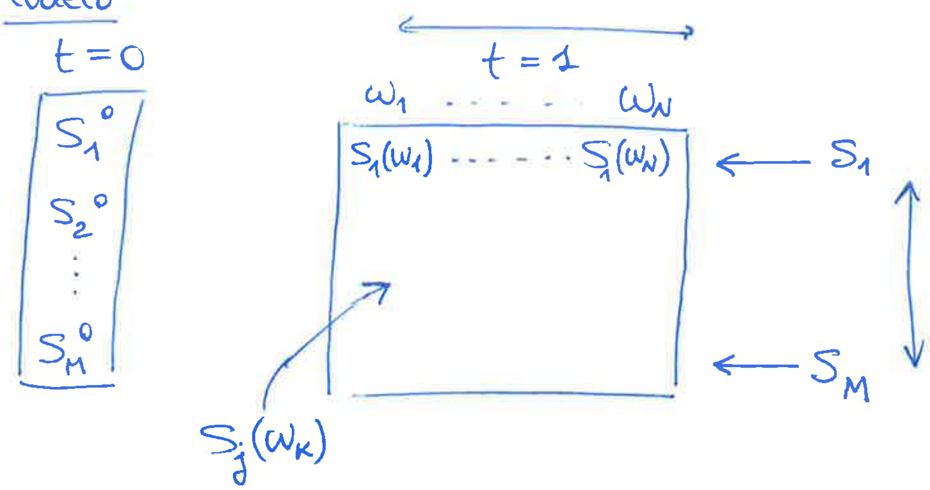
# 3.1. MODELOS MATRICIALES

Escenarios $\omega_1, \dots, \omega_N$     Habitualmente $N \geq M$

Activos básicos $S_1, \dots, S_M$     (el caso $N = M$ especial)

**Modelo**




**Cartera** $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M) \in \mathbb{R}^M$

nº de unidades de cada activo

coste hoy $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j^0$    ||    flujos en $t=1$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j(\omega_k) \quad k = 1, \dots, N$

**Instrumento general**

$X = (X(\omega_1), \dots, X(\omega_N)) \in \mathbb{R}^N$     objetivo: dar precio a $X$

Primer intento: cartera de réplica de $X \leftarrow$ dato

Calcular $(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ tal que $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j(\omega_k) = X(\omega_k)$   $k = 1, \dots, N$

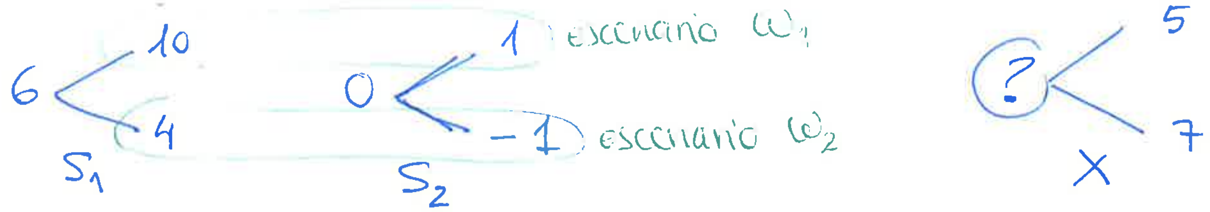
$$\begin{pmatrix} S_1(\omega_1) & \cdots & S_M(\omega_1) \\ \vdots & & \\ S_1(\omega_N) & \cdots & S_M(\omega_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\omega_1) \\ \vdots \\ X(\omega_N) \end{pmatrix}$$

Sistema de ecuaciones lineales

- $\to$ no solución
- $\to$ sol. única
- $\to$ infinitas soluciones

$\left.\begin{array}{l} \text{sol. única} \\ \text{infinitas soluciones} \end{array}\right\} \longrightarrow X$ es replicable

Ejemplo (a mano): $N = 2 = M$ $\quad S_1, S_2$ $\quad \omega_1, \omega_2$




$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc|l} \omega_1 & \omega_2 & \\ \hline 10 & 4 & S_1 \\ 1 & -1 & S_2 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \text{ de } S_1 \\ \lambda_2 \text{ de } S_2 \end{array}\right\}$ tales que $\left\{\begin{array}{l} 10\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 = 5 \\ 4\lambda_1 - 1\cdot\lambda_2 = 7 \end{array}\right.$

$\downarrow$ sol.

$\lambda_1 = \frac{6}{7} \qquad \lambda_2 = \frac{-25}{7}$

Tentación:

coste cartera $= \frac{6}{7} \cdot 6 + \frac{-25}{7} \cdot 0 = \frac{36}{7} \approx 5'14$

¿es este el precio que debemos asignar a $X$?

(*) Para dar precio, necesitamos hipótesis financiera: ausencia de oportunidades de arbitraje (AOA)

Oportunidad de arbitraje: cartera $(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j^0 = 0 \quad + \quad \sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j(\omega_k) \geq 0 \qquad k = 1, \dots, N$$

para algún $k$, eso es $> 0$, ¿cómo encontrarlo?

Consecuencia: ley del precio único.

Si $X$ es replicable (con carteras de activos básicos)

$\rightarrow$ todas esas carteras de réplica han de tener el mismo coste.

A $X$ le ponemos un precio = coste, de cualquiera de esas carteras.

AOA $\Longrightarrow$ replicable tiene precio.

Dificultades $\begin{cases} \text{¿cómo asegurar AOA?} \\ \text{cálculos pesados.} \end{cases}$

# NUMERARIOS Y PROBABILIDAD DE VALORACIÓN

Probabilidad $P \longrightarrow P_1, \dots, P_N$ , $P_j \geq 0$ , $\sum_{j=1}^{N} P_j = 1$

Numerario : $N = \begin{cases} \text{activo básico} \\ \text{cartera de activos básicos} \end{cases}$

$N^0 > 0 \quad N(\omega_K) > 0 \quad K = 1, \dots, N$

Probabilidad de valoración con respecto a $N$ : son $(P_1, \dots, P_N)$ tales que, para cada activo, se cumpla : $\frac{S_j^0}{N^0} = \mathbb{E}_P\left(\frac{S_j}{N}\right)$

$j = 1, \dots, M$

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_j}{N}\right) = \sum_{K=1}^{N} P_K \frac{S_j(\omega_K)}{N(\omega_K)} \quad \text{(M ecuaciones)}$$

si se cumple $\longrightarrow (P_1, \dots, P_N)$ es prob. de valoración con respecto a $N$.

El cálculo en sí es:

$$\begin{aligned} S_1 &\longrightarrow \begin{cases} \frac{S_1^0}{N^0} = P_1 \frac{S_1(\omega_1)}{N(\omega_1)} + \dots + P_N \frac{S_1(\omega_N)}{N(\omega_N)} \\ \vdots \\ \frac{S_M^0}{N^0} = P_1 \frac{S_M(\omega_1)}{N(\omega_1)} + \dots + P_N \frac{S_M(\omega_N)}{N(\omega_N)} \end{cases} \\ &\vdots \\ S_M &\longrightarrow \end{aligned}$$

¡que sean probs!

¿Para qué? Supongamos que para cierto numerario $N$ existe una prob. de valoración.

a) Tomemos una cartera $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$

$$V^0 = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j^0$$

$$V(\omega_K) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j(\omega_K) \quad K = 1, \dots, N$$

$$\mathbb{E}_P\left(\frac{V}{N}\right) = \sum_{K=1}^{N} P_K \frac{V(\omega_K)}{N(\omega_K)} = \sum_{K=1}^{N} P_K \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \frac{S_j(\omega_K)}{N(\omega_K)} = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \underbrace{\boxed{\sum_{K=1}^{N} P_K \frac{S_j(\omega_K)}{N(\omega_K)}}}_{= \frac{S_j^0}{N^0}} =$$

$$= \frac{1}{N^0} \sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j^0 = \frac{V^0}{N^0}$$

b) ¡No hay OA!

Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ fuera cartera de arbitraje

$$V^0 = 0 \implies \frac{V^0}{N^0} = 0$$

$$\mathbb{E}_P\left(\frac{V}{N}\right) > 0$$

contradicción!

c) Lo replicable tiene precio, y se calcula así:

$X = (X(\omega_1), \dots, X(\omega_N)) \longrightarrow$ activo replicable

existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ de réplica

$$\boxed{\text{precio}(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{AOA}}}{=} V^0 \underset{\substack{\uparrow \\ P \text{ es de} \\ \text{valoración} \\ \text{con resp. } N}}{=} N^0\, \mathbb{E}_P\left(\frac{V}{N}\right) = N^0\, \mathbb{E}_P\left(\frac{X}{N}\right)}$$

# Modelo matricial

$$\begin{array}{c|c|}
S_1^0 & \\
\vdots & S_j(\omega_k) \\
S_M^0 & \\
\hline
 & \omega_1 \cdots\cdots \omega_N
\end{array}$$

Dado un numerario $\mathcal{N}$ (activo básico o cartera de act. básicos $\mathcal{N}^0 > 0,\ \mathcal{N}(\omega_k) > 0 \quad k = 1, \dots, N$) decimos que $P = (p_1, \dots, p_N)$ es probabilidad de valoración ($p_j \geq 0 \quad \sum_j p_j = 1$) con respecto al numerario $\mathcal{N}$ si:

$$\frac{S^0}{\mathcal{N}^0} = \mathbb{E}_P\left(\frac{S_j}{\mathcal{N}}\right) \qquad j = 1, \dots, M$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{S_j(\omega_k)}{\mathcal{N}(\omega_k)}$$

- Si para un $\mathcal{N}$ una $P$ de valoración $\Rightarrow$ AOA.

$\Rightarrow$ y si $X$ es replicable:

$$\frac{\text{precio}(X)}{\mathcal{N}^0} = \mathbb{E}_P\left(\frac{X}{\mathcal{N}}\right)$$

## Ejemplo 1

$$S_1:\ 6 \begin{array}{l} \nearrow 10 \\ \searrow 4 \end{array} \qquad S_2:\ 0 \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow -1 \end{array} \qquad X:\ ? \begin{array}{l} \nearrow 5 \\ \searrow 7 \end{array}$$

Cartera de réplica de $X \longrightarrow \left(\frac{6}{7}, \frac{-25}{7}\right)$

Coste de cartera $\frac{36}{7} \longleftarrow$ ¿buen precio? ¿AOA?

$$\frac{X}{\mathcal{N}} \begin{array}{l} \nearrow 5/10 \\ \searrow 7/4 \end{array}$$

Numerario $= S_1$

$$1 \begin{array}{l} \xrightarrow{p} 1 \\ \xrightarrow{q} 1 \end{array} \qquad 0 \begin{array}{l} \xrightarrow{p} 1/10 \\ \xrightarrow{q} -1/4 \end{array}$$

$$\begin{cases} 1 = p + q \\ 0 = \frac{1}{10}p - \frac{1}{4}(1-p) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} p = 5/7 \\ q = 2/7 \end{cases}}_{\text{AOA}}$$

Además: $\dfrac{\text{precio}(X)}{6} = \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{5}{10} + \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{7}{4} = \dfrac{36}{7}$

Ojo, si fuera

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 10 \\ 6 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ S_1 & 4 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ S_2 & -1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 5 \\ x \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 7 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ 1 \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ & 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 1/10 \\ \frac{1}{3} \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ & -1/4 \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} 1 = p+q \\ \frac{1}{3} = \frac{1}{10}p - \frac{1}{4}(1-p) \end{cases} \Rightarrow p = \frac{5}{3} \quad \text{ops}$$

Ejemplo 3 (conceptual)

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 1+r \\ 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 1+r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & S.u \\ S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S.d \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} u,d > 0 \\ u > d \end{matrix}$$

sin riesgo — con riesgo

Numerario

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ 1 \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ & 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & \frac{Su}{1+r} \\ S \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ & \frac{Sd}{1+r} \end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} 1 = p+q \quad \checkmark \\ S = p\frac{Su}{1+r} + (1-p)\frac{S.d}{1+r} \end{cases} \longrightarrow \boxed{1+r = p.u + (1-p)d}$$

despejar p

$$\boxed{p = \frac{(1+r)-d}{u-d}} \in (0,1)$$

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, dash] & u \end{tikzcd}$$

No hay OA si $(1+r)$ está entre $u$ y $d$.

$\downarrow$

financieramente OK!

$$\text{Valoración de } ? \begin{cases} A \\ B \end{cases} \qquad \frac{\text{precio}}{1} = p\frac{A}{1+r} + (1-p)\frac{B}{1+r}$$

Ojo: $N = S$

$$1 \begin{array}{l} \nearrow 1+r \\ \searrow 1+r \end{array} \qquad\qquad S \begin{array}{l} \nearrow Su \\ \searrow Sd \end{array} \quad \text{original}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{S} \begin{array}{l} \overset{\tilde{p}}{\nearrow} \frac{1+r}{S.u} \\ \underset{\tilde{q}}{\searrow} \frac{1+r}{S.d} \end{array} \qquad\qquad 1 \begin{array}{l} \overset{\tilde{p}}{\nearrow} 1 \\ \underset{\tilde{q}}{\searrow} 1 \end{array} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{S} = \tilde{p}\,\frac{1+r}{S.u} + (1-\tilde{p})\,\frac{1+r}{S.d}}$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{p} = \dots$$

Valorar

$$\text{precio} \begin{array}{l} \nearrow A \\ \searrow B \end{array} \longrightarrow \frac{\text{precio}}{S} \begin{array}{l} \overset{\tilde{p}}{\nearrow} A/S.u \\ \underset{\tilde{q}}{\searrow} B/S.d \end{array}$$

$$\boxed{\frac{\text{precio}}{S} = \tilde{p}\,\frac{A}{S.u} + \tilde{q}\,\frac{B}{S.d}} \Longrightarrow \text{despejar} \quad \tilde{p} = \dots$$

¡Son el mismo! (este y el anterior)

## Observaciones

1. Cálculo de la prob. de valoración.

Escoges $\mathcal{N} \longrightarrow$ ¿ $\mathbb{P}$ ?

$$\frac{S^0}{\mathcal{N}^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{S_j}{\mathcal{N}}\right) \qquad j = 1, \dots, M$$

(M ecuaciones $\leftrightarrow$ una por activo
N incógnitas $\leftrightarrow$ probs. $p_1, \dots, p_N$)

Sist. lineal de ecuaciones $\rightarrow$ sin sol. / 1 sol. / $\infty$ sols.

¡deben ser probs!

2. Teorema fundamental de valoración:

AOA $\Longleftrightarrow$ para cada numerario $\mathcal{N}$ existe (al menos) una prob. de valoración.

3. Mercados completos/incompletos

Si todo activo $\underset{\mathbb{R}^N}{\overset{\cap}{X}}$ es replicable $\Rightarrow$ mercado completo

(basta comprobar que $\underbrace{\begin{matrix}(1,0,\dots,0)\\(0,1,\dots,0)\\ \vdots \\(0,0,\dots,1)\end{matrix}}$ son replicables)

activos de Arrow-Debreu

AOA $\Rightarrow$ lo replicable tiene precio.

Por AOA + Teorema fundamental, fijando numerario $\mathcal{N}$, existe $\mathbb{P} = (P_1, \dots, P_N)$ prob. de valoración con respecto a $\mathcal{N}$.

Por mercado completo, cada $AD_j = (0,\dots, \overset{j}{1}, \dots, 0)$ es replicable $\rightarrow$

$\rightarrow$ tiene precio único, precio$(AD_j)$.

Podemos calcularlo como sigue:

$$\text{precio}(AD_j) = \mathcal{N}^0\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{AD_j}{\mathcal{N}}\right) = \mathcal{N}^0 \sum_{k=1}^{N} P_k \frac{AD_j(\omega_k)}{\mathcal{N}(\omega_k)} =$$

$$= \mathcal{N}^0 P_j \frac{1}{\mathcal{N}(\omega_j)} \Rightarrow P_j = \text{precio}(AD_j)\frac{\mathcal{N}(\omega_j)}{\mathcal{N}^0}, \; j=1,\dots,N$$

$\mathbb{P}$ es única.

$\left\{\begin{matrix}\text{AOA}\\ + \\ \text{mercado incompleto}\end{matrix}\right. \Rightarrow \mathbb{P}$ no es única

Para cada numerario $\mathcal{N}$, habrá muchas probabilidades $\mathbb{P}$ de valoración asociadas.

Si $X$ es replicable, $\rightarrow$ común para todas las $\mathbb{P}$'s.

$$\text{precio}(X) = \mathcal{N}^0\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{X}{\mathcal{N}}\right)$$

Si $X$ no replicable

$$\underbrace{\mathcal{N}^0\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{X}{\mathcal{N}}\right)}$$

$\rightarrow$ rango de precios "legales" para $X$

No crean OA en el mercado

Ejemplo: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ $S_1, S_2$

$$\begin{pmatrix} 9/10 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow S_1 \\ \leftarrow S_2 \end{matrix}$$

No todo replicable

$X = (1 \ 0 \ 1)$ NO

Ponemos en marcha la maquinaria:

Escogemos $N = S_1$

Mercado $N \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 100/9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ \frac{100}{9} = 5P_1 + 10P_2 + 15P_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_1 = \lambda - \frac{2}{9} & \in (0,1) \\ P_2 = \frac{11}{9} - 2\lambda & \in (0,1) \\ P_3 = \lambda & \in (0,1) \end{cases}$$

$$\frac{4}{18} \leq \lambda \leq \frac{11}{18}$$

- Valoración de $X = (1,1,1)$

$$\text{precio}(X) = \frac{9}{10}\left[\left(\lambda - \frac{2}{9}\right)\cdot\frac{1}{1} + \left(\frac{11}{9} - 2\lambda\right)\frac{1}{1} + \lambda\frac{1}{1}\right] = \frac{9}{10} \checkmark$$

$0 \quad \frac{4}{18} \quad \frac{11}{18} \quad 1$

$\lambda$

- Si $X = (1,0,1)$

$$\text{precio}(X) = \frac{9}{10}\left[\left(\lambda - \frac{2}{9}\right)\frac{1}{1} + (\quad)\cdot\frac{0}{1} + \lambda\cdot\frac{1}{1}\right] = \frac{9}{5}\lambda - \frac{1}{5}$$

como $\lambda \in \left(\frac{4}{18}, \frac{11}{18}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango $\left[\frac{1}{5}, \frac{9}{10}\right]$

En general, con AOA, ¿Cómo obtener ese rango de precios?

Dato: X no replicable.

¿Cómo obtener ese rango de precios?

Dato: $X$ no replicable.

(1.) Seleccionar $Y$ replicables tales que los flujos de $Y$ sean $\leq$ los flujos de $X$.

$$\alpha = \sup_{\substack{Y \text{ replicable} \\ Y \leq X}} \{\text{precio}(Y)\} \qquad \beta = \inf_{\substack{Y \text{ replicable} \\ Y \geq X}} \{\text{precio}(Y)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \leq \text{precio}(X) \leq \beta}$$

(2) Fijamos numerario $\mathcal{N}$. Llamamos $\mathcal{Q}$ a la colección de probabilidades $Q$ de probs. de valoración asociadas a $\mathcal{N}$.

$$\text{precio}(X) \leq \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathcal{N}^0 \, \mathbb{E}_Q\left(\frac{X}{\mathcal{N}}\right) \right\}$$

$$\text{precio}(X) \geq \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathcal{N}^0 \, \mathbb{E}_Q\left(\frac{X}{\mathcal{N}}\right) \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\inf_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathcal{N}^0 \, \mathbb{E}_Q\left(\frac{X}{\mathcal{N}}\right) \right\} \leq \text{precio}(X) \leq \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathcal{N}^0 \, \mathbb{E}_Q\left(\frac{X}{\mathcal{N}}\right) \right\}}$$

**TEOREMA FUNDAMENTAL DE VALORACIÓN**: Son equivalentes:

1) AOA
2) Para cada numerario, hay (al menos) una prob. de valoración asociada.
3) Para cierto numerario, hay una prob. de valoración asociada

demostración:

2) $\Rightarrow$ 3) evidente

3) $\Rightarrow$ 1) ya visto

Falta 1) $\Rightarrow$ 2)

Suponemos AOA. Fijamos numerario $\mathcal{N}$, que será una cartera de activos básicos $(\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ tal que $\begin{cases} \mathcal{N}^0 = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j S_j^0 > 0 \\ \mathcal{N}(\omega_k) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j S_j(\omega_k) > 0 \end{cases}$ $k = 1, \dots, N$

Queremos comprobar que existe una probabilidad de valoración asociada a ese numerario $\mathcal{N}$.

Obs. 1: Nueva "notación". Dada una cartera $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$, tenemos

proceso de "valor" $\begin{cases} V_\lambda^0 = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j^0 \\ V_\lambda(\omega_k) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j(\omega_k) \end{cases}$

$\mathcal{N}$ fijo. Variable de "ganancia" $G_\lambda(\omega_k) = \dfrac{V_\lambda(\omega_k)}{\mathcal{N}(\omega_k)} - \dfrac{V_\lambda^0}{\mathcal{N}^0}$ $\quad k = 1, \dots, N$

solo de tiempo $t = 1$.

Obs. 2: LEMA: Tenemos OA $\iff$ existe cartera $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ tal que $G_\lambda(\omega_k) \geq 0$ $k = 1, \dots, N$ y $G_\lambda(\omega_k) > 0$ para algún $k$

demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Si OA, existe cartera $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ tal que $\begin{cases} V_\lambda^0 = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j^0 = 0 \\ V_\lambda(\omega_k) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j S_j(\omega_k) \begin{matrix} \geq 0 & k = 1, \dots, N \\ > 0 & \text{algún } k \end{matrix} \end{cases}$

La variable de ganancia de esa cartera

$$G_\lambda(\omega_k) = \frac{V_\lambda(\omega_k)}{\mathcal{N}(\omega_k)} - \frac{V_\lambda^0}{\mathcal{N}^0} \begin{matrix} \geq 0 & k = 1, \dots, N \\ > 0 & \text{algún } k \end{matrix}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ tal que $G_\lambda(\omega_k) \begin{matrix} \geq 0 \\ > 0 \end{matrix}$

Construimos cartera $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M)$ (que va a ser de arbitraje)

$$\beta_j = \lambda_j - \alpha_j \frac{V_\lambda^0}{\mathcal{N}^0} \quad j = 1, \dots, M$$

"sencillita" ~ Pablo 2021

Basta comprobar $\begin{cases} V_\beta^0 = 0 \\ V_\beta(\omega_k) \begin{matrix} \geq 0 & k = 1, \dots, N \\ > 0 & \text{algún } k. \end{matrix} \end{cases}$ $\quad [\dots]$ ∎

LEMA:

Obs 3: $Q$ es prob. de valoración con respecto de $\mathcal{N}$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{E}_Q(G_\lambda) = 0$ para toda cartera $\lambda$.

demostración:

$$\mathbb{E}_Q(G_\lambda) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{V_\lambda}{\mathcal{N}} - \frac{V_\lambda^0}{\mathcal{N}^0}\right) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{V_\lambda}{\mathcal{N}}\right) - \frac{V_\lambda^0}{\mathcal{N}^0} \quad \blacksquare$$

Ahora tenemos:

AOA

$\mathcal{N}$ fijado

Cada cartera $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ tiene asociada una variable ganancia

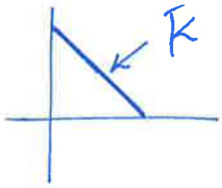
$$G_\lambda = (G_\lambda(\omega_1), \dots, G_\lambda(\omega_N)) \in \mathbb{R}^N$$

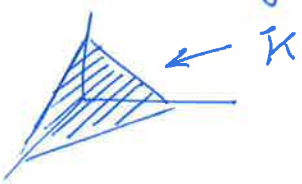
Llamamos $\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{l} \text{colección de todas las} \\ \text{posibles ganancias} \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^N$

Observación: $\mathcal{G}$ es un subespacio vectorial.

Como no hay OA, $\mathcal{G} \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N : x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, N\} = \{\vec{0}\}$

Consideramos $K = \{(x_1, \dots x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^N x_j = 1\}$




Se tiene que $\mathcal{G} \cap K = \emptyset$.

¡Entonces! existe un vector $v \in \mathbb{R}^N$ tal que:

a) $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ para todo $\vec{x} \in \mathcal{G}$.

b) $\vec{x} \cdot \vec{v} > 0$ para todo $\vec{x} \in K$.

La condición a) nos dice que $\sum_{k=1}^N V_k \cdot G_\lambda(\omega_k) = 0$ para toda cartera $\lambda$.

La condición b) nos dice que $\sum_{k=1}^N V_k \cdot x_k > 0$ si $(x_1, \dots, x_N)$ $x_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^N x_j = 1$

Si tomamos $x = (1,0,\dots,0) \Rightarrow v_1 > 0$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$= (0,\dots,0,1) \Rightarrow v_N > 0$

$\Rightarrow$ coordenadas de $v = (v_1,\dots,v_N)$ son positivas.

Definimos $\mathbb{P} = (p_1,\dots,p_N)$, $p_k = \dfrac{v_k}{\sum_{j=1}^N v_j}$ $\quad k = 1,\dots,N$

$p_k > 0$ ✓

$\sum_{k=1}^N p_k = 1$ ✓

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(G_\lambda) = \sum_{k=1}^N p_k G_\lambda(w_k) = \frac{1}{\sum_j^N v_j} \sum_{k=1}^N v_k G_\lambda(w_k) = 0$$ para cualquier cartera $\lambda$. ∎

## Reflexión sobre CONJUNTOS CONVEXOS, HIPERPLANOS, SEPARACIÓN

Todo en $\mathbb{R}^N$. Palabras clave: Teoremas de separación (en particular, Tma. de Minkowski o Tma. de Hahn-Banach)

$C \subset \mathbb{R}^N$ es convexo si dados $c_1, c_2 \in C$, entonces $tc_1 + (1-t)c_2 \in C$ $t \in \mathbb{R}$

Dado $v \in \mathbb{R}^N$, $\{x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N : x \cdot v = a\}$ (hiperplano)

Hiperespacios: $\{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot v \geq a\}$, $\{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot v \leq a\}$

LEMA: Si $C \subset \mathbb{R}^N$ convexo, no vacío, cerrado, $0 \notin C$, entonces existe vector (único) en $C$ con norma mínima.

demostración

Sea $\delta = \inf_{x \in C} \|x\|$. Sea $(x_j)$ una sucesión en $C$ tales que $\|x_j\| \longrightarrow \delta$, $j \to \infty$.

$\dfrac{x_i + x_j}{2} \in C$, por tanto $\left\|\dfrac{x_i + x_j}{2}\right\|^2 \geq \delta^2$

$$\|x_i - x_j\|^2 = 2\|x_i\|^2 + 2\|x_j\|^2 - \|x_i + x_j\|^2 \leq$$

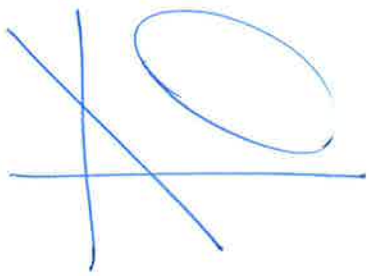
regla paralelogramo

$$\leq \underbrace{2\|x_i\|^2}_{\downarrow i\to\infty,\ \delta^2} + \underbrace{2\|x_j\|^2}_{\downarrow j\to\infty,\ \delta^2} - 4\delta^2 \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0.$$

$\Rightarrow$ sucesión de Cauchy y cerrado $\Rightarrow$ tiene límite $x_0 \in C$. ∎

El mismo argumento da la unicidad.

**LEMA**: Sea $C \subset \mathbb{R}^N$ convexo, no vacío, cerrado, $0 \notin C$. Entonces existen $v \in \mathbb{R}^N$, $\|v\| = 1$, $\alpha > 0$, tales que $\vec{v} . \vec{x} \geq \alpha$ para todo $\vec{x} \in C$.



demostración

Sabemos que existe un $x_0 \in C$ tal que $\|x_0\| > 0$, $\|x_0\| = \min_{x \in C} \|x\|$.

Sea $x \in C$, $t \in (0,1]$.

$$\|\underbrace{x_0 + t(x - x_0)}_{\in C}\|^2 \geq \|x_0\|^2 \Rightarrow \cancel{\|x_0\|^2} + t^2 \|x - x_0\|^2 + 2t\, x_0 (x - x_0) \geq \cancel{\|x_0\|^2}$$

$$\Rightarrow t \|x - x_0\|^2 + 2 x_0 (x - x_0) \geq 0 \xrightarrow{\text{para todo } t \in (0,1)} x_0 . x - \|x_0\|^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 . x \geq \|x_0\|^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{x_0}{\|x_0\|}}_{:= v} . x \geq \underbrace{\|x_0\|}_{:= \alpha} \quad \text{para todo } x \in C. \quad \blacksquare$$

**LEMA**: Sea $K$ convexo, no vacío, compacto $\xrightarrow{\text{en } \mathbb{R}^N}$ cerrado + acotado

Sea $L$ (subespacio vectorial $\xrightarrow{\text{en } \mathbb{R}^N}$ convexo y cerrado.

Supongamos que $K \cap L = \emptyset$. Entonces, existen $v \in \mathbb{R}^N$, $\alpha > 0$ tales que $\vec{v} . \vec{l} = 0$ para todo $\vec{l} \in L$.
$\vec{v} . \vec{k} \geq \alpha$ para todo $\vec{k} \in K$.

demostración

Definimos $C = K - L = \{\vec{k} - \vec{l} : \vec{k} \in K, \vec{l} \in L\}$

$C$ es convexo, cerrado, $0 \notin C$. Así que existen $v \in \mathbb{R}^N$, $\|v\| = 1$, $\alpha > 0$ tales que $\vec{v} . \vec{x} \geq \alpha$ para todo $\vec{x} \in C$.

$\vec{v}(\vec{k} - \vec{l}) \geq \alpha$ para todo $\vec{k} \in K$, para todo $\vec{l} \in L$

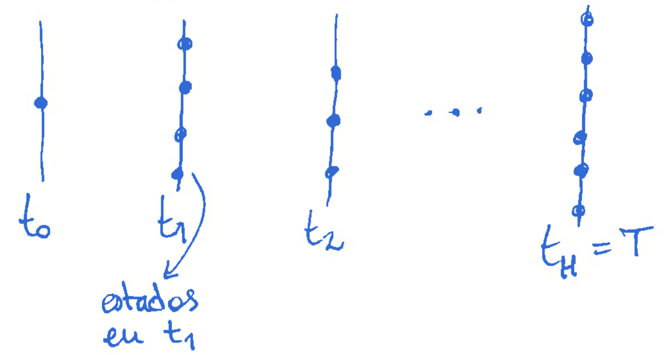
$\vec{v} . \vec{k} - \vec{v} . \vec{l} \geq \alpha \quad \forall \vec{k} \in K, \forall \vec{l} \in L$.

$\vec{v} . \vec{k} - \lambda \vec{v} . \vec{l} \geq \alpha \quad \forall \vec{k} \in K, \forall \vec{l} \in L, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

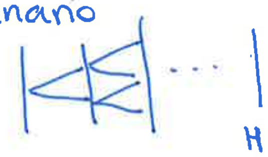
# MODELO (DISCRETO), VARIOS TIEMPOS

tiempos $t_0, t_1, \dots t_H = T$, con $t_0 = 0$




$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ espacio de escenario

¡Ojo! Atención al tamaño




$2^H$ escenarios

Recuerda: $2^{10} \sim 1000 = 10^3$, $2^{100} \sim 10^{30}$

Variables de estado en $t_1, t_2, \dots, t_H$: $Y_1, Y_2, \dots, Y_H$.

$Y_k$ registra el estado en el que se está en el tiempo $t_k$.

Filtración / flujo de información: $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_H$.

$$\mathcal{F}_j = \sigma(Y_1, \dots, Y_j) \quad j = 1, \dots, H$$


Dividimos $\Omega$ en "bloques" dependiendo de su "primer tramo".

$\mathcal{F}_1 - \sigma(Y_1)$

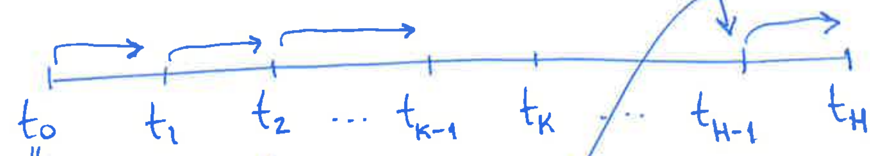
Activos básicos $\longrightarrow$ $S_1, \dots, S_M$

Notación: $S_i^{t_k}(\omega_j)$ := cotización de $S_i$ en tiempo $t_k$ si se da el escenario $\omega_j$.

- <u>Carteras / estrategias de inversión</u> $S_1 \cdots S_M$

$S_i^{t_k}(\omega_j)$

$\lambda_i^{t_k}$ = unidades de $S_i$ al llegar a tiempo $t_k$.




$t_0 = 0$

$(\lambda_1^{t_0} \cdots \lambda_M^{t_0})$

$\parallel$

$(\lambda_1^{t_1} \cdots \lambda_M^{t_1})$

$(\lambda_1^{t_2} \cdots \lambda_M^{t_2})$

$\vdots$

$(\lambda_1^{t_H} \cdots \lambda_M^{t_H})$

$\lambda_i^{t_k}$ sólo depende de $Y_1, \dots, Y_{k-1}$

(es $\mathcal{F}_{k-1}$-medible)

Dado una estrategia de inversión

proceso de valor $\longrightarrow$ $V^{t_k} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_k} S_i^{t_k}$

$$V^{t_0} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{0} S_i^{0} \longleftarrow \text{valor inicial}$$

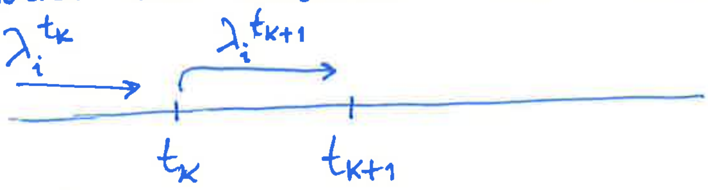
$\parallel$

$$V^{t_1} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_1} S_i^{t_1}$$

$$V^{t_2} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_2} S_i^{t_2}$$

$\vdots$

A nosotros nos interesan las <u>ESTRATEGIAS DE INVERSIÓN AUTOFIN</u>
CARTERAS AUTOFINANCIADAS <u>(EIA)</u>




$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_k} S_i^{t_k} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_{k+1}} S_i^{t_k} \qquad k = 1, \dots, H-1$$

Finalmente, veremos ACTIVOS REPLICABLES:

activo $X$, con flujos $X(\omega)$ en $t_H = T$

$\uparrow$ podría depender de la senda completa

$X$ es replicable si existe EIA tal que $V^{t_H}(\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

valor de la cartera en $t_H$

valor liquidativo a mercado en $t_H$

$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_H}(\omega) \cdot S_i^{t_H}(\omega)$$

- Oportunidades de arbitraje: es una EIA tal que:

$$V^{t_0} = 0$$

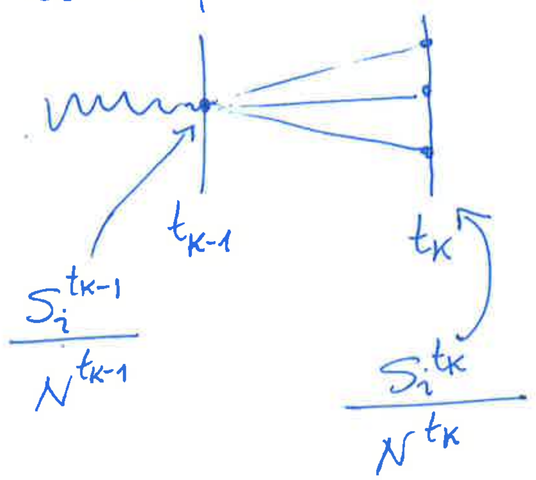
$$V^{t_H}(\omega) \geq 0 \text{ para todo } \omega \in \Omega$$
$$> 0 \text{ para algún } \omega \in \Omega$$

- Numerario: activo básico (EIA) tal que en todo tiempo $t_K$ y para todo escenario $\omega$, su valor es $> 0$.

- Probabilidad de valoración (con respecto a $\mathcal{N}$)

$Q$ es prob. en $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ $\longrightarrow$ $Q(\omega) > 0$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} Q(\omega_j) = 1$

$Q$ es prob. de valoración respecto de $\mathcal{N}$.




$$\boxed{\frac{S_i^{t_{K-1}}}{N^{t_{K-1}}} = \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_i^{t_K}}{N^{t_K}} \,\middle|\, \mathcal{F}_{K-1}\right)}$$

$K = 1, \dots, H$

$i = 1, \dots, M$

$\downarrow$

en jerga $\left\{\dfrac{S_i^{t_K}}{N^{t_K}}\right\}$ es $Q$-martingala.

## ▶ Breves notas sobre esperanza condicional

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sucesos $A \in \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{P}(A)$ ✓

$X$ variables aleatorias $X(w_j)$

sucesos

Sabemos calcular probs. del tipo $\mathbb{P}(x \in A)$

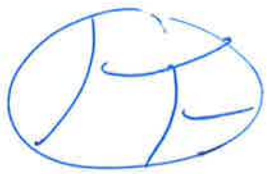
Probabilidad condicionada suceso $B$, $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Esperanza de $X$ condicionada a $A$

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_i x_i \, \mathbb{P}(\{X = x_i\}|A) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)} \leftarrow \text{número}$$

---

$\Omega$  partición de $\Omega$ $\{A_1, \dots, A_r\}$

$\tilde{\mathcal{F}}$ álgebra asociada

$\mathbb{E}(X|\tilde{\mathcal{F}})$ es una variable aleatoria

es constante en cada bloque de la partición

↳ y en $A_j$ toma el valor $\dfrac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A_j)}$

---

Algunas propiedades:

- Si $X$ es $\mathcal{F}$-medible $\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$
- Si $Y$ es $\mathcal{F}$-medible $\Rightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y|\mathcal{F}) = Y \cdot \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
- Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
- Si $X$ es "independiente" de $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}(X = x_i | A_j) = \mathbb{P}(X = x_i)$
  $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$

Si $Q$ es prob. de valoración con respecto de $\mathcal{N}$, y si tenemos una cartera autofinanciada cuyo proceso de valor designamos con $\{V^{t_K}\}_{K=1,\dots,H}$

entonces $$\frac{V^{t_{K-1}}}{\mathcal{N}^{t_{K-1}}} = \mathbb{E}_Q\left(\frac{V^{t_K}}{\mathcal{N}^{t_K}} \,\middle|\, \tilde{\mathcal{F}}_{t_{K-1}}\right) \qquad K=1,\dots,H$$

$\lambda_i^{t_K}$ son de tiempo $t_{K-1}$

demo: $$\mathbb{E}_Q\left(\frac{V^{t_K}}{\mathcal{N}^{t_K}} \,\middle|\, \tilde{\mathcal{F}}_{t_{K-1}}\right) = \mathbb{E}_Q\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_K} \frac{S_i^{t_K}}{\mathcal{N}^{t_K}} \,\middle|\, \tilde{\mathcal{F}}_{t_{K-1}}\right) =$$

martingala

$$= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_K}\, \mathbb{E}_Q\left(\frac{S_i^{t_K}}{\mathcal{N}^{t_K}} \,\middle|\, \tilde{\mathcal{F}}_{t_{K-1}}\right) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_K} \frac{S_i^{t_{K-1}}}{\mathcal{N}^{t_{K-1}}} =$$

autofinanciada

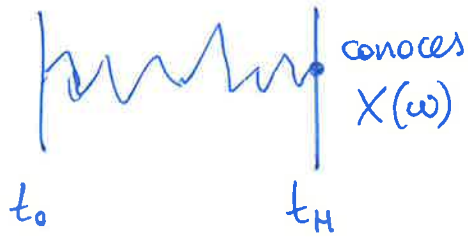
$$= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^{t_{K-1}} \frac{S_i^{t_{K-1}}}{\mathcal{N}^{t_{K-1}}} = \frac{V^{t_{K-1}}}{\mathcal{N}^{t_{K-1}}}. \qquad \blacksquare$$

Si para un numerario $\mathcal{N}$ hay una $Q$ de valoración, en particular, para cualquier cartera autofinanciada con $\{V^{t_K}\}$

en realidad es $\Longleftrightarrow$

$$\frac{V^{t_0}}{\mathcal{N}^{t_0}} = \mathbb{E}_Q\left(\frac{V^{t_H}}{\mathcal{N}^{t_H}}\right) \Longrightarrow \text{¡AOA!}$$

Si $X$ es replicable (con una cartera autofinanciada con proceso de valor $\{V^{t_K}\}$)




entonces:

no arbitraje

martingala

$$\boxed{\text{precio}(X) = V^{t_0} = \mathcal{N}^{t_0}\, \mathbb{E}_Q\left(\frac{V^{t_H}}{\mathcal{N}^{t_H}}\right) = \mathcal{N}^{t_0}\, \mathbb{E}_Q\left(\frac{X^{t_H}}{\mathcal{N}^{t_H}}\right)}$$

(no hace falta especificar la cartera de réplica)

# 3.2. El modelo binomial

① **Tiempos** $\longrightarrow$ fijamos $\Delta t$, unidad de tiempo (parámetro estructural)

Con $N$ saltos llegamos a 1 año

$N \cdot \Delta t = 1$ año

Tiempos: $t_j = j \cdot \Delta t \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$

② **Activos básicos**: sólo dos!

- $\longrightarrow$ activo sin riesgo $\longrightarrow$ cuenta bancaria: $B_j$
- $\longrightarrow$ activo con riesgo $\longrightarrow$ $S$ subyacente

  cotización en $t_j$: $S_j$

**Objetivo**: valorar opción sobre el subyacente con vencimiento $T = M \cdot \Delta t$

③ **Datos de mercado**

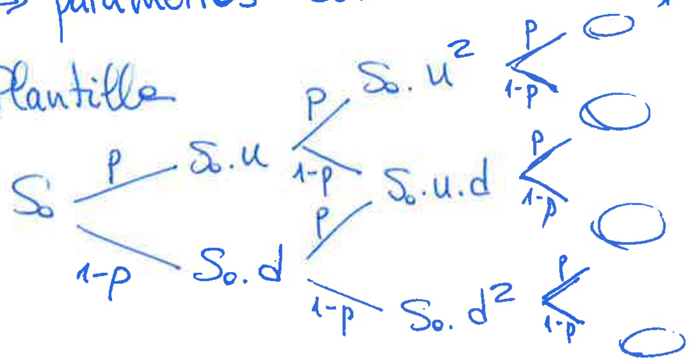
- cotización hoy subyacente $\longrightarrow S_0$
- tipo de interés (anual, continuo) $\longrightarrow R$
- volatilidad anual del subyacente $\longrightarrow \sigma$

④ **Evolución de los activos básicos**

- CB: $\quad B_j = e^{R \cdot j \cdot \Delta t} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$
- $S$: $\quad S_j = \begin{cases} S_{j-1} \cdot u, & \text{con prob. } p \\ S_{j-1} \cdot d, & \text{con prob. } 1-p \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ parámetros del modelo: $u, d, p$ (prob.) $\qquad 0 < d < u$

Plantilla



$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ escenarios

$\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ $\quad \varepsilon_j = \pm 1$ (up, down)

Si llega hasta $M \longrightarrow 2^M$ escenarios

$P$, probabilidad $\quad P(\omega) = p^{\#1\text{'s en } \omega} \cdot (1-p)^{\#0\text{'s en } \omega}$

$Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ variables de estado

$$Y_j = \begin{cases} +1, & \text{prob } p \\ -1, & \text{prob } 1-p \end{cases} \quad \text{indep.}$$

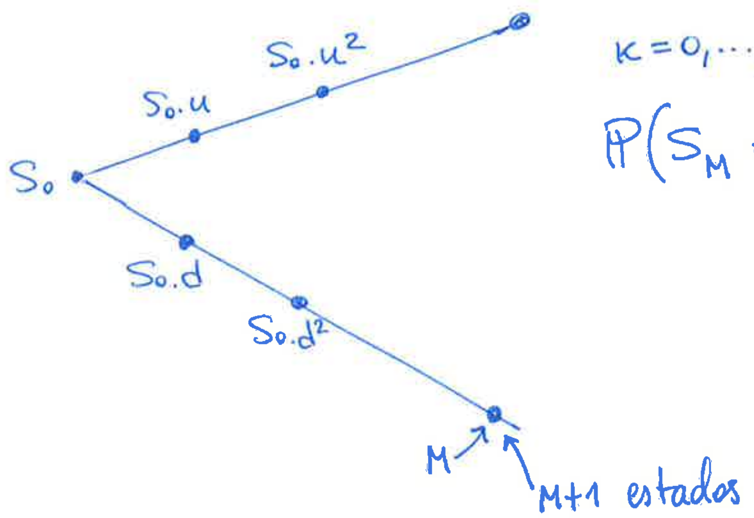
$$\mathbb{E}(Y_j) = 2p-1$$

$\sum_j Y_j \longrightarrow$ camino aleatorio

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \dots \quad \mathcal{F}_j = \sigma(Y_1 \dots Y_j)$

$$S_j = \begin{cases} S_{j-1} \cdot u, & \text{prob } p. \\ S_{j-1} \cdot d, & \text{prob } 1-p \end{cases}$$

$$S_j = S_{j-1}\left[u\left(\frac{Y_j+1}{2}\right) - d\left(\frac{Y_j-1}{2}\right)\right]$$




$k = 0, \dots, M$

$$\mathbb{P}(S_M = S_0 . u^k . d^{M-k}) =$$

$$= \binom{M}{k} \underbrace{p^k (1-p)^{M-k}}_{\downarrow}$$

probs. de la Bin(M, p)

Escogemos como numerario la cuenta bancaria CB.

¿Prob. $\mathbb{P}$ para que sea de valoración?

$$\frac{S_j}{e^{(j-1)R.\Delta t}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{S_j}{e^{j.R.\Delta t}} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right)$$

$$\frac{1}{e^{j.R.\Delta t}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_j | \mathcal{F}_{j-1}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(S_{j-1}\left[u\,\frac{Y_j+1}{2} - d\,\frac{Y_j-1}{2}\right] \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right) =$$

$S_{j-1} \in \mathcal{F}_{j-1}$
$$= S_{j-1}\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(u\,\frac{Y_j+1}{2} - d\,\frac{Y_j-1}{2} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right) =$$

indep. de $Y_j$
$$= S_{j-1}\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(u\,\frac{Y_j+1}{2} - d\,\frac{Y_j-1}{2}\right) = S_{j-1}\left[\frac{u}{2}\cdot 2p - \frac{d}{2}(2p-2)\right] =$$

$$= S_{j-1}\left[up + d(1-p)\right]$$

Ha de cumplirse que:

$$\frac{S_{j-1}}{e^{(j-1)R.\Delta t}} = \frac{S_{j-1}}{e^{j.R.\Delta t}}\left[up + d(1-p)\right]$$

$$\boxed{e^{R.\Delta t} = up + d(1-p)} \quad \underline{AOA}$$

Si C activo replicable, su proceso de precios:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{C_j}{e^{j.R.\Delta t}} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right) = \frac{C_{j-1}}{e^{(j-1)R.\Delta t}} \Longrightarrow \boxed{e^{-j.R.\Delta t}\cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(C_j) = C_0}$$

<u>Volatilidad</u> $\quad \sigma^2 = \mathbb{V}\left(\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right)\right)$

truco: $$\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right) = \ln\left(\frac{S_N}{S_0}\cdot\frac{S_2}{S_1}\cdots\frac{S_N}{S_{N-1}}\right) = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right)$$

→ en términos de $u, p, d$.

$$\boxed{\sigma\sqrt{\Delta t} = \sqrt{p(1-p)}\,(\ln u - \ln d)}$$

Tenemos dos ecuaciones (no lineales) y 3 incógnitas

→ numérico

→ $ud = 1$ (Cox-Ross-Rubinstein)

↳ resolución (casi) exacta

→ $p = 1/2$ (Jarrow-Rudd)

En este último caso:
$$\begin{cases} e^{R\Delta t} = \dfrac{u+d}{2} \\ \sigma\sqrt{\Delta t} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{u}{d}\right) \end{cases}$$

Resolvemos:

$$2\sigma\sqrt{\Delta t} = \ln(u/d) \Longrightarrow e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{u}{d} \Longrightarrow d = u e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$e^{R.\Delta t} = \frac{u}{2}\left(1 + e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) \Longrightarrow u = e^{R.\Delta t}\frac{2}{1+e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}}} =$$

$$= e^{R.\Delta t} \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \cdot \frac{2}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}$$

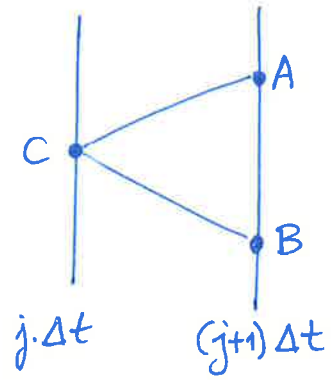
Solución (fórmula):
$$\begin{cases} u = e^{R.\Delta t}\, e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}\, \dfrac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})} \\ d = \underbrace{e^{R.\Delta t}}_{\text{"deriva" por tipos}}\, \underbrace{e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}_{\text{efecto up/down de la volatilidad}} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}}_{\text{ajuste de convexidad}} \end{cases}$$

# Valoración de opciones europeas

Call → vencimiento $T = M \cdot \Delta t$
→ strike $K$

flujo: $(S_T - K)^+$

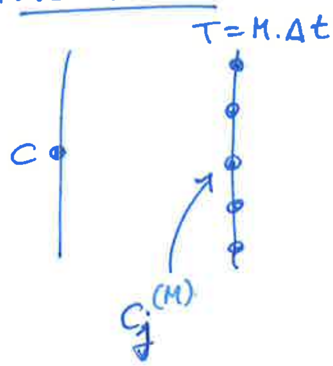
Clave:




$$\frac{C}{e^{j \cdot \Delta t \cdot R}} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{e^{(j+1)\cdot \Delta t \cdot R}} + \frac{B}{e^{(j+1)\cdot \Delta t \cdot R}}\right)$$

$$\boxed{C = e^{-R \cdot \Delta t} \cdot \frac{A+B}{2}}$$

Más directa




precio call

$$C = e^{-R \cdot M \cdot \Delta t}\, \mathbb{E}_P(C)$$

flujo call

probs de Bin$(M, \frac{1}{2})$

$$\text{precio call} = \sum_{j=0}^{M} C_j^{(M)} \cdot \binom{M}{j} \cdot \frac{1}{2^j}$$

## Preguntas

1. Hay para call, explícita. Depende de $\Delta t$
   ¿Qué pasa si $\Delta t \longrightarrow 0$?
2. ¿Qué pasó con la replicación?
3. ¿Y si no son europeas? → el flujo de opción depende de la senda.

RECUERDO:

Situación: Call con vencimiento $T$ $\quad T = M.\Delta T$
strike $K$ $\quad N.\Delta t = 1$

Registramos los valores de $S_T$:

$$A(\sigma) := \frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})} \quad ; \quad \underset{j=0\ldots M}{S_j} = S_0\left(e^{R.\Delta t}.e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}.A(\sigma)\right)^j\left(e^{R.\Delta t}.e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.A(\sigma)\right)^{M-j}$$

$$= S_0\, e^{R.M.\Delta t}.A(\sigma)^M.e^{(2j-M)\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Así que: $\text{precio call} = e^{-M.R.\Delta t}\sum_{j=0}^{M}\binom{M}{j}\frac{1}{2^j}\cdot$

$$\cdot\left(S_0\, e^{M.R.\Delta t}.A(\sigma)^M.e^{(2j-M)\sigma\sqrt{\Delta t}} - K\right)^+$$

¿Podemos hacer $\Delta t \longrightarrow 0$?

Fijamos $T$, $T = \underset{\infty}{\overset{\downarrow}{n}}.\underset{0}{\overset{\downarrow}{\Delta t}}$ $\qquad \sqrt{\Delta t} = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{n}}$

$$\boxed{S_T^{(n)} = S_0\, e^{R.T.}\frac{1}{\cosh^n(\sigma\sqrt{\Delta t})}e^{\sigma\sqrt{\Delta t}.Z_n}}, \text{ con } Z_n = \sum_{j=1}^n X_j,\ X_j = \begin{cases} +1, & \text{prob. } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{prob } \frac{1}{2}\end{cases}$$

independientes

$\mathbb{E}(Z_n) = 0$ $\qquad \mathbb{E}(X_j) = 0$

$\mathbb{V}(Z_n) = n$ $\qquad \mathbb{V}(X_j) = \mathbb{E}(X_j^2) = 1$

Hacemos $n \to \infty$, $\Delta t \to 0$, $n.\Delta t = T$

① $\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})^n = \cosh\left(\sigma\sqrt{T}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{e^{\sigma^2.T/2}}$

$$\cosh\left(\frac{A}{\sqrt{n}}\right)^n \sim \left(1+\frac{A^2}{2n}\right)^n \sim e^{A^2/2}$$

② ¿cómo es la variable $W_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}.Z_n} = e^{\sigma\sqrt{T}.\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}$

a) $\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$ (TCL)

b) (para vosotros) $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} e^{\sigma\sqrt{T}.Z}$, con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Por tanto, $\boxed{S_T^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} S_0.e^{RT}.e^{-\sigma^2 T/2}.e^{\sigma\sqrt{T}.Z},\quad Z\sim\mathcal{N}(0,1)}$

③ (para vosotros) Entonces:

$$\mathbb{E}\left(\left(S_T^{(n)}-K\right)^+\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left(\left(S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T}\cdot e^{\sigma\sqrt{T}\cdot z}-K\right)^+\right)$$

Ojo: convergencia

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X \quad \not\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left(f(X)\right)$$

hay que controlar "colas"

$$\text{precio call}_n = e^{-R.T}\,\mathbb{E}\left(\left(S_T^{(n)}-K\right)^+\right) \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-R.T.}\,\mathbb{E}\left(\left(S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T}\, e^{\sigma\sqrt{T}\, z}-K\right)^+\right) =$$

$$= e^{-R.T}\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T}\, e^{\sigma\sqrt{T}\, z}-K\right)^+ \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz$$

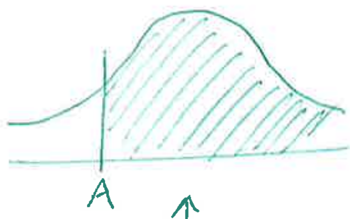
¿Somos capaces de "hacer" la integral $I$?

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T}\cdot e^{\sigma\sqrt{T}\, z}-K\right)^+ \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz$$

Pasos:

1. Quitar parte positiva:

$$I = \int_A^{\infty}\left(\quad\right)\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz$$




2. Separar la resta en dos integrales:

$$\underbrace{\int_A^{\infty} S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T}\cdot e^{\sigma\sqrt{T}\, z}\cdot\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz}_{\text{"casi inmediata"}} - K\underbrace{\int_A^{\infty}\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz}_{=1-\Phi(A)=\Phi(-A)}$$

completar cuadrados: $S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T}\displaystyle\int_A^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T}\, z}\,\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz$

$$S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T}\, e^{\sigma^2 T}\int_A^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Falta cambio variables

Finalmente,

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \text{precio call} &= S_0\,\Phi(d_+) - Ke^{-R.T}\,\Phi(d_-) \\ d_\pm &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-RT}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \end{aligned}}$$

FÓRMULA DE BLACK - SCHOLES PARA LA CALL EUROPEA

RECUERDO:

Modelo binomial

$$\Delta t \quad \left\{\begin{array}{l} R \\ S_0 \\ \sigma \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u \\ d \\ p = 1/2 \end{array}\right. \qquad \text{Jarrow-Rudd}$$

precio call europea, vencimiento $T = M.\Delta t$, strike $K$

$$\text{precio call} = e^{-M.R.\Delta t} \sum_{j=0}^{M} \binom{M}{j} \frac{1}{2^M} \left(S_0 e^{RM\Delta t} A(\sigma)^M e^{(2j-M)\sigma\sqrt{\Delta t}} - K\right)^+$$

$$A(\sigma) = \frac{1}{\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t})}$$

Cuando $\Delta t \longrightarrow 0$ :

$$e^{-Rt} \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T} z} - K\right)^+ \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T} z} - K\right)^+ \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz$$

$$S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T} z} - K \geq 0$$

$$z \geq \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{Ke^{-RT}}{S_0}\right) + \frac{\sigma^2}{2}T\right)}_{:=A}$$

$$= \int_{A}^{\infty} \left(S_0\, e^{(R-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T} z} - K\right) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz =$$

$$= S_0\, e^{(R-\frac{\sigma^2}{2})T} \underbrace{\int_A^\infty e^{\sigma\sqrt{T}z} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz}_{:= I_1} - K \underbrace{\int_A^\infty \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz}_{:= I_2}$$

$$I_2 = 1-\Phi(A) = \Phi(-A)$$

$$I_1 = \int_A^\infty e^{\sigma\sqrt{T}z} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz =$$

$$\sigma\sqrt{T}z - \frac{1}{2}z^2 = \frac{-1}{2}\left(z^2 - 2\sigma\sqrt{T}z\right) = \frac{-1}{2}\left[(z-\sigma\sqrt{T})^2 - \sigma^2 T\right]$$

$$= e^{\sigma^2 T} \int_A^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz = e^{\sigma^2 T} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A-\sigma\sqrt{T}}^\infty e^{-\frac{1}{2}w^2}\, dw}_{:= 1-\Phi(A-\sigma\sqrt{T})}$$

Black-Scholes

$$\boxed{\begin{aligned} \text{precio call}_{BS} &= S_0\,\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\,\Phi(d_-) \\ d_\pm &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-rT}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{precio put}_{BS} &= \text{precio call}_{BS} - S_0 + Ke^{-rT} = \\ &= Ke^{-rT}\,\Phi(-d_-) - S_0\,\Phi(-d_+) \end{aligned}}$$

## Observaciones

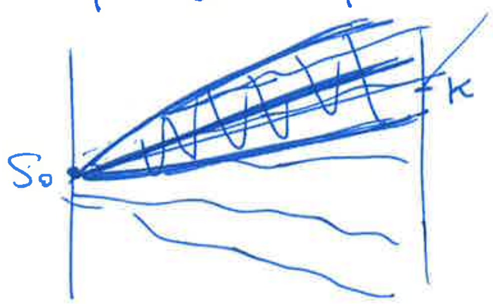
- Black-Scholes 1973 — Merton (1973), Samuelson

- Es una fórmula, con cinco parámetros: $R, \sigma, S_0, K, \boxed{T}$ ← a veces $T-t$

$$\text{CALLBS}(R, \sigma, S_0, K, T) \quad \text{¡complicada!}$$
$$\| $$
$$S_0\,\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\,\Phi(d_-)$$

pero con estructura un "balance" entre $S_0$ y $Ke^{-rT}$ con "coeficientes" numéricos entre 0 y 1.

¿De qué no depende la fórmula?




$S_0$, $\mu$, $\sigma$

$\mu$, $\sigma$ ↑ inputs fundamentales

- Son cinco parámetros, pero... no son tantos.

$$\frac{\text{call}_{BS}}{S_0} = \Phi(d_+) - \frac{Ke^{-rT}}{S_0}\Phi(d_-)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} m = \ln\left(\frac{Ke^{-rT}}{S_0}\right) & \longrightarrow \text{"moneyness"} \\ \text{vola} = \sigma\sqrt{T} & \longrightarrow \text{"volatilidad acumulada"} \end{array}\right.$$

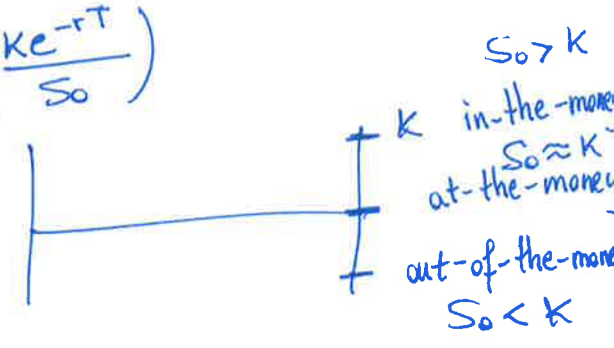
$$\| $$

$$\Phi\left(\frac{m}{\text{vola}} + \frac{\text{vola}}{2}\right) - e^{m}\,\Phi\left(\frac{m}{\text{vola}} - \frac{\text{vola}}{2}\right)$$

→ DEFS. DE "MONEYNESS"

medidas de posiciones relativas de $S_0$ y $K$.

$$\frac{K}{S_0} \;/\; \frac{Ke^{-rT}}{S_0} = \frac{K}{S_0 e^{rT}} \;/\; \ln\left(\frac{Ke^{-rT}}{S_0}\right)$$



$$\text{call}_{BS}(R, \sigma, S_0, T, K) = S_0\,\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\,\Phi(d_-)$$

$$d_\pm = \frac{\ln\left(\frac{Ke^{-rT}}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Reflexión sobre validez/uso:

→ 1973, modelo
→ 1987, crisis bursátil mundial (Black Monday)

Subyacente $S$, tiene asociada una volatilidad $\sigma$ →
→ $\sigma$ se usa como input en las fórmulas BS
↳ precios calls/puts con diversos $T$ y $K$.

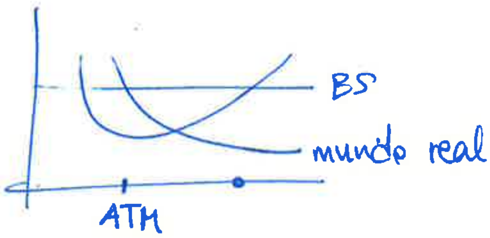
Uno puede usarla "al revés" → calcular el valor de $\sigma$ (volatilidad "implícita") que produce el precio de mercado

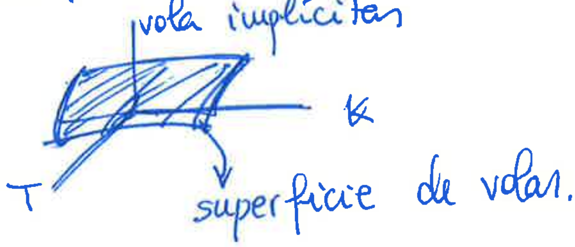
numérico

↳ hasta el 87 (más o menos)

para un mismo subyacente, todas las calls/puts daban la misma volatilidad implícita.

De hecho, la realidad:




Uso de BS → son cotizadores de volatilidad

Traducen precios → volatilidades ← "temporales"

no homogéneos
distintos $K$ y $T$

Otra reflexión: sensibilidades / derivadas / "griegas"

$\text{call}_{BS}(R, S_0, \sigma, T, K)$

$$\frac{\partial}{\partial S_0}\,\text{call}_{BS} = \Phi(d_+) > 0$$

entre 0 y 1.

Permite "intuiciones": $T, \sigma, R, K$ fijos

$$S_0 \longrightarrow S_0 + \Delta S \quad \leftarrow \text{pequeño}$$

$$\text{call}_{BS}(S_0) \qquad \text{call}_{BS}(S_0+\Delta S) \approx \text{call}_{BS}(S_0) + \Delta S \cdot \Phi(d_+)$$

$\frac{\partial}{\partial S_0}\text{call}_{BS}$ — delta (mide crecimiento)

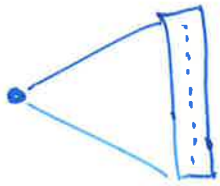
$\frac{\partial}{\partial \sigma}\text{call}_{BS}$ — vega

$\frac{\partial}{\partial^2 S_0}\text{call}_{BS}$ — gamma (mide convexidad)

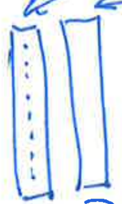
---

<u>Binomial</u> $\quad \Delta t \begin{cases} R \\ S_0 \\ \sigma \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u \\ d \\ p = 1/2 \end{cases}$

árbol $S$



<u>call</u>



flujos

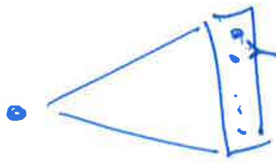
probs

$P$

$$\text{prima call} = e^{-R \cdot M \cdot \Delta t}\,\mathbb{E}_{P}(\text{flujos})$$

$$e^{-R.\Delta t}\,\mathbb{E}_{P}(\text{flujos})$$

prima

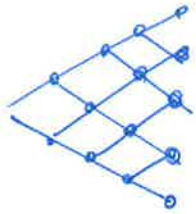


"debería" bastar para diseñar una cartera (autofinanciada) que, pase lo que pase, cubra / replique los flujos de la call.

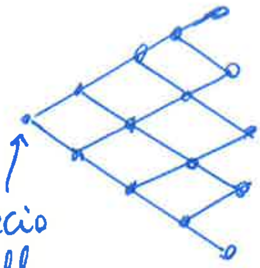
¿Libro de instrucciones?

Tenemos:

árbol del subyacente



árbol de valoración de la call



precio call

$$e^{-R.\Delta t}\,\mathbb{E}_P(\text{flujos})$$

<u>CARTERA DE COBERTURA</u>: miramos un nodo cualquiera

$$S \begin{cases} S.u \\ S.d \end{cases} \qquad 1 \begin{cases} e^{R.\Delta t} \\ e^{R\Delta t} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_u \\ C_d \end{cases}$$

subyacente ↑ compramos $\alpha$ de subyacente

CB ↑ $\beta$ de dinero

$$\begin{cases} \alpha . S.u + \beta e^{R\Delta t} = C_u \\ \alpha S.d + \beta e^{R.\Delta t} = C_d \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{C_u - C_d}{Su - Sd}} \qquad \beta = \cdots$$

"delta de la opción"

Ejemplo:

$$S \quad 100 \begin{cases} 108 \begin{cases} 117 \\ 101 \end{cases} \\ 94 \begin{cases} 101 \\ 83 \end{cases} \end{cases}$$

$$C \quad 8'3 \begin{cases} 9'5 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \\ 6'4 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad 0'7 \begin{cases} 0'8 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \\ 0'4 \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$0'7 = \frac{9'5 - 6'4}{108 - 94} \qquad 0'8 = \frac{0 - 0}{117 - 101} \qquad 0'4 = \frac{0 - 0}{101 - 83}$$

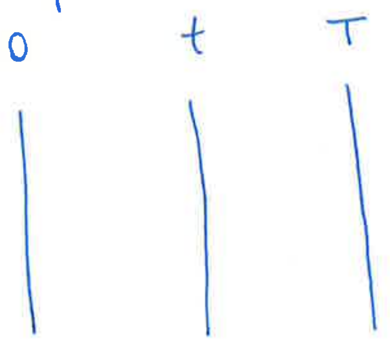
## 3.3. Opciones Americanas (calls/puts)

$\left\{\begin{array}{ll} \text{subyacente} & \\ \text{vencimiento} & T \\ \text{strike} & K \end{array}\right.$

Call/put americana: da derecho a comprar/vender el subyacente a precio K en cualquier instante entre 0 y T.

En principio, la americana da más derechos que la europea $\Longrightarrow$ precio americana $\geq$ precio europea.

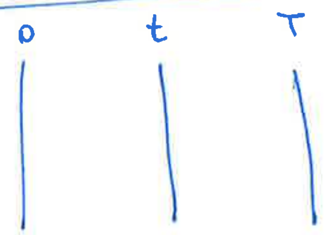
Aunque:




paridad call/put (europea): $c(0) - p(0) = \underset{S(0)}{\overset{\shortparallel}{S_0}} - Ke^{-rT}$

También: $c(t) - p(t) = S(t) - Ke^{-r(T-t)}$, $0 \leq t \leq T$

Call americana (tipos positivos)




Ejercer la opción en $t$ paga $(S(t)-K)^+$

$$c(t) = \underset{\substack{\vee\!\shortmid \\ 0}}{p(t)} - S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

$$\geq S(t) - K\underbrace{e^{-r(T-t)}}_{\leq 1}$$

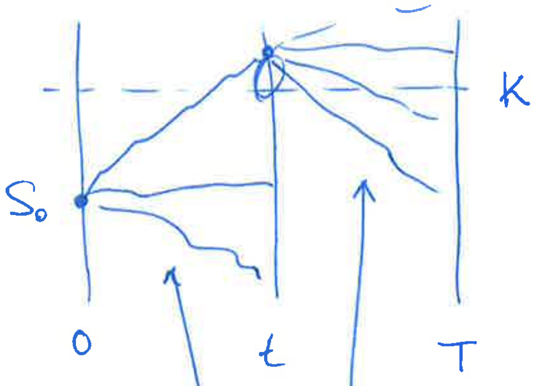
$$\geq S(t) - K$$

No conviene ejercer antes de T $\Longrightarrow$ precio call americana $=$ precio call europea

¡Ojo! No funciona para la put.
No funciona si hay dividendos.

¿Tipos negativos?

¿Cómo valorar opción americana?




irreversible

¿cómo comparar? → Valor de ejercicio
→ valoración "de esperar"

- Ejemplo de la llegada de ofertas: te llegarán 10 ofertas, secuencialmente, $O_{10} \longrightarrow O_1$

son aleatorias independientes UNIF $[0,1]$ ¿Cómo gestionar?

última oferta → umbral de aceptación $= 0$ (hay que aceptarla)
→ valor $= 1/2$ (la esperanza)

penúltima oferta → rechazar: si $O_2 < 0'5$
→ aceptar: si $O_2 > 0'5$
$\Rightarrow$ umbral de aceptación $= 0'5$

→ valor: $V_2 = \mathbb{P}(O_2 \geq 1/2) \cdot \mathbb{E}(O_2 | O_2 \geq 1/2) + \mathbb{P}(O_2 < 1/2) \cdot \underbrace{V_1}_{\text{valor de rechazar } O_2 \text{ y aceptar } O_1} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{5}{8} = 0'625$

REGLA RECURRENTE

En general, $\underset{\text{umbral aceptación}}{u_K} = \underset{\text{valor}}{V_{K-1}}$

$$V_K = \underbrace{\mathbb{E}(O_K | O_K \geq V_{K-1})}_{\frac{1+V_{K-1}}{2}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(O_K \geq V_{K-1})}_{1-V_{K-1}} + V_{K-1} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(O_K < V_{K-1})}_{V_{K-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_K = \frac{1+V_{K-1}^2}{2}}$$

# VALORACIÓN DE AMERICANAS EN EL ÁRBOL

Put $V_n(S_n)$ = valor americano en paso $n$ si cotización es $S_n$

Punto de vista del poseedor de la opción, en tiempo $n$.

$$\to \text{ejercer} \longrightarrow VE_n(S_n) = (K - S_n)^+$$

$$\to \text{continuar} \longrightarrow VC_n(S_n) = e^{-R\Delta t}\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(V_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) =$$

valor continuación

$S_n$

$$= e^{-R\Delta t}\left[\frac{1}{2} V_{n+1}(S_n \cdot u) + \frac{1}{2} V_{n+1}(S_n \cdot d)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{V_n(S_n) = \text{máx}\{VE_n(S_n), VC_n(S_n)\}}$$

A vencimiento, $V_N(S_N) = (K - S_N)^+$

## Problema de los currículos

Recibimos $N$ currículos : $1, \dots, N$ ← mejor

Se reciben permutados (permutaciones) $\boxed{1\ 3\ 6\ 5\ 4\ 2}$

¿Estrategia óptima para seleccionar el mejor (posible)?

Probabilidad uniforme en el conjunto de las permutaciones de $\{1, \dots, N\}$. $\Pi := (x_1, -, x_N)$ ← permutación aleatoria

$x_j(\pi) :=$ símbolo en posición $j$.

$$\mathbb{P}(x_j = k) = \frac{1}{N} = \frac{(N-1)!}{N!}$$

$$\mathbb{P}(x_i = n, x_j = k) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1}$$

$$\mathbb{P}(\text{máx}\{x_1, \dots, x_N\} = x_j) = \frac{1}{N}$$

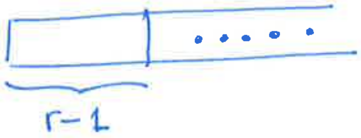
$$\mathbb{P}(\text{máx}\{x_1, \dots, x_a\} = x_j) = \frac{1}{a} \quad j \in \{1, \dots, a\}$$

$$\mathbb{P}(\text{máx}\{x_1, \dots, x_a\} = \text{máx}\{1, \dots, x_b\}) = \frac{a}{b}$$

$$\mathbb{P}(\text{máx}\{x_1, \dots, x_a\} = \text{máx}\{x_1, \dots, x_b\} \mid \text{máx}\{x_1, \dots, x_N\} = x_{b+1}) = \frac{a}{b}$$

Estrategia : fijamos $2 \le r \le N$

$E_r$

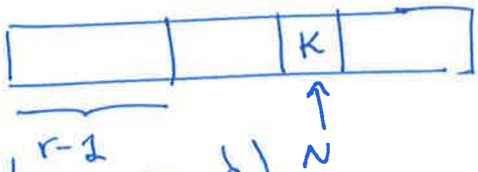



los miramos y los tiramos

Paras en el primer CV que sea mejor que los anteriores. (o la última N)

La estrategia $E_r$ se para en cierto $k$, con $r \le k \le N$.

¿Cuándo $E_r$ tiene éxito en $k$? capturar el mejor




$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} E_r \text{ éxito} \\ \text{en } k \end{pmatrix} = \mathbb{P}\begin{pmatrix} \max\{X_1,\dots,X_{r-1}\} = \max\{X_1,\dots,X_{k-1}\} \\ \text{y} \quad \max\{X_1,\dots,X_N\} = X_k \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbb{P}\big(\max\{X_1,\dots X_{r-1}\} = \max\{X_1,\dots,X_{k-1}\} \,\big|\, \max\{X_1,\dots,X_N\} = X_k\big) \cdot$$

$$\cdot\ \mathbb{P}\big(\max\{X_1,\dots,X_N\} = X_k\big) = \boxed{\frac{r-1}{k-1}} \cdot$$

$$\mathbb{P}(E_r \text{ éxito}) = \sum_{k=r}^{N} \frac{r-1}{k-1} \cdot \frac{1}{N} = \frac{r-1}{N} \sum_{k=r}^{N} \frac{1}{k-1} = \frac{r-1}{N} \sum_{k=r-1}^{N-1} \frac{1}{k}$$

$\parallel$

$\varphi(r)$


$\boxed{r^* \approx \frac{N}{e}}$ $\quad E_{r^*}$ es óptima