CALCULO I. DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA.

SOLUCIÓN DE LA ENTREGA 5.

(1) **Usa el Teorema del Valor Medio para probar la desigualdad**

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x,$$

para $x > 0$.

Por el Teorema del Valor Medio, si una función definida en $[a, b]$ es continua en el intervalo cerrado y derivable en el intervalo abierto, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para probar $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x$, tomamos la función $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$. Esta función es continua y derivable para todo $x > 0$, así que, por el Teorema del Valor Medio, para $0 < a < b$ existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{\arctan b - \frac{b}{1+b^2} - \arctan a + \frac{a}{1+a^2}}{b - a}.$$

Como $f'(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{\arctan b - \frac{b}{1+b^2} - \arctan a + \frac{a}{1+a^2}}{b - a} \geq 0,$$

es decir,

$$\arctan b - \arctan a \geq \frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2}.$$

Si sustituimos $b = x$ y $a = 0$ (algo que podemos hacer ya que nos piden demostrar esta desigualdad para $x > 0$), obtenemos

$$\arctan x \geq \frac{x}{1+x^2}.$$

La otra desigualdad se prueba de manera similar, haciendo uso de la función auxiliar $g(x) = x - \arctan x$.

(2) **Calcula el siguiente límite**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x}{(\log(1+x))^4}.$$

Los desarrollos de Taylor de las funciones $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ y $\log(1+x)$ en $x = 0$ son:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6),$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5),$$

$$\log(1+x) = x + O(x^2).$$

De aquí se sigue

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x}{(\log(1+x))^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) - 1 + \frac{1}{2}x(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))}{(x + O(x^2))^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4!} + O(x^6) - \frac{x^4}{12} + \frac{xO(x^5)}{2}}{(x + xO(x))^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{1}{24} - \frac{1}{12})x^4 + O(x^6)}{x^4(1 + O(x))^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{24} + O(x^2)}{(1 + O(x))^4} = -\frac{1}{24}
\end{aligned}$$

(3) **Usando el Polinomio de Taylor, halla** sen(1) **con error menor a** 10^{-5}.

El desarrollo de Taylor hasta grado n respecto a $x = 0$ es

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos c$$

donde $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos c$ es el resto de grado n y c es un valor cercano a cero. El valor de sen(1) será

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\cos c,$$

Como la diferencia entre el valor real de sen 1 y de su polinomio de Taylor es el resto, buscamos n tal que

$$\frac{|\cos c|}{(2n+1)!} < 10^{-5}$$

(tomando el valor absoluto del resto). Como $|\cos c| \leq 1$,

$$\frac{|\cos c|}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{(2n+1)!},$$

y nos basta con encontrar un n tal que

$$\frac{1}{(2n+1)!} < 10^{-5},$$

es decir, $n = 4$. Con este valor, vemos que

$$\operatorname{sen} 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}$$

aproxima sen(1) con un error menor que 10^{-5}.