Hoja 5

1. Calcula la primera forma fundamental (eligiendo una parametrización cuando no se indique ninguna) de las siguientes superficies:

   - Superficie general de revolución: $\Phi(u,\theta) = \big(r(u)\cos\theta\,,\, r(u)\operatorname{sen}\theta\,,\, z(u)\big)$.
   - Helicoide: $\mathbf{X}\,(u,v) = (\,u\cos v\,,\, u\operatorname{sen} v\,,\, v\,)$.
   - Paraboloide de revolución: $\{z = x^2 + y^2\}$.
   - Hiperboloides: de una hoja $\{x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$, de dos hojas $\{1 + x^2 + y^2 = z^2\}$.

2. Utiliza la parametrización de revolución del toro (ejercicio 4 de la hoja 4) para hallar la primera forma fundamental del toro y calcular el área del toro.

3. **La Pseudoesfera de Beltrami.** Recordemos la **tractriz,** curva plana que ha sido descrita en el ejercicio 11 de la hoja 1. Dadas las funciones:

$$r(v) \;=\; \frac{1}{v} \quad , \quad z(v) \;=\; \int_1^v \frac{\sqrt{v^2-1}}{v^2}\,dv \quad , \quad v > 1\,,$$

demuestra que $\alpha(v) = \big(\,r(v)\,,\, z(v)\,\big)$ es una parametrización (no por longitud de arco) de la tractriz. La parametrización:

$$\Phi(u,v) \;=\; \big(\,r(v)\cos u\,,\, r(v)\operatorname{sen} u\,,\, z(v)\,\big) \quad , \quad (u,v)\in\mathbb{R}\times(1,+\infty)\,,$$

tiene por imagen la superficie de revolución obtenida al rotar la tractriz alrededor del eje z, superficie que se llama **Pseudoesfera de Beltrami**. Haz un dibujo de la pseudoesfera.

Comprueba que, como forma cuadrática en el semiplano $\{(u,v)\ :\ v>1\}$, es:

$$I_\Phi \;\equiv\; \frac{(du)^2 + (dv)^2}{v^2}\,,$$

pero de hecho esa expresión vale en el semiplano mayor $\mathbb{H} \;=\; \{\,(u,v)\ :\ v>0\,\}$, en el cual recibe el nombre de **métrica hiperbólica.**

×4. Cierta superficie S está dada por una parametrización regular $\mathbf{X}(u,v)$. Consideramos el siguiente campo de formas cuadráticas en S:

$$Q \;\equiv\; (du)^2 + 2\,(u+v)\,du dv + \big(\,e^v + (u+v)^2\,\big)\,(dv)^2\,. \tag{1}$$

En S tenemos otras coordenadas curvilíneas (λ,μ), relacionadas con las (u,v) por las siguientes identidades:

$$u \;\equiv\; 1-\mu+e^{\lambda-\mu} \quad , \quad v \;\equiv\; \mu\,.$$

Hallar la expresión de Q en las nuevas coordenadas, es decir,

$$Q \equiv A\,(d\lambda)^2 + 2\,B\,d\lambda d\mu + C\,(d\mu)^2$$

5. Sea S la silla, parametrizada por $\Phi(x,y) = (x, y, xy)$. Sea $u : S \to \mathbb{R}$ la función escalar dada por $u \equiv y$. Considera la familia de curvas definida por $u = \text{cte}$.

   (a) Calcula las trayectorias en S ortogonales a esas curvas, describiéndolas en la forma $v_0 = \text{cte}$ para cierta función $v_0(x,y)$.

   ¡Cuidado! ten en cuenta que Φ no conserva ángulos. Por lo tanto líneas ortogonales en la superficie corresponden a líneas en el plano de parámetros xy que son ortogonales para I_Φ pero tal vez no para la métrica estándar del plano.

   (b) Dada cualquier función de una variable φ, con φ' nunca nula, la función $v \equiv \varphi \circ v_0$ tiene en S las mismas curvas de nivel que v_0 (las trayectorias ortogonales del apartado anterior). Ajusta φ para que sea $v \equiv x\cdot\text{función}(y)$ y entonces considera las funciones u, v como unas nuevas coordenadas en S. Comprueba que en esas coordenadas la primera forma fundamental es diagonal, es decir

$$I \;\equiv\; \widetilde{E}(u,v)\,(du)^2 + \widetilde{G}(u,v)\,(dv)^2\;,$$

   y da una explicación geométrica de por qué I es diagonal en las coordenadas (u,v).

6. Sea S el helicoide con la parametrización $\mathbf{X}(u,v) = (\,u\cos v\,,\,u\,\mathrm{sen}\,v\,,\,v\,)$. Sea $\alpha(u) \subset \mathbb{R}^3$ una curva birregular en el espacio, parametrizada por longitud de arco, y sea S' su superficie de las binormales, parametrizada por:

$$\Phi(u,v) = \alpha(v) + u\,\mathbf{b}_\alpha(v)$$

   Comprueba que Φ define un reglado de S' y que $h : S \to S'$, definida por $\mathbf{X}(u,v) \stackrel{h}{\longmapsto} \Phi(u,v)$, lleva reglas de S a reglas de S'. ¿Cómo tiene que ser α para que h sea una isometría local?

7. Sea S un cilindro generalizado, que suponemos *completo:* cada generatriz de S es una recta afín completa, paralela a un vector unitario fijado $\mathbf{u}_0$. Sea $\alpha_0(u) \subset S$ una trayectoria ortogonal a las generatrices, parametrizada por longitud de arco. Explica por qué la siguiente es una parametrización de S:

$$\Phi(u,\lambda) \;\equiv\; \alpha_0(u) + \lambda\,\mathbf{u}_0\;,$$

   y comprueba que, la primera forma fundamental I_Φ es la misma para todos los cilindros. Considerando el caso en que α_0 es una recta, obtén una isometría local del plano (con la métrica estándar) a cualquier cilindro (con su primera forma fundamental). Demuestra que las trayectorias ortogonales a las generatrices del cilindro (paralelas a $\mathbf{u}_0$) son los cortes con los niveles de la función $h(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{x}$.

8. Sea S un cono generalizado con vértice $\mathbf{p}_0$. Suponemos S *completo:* cada generatriz de S es una semirrecta completa empezando en $\mathbf{p}_0$.

   Sea $\alpha_1(u)$ una parametrización, por longitud de arco, del corte del cono con la esfera unidad centrada en $\mathbf{p}_0$. Explica por qué la siguiente es una parametrización del cono:

$$\Phi(u,\lambda) \;\equiv\; \mathbf{p}_0 + \lambda\,\alpha_1(u) \quad , \quad \lambda > 0\,,$$

   y comprueba que, la primera forma fundamental I_Φ es la misma para todos los conos. Considerando el caso en que α_1 recorre el ecuador de la esfera unidad o parte de él, deduce que cualquier cono (con su primera forma fundamental) es localmente isométrico al plano (con la métrica estándar). Demuestra que las trayectorias ortogonales a las generatrices del cono son los cortes con las esferas centradas en el vértice.

9. Sea $\alpha(s)$, $s \in J$, una curva birregular en el espacio parametrizada por longitud de arco. Sea $\{\, \mathbf{t}(s)\,,\, \mathbf{n}(s)\,,\, \mathbf{b}(s)\,\}$ su triedro de Frenet y sean $k_\alpha(s), \tau_\alpha(s)$ su curvatura y torsión.

   La **superficie tangencial** de α es la superficie reglada igual a la unión de las rectas tangentes afines de α. Se divide en dos mitades, una de ellas parametrizada por:

$$\Phi(s,\lambda) \;\equiv\; \alpha(s) + \lambda\, \mathbf{t}_\alpha(s) \quad , \quad s \in J \;,\; \lambda \geq 0 \;,$$

   y la otra mitad por la misma fórmula pero en el dominio $\{s \in J \;,\; \lambda \leq 0\}$.

   Consideramos la mitad positiva. Calcula la primera forma fundamental I_Φ y comprueba que depende de k_α pero no de τ_α. Sea $\beta(s)$, $s \in J$, la curva *plana* parametrizada por longitud de arco con curvatura $k_\beta(s) \equiv k_\alpha(s)$. Demuestra que las superficies tangenciales (positivas) de α y de β son localmente isométricas (con las respectivas primeras formas fundamentales). Deduce que toda superficie tangencial (con su primera forma fundamental) es localmente isométrica a un dominio del plano (con la métrica estándar). Las trayectorias ortogonales a las reglas en la superficie tangencial de α ¿en qué curvas del plano se transforman por la isometría local?

10. Demuestra que la parametrización estereográfica (ejercicio 5 de la hoja 4) es conforme.

x11. El helicoide es la superficie parametrizada por $\mathbf{X}(\lambda, v) = (\lambda \cos v, \lambda \operatorname{sen} v, v)$. Encuentra una función $h(u)$ con $h'(u) > 0$ y tal que $\Phi(u,v) = \mathbf{X}(h(u), v)$ sea una parametrización conforme.

12. Sea S la esfera unidad (menos los polos norte y sur) parametrizada por:

$$\Phi(u,\theta) = \big(\, \operatorname{sen} u\, \cos\theta\,,\, \operatorname{sen} u\, \operatorname{sen}\theta\,,\, \cos u\,\big) \quad , \quad 0 < u < \pi\;.$$

   Determina una función $\varphi(u)$ para que $h : S \to$ (plano xy) dada por $\Phi(u,\theta) \mapsto \big(\theta, \varphi(u)\big)$ sea conforme (proyección de G. Mercator, casi un siglo antes del cálculo infinitesimal).

   ¿En qué convierte la proyección de Mercator a los meridianos?

13. Sea S la esfera unidad (menos los polos norte y sur) parametrizada por:

$$\mathbf{X}(u,\theta) = \big(\, \cos u\, \cos\theta\,,\, \cos u\, \operatorname{sen}\theta\,,\, \operatorname{sen} u\,\big)\;, \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\;.$$

   Sea S' el cilindro circular parametrizado por $\Phi(\overline{\theta}, \overline{u}) = (\cos\overline{\theta}, \operatorname{sen}\overline{\theta}, \overline{u})$. Sea $h : S \to S'$ definida por

$$\mathbf{X}(u,\theta) \;\overset{h}{\longmapsto}\; \Phi(\theta, \operatorname{sen} u)$$

   Haz un dibujo y describe h geométricamente. Comprueba que $\underbrace{h \text{ es equiárea}}_{\downarrow}$ (Arquímedes, siglo III A.C.)

   Ver que $\det I_\Phi$ se preserva

HOJA 5

1.

a) Superficie de revolución: $\phi(u,\theta) = (r(u)\cos\theta,\ r(u)\,\text{sen}\theta,\ z(u))$

$$\phi_u(u,\theta) = (r'(u)\cos\theta,\ r'(u)\,\text{sen}\theta,\ z'(u))$$

$$\phi_\theta(u,\theta) = (-r(u)\,\text{sen}\theta,\ r(u)\cos\theta,\ 0)$$

$$I_\phi = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$F = 0 \qquad G = \langle \mathbb{X}_\theta, \mathbb{X}_\theta \rangle = r(u)^2 \qquad E = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = r'(u)^2 + z'(u)$$

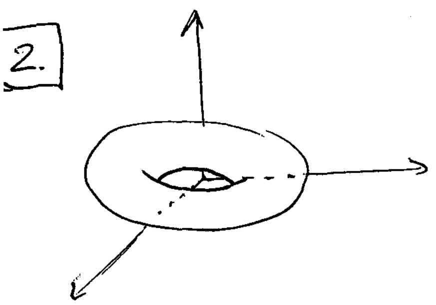
c) Paraboloide de revolución: $\{z = x^2 + y^2\}$

$$\mathbb{X}(u,v) = (u,\ v,\ u^2+v^2)$$

$$\mathbb{X}_u = (1, 0, 2u) \qquad \mathbb{X}_v = (0, 1, 2v)$$

$$\left.\begin{array}{l} E = 1+4u^2 \\ F = 4uv \\ G = 1+4v^2 \end{array}\right\} \quad I = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}$$

2.



$$\mathbb{X}(t,\theta) = ((r\cos t + R)\cos\theta,\ (r\cos t + R)\,\text{sen}\theta,\ r\,\text{sen}t)$$

$$\mathbb{X}_t = (-r\,\text{sen}t\cos\theta,\ -r\,\text{sen}t\,\text{sen}\theta,\ r\cos t)$$

$$\mathbb{X}_\theta = (-(r\cos t + R)\,\text{sen}\theta,\ (r\cos t + R)\cos\theta,\ 0)$$

$$I_{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$E = \langle \mathbb{X}_t, \mathbb{X}_t \rangle = r^2\text{sen}^2 t\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2 t\,\text{sen}^2\theta + r^2\cos^2 t = r^2\text{sen}^2 t + r^2\cos^2 t = r^2$$

$$F = \langle \mathbb{X}_t, \mathbb{X}_\theta \rangle = r\,\text{sen}t\cos\theta(r\cos t + R)\,\text{sen}\theta - r\,\text{sen}t\,\text{sen}\theta(r\cos t + R)\cos\theta = 0$$

$$G = \langle \mathbb{X}_\theta, \mathbb{X}_\theta \rangle = (r\cos t + R)^2\text{sen}^2\theta + (r\cos t + R)^2\cos^2\theta = (r\cos t + R)^2$$

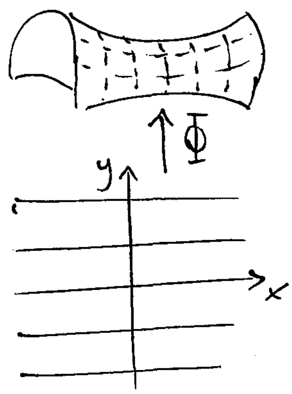
$\mathbb{X} : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow S$ parametrización (pero no recubre toda S)

$$\text{Área}(\text{toro}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\det I_{\mathbb{X}}(t,\theta)}\, dt\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(r\cos t + R)\, dt\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r^2\text{sen}t + rRt \right]_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi r R\, d\theta = 4\pi^2 r R$$

5. $\Phi(x,y) = (x,y,xy)$ $\qquad\qquad$ $\Phi(\mathbb{R}^2) = S$

a)



$u : S \longrightarrow \mathbb{R}$

$u(\Phi(x,y)) := y$

$\Phi_x(x,y) = (1,0,y)$

$\Phi_y(x,y) = (0,1,x)$

$I_\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y^2 & xy \\ xy & 1+x^2 \end{pmatrix}$

$\langle \Phi_x, \Phi_x \rangle$

$F \neq 0 \implies$ curvas $x = \text{cte.}$ e $y = \text{cte.}$ no son ortogonales

$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) \longmapsto (x(t), y(t))$

$(\Phi\circ\alpha)' = \Phi_x(\alpha(t))\,\underline{x'(t)} + \Phi_y(\alpha(t))\,\underline{y'(t)}$

en la base $\langle \Phi_x, \Phi_y \rangle$

$\Phi\circ\alpha$ perpendicular a curvas $y = \text{cte.}$ $\longrightarrow$ $\langle (\Phi\circ\alpha)', \Phi_x \rangle = 0$

Φ_x en la base $\longrightarrow \langle \Phi_x, \Phi_y \rangle$

$$\langle (\Phi\circ\alpha)', \Phi_x \rangle = (x', y')\, I_\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x' \;\; y') \begin{pmatrix} 1+y^2 \\ xy \end{pmatrix} =$$

$$= x'(1+y^2) + y'xy \implies$$

$$\implies \frac{x'}{x} = -\frac{y'y}{1+y^2} \implies \log|x| = -\frac{1}{2}\log(1+y^2) + C \implies$$

$$\implies x^2 = \frac{c'}{1+y^2} \implies \boxed{V_0(x,y) = x^2(1+y^2)}$$

Las curvas buscadas son $V_0 \equiv \text{cte.}$

19.1 $\alpha: J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad s \in J$ (intervalo)

$\Phi(s,\lambda) = \alpha(s) + \lambda \mathbb{t}_\alpha(s) \qquad \lambda > 0 \quad ó \quad \lambda < 0$

a)

$\Phi_s(s,\lambda) = \alpha'(s) + \lambda \mathbb{t}_\alpha'(s) = \alpha'(s) + \lambda K_\alpha \mathbb{n}_\alpha(s)$

$\Phi_\lambda(s,\lambda) = \mathbb{t}_\alpha(s)$

$$I_\Phi(s,\lambda) = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 K_\alpha^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ (porque β es curva plana $\Rightarrow \tau_\beta \equiv 0$)
con $K_\beta(s) = K_\alpha(s) \quad \forall s \in J$

$\Phi^\beta(s,\lambda) = \beta(s) + \lambda \mathbb{t}_\beta(s)$

$$I_{\Phi^\beta}(s,\lambda) = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 K_\beta(s)^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 K_\alpha(s)^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I_{\Phi^\alpha}(s,\lambda)$$

Como $I_{\Phi^\beta}(s,\lambda) = I_{\Phi^\alpha}(s,\lambda) \quad \forall s \in J, \forall \lambda > 0$, se deduce que Φ^α y Φ^β definen superficies localmente isométricas

(la isometría local: $f: S^\alpha \longrightarrow S^\beta$
$\Phi^\alpha(s,\lambda) \longmapsto \Phi^\beta(s,\lambda)$)

Como $S^\beta := \Phi^\beta(J \times \mathbb{R}_+)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, vemos por lo anterior que S^β es localmente isométrica a ese abierto de $\mathbb{R}^2$.

¿Quienes son $\underset{\text{isometría}}{f}(\Phi^\alpha(s_0,\lambda))$, $\lambda > 0$ s_0 fijado? (NO SE HACÍA ESTA PREG.)

$f(\Phi^\alpha(s_0,\lambda)) = \Phi^\beta(s_0,\lambda)$

¿Quienes son f(trayectoria ortogonal a reglas de S^α)?

Primero, f manda reglas de S^α en reglas de S^β. Por tanto, f manda trayectorias ortogonales a reglas de S^α en trayectorias ortogonales a reglas de S^β, por ser f isometría local.

Las trayectorias ortogonales a las tangentes afines de β (que son las reglas de S^β) son por definición las involutas de β.

11. $\mathbb{X}(\lambda, v) = (\lambda \cos v, \lambda \operatorname{sen} v, v)$

¿ $h(u)$, $h'(u) > 0$, $\Phi(u,v) := \mathbb{X}(h(u), v)$ conforme?

$$\Phi(u,v) = \mathbb{X}(h(u), v) = (h(u)\cos v, h(u)\operatorname{sen} v, v)$$

$$\Phi_u(u,v) = (h'(u)\cos v, h'(u)\operatorname{sen} v, 0)$$

$$\Phi_v(u,v) = (-h(u)\operatorname{sen} v, h(u)\cos v, 1)$$

$$I_\phi(u,v) = \begin{pmatrix} h'(u)^2 & 0 \\ 0 & 1+h(u)^2 \end{pmatrix}$$

Para que Φ sea conforme necesitamos que $I_\phi(u,v)$ sea proporciona a Id, para cierta función $\varphi(u,v)$:

$$\left.\begin{aligned} h'(u)^2 &= \varphi(u,v)\cdot 1 \\ 1+h(u)^2 &= \varphi(u,v)\cdot 1 \end{aligned}\right\} \iff h'(u)^2 = 1 + h(u)^2$$

$$h'(u) \underset{h'>0}{=} \sqrt{1+h(u)^2} \Rightarrow \frac{h'(u)}{\sqrt{1+h(u)^2}} = 1 \xRightarrow{\text{integrando}} \operatorname{arcsenh}(h(u)) = u + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h(u) = \operatorname{senh}(u+c)}$$ podemos tomar $c = 0$.

CONTINUACIÓN 1

b) Helicoide $\mathbb{X}(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, v)$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{X}_u &= (\cos v, \operatorname{sen} v, 0) \\ \mathbb{X}_v &= (u(-\operatorname{sen} v), u\cos v, 1) \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} E &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = 1 \\ F &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = u^2+1 \end{aligned} \Rightarrow I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+1 \end{pmatrix}$$

d.1) Hiperboloide una hoja $\{x^2+y^2 = 1+z^2\}$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{X}(u,v) &= (\cos u\cosh v, \operatorname{sen} u\cosh v, \operatorname{senh} v) \\ \mathbb{X}_u &= (\cosh v(-\operatorname{sen} u), \cosh v\cos u, 0) \\ \mathbb{X}_v &= (\cos u\operatorname{senh} v, \operatorname{sen} u\operatorname{senh} v, \cosh v) \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} E &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = \cosh^2 v \\ F &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = \operatorname{senh}^2 v + \cosh^2 v \end{aligned} \Rightarrow I \equiv \begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \operatorname{senh}^2 v + \cosh^2 v \end{pmatrix}$$

d.2) Hiperboloide de dos hojas $\{x^2+y^2 = -1+z^2\}$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{X}(u,v) &= (\cos u\operatorname{senh} v, \operatorname{sen} u\operatorname{senh} v, \cosh v) \\ \mathbb{X}_u &= (-\operatorname{sen} u\operatorname{senh} v, \cos u\operatorname{senh} v, 0) \\ \mathbb{X}_v &= (\cos u\cosh v, \operatorname{sen} u\cosh v, \operatorname{senh} v) \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} E &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = \operatorname{senh}^2 v \\ F &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = \cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v \end{aligned} \Rightarrow I \equiv \begin{pmatrix} \operatorname{senh}^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v \end{pmatrix}$$

3.1 a) Comprobar que $\alpha(v) = (r(v), z(v))$ con $r(v) = \frac{1}{v}$ y $z(v) = \int_1^v \frac{\sqrt{v^2-1}}{v^2}\,dv$ es una parametrización de la tractriz.

$r'(v) = \frac{-1}{v^2}$ $\quad z'(v) = \frac{\sqrt{v^2-1}}{v^2}$ $\quad v>1$

Sin hacer.

b) Comprobar que $\Phi(u,v) = (r(v)\cos u, r(v)\operatorname{sen} u, z(v))$ $\quad (u,v)\in\mathbb{R}\times(1,\infty)$ (pseudoesfera de Beltrami) tiene $I_\Phi \equiv \frac{du^2+dv^2}{v^2}$.

$\Phi_u(u,v) = (-r(v)\operatorname{sen}u, r(v)\cos u, 0)$

$\Phi_v(u,v) = (r'(v)\cos u, r'(v)\operatorname{sen}u, z'(v))$

$$\left.\begin{array}{l} E = \langle \Phi_u, \Phi_u\rangle = r(v)^2 \\ F = \langle \Phi_u, \Phi_v\rangle = 0 \\ G = \langle \Phi_v, \Phi_v\rangle = r'(v)^2 + z'(v)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow I_\Phi \equiv \begin{pmatrix} r(v)^2 & 0 \\ 0 & r'(v)^2+z'(v)^2\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{v^2}du^2 + \left(\frac{1}{v^4} + \frac{v^2-1}{v^4}\right)dv^2 \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{v^2}du^2 + \frac{1}{v^2}dv^2 \equiv \frac{du^2+dv^2}{v^2} \quad \blacksquare$$

5. a) $\Phi(u,v) = \alpha(v) + u\,\mathbb{b}_\alpha(v)$

Para $v = cte = v_0$: $\Phi(u,v_0) = \alpha(v_0) + u\,\mathbb{b}(v_0)$ lineal en $u \Rightarrow$ define una regla o recta $\Rightarrow \Phi$ define un reglado de S'.

Para $v = cte = v_0$: $X(u,v_0) = (u\cos v_0, u\operatorname{sen}v_0, v_0)$ lineal en $u \Rightarrow$ define una regla o recta $\Rightarrow X$ define un reglado de S.

Ahora: $h: S \longrightarrow S'$

$X(u,v) \longmapsto \Phi(u,v)$

las reglas de X son las de $v = cte = v_0$:

$X(u,v_0) \xmapsto{h} \Phi(u,v_0)$ que son las reglas de Φ. $\Rightarrow h$ lleva las reglas de X en reglas de Φ.

b) h es isometría si conserva la primera forma fundamental, e.d, si se cumple que $\begin{cases} E_X = E_\Phi \\ F_X = F_\Phi \\ G_X = G_\Phi \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} X_u = (\cos v, \operatorname{sen}v, 0) \\ X_v = (-u\operatorname{sen}v, u\cos v, 1)\end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases} E_X = \langle X_u, X_u\rangle = 1 \\ F_X = \langle X_u, X_v\rangle = 0 \\ G_X = \langle X_v, X_v\rangle = u^2+1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_u = \mathbb{b}_\alpha(v) \\ \Phi_v = \alpha'(v) + u\,\mathbb{b}'(v)\end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases} E_\Phi = \langle \mathbb{b}_\alpha, \mathbb{b}_\alpha\rangle = 1 \\ F_\Phi = \langle \mathbb{b}_\alpha, \alpha'(v) + u\,\mathbb{b}'(v)\rangle = \overset{0}{\cancel{\langle \mathbb{b}_\alpha, \mathbb{t}_\alpha\rangle}} + \overset{0}{\cancel{\langle \mathbb{b}_\alpha, u(-\tau_\alpha \mathbb{n}_\alpha)\rangle}} \\ G_\Phi = \langle \alpha'(v) + u\,\mathbb{b}'(v), \alpha'(v)+u\,\mathbb{b}'(v)\rangle = 1 + u^2\tau_\alpha^2 \end{cases}$$

Conserva la 1FF $\Longleftrightarrow \tau_\alpha = \pm 1$