Tarea 8 MNEDO

Sea el método con paso equidistante: $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}\left(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n\right)$
Identificar la región de estabilidad del método lineal multipaso que y decir si el método es A-estable. Para ello, obtener la(s) fórmula(s) que satisfacen dicha región o su frontera y dibujar dicha región.

En primer lugar se obtienen las alfas y las betas para poder construir el primer y segundo polinomios característicos:

$\alpha_0 = 0$ $\qquad$ $\alpha_1 = -1$ $\qquad$ $\alpha_2 = 1$

$\beta_0 = \frac{-1}{12}$ $\qquad$ $\beta_1 = \frac{8}{12}$ $\qquad$ $\beta_2 = \frac{5}{12}$

Ya podemos construir los polinomios característicos.

- Primer polinomio:

  $\rho(r) = r^2 - r$

- Segundo polinomio:

  $\sigma(r) = \frac{1}{12}\left(5r^2 + 8r - 1\right)$

Para encontrar el dominio de estabilidad $\mathcal{D}$, nos centramos en su frontera $\partial\mathcal{D}$ y buscamos $\mathcal{F}$, de donde $\partial\mathcal{D}$ es subconjunto, es decir, $\partial\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$, y donde $\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C} :$ existe una raíz de $\Pi(\cdot, z)$ de módulo $1\}$

Para calcular $\mathcal{F}$ uso polares:

$$\Pi\left(e^{i\theta}, z\right) = \rho\left(e^{i\theta}\right) - z\sigma\left(e^{i\theta}\right) = 0$$

Por lo que obtenemos:

$$z = \frac{\rho\left(e^{i\theta}\right)}{\sigma\left(e^{i\theta}\right)}$$

Que, aplicado a nuestra ecuación y después pasando a polares, obtenemos:

$$z = \frac{12\left(r^2 - r\right)}{5r^2 + 8r - 1} \xrightarrow{Polares} \frac{12\left(e^{2i\theta} - e^{i\theta}\right)}{5e^{2i\theta} + 8e^{i\theta} - 1}$$

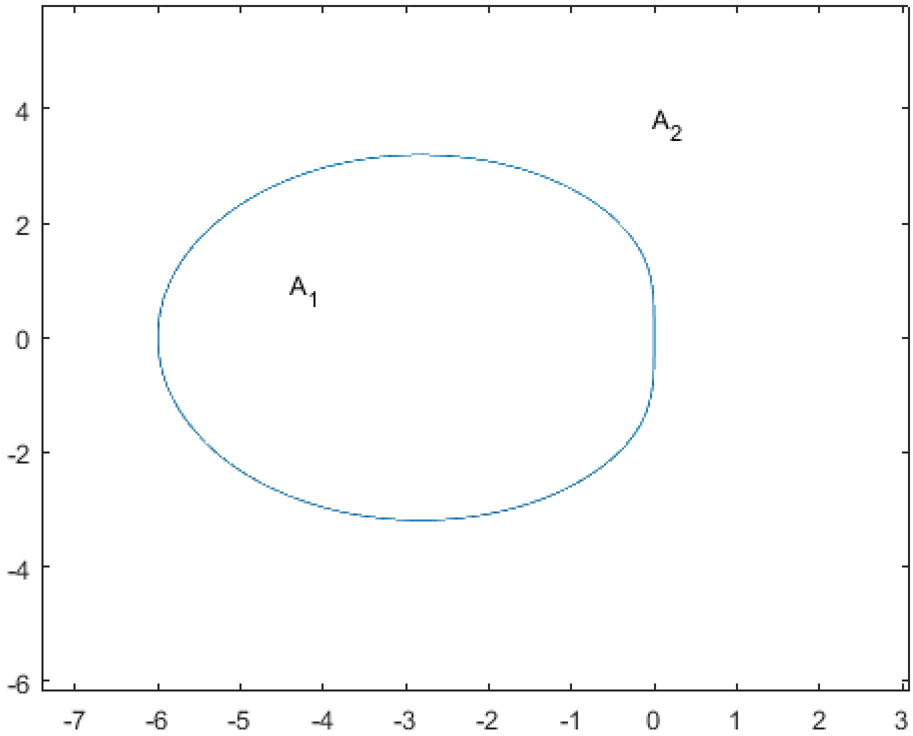
Multiplicando numerador y denominador por $e^{-i\theta}$ (el conjugado), se consigue:

$$z = \frac{12\left(e^{2i\theta} - e^{i\theta}\right)e^{-i\theta}}{\left(5e^{2i\theta} + 8e^{i\theta} - 1\right)e^{-i\theta}} = \frac{12\left(e^{i\theta} - 1\right)}{5e^{i\theta} - e^{-i\theta} + 8}$$

Usando ahora que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$:

$$z = \frac{12\left(\cos\theta + i\sin\theta - 1\right)}{5\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) - \left(\cos\theta - i\sin\theta\right) + 8} = \frac{12\left(\cos\theta + i\sin\theta - 1\right)}{4\cos\theta + 6i\sin\theta + 8}$$

Usando ahora que $\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{12(\cos\theta + i\sin\theta - 1)}{4\cos\theta + 6i\sin\theta + 8} : \theta \in [0, 2\pi] \right\}$ se obtiene la región siguiente:



Que separa el plano complejo en dos regiones disjuntas, A_1 (el interior) y A_2 $(\mathbb{C} \setminus A_1)$.

Para identificar la región de estabilidad, basta buscar un punto en una de las regiones y ver el módulo de las raíces de Π y si es menor que 1, esa es la región de estabilidad del método.

Consideramos el punto $z = -12 \in A_2$.

$$\Pi\left(r, 12\right) = \rho\left(r\right) + 12\sigma\left(r\right) = r^2 - r + \frac{12}{12}\left(5r^2 + 8r - 1\right)$$

Y se obtiene la ecuación de segundo grado en r:

$$r^2 - r + 5r^2 + 8r + 1 = 6r^2 + 7r - 1$$
$$\Longrightarrow r_1 = \frac{-7 + \sqrt{73}}{12}, r_2 = \frac{-7 - \sqrt{73}}{12}$$

Y $|r_2| > 1$, luego $z \notin \mathcal{D} \Longrightarrow \mathcal{D} = A_1$, pero como $\mathbb{C}_- \not\subseteq \mathcal{D} = A_1 \Longrightarrow$ El método no es A-estable

Conclusión:

La región de estabilidad $\mathcal{D}$ es el conjunto A_1 y el método no es A-estable.

El código MATLAB utilizado ha sido:

```
% Obtenemos el vector de tamanos de theta
theta=0:0.0001:2*pi;

% Numerador
A=complex(cos(theta)-1, sin(theta));

% Denominador
B=complex(2*cos(theta)+4, 3*sin(theta));

% Se asocia theta a z para que tengan el mismo tamano
z=theta;

% Bucle que calcula todos los valores de z para dibujar la grafica
for i=1:length(theta)
    z(i)=6*A(i)/B(i);
end

% Dibuja la grafica
plot(z);
```

Error de truncatura para la regla del trapecio con Taylor, MNEDO

26/09/2020

Consideramos el método G-L:

$$y_{n+3} - y_{n+2} = h\left(\frac{23}{12}f_{n+2} - \frac{16}{12}f_{n+1} + \frac{5}{12}f_n\right) \tag{1}$$

Extraemos los valores

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = -1;\ \alpha_3 = 1$$
$$\beta_0 = \frac{5}{12};\ \beta_1 = \frac{-16}{12};\ \beta_2 = \frac{23}{12}$$

Con los que podemos escribir el polinomio de estabilidad:

$$\Pi(r,z) = p(r) - z\sigma(r) = \sum_{j=0}^{3}(\alpha_j r^j) - z\sum_{j=0}^{3}(\beta_j r^j) = r^3 - r^2 - z\left(\frac{23}{12}r^2 - \frac{16}{12}r + \frac{5}{12}\right)$$

Este polinomio, sobretodo teniendo en cuenta que $z, r \in \mathbb{C}$, hace prácticamente imposible resolver las raíces del polinomio de forma exacta. Usaremos el "truco" de la frontera de la región de estabilidad junto con el Lema visto en clase de que esa región debe ser como:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |r_i(z)| < 1, i = 1, ..., q(z)\}$$

donde $r_i(z)$ es la raíz i-esima de , $q(z)$ es el número de raíces y $m(i)$ la multiplicidad de esa raíz i-ésima. El lema funciona con la condición de que $\sum_{i=0}^{q(z)}(m(i)) = k$. La frontera de D sería contenida, por definición, en este conjunto:

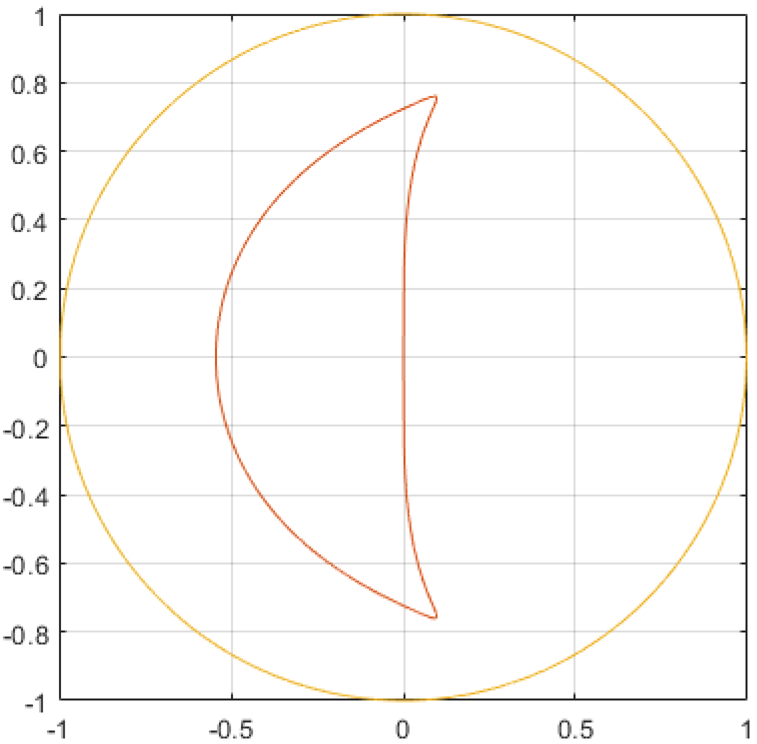
$$\partial D \subseteq \mathscr{F}\,\{z \in \mathbb{C} : \text{existe una raíz de } \Pi(\cdot, z) \text{ de modulo } 1\}$$

Y sabemos que D estará incluido o bien en A_1 o A_2, siendo éstos los conexos que son separados por $\mathscr{F}$ en el plano complejo ($\mathbb{C}\backslash = A_1 \cup A_2$, disjunta). Escribimos pues $\mathscr{F}$ de forma explícita (usando que no importa de qué modulo sean las raíces (cualquier constante distinta de 1 daría lo mismo) y escribiendo $r = e^{i\theta}$):

$$\mathscr{F} = \left\{z \in \mathbb{C} : z = \frac{p(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} == \frac{e^{i3\theta} - e^{i2\theta}}{\frac{1}{12}\left(23e^{i2\theta} - 16e^{i\theta} + 5\right)} : \theta \in [0, 2\pi)\right\}$$

Esa región es muy difícil de describir de forma explícita, así que recurrimos a Matlab para representarla. este es el código:

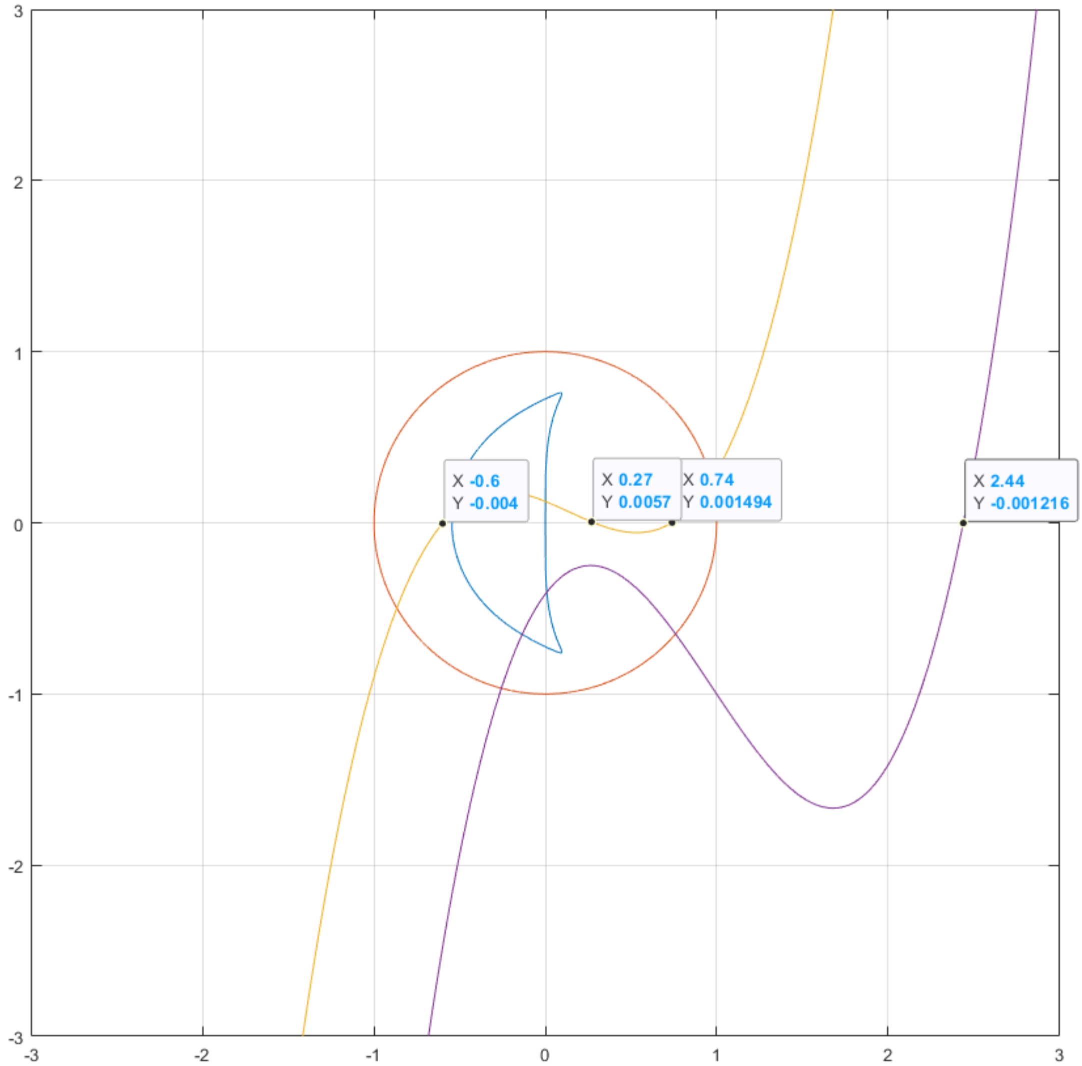
```
theta=[0:0.0001:2*pi]
ppc=(exp(1i*3*theta)-exp(1i*2*theta));
sgs=(1/12)*(23*exp(1i*2*theta)␣-␣16*exp(1i*theta)␣+␣5)
plot(ppc./sgs)
grid␣on
daspect([1␣1␣1])
```



Y este el resultado (figura roja con forma de luna, la circunferencia es la unidad, ploteada como referencia): Ahora vemos las raíces del polinomio evaluado en $z = -0.3 + 0i \in A_1$ (curva amarilla en función de r) y en $z = 1 + 0i \in A_2$ (curva azul oscuro). Se ve que hay 3 raices en general para la familia de polinomios con $z \in A_1$ y sólo 1 a lo sumo y fuera del círculo unidad en el otro caso:

```
theta=[0:0.0001:2*pi]
ppc=(exp(1i*3*theta)-exp(1i*2*theta));
sgs=(1/12)*(23*exp(1i*2*theta) - 16*exp(1i*theta) + 5)

plot(ppc./sgs)
grid on
daspect([1 1 1])
xlim([-3 3])
ylim([-3 3])
hold on
plot(exp(1i*theta))
hold on
z =[-0.3 1];
r =[-2:0.01:3];
plot(r, r.^3 - r.^2 - z(1)./12.*(23*r.^2-16*r+5))
hold on
plot(r, r.^3 - r.^2 - z(2)./12.*(23*r.^2-16*r+5))
```



Resolver el polinomio explícitamente tampoco era factible pero evaluando númericamente resultan claras las 3 raíces distintas que hay "dentro" de la curva cerrada $\mathscr{F}$ que tienen módulo menor que 1. La región de estabilidad no puede ser otra por tanto que un subconjunto de ese interior de la curva, ya que debe estar contenida bien dentro o fuera de esa $\mathscr{F}$ y hay al menos un punto (el $z = -0.3$) que está dentro de A_1. Por otro lado, el método NO es A-estable porque es un MLM multipaso explícito (que es convergente por la tarea anterior). Verificamos también que tiene una región de estabilidad acotada, con lo cual tenemos aún más claro este punto.

Tarea 8 MNEDO

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = h\frac{2}{3}f_{n+2}$$

Identificar la región de estabilidad y decidir si es A-estable, obtener las fórmulas que satisfacen dicha región o su frontera y dibujar dicha región.

En primer lugar calculo el polinomio de estabilidad:

$$p(r) = r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3} \quad , \quad \sigma(r) = \frac{2}{3}r^2 \quad \left(\alpha_0 = \frac{1}{3}, \alpha_1 = -\frac{4}{3}, \alpha_2 = 1; \ \beta_0 = \beta_1 = 0; \ \beta_2 = \frac{2}{3}\right)$$

$$\Pi(r,z) = p(r) - z\sigma(r) = \left(1 - \frac{2z}{3}\right)r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3}$$ y calculo sus raíces:

$$r_1(z) = \frac{2+\sqrt{1+2z}}{3-2z} \quad y \quad r_2(z) = \frac{2-\sqrt{1+2z}}{3-2z}$$

Parece complicado ver directamente cuál es la región $D = \{z \in \mathbb{C} : |r_i(z)| < 1, i = 1,2\}$

Buscamos el conjunto $F := \{z \in \mathbb{C} : \text{existe una raíz de } \Pi(\cdot, z) \text{ de módulo } 1\}$

$$F = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{p(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}, \ \text{con } \theta \in [0, 2\pi) \right\}, \text{veamos:}$$

$$z = \frac{e^{2i\theta} - \frac{4}{3}e^{i\theta} + \frac{1}{3}}{\frac{2e^{2i\theta}}{3}} = \frac{3}{2}\frac{e^{2i\theta}}{e^{2i\theta}} + \frac{\frac{1}{3}(1 - 4e^{i\theta})}{\frac{2}{3}e^{2i\theta}} = \frac{3}{2} + \frac{1 - 4e^{i\theta}}{2e^{2i\theta}}$$

Calculo a parte $\frac{1-4e^{i\theta}}{2e^{2i\theta}} = \frac{1-4(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)}{2(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)^2} \frac{(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)}{(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)} = \frac{(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta) - 4}{2(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)} \cdot \frac{(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)}{(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)}$

$$= \frac{(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)^2 - 4(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)}{2} = \frac{\cos^2\theta - 2i\,\text{sen}\theta\cos\theta - \text{sen}^2\theta - 4(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta \\ 2\,\text{sen}\theta\cos\theta = \text{sen}\,2\theta \end{array} \right.$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{2} - 2\cos\theta + i\left(2\,\text{sen}\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} - 2\cos\theta + i\left(2\,\text{sen}\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right)$$

el dibujo es de la curva dada por F

Adjuntaré dibujo de la región en la entrega, ahora basta ver si D está contenido en el interior de la curva ó no. Cojo un punto del interior, $z = 1$, en éste caso:

$$\Pi(r,1) = \frac{r^2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \quad y \text{ sus raíces son } r_1(1) = 2+\sqrt{3} \quad y \quad r_2(1) = 2-\sqrt{3}$$

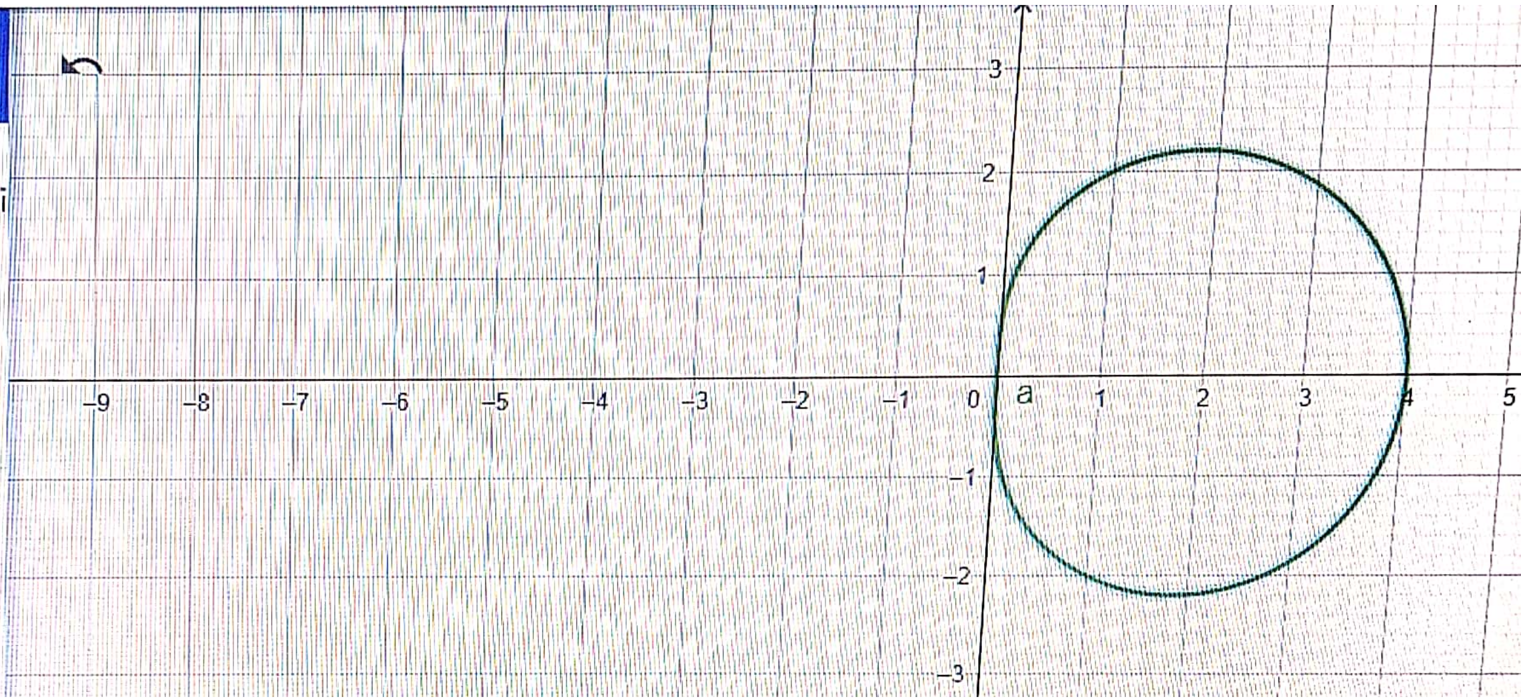
Cuyo módulo (de $r_1(1)$) es mayor que uno por lo que $D \neq \text{Int}(F)$ pues $z=1 \notin D$

Por lo tanto la región de estabilidad es el exterior de la curva y, cómo se apreciará en el gráfico, vemos que el método es A-estable, puesto que $\mathbb{C}^- \subset D$.

$a = \text{Curve}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) - 2\cos(t), 2\ \text{si}\right.$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) - 2\cos(t) \\ y &= 2\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) \end{aligned}\right\} 0 \leq$$

Input...



Tarea 8

Consideramos el siguiente método con paso equidistante:

$$y_{n+2} - y_n = \frac{2h}{3}\left(f_{n+2} + f_{n+1} + f_n\right).$$

Identificar la región de estabilidad del método lineal multipaso y decidir si el método es A-estable. Para ello obtener la fórmula que satisfacen dicha región o su frontera y dibujar dicha región.

Solución

Identificamos el MLM, denotando

$$\begin{cases} \alpha_0 = & -1, \\ \alpha_1 = & 0, \\ \alpha_2 = & 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0 = & \frac{2}{3}, \\ \beta_1 = & \frac{2}{3}, \\ \beta_2 = & \frac{2}{3}, \end{cases}$$

y escribiendo

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{2} \beta_j f_{n+j}.$$

Además tenemos que sus polinomios característicos son

$$\rho(\xi) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j \xi^j = \xi^2 - 1,$$

$$\sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{2} \beta_j \zeta^j = \frac{2}{3}(\zeta^2 + \zeta + 1).$$

Ahora recordemos que dado el Polinomio de Estabilidad del método,

$$\Pi(r,z) = \sum_{j=0}^{2} (\alpha_j - \beta_j) r^j = \rho(r) - z\sigma(r),$$

tenemos que la región de estabilidad, $\mathcal{D}$, se describe

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |r_i(z)| < 1,\ \forall i \in \{1, \dots, q_z\}\},$$

donde $\{r_1(z), r_2(z), \dots, r_{q_z}(z)\} \subset \mathbb{C}$ son los ceros de $\Pi(r,z)$ como función de r. Tenemos que

$$\Pi(r,z) = 0 \iff \begin{cases} \rho(r) = \sigma(r) = 0. \\ \quad ó \\ \quad z = \dfrac{\rho(r)}{\sigma(r)} \end{cases}$$

Ahora bien

$$\rho(r) = 0 \iff r = \pm 1,$$
$$\sigma(r) = 0 \iff r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

(i. e. no existe r tal que $\rho(r) = \sigma(r) = 0$).

Por otro lado

$$\Pi(r,z) = \rho(r) - z\sigma(r) = r^2 - 1 + z\frac{2}{3}(r^2 + r + 1) = (\frac{2}{3}z + 1)r^2 + \frac{2}{3}r + (\frac{2}{3}z - 1).$$

$$\Pi(r,z) = 0 \iff (\frac{2}{3}z+1)r^2+\frac{2}{3}r+(\frac{2}{3}z-1) = 0 \iff \begin{cases} r = r_1 = \dfrac{-z + \sqrt{-3z^2+9}}{2z-3} \\ ó \\ r = r_2 = \dfrac{-z - \sqrt{-3z^2+9}}{2z-3} \end{cases}$$

Necesitamos $|r_i| < 1$, es decir

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |-z + \sqrt{-3z^2+9}| < |2z-3| \text{ y } |-z - \sqrt{-3z^2+9}| < |2z-3|\}$$

Como identificar todos los z en esta región puede ser complicado, recurramos a otro razonamiento:

Sabemos que

$$\partial\mathcal{D} \subset \mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C} : \exists r,\ |r| = 1,\ \text{tal que } \Pi(r,z) = 0\}.$$

Ahora, si $z \in \mathcal{F}$, entonces existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\Pi(e^{i\theta}, z) = \rho\left(e^{i\theta}\right) - z\sigma\left(e^{i\theta}\right) = 0 \Rightarrow z = \frac{\rho\left(e^{i\theta}\right)}{\sigma\left(e^{i\theta}\right)}.$$

Manipulando esa expresión tenemos

$$\begin{aligned}
z &= \frac{3}{2}\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^2 - 1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + \cos\theta + i\sin\theta + 1} \\
&= \frac{3}{2}\frac{\cos^2\theta - 1 - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + 1 - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + \cos\theta + i\sin\theta} \\
&= \frac{3}{2}\frac{-2\sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta}{2\cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + \cos\theta + i\sin\theta} \\
&= \frac{3}{2}\frac{-2\sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) + \cos\theta + i\sin\theta} \\
&= \frac{3}{2}\frac{-2\sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta)}{(2\cos\theta + 1)(\cos\theta + i\sin\theta)}\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\
&= \frac{3}{2}\frac{2\sin\theta i}{(2\cos\theta + 1)} = \frac{3\sin\theta}{2\cos\theta + 1}i
\end{aligned}$$

Así pues

$$\mathcal{F} = \left\{\frac{3\sin\theta}{2\cos\theta + 1}i : \theta \in [0, 2\pi) \setminus \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}\right\} = \{ti : t \in \mathbb{R}\}$$

(la recta imaginaria).

Puesto que $\partial\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ y teniendo $\mathbb{C} \setminus \mathcal{F} = \mathbb{C}^- \uplus \mathbb{C}^+$, podemos concluir que, o bien $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^-$, o bien $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^+$. Basta verlo para un punto:

Tomemos por ejemplo $z = \frac{3}{2}$. Temos que

$$\Pi\left(r, \frac{3}{2}\right) = \rho(r) - \frac{3}{2}\sigma(r) = r^2 - 1 - r^2 - r - 1 = 0 \iff r = -2$$

y evidentemente $|-2| = 2$, no es menor que 1, por tanto $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^-$. Intentemos probar la otra inclusión: para ello haremos uso del lema:

Lema. *Sea una función racional no constante $R(z) = p(z)/q(z)$,p,q, polinomios. Entonces $|R(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{C}^-$ si, y solo si:*

(1) *Todos los polos de R ($\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $q(\alpha) = 0$) tienen parte real positiva, $\Re(\alpha) > 0$.*

(2) $|R(it)| \leq 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$

Intentamos aplicar el lema a $p_1(z) = -z + \sqrt{-3z^2+9}$, $p_2(z) = -z - \sqrt{-3z^2+9}$ y $q(z) = 2z-3$

(1) $q(z) = 0 \iff z = 3/2$ que, evidentemente, tiene parte real positiva.

(2)

$$\begin{aligned}|R_1(it)| = |p_1(it)/q(it)| &= \left|-\frac{it-\sqrt{3t^2+9}}{2it-3}\right| \\ &= \frac{\left|it-\sqrt{3t^2+9}\right|}{|2it-3|} \\ &= \frac{t^2+3t^2+9}{4t^2+9} = 1\end{aligned}$$

(Análogo para $R_2(it) = p_2(it)/q(it)$)

Pudiendo concluir así que $\mathcal{D} = \mathbb{C}^-$ y por tanto teniendo un método $A-estable$.