Geometría de Curvas y Superficies. Curso 2016-17.
Universidad Autónoma de Madrid. Departamento de Matemáticas.

Hoja 4: superficies, primeros pasos

Un **reglado** de una superficie S es una descomposición (si existe) de S en rectas, semirrectas o segmentos. Estos elementos rectilíneos se llaman **reglas** y los suponemos disjuntos dos a dos. Decimos que S es una **superficie reglada** si admite al menos un reglado.

1. Llamamos **parametrización de revolución** a cualquiera que se escriba de la manera siguiente:

$$\mathbf{X}(u,\theta) \;\equiv\; \big(r(u)\cos\theta\,,\, r(u)\operatorname{sen}\theta\,,\, z(u)\big)\,, \qquad (1)$$

para algún camino suave $\big(r(u), z(u)\big)$ (llamado **perfil**) en el semiplano $\{r \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2_{rz}$.

(a) Si S es la imagen de (1), demuestra que los **meridianos** (cortes de S con los semiplanos verticales de borde el eje z) son copias del perfil y se deducen unos de otros por rotaciones espaciales alrededor del eje z. Demuestra que los **paralelos** (cortes de S con los planos $\{z = \text{cte}\}$) son *circunferencias coaxiales,* con eje común el eje z.

movimient rígidos

(b) Tomamos una curva **catenaria** puesta en el semiplano rz como $\{r = \cosh z\}$. Al rotarla alrededor del eje z engendra una superficie que se llama **catenoide.** Construye una parametrización del catenoide.

(c) Considera la siguiente parametrización:

$$\Phi(u,\theta) \;\equiv\; \big(u^3\cos\theta\,,\, u^3\operatorname{sen}\theta\,,\, 1-u^2\big) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,.$$

¿Es Φ una función C^∞? Haz un dibujo de un meridiano y un dibujo de $\Phi(\mathbb{R}^2)$.

2. El **helicoide** es una superficie que puede darse por la siguiente parametrización:

$$\mathbf{X}(u,v) \;\equiv\; \big(u\cos v\,,\, u\operatorname{sen} v\,,\, v\big) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,. \qquad (2)$$

Comprueba que esta parametrización es regular e inyectiva, y que da lugar a un reglado del helicoide. ¿Es (2) una parametrización de revolución?

3. Dadas constantes $a, b, c > 0$, demuestra que la aplicación lineal $(x,y,z) \longmapsto (ax\,,\, by\,,\, cz)$ lleva la esfera unidad biyectivamente al eplipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$ Aprovecha esto para construir una parametrización del elipsoide, a partir de la parametrización de revolución de la esfera.

Haz lo mismo con otras cuádricas, poniéndolas como imágenes de superficies de revolución.

4. Se llama **toro** a la superficie de revolución que resulta de rotar alrededor del eje z una circunferencia situada en el plano xz y disjunta con ese eje. Construye una parametrización del toro.

5. Sean $S = \{\,(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 = 1\,\}$ la esfera unidad y $\mathrm{N} = (0,0,1)$ el polo norte. La **parametrización estereográfica** es la aplicación $\phi(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida de la manera siguiente:

La recta que une $(u,v,0)$ con el polo norte corta a la esfera
en dos puntos: uno es el polo norte, el otro es $\phi(u,v)$.

Haz un dibujo. Calcula ϕ y demuestra que es una parametrización regular, que parametriza $S\backslash\{\mathrm{N}\}$ biyectivamente, y que la inversa $\phi^{-1} : S\backslash\{\mathrm{N}\} \to \mathbb{R}^2$, llamada **proyección estereográfica desde el polo norte,** está dada por $S\setminus\{\mathrm{N}\} \ni (x,y,z) \longmapsto (u,v) = \dfrac{(x,y)}{1-z}.$

6. Sea $S = \{ (x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \}$ un hiperboloide de una hoja. Demuestra que las parametrizaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t, \theta) &\equiv \left(\sqrt{1+t^2}\cos\theta \, , \, \sqrt{1+t^2}\operatorname{sen}\theta \, , \, t \right) , \\ \Phi(u, v) &\equiv \left(\ \cos v - u \operatorname{sen} v \ , \ \operatorname{sen} v + u \cos v \ , \ u \right) , \end{aligned}$$

cumplen $\mathbf{X}(\mathbb{R}^2) \subseteq S \subseteq \mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$ y $\Phi(\mathbb{R}^2) \subseteq S \subseteq \Phi(\mathbb{R}^2)$. Explica por qué $\mathbf{X}$ exhibe S como superfice de revolución, mientras que Φ la exhibe como superficie reglada.

Comprueba que la reflexión $(x, y, z) \longmapsto (x, -y, z)$ lleva S a sí misma, pero cambia el reglado de S definido por Φ a otro reglado distinto (Por lo tanto, este hiperboloide es una superficie *reglada de dos maneras diferentes*).

7. Parametriza la silla $\{z = xy\}$ como un grafo, y comprueba que todas las líneas coordenadas son rectas (por lo tanto, la silla es reglada de dos maneras diferentes).

8. Llamamos **cilindro generalizado,** o simplemente **cilindro,** a cualquier superficie reglada cuyas reglas son todas paralelas entre sí. Demuestra que una superficie es un cilindro si y sólo si admite parametrizaciones de la forma siguiente:

$$\Phi(u, \lambda) \ \equiv \ \alpha(u) + \lambda \, \mathbf{w} \ ,$$

siendo $\alpha(u)$ un camino en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ un vector constante no nulo.

9. Llamamos **cono generalizado,** o simplemente **cono,** a una superficie reglada cuyas reglas (debidamente prolongadas) pasan todas por un punto llamado **vértice.** Demuestra que una superficie es un cono de vértice $\mathbf{p}_0$ si y sólo si admite parametrizaciones de la forma:

$$\Phi(u, \lambda) \ \equiv \ \lambda \ \alpha(u) + \mathbf{p}_0 \ ,$$

siendo $\alpha(u)$ un camino en la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$.

10. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie cuyos planos tangentes afines pasan todos por un punto $\mathbf{p}$. Demuestra que S está contenida en un cono de vértice $\mathbf{p}$. **Indicación:** estudia el corte de S con los planos que pasan por $\mathbf{p}$ y usa el ejercicio 12 (a) de la hoja 1.

11. Sea $\alpha(s) : J \to \mathbb{R}^3$ curva espacial birregular, parametrizada por arco. Se llama **superficie tangencial de** α a la superficie reglada cuyas reglas son las tangentes afines de α. Demuestra que admite la siguiente parametrización:

$$\Phi(s, u) \ \equiv \ \alpha(s) + u \, \mathbf{t}_\alpha(s) \quad , \quad (s, u) \in J \times \mathbb{R} \ .$$

Hay valores (s, u) en los que Φ no es regular ¿cuáles son?

b) Demuestra que en todos los puntos regulares de una regla $\{s = s_0\}$ el plano tangente afín de esta superficie coincide con el plano osculador afín de α en $s = s_0$.

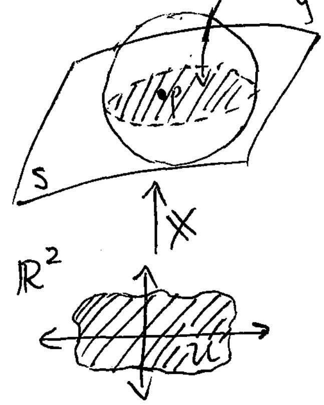
12. Sean S una superficie cerrada simple. Demuestra que dado cualquier vector unitario $\mathbf{u}$ existe un punto $\mathbf{p} \in S$ tal que $\mathbf{u}$ es normal unitaria del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$.

Indicación: dado $\mathbf{u}$, considera la **función altura** $S \to \mathbb{R}$ dada por $S \ni \mathbf{p} \longmapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}$.

HOJA 4

REPASO SUPERFICIES

$S \subset \mathbb{R}^3$



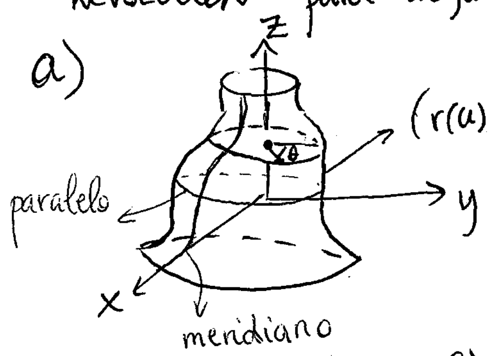
$\forall p \in S$, $\exists V$ entorno abierto de p en $\mathbb{R}^3$ tal que $V \cap S$ es abierto de S y existe: $\mathbb{X} : \mathcal{U}$ $_{\text{abto.}} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \cap S$ parametri[zación]

$\mathbb{X}$ es homeomorfismo y además $\underline{D\mathbb{X}(u,v)}$ tiene rango constante 2, e.d., $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_v$ son lin. indep.

↳ Jacobiano $\in \mathcal{M}_{3\times 2}$

$\boxed{1.}$ $\mathbb{X}(u,\theta) = (r(u)\cos\theta,\ r(u)\,\text{sen}\theta,\ z(u))$ esto es una PARAMETRIZACIÓN DE REVOLUCIÓN para algún camino suave $(r(u), z(u))$ (perfil) en el semiplano $\{r \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2_{r,z}$

a)



Los meridianos se obtienen escogiendo $\boxed{\theta = \text{cte.}}$

curva $u \longmapsto (r(u)\cos\theta,\ r(u)\,\text{sen}\theta,\ z(u))$ MERIDIANO, es imagen del perfil $u \longmapsto (r(u), 0, z(u))$ por la rotación en $\mathbb{R}^3$ con eje OZ y ángulo θ:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

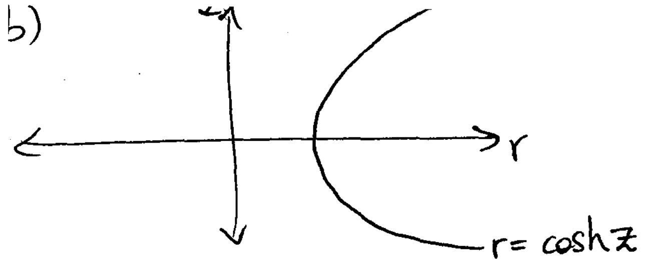
$$R \begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u)\cos\theta \\ r(u)\,\text{sen}\theta \\ z(u) \end{pmatrix} = \mathbb{X}(u,\theta)$$

Los paralelos se obtienen escogiendo $\boxed{u = \text{cte.}}$

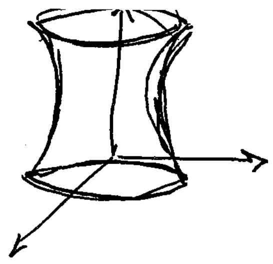
$S \cap (\text{plano } z = \text{cte.} = c) \Rightarrow z(u) = c \underset{z \text{ inyectiva}}{\Rightarrow} u = c'$

↳ está parametrizado por $\theta \longmapsto (r(c')\cos\theta,\ r(c')\,\text{sen}\theta,\ c)$ que es una circunferencia en el plano $z = c$ centrada en $(0,0,c)$

b)



$\xrightarrow{\text{revolución eje } Z}$



$$u \longmapsto (\underbrace{\cosh u}_{r(u)}, \underbrace{u}_{z(u)})$$

$$\Rightarrow \mathbb{X}(u,\theta) = (\underbrace{\cosh u}_{r(u)} \cos\theta, \underbrace{\cosh u}_{r(u)} \operatorname{sen}\theta, \underbrace{u}_{z(u)})$$ parametrización catenoide

$\boxed{2.}$ parametrización helicoide: $\mathbb{X}(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v)$ $\quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$

¿REGULAR?

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{X}_u(u,v) = \dfrac{\partial \mathbb{X}}{\partial u}(u,v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, 0) \\ \mathbb{X}_v(u,v) = \dfrac{\partial \mathbb{X}}{\partial v}(u,v) = (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 1) \end{array}\right\}$$ Hay que ver que son linealmente independientes

$$\begin{vmatrix} \cos v & \operatorname{sen} v \\ -u\operatorname{sen} v & u\cos v \end{vmatrix} = u \Rightarrow \text{Si } u \neq 0 \text{ son lin. indep.}$$

para $u = 0$: $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} v & 0 \\ u\cos v & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen} v = 0 \Leftrightarrow v = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

para $u = 0 \wedge v = k\pi$:

$$\begin{vmatrix} \cos v & 0 \\ -u\operatorname{sen} v & 1 \end{vmatrix} = \cos v = 0 \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Son siempre lin. indep.

$\Rightarrow$ regular

¿INYECTIVA? $\rightarrow$ pa casita crack

¿REGLADO? Las curvas $v = cte = c$ son de la forma $\alpha_c(u) =$
$= (u\cos c, u\operatorname{sen} c, c) = u(\cos c, \operatorname{sen} c, 0) + (0,0,c)$, es decir, son rectas, y todo punto $\mathbb{X}(u,v)$ está en una de esas rectas.

$\boxed{9.}$ Cono de vértice $P_0 \iff \Phi(u,\lambda) = \lambda\alpha(u) + P_0$

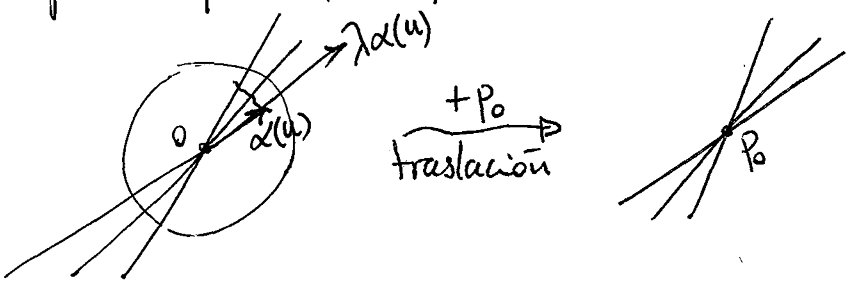
con $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ camino en la esfera unidad. $\alpha(t) \in S^2(1) \iff \|\alpha(t)\| = 1 \ \forall t$

$\boxed{\Leftarrow}$ Dado $p \in S$, $p = \Phi(\bar{u},\bar{\lambda})$

la recta $\beta_{\bar{u}}(\lambda) = \lambda\alpha(\bar{u}) + P_0$ pasa por p $(p = \beta_{\bar{u}}(\bar{\lambda}))$ y está contenida en la superficie.

Esto prueba que Φ define una superficie reglada. Es claro que todas las rectas pasan por P_0 (poniendo $\lambda = 0$).

Esto prueba que Φ define un cono.



$\boxed{\Rightarrow}$ Traslado S de modo que su vértice sea el origen (e.d., traslación por $-P_0$).

Consideramos $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la intersección

$S \cap \underbrace{S^2(1)}_{\hookrightarrow \text{ esfera de radio 1 centrada en } 0}$,

Entonces, por definición de cono, la recta $\lambda \longmapsto \lambda\alpha(u)$ está contenida en S para todo $u \in I$. Entonces $\tilde{\Phi}(u,\lambda) = \lambda\alpha(u)$ parametriza el cono trasladado.

Para obtener la parametrización del cono inicial deshago la traslación, i.e., sumo P_0.

Superficies regladas:

$\boxed{\alpha(u)+\lambda v(u) \quad \text{con } \|v(u)\|=1 \ \forall u}$

$\boxed{1.}$ a) $\alpha: J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ por arco, birregular. La tangente afín de α en s es la recta $\lambda \longmapsto \alpha(s)+\lambda \mathbb{t}_\alpha(s) \implies$

$\implies \Phi(s,\lambda)=\alpha(s)+\lambda\mathbb{t}_\alpha(s)$, $\quad (s,\lambda)\in J\times\mathbb{R}$

¿Dónde es Φ regular? Calculamos los campos coordenados:

$\left.\begin{array}{l}\Phi_s(s,\lambda)=\mathbb{t}_\alpha(s)+\lambda K_\alpha(s)\mathbb{n}_\alpha(s)\\ \Phi_\lambda(s,\lambda)=\mathbb{t}_\alpha(s)\end{array}\right\}$ dependientes cuando $\lambda K_\alpha(s)=0$

Como $K_\alpha(s)\neq 0$ $\forall s\in J$, Φ es irregular cuando $\lambda=0$, es decir, en los puntos $\Phi(s,0)=\alpha(s)$

b) Plano tangente afín: $\Phi(s,\lambda)+\underbrace{\mathrm{span}\{\Phi_s(s,\lambda),\ \Phi_\lambda(s,\lambda)\}}$

$\qquad\qquad \| $

$\mathrm{span}\{\mathbb{t}_\alpha(s),\ \mathbb{n}_\alpha(s)\}$

a) (parte del apartado)

$\boxed{6.}$ $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=1\}$

$\mathbb{X}(t,\theta)=\left(\sqrt{1+t^2}\cos\theta,\ \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{sen}\theta,\ t\right)$

$\Phi(u,v)=(\cos v-u\,\mathrm{sen}v,\ \mathrm{sen}v+u\cos v,\ u)$

↳ reglado porque para v fijado u es lineal

REGLA: $v=v_0$ (fijado)

↳ recta: $(\cos v_0,\mathrm{sen}v_0,0)+\lambda(-\mathrm{sen}v_0,\cos v_0,1)$

$\mathbb{X}(\mathbb{R}^2)\overset{\checkmark}{\subset} S\subset\mathbb{X}(\mathbb{R}^2)$ fácil (sustituir)

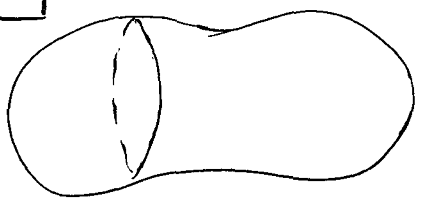
$(x,y,z)\in S \overset{?}{\implies} \exists t,\theta \,/\, \left.\begin{array}{l}x=\sqrt{1+t^2}\cos\theta\\ y=\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{sen}\theta\\ z=t\end{array}\right\}$ sistema

b) Reflexión $\varphi: (x,y,z) \longmapsto (x,-y,z)$

$\varphi(\Phi(u,v)) = (\cos v - u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} v - u\cos v, u) \in S$ metiendo en la ecuación implícita

Nuevas rectas: $(\cos v_0, -\operatorname{sen} v_0, 0) + \lambda(-\operatorname{sen} v_0, -\cos v_0, 1)$

$\boxed{12.}$ superficie cerrada simple



unitario

dado u demostrar que $\exists p /$ u vector normal unitario de T_pS.

u normal a S en $p \iff u \perp v$ $\forall v$ tangente, e.d. $\forall v \in T_pS$.

Compacto + cerrado $\Rightarrow \exists p_0 \in S$ punto de mínimo por ser f continua y estar en un compacto $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ por ser f diferenciable, entonces $(df)_{p_0} \equiv 0 \Rightarrow \underbrace{(df)_{p_0} \cdot v}_{\langle u,v\rangle} = 0$ $\forall v \in T_pS$

por el razonamiento método 1

Método 1

$f = F|_S$ $\quad F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad p \longmapsto \langle u, p\rangle$

fijado u, $\langle u, \cdot\rangle$ es lineal

$DF_{p_0}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$DF(p_0) = F$ (lineal) $\Rightarrow DF_{p_0} v = F(v) = \langle u, v\rangle$

$\Rightarrow (df)_{p_0} v = \langle u,v\rangle = 0 \quad \forall v \in T_pS$

Método 2

Dado $v \in T_{p_0}S$, $\exists \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ con $\alpha(0) = p_0$, $\alpha'(0) = v$

$h(t) := f(\alpha(t)) = \langle u, \alpha(t)\rangle$

0 es pto. de máximo de $h \Rightarrow h'(0) = 0$

$h'(t) = \langle u, \alpha'(t)\rangle \Rightarrow h'(0) = \langle u, \alpha'(0)\rangle = \langle u, v\rangle = 0$