. Intentamos aplicar las ideas de dimensión finita a problema de dimensión infinita.
Los extremales $\bar{x}$ (máximos y mínimos) de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cumplen que

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(\bar{x}) = 0.$$

Su derivada en cualquier dirección es cero. Esta idea funciona tambien cuando el dominio del funcional, son funciones. Nuestro objetivo es llegar a la siguiente, interpretación de la derivada de J, en la dirección de y.

$$\frac{\delta[J]}{dy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0,$$

la llamada Ecuación de Euler-Lagrange.

Un ejemplo: geodésicas

Usamos la notación $r = (x, y, z)$. Consideramos la superficie parametrizada

$$S \equiv (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Consideramos una curva sobre esta superficie

$$\alpha(t) = r(u(t), v(t)) = r \circ \gamma(t)$$

de longitud

$$L \equiv \int_a^b |\alpha'(t)| dt, \qquad \text{donde } \alpha'(t) = \frac{\partial r}{\partial u} u' + \frac{\partial r}{\partial v} v',$$

por tanto, existen $E(u, v)$, $F(u, v)$ y $G(u, v)$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$$

o en términos de la primera forma fundamental:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Geodésicas del plano euclídeo

El estudio de las geodésicas se remonta al mismo Bernoulli en 1697. Sin embargo, hasta que Euler no desarrolló el Cálculo de variaciones, no pudo deducir la existencia de geodésicas en 1732. Veamos el poder de la ecuación de Euler Lagrange en el ejemplo más sencillo, ls geodésicas euclideas.

Dados dos puntos $(a, y_a), (b, y_b)$, unidos por curva $(x, y(x))$

$$J[y] = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Como el integrando no depende de y, EL es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0 \Rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = k, \quad |k| < 1$$

$$(y')^2 = k^2(1 + (y')^2) \Rightarrow y'^2 = \frac{k^2}{1-k^2}$$

Así, y' es constante. Entonces $y = ax + b$, nuestras rectas.

Obtener la ecuación de Euler-Lagrange

Hay dos maneras de llegar a esta ecuación: la de Euler y la de Lagrange.

- Euler. Consiste en considerar curvas poligonales, resolver el problema en un espacio de dimensión finita y pasar al límite, es decir, discretizar y pasar al límite.
- Lagrange. El método consiste en comparar el mínimo con sus competidores. Es decir usar variaciones.

El propio Euler reconoció que el método de Lagrange era más elegante y versatil por lo tanto es el que veremos.
De hecho aun en nuestros días, evoluciones de la idea de Lagrange son clave en el Cálculo de Variaciones.
La función de densidad $f(x, y, y')$ normalmente se la llama lagrangiano y se la denota con una L.

Competidores

Como ocurre en el cálculo de una variable, nos centramos en mínimos locales. Es decir, si $\tilde{y}$ es el mínimo local buscamos competidores $y = \tilde{y} + h$ de manera que para h pequeña, y esté cerca de $\tilde{y}$.
Ahora bien cuando estamos con funciones esto se complica. ¿Está la función $f_j = j^{-1} sen(jx)$ cerca de $f_\infty \equiv 0$ cuando j tiende a infinito?
Respuesta. Depende de como midamos:

$$\max_{(a,b)} |f_j - f_\infty| = \frac{1}{j} \max_{(a,b)} |f_j' - {f_\infty}'| = \max_{(a,b)} |sin(jx)| = 1$$

Ejercicio: Construir dos funciones tales que

$$\max_{(a,b)} |f - g| \leq \epsilon, \max_{(a,b)} |f' - g'| \geq \epsilon$$

Variaciones

Precisando la idea de Lagrange, consideramos $h = \epsilon\eta$ para una función η fija tal que $\eta(a) = 0$, $\eta(b) = 0$. Así,

$$y = \tilde{y} + h = \tilde{y} + \epsilon\eta, \quad y(a) = \tilde{y}(a), \quad y(b) = \tilde{y}(b)$$

Sea $\Delta J = J(\epsilon) - J(0)$ la variación total. Formalmente consideramos el polinomio de Taylor de $J(\epsilon)$ como función de una variable

$$J(\epsilon) = J(0) + \epsilon\delta J + \frac{\epsilon^2}{2}\delta^2 J + O(\epsilon^3)$$

- $\delta J = \left.\dfrac{dJ}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$ se llama la primera variación
- $\delta^2 J = \left.\dfrac{d^2 J}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0}$, la segunda variación.

Derivando bajo el signo integral

Suponiendo que f e y son tan regulares que podemos derivar en la integral.

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{d\epsilon}(\epsilon) &= \int_a^b \frac{d}{d\epsilon}(f(x,\tilde{y}+\epsilon\eta,\tilde{y}'+\epsilon\eta')dx \\ &= \int_a^b [f_y(x,\tilde{y}+\epsilon\eta,\tilde{y}'+\epsilon\eta')\eta + \eta' f_{y'}(x,\tilde{y}+\epsilon\eta,\tilde{y}'+\epsilon\eta')]dx\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = 0$

$$\delta J = \int_a^b \left(f_y(x,\tilde{y},\tilde{y}')\eta + \eta' f_{y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}')\right) dx$$

Análogamente,

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(f_{yy}(x,\tilde{y},\tilde{y}')\eta^2 + 2\eta\eta' f_{yy'}(x,\tilde{y},\tilde{y}') + f_{y'y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}')(\eta')^2\right) dx$$

La primera variación

Se sigue del cálculo de una variable que se debe satisfacer que

- $\delta J = 0$ para todos los extremales.
- $\delta^2 J \geq 0$ para los minimos locales
- $\delta^2 J \leq 0$ para los máximos locales.

Nos centramos en la condición de la primera variación.

- Una condición necesaria para el funcional J para tenga un máximo o mínimo local en $\tilde{y}$ es que la primera variación de $J[y]$ se anule.

$$\text{En } y = \tilde{y}, \quad \delta J = 0 \quad \forall \eta$$

Es decir,

$$\int_a^b \left(f_y(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta + \eta' f_{y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') \right) dx = 0$$

Vamos a manipular la primera variación. Para ello, Lagrange integró por partes en el segundo término

$$\int \eta' f_{y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = \underbrace{\eta f_{y'}|_{x=a}^{x=b}}_{=0} - \int_a^b \eta \frac{d}{dx}(f_{y'})$$

Así que

$$\delta J = \epsilon \int_a^b \eta \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y'}) \right) dx = 0$$

Observación: Tacitamente estamos suponiendo que el extremo tiene dos derivadas!
Lagrange suposo que eso implicaba que la ecuación de Euler Lagrange era cero pero Euler dudaba. DuBois-Reymond probó lo que se conoce como Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones.

Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones

Lema

Si $M, \eta \in C[a,b]$ y además $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Entonces, si

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = 0, \quad \forall \eta \in C^1[a,b]$$

se sigue que $M(x) \equiv 0$ en $[a,b]$

La prueba es por contradicción. Supongamos que M es estrictamente positiva (o negativa) en $x_0 \in (a,b)$. Por continuidad es positiva en un intervalo $(x_1, x_2) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Entonces, escogiendo $\eta = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \chi_{[x_1, x_2]}$, llegamos a la contradicción

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 dx > 0.$$

El asunto de la regularidad del extremo (Ejercicio)

Volvemos a

$$\int_a^b \left(f_y(x,\tilde{y},\tilde{y}')\eta + \eta' f_{y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}') \right) dx = 0.$$

Si en vez de integrar por partes el término con η', integramos por partes el término de η

$$\int_a^b f_y \eta dx = -\int_a^b \eta'(x) \cdot \int_a^x f_y(u,\tilde{y}(u),\tilde{y}'(u)) du dx$$

Y llegamos a

$$\int_a^b \eta' \left(f_{y'}(x,\tilde{y},\tilde{y}') - \int_a^x f_y(u,\tilde{y}(u),\tilde{y}'(u)) du \right) dx = 0$$

Forma Integrada de las ecuaciones de Euler Lagrange

Lema

Si $M \in C[a,b]$ y si $\int_a^b M(x)\eta'(x)dx = 0$ para todo $\eta \in C^1[a,b]$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ se sigue que $M(x) \equiv C$

Ejercicio: Probar el lema usando como funcion test

$$\eta = \int_a^x [M - \mu] du.$$

Llegamos a la forma Integrada de las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\boxed{f_{y'}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') - \int_a^x f_y(u, \tilde{y}(u), \tilde{y}'(u))du = c}$$

Forma Ultradiferencial de las ecuaciones de Euler-Lagrange

Aviso. Las ecuaciones de Euler Lagrange están sintetizadas. Usando la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\right) = \frac{\partial f_{y'}}{\partial x} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial f_{y'}}{\partial x} + + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y} y' + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'} y''$$

De modo que la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = \frac{\delta[J]}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

queda como

$$0 = f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y} - y'' f_{y'y'}$$

Integrales Primeras para funcionales autónmos

Caso particular: f no depende de x. Entonces, la EL se reduce a

$$\boxed{f_y - f_{yy'}y' - f_{y'y'}y'' = 0}$$

Proposición

Sea $f(x,y,y') = f(y,y')$ (lagrangiano autónomo). Entonces, si y resuelve Euler-Lagrange, entonces $f - y'f_{y'}$ es constante.

$f - y'f_{y'}$ es una integral primera (EDOs). Directamente,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f - y'f_{y'}) &= f_y y' + f_{y'}y'' - (y''f_{y'} + y'f_{y'y}y' + y'f_{y'y'}y'') \\ &= y'(f_y - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'') = 0\end{aligned}$$

La braquistócrona como ecuación de Euler Lagrange

Recordamos que habiamos llegado al problema de minimizar el tiempo

$$T[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}}dx$$

Cambiamos la variable $z = y_a - y$

$$T[z] = \frac{1}{\sqrt{(2g)}} \int_0^{b-a} \frac{\sqrt{1+(z')^2}}{\sqrt{z}}dx$$

Como no depende de x, $I_1(z) = f - z' f_{z'}$ es constante.

$$\begin{aligned}\alpha = I_1[z] &= \frac{\sqrt{1+(z')^2}}{\sqrt{z}} - z' \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{z'}{\sqrt{1+(z')^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{1+(z')^2}}(1+(z')^2-(z')^2)) = \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{1+(z')^2}}\end{aligned}$$

Despejamos z',

$$\alpha^2 z(1+(z')^2)=1 \iff (z')^2 = 1\alpha^2 z - 1$$

$$z' = \sqrt{\frac{1-\alpha^2 z}{\alpha^2 z}} = \frac{dz}{dx}$$

Es más fácil resolver al reves

$$x = \int \sqrt{\frac{\alpha^2 z}{1-\alpha^2 z}} dz$$

Cambiamos la variable $\alpha^2 z = \sin^2(\theta)$, $\alpha^2 dz = 2\sin(\theta)\cos(\theta) d\theta$ y simplificamos el integrando

$$\sqrt{\frac{\alpha^2 z}{1-\alpha^2 z}} \alpha^2 dz = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} 2\sin(\theta)\cos(\theta) d\theta = 2\sin^2(\theta) d\theta$$

Cicloides son braquistócronas

Y volviendo a la integral

$$x = \int 2\sin^2(\theta)\frac{d\theta}{\alpha^2} = \int (1 - cos(2\theta))\frac{d\theta}{\alpha^2},$$

integrando

$$\alpha^2 x = \theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + \beta$$

donde dejamos la constante β libre para ajustar las condiciones iniciales, y recordamos que $\sin^2(\theta) = \alpha^2 z = \alpha^2(y_a - y)$.

Interpretación geométrica. Llamamos $R = \dfrac{1}{\alpha^2}$, y tomamos adecuadamente β, de modo que

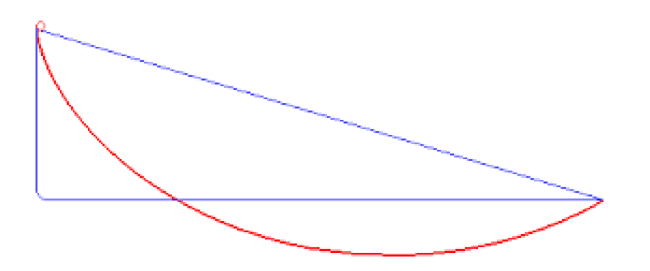
$$\begin{aligned}(x(\theta), y(\theta)) &= \left(a + R(\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)), y_a - R\sin^2(\theta)\right) \\ &= (a, y_a) + \frac{R}{2}(2\theta - \sin(2\theta), -2\sin^2(\theta))\end{aligned}$$

Cicloides son braquistócronas

Cambio $2\theta = \phi$,

$$(x, y) = (a, y_a) + \frac{1}{2R}(\phi - \sin(\phi), \cos(\phi) - 1)$$

Una curva braquistócrona (gr.brachistos 'el más corto', chronos 'intervalo de tiempo'): curva del descenso más rápido.



Geodésicas de la esfera

Sea la esfera de dimensión 2, $\mathbb{S}^2$. Usando coordenadas esféricas: $0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi$:

$$\mathbb{S}^2 \equiv r(\theta,\phi) = (sin(\theta)cos(\phi), sin(\theta)sin(\phi), \cos(\theta)).$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), -\sin(\theta),$$
$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = (-\sin(\theta)\sin(\phi), \sin(\theta)\cos(\phi), 0)$$

Entonces $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$. Por tanto, escribiendo ϕ en función de θ, tenemos que hallar el mínimo de

$$\int_a^b ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{1+\sin^2(\theta)(\phi'(\theta))^2} d\theta$$

Geodésicas de la esfera

Se define el Lagrangiano

$$L(\theta, \phi, \phi') = \sqrt{1 + \sin^2(\theta)(\phi')^2}$$

Así,

$$J[\phi] = \int_{t_0}^{t_1} L(\theta, \phi, \phi')d\theta$$

Como el Lagrangiano no depende de ϕ

$$0 = \partial_\theta[\partial_{\phi'} L] = \partial_\theta \left(\frac{\sin^2(\theta)\phi'}{\sqrt{1 + \sin^2(\theta)(\phi')^2}} \right),$$

llegamos a la ecuación dada por la integral primera

$$\boxed{\sin^2(\theta)\phi' = k\sqrt{1 + \sin^2(\theta)(\phi')^2}}$$

Elevando al cuadrado $\sin^4(\theta)(\phi')^2 = k^2(1 + \sin^2(\theta)(\phi')^2)$. Despejo

$$(\phi')^2(\sin^4(\theta) - k^2 \sin^2(\theta)) = k^2$$

Entonces,

$$\phi' = \frac{k}{\sin(\theta)\sqrt{\sin^2(\theta) - k^2}} = \frac{k \sin^{-2}(\theta)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^{-2}(\theta)}}$$

Considero el cambio de variables $u = \cot(\theta)$, $u^2 = 1 - \sin^{-2}\theta$, $du = -\sin^{-2}(\theta)d\theta$. Entonces

$$\phi = \int \frac{k \sin^{-2}(\theta)d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^{-2}(\theta)}} = \int \frac{-kdu}{\sqrt{1 - k^2(1 + u^2)}} = \int \frac{-du}{\sqrt{a^2 - u^2}},$$

integral exacta resultando

$$\phi - \phi_0 = arcos(\frac{u}{a}) \quad \Rightarrow \quad \cot(\theta) = a\cos(\phi - \phi_0),$$

deshaciendo el cambio. Descomponiendo $\cos(\phi - \phi_0)$

$$\cos(\theta) = \cos(\phi)\sin(\theta)\underbrace{a\cos(\phi_0)}_{=A} - \sin(\phi)\sin(\theta)\underbrace{a\sin(\phi_0)}_{=B}$$

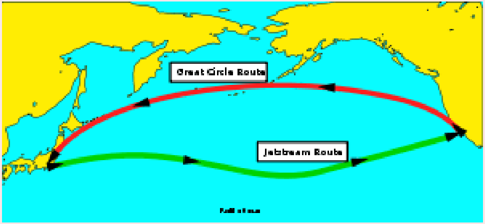
Recordando las coordenadas esféricas

$$z = \cos(\theta), \quad x = \cos(\phi)\sin(\theta), \quad y = \sin(\phi)\sin(\theta),$$

tenemos que las geodésicas deben pertenecer a un plano

$$z = Ax - By$$

que pasa por el origen y los puntos a y b. La intersección de dichos planos con la esfera son los círculos máximos.



Superficies Mínimas de Revolución (Rotación)

Dados dos puntos $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, los queremos unir por una curva diferenciable de manera que minimicemos el área de la superficie de revolución, generada rotando esta curva a lo largo del eje x.
Fijo un x tenemos una circunferencia a de radio $y(x)$ que integramos a lo largo de la curva de elemento de longitud $\sqrt{1+(y')^2}$. Por tanto,

$$S = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$

La lagrangiana es $L(y, y') = y\sqrt{1+(y')^2}$, como no depende de x tenemos la integral primera $f - y'f_{y'} = \alpha$, constante,

$$y\sqrt{1+(y')^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \alpha,$$

$$\boxed{\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = \alpha}$$

Despejamos y',

$$y^2 = \alpha^2 + \alpha^2(y')^2 \Rightarrow y'^2 = \frac{y^2}{\alpha^2} - 1 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{\alpha}\sqrt{(y^2-\alpha^2)}}$$

Integrando

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\int dx = \frac{x-\beta}{\alpha}$$

Recordemos que $\cosh(u)^2 - \sinh^2(u) = 1$, $(\cosh)' = \sinh$. Así que haciendo el cambio $\frac{y}{\alpha} = z = \cosh(u)$ nos lleva a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-\alpha^2}} = \int 1du = u$$

Catenoide

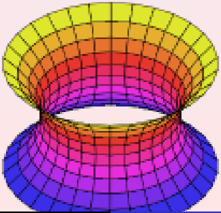
Entonces,

$$u(x) = \frac{x-\beta}{\alpha}$$

y deshaciendo el cambio

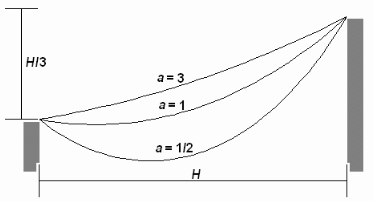
$$y = \alpha \cosh(\frac{x-\beta}{\alpha})$$

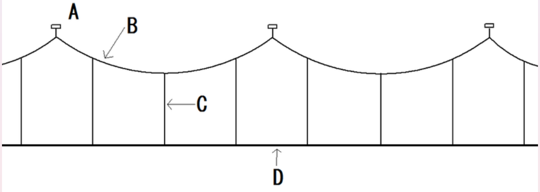
donde β, α son constantes por determinar. La superficie que se obtiene por rotación de una catenaria alrededor de un eje coplanario se la conoce como catenoide (Euler, 1744).



La catenaria

Una catenaria es una curva ideal que representa físicamente la curva generada por una cadena, cuerda o cable sin rigidez flexional, suspendida de sus dos extremos y sometida a un campo gravitatorio uniforme.





Sin embargo nada nos dice que existan soluciones, o que sean únicas ni siquiera que sean mínimos, recordemos que solo estamos buscando extremales. De hecho el asunto de las condiciones iniciales es muy delicado.