1.- Mostrar que $\mathrm{E}|X|^r < \infty$ si y solo si $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(|X| \geq n^{1/r}) < \infty$. Deducir de esto que si $\mathrm{E}|X|^r < \infty$ entonces también $\mathrm{E}|X|^s < \infty$ para $0 < s < r$.

2.- Sea X variable aleatoria con $\mathrm{E}X^2 < \infty$. Mostrar que $\mathrm{Var}(X) = \operatorname{ínf}_{a\in\mathbb{R}} \mathrm{E}(X-a)^2$.

3.- Sean $a, b > 0$ y $r \in (0,1)$. Mostrar que

$$\mathrm{E}|X|^{ra+(1-r)b} \leq (\mathrm{E}|X|^a)^r (\mathrm{E}|X|^b)^{1-r}.$$

4.- Sea $r > 1$. Mostrar que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right|^r \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|^r,$$

y, por tanto,

(A)
$$\mathrm{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right|^r \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}|X_i|^r.$$

Mostrar también que

(B)
$$\mathrm{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right|^r \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\mathrm{E}|X_i|^r)^{1/r}\right)^r,$$

e investigar cuál de los dos desigualdades (A) o (B) es mejor.

5.- Mostrar la *desigualdad de Lyapunov*: Para $0 < s < t$, se tiene

$$(|\mathrm{E}|X|^s)^{1/s} \leq (\mathrm{E}|X|^t)^{1/t}.$$

6.- Demostrar la *desigualdad minorante de Markov:* Sea X es una variable aleatoria tal que $|X| \leq K$ (constante). Para $p > 0$ y $0 < \epsilon < K$, se tiene

$$\mathrm{P}(|X| \geq \epsilon) \geq \frac{\mathrm{E}|X|^p - \epsilon^p}{K^p - \epsilon^p}.$$

7.- Sea X una variable aleatoria con distribución gamma de parámetros a, k. Mostrar que

$$\mathrm{P}(0 < X < 2k/a) \geq (k-1)/k.$$

OBSERVACIÓN: La densidad de X es $f(x) = \frac{a^k}{\Gamma(k)} e^{-ax} x^{k-1}, \quad x > 0.$

SUGERENCIA: Usar la desigualdad de Chebyshev.

8.- Hallar el coeficiente de correlación de X e Y si tienen densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 e^{-x(y+1)}, & \text{si } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

9.- Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 1. Hallar $\mathrm{Cov}(Y, Z)$, siendo

$$Y = \operatorname{máx}(X, X^2) \quad \text{y} \quad Z = \operatorname{mín}(X, X^2).$$

10.- Sean $X = X_1 + \cdots + X_n$, $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$, donde X_i e Y_j son incorrelacionadas siempre que $i \neq j$. Mostrar que

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Cov}(X_i, Y_i).$$

11.- Dos jugadores A y B juegan una serie de partidas independientes. En cada partida, la probabilidad de que gane A es p^2, la de que gane B es q^2 y la probabilidad de empate es $2pq$ $(p + q = 1)$. El ganador de cada partida se anota 2 puntos, el perdedor ninguno y, en caso de empate, cada jugador se anota un punto. Sea X (resp. Y) el total de puntos del jugador A (resp. B) al cabo de n partidas. Calcular $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

SUGERENCIA: El problema anterior puede ser de utilidad.

12.- Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias incorrelacionadas dos a dos y que tienen la misma media y la misma varianza. Hallar el coeficiente de correlación de: **(a)** X_i y Z; **(b)** $X_i - Z$ y Z, donde

$$Z = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

13.- Sean X e Y variables aleatorias con media 0, varianza 1 y coeficiente de correlación ρ. Mostrar que

$$\mathrm{E}\operatorname{máx}(X^2, Y^2) \leq 1 + \sqrt{1-\rho^2}.$$

SUGERENCIA: Si $a, b \geq 0$, $\operatorname{máx}(a,b) = (1/2)(|a+b| + |a-b|)$.