EJERCICIO 1

1) Como el refugio protege a K presas, añadimos esta constante restando a la x (presas) en los términos cruzados. En conclusión:

$$\begin{cases} X' = aX - cY(X-K) = f(x,y) \\ Y' = -bY + dY(X-K) = g(x,y) \end{cases}$$

2) Nullclinas para $x'=0$:

$$ax - cy(x-K) = 0 \Rightarrow ax = cy(x-K) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{ax}{c(x-K)}}$$

Nullclinas para $y'=0$:

$$-by + dy(x-K) = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

$$-b + d(x-K) = 0 \Rightarrow xd - Kd = b \Rightarrow \boxed{x = \frac{b}{d} + K}$$

Los puntos críticos son donde se cortan las nullclinas:

$$\begin{cases} ax - cy(x-K) = 0 \\ -by + dy(x-K) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$ claramente $(0,0)$ es punto crítico

Para el resto: $x = \frac{b}{d} + K$

$$a\left(\frac{b}{d}+K\right) - cy\left(\frac{b}{d}+K-K\right) = 0 \Rightarrow a\left(\frac{b}{d}+K\right) = cy\left(\frac{b}{d}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{a(b+dK)}{cb}$$

Sólo hay otro pto. crítico (aparte del $(0,0)$):

$$P_2 = \left(\frac{b}{d} + K, \frac{a(b+dK)}{cb} \right)$$

3) Linealizamos:

$f_x = a - cy$ $\qquad$ $f_y = -c(x-K)$

$g_x = dy$ $\qquad$ $g_y = -b + dx - dK$

Primer punto crítico: $P_1 = (0,0)$

$$\begin{pmatrix} a & cK \\ 0 & -b-dK \end{pmatrix}$$

como el determinantes es menor que cero $a.(-b-dK) < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{PUNTO DE SILLA}}$

Segundo punto crítico: $P_2 = \left(\frac{b}{d} + K, \frac{a(b+dK)}{cb} \right)$

$$\begin{pmatrix} a - \frac{a(b+dK)}{b} & -c \cdot \frac{b}{d} \\ \frac{ad(b+dK)}{cb} & 0 \end{pmatrix}$$

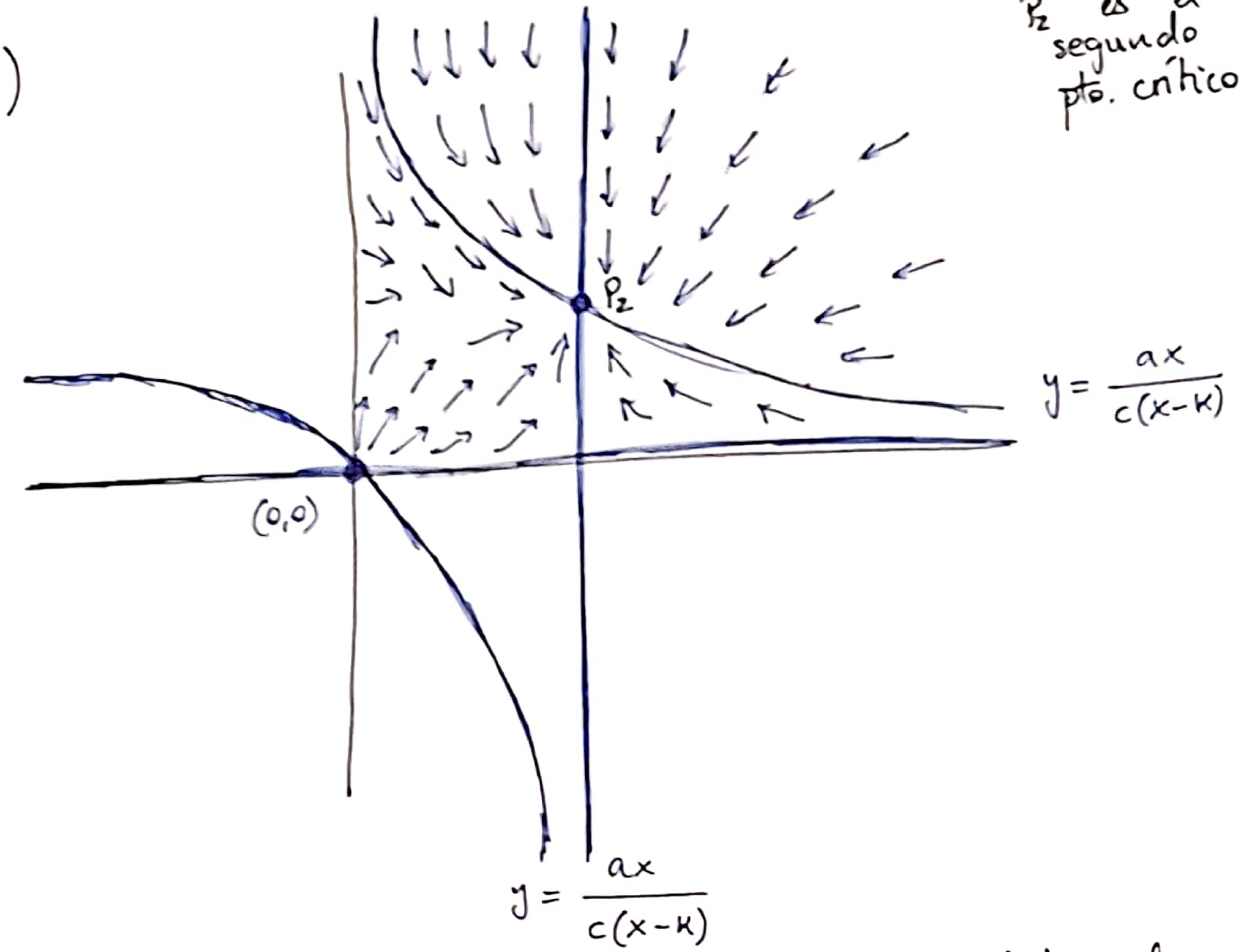
Traza: $a - \dfrac{ab + adK}{b} = a - a - \dfrac{adK}{b} = \dfrac{-adK}{b} < 0$

Determinante: $-\left[\dfrac{ad(b+dK)}{cb} \cdot \left(-\dfrac{cb}{d} \right) \right] = a(b+dK) > 0$

Usando esto podemos sostener que $\boxed{P_2 \text{ es asintótic. estable.}}$

4)

P_2 es el segundo pto. crítico



Hemos dibujado las tres nullclinas en todo el plano pero las trayectorias sólo en el primer cuadrante.