ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 3. Espacios Euclídeos y Unitarios III. Aplicaciones adjuntas.

1. Encuentra la aplicación adjunta de:

a) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$ con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

b) La misma aplicación del apartado (a) con el producto escalar del ejercicio 6 de la hoja 2.

c) Con la notación y el producto escalar del ejercicio 5 de la hoja 2, la aplicación $g : V_2 \to V_2$ dada por $g(p(x)) = xp'(x) - (xp(x))'$.

d) La aplicación $T : \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t + A$ con el producto escalar del ejercicio 10 de la hoja 1.

2. Sea V un espacio vectorial euclídeo o unitario y sean $I_V, f, g : V \to V$ donde I_V es la identidad y f, g son dos endomorfismos cualesquiera. Demuestra que:

a) $\widetilde{I_V} = I_V$;

b) $\widetilde{\widetilde{f}} = f$;

c) $\widetilde{f + g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$;

d) $\widetilde{f \circ g} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$;

e) Si f es biyectiva, entonces $\widetilde{f^{-1}} = (\widetilde{f})^{-1}$;

f) $(\text{Im } f)^{\perp} = \text{Ker}\widetilde{f}$;

g) $(\text{Ker} f)^{\perp} = \text{Im } \widetilde{f}$.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sean $f, g : V \to V$ dos aplicaciones autoadjuntas. Decide de manera razonada si la composición $f \circ g$ es autoadjunta. NO $\widetilde{(f \circ g)} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f} = g \circ f \Leftrightarrow g \circ f = f \circ g$

4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n. Se dice que una aplicación lineal $P : V \to V$ es una proyección si $P^2 = P$. El subespacio Ker P es la *dirección de la proyección* y el subespacio Im P es el *subespacio sobre el que se proyecta.*

a) Demuestra que una proyección siempre es diagonalizable.

b) Demuestra que $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$.

c) Si V es euclídeo o unitario, se dice que una proyección es *ortogonal* si $\ker P$ es ortogonal a $\text{Im}P$. Fijado un espacio de proyección $W \subset V$, podemos considerar el conjunto X de todas las proyecciones $P : V \to V$ con Im $P = W$. Demuestra que lass proyecciones ortogonales minimizan la longitud del vector $u - P(u)$, i.e., si T es la proyección ortogonal sobre W demuestra que

$$\|u - T(u)\| = \min\{\|u - P(u)\| : P \in X\}.$$

d) Demuestra que P es una proyección ortogonal si y sólo si es una proyección autoadjunta. *Sugerencia: Prueba que $(Pu, v) = (Pu, Pv)$.*

5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n. Se dice que una aplicación lineal $S : V \to V$ es una simetría si $S^2 = I_V$. El subespacio $W_1 = \text{Ker}(S + I_V)$ es la *dirección de la simetría* y el subespacio $W_2 = \text{Ker}(S - I_V)$ es el *subespacio respecto al que se hace la simetría.*

a) Demuestra que una simetría siempre es diagonalizable.

b) Demuestra que $V = \text{Ker}(S + I_V) \oplus \text{Ker}(S - I_V)$.

c) Observa que cada $u \in V$ se escribe de manera única como la suma de un vector en W_1 y otro en W_2, i.e., $u = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Demuestra que $S(u) = w_1 - w_2$.

d) Supongamos que es V un espacio vectorial euclídeo o unitario. Demuestra que una simetría es autoadjunta si y sólo si $W_1 \perp W_2$ (cuando $W_1 \perp W_2$ se dice que la simetría es ortogonal).

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^n$ es simétrica. Demuestra que f es diagonalizable en una base ortonormal.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en la base estándar de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentra una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de f sea diagonal.

8. Sea $f : \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{K})$ la aplicación que a cada matriz A le asocia su traspuesta, i.e., $f(A) = A^T$. Demuestra que existe una base ortonormal en la que f es diagonalizable. Encuentra esa base.

HOJA 3

1. Encuentra la aplicación adjunta de:

a) $h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $h(x,y,z) = (x+y+z\,,\ x+2y+2z\,,\ x+2y+3z)$ φ_{usual}

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$M_B(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_B(\tilde{h}) = M_B(h)^T = M_B(h) \Rightarrow \boxed{\tilde{h} = h} \text{ autoadjunt}$$

b) $M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ B no es ortonormal con respecto a φ

Con Gram-Schmidt calculamos base o.n. $C = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,1,1)\}$

Necesitamos $M_C(h)$:

$M_C(\varphi) = I_3$

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{CB} = (M_{BC})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_C(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_C(\tilde{h}) = M_C(h)^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) (hecho por Ana)

Producto escalar:

$$\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

$$h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad B=\{e_1,e_2,e_3\}$$

$$(x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Con Gram-Schmidt obtenemos base ortonormal de φ:

$$\tilde{B} = \{(1,0,0),\ (-1,1,0),\ (-1,1,1)\}$$

$$¿M_{\tilde{B}}(h)? \Rightarrow M_{\tilde{B}}(h) = M_{\tilde{B}B}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot M_{B\tilde{B}} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$M_{\tilde{B}}(\tilde{h}) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$M_B(\tilde{h}) = M_{B\tilde{B}}\cdot M_{\tilde{B}}(\tilde{h})\cdot M_{\tilde{B}B}$$

c) $g: V_2 \longrightarrow V_2$

$p(x) \longmapsto x p'(x) - (x p(x))'$ $\qquad$ ¿ $\tilde{g}$?

$$\varphi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t) \cdot q(t)\, dt$$

paso 1: Base ortonormal de V_2 : $\tilde{B}$
paso 2: calcular $M_{\tilde{B}}(g)$
paso 3: trasponer $M_{\tilde{B}}(\tilde{g}) = M_{\tilde{B}}(g)^T$

$B = \{1, x, x^2\}$

$\tilde{\omega}_1 = 1 \qquad \|\omega_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2$

$\omega_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tilde{\omega}_2 = x - \lambda \omega_1 = x - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$

$\varphi(\tilde{\omega}_2, \omega_1) = 0$

$$\overset{\shortparallel}{\int_{-1}^{1}\left(t - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\, dt} = \underbrace{\int_{-1}^{1} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt}_{0} - \lambda \Rightarrow \lambda = 0$$

$\tilde{\omega}_2 = x \qquad \|\tilde{\omega}_2\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2/3$

$\omega_2 = x \cdot \sqrt{3/2}$

$\tilde{\omega}_3 = x^2 - \alpha\omega_1 - \beta\omega_2 = x^2 - \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \beta \cdot x \cdot \sqrt{3/2}$

$$\alpha = \varphi\left(x^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_{-1}^{1} t^2/\sqrt{2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left.\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\beta = \varphi\left(x^2, x\sqrt{3/2}\right) = \int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{3/2}\, dt = 0$$

$\tilde{\omega}_3 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \omega_3 = \frac{\tilde{\omega}_3}{\|\tilde{\omega}_3\|}$

$\boxed{7.}$ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_f(x) = -x^3 + 3x + 2$ (tienen que salir todos los autovalores reales)

$x = -1$ doble $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker}(f + I_3) = 2 \longrightarrow$ plano ↘ son

$x = 2$ simple $\quad \dim \operatorname{Ker}(f - 2I_3) = 1 \longrightarrow$ recta ↗ ortogonales

$\operatorname{Ker}(f + I_3) = \{x + y + z = 0\}$

$\operatorname{Ker}(f - 2I_3) = \{x = y = z\}$

$\hookrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Sacamos base ortonormal del plano

$\hookrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

$\boxed{4.}$ $P: V \longrightarrow V$

a) $x^2 - x$; $P^2 - P = 0$

$m_p(x) \mid x^2 - x$

- $\longrightarrow x \rightsquigarrow P = 0 \rightarrow$ matriz cero $\rightarrow$ diagonalizable
- $\longrightarrow x - 1 \rightsquigarrow P = I_V \rightarrow$ diagonal
- $\longrightarrow x(x-1) \rightsquigarrow P$ es diagonalizable y sus autovalores son 1 y/o 0.

$\hookrightarrow B' = \{\underbrace{v_1, \ldots, v_r}_{\text{autovectores con autovalor } 1}, \underbrace{v_{r+1}, \ldots, v_n}_{\text{autovalores con autovalor } 0}\}$

$$M_{B'}(P) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$\boxed{5.}$ $S: V \longrightarrow V$ simetría si $S^2 = Id$

B base $M_B(S)^2 = Id$

Polinomio mínimo de $S \mid x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Si $S \neq Id$ ni $S \neq -Id$

entonces el polinomio mínimo de S es $x^2 - 1$.

a) $\exists$ base de V formada por vectores propios de $Ker(S - Id)$ y $Ker(S + Id)$ en la que la matriz de S es diagonal

b) $V = Ker(S + Id) \oplus Ker(S - Id)$

$$\left.\begin{array}{ll} W_1 = Ker(S + Id) & B_1 \text{ base de } W_1 \\ W_2 = Ker(S - Id) & B_2 \text{ base de } W_2 \end{array}\right\} B = B_1 \cup B_2$$

$$M_B(S) = \left(\begin{array}{c|c} -I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

c) $u \in V$, $u = \underbrace{w_1}_{W_1} + \underbrace{w_2}_{W_2}$, $S(u) = w_2 - w_1$