

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta)y_{n+1}) \quad \theta \in (0,1)$$

En la tarea 2 hemos calculado $F(\phi)$:

$$\phi(t_n, y_n; h) = F(\phi) = h f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h \phi(t_n, y_n; h))$$

Como f es Lipschitz con respecto a su segunda variable, con cierta constante L , tenemos:

$$\|F(\phi) - F(\hat{\phi})\| \leq hL \|\phi - \hat{\phi}\|$$

Por lo tanto, si $\underbrace{hL}_{L_c} < 1$ la aplicación F es contractiva. \square

Adicionalmente, como F es contractiva para $L_c < 1$, por el Tma. de Banach tenemos un único punto fijo \Rightarrow solución única para $h < 1/L$.