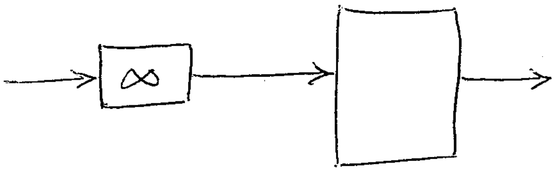
$\boxed{M/M/1}$



$$P_n = (1-\rho)(\rho)^n$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

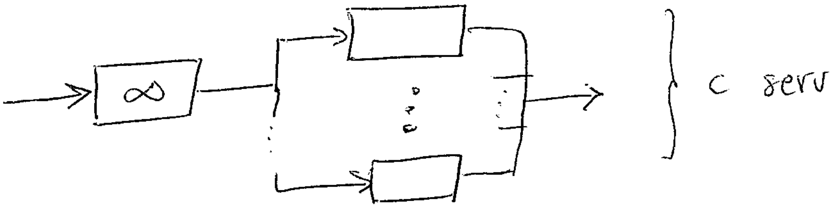
$$F_W(t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad \text{(Tma. Little)}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$\boxed{M/M/c}$ c servidores



$$P_n = \begin{cases} P_0 \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & (n<c) \\[2ex] P_0 \dfrac{c^c}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^n & (n \geq c) \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=1}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1}$$

$$P_q = \frac{P_c}{1-\rho} = E_c(c,u)$$

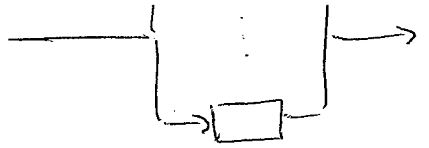
$$L = \frac{P_q\,\rho}{1-\rho} + c\rho$$

$$W = \frac{P_q}{c\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{P_q}{c\mu-\lambda}$$

$$L_q = P_q \frac{\rho}{1-\rho}$$

M/M/c/c c clientes, no hay colas



sin colas

$$P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (0 \le n \le c)$$

$$W_q = 0 \qquad L_q = 0$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1}$$

$$W = \frac{1}{\mu}$$

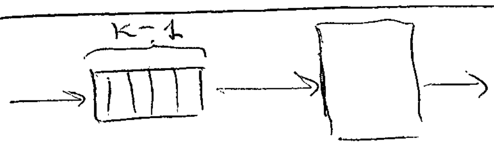
$$P_c = \frac{(\lambda/\mu)^c/c!}{\sum_{i=0}^{c}\left[(\lambda/c)^i/i!\right]} = E_B(c,u)$$

$$L = \lambda' W = \frac{\lambda}{\mu}(1-P_c) = c\rho$$

$$\lambda' = \lambda(1-P_c) \quad \left(\text{tasa de llegadas efectiva}\right)$$

$$\rho = \frac{\lambda'}{c\mu} = \frac{\lambda}{c\mu}(1-P_c)$$

M/M/1/K K unid. sist. (cola finita)



$$P_n = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad (0 \le n \le K)$$

$$\lambda' = \lambda(1-P_K) = \begin{cases} \lambda\dfrac{1-(\lambda/\mu)^K}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} & (\lambda \ne \mu) \\ \lambda\dfrac{K}{K+1} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} & (\lambda \ne \mu) \\ \dfrac{1}{K+1} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

$$W = \frac{L}{\lambda'} = \frac{L}{\lambda(1-P_K)}$$

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu}\left[\dfrac{1-(\lambda/\mu)^K}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}\right] & (\lambda \ne \mu) \\ \dfrac{K}{K+1} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = L - \frac{\lambda'}{\mu} = L - \rho$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}\left[\dfrac{1-(K+1)(\lambda/\mu)^K + K(\lambda/\mu)^{K+1}}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}\right] & (\lambda \ne \mu) \\ K/2 & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

CLIENTE

El tiempo entre llegadas consecutivas es una variable aleatoria A

$A(t) :=$ función de distribución acumulada

$E[A] = T_a :=$ valor medio esperado

Nº medio de llegadas por unidad de tiempo $\lambda = \frac{1}{T_a}$
(TASA DE LLEGADAS)

SERVIDOR

El tiempo de servicio de un servidor será una variable aleatoria S

$S(t) :=$ func. distribución acumulada

$E[S] = T_s$

Nº medio de clientes servidos por unidad de tiempo $\mu = \frac{1}{T_s}$
(TASA DE SERVICIO)

COLAS

$u :=$ intensidad de tráfico $u = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{T_s}{T_a}$

$\rho :=$ factor utilización del servidor equivalente a la probabilidad de que el servidor esté activo en un instante dado.

- La ocupación del sistema es un proceso aleatorio. El nº de clientes en su estado estable es una variable aleat. N en el sistema
  $E[N] = L$, nº medio de clientes en el sistema
  $P_n :=$ prob. de que en el sistema haya n unidades
- La ocupación de la cola del sist. es un proceso aleatorio. El nº de clientes de su estado estable es una v.a. N_q en cola.
  $E[N_q] = L_q$, nº medio de clientes

- El tiempo de estancia en el sistema es una v.a. T
  $W(t) :=$ la func. de distribución acumulada de T
  $E[T] = W :=$ tiempo medio de estancia en el sistema

- El tiempo de espera en cola en el sist. es una v.a. T_q
  $W_q(t) :=$ func. de distribución acumulada
  $E[T_q] = W_q :=$ tiempo medio de espera en cola.

$$\boxed{W = W_q + T_s = W_q + \frac{1}{\mu}} \qquad \boxed{W = \frac{1}{\mu - \lambda}}$$

Teorema de Little: Relaciona el nº medio de clientes con el tiempo medio de estancia, tanto en el sistema como en cola:

$$L = \lambda W \qquad L_q = \lambda W_q \qquad \boxed{L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}}$$

$$\boxed{L = L_q + \lambda T_s = L_q + \lambda/\mu}$$

Probabilidad de 0 clientes: $\boxed{P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}}$

$\boxed{M/G/1}$

$$\mathbb{E}[S] = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{1}{\mathbb{E}[S]}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \mathbb{E}[S]$$

$$W_q = \frac{\lambda \mathbb{E}[S^2]}{2(1-\rho)}$$

$$W = \frac{\lambda \mathbb{E}[S^2]}{2(1-\rho)} + \mathbb{E}[S]$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2 \mathbb{E}[S^2]}{2(1-\rho)}$$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda^2 \mathbb{E}[S^2]}{2(1-\rho)} + \rho$$

$$c^2 = \frac{Var[X]}{\mathbb{E}[X]^2}$$

- $0 < c^2 < 0'7$: uniforme
- $0'7 < c^2 < 1'3$: Poisson
- $1'3 < c^2$: tendencia al agrupamien (hiperexponencial

$\boxed{M/M/1/\infty/M}$ M clientes

$T_c :=$ tiempo en que un cliente está activo $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{T_c}$

$$P_n = P_0 \binom{M}{n} n! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = P_0 \frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$\lambda' = \mu\rho = \mu(1-P_0)$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$W = \frac{1}{\lambda'}\left[M - \frac{\mu}{\lambda}\rho\right] = \frac{M}{\mu\rho} - \frac{1}{\lambda}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$\rho = 1 - P_0$$

$$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{\mu}{\lambda}\rho$$

$$L_q = \lambda' W = M - \frac{\mu}{\lambda}\rho - \rho$$

$\boxed{M/M/c/\infty/M}$ c servidores, M clientes, $c < M$

$$\lambda' = c\mu\rho$$

$$W = \frac{M T_s}{c\rho} - T_c$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & (0 \leq n < c) \\ P_0 \binom{M}{n} \frac{n!}{c^{n-c} c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & (c \leq n < M) \end{cases}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{M} \binom{M}{n}\frac{n!}{c^{n-c} c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$\rho = 1 - \sum_{n=0}^{c-1} P_n \frac{c-n}{c}$$

$$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{c\mu}{\lambda}\rho$$