Ejercicios 23 a 26

$\boxed{23}$ Ⓐ $A \in M_{m\times n}$ (A es la matriz de un operador lineal: $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$)
(en sus bases canónicas)

- Si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, $\|A\|$ (norma de operador de A)
es $\|A\| = \sup\left(\|A.x\| : \|x\| = 1\right)$
Es más conveniente escribir $\|A\| = \sup\left(\|A.x\| : \|x\| \leq 1\right)$.

a) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$
en las bases canónicas

Sol:

$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$ donde $F_i \in M_{1\times n}$ $\quad F_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$

$A = (C_1 \cdots C_n)$ donde $C_j \in M_{m\times 1}$ $\quad C_j = \begin{pmatrix} C_{1j} \\ \vdots \\ C_{mj} \end{pmatrix}$

Para $j = 1, \dots, n$ si e_j es el j-ésimo vector de la BC de $\mathbb{R}^n$ (espacio de salida).

$A.e_j = C_j \;;\; \|A.e_j\|_1 = \|C_j\|_1 \quad \forall j = 1, \dots, n \qquad (1)$

$(1) \Rightarrow \|A\|_1 \geq \max\limits_{1\leq j\leq n} \|C_j\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

Veamos ahora que $\|A\|_1 \leq \max\limits_{1\leq j\leq n} \|C_j\|_1$

Si $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_1 \leq 1$, $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ (vectores canónicos en $\mathbb{R}^n$) ; $\|x\|_1 \leq 1 \longleftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \leq 1$

$\|A.x\|_1 = \|A(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j)\|_1 \underset{\text{porque } A \text{ es lineal}}{=} \|\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \underbrace{A e_j}_{C_j}\|_1 \underset{\text{MinKowsKy}}{\leq} \sum\limits_{j=1}^{n} \|x_j C_j\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \|C_j\|_1 \leq$

$\leq \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \max\limits_{1\leq j\leq n} \|C_j\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \|C_j\| \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|}_{\leq 1} \leq \max\limits_{1\leq j\leq n} \|C_j\|$

sacamos el máximo fuera porque, al ser un máximo, no depende de j.

b) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1} |a_{ij}|$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_\infty \le 1$ (si $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$, $\max\limits_{1\le j\le n} |x_j| \le 1$)

$$A.x = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} F_1 . x \\ \vdots \\ F_m . x \end{pmatrix} \Rightarrow \|A.x\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \underbrace{|F_i . x|}_{\le \|F_i\|_1 \|x\|_\infty} \le$$

(Hölder $p=1$, $p'=\infty$)

$$\le \left(\max_{1\le i\le m} \|F_i\|_1\right) \underbrace{\|x\|_\infty}_{\le 1} \Rightarrow \|A\|_\infty \le \max_{1\le i\le m} \|F_i\|_1$$

Veamos que $\|A\|_\infty \ge \max\limits_{1\le i\le m} \|F_i\|_1$:

Supongamos que el máximo de $\|F_i\|_1$ se da en i_0 (con $1\le i_0$

$$F_{i_0} = (a_{i_0 1}, \dots, a_{i_0 n})$$

Tomemos $x = (\mathrm{sgn}(a_{i_0 1}), \dots, \mathrm{sgn}(a_{i_0 n}))$, donde para $t \in \mathbb{R}$

$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t=0 \\ -1, & t<0 \end{cases}$. Entonces $|\mathrm{sgn}(t)| \le 1 \ \forall t$ y

además $\forall t \in \mathbb{R}$, $t.\mathrm{sgn}(t) = |t|$

$|\mathrm{sgn}(t)| \le 1 \ \forall t \Rightarrow \|x\|_\infty = 1$ y para este x,

$$(A.x)_{i_0} = |F_{i_0} . x| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} . \mathrm{sgn}(a_{i_0 j})\right| \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \|F_{i_0}\|_1$$

(B) Demostrar $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

Es lo mismo que demostrar que $\|A\|_2 \leq \left(\|A\|_1 \|A\|_\infty\right)^{1/2}$

Sol: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario

$$\|Ax\|_2^2 = \langle A.x, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$$ donde $B = A^*A \geq$

$$\Rightarrow \|A\|_2^2 = \sup_{x : \|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2^2 = \sup_{x : \|x\|_2 \leq 1} \langle Bx, x \rangle \quad (1)$$

Veamos como es B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} = (a_{ij}) \Big|_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m} = (\tilde{a}_{ij}) \Big|_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$ con $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$

A^*A es $A^TA = (\tilde{a}_{ij})(a_{ij}) \in M_{n \times n} = (b_{ij})$ con $1 \leq i, j \leq n$ y

enchufando esto aquí

$$b_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{il} a_{lj} = \sum a_{li} a_{lj} \quad (2)$$

Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle Bx, x \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$

$$0 \leq \langle Bx, x \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \leq \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| |x_i x_j| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| \frac{x_i^2 + x_j^2}{2}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| x_i^2$$ (esto es así porque $\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| x_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| x_j^2$, porque a su vez $b_{ij} = b_{ji}$)

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| x_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \right)}_{\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|} x_i^2 \leq$$

$$\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \right) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{\|x\|_2^2 \leq 1}$$

Hemos probado que $\|A\|_2^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| =$

$$= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{l=1}^{m} a_{li} a_{lj} \right| \quad \text{(por (2))}$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |a_{li}||a_{lj}| \right) = \max_{1\le i\le n} \left(\sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{li}||a_{lj}| \right) =$$

$$= \max_{1\le i\le n} \left(\sum_{l=1}^{m} |a_{li}| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |a_{lj}|}_{\le \max\limits_{1\le l\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{lj}|} \right) \le \underbrace{\left(\max_{1\le i\le n} \sum_{l=1}^{m} |a_{li}| \right)}_{\|A\|_1} \underbrace{\left(\max_{1\le l\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{lj}| \right)}_{\|A\|_\infty}$$

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle \le \|Ax\|_1 \, \|Ax\|_\infty \le$$

$$\le \|A\|_1 \|x\|_1 \, \|A\|_\infty \|x\|_\infty = \|A\|_1 \|A\|_\infty \|x\|_\infty$$

$\boxed{25.}$

A) $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\qquad f: \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$

$$f(X) = X^T M$$

Calcular df_A para cada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Sol: $(df)_A : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$

$\qquad\qquad B \longmapsto ?$

recta que en $t=0$ pasa por A y que es tangente a B.

$$(df)_A(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\widetilde{A+tB}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A^T + tB^T)M =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A^TM + tB^TM) = B^TM$$

Sol2:

Como f es lineal:

$$f(X+Y) = (X+Y)^TM = X^TM + Y^TM = f(X) + f(Y)$$

$$f(aX) = aX^TM = a\,f(X)$$

entonces $df = f$.

$\Longrightarrow (df)_A(B) = f(B) = B^TM$

B) $f: \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$

$X \longmapsto X^T X$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $(df)_A$

Sol:

$$(df)_A(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(A+tB) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(A+tB) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A+tB)^T(A+tB) = A^TA + t\left(B^TA + A^TB\right) + t^2 B^T B$$

$$= B^TA + A^TB + (2t)B^TB\Big|_{t=0} = B^TA + A^TB$$

c) $f: \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$

$X \longmapsto tr(X^TX)$

$$\mathbb{R}^{m\times n} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^{n\times n} \xrightarrow{h=tr()} \mathbb{R}$$

$$X \longmapsto X^TX \longmapsto tr(X^TX)$$

$$(df)_A(B) = (dh)_{g(A)} \circ (dg)_A \, (B) =$$

$$= (dh)_{g(A)}\left(A^TB + B^TA\right) =$$

$$= tr\left(A^TB + B^TA\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} tr(X+Y) = tr(X) + tr(Y) \\ tr(\lambda X) = \lambda X \end{array}\right\} \text{traza func. lineal}$$

RECUERDO: Regla cadena

$$p \in \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}^\ell$$

$$f = h \circ g$$

$$(df)_p = (dh)_{g(p)} \circ (dg)_p$$

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{dg_p} \mathbb{R}^n \xrightarrow{dh_{g(p)}} \mathbb{R}^\ell$$

$$df_p$$

OTRA FORMA:

$$(dtr)_C(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} tr(C+tB) = \frac{d}{dt}\left(tr(C) + t.\,tr(B)\right) = tr(B)$$

D) P, Q matrices

$$f: \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{a\times b}$$

$$g(X) = \underbrace{P}_{l\times a} . \underbrace{f(\underbrace{X}_{m\times n} . \underbrace{Q}_{n\times n})}_{a\times b}$$

¿$(dg)_A$?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "R_Q"] \arrow[rrr, bend right, "g"'] & X.Q \arrow[r, "f"] & f(X.Q) \arrow[r, "L_P"] & P. f(X.Q) \end{tikzcd}$$

$$g = L_P \circ f \circ R_Q$$

R_Q y L_P lineales

$$(dg)_A = (dL_P)_{f(AQ)} \circ (df)_{\underset{R_Q(A)}{\overset{\shortparallel}{AQ}}} \circ (dR_Q)_A = L_P \circ (df)_{AQ} \circ R_Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(dg)_A (B) = P. \, df_{AQ} (BQ)}$$

$\boxed{25.}$

A) $f: \underset{\text{matrices } m\times n}{\mathbb{R}^{m\times n}} \longrightarrow \underset{\text{matrices } n\times n}{\mathbb{R}^{n\times n}}$

$X \longmapsto X^T \cdot M \; ; \; M \in M_{m\times n}$ fijada

df_A es "fácil": f es lineal $\Rightarrow df_A = f \quad \forall A$

$df_A(X) = f(X) \quad \forall X, A \in M_{m\times n}$

B) $f: \underset{\substack{\text{matrices}\\ m\times n}}{\mathbb{R}^{m\times n}} \longrightarrow \underset{\substack{\text{matrices}\\ n\times n}}{\mathbb{R}^{n\times n}}$

$X \longmapsto X^T \cdot X$

$f(A+X) = (A+X)^T \cdot (A+X) = (X^T + A^T)\cdot(A+X) =$

$= A^TA + X^TA + A^TX + X^TX =$

$= f(A) + \underbrace{\{X^TA + A^TX\}}_{\text{lineal en } X \text{ cuando } A \in M_{m\times n} \text{ es fijo}} + f(X) \xrightarrow{\text{Pedro le llamó}} R(X)$

Deberíamos tener $Df_A(X) = X^TA + A^TX$. Por eso hay que ver que $R(X) = o(\|X\|)$.

De hecho, $\|R(X)\| = \|X^T \cdot X\| \leq \|X^T\| \cdot \|X\| \leq C \cdot \|X\|^2$ porque

$H: M_{m\times n} \longrightarrow M_{n\times m}$ es lineal (luego acotada en dim $< \infty$)

$X \longmapsto X^T$

Además, puede probarse que $\|X^T\| = \|X\|$.

26. (A) $A \in M_{K\times K}$ con $\|A\| < 1$

1) Ver que $I - A$ es invertible

Dem

$I-A$ es lineal por ser una combinación lineal de operadores lineales.

$I-A$ invertible $\iff \operatorname{Ker}(I-A) = \{0\}$

Si $x \in \operatorname{Ker}(I-A) \iff (I-A)x = 0 \iff x = Ax$

$\Rightarrow \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\| \Rightarrow (1-\|A\|)\|x\| \leq 0 \Rightarrow \|x\| \leq 0$

$\Rightarrow x = 0.$

2) Ver que $\lim_{n\to\infty} A^{\infty} = 0$

Dem

$$\|A^n\| = \|\underbrace{A \dots A}_{n}\| \leq \|\underbrace{A}_{<1}\|^n \longrightarrow 0 \quad \blacksquare$$

3) (FÓRMULA DE NEUMANN) $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ con

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < \infty$$

Dem

Sea $B = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < \infty$

(la serie que define B converge absolutamente) y $\mathbb{R}^{K^2}$ es completo. B está bien definida en $\mathbb{R}^{K^2}$. Veamos que $(I-A)B = B(I-A) = I$

$(I-A)\cdot B = IB - AB = B - A\left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right) = B - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1}$, $n+1 = m$

$$\Rightarrow B - \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A^m}_{\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} A^m}_{B} - I} = B - (B - I) = I$$

(B) $f(X) = X^{-1}$ donde X matriz invertible

Utilizar la identidad $I - X^2 = (I+X)(I-X)$ para demostrar:

$$f(I-X) - f(I) - X = X^2 f(I-X) \qquad \|X\| < 1$$

$I + X = (I - X^2)(I-X)^{-1} =$ por (A) esto está bien definido si $\|X\| < 1$

$$= (I-X)^{-1} - X^2 (I-X)^{-1} = f(I-X) - X^2 f(I-X) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(I-X) = I + X - X^2 f(I-X) \Rightarrow$ cambiamos X por $-X$

$$\Rightarrow f(I+X) = \underbrace{I}_{f(I)} \underbrace{- X}_{\text{lineal en } X} \underbrace{- X^2 f(I+X)}_{\text{término de error}}$$

$\|X^2 f(I+X)\| \leq \|X\|^2 \|f(I+X)\| \leq \dfrac{\|X\|^2}{1 - \|X\|}$ con $\|X\| < 1$

$< 2\|X\|^2$ si $\|X\| \leq 1/2$

Comparar normas en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo:

$\|x\|_p,\ \|x\|_q \qquad 1 \le p, q \le \infty$

- Si $p \le q$, $\quad \|x\|_q = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^q\right)^{1/q}$

$$\|x\|_q^p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^q\right)^{p/q} \le \qquad p/q \to \in [0,1]$$

obs: $t \longrightarrow t^{\alpha}$ $(0 < \alpha \le 1)$ $(t \ge 0)$ es cóncava creciente subaditiva $(t+s)^{\alpha} \le t^{\alpha} + s^{\alpha}$

$$\le \sum_{j=1}^{n} (|x_j|^q)^{p/q} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p = \|x\|_p^p \Longrightarrow \|x\|_q \le \|x\|_p$$

$\longrightarrow$ la constante de acotación es 1.

Al revés: $p \le q$ y quiero controlar $\|x\|_p$ con $\|x\|_q$:

Uso Hölder:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \cdot 1\right)^{1/p} \le$$

uso Hölder con exponentes $\frac{q}{p} \ge 1$ y su conjugado

$$\le \Bigg[\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{p \cdot \frac{q}{p}}\right)^{p/q}}_{\|x\|_q^p} \cdot \underbrace{\|(1, \dots, 1)\|_{(q/p)'}}_{= \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} 1}_{=n}\right)^{1/(q/p)'} = n^{1/(q/p)'} = n^{\frac{q-p}{q}}} \Bigg]^{1/p}$$

$$\Longrightarrow \|x\|_p \le \left(\|x\|_q^p \cdot n^{\frac{q-p}{q}}\right)^{1/p} = n^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|x\|_q$$

$$\Longrightarrow \|x\|_p \le n^{\frac{q-p}{pq}} \|x\|_q$$