UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, grupo 721, 2018-2019

Ejercicios 8 a 14

8. Sea X un espacio vectorial normado.

A. Demostrar que si X es un espacio de Banach, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.

B. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en X. Demostrar que existe una sucesión $\{n_j\}_j \subset \mathbb{N}$, estrictamente creciente y tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}.$$

C. Demostrar que es convergente toda sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente.

D. Demostrar que X es un espacio de Banach cuando toda serie absolutamente convergente es convergente.

9. A.

1. Demostrar que todos los $a, b \in \mathbb{R}$ positivos satisfacen

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

2. Demostrar que todos los $a, b \in \mathbb{R}$ cumplen

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} < \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

B. Considérese el espacio vectorial $\mathcal{S}$ formado por todas las sucesiones $X = \{x_n\}_n$ de números reales. Demostrar que

$$d(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|}$$

es una métrica en $\mathcal{S}$.

10. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea

$$C = \overline{B(0;1)} = \{ x \in E \; : \; \|x\| \leq 1 \}$$

la bola unidad cerrada de E.

A. Demostrar que para todos los $r\,, s > 0$ se verifica

$$r\,C = \big\{\, x \in E \;:\; \|x\| \leq r \,\big\}\,,$$
$$r\,C + s\,C = (r+s)\,C\,.$$

B. Demostrar que las dos identidades anteriores también son válidas para la bola unidad abierta de E.

11. Considérese el espacio vectorial ℓ^2 formado por todas las sucesiones $X = \{x_n\}_n$ de números reales para las que

$$\|X\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$$

es convergente.

1. Demostrar que esta norma procede de un producto escalar $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ en ℓ^2.
2. Sea, para cada $j \in \mathbb{N}$, la sucesión $\mathbf{e}_j = \{e_{j,n}\}_n$ definida por

$$e_{j,n} = \begin{cases} 1\,, & n = j\,, \\ 0\,, & n \neq j\,. \end{cases}$$

   Considérese el conjunto $A = \big\{\, \mathbf{e}_j \;:\; j \in \mathbb{N} \,\big\}$. Demostrar que A es un subconjunto cerrado y acotado de ℓ^2.

3. Calcular cada

$$\|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\|_2\,.$$

   Demostrar que A no es compacto.

12. Sean $(X\,, d)$ un espacio métrico y A u subconjunto de X. Considérense el cierre $\overline{A}$ de A y el conjunto de puntos de acumulación de A, que denotamos por A'. Demostrar:

1. A' es cerrado en $(X\,, d)$.
2. Si $A \subset B$, entonces $A' \subset B'$.
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
4. $(\overline{A}\,)' = A'$.
5. $\overline{A}$ es cerrado en $(X\,, d)$.
6. $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

13. Dados un espacio métrico (X, d), un subconjunto A de X y un punto $c \in X$, decimos que *c es un punto interior de A* cuando existe algún abierto G tal que $x \in G \subset A$.

Coleccionamos todos los puntos interiores de A en el conjunto que denotamos $\operatorname{Int} A$. Obsérvese que, con esta definición, un conjunto A es abierto si y sólo si coincide con $\operatorname{Int} A$.

A. Demostrar las siguientes identidades:

1. $\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.
2. $\operatorname{Int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$.
3. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

B. Denotando por ∂A la frontera de A,

1. $\operatorname{Int}(\partial A)$ es vacío si A es abierto o si A es cerrado.
2. Dar un ejemplo de un A y un X para los que $\operatorname{Int}(\partial A) = X$.
3. Si $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} B = \emptyset$ y A es cerrado entonces $\operatorname{Int}(A \cup B) = \emptyset$.
4. Dar un ejemplo en el que $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} B = \emptyset$, pero $\operatorname{Int}(A \cup B) = X$.
5. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ y $\partial A = \partial(X \setminus A)$.
6. Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ entonces $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

14. Considérense $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y también $(\mathbb{R}, d)$, donde

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Comprobar que esta función $d(x, y)$ define una métrica en $\mathbb{R}$.

1. Representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Demostrar que f es biyectiva, continua y con inversa continua entre estos dos espacios métricos. En particular, concluir que toda sucesión es simultáneamente convergente en ellos.

2. Estudiar si la sucesión $\{n\}_n$ es de CAUCHY o convergente en $(\mathbb{R}, d)$. ¿Es completo este espacio métrico?

$x \longmapsto x$

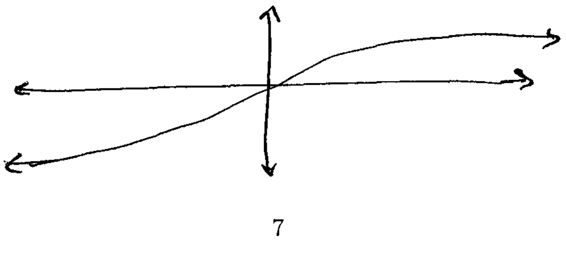
$\mathrm{Id}: (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d)$

biyectiva

continua

inversa continua

$f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$



8. X espacio vectorial normado

A) Demostrar que si X es de Banach, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.

X es de Banach = espacio normado y completo
↳ toda sucesión de Cauchy es convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$

Sol: Sé que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge. La sucesión de sumas parciales converge, e.d., $\hat{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$, converge cuando $n \to \infty$ e.d, la sucesión $\hat{S}_n$ es de Cauchy (en $\mathbb{R}$), e.d., $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que $\forall n,m \geq N$, $|\hat{S}_n - \hat{S}_m| < \varepsilon$.

Sea $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serie absolutamente convergente. Quiero ver que converge. Como estoy en un espacio de Banach, basta ver que la sucesión de sumas parciales es de Cauchy para $\|\cdot\|$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\underbrace{\|S_n - S_m\|}_{n \geq m} \overset{\circledast}{=} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\|$$

Sea $\varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que $\forall n,m \geq N$ $\sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| < \varepsilon$ (aquí uso que la serie es absolutamente convergente y que $\hat{S}_n$ son sucesión de Cauchy).

Para esa N, si $n,m > N$, $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$ por $\circledast$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ S_n son de Cauchy $\Rightarrow$ Tiene límite por ser Esp. Banac

B) $\{x_n\}$ de Cauchy. Demostrar que $\exists \{n_j\} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente, tal que $\sum^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$

$\exists N_1$ tal que $\forall n,m > N_1$, $\|x_n - x_m\| < 1/2$

$n_1 = N_1 + 1$

$\forall n \geq n_1$, $\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2$

$\|x_{n_3} - x_{n_2}\| < 1/2^2$ por ser de Cauchy $\exists N_2$ tal que $\forall n,m > N_2$.

$\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < 1/2$ $\|x_n - x_m\| < 1/2^2$

$\tilde{N}_2 = \max(N_1+1, N_2+1)$ $n_2 = \tilde{N}_2$

En general, sea $\tilde{N}_K = \max(N_1+1, \dots, N_K+1)$ y $n_K = \tilde{N}_K$

donde para cada $i \leq K$, $\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^j}$ $n,m \geq N_j$

C) Demostrar que es convergente toda sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente.

$\{x_n\}$ de Cauchy

$\{x_{n_k}\}$ convergente, $x_{n_k} \longrightarrow y \in X$

¿$\lim_{n\to\infty} x_n = y$? $\longleftrightarrow$ ¿$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tal que $\forall n \geq N$, $\|x_n - y\| < \varepsilon$?

$$\|x_n - y\| = \|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - y\| \leq \underbrace{\overset{¿\varepsilon/2?}{\|x_n - x_{n_k}\|}}_{\text{voy a usar lo de Cauchy}} + \underbrace{\overset{¿\varepsilon/2?}{\|x_{n_k} - y\|}}_{\text{voy a usar lo de la subsucesión convergente}} < \varepsilon$$

$\exists N_1$ tal que $\forall n,m > N_1$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/2$

$\exists N_2$ tal que $\forall n_j > N_2$ $\|x_{n_j} - y\| < \varepsilon/2$

$N = \max(N_1, N_2)$ si $n > N \Rightarrow \|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y\| <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ∎

B) $S = \{ X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,,\, x_n \in \mathbb{R} \}$

Ver que $d(X,Y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ es métrica en S

Primero, observamos que $\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|} \in [0,1)$, lo que quiere decir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ está mayorada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ y por el criterio de comparación la serie converge.

1) $d(X,Y) \geq 0$ porque es una serie de términos positivos

$d(X,X) = 0$ (obvio)

$$d(X,Y) = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|} = 0 .$$

Como $\frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|} \geq 0 \Rightarrow |x_n - y_n| = 0 \;\; \forall n \quad X = Y$

2) $d(X,Y) = d(Y,X)$ obvio

3) $X, Y, Z \in S$

$$d(X,Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n-z_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n + y_n - z_n|}{1+|x_n-y_n+y_n-z_n|} \leq$$

$$\leq \sum \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|} + \frac{1}{2^n} \frac{|y_n - z_n|}{1+|y_n-z_n|}$$

$$\frac{|x_n - y_n + y_n - z_n|}{1+|x_n-y_n+y_n-z_n|} \leq \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|} + \frac{|y_n - z_n|}{1+|y_n-z_n|} \quad \forall n \geq 1$$

9\. A)

1.) $a,b \in \mathbb{R}$ $\quad a,b>0$ $\quad$ Demostrar que $\dfrac{a+b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

Quiero ver que $f(a+b) < f(a) + f(b)$.

Dejamos la a fija (le llamos y a la b)

$$g(y) = f(a+y) - f(y)$$

(1) $g(0) = f(a-0) - f(0) = f(a)$

(2) g es creciente en $y>0$

$$g'(y) = f'(a+y) - f'(y)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad ; \quad g'(y) = \frac{1}{(1+a+y)^2} - \frac{1}{(1+y)^2} < 0 \qquad y>0$$

$$g(b) < g(0) \qquad b>0$$

$$f(a+b) - f(b) < f(a)$$

2) $a,b \in \mathbb{R}$ $\quad$ Demostrar $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$

$$f(a+b) \underset{\substack{f \text{ crec. } a+b \leq |a+b|}}{\leq} f(|a+b|) \underset{\substack{f \text{ crec.} \\ |a+b| \leq |a|+|b|}}{\leq} f(|a|+|b|) \underset{\text{si } a,b \neq 0}{<} f(|a|) + f(|b|) = \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

si a ó $b = 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{1+|a|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|}$ (es lógicamente igual)

D) X de Banach si toda serie abs. convergente es convergente

$\{x_k\}$ de Cauchy, ¿converge?

Por parte B $\exists \{n_k\}$ tal que $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$

$y = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ es abs. convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty \Rightarrow \exists \sum_{k=1}^{\infty} y_k \text{ converge (hipótesis)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{m} y_k = \sum_{k=1}^{m} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_m} - x_{n_1} \longrightarrow z$$

$$\Rightarrow x_{n_m} \xrightarrow{m \to \infty} z.$$

Por C la sucesión converge por ser de Cauchy y tener subsucesiones convergente.

$\boxed{11}$ $\ell^2 = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$

1) Ver que $\|\{x_n\}\|^2 = \sum_1^{\infty} x_n^2$ viene que un producto esca

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty$$

$$\left|\sum_{n=1}^{k} x_n y_n\right|^2 \leq \left(\sum_1^{k} x_n^2\right)\left(\sum_1^{k} y_n^2\right) \leq \left(\sum_1^{\infty} x_n^2\right)\left(\sum_1^{\infty} y_n^2\right) < +\infty$$

2) $j \in \mathbb{N}$ $\quad e_j = \{e_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$

$$e_{j,n} = \begin{cases} 1 & n=j \\ 0 & n \neq j \end{cases}$$

$A = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$. Demostrar que A es un subconjunto cerrado y acotado de ℓ^2.

todos 0 menos $n=j$.

$$\|e_j\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e_{j,n}^2 = 1 \implies A \text{ acotado}$$

¿A cerrado? $\rightarrow$ falta ver esto

3) $\|e_j - e_k\|^2 = \|(0 \ldots 0 \ldots \underset{j}{1} \ldots 0 \ldots \underset{k}{-1} \ldots 0 \ldots 0)\|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\{e_j\}$ no converge, ni ninguna sucesión, porque no es de Cauchy

$\implies A$ no es compacto.

12.1 (X,d) $\quad A\subset X \quad \bar{A}$ cierre $\quad A'$ ptos. acumulación

OBSERVACIÓN: $\bar{A} = A \cup A'$

1. A' es cerrado en (X,d)

Veamos que $(A')^c$ es abierto.

entorno de y

Sea $y \in (A')^c$. Quiero ver que $\exists V$ de y tal que $y \in V \subseteq (A')^c$.

$\Rightarrow \exists W$ de y tal que $W\setminus\{y\} \cap A \neq \emptyset$.

Los puntos de W, $z \in W$, $z \neq y$ $\quad W\setminus\{y\}$ entorno de z

$W\setminus\{y\} \cap A = \emptyset \Rightarrow z \notin A' \Rightarrow W \subseteq (A')^c$

2. Si $A\subset B \Rightarrow A' \subset B'$

Sea $p \in A' \Rightarrow \forall$ entorno abierto $\mathcal{U}$ de p, tengo

$\mathcal{U} \cap A\setminus\{p\} \neq \emptyset \qquad$ ¿$p \in B'$?

¿$\mathcal{U} \cap B\setminus\{p\} \neq \emptyset$?

$$\emptyset \neq \mathcal{U}\cap A\setminus\{p\} \underset{A\subseteq B}{\subseteq} \mathcal{U}\cap B\setminus\{p\}$$

3. $(A\cup B)' = A' \cup B'$

$$\left.\begin{array}{l} A \subset A\cup B \overset{(2)}{\Rightarrow} A' \subset (A\cup B)' \\ B \subset A\cup B \overset{(2)}{\Rightarrow} B' \subset (A\cup B)' \end{array}\right\} \Rightarrow A'\cup B' \subset (A\cup B)'$$

Ahora, $p \in (A\cup B)' \Rightarrow \forall$ entorno abierto $\mathcal{U}$ de p, $\mathcal{U} \cap [(A\cup B)\setminus\{p\}] \neq \emptyset$.

Suponemos que $p \notin A' \Rightarrow \exists\, \mathcal{U}_1$ entorno abierto de p tal que $\mathcal{U}_1 \cap A\setminus\{p\} = \emptyset$ y si $p \notin B' \Rightarrow \exists\, \mathcal{U}_2$ entorno abierto de p tal que $\mathcal{U}_2 \cap B\setminus\{p\} = \emptyset$. Sea $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ entorno abierto de p $\mathcal{U} \cap [(A\cup B)\setminus\{p\}] = \emptyset \Rightarrow p \notin (A\cup B)'$ <u>contradicción</u>

$\Rightarrow p \in A' \cup B'$

4. $(\bar{A})' = A'$

$A \subset \bar{A} \overset{(2)}{\Rightarrow} A' \subset \bar{A}'$

Ahora ¿$(\bar{A})' \subset A'$?

Supongamos $\nexists$ $p \in (\bar{A})' \setminus A'$

$p \notin A' \Rightarrow \exists \mathcal{U}$ entorno abierto de p tal que: $\mathcal{U} \cap A \setminus \{p\} = \emptyset$

$p \in \bar{A}' \Rightarrow$ para ese $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \cap \bar{A} \setminus \{p\} \neq \emptyset$.

esto nos dice que $\mathcal{U} \cap A = \emptyset$ o bien $\mathcal{U} \cap A = \{p\}$

Sea $q \in \mathcal{U}$, $q \neq p$ $\Rightarrow q \notin A \Rightarrow \mathcal{U} \setminus \{p\}$ es un entorno abierto de q, $\mathcal{U} \setminus \{p\} \cap A = \emptyset \Rightarrow q \notin \bar{A}$

$\Rightarrow q \notin \mathcal{U} \cap \bar{A} \setminus \{p\} \Rightarrow \mathcal{U} \cap \bar{A} \setminus \{p\} = \emptyset$.

5. $\bar{A}$ es cerrado en (X, d).

¿$\bar{A}^c$ es abierto? $x \in \bar{A}^c$ ¿$\exists \mathcal{U}$ entorno abierto de x: $\mathcal{U} \subseteq \bar{A}$

$x \notin \bar{A} \Rightarrow \exists \mathcal{U}$ de x con $\mathcal{U} \cap A = \emptyset$.

Pero si $q \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ es entorno abierto de q, $\mathcal{U} \cap A = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow q \notin \bar{A} \Rightarrow q \in \bar{A}^c \Rightarrow \mathcal{U} \subseteq \bar{A}^c \Rightarrow \bar{A}^c$ es abierto. ∎

6. $\bar{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

$\bar{A}$ cerrado demostrado; $A \subseteq \bar{A}$ demostrado

Falta ver que si F cerrado, $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset F$.

$\bar{A} \subset F \iff \bar{A}^c \supset F^c$. Cogemos $x \in F^c$ abierto $\Rightarrow F^c$ es entorno abierto de ~~la~~ x. Por otro lado $F^c \subset A^c$ (ya que $A \subset F$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow F^c \cap A = \emptyset \Rightarrow x \in F^c \Rightarrow$ tiene un entorno abierto F^c que $F^c \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin \bar{A} \Rightarrow F^c \subset \bar{A}^c \Rightarrow \bar{A} \subset F$