EJERCICIOS EDyL PARA ENTREGAR EL 29/9/2016

Alejandro Santorum Varela

EJERCICIO 1

$(A \Rightarrow (B \lor \neg C)) \Rightarrow ((\neg B \Leftrightarrow C) \land A)$

Definición del bicondicional

$(A \Rightarrow (B \lor \neg C)) \Rightarrow (((\neg B \Rightarrow C) \land (C \Rightarrow \neg B)) \land A)$

Propiedad asociativa de la conjunción

$(A \Rightarrow (B \lor \neg C)) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow C) \land (C \Rightarrow \neg B) \land A)$

Definición del condicional

$(\neg A \lor (B \lor \neg C)) \Rightarrow ((B \lor C) \land (\neg C \lor \neg B) \land A))$

Definición del condicional

$\neg(\neg A \lor (B \lor \neg C)) \lor ((B \lor C) \land (\neg C \lor \neg B) \land A))$

Propiedad asociativa de la disyunción

$\neg(\neg A \lor B \lor \neg C) \lor ((B \lor C) \land (\neg C \lor \neg B) \land A))$

Leyes de De Morgan

$(A \land \neg B \land C) \lor ((B \lor C) \land (\neg C \lor \neg B) \land A))$

Consideremos $(A \land \neg B \land C) \lor ((B \lor C) \land (\neg C \lor \neg B) \land A))$:

[matriz con las disyunciones implícitas entre filas
Conjunciones implícitas entre los elementos de una misma fila]

A	$\neg B$	C
$(B \lor C)$	$(\neg C \lor \neg B)$	A

(Generar a partir de esta matriz conjunciones de disyunciones, en las que, en cada disyunción contien un elemento de cada fila)

$(A \lor (B \lor C)) \land (A \lor (\neg C \lor \neg B)) \land (A \lor A) \land (\neg B \lor (B \lor C)) \land$

$\land (\neg B \lor (\neg C \lor \neg B)) \land (\neg B \lor A) \land (C \lor (B \lor C)) \land (C \lor (\neg C \lor \neg B)) \land$

$\land (C \lor A)$

Propiedad asociativa de la disyunción

$(A \lor B \lor C) \land (A \lor \neg C \lor \neg B) \land (A \lor A) \land (\neg B \lor B \lor C) \land$

$\land (\neg B \lor \neg C \lor \neg B) \land (\neg B \lor A) \land (C \lor B \lor C) \land (C \lor \neg C \lor \neg B) \land$

$\land (C \lor A)$

Idempotencia

$(A \lor B \lor C) \land (A \lor \neg C \lor \neg B) \land A \land (\neg B \lor B \lor C) \land$

$\land (\neg B \lor \neg C) \land (\neg B \lor A) \land (C \lor B) \land (C \lor \neg C \lor \neg B) \land$

$\land (C \lor A)$

Ley de contradicción

$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg C \vee \neg B) \wedge A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (B \vee C) \wedge$

$\wedge (C \vee A)$

Ley de absorción

$A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee C)$

Es SAT (por ejemplo {A: V}, {B: F}, {C: V}) pero no Tautológica.

EJERCICIO 2

$$Z = (A \Rightarrow (B \vee \neg C)) \Rightarrow ((\neg B \Leftrightarrow C) \wedge A)$$

	A	**B**	**C**	$B \vee \neg C$	$\neg B \Leftrightarrow C$	$A \Rightarrow (B \vee \neg C)$	$(\neg B \Leftrightarrow C) \wedge A$	**Z**
I_1	V	V	V	V	F	V	F	F
I_2	V	V	F	V	V	V	V	V
I_3	V	F	V	F	V	F	V	V
I_4	V	F	F	V	F	V	F	F
I_5	F	V	V	V	F	V	F	F
I_6	F	V	F	V	V	V	F	F
I_7	F	F	V	F	V	V	F	F
I_8	F	F	F	V	F	V	F	F

Esta tabla de verdad tiene un total de 8 interpretaciones diferentes.

Teniendo en cuenta que la interpretación número 3 es modelo de la base de conocmiento, podemos afirmar que la proposición que se plantea es SATISFACIBLE (SAT).

EJERCICIO 3

(i)

EXPRESIÓN: La FBF W no es consecuencia lógica de la base de conocimiento Δ.

EXPLICACIÓN: La FBF W no es consecuencia lógica de la base de conocimiento Δ porque alguna de las interpretaciones que son modelo (es decir,en las que las FBFs de las que se compone la base de conocimiento tiene valor de verdad "verdadero") no son modelo de W (es decir, esta FBF no tiene también el valor de verdad "verdadero" en esa interpretación).

EJEMPLO: $((\neg A) \Rightarrow B)$ no es consecuencia lógica de la base de conocimiento pues hay interpretaciones que siendo modelo de la base de conocimiento no lo son de $((\neg A) \Rightarrow B)$.

(ii)

EXPRESIÓN: La FBF W no resulta derivada por inferencia de la base de conocimiento Δ a partir de las reglas de inferencia R.

EXPLICACIÓN: La FBF W no resulta derivada por inferencia de la base de conocimiento con las reglas de inferencia R porque no existe una secuencia de FBF´s $W_1, W_2, ...; W_{n-1}, W_n = W$ de forma que W_n o está en la bse de conocimiento o bien puede ser derivada aplicando alguna regla de inferencia R sobre alguna de las FBF´s que preceden a W_n en la secuencia.

EJEMPLO: $((\neg A) \Rightarrow B)$ no es derivable de la base de conocimiento $\Delta = \{A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee B\}$, porque ninguna regla de inferencia nos lleva desde una FBF de la base de conocimiento hasta $((\neg A) \Rightarrow B)$.

(iii)

RESPUESTA: No.

EXPLICACIÓN: Cualquier FBF que sea consecuencia lógica de la base de conocimiento puede ser también derivada mediante reglas de inferencia R. La única diferencia es que una consecuencia lógica se obtiene a partir de las tablas de verdad y la derivación por reglas de inferencia solo modifica los símbolos y genera nuevas FBF´s a partir de uno ya dado.

EJEMPLO: Siendo la base de conocimiento $\Delta = \{A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee B\}$, podemos sacar por la regla de inferencia introdución del $\vee$ la FBF:
$(A \vee \neg B \vee C) \vee (\neg A \vee B)$.

(iv)
<u>RESPUESTA</u>: No.

<u>EXPLICACIÓN</u>: Cualquier FBF que sea derivada por reglas de inferencia CORRECTAS R a partir de unas FBF´s ya dadas son a su vez consecuencia lógica de la base de conocimiento. La única diferencia es que una consecuencia lógica se obtiene a partir de las tablas de verdad y la derivación por reglas de inferencia solo modifica los símbolos y genera nuevas FBF´s a partir de uno ya dado.

<u>EJEMPLO</u>: Siendo la base de conocimiento $\Delta = \{A\vee\neg B\vee C, \neg A\vee B\}$, podemos sacar por la regla de inferencia introdución del $\vee$ la FBF: $(A\vee\neg B\vee C) \vee (\neg A\vee B)$. Si realizamos la tabla de verdad podemos observar que $(A\vee\neg B\vee C) \vee (\neg A\vee B)$ es también consecuencia lógica de la base de conocimiento.

EJERCICIO 4

<u>(i)</u>
Δ_1 {w1, w2, w} es SAT
Δ_2 {w1, w2, ¬w} es SAT

<u>a)</u> Esta afirmación es correcta ya que para que W sea consecuencia lógica de la base de conocimiento {w1, w2} todos sus modelos tienen que corresponder con todos los modelos de la base de conocimiento. Como sabemos que Δ_2 es también SAT, W no puede tener los mismos modelos que {w1, w2} ya que ¬w comparte, al menos, un modelo equivalente con {w1, w2}.

<u>b)</u> Esta afirmación es correcta y la justificación es análoga a la justificación de la pregunta (a).

<u>c)</u> Esta afirmación es correcta ya que si la base de conocimiento Δ_1 o Δ_2 es SAT, también lo tiene que ser la base de conomiento{w1, w2}.

<u>d)</u> Esta afirmación es incorrecta ya que la FBF $[(w1\wedge w2) \Rightarrow w]$ es equivalente a $(\neg W1 \vee \neg W2 \vee W)$, y como elenunciado nos dice que Δ_2 es SAT, lo que quiere decir que tiene al menos un modelo, existe una interpretación en que W1 es verdadero (entonces ¬W1 es falso), W2 es verdadero (entonces ¬W2 es falso) y ¬W es verdadero (W falso); por lo que la FBF $(\neg W1 \vee \neg W2 \vee W)$ en esa interpretación tendría valor de falso y no sería una tautología.

<u>(ii)</u>

$$\Delta = \{A\vee B,\ (A\Leftrightarrow B)\vee(A\Rightarrow\neg C),\ C\Rightarrow(\neg A\wedge B)\}$$

- $(A\vee B)$ ya está en FNC

- $(A\Leftrightarrow B)\vee(A\Rightarrow\neg C)$

definición del bicondicional
$(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)\vee(A\Rightarrow\neg C)$
definición del condicional
$(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)\vee(\neg A\vee\neg C)$

propiedad asociativa de la disyunción
(¬A∨B)∧(¬B∨A)∨ ¬A ∨ ¬C
propiedad distributiva
(¬A∧¬B)∨(B∧A)∨ ¬A ∨ ¬C

Consideremos (¬A∧¬B)∨(B∧A)∨ ¬A ∨ ¬C
[matriz con las disyunciones implícitas entre filas
Conjunciones implícitas entre los elementos de una misma fila]

¬A	¬B
B	A
¬A	
¬C	

(¬A∨B∨¬A∨¬C) ∧ (¬A∨A∨¬A∨¬C) ∧ (¬B∨B∨¬B∨¬C) ∧ (¬B∨A∨¬A∨¬C)
Ley de contradicción
(¬A∨B∨¬C)

- C⇒(¬A∧B)

definición del condicional
¬C ∨(¬A∧B)
propiedad distributiva
(¬C∨¬A) ∧ (¬C∨B)

Δ = {A∨B, (¬A∨B∨¬C), (¬C∨¬A) ∧ (¬C∨B)}

<u>Ahora bien, ¿es C o ¬C consecuencia lógica de la base de conocimiento?</u>

- Comprobemos primero si C es consecuencia lógica.

α = {A∨B, (¬A∨B∨¬C), (¬C∨¬A) ∧ (¬C∨B), ¬C}

(¬C∨¬A) ∧ (¬C∨B) ├─∧ELIMIN (¬C∨¬A),(¬C∨B)

α = {A∨B, (¬A∨B∨¬C), (¬C∨¬A), (¬C∨B), ¬C}

(A∨B) ├─R[RES en A] (B∨¬C)
(¬C∨¬A)

α = {A∨B, (¬A∨B∨¬C), (¬C∨¬A), (¬C∨B), ¬C, (B∨¬C)}

No podemos seguir usando resolución sobre ninguna FNC, por lo que la base de conocimiento α es SAT, por lo que Δ ╞\= C.

- Comprobemos ahora si ¬C es consecuencia lógica de Δ:

α´ = {A∨B, (¬A∨B∨¬C), (¬C∨¬A), (¬C∨B), C}

(¬C∨B) ├R[RES en C] B C

α´ = {A∨B, (¬A∨B∨¬C), (¬C∨¬A), (¬C∨B), C, B}

(¬A∨B∨¬C) ├R[RES en C] (¬A∨B) C

α´ = {A∨B, (¬A∨B∨¬C), (¬C∨¬A), (B∨¬C), C, B,(¬A∨B)}

(¬C∨¬A) ├R[RES en C] ¬A C

α´ = {A∨B, (¬A∨B∨¬C), (¬C∨¬A), (B∨¬C), C, B,(¬A∨B), ¬A}

No podemos seguir usando resolución sobre ninguna FNC, por lo que la base de conocimiento α´ es SAT, por lo que Δ ╞\= ¬C.

EJERCICIO 5

a: Solo hay una frase falsa.
b: Hay dos frases falsas.
c: Hay tres frases falsas.

A: La frase a es verdadera.
B: La frase b es verdadera.
C: La frase c es verdadera.

A⇔((¬A∧B∧C) ∨ (A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C))
B⇔((¬A∧¬B∧C) ∨ (¬A∧B∧¬C) ∨ (A∧¬B∧¬C))
C⇔(¬A∧¬B∧¬C)
Ahora vamos a convertirlas en FNC:

Para empezar podemos observar que es imposible que A⇔¬A, por lo que la FBF simplificada sería:
A⇔((A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C))
definición del bicondicional
(A⇒((A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C))) ∧ (((A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C))⇒A)
definición del condicional
(¬A∨((A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C))) ∧ (¬((A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C))∨A)
Ley de De Morgan
(¬A∨((A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C))) ∧ (((¬(A∧¬B∧C) ∧ ¬(A∧B∧¬C))∨A)
Ley de De Morgan
(¬A∨((A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C))) ∧ (((¬A∨B∨¬C) ∧ (¬A∨¬B∨C))∨A)
Leyes distributivas
(¬A ∨ (A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C)) ∧ ((¬A∨B∨¬C∨A) ∧ (¬A∨¬B∨C∨A))
Ley de contradicción
(¬A ∨ (A∧¬B∧C) ∨ (A∧B∧¬C))

Realizamos la siguiente **matriz:**

¬A

A ¬B C

A B ¬C

Utilizando la **ley de contradicción** podemos obtener las siguientes conjunciones de disyunciones (FNC):

$(\neg A\vee\neg B\vee\neg C) \wedge (\neg A\vee B\vee C)$

Ahora vamos a transformar $B\Leftrightarrow((\neg A\wedge\neg B\wedge C) \vee (\neg A\wedge B\wedge\neg C) \vee (A\wedge\neg B\wedge\neg C))$ a FNC. Como hemos dicho en la anterior, es imposible la veracidad de $B\Leftrightarrow\neg B$, por lo que ya la eliminamos de la expresión:

$B\Leftrightarrow(\neg A\wedge B\wedge\neg C)$
definición del bicondicional
$(B\Rightarrow(\neg A\wedge B\wedge\neg C)) \wedge ((\neg A\wedge B\wedge\neg C)\Rightarrow B)$
definición del condicional
$(\neg B\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C)) \wedge (\neg(\neg A\wedge B\wedge\neg C)\vee B)$
Ley de De Morgan
$(\neg B\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C)) \wedge (A\vee\neg B\vee C\vee B)$
Ley de contradicción
$(\neg B\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C))$
Realizamos la siguiente **matriz:**

¬B

¬A B ¬C

Utilizando la **ley de contradicción** podemos obtener las siguientes conjunciones de disyunciones (FNC):

$(\neg B\vee\neg A) \wedge (\neg B\vee\neg C)$

Por último, vamos a transformar $C\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)$ a FNC.

$C\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)$
definición del bicondicional
$(C\Rightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)) \wedge ((\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\Rightarrow C)$
definición del condicional
$(\neg C\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)) \wedge (\neg(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee C)$
Ley de De Morgan
$(\neg C\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)) \wedge (A\vee B\vee C)$
Ley de absorción
$(\neg C) \wedge (A\vee B\vee C)$
Lo que ya nos deja con la Forma Normal Conjuntiva o conjunciones de disyinciones.

$(\neg C) \wedge (A\vee B\vee C)$

Con la regla de inferencia **Introducción de la conjunción** podemos juntar la tres FNC´s:

(¬B∨¬A) ∧ (¬B∨¬C) ∧ (¬B∨¬A) ∧ (¬B∨¬C) ∧ (¬C) ∧ (A∨B∨C)

Simplificando las que son iguales nos quedamos con:

(¬B∨¬A) ∧ (¬B∨¬C) ∧ (¬C) ∧ (A∨B∨C)

Ley de absorción:

(¬B∨¬A) ∧ (¬C) ∧ (A∨B∨C)

Ley asociativa:

(¬B∨¬A) ∧ (¬C) ∧ (C∨(A∨B))

definición del condicional a la inversa

(¬B∨¬A) ∧ (¬C) ∧ (¬C⇒(A∨B))

Modus Tolens entre (¬C) y (¬C⇒(A∨B)) resulta (A∨B)

(¬B∨¬A) ∧ (¬C) ∧ (A∨B∨C) ∧ (A∨B)

Ley de absorción:

(¬B∨¬A) ∧ (¬C) ∧ (A∨B) = (¬B∨¬A) ∧ (A∨B) ∧ (¬C)

Propiedad distributiva:

((¬B∧A) ∨ (¬A∧B)) ∧ (¬C)

Lo que nos dice que hay dos posibilidades o soluciones:

$\boxed{A \wedge \neg B \wedge \neg C}$ Y $\boxed{\neg A \wedge B \wedge \neg C}$

EJERCICIO 6

Formalizando la información a lógica proposicional lo más literalmente posible llegamos a:

A⇔(C∨D)
B⇔(A∧C)
C⇔(C∧D)
D⇔(¬C∧A)

Vamos a pasar cada una a FNC:

- A⇔(C∨D)

definición del bicondicional

(A⇒(C∨D)) ∧ ((C∨D)⇒A)

definición del condicional

(¬A∨(C∨D))∧ (¬(C∨D)∨A)

Ley de De Morgan

(¬A ∨ C ∨ D) ∧ ((¬C∧¬D)∨A)

propiedad distributiva

(¬A ∨ C ∨ D) ∧ (A∨¬C) ∧ (A ∨ ¬D)

- B⇔(A∧C)

definición del bicondicional

(B⇒(A∧C)) ∧ ((A∧C)⇒B)

definición del condicional

(¬B∨(A∧C))∧ (¬(A∧C)∨B)

Ley de De Morgan

(¬B∨(A∧C)) ∧ (¬A ∨ ¬C ∨ B)

propiedad distributiva

(¬B∨A) ∧ (¬B∨C) ∧ (¬A ∨ ¬C ∨ B)

- $C \Leftrightarrow (C \wedge D)$

definición del bicondicional
$(C \Rightarrow (C \wedge D)) \wedge ((C \wedge D) \Rightarrow C)$
definición del condicional
$(\neg C \vee (C \wedge D)) \wedge (\neg (C \wedge D) \vee C)$
Ley de De Morgan
$(\neg C \vee (C \wedge D)) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee C)$
propiedad distributiva e idempotencia
$(\neg C \vee D)$

- $D \Leftrightarrow (\neg C \wedge A)$

definición del bicondicional
$(D \Rightarrow (\neg C \wedge A)) \wedge ((\neg C \wedge A) \Rightarrow D)$
definición del condicional
$(\neg D \vee (\neg C \wedge A)) \wedge (\neg (\neg C \wedge A) \vee D)$
Ley de De Morgan
$(\neg D \vee (\neg C \wedge A)) \wedge (C \vee \neg A \vee D)$
propiedad distributiva
$(\neg D \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee A) \wedge (C \vee \neg A \vee D)$

Introducimos por conjunciones las 4 FNC´s anteriores:

$(\neg A \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee D) \wedge$

$\wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee A) \wedge (C \vee \neg A \vee D)$

Eliminamos las repetidas:

$(\neg A \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee D) \wedge$

$\wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg C)$

Aplicando **resolución en D** con $(\neg D \vee \neg C)$ y $(\neg C \vee D)$ obtenemos $\neg C$.

$(\neg A \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee C) \wedge$

$\wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge \neg C$

Ley de absorción:

$(\neg A \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee C) \wedge \neg C$

Sabiendo que $(\neg B \vee C)$ equivale a $(B \Rightarrow C)$ y aplicando **Modus Tollens** en $(B \Rightarrow C)$ y $(\neg C)$ obtenemos:
$(\neg A \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee A) \wedge \neg B \wedge \neg C$

Ley de absorción:

$(\neg A \vee C \vee D) \wedge (A \vee \neg D) \wedge \neg B \wedge \neg C$

Como tenemos $\neg C$ podemos eliminar del grupo de disyunciones $(\neg A \vee C \vee D)$ C, pues nunca se va a cuplir teniendo $\neg C$ en un "and" lógico.

$(\neg A \vee D) \wedge (A \vee \neg D) \wedge \neg B \wedge \neg C$

Si prestamos atención podemos utilizar la **defición del bicondicional a la inversa:**

$(A \Leftrightarrow D) \wedge \neg B \wedge \neg C$

Como conclusión, podemos afirmar que B y C siempre van a ser Siths y que A y D van a ser ambos los dos siths o jedis.

En resumen, hay **dos posibles combinaciones:**

-1ª: A(sith), B(sith), C(sith), D(sith)
-2ª: A(jedi), B(sith), C(sith), D(jedi)