$C\left(1+\frac{R}{m}\right)^d = C(1+TAE)$ ; $m = \frac{\text{tipo interés}}{\text{tipo comp.}}$ ; $d = \frac{\text{periodo total}}{\text{composición en meses}}$ ← Si TAE, 1 año

$R :=$ tipo interés nominal

continuo: $1+TAE = e^R$

**FECHAS INTERMEDIAS:**

Lineal: $C\left(1+R\frac{\Delta t}{\tau}\right)^K\left(1+R\frac{t-K\Delta T}{\tau}\right)$

Exp: $C\left(1+R\frac{\Delta t}{\tau}\right)^{\frac{mt}{\tau}}$

**PROGR. GEOMÉTRICA**

$$\sum_{j=M}^{N} b^j = \begin{cases} N-M+1, & b=1 \\ \frac{P-VR}{1-R}, & b\neq 1 \end{cases}$$

$$b = \frac{1}{1+R} \Rightarrow \sum_{0}^{N} = \frac{1}{R}\left(1-\frac{1}{(1+R)^N}\right)$$

**REC. LINEAL**

$$\begin{cases} C_0 \\ C_n = \alpha C_{n-1} + \beta, \ n\geq 1, \alpha\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} C_0 + \beta n, & \alpha = 1 \\ C_0\alpha^n + \beta\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}, & \alpha\neq 1 \end{cases}$$

(*) $\sum_{j=1}^{\infty} b^j = \frac{b}{1-b}$ (1, si $j=0$)

Si $b=(1+R)^{-j}$ $\Rightarrow$ $= \frac{1}{R}$

TIR: Ingresos: $F_1,\dots,F_N$ en $t_1,\dots,t_N$

Gastos: $G_1,\dots,G_M$ en $S_1,\dots,S_M$

TIR t.q. $\sum_{1}^{N}\frac{F_j}{(1+TIR)^{t_j}} = \sum_{1}^{M}\frac{G_j}{(1+TIR)^{S_j}}$

$$\text{CUOTA (mensual)} = C\,\frac{(1+i)^n\cdot i}{(1+i)^n-1}$$

$n :=$ nº pagos (en meses)

$i :=$ interés mensual

$i = \frac{R}{12}$ ← anual

$1+TAE = \left(1+\frac{R}{12}\right)^{12}$

**CUPÓN CERO** factor de descuento $P(0,T)$

**TRAD. TIPOS INTERÉS**

SIMPLE: $P(0,t) = \frac{1}{1+tR_s(0,t)} \Leftrightarrow R_s(0,t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{P(0,t)}-1\right)$

CONT: $P(0,t) = e^{-tR_c(0,t)} \Leftrightarrow R_c(0,t) = -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{P(0,t)}\right)$

**TIPOS IMPLÍCITOS (FORWARD):** Notación: $P(0,t_1,t_2) = \frac{P(0,t_2)}{P(0,t_1)}$ (factor de descuento implícito)

↳ SIMPLE: $F_s(0,t_1,t_2) = \frac{1}{1+t_1R_s(0,t_1)}\left[\frac{t_2R_s(0,t_2)-t_1R_s(0,t_1)}{t_2-t_1}\right]$ ; CONT: $F_c(0,t_1,t_2) = \frac{t_2R_c(0,t_2)-t_1R_c(0,t_1)}{t_2-t_1}$

**FORWARD** obligación

↳ vencim. $T$

↳ precio compraventa $K$

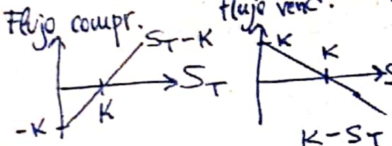
↳ $S_0$, precio bien hoy

↳ $S_T$, precio bien $T$.

$K_{esp} = F_0 = \frac{S_0}{P(0,T)}$

Si gastos (+) o ganancias (−): $F_0 = \frac{(S_0 \pm I)}{P(0,T)}$

$I \equiv$ valor de hoy!




OA si $F_0 > K_{esp}$:

| Hoy | En T |
|---|---|
| • préstamo de $S_0$ ($+S_0$) | • devol. $S_0 e^{rT}$ |
| • compramos bien ($-S_0$) | • vendemos bien por $F_0$ |
| • entramos fwd para vender en T a $F_0$ | |
| coste hoy $= 0$€ | $F_0 - S_0 e^{rT} > 0$ |

OA si $F_0 < K_{esp}$:

| Hoy | En T |
|---|---|
| • préstamo bien | • recib. $S_0e^{rT}$ |
| • vendemos bien por $S_0$ € | • compramos bien por $F_0$ € |
| • prestamos $S_0$€ | • devolvemos bien |
| • entramos fwd comprar en T | $S_0e^{rT} - F_0 > 0$ |

**FRA** En T2 pagas fijo K o variable $R_s(T_1,T_2)$ y recibes lo contrario.

$$K_{esp} = F_s(0,T_1,T_2) = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{P(0,T)}{P(0,T+\Delta T)}-1\right)$$

**SWAP** Cadena de FRAs con K constante

$$K_{esp} = \frac{1}{\Delta T}\cdot\frac{P(0,t_0)-P(0,t_N)}{\sum_{j=1}^{N}P(0,t_j)}$$

OA si $K < K_{esp}$:

| Hoy | T1 | T2 |
|---|---|---|
| * Entramos FRA pagando K… | • pedimos préstamo de M € | • pagamos $M(1+K\Delta T)$ • recibimos… |
| • compramos $B_{T_2}$ nom $= M(1+K\Delta T)$ | • pagamos $B_{T_1}$ de nom M€ | • pagamos $M(1+R_s\cdot\Delta T)$ |
| • vendemos $B_{T_1}$ nom $= M$ | | • recibimos $B_{T_2}$ $M(1+K\Delta T)$ |
| ¡Ganancias! | 0€ | 0€ |

OA si $K > K_{esp}$:

| Hoy | T1 | T2 |
|---|---|---|
| • Entramos FRA recibiendo K… | • recib. M€ de $B_{T_1}$ | • recibimos $M(1+K\Delta T)$ • pagamos… |
| • Compramos $B_{T_1}$ nom M€ | • prestamos M€ a tipo $R_s$ | • recib. $M(1+R_s\Delta T)$ |
| • Vendemos $B_{T_2}$ nom $M(1+K\Delta T)$ | | • pagamos $B_{T_2}$ $M(1+K\Delta T)$ |
| ¡Ganancias! | 0€ | 0€ |

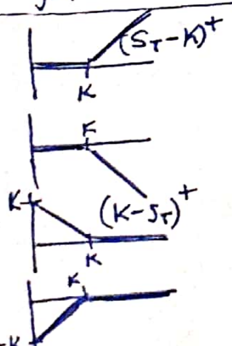
**CALL-PUT**

• Compr. call

• Vend. call

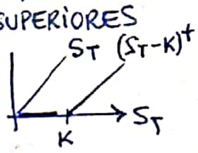
• Compr. put

• Vend. put

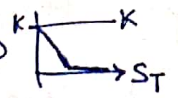



**COTAS SUPERIORES**

• CALL $C \leq S_0 - D$




• PUT $P \leq Ke^{-rT}+D$




**COTAS INFERIORES**

• CALL

C1 $\begin{cases}\text{call} \\ \text{dinero } Ke^{-rT}+D\end{cases}$

C2 {acción

Flujo(T) C1 $\geq$ Flujo(T) C2

$\Rightarrow$ coste C1 $\geq$ coste C2

$\Rightarrow C \geq S_0 - Ke^{-rT} - D$

• PUT

C1 $\begin{cases}\text{put} \\ \text{acción}\end{cases}$ C2 {bono cupón cero nom. $K+De^{rT}$

Flujo C1 $\geq$ Flujo bono

$\Rightarrow$ coste C1 $\geq$ coste C2

$\Rightarrow p \geq Ke^{-rT} - S_0 + D$

**FÓRMULA PARIDAD CALL-PUT**

Cartera 1 $\begin{cases}\text{put} \\ \text{acción}\end{cases}$ Cartera 2 $\begin{cases}\text{call} \\ \text{dinero: } Ke^{-rT}+D\end{cases}$

Flujos en T: Flujo C1: $(K-S_T)^+ + S_T + De^{rT}$ ; Flujo C2: $(S_T-K)^+ + K + De^{rT}$ (=)

$\Rightarrow$ precio hoy deben ser iguales:

coste C1: $p + S_0$

coste C2: $c + Ke^{-rT} + D$

$\Rightarrow \boxed{c - p = S_0 - Ke^{-rT} - D}$

OA con calls y puts: (c y p)

una de las dos estará "desbalanceada" $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ formas carteras C1 y C2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ en T tienen los mismos flujos

$\Rightarrow$ en 0 hay ganancias si compras la "barata" y vendes la "cara".

RECUERDO: comprar signo ⊖, vender ⊕ $\Rightarrow$ hay superhábit en $T=0$.

**MUTUA 1**

0 —— T, $\downarrow a$, $\uparrow M$

$$a_{solo} = \frac{M}{(1+R)^T}$$

$p :=$ prob. sobrevivir T

$$N.a_{mutua} = \frac{N.p.M}{(1+R)^T}$$

**MUTUA 2**

0, 1, …, T-1, T; $\downarrow a$ en 0, 1, …, T-1; $\uparrow M$ en T

$$M = a\sum_{1}^{T}(1+K)^j \Rightarrow a_{solo} = \frac{M}{\sum_1^T (1+R)^j}$$

$\Pi_j :=$ prob. sobrevivir $j$ años

$$C_T = Na\sum_{j=0}^{T-1}\Pi_j(1+R)^{T-j} = M.N.\Pi_T$$

**MUTUA 3**

$\downarrow a$, $\uparrow S$ … $\uparrow S$ en T

$\Pi_j :=$ prob. sobrevivir $j$ años

$\delta_j = \Pi_{j-1} - \Pi_j$ (prob. fallecer $j-1$ y $j$)

$$C_T = Na\sum_{j=0}^{T-1}\Pi_j(1+R)^{T-j} - NS\sum_{j=1}^{T}\delta_j(1+R)^{T-j}$$

---

$X_1, \dots, X_N$ v.a. i.i.d. clones $X$

$\mathbb{E}(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$

$S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ ; $Z_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i$

$\mathbb{E}(S_N) = n\mu$ ; $\mathbb{E}(Z_N) = \mu$

$V(S_N) = n\sigma^2$ ; $V(Z_N) = \frac{\sigma^2}{n}$

$\sigma(S_N) = \sqrt{n}\,\sigma$ ; $\sigma(Z_n) = \sigma/\sqrt{n}$

Si $Q$ es prob. de valoración con respecto de $N$, y tenemos una cartera autofinanciada cuyo proceso de valor es $\{V^{t_K}\}_{K=1,\dots,H}$ entonces $\frac{V^{t_{K-1}}}{N^{t_{K-1}}} = \mathbb{E}_Q\left(\frac{V^{t_K}}{N^{t_K}} \middle| \mathfrak{F}_{t_{K-1}}\right)$, $K = 1, \dots, H$

Si para un numerario $N$ hay $Q$ prob. de valoración, en particular, para cualquier cartera autofinanciada con $\{V^{t_K}\}$; $\frac{V^{t_0}}{N^{t_0}} = \mathbb{E}_Q\left(\frac{V^{t_H}}{N^{t_H}}\right) \Longleftrightarrow$ AOA

$$\boxed{A(\sigma) = \frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}}$$

**CARTERAS DE RÉPLICA**

$X = (X(\omega_1), \dots, X(\omega_N))$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$

$$\sum_{j=1}^M \lambda_j S_j(\omega_K) = X(\omega_K)$$

$$\begin{pmatrix} S_1(\omega_1) & \cdots & S_M(\omega_1) \\ \vdots & & \vdots \\ S_1(\omega_N) & \cdots & S_M(\omega_N)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N\end{pmatrix}$$

sist. ecs. → no solución; → sol. única, → inf. sols. } $X$ es replicable

$X^0 = \sum_{j=1}^M \lambda_j S_j^0$ (si AOA ⇒ único para toda $\lambda$)

Si $X$ es replicable con cartera autofinanciada con proceso de valor $\{V^{t_K}\} \Rightarrow$ precio$(X) = N^{t_0}\,\mathbb{E}_Q\left(\frac{X^{t_H}}{N^{t_H}}\right)$

MONEYNESS $\frac{K}{S_0}$ ó $\frac{Ke^{-rT}}{S_0}$

AOA: $e^{R.\Delta t} = up + d(1-p)$

VOLA: $\sigma\sqrt{\Delta t} = \sqrt{p(1-p)}\,(\ln(u) - \ln(d))$

$$\mathbb{P}(S_M = S_0.u^K.u^{M-K}) = \binom{M}{K}p^K(1-p)^{M-K}$$

**JARROW-RUDD** $\Rightarrow p = 1/2$

$u = e^{R.\Delta t}.e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}A(\sigma)$

$d = e^{R.\Delta t}.e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}A(\sigma)$

**FÓRMULA BLACK-SCHOLES**

$$C = S_0\Phi(d_+) - Ke^{-RT}\Phi(d_-)$$

$$d_\pm = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-rT}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

$m = \ln\left(\frac{Ke^{-rT}}{S_0}\right)$ "moneyness"

vola $= \sigma\sqrt{T}$ "volatilidad acumulada"

$$\frac{call_{BS}}{S_0} = \Phi\left(\frac{m}{vola} + \frac{vola}{2}\right) - e^m\,\Phi\left(\frac{m}{vola} - \frac{vola}{2}\right)$$

Si $C$ activo replicable entonces su proceso de precios es $C_0 = e^{-jR\Delta t}.\mathbb{E}_P(C_j)$

En el caso de una call europea: $C = e^{-R.M.\Delta t}\,\mathbb{E}_P(C)$ ($T = M.\Delta t$ flujos)

$$\mathbb{E}_P(C) = \sum_{j=0}^M C_j^{(M)}\binom{M}{j}\frac{1}{2^M} \; ; \; C_j^{(M)} = (S_j^{(M)} - K)^+$$

$$S_j^{(M)} = S_0.u^j.d^{M-j} \quad \begin{cases} u = e^{R\Delta t}A(\sigma)e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d = e^{R\Delta t}A(\sigma)e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_j^{(M)} = S_0e^{RM\Delta t}A(\sigma)^Me^{(2j-M)\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_j^{(M)} = \left(S_0e^{R.M.\Delta t}A(\sigma)^Me^{(2j-M)\sigma\sqrt{\Delta t}} - K\right)^+}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = e^{-RM\Delta t}\sum_{j=0}^M\left(S_0e^{RM.\Delta t}A(\sigma)^Me^{(2j-M)\sigma\sqrt{\Delta t}} - K\right)^+\binom{M}{j}\frac{1}{2^M}}$$

**OPORTUNIDAD DE ARBITRAJE**

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$:

$V_\lambda^0 = \sum_{j=1}^M \lambda_j S_j^0 = 0$

$V_\lambda(\omega_K) = \sum_{j=1}^M \lambda_j S_j(\omega_K) \geq 0$

$K = 1, \dots, N$

algún $K$ esto es $> 0$

**NUMERARIO N** / activo básico, cartera activos

$N^0 > 0$ $N(\omega_K) > 0$ $K = 1, \dots, N$

**PROB. VALORACIÓN**: $P = (p_1, \dots, p_N)$

$$\frac{S_j^0}{N^0} = \mathbb{E}_P\left(\frac{S_j}{N}\right) = \sum_{K=1}^N p_K\frac{S_j(\omega_K)}{N(\omega_K)}$$

$j = 1, \dots, M$

$X = (X(\omega_1), \dots, X(\omega_N))$ replicable

precio$(X) = N^0\,\mathbb{E}_P\left(\frac{X}{N}\right)$

Mercado completo si las filas de la matriz $\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n\end{pmatrix}$ $\omega_1 - \omega_N$ son base $\mathbb{R}^N$.

AOA + mercado completo ⇒ $P$ única

AOA + merc. incompleto ⇒

→ si $X$ replicable: su precio es único (común $\forall P$)

→ si $X$ no replicable: rango precio $= N^0\,\mathbb{E}_P\left(\frac{X}{N}\right)$

**TFV**: 1) AOA

2) Para cada $N$, $\exists$ (al menos 1) $P$

3) Para cierto $N$, $\exists$ una $P$

**ÁRBOL DE VALORACIÓN CALL**

Cartera cobertura $\begin{cases} S \\ CB \end{cases}$

$S \to S.u$, $S \to S.d$ ; $1 \to e^{R\Delta t}$, $1 \to e^{R\Delta t}$ ; ? $\to C_u$, $C_d$

$\alpha$ subyacente, $\beta$ dinero

$\alpha.S.u + \beta e^{R\Delta t} = C_u$

$\alpha.S.d + \beta e^{R\Delta t} = C_d$

Ejemplo:

$S \to 100 \to 108 \to 117, 101$; $100 \to 94 \to 101, 83$

$C \to 8'3 \to 9'5 \to 0, 0$; $8'3 \to 6'4 \to 0, 0$

$\frac{9'5 - 6'4}{108 - 94}$ ; $\frac{0 - 0}{117 - 101}$ ; $\frac{0 - 0}{101 - 83}$

$$c(t) = p(t) + S(t) - Ke^{-r(T-t)} \geq S(t) - Ke^{-r(T-t)} \geq S(t) - K$$

$O_n, \dots, O_1$ $n$ ofertas (v.a. i.i.d.) ¿Cómo gestionar?

última oferta $O_1$ → $U_1 = 0$; → $V_1 = \mathbb{E}(O_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

penúltima oferta $O_2$ → $U_2 = V_1$; → $V_2 = \mathbb{P}(O_2 \geq V_1)\mathbb{E}(O_2 | O_2 \geq V_1) + \mathbb{P}(O_2 < V_1)\mathbb{E}(O_2 | O_2 < V_1)$

⋮

→ $U_K = V_{K-1}$

→ $V_K = \mathbb{P}(O_K \geq V_{K-1})\mathbb{E}(O_K | O_K \geq V_{K-1}) + \mathbb{P}(O_K < V_{K-1}) \cdot V_{K-1}$

$$\Rightarrow \boxed{V_K = \frac{1 + V_{K-1}^2}{2}, \quad V_1 = \mathbb{E}(O_1)}$$

$$\mathbb{P}\left(\begin{matrix} E_r \text{ éxito} \\ \text{en } K\end{matrix}\right) = \mathbb{P}\left(\begin{matrix}\max\{x_1 \dots x_{r-1}\} = \max\{x_1 \dots x_{K-1}\} \\ \text{y } \max\{x_1, \dots, x_N\} = x_K\end{matrix}\right) = \frac{r-1}{K-1}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(E_r \text{ éxito})}_{=\varphi(r)} = \sum_{K=r}^N \frac{r-1}{K-1}\cdot\frac{1}{N} = \frac{r-1}{N}\sum_{K=r-1}^{N-1}\frac{1}{K} \Rightarrow \varphi(r) \text{ máximo en } r = N/e$$

---

$C_{AM}(0) > C_{EU}(0)$

| Hoy | t | T |
|---|---|---|
| • Vendo call$_{AM}$ sobre S (venc. T) • Compr. call$_{EU}$ sobre S (venc. T) • Pido prestada acción | Peor caso: el cliente ejerce derecho a comprar acción $-$acción $+ Ke^{-r(T-t)}$ | $S_T > K$: compramos S por K → devol. ; $K > S_T$: compramos S $S_T$ → $K - S_T > 0$ |

$C_{EU}(0) > C_{AM}(0)$

| Hoy | t | T |
|---|---|---|
| • Compro AM • Vendo EU ; $C_{EU} - C_{AM} > 0$ | No hacemos nada | • flujo $(S_T - K)^+$ • flujo $-(S_T - K)^+$ ; 0€ |