Universidad Autónoma de Madrid — Curso 2019-20

Matemáticas/ Ingeniería Informática-Matemáticas

# Teoría de Galois

**Convocatoria ordinaria: 10 de enero de 2020**

APELLIDOS: ____________________

NOMBRE: ____________ DNI/NIE: ____________ PROFESORA: ____________

**1.** (8 puntos) Sea $\eta = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$, y sea $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \eta)$.

**a)** (2 puntos) Calcula el grado de la extensión $L/\mathbb{Q}$. Sea $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}_{>0}$

$L = \mathbb{Q}(\alpha, \eta)$

|

$\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$

|

$\mathbb{Q}$

$\eta^3 = 1 \Rightarrow \eta$ es raíz de $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$\underset{(\eta \neq 1)}{\Rightarrow} \eta$ es raíz de $x^2+x+1$.

$\alpha$ es raíz de $x^4 - 2$ que es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ por el criterio de Einsestein para $p = 2$

Notamos que las raíces de $x^2+x+1$ son $\eta$ y $\eta^2$, ninguna de ellas es real, y, por tanto, $x^2+x+1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$.

$|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| \underset{\text{TEA}}{=} \partial \operatorname{Irr}(\mathbb{Q}, \alpha) = \partial x^4 - 2 = 4$, $|L : \mathbb{Q}(\alpha)| \overset{\text{TEA}}{=} \partial \operatorname{Irr}(\mathbb{Q}(\alpha), \eta) = \partial x^2 + x + 1 = 2$

Por la transitividad de grados $|L : \mathbb{Q}| = |L : \mathbb{Q}(\alpha)||\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| = 8$.

**b)** (2 puntos) Da una base de $L/\mathbb{Q}$.

Por el TEA una $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\alpha)$ es $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$

una $\mathbb{Q}(\alpha)$-base de $L$ es $\{1, \eta\}$

En la prueba del teorema de transitividad de grados se ve que $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \eta, \alpha\eta, \alpha^2\eta, \alpha^3\eta\}$ forma una $\mathbb{Q}$-base de $L$, esto es, una base de la extensión $L/\mathbb{Q}$.

**c)** (2 puntos) Demuestra que $x^4 - 2$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\eta)$.

Hay dos formas:

i) Por 1a) $|\mathbb{L}:\mathbb{Q}| = 8$, por la transitividad de grados $|\mathbb{L}:\mathbb{Q}(\eta)| = \dfrac{|\mathbb{L}:\mathbb{Q}|}{|\mathbb{Q}(\eta):\mathbb{Q}|} = 4$ $\star$

Por el TEA $\partial(\operatorname{Irr}(\mathbb{Q}(\eta), \sqrt[4]{2})) = 4$

Ahora bien $\operatorname{Irr}(\mathbb{Q}(\eta), \sqrt[4]{2}) \mid \operatorname{Irr}(\mathbb{Q}, \sqrt[4]{2}) = x^4 - 2$

y la igualdad $\star$ fuerza $\operatorname{Irr}(\mathbb{Q}(\eta), \sqrt[4]{2}) = x^4 - 2$.

ii) Las raíces de $x^4-2$ son $\{\pm\alpha, \pm\alpha i\} = \Omega$, $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}_{>0}$

Sea $\beta \in \Omega$, si $\beta \in \mathbb{Q}(\eta)$ entonces $\mathbb{Q}(\beta) \subseteq \mathbb{Q}(\eta)$ pero $|\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}| = 4$ y $|\mathbb{Q}(\eta):\mathbb{Q}| = 2$ $\#$

Si $x^4 - 2 = p(x)q(x)$ con $1 \neq p, q \in \mathbb{Q}(\eta)[x]$, por ser $\mathbb{Q}(\eta)[x]$ un DFU $p(x)$ debería ser el producto de dos pol. $(x - \sqrt[4]{2}), (x + \sqrt[4]{2})$, $(x - \sqrt[4]{2}i)(x + \sqrt[4]{2}i)$, por tanto, su término independiente sería $\pm\sqrt{2}$. Si $\pm\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\eta) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$

$\eta = -1/2 + \sqrt{3}/2\, i$

entonces $\exists a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $\sqrt{2} = a + b\sqrt{3}i$

de donde $2 = a^2 - b^2 3 + 2ab\sqrt{3}i$

Usando que $\{1, \sqrt{3}i\}$ es $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 3 = 2 \\ ab = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b^2 = -2/3 \ \# \\ b = 0 \Rightarrow a^2 = 2 \ \# \end{cases}$$

**d)** (2 puntos) Demuestra que $i \notin \mathbb{Q}(\eta)$.

$\mathbb{Q}(\eta) = \mathbb{Q}(-1/2 + \sqrt{3}/2\, i)$

$= \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$

$|\mathbb{Q}(\sqrt{3}i):\mathbb{Q}| = \partial(x^2+3) = 2$

Si $i \in \mathbb{Q}(\eta)$, entonces

$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\eta) \Rightarrow$

$\mathbb{Q}(\eta) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ pero $|\mathbb{Q}(\eta):\mathbb{Q}| = 2 \neq 4 = |\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i):\mathbb{Q}|$ $\#$

$\mid$ $2 = \partial \operatorname{Irr}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), i) = \partial(x^2+1)$ no tiene raíces reales

$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{R}$

$\mid$ $2 = \partial \operatorname{Irr}(\mathbb{Q}, \sqrt{3}) = \partial(x^2 - 3)$

$\mathbb{Q}$

**2.** (12 puntos) Consideramos el polinomio $f(x) = x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ y sea $E = \mathbb{F}_2[x]/(f(x))$.

**a)** (2 puntos) Halla un generador del grupo multiplicativo $E^\times$.

Todo elemento de E tiene un único representante de grado menor que 4 (por el algoritmo de la división euclídea en $\mathbb{F}_2[x]$), luego

$E = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{x}, \overline{x+1}, \overline{x^2}, \overline{x^2+x}, \overline{x^2+1}, \overline{x^2+x+1}, \overline{x^3}, \overline{x^3+x^2}, \overline{x^3+x}, \overline{x^3+1}, \overline{x^3+x^2+x}, \overline{x^3+x^2+1}, \overline{x^3+x+1}, \overline{x^3+x^2+x+1}\}$

$|E| = 2^4 = 16$ y $|E^\times| = 15$, sea $\alpha \in E^\times$

$o(\alpha) = 1, 3, 5$ o $15$ (por el Teorema de Lagrange), por tanto, para hallar un generador de $E^\times$ basta encontrar un elemento $\alpha \in E^\times$ con $o(\alpha) > 5$.

$\bar{x}, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4 = \overline{x+1}, \bar{x}^5 = \bar{x}(\overline{x+1}) = \overline{x^2+x} \neq 1$

$\Rightarrow o(\bar{x}) > 5 \Rightarrow \langle \bar{x} \rangle = E^\times$.

**b)** (4 puntos) Demuestra que $E$ es el cuerpo de escisión (o descomposición) de $\overbrace{y^4 + y^3 + 1}^{g(y)}$ sobre $\mathbb{F}_2$.

Primero notamos que $E \cong \mathbb{F}_{2^4}$ por 2.a) y el Teorema de clasificación de cuerpos finitos, por tanto, $E = \mathbb{F}_2(x^{2^4} - x)$ ← $\boxed{\text{cuerpo de escisión}}$

(en realidad, no era necesario apelar a este resultado pues sabemos que $\forall \alpha \in E^\times$, $\alpha^{15} = 1 \Rightarrow \alpha^{16} = \alpha$)

Por tanto, $E/\mathbb{F}_2$ es una extensión normal.

¿Cómo se descompone $g \in \mathbb{F}_2[y]$? Notamos que $g$ no tiene raíces en $\mathbb{F}_2$ y además $g(y) \neq (y^2+y+1)^2 = y^4+y^2+1$ siendo $y^2+y+1 \in \mathbb{F}_2[y]$ el único pol. irred. de grado 2 en $\mathbb{F}_2[y]$. Concluimos que $g$ es irreducible sobre $\mathbb{F}_2$.

Ahora, si $g$ tiene una raíz en $E$, $g$ tiene todas sus raíces en $E$ (por ser $E/\mathbb{F}_2$ normal y $g$ irreducible.)

Vemos que $g(\overline{x^2+x^3}) = 0$ en $E \Rightarrow \underbrace{\mathbb{F}_2(g)}_{\text{cuerpo de escisión}} \subseteq E$

Ahora ~~$\mathbb{F}_2(g) \neq \mathbb{F}_2(\overline{x^2+x^3})$~~, $|E : \mathbb{F}_2| = 4 \geq |\mathbb{F}_2(g) : \mathbb{F}_2| \geq 4$

$\Rightarrow |E : \mathbb{F}_2| = |\mathbb{F}_2(g) : \mathbb{F}_2|$ y TEA.

de aquí la igualdad $E = \mathbb{F}_2(g)$

**c)** (2 puntos) Demuestra que $E$ contiene al cuerpo de escisión (o descomposición) de $y^2+y+1$ sobre $\mathbb{F}_2$.

$h(y)=y^2+y+1 \in \mathbb{F}_2[y]$ es irreducible pues $h(\bar{0}) \neq \bar{0} \neq h(\bar{1})$.

Como en 2b) hemos notado que $E/\mathbb{F}_2$ es normal si $h$ tiene una raíz en $E$, las tiene todas (en realidad, al ser $\partial h=2$, sabemos que la extensión que define añadir una cualquiera de sus raíces es normal, así que la normalidad de $E/\mathbb{F}_2$ es innecesaria para obtener la conclusión). Notemos que

$$h(\overline{x^2+x}) = (\overline{x^2+x})^2 + \overline{x^2+x} + 1 = \overline{x^4+\cancel{x^2}+\cancel{x^2}+x+1}$$

$$\underset{\overline{x^4}=\overline{x+1}}{=} 2(\overline{x+1}) = 0. \text{ Por tanto } \mathbb{F}_2(h) \subseteq E$$

**d)** (4 puntos) Decide la clase de isomorfía de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_2)$.

Ya hemos mencionado en 2.b) que $E/\mathbb{F}_2$ es normal (de hecho, la condición de 2.b) en cualquier caso nos garantiza la normalidad de $E/\mathbb{F}_2$). Como $\mathbb{F}_2$ es perfecto (por ser finito) tenemos que $E/\mathbb{F}_2$ es separable y, por tanto, de Galois, luego

$$|\mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_2)| = |E:\mathbb{F}_2| = 4$$

visto en 2.a) por ejemplo ya que $|E|=2^4$

Como $E$ es finito, el homomorfismo de Frobenius $Fr$ es biyectivo, luego

$Fr \in \mathrm{Aut}(E) = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_2)$.

$Fr(\alpha)=\alpha^2 \quad \forall \alpha \in E$, como $\forall \alpha \in E \ \alpha^{16}=\alpha$

tenemos que $Fr^4 = 1_E$ (que coincide con el hecho de que $|\mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_2)|=4$). Sea $\bar{x} \in E$

$Fr(\bar{x})=\bar{x}^2$, $Fr^2(\bar{x}) = \bar{x}^4 = \overline{x+1} \neq \bar{x}$, $\Rightarrow o(Fr)>2$

$\Rightarrow o(Fr)=4$ y $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_2) = \langle Fr \rangle \cong C_4$

**3.** (12 puntos) Sea $L$ el cuerpo de escisión (o descomposición) de $p(x) = x^4 - 12x^2 + 25$ sobre $\mathbb{Q}$.

a) (2 puntos) Sea $\alpha \in L$ una raíz de $p$, prueba que $\mathbb{Q}(\sqrt{11}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$ y que $p$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

Raíces de $p(x)$: $\pm\sqrt{6\pm\sqrt{11}}$. Luego $L = \mathbb{Q}(\pm\sqrt{6+\sqrt{11}}, \pm\sqrt{6-\sqrt{11}})$

Como $(\sqrt{6\pm\sqrt{11}})^2 = 6\pm\sqrt{11}$, $\sqrt{11} \in \mathbb{Q}(\sqrt{6+\sqrt{11}})$, $\sqrt{11} \in \mathbb{Q}(\sqrt{6-\sqrt{11}})$.

Para probar que $p(x)$ es irred. sobre $\mathbb{Q}$, basta ver que si $\alpha = \sqrt{6+\sqrt{11}}$, entonces $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 4 = \deg \operatorname{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$.

Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{11}) \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ y $[\mathbb{Q}(\sqrt{11}):\mathbb{Q}] = \deg(\operatorname{Irr}(\sqrt{11}, \mathbb{Q})) = 2$ ($x^2-11$ es irred$/\mathbb{Q}$ por Eisenstein con $p=11$), basta probar que $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}(\sqrt{11})] = 2$. Como $\operatorname{Irr}(\alpha,\mathbb{Q}) \mid p(x)$, $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}[\sqrt{11}]] \leq 2$.

Si $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}(\sqrt{11})] = 1 \Rightarrow \sqrt{6+2\sqrt{11}} = a + b\sqrt{11}$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow 6 + 2\sqrt{11} = a^2 + 11b^2 + 2ab\sqrt{11}$ y usando que $\{1, \sqrt{11}\}$ es base de $\mathbb{Q}(\sqrt{11})/\mathbb{Q}$ se tendría que $6 = a^2 + 11b^2$ y $1 = ab$ que no tiene solución en $\mathbb{Q}$. Luego $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}(\sqrt{11})] = 2$ por lo que $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 4$ y por lo tanto, $p(x) = \operatorname{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ y es irreducible$/\mathbb{Q}$.

b) (2 puntos) Demuestra que $[L : \mathbb{Q}] = 4$.

Sean $\alpha = \sqrt{6+\sqrt{11}}$ y $\beta = \sqrt{6-\sqrt{11}}$.

Entonces $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

Como $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\alpha) \hookrightarrow L \Rightarrow [L:\mathbb{Q}] \geq 4$.

Como $\alpha \cdot \beta = \sqrt{36-11} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \beta = 5 \cdot \alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

$\Rightarrow L = \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow [L:\mathbb{Q}] = 4.$

c) (4 puntos) Describe todos los automorfismos de $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ y sus órdenes.

Como char $\mathbb{Q} = 0$, $\mathcal{L}/\mathbb{Q}$ es separable, y por construcción $\mathcal{L}/\mathbb{Q}$ es normal. Luego $\mathcal{L}/\mathbb{Q}$ es Galois y por lo tanto:
$[\mathcal{L}:\mathbb{Q}] = |\mathrm{Gal}(\mathcal{L}/\mathbb{Q})| = 4$. Como $\mathcal{L} = \mathbb{Q}(\alpha)$, para describir un elemento $\varphi \in \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/\mathbb{Q})$ basta dar $\varphi(\alpha)$. Como $p(x)$ tiene 4 raíces distintas, y por cada raíz $r$ de $p(x)$ debe haber un automorfismo $\varphi \in \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/\mathbb{Q})$ tq $\varphi(\alpha) = r$, tenemos ya determinados los 4 automorfismos:

- $\varphi_1$ con $\varphi_1(\alpha) = \alpha$ (identidad)
- $\varphi_2$ con $\varphi_2(\alpha) = -\alpha$ (orden 2)
- $\varphi_3$ con $\varphi_3(\alpha) = \beta$ (orden 2, porque $\alpha \cdot \beta = 5 \Rightarrow \varphi(\beta) = \alpha$)
- $\varphi_4$ con $\varphi_4(\alpha) = -\beta$ (orden 2, porque $\alpha \cdot \beta = 5 \Rightarrow \varphi(\beta) = -\alpha$).

d) (4 puntos) Determina todas las subextensiones de $L/\mathbb{Q}$.

Por el apartado (c), $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq C_2 \times C_2$, y por el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois, $L/\mathbb{Q}$ tiene tantas subextensiones propias, como subgrupos propios hay en $C_2 \times C_2$: luego hay 3.:

$\mathcal{L}^{\langle \varphi_2 \rangle} = \mathbb{Q}(\alpha^2)$ ($\varphi_2$ fija $\alpha^2$, y $\mathbb{Q}(\alpha^2) = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$).

$\mathcal{L}^{\langle \varphi_3 \rangle} = \mathbb{Q}(\alpha+\beta)$ ($\varphi_3$ fija $\alpha+\beta$, y $\alpha+\beta \notin \mathbb{Q}$ porque $(\alpha+\beta)^2 = 22$; como $\mathbb{Q}(\alpha+\beta) \subset \mathcal{L}^{\langle \varphi_3 \rangle} \subsetneq \mathcal{L}$, necesariamente $\mathcal{L}^{\langle \varphi_3 \rangle} = \mathbb{Q}(\alpha+\beta)$).

$\mathcal{L}^{\langle \varphi_4 \rangle} = \mathbb{Q}(\alpha-\beta)$ ($\varphi_4$ fija $\alpha-\beta$ y $\alpha-\beta \notin \mathbb{Q}$ porque $(\alpha-\beta)^2 = 2$; como $\mathbb{Q}(\alpha-\beta) \subset \mathcal{L}^{\langle \varphi_4 \rangle} \subsetneq \mathcal{L}$, se tiene la conclusión)

4. (8 puntos) Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

**a)** Sea $E/K$ una extensión de Galois, entonces $E$ es el cuerpo de escisión (o descomposición) de algún $f \in K[x]$ irreducible. VERDADERO

Como $E/_K$ es Galois, es, en particular, finita y separable. Por lo tanto, por el Teorema del Elemento Primitivo, $E = K[\theta]$ para algún $\theta \in E$ convenientemente escogido. Por otro lado, $E = K[\theta] \cong K[x]/\langle p(x) \rangle$, con $p(x) = \operatorname{Irr}(\theta, K)$. Sea $L/_K$ el cuerpo de descomposición de $p(x)/_K$. Como $p(x)$ es irreducible$/_K$, $E = K[\theta]$ contiene una raíz de $p(x)$, y $E/_K$ es Galois (por lo tanto normal$/_K$), se tiene que $E \supset L$. Finalmente, como $\theta$ es una raíz de $p(x)$ y $E = K[\theta]$, necesariamente $E \subset L$. Luego $E = L$.

**b)** Sea $\xi = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, y sea $E$ el cuerpo de escisión (o descomposición) de $x^7 - 3$ sobre $\mathbb{Q}$. Sea $\tau : \mathbb{Q}(\xi) \to \mathbb{Q}(\xi)$ el automorfismo definido por la restricción de la conjugación compleja. Entonces $\tau$ se puede extender a exactamente 7 automorfismos de $E$.

Primero observamos que $[E : \mathbb{Q}] = 42$ (dado que se tiene el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[r, "6"] \arrow[dr, "7"'] & \mathbb{Q}(\xi) \arrow[r, "\le 7"] & \mathbb{Q}(\xi, \sqrt[7]{3}) = E \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt[7]{3}) \arrow[ur, "\le 6"'] &
\end{tikzcd}$$

ciclotómico

Eisenstein $x^7 - 3$, $p = 3$

, como 7 y 6 son coprimos, necesariamente $[E : \mathbb{Q}] = 42$). Por construcción $E/\mathbb{Q}$ y $E/\mathbb{Q}(\xi)$ son Galois. Consideramos ahora el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] & E \\
\mathbb{Q}(\xi) \arrow[u] \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{Q}(\xi) \arrow[u] \\
 \mathbb{Q} \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- $\tau$ es un automorfismo de $\mathbb{Q}(\xi)$
- $E/_{\mathbb{Q}(\xi)}$ es normal y separable

$\Rightarrow$ Por el Teorema general de extensión de automorfismos, para extensiones separables, $\tau$ se puede extender a un automorfismo de $E$, de $[E : \mathbb{Q}(\xi)] = 7$ maneras distintas.

VERDADERO

**c)** Si $E/K$ es de Galois con $G = \mathrm{Gal}(E/K)$ y $\alpha \in E$, entonces VERDADERO

$$\beta_\alpha = \sum_{\sigma \in G} \sigma(\alpha) \in K.$$

Como $E/K$ es Galois, $E^G = K$, luego para probar que $\beta_\alpha \in K$, basta probar que para cada $\varphi \in G$, $\varphi(\beta_\alpha) = \beta_\alpha$. Ahora: $\varphi(\beta_\alpha) = \varphi\left(\sum_{\gamma \in G} \gamma(\alpha)\right)$

$$= \sum_{\gamma \in G} (\varphi \circ \gamma)(\alpha) = \sum_{\gamma' \in G} \gamma'(\alpha) = \beta_\alpha .$$

G es un grupo, si $\varphi \in G$, se tiene que $\underbrace{\{\varphi \circ \gamma\}_{\gamma \in G}}_{\text{reordenación de los elementos de } G} = G$

**d)** Sea $E$ el cuerpo de escisión (o descomposición) del polinomio $x^6 + ax^3 + b \in \mathbb{Q}[x]$. Entonces $E/\mathbb{Q}$ es una extensión radical para cualquier par de valores $a, b \in \mathbb{Q}$.

Las raíces de $x^6+ax^3+b$ son las raíces cúbicas de:

$$\alpha = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

Sean:

$w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ tq. $w_i^3 = \alpha$, $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$: $z_i^3 = \beta$.

Luego: $E = \mathbb{Q}(w_1, w_2, w_3, z_1, z_2, z_3)$ y se tiene que:

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{a^2-4b}) = L_1 \hookrightarrow L_1(w_1) = L_2 \hookrightarrow L_2(w_2) = L_3 \hookrightarrow L_4 = L_3(z_1) \hookrightarrow$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{a^2-4b}) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$; $w_1^3 \in L_1$; $w_2^3 \in L_2$; $z_1^3 \in L_3$

$$L_5 = L_4(w_3) \hookrightarrow L_6 = L_5(z_2) \hookrightarrow L_7 = L_6(z_3) = E$$

$z_3^3 \in L_4$; $z_3^3 \in L_5$

VERDADERO.