RESUMEN DE CONCEPTOS Y RESULTADOS DE LA TEORÍA DE SUPERFICIES REGULARES

1. Superficies regulares

1.1. Concepto de superficie regular y ejemplos. Una *superficie regular* en $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}^3$ tal que para todo punto $p \in S$, existe un abierto U de $\mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de p en S (con la topología relativa de $S \subset \mathbb{R}^3$) y una aplicación $\mathbf{x}\colon U \to V \subset S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. $\mathbf{x}$ es diferenciable como aplicación de $U \subset \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$,
2. $\mathbf{x}\colon U \to V$ es un homeomorfismo,
3. para todo $q \in U$, la diferencial $d\mathbf{x}(q)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La aplicación $\mathbf{x}$ se llama *parametrización* o *sistema de coordenadas (locales)* de S. Su inversa $\mathbf{x}^{-1}\colon V \to U$ se llama *carta (coordenada)*. El abierto V de S se llama *entorno coordenado.*

En general, una superficie regular S puede necesitar más de una parametrización para ser descrita, es decir, puede suceder que $V = \mathbf{x}(U) \subsetneq S$. Es el caso de una esfera, un cilindro, un cono o un hiperboloide de una hoja, por ejemplo. Si una superficie S admite una parametrización $\mathbf{x}$ tal que su imagen sea toda S, necesariamente S es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Sea $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie regular S. Denotemos las coordenadas cartesianas del abierto U de $\mathbb{R}^2$ por (u, v), y sean $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ las componentes de $\mathbf{x}(u, v)$, de modo que $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Entonces, para cada $q = (u, v) \in U$ podemos considerar los vectores de $\mathbb{R}^3$ obtenidos al calcular las derivadas parciales de $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)),$$
$$\mathbf{x}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)).$$

Estos vectores se llaman los *vectores coordenados* en el punto $\mathbf{x}(u, v) \in S$. Puesto que están definidos para todo $(u, v) \in U$, determinan dos campos diferenciables $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$ en el abierto V de S, denominados *campos coordenados* asociados a la parametrización $\mathbf{x}$. Obsérvese que $\mathbf{x}_u(u, v) = d\mathbf{x}(u, v)e_1$ y $\mathbf{x}_u(u, v) = d\mathbf{x}(u, v)e_2$, donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, la condición 3 de la definición de superficie equivale a que $\mathbf{x}_u(u, v)$ y $\mathbf{x}_v(u, v)$ sean linealmente independientes para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Nótese también que el campo $\mathbf{x}_u$ es tangente a las curvas obtenidas como imagen por $\mathbf{x}$ de los segmentos de rectas horizontales $v =$ constante, mientras que $\mathbf{x}_v$ es tangente a la imagen por $\mathbf{x}$ de los segmentos de rectas verticales $u =$ constante.

Dos importantes familias de ejemplos de superficies regulares son las siguientes:

1. Los *grafos* de funciones diferenciables: si U es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces el conjunto $G(f) = \{(u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in U\}$ es una superficie regular.
2. Las *superficies de nivel* de valores regulares de funciones diferenciables: si $f\colon V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f (es decir, $df(q) \neq 0$ para todo $q \in f^{-1}(a)$), entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular.

1.2. Funciones diferenciables definidas en superficies. Sea S una superficie regular. Una función $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ se dice *diferenciable* si, para toda parametrización $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ de S, la función $f \circ \mathbf{x}\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable. La restricción $F|_S$ de una función diferenciable F definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a S, o la suma, producto y cociente (siempre que tenga sentido) de funciones diferenciables en S son siempre funciones diferenciables en S.

Sea ahora $f\colon S_1 \to S_2$ una aplicación entre dos superficies regulares S_1 y S_2. Diremos que f es *diferenciable* si, para cada $p \in S_1$ hay una parametrización $\mathbf{x}_1\colon U_1 \to S_1$ con $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ y una parametrización $\mathbf{x}_2\colon U_2 \to S_2$ con $f(p) \in \mathbf{x}_2(U_2)$ tales que $\tilde{f} := \mathbf{x}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}_1$ es diferenciable como aplicación entre dos abiertos de $\mathbb{R}^2$. La aplicación $\tilde{f}$ se llama *expresión en coordenadas* de la función f. La composición de funciones diferenciables entre superficies es diferenciable.

Una aplicación $f\colon S_1 \to S_2$ entre dos superficies regulares es un *difeomorfismo* si f es homemorfismo y tanto f como f^{-1} son funciones diferenciables. Diremos que dos superficies son *difeomorfas* si existe un difeomorfismo entre ellas.

1.3. El plano tangente. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y $p \in S$. Un vector $x \in \mathbb{R}^3$ diremos que es un *vector tangente* a S en p si existe una curva diferenciable $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. En esta definición se puede tomar cualquier otro intervalo de definición para α y cualquier t_0 en dicho intervalo en vez de 0, simplemente reparametrizando la curva.

El subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por todos los vectores tangentes en p a S

$$T_pS = \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S \text{ diferenciable tal que } \alpha(0) = p,\ \alpha'(0) = x\}$$

resulta ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 y, de hecho,

$$T_pS = d\mathbf{x}(q)(\mathbb{R}^2),$$

para cualquier parametrización $\mathbf{x}\colon U \to S$, y donde $q \in U$ es tal que $\mathbf{x}(q) = p$. Al subespacio vectorial T_pS se le llama *plano tangente* (o *espacio tangente*) a S en p. Al plano afín $p+T_pS$ le llamamos *plano tangente afín* a S en p.

Podemos considerar el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ perpendicular a T_pS:

$$(T_pS)^\perp := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, y\rangle = 0, \text{ para todo } y \in T_pX\},$$

que se llama *recta normal* (o *espacio normal*) a S en p, mientras que sus elementos se llaman *vectores normales* a S en p. Así, para cada $p \in S$, se puede escribir la suma directa ortogonal $\mathbb{R}^3 = T_pS \oplus (T_pS)^\perp$. Además, para cada $p \in S$ existen exactamente dos vectores unitarios en $(T_pS)^\perp$, uno opuesto del otro; cada uno de ellos se llama *vector normal unitario* a S en p, y, una vez escogido uno de los dos, se suele denotar por $N(p)$.

1.4. Diferencial de una aplicación definida en una superficie. Sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en una superficie regular S, y sea $p \in S$. La *diferencial* de f en p es la aplicación lineal

$$df(p)\colon T_pS \to \mathbb{R}, \qquad df(p)x := (f \circ \alpha)'(0),$$

donde $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ es una curva diferenciable en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$. Se prueba que $df(p)x$ está así bien definida, es decir, $(f \circ \alpha)'(0)$ es independiente de la curva α elegida (siempre que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$).

Si $\mathbf{x}$ es una parametrización de S alrededor de p, i.e. $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ para cierto (u_0, v_0), entonces la matriz asociada a la aplicación lineal $df(p)$ en la base $\{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\}$ es la matriz fila $((f \circ \mathbf{x})_u(u_0, v_0), (f \circ \mathbf{x})_v(u_0, v_0))$.

Sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Entonces, si f es constante, $df(p) = 0$ para todo $p \in S$; recíprocamente en el caso en que S sea conexa, si $df(p) = 0$ para todo $p \in S$ entonces f es constante en S. Si f tiene un extremo relativo en p, entonces $df(p) = 0$.

Sea ahora $f\colon S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable entre dos superficies regulares, y $p \in S_1$. Se define la *diferencial* de f en p como la aplicación lineal

$$df(p)\colon T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2, \qquad df(p)x := (f \circ \alpha)'(0),$$

donde $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ es una curva diferenciable en S_1 tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$. Al igual que arriba, esta definición es independiente de α.

Sea $f\colon S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable entre superficies, y $p \in S_1$. Consideremos parametrizaciones $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ de S_1 y S_2 alrededor de p y $f(p)$, respectivamente. Entonces la expresión en coordenadas $\tilde{f} = \mathbf{x}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}_1$ de f se puede escribir como $\tilde{f}(u, v) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$ para ciertas funciones reales diferenciables $\bar{u}$ y $\bar{v}$ de dos variables. Así, la matriz asociada a la diferencial de f en $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ con respecto a la base de vectores coordenados $\{(\mathbf{x}_1)_u(q_1), (\mathbf{x}_1)_v(q_1)\}$ de T_pS_1 y la base de vectores coordenados $\{(\mathbf{x}_2)_{\bar{u}}(q_2), (\mathbf{x}_2)_{\bar{v}}(q_2)\}$ de $T_{f(p)}S_2$, donde $q_1 = (u_0, v_0)$ y $q_2 = (\bar{u}(u_0, v_0), \bar{v}(u_0, v_0))$, es la matriz jacobiana

$$df(p) \equiv \begin{pmatrix} \bar{u}_u(u_0, v_0) & \bar{u}_v(u_0, v_0) \\ \bar{v}_u(u_0, v_0) & \bar{v}_v(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

donde, como de costumbre, los subíndices u y v denotan derivada parcial con respecto a u o v, respectivamente.

La diferencial de aplicaciones entre superficies cumple la regla de la cadena. Es decir, si $f\colon S_1 \to S_2$ y $g\colon S_2 \to S_3$ son aplicaciones diferenciables entre superficies, entonces

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p), \qquad p \in S_1.$$

Se tiene también que si $f\colon S_1 \to S_2$ es una aplicación diferenciable y $p \in S_1$, entonces f es un *difeomorfismo local* en p (es decir, existe un entorno abierto V de p en S_1 tal que que $f|_V\colon V \to f(V)$ es difeomorfismo entre superficies) si y solo si $df(p)\colon T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

1.5. Primera forma fundamental. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, y $p \in S$. La *primera forma fundamental* de S en p es la forma bilineal simétrica definida positiva

$$\mathrm{I}_p\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{I}_p(x,y) := \langle x, y\rangle.$$

Es decir, no es más que el producto interior de $\mathbb{R}^3$ restringido a cada plano tangente. A veces se le llama primera forma fundamental a la forma cuadrática asociada, $x \in T_pS \mapsto \mathrm{I}_p(x,x) = \langle x, x\rangle$.

Si nos dan una parametrización $\mathbf{x}\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de S, y $p = \mathbf{x}(u_0, v_0) \in S$, entonces podemos calcular la matriz de la primera forma fundamental de S en p en la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_u(u_0,v_0), \mathbf{x}_v(u_0,v_0)\}$ de vectores coordenados, calculando

$$(\mathrm{I}_p)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle \end{pmatrix},$$

donde hemos eliminado la dependencia en las coordenadas (u_0, v_0) de p para no recargar la notación. A menudo escribiremos simplemente

$$\mathrm{I} \equiv \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle \end{pmatrix}, \tag{1}$$

donde el símbolo $\equiv$ significa que identificamos una aplicación bilineal con su matriz asociada en una determinada base, que debe quedar clara en cada contexto (aquí se trata de la base de vectores coordenados). Así, si $x, y \in T_pS$ tienen coordenadas respectivas (x^1, x^2) y (y^1, y^2) en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, se tiene que

$$\mathrm{I}_p(x,y) = \langle x, y\rangle = (x^1, x^2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Aquí hay que prestar atención a que al escribir $\langle x, y\rangle$ estamos refiriéndonos al producto interior de dos vectores en $\mathbb{R}^3$, y no al producto interior estándar de los vectores en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas (x^1, x^2) y (y^1, y^2). También es frecuente escribir la primera forma fundamental como forma diferencial:

$$\mathrm{I} = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2.$$

Los coeficientes E, F y G son funciones diferenciables en el abierto U de definición de la parametrización $\mathbf{x}$, y se denominan los *coeficientes de la primera forma fundamental* asociados a la parametrización $\mathbf{x}$. Además, es fácil ver que siempre se tiene que $E > 0$, $G > 0$ y $EG - F^2 > 0$.

Observa que si $\alpha\colon I \to S$ es una curva diferenciable en S dada por la imagen por $\mathbf{x}$ de una curva en $U \subset \mathbb{R}^2$, es decir, $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, entonces la longitud de un segmento de curva $\alpha|_{[a,b]}$, con $[a,b] \subset I$, se puede calcular mediante

$$L(\alpha|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{\mathrm{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}dt = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}dt,$$

donde los coeficientes E, F y G han de evaluarse en $(u(t), v(t))$. Asimismo, si R es una región de la superficie S contenida en $\mathbf{x}(U)$, entonces se define su área mediante

$$A(R) := \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| du\, dv = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

1.6. Isometrías y aplicaciones conformes. Una aplicación diferenciable $f\colon S_1 \to S_2$ entre superficies regulares se llama *isometría local* si conserva la primera forma fundamental, es decir,

$$\langle df(p)x, df(p)y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

para todo $x, y \in T_pS_1$ y todo $p \in S_1$. Así, f es isometría local si y solo si $df(p)\colon T_pS_1 \to T_pS_2$ es isometría lineal entre espacios vectoriales, para todo $p \in S_1$. Puesto que una isometría lineal es un isomorfismo, se sigue que toda isometría local entre superficies es un difeomorfismo local. Como las isometrías locales preservan el producto escalar, también preservan longitudes, ángulos y áreas.

Una *isometría (global)* entre superficies S_1 y S_2 es un difeormorfismo (global) $f\colon S_1 \to S_2$ que es también isometría local. En este caso se dice que S_1 y S_2 son *(globalmente) isométricas.* Dos superficies S_1 y S_2 se dicen *localmente isométricas* si para todo $p \in S_1$ existe un entorno abierto V de p en S_1 y una isometría (global) $f\colon V \to f(V) \subset S_2$, y análogamente intercambiando S_1 con S_2.

La motivación para estas distintas definiciones viene del hecho de que existan superficies localmente isométricas, pero no globalmente isométricas. El ejemplo típico es el del plano y el cilindro, que son localmente isométricos, pero no globalmente isométricos. Esto último se prueba usando un concepto topológico denominado grupo fundamental; esencialmente la idea es que el cilindro y el plano no pueden ser homeomorfos porque en el cilindro existen curvas cerradas que no se pueden contraer a un punto sin salirse del cilindro, mientras que en el plano toda curva cerrada se puede deformar a un punto.

Obsérvese la diferencia formal entre la definición de isometría local y la de que dos superficies sean localmente isométricas: que exista una isometría local entre S_1 y S_2 no implica que S_1 y S_2 sean localmente isométricas. Sin embargo, si existe una isometría local sobreyectiva $f\colon S_1 \to S_2$, entonces S_1 y S_2 son localmente isométricas.

Si $f\colon S_1 \to S_2$ es una isometría local, entonces para todo $p \in S_1$ existe una parametrización $\mathbf{x}_1\colon U \to S_1$ alrededor de p y una parametrización $\mathbf{x}_2\colon U \to S_2$ alrededor de $f(p)$ tales que los correspondientes coeficientes de las primeras formas fundamentales coinciden, es decir $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ y $G_1 = G_2$; en otras palabras, la matriz asociada a la primera forma fundamental de S_1 en la base $\{(\mathbf{x}_1)_u, (\mathbf{x}_1)_v\}$ coincide con la matriz asociada a la primera forma fundamental de S_2 en la base $\{(\mathbf{x}_2)_u, (\mathbf{x}_2)_v\}$. Recíprocamente, si S_1 y S_2 son superficies regulares con parametrizaciones respectivas $\mathbf{x}_1\colon U \to S_1$ y $\mathbf{x}_2\colon U \to S_2$ tales que $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ y $G_1 = G_2$, entonces la aplicación $f = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1}\colon \mathbf{x}_1(U) \to \mathbf{x}_2(U)$ es una isometría (global) entre los abiertos $\mathbf{x}_1(U)$ de S_1 y $\mathbf{x}_2(U)$ de S_2.

Conviene resaltar la diferencia entre una isometría entre superficies de $\mathbb{R}^3$ y una isometría o movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$. Dado un movimiento rígido $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y una superficie regular S en $\mathbb{R}^3$, es fácil ver que el subconjunto $\varphi(S)$ de $\mathbb{R}^3$ es una superficie regular, y la aplicación

$\varphi|_S\colon S \to \varphi(S)$ es una isometría entre superficies. Dos objetos geométricos en $\mathbb{R}^n$ (como por ejemplo S y $\varphi(S)$ en la frase anterior) que se diferencien por un movimiento rígido de $\mathbb{R}^n$ se dicen *congruentes*. Así, dos superficies regulares congruentes en $\mathbb{R}^3$ son globalmente isométricas. Sin embargo, el recíproco es falso. Dos superficies pueden ser isométricas y no haber ningún movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ que envíe una en la otra (por ejemplo, un trozo de cilindro y un trozo de un plano). Las propiedades geométricas que se preservan por isometrías entre superficies se llaman propiedades *intrínsecas*, mientras que aquellas que se preservan por movimientos rígidos de $\mathbb{R}^3$ se llaman *extrínsecas*.

Un concepto más débil que el de isometría local es el de aplicación conforme. Un difeomorfismo local $f\colon S_1 \to S_2$ entre superficies regulares se llama *aplicación conforme* si existe una aplicación diferenciable positiva $\lambda\colon S_1 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle df(p)x, df(p)y\rangle = \lambda(p)\langle x, y\rangle, \tag{2}$$

para todo $x, y \in T_pS_1$ y todo $p \in S_1$. Por tanto, una isometría local es una aplicación conforme con $\lambda \equiv 1$. Una parametrización $\mathbf{x}\colon U \to S$ de una superficie S se dice *conforme* o que induce *coordenadas isotermas* si existe una aplicación diferenciable positiva $\lambda\colon S \to \mathbb{R}$ cumpliendo (2), con $\mathbf{x}$ en vez de f, para todo $p \in U$ y todo $x, y \in \mathbb{R}^2$, lo cual equivale a que los coeficientes de la primera forma fundamental satisfagan $E = G$ y $F = 0$. Se puede probar que toda superficie admite coordenadas isotermas, por lo que cualesquiera dos superficies son localmente conformes.

Un difeomorfismo local $f\colon S_1 \to S_2$ resulta ser conforme si y solo si conserva ángulos, es decir, si dadas cualesquiera curvas $\alpha, \beta\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ con $\alpha(0) = \beta(0) = p$, el ángulo entre $\alpha'(0)$ y $\beta'(0)$ en T_pS_1 coincide con el ángulo entre $df(p)\alpha'(0)$ y $df(p)\beta'(0)$ en $T_{f(p)}S_2$.

En coordenadas locales, se pueden caracterizar las aplicaciones conformes $f\colon S_1 \to S_2$ de modo similar a como caracterizamos antes las isometrías locales, pero en vez de pedir que los coeficientes de la primera forma fundamental se preserven, se han de preservar salvo multiplicación por una función diferenciable positiva λ.

Un difeomorfismo $f\colon S_1 \to S_2$ es una aplicación *equiárea* (o *que preserva áreas*) si para toda región $R \subset S_1$ se tiene que el área de R coincide con el área de $f(R)$. En coordenadas locales, un difeomorfismo es equiárea si y solo si preserva la función $EG - F^2$. Usando esto, es fácil deducir que f es conforme y equiárea si y solo si es una isometría.

2. Geometría extrínseca de superficies

2.1. La aplicación de Gauss. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, y $\mathbf{x}\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización de S. Sea N un campo unitario normal diferenciable definido localmente en S. Por ejemplo, sobre el abierto $\mathbf{x}(U)$ de S podemos tomar

$$N(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|}. \tag{3}$$

Entonces N define una aplicación $N\colon \mathbf{x}(U) \subset S \to \mathbb{S}^2$ denominada *aplicación de Gauss*; aquí $\mathbb{S}^2$ denota la esfera de radio 1 centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$. La aplicación de Gauss no es más que la aplicación que a cada punto de la superficie le asigna el vector normal escogido en ese punto.

En principio, el campo normal unitario definido mediante (3) solo está definido localmente (es decir, en un abierto $\mathbf{x}(U)$ de S, pero tal vez no en toda S). Puede suceder que, mediante otras parametrizaciones de S que recubran S, el campo N se pueda extender de modo diferenciable a un campo normal unitario definido en toda S, o puede suceder que esto sea imposible. Así, una superficie S que admita un campo diferenciable normal unitario definido en toda S se llama *orientable*. Ejemplos de superficies orientables son el plano, la esfera, los grafos y las superficies de nivel. El ejemplo típico de superficie no orientable es la banda de Möbius.

2.2. Operador de Weingarten y segunda forma fundamental. Sea $p = \mathbf{x}(u_0, v_0) \in \mathbf{x}(U) \subset S$. Para entender cómo se curva S en p analizaremos cómo varía N cerca de p. Por eso, consideramos la diferencial de N en p, i.e. $(dN)(p)\colon T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Pero como $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, N(p)\rangle = 0\} = T_pS$, podemos ver esa diferencial como un endomorfismo lineal de T_pS, es decir, $(dN)(p)\colon T_pS \to T_pS$. Esto nos permite definir el *operador de Weingarten* W_p de S en p (también llamado *operador de configuración* o *operador de forma*) como esa diferencial con el signo cambiado:

$$W_p\colon T_pS \to T_pS, \qquad W_p(x) := -(dN)(p)x.$$

Recuerda qué significa esta definición como diferencial: si $x \in T_pS$, escoge una curva diferenciable $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$, y entonces $(dN)(p)x := (N \circ \alpha)'(0)$.

Observa que hay un operador de Weingarten para cada p de S, una vez fijado el campo normal N. De hecho, el operador de Weingarten depende de la elección de N, pero no lo indicamos en la notación para no recargarla; asimismo, a menudo eliminamos el subíndice p si está claro en qué punto trabajamos, o si trabajamos en varios puntos al mismo tiempo.

El operador de Weingarten es autoadjunto respecto del producto escalar de $\mathbb{R}^3$:

$$\langle W_p x, y\rangle = \langle x, W_p y\rangle, \qquad x, y \in T_pS,\ p \in S.$$

A partir del operador de Weingarten definimos una forma bilineal simétrica en T_pS, denominada *segunda forma fundamental* de S en p:

$$\mathrm{I\!I}_p\colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{I\!I}_p(x, y) := \langle x, W_p y\rangle.$$

A diferencia de la primera forma fundamental, la segunda forma fundamental no tiene por que ser definida positiva.

2.3. Formas matriciales de W y $\mathrm{I\!I}$. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base de T_pS, el operador de Weingarten y la segunda forma fundamental tienen unas matrices asociadas con respecto a esa base (pero el significado de esta frase es distinto para cada uno de los dos casos, pues en el primer caso estamos ante una aplicación lineal, y en el segundo ante una bilineal).

Con respecto al operador de Weingarten, existirán $w_{ij} \in \mathbb{R}$ tales que $W_p v_1 = w_{11} v_1 + w_{21} v_2$ y $W_p v_2 = w_{12} v_1 + w_{22} v_2$, de modo que la matriz de W_p en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, que denotaremos $(W_p)_{\mathcal{B}}$, es

$$(W_p)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}.$$

A menudo escribiremos simplemente

$$W_p \equiv \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix},$$

donde el símbolo $\equiv$ significa que identificamos una aplicación lineal con su matriz asociada en una determinada base (que debe quedar clara en cada contexto). Así, si $x \in T_pS$ tiene coordenadas (x^1, x^2) en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, se tiene que las coordenadas de $W_p x$ en esa misma base son las obtenidas al multiplicar

$$(W_p)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Hay que observar que la matriz $(W_p)_{\mathcal{B}}$ no tiene por qué ser simétrica si la base $\mathcal{B}$ no es ortonormal. Si $\mathcal{B}$ es ortonormal, entonces $(W_p)_{\mathcal{B}}$ sí es simétrica, al ser W_p autoadjunto.

La descripción matricial de la segunda forma fundamental es ligeramente diferente, al ser una forma bilineal. En este caso, la matriz de $\mathrm{I\!I}_p$ en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ viene dada por

$$(\mathrm{I\!I}_p)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I\!I}_p(v_1, v_1) & \mathrm{I\!I}_p(v_1, v_2) \\ \mathrm{I\!I}_p(v_2, v_1) & \mathrm{I\!I}_p(v_2, v_2) \end{pmatrix}.$$

Así, si $x, y \in T_pS$ tiene coordenadas respectivas (x^1, x^2) y (y^1, y^2) en la base $\mathcal{B}$, se puede calcular $\mathrm{I\!I}_p(x, y)$ mediante

$$\mathrm{I\!I}_p(x, y) = (x^1, x^2)(\mathrm{I\!I}_p)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

A diferencia de $(W_p)_{\mathcal{B}}$, la matriz $(\mathrm{I\!I}_p)_{\mathcal{B}}$ siempre es simétrica, aunque $\mathcal{B}$ no sea ortonormal. Por otro lado, igual que comentamos arriba para W_p, a menudo simplemente usaremos el símbolo $\equiv$ para identificar una forma bilineal con su matriz asociada en una determinada base.

2.4. Cálculo de $\mathrm{I\!I}$ y W a partir de una parametrización. Sea $\mathbf{x}\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie regular S. Sea N un campo normal unitario diferenciable en $\mathbf{x}(U)$, por ejemplo el dado por (3). Entonces, la matriz de la segunda forma fundamental de S en un punto $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\}$ de vectores coordenados es

$$\mathrm{I\!I}_p \equiv \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_{uu}, N\rangle & \langle \mathbf{x}_{uv}, N\rangle \\ \langle \mathbf{x}_{uv}, N\rangle & \langle \mathbf{x}_{vv}, N\rangle \end{pmatrix},$$

donde en la matriz de la derecha hemos omitido la dependencia de u_0, v_0 para no recargar la notación. Observemos también que $e = \langle \mathbf{x}_{uu}, N\rangle = -\langle \mathbf{x}_u, N_u\rangle$, ya que $\langle \mathbf{x}_u, N\rangle = 0$, y análogamente $f = \langle \mathbf{x}_u, N_v\rangle = \langle \mathbf{x}_v, N_u\rangle$ y $g = \langle \mathbf{x}_v, N_v\rangle$.

Por la definición de segunda forma fundamental tenemos que

$$\langle x, W_p y\rangle = \mathrm{I\!I}_p(x, y), \qquad x, y \in T_pS.$$

Si las coordenadas de x e y con respecto a la base de vectores coordenados $\mathcal{B}$ son (x^1, x^2) y (y^1, y^2), respectivamente, entonces la relación anterior adopta la siguiente expresión en términos de matrices:

$$\big(x^1, x^2\big)(\mathrm{I}_p)_{\mathcal{B}}(W_p)_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \big(x^1, x^2\big)(\mathrm{II}_p)_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Como esta relación se cumple para cualesquiera $x, y \in T_pS$, deducimos que $(\mathrm{I}_p)_{\mathcal{B}}(W_p)_{\mathcal{B}} = (\mathrm{II}_p)_{\mathcal{B}}$, de donde obtenemos la expresión de la matriz del operador de Weingarten respecto a la base de campos coordenados:

$$(W)_{\mathcal{B}} = (\mathrm{I})_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathrm{II})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}. \tag{4}$$

2.5. Curvaturas principales, curvatura de Gauss y curvatura media. El operador de Weingarten en cada punto p de una superficie regular es un endomorfismo lineal autoadjunto del espacio tangente T_pS. Su expresión matricial respecto de cualquier base ortonormal de T_pS es, por tanto, una matriz simétrica. Tal matriz es entonces diagonalizable, con autovalores reales, en una base ortonormal. Es decir, existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS tal que

$$W_pe_1 = \kappa_1(p)e_1, \qquad W_pe_2 = \kappa_2(p)e_2.$$

Los autovalores $\kappa_1(p)$, $\kappa_2(p) \in \mathbb{R}$ de W_p se llaman las *curvaturas principales* de S en p. Cualquier autovector de W_p se denomina *dirección principal* de S en p. Así, si $\kappa_1(p) \neq \kappa_2(p)$, las direcciones principales son los múltiplos no nulos de e_1 y e_2, mientras que si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ todo vector no nulo de T_pS es dirección principal. Se observa que si cambiamos el signo del campo normal N, entonces W_p cambia de signo, y por tanto las curvaturas principales también.

Si realizamos la diagonalización anterior en todo punto p de un abierto de S donde tengamos bien definido el campo diferenciable normal unitario N, obtendremos funciones continuas κ_1 y κ_2 definidas en ese abierto, denominadas funciones de curvatura principal. Además, allí donde $\kappa_1 \neq \kappa_2$, ambas son funciones diferenciables. Una *línea de curvatura* es una curva diferenciable $\alpha\colon I \to S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección principal de S para todo $t \in I$, es decir, $W_{\alpha(t)}\alpha'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$, para todo $t \in I$ y cierta función curvatura principal $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$.

Una *dirección asintótica* de S en p es un vector $x \in T_pS$ no nulo tal que $\mathrm{II}_p(x, x) = 0$. Una *línea asintótica* de S es una curva diferenciable $\alpha\colon I \to S$ tal que $\alpha'(t)$ es dirección asintótica para todo $t \in I$, es decir, $\mathrm{II}(\alpha', \alpha') = 0$.

La *curvatura de Gauss* de S en p se define como el número real

$$K(p) := \det W_p, \qquad \text{o equivalentemente} \qquad K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p),$$

mientras que la *curvatura media* de S en p es el número real

$$H(p) := \frac{1}{2}\operatorname{tr} W_p, \qquad \text{o equivalentemente} \qquad H(p) = \frac{1}{2}(\kappa_1(p) + \kappa_2(p)).$$

Como W_p es un endomorfismo lineal, ambos conceptos están bien definidos (el determinante y la traza de una matriz, al igual que sus autovalores, permanecen invariantes bajo cambio de base). Se observa que la curvatura de Gauss permanece invariante si cambiamos el signo del campo normal N, mientras que la curvatura media cambia de signo. Permitiendo variar $p \in S$, tanto K como H dan lugar a funciones diferenciables definidas allá donde esté definido el campo normal unitario N. Las superficies con H idénticamente nula, como por ejemplo el plano, el helicoide o el catenoide, reciben el nombre de *superficies minimales.*

En coordenadas locales, las curvaturas de Gauss y media se pueden calcular en términos de los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales. Así, a partir de (4) es fácil deducir que:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{1}{2}\,\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}.$$

Un punto p de una superficie es exactamente de uno de los siguientes cuatro tipos:

1. *elíptico*, si $K(p) > 0$,
2. *hiperbólico*, si $K(p) < 0$,
3. *parabólico*, si $K(p) = 0$ pero $W_p \neq 0$, i.e. cuando una de las dos curvaturas principales es 0 pero la otra no,
4. *plano*, si $W_p = 0$, i.e. si $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Los puntos elípticos e hiperbólicos poseen la siguiente interpretación geométrica: p es elíptico si hay un entorno abierto de p en S que queda a un lado del plano tangente afín a S en p (como por ejemplo los puntos de una esfera, elipsoide o paraboloide de una hoja), mientras que p es hiperbólico si cualquier entorno abierto de p en S contiene puntos a ambos lados del plano tangente afín a S en p (como por ejemplo los puntos de un catenoide o un helicoide).

Además, un punto p se dice *umbilical* si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$. Una superficie se dice *totalmente umbilical* si todos sus puntos son umbilicales. Se puede probar que una superficie regular (orientable, conexa) es totalmente umbilical si y solo si es un abierto de un plano o de una esfera.

2.6. La aceleración de una curva: curvaturas geodésica y normal. Sea $\alpha\colon I \to S$ una curva regular en una superficie regular S de $\mathbb{R}^3$ con campo normal unitario N. Supongamos que α está parametrizada por longitud de arco. Por estar la traza de α contenida en S y por la definición de plano tangente, el vector velocidad de α cumple que $\alpha'(s) \in T_{\alpha(s)}S$, para todo $s \in I$. Sin embargo, el vector aceleración $\alpha''(s)$ no tiene por qué ser ni tangente ni normal a S. Puesto que, para cada $p \in S$, podemos descomponer $\mathbb{R}^3$ como la suma directa ortogonal de espacios vectoriales $T_pS \oplus \operatorname{span}\{N(p)\}$, podemos considerar las componentes (o proyecciones) tangencial $(\alpha'')^\top$ y normal $(\alpha'')^\perp$ de α'', de forma que

$$\alpha''(s) = \alpha''(s)^\top + \alpha''(s)^\perp, \qquad s \in I,$$

donde $\alpha''(s)^\top \in T_{\alpha(s)}S$ y $\alpha''(s)^\perp \in \operatorname{span}\{N(\alpha(s))\}$.

Consideremos la componente tangencial $(\alpha'')^\top$, que define un campo de vectores (tangente a S) a lo largo de α. Puesto que α está parametrizada por arco, tenemos que $\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$ y, por tanto, $\langle (\alpha'')^\top, \alpha' \rangle = 0$. Ya que $(\alpha'')^\top$ es tangente a S en todo punto, se tiene que $\langle (\alpha'')^\top, N \circ \alpha \rangle = 0$. Por lo tanto, $\alpha''(s)^\top$ debe ser proporcional a $N(\alpha(s)) \times \alpha'(s)$, para todo

$s \in I$. En otras palabras, $\alpha''(s)^\top$ es proporcional al segundo vector del denominado *triedro de Darboux* de α en s, que es la base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\{\alpha'(s), N(\alpha(s)) \times \alpha'(s), N(\alpha(s))\}.$$

A la correspondiente constante de proporcionalidad se le denomina *curvatura geodésica* de α en s:

$$k_{g,\alpha}(s) := \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \times \alpha'(s)\rangle, \qquad s \in I.$$

Usando la definición de curvatura k_α de α, se tiene que

$$k_{g,\alpha} = k_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, (N \circ \alpha) \times \alpha'\rangle.$$

Por otro lado, es claro que la componente normal $(\alpha'')^\top$ de la aceleración es un campo de vectores (normal a S) definido a lo largo de α que viene dado por $\alpha''(s)^\perp = \langle \alpha''(s), N(\alpha(s))\rangle N(\alpha(s))$. Se define la *curvatura normal* de α en s como el coeficiente en la expresión previa, es decir:

$$k_{n,\alpha}(s) = \langle \alpha''(s), N(\alpha(s))\rangle, \qquad s \in I.$$

Usando de nuevo que $\alpha'' = k_\alpha \mathbf{n}_\alpha$, se tiene que

$$k_{n,\alpha} = k_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, N \circ \alpha\rangle. \tag{5}$$

Así pues, las curvaturas geodésica y normal de una curva parametrizada por arco en una superficie son las componentes (escalares) tangencial y normal de la aceleración, respectivamente. Dado que el triedro de Darboux es base ortonormal se deduce que

$$\alpha'' = k_{g,\alpha}(N \circ \alpha) \times \alpha' + k_{n,\alpha}(N \circ \alpha),$$

y por tanto, tomando normas, $k_\alpha^2 = k_{g,\alpha}^2 + k_{n,\alpha}^2$.

Si $\alpha\colon I \to S$ simplemente es regular, pero no necesariamente parametrizada por arco, se definen sus curvaturas geodésica y normal como las curvaturas geodésica y normal de una reparametrización por longitud de arco que preserve la orientación de la curva. Así, se prueba que

$$k_{g,\alpha} = k_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, (N \circ \alpha) \times \mathbf{t}_\alpha\rangle = \frac{1}{|\alpha'|^3}\langle \alpha'', (N \circ \alpha) \times \alpha'\rangle,$$
$$k_{n,\alpha} = k_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, N \circ \alpha\rangle = \frac{1}{|\alpha'|^2}\langle \alpha'', (N \circ \alpha)\rangle.$$

2.7. Curvatura normal y segunda forma fundamental. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ con campo normal unitario N. Si $\alpha\colon I \to S$ es una curva diferenciable en S, entonces, derivando la relación $\langle \alpha'(t), N(\alpha(t))\rangle = 0$ se obtiene

$$\mathrm{I\!I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \langle \alpha''(t), N(\alpha(t))\rangle, \qquad t \in I.$$

En particular, si α es regular, se tiene la siguiente relación entre la curvatura normal de α y la segunda forma fundamental de S:

$$k_{n,\alpha} = k_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, N \circ \alpha\rangle = \mathrm{I\!I}(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha).$$

Deducimos que cualesquiera dos curvas regulares que pasen por un punto p de S con vectores velocidad colineales tienen la misma curvatura normal en ese punto. Así pues, es posible definir la *curvatura normal* $k_n(p,x)$ de S en p en la dirección de un vector unitario tangente $x \in T_pS$ mediante

$$k_n(p,x) := \mathrm{II}_p(x,x),$$

o, equivalentemente, como la curvatura normal $k_{n,\alpha}(0)$ en $t = 0$ de una curva regular cualquiera $\alpha\colon (-\epsilon,\epsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$. Observemos que tenemos un concepto de curvatura normal $k_{n,\alpha}\colon I \to \mathbb{R}$ asociado a una curva regular $\alpha\colon I \to S$ en una superficie, y también un concepto de curvatura normal $k_n(p,x) \in \mathbb{R}$ asociado a una dirección unitaria tangente $x \in T_pS$ a una superficie S; ambos conceptos son formalmente distintos, pero están íntimamente relacionados, como acabamos de ver.

Podemos usar estas relaciones para dar una interpretación geométrica útil de la curvatura normal. Así, sea $p \in S$ y $x \in T_pS$ unitario. Consideremos el plano afín $\Pi_x = p + \operatorname{span}\{x, N(p)\}$. Es posible probar que dicho plano Π_x interseca a S (al menos cerca de p) en una curva que puede ser parametrizada de modo regular y, por tanto, por parámetro longitud de arco. A dicha curva parametrizada se le llama *sección normal* de S por p en la dirección de x. Si denotamos por α dicha curva, y la suponemos definida en $(-\epsilon,\epsilon)$ de modo que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = x$, entonces se sigue de (5) que la curvatura normal $k_{n,\alpha}(0) = k_n(p,x)$ coincide exactamente con la curvatura con signo de α en 0, vista como curva plana dentro del plano Π_x. En particular, si S contiene un segmento de recta pasando por p y con dirección x, entonces $\mathrm{II}_p(x,x) = k_n(p,x) = 0$, por lo que x es una dirección asintótica (sin embargo, el recíproco es falso: las líneas asintóticas no tienen por qué ser segmentos de rectas).

Otra propiedad importante es que las curvaturas principales de una superficie son las curvaturas normales mínima y máxima por cada punto. De modo más preciso, si $p \in S$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que las curvaturas principales de S en p satisfacen $\kappa_1(p) \le \kappa_2(p)$. Entonces se cumple que

$$\kappa_1(p) \le k_n(p,x) = \mathrm{II}_p(x,x) \le \kappa_2(p), \qquad \text{para todo } x \in T_pS.$$

En particular, un vector $x \in T_pS$ es una dirección principal de S si y solo si la sección normal $\Pi_x \cap S$ tiene curvatura normal $\kappa_1(p)$ o $\kappa_2(p)$. Más aún, si $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de T_pS de direcciones principales, con $W_pe_1 = \kappa_1(p)e_1$ y $W_pe_2 = \kappa_2(p)e_2$, y suponiendo que $\kappa_1(p) \le \kappa_2(p)$, entonces

$$k_n(p,x_\theta) = \kappa_1(p)\cos^2\theta + \kappa_2(p)\sin^2\theta,$$

donde $x_\theta \in T_pS$ es un vector unitario que forma un ángulo θ con e_1, i.e. $\cos\theta = \langle e_1, x_\theta\rangle$.

2.8. El teorema Egregium de Gauss. Si bien la curvatura de Gauss de una superficie se ha definido en términos de conceptos extrínsecos (como el determinante del operador de Weingarten, que es esencialmente la diferencial de un campo normal), el teorema Egregium de Gauss afirma que la curvatura de Gauss es un invariante intrínseco. Esto quiere decir que se preserva por isometrías locales.

De modo más preciso, el teorema afirma que si $f\colon S_1 \to S_2$ es una isometría local entre superficies regulares en $\mathbb{R}^3$, y K_1 y K_2 son las curvaturas de Gauss de S_1 y S_2, respectivamente, entonces $K_1(p) = K_2(f(p))$ para todo $p \in S_1$.

No se puede decir lo mismo de la curvatura media, de la segunda forma fundamental, del operador de Weingarten o de las curvaturas principales, como el ejemplo de la isometría local entre plano y cilindro nos muestra. Así, mientras que la curvatura de Gauss es un invariante intrínseco, estos otros conceptos son solamente invariantes extrínsecos: se preservan por movimientos rígidos de $\mathbb{R}^3$, pero en general no por isometrías entre superficies.

2.9. Las ecuaciones de compatibilidad y teorema fundamental de superficies. Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{x}\colon U \to S$ una parametrización de S. Cada una de las derivadas segundas de $\mathbf{x}$ se puede escribir como combinación lineal de $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N \circ \mathbf{x}\}$, puesto que estos forman una base de $\mathbb{R}^3$. Así, existen funciones $\Gamma_{ij}^k\colon U \to \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN \circ \mathbf{x}\\
\mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + fN \circ \mathbf{x}\\
\mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + gN \circ \mathbf{x},
\end{aligned}$$

donde e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental. A los coeficientes Γ_{ij}^k se les llama *símbolos de Christoffel*.

El teorema de Schwarz de las derivadas cruzadas aplicado a las derivadas terceras de $\mathbf{x}$ (por ejemplo $(\mathbf{x}_{uu})_v = (\mathbf{x}_{uv})_u$) da lugar a ciertas relaciones entre los símbolos de Christoffel, los coeficientes de la primera y segunda forma fundamentales, y las derivadas primeras de todos estos. Estas relaciones se reducen a tres ecuaciones que se denominan *ecuaciones de compatibilidad*: una de ellas se llama *ecuación de Gauss* y las otras dos *ecuaciones de Codazzi-Mainardi*. Toda parametrización de una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ satisface esas tres ecuaciones.

El teorema de Bonnet, o teorema fundamental de la teoría local de superficies en $\mathbb{R}^3$, esencialmente afirma que dichas ecuaciones son suficientes para la existencia de una superficie regular, y que además la primera y la segunda forma fundamentales determinan la superficie salvo movimiento rígido. De modo más preciso, si E, F, G, e, f, g son funciones diferenciables sobre un abierto V de $\mathbb{R}^2$ verificando las ecuaciones de compatibilidad y las desigualdades $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$, entonces existen un abierto $U \subset V$ y un difeomorfismo $\mathbf{x}\colon U \to S \subset \mathbb{R}^3$ donde $S = \mathbf{x}(U)$ es una superficie regular, parametrizada por $\mathbf{x}$ y tal que los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales son E, F, G y e, f, g, respectivamente. Además, si U es conexo e $\mathbf{y}\colon U \to S' \subset \mathbb{R}^3$ es una parametrización de otra superficie $S' = \mathbf{y}(U)$ cuyos coeficientes de la primera y segunda forma fundamentales son E, F, G y e, f, g, respectivamente, entonces existe un movimiento rígido $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(S) = S'$.