Entregar por escrito el Jueves 12 de Marzo. Los ejercicios pueden hacerse en grupo; entregar en grupo, escribiendo por orden alfabético los nombres de todos los participantes, no penaliza.

Se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ es una sub-σ-álgebra.

1) A veces uno lee que la aproximación normal a la binomial es factible para $n = 30$ y $1/10 < p < 9/10$. En torno a este asunto, se os pide echar algunas cuentas en el caso extremo $p = 1/10$, $n = 30$. Sea $S_{30} \sim B(30, 1/10)$. Calcular la probabilidad de tener al menos tres éxitos, es decir, $P(S_{30} \geq 3)$, *usando la distribución binomial.* Estimar la probabilidad de tener al menos tres éxitos, es decir, $P(S_{30} \geq 3)$, *usando la aproximación normal sin corrección de continuidad.* Estimar la probabilidad de tener como máximo dos éxitos, es decir, $P(S_{30} \leq 2)$, *usando la aproximación normal sin corrección de continuidad.* Hacer lo mismo pero con corrección de continuidad, o de de Moivre-Laplace.

2) La media y cualquier mediana m de una v.a. no pueden estar muy alejadas. Más precisamente, sea $X \in L^2$ una v.a. y sea m tal que $P(X \geq m) \geq 1/2$ y $P(X \leq m) \geq 1/2$, es decir, m es una mediana de X. Demostrar que $|E(X) - m| \leq \sigma_X$.

3) Probar directamente (sin usar Jensen condicional) que $|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X||\mathcal{G})$. Sugenercia: escindir X en sus partes positiva y negativa.

4) Dadas dos variables aleatorias X e Y con media cero, demostrar las siguientes afirmaciones:

a) X y $E[X|Y]$ tienen correlación positiva.

b) El coeficiente de correlación de Y y $E[X|Y]$ tiene el mismo signo que el de X y Y.

5) Sea $X : [0,1) \to [0,1)$ la función $X(w) = w^2$, donde a $[0,1)$ se le asigna la probabilidad uniforme (en este caso, la medida de Lebesgue). Sea $\mathcal{A}_n := \sigma([0, 1/2^n), [1/2^n, 2/2^n), \ldots, [(2^n - 1)/2^n, 1))$ la σ-álgebra generada por los intervalos diádicos $[j/2^n, (j+1)/2^n)$, $j = 1 \ldots, n-1$. Calcular $E(X|\mathcal{A}_n)$. Decidir razonadamente si la sucesión de v.a. $\{E(X|\mathcal{A}_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge (y en caso de respuesta afirmativa, determinar a qué) en alguno de los siguientes sentidos: a) uniformemtente, b) en L^p, determinando para que valores de p hay convergencia, c) en casi todo punto, d) en medida, e) en distribución. Decidir razonadamente si la sucesión de v.a. $\{E(X|\mathcal{A}_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

6) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un proceso estocástico, y $0 < r \leq s \leq \infty$, entonces $\|X\|_r \leq \|X\|_s$, donde $\|X\|_p := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_p$.

7) Probar que si $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala, y $\|X\|_s < \infty$, donde $1 \leq s < \infty$, entonces $Y := \{|X_n|^s\}_{n=0}^{\infty}$ es una submartingala.

8) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ((0,1], Borel(0,1], \lambda)$, donde $\lambda = U$ es la probabilidad uniforme o medida de Lebesgue. Sea $X_n := 2^n \, \mathbf{1}_{(0, 2^{-n}]}$. Probar que $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\sigma(X_0, \ldots, X_n)\}_{n=0}^{\infty}$. Decidir si $\lim X_n$ existe, y en que sentido (en distribución, en probabilidad, c.s., y en L^p para $0 < p \leq \infty$).

9) Sea $X := \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una martingala tal que para todo $n \geq 0$, $X_n \in L^2$. Probar que los incrementos son ortogonales, donde los incrementos se definen como $Y_0 := X_0$, y para $n > 0$, $Y_n := X_n - X_{n-1}$. Es decir, demostrar que si $j \neq k$, entonces $(Y_j, Y_k) = \int Y_j Y_k = 0$.