PROBLEMAS. HOJA 8. Cálculo de Variaciones y Mecánica.

En lo siguiente se usa la notación del lagrangiano

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$$

para un funcional y $\mathcal{H}$ *para la familia de funciones admisibles, que, salvo que se mencionen cambios, será la familia*

$$\{f \in C^1([a,b]) : f(a) = A, f(b) = B\}.$$

Bastará, entonces, dar L *y las condiciones de borde.*

1. Encontrar las funciones extremales en los siguientes casos, dibujar y describir las curvas:

   (a) $L = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$,
   (b) $L = y^2 + 2xyy'$,
   (c) $L = xy + y^2 - 2y^2y'$, $\quad y(0) = 1 \quad y(1) = 2$,
   (d) $L = \sqrt{y(1+y'^2)}$,
   (e) $L = y'(1 + x^2y')$
   (f) $L = y'^2 + 2yy' - 16y^2$,

2. Sea $L = y'^2 + 2y' + y^2$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$. Encontrar las funciones extremales y analizar si en algún caso el funcional alcanza un mínimo en ellas.

3. Sea $L = y'^2 - \omega^2 y^2$ con ω constante, $y(0) = y(\pi) = 1$. Encontrar los extremales. Comprobar que para el caso $\omega^2 = 3$ el extremal no da un mínimo de J.

4. Hallar las geodésicas de la esfera.

5. Hallar las geodésicas de pseudoesfera $\mathbf{r}(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a(\cos u + \ln \tan u/2))$.

6. Calcular las ecuaciones de Euler–Lagrange (primera variación) del funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x))dx$$

7. Demostrar que si $M \in C[a,b]$ y si

$$\int_a^b M(x)\eta'(x)dx = 0$$

   para todo $\eta \in C^1[a,b]$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ se sigue que $M(x) \equiv C$. [1]

8. Escribir el lagrangiano para el problema de la superficie de revolución de área mínima para un giro alrededor del eje vertical y resolver Euler–Lagrange.

[1] Esto es el principio del concepto de derivada distribucional, o derivada débil

9. **(Catenaria)** Una cadena $y(x)$ de densidad lineal ρ está colgada en equilibrio bajo la fuerza de la gravedad entre los puntos $A = (-a, h)$ y $B = (a, h)$. Determinar $y(x)$. ¿Qué puede afirmarse acerca de las constantes de integración?

10. Hallar las geodésicas del cilindro

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)$$

y del cono

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, mr).$$

11. Considerar el problema de minimizar

$$J[y] = \int_0^1 (1 + y'^2)^{1/4} dx, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 1$$

Demostrar que el ínfimo es 1, pero que no se alcanza en ninguna función admisible.

12. Encontrar un Lagrangiano $L(x, y, y')$ para el que la ecuación de Euler–Lagrange es

$$y'' + p(x)y + q(x) = 0$$

13. Para el funcional habitual

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx.$$

a) Comprobar que si se realiza un cambio de variables $x = u(t)$ entonces la ecuación de Euler-Lagrange tiene las mismas soluciones (en las nuevas coordenadas).

b) Comprobar que si se realiza un cambio de variables $y = f(z)$ entonces la ecuación de Euler-Lagrange tiene las mismas soluciones (en las nuevas coordenadas).

14. **Máquina de Atwood**. De una polea cuelga por un lado una masa m_1 y por el otro un mono de masa m_2. Supongamos que $m_2 < m_1$ y que el mono trepa con velocidad $v(t)$ respecto de la cuerda. Estudiar el movimiento. ¿Es posible que el mono pueda elevar la masa m trepando suficientemente deprisa?

15. Describimos movimiento de la luz en una fibra óptica orientada a lo largo del eje z. La fibras modernas tienen un índice de refracción que depende de la distancia al centro de la fibra. El principio de Fermat nos dice que la luz minimiza la longitud óptica. Usando coordenadas cilíndricas, (r, θ, z) la longitud del camino es,

$$cT = \int_{z_1}^{z_2} n(r)\sqrt{(r'(z)^2 + (r\theta')^2 + 1)}dz$$

Utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange y la analogía con dimension 1 para encontrar dos integrales primeras que describan el movimiento.

16. Encontrar un Lagrangiano para una partícula sobre la que actúa la fuerza electromagnética, la fuerza de Lorentz $F_L = E + v \times B$[2], donde E es el campo eléctrico, B es el campo magnético y v es la velocidad.

[2] Por simplicidad la carga $q = 1$ y la velocidad de la luz también

i) El campo magnético obedece la ley de Faraday $\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E$ y la ley de Gauss div$(B) = 0$. Probar que existe una función escalar $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y una función vectorial $\phi(q,t) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ tal que

$$B = \nabla \times \phi, \qquad E = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla A$$

ii) Dado un vector v y campo vectorial $G = (G_1, G_2, G_3)$ probar la siguiente identidad integral. Para cada coordenada $i = 1, 2, 3$

$$(v \times \nabla \times G)_i = \partial_i (v \cdot G) - v \cdot \nabla G_i$$

iii) Sea $V(q, \tilde{q}) = A(q) - \phi(q,t) \cdot \dot{q} = A - \phi_1 \dot{q}_1 - \phi_2 \dot{q}_2 - \phi_3 \dot{q}_3$. Probar que las ecuaciónes de Euler Lagrange del correspondiente Hamiltoniano $L = T - V$ son las ecuaciones de Newton respecto a la fuerza de Lorentz. Es decir,

$$F_L = m\ddot{q}$$