CÁLCULO 1: 1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 6: Significado de la derivada

1.- Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \, \log x, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}, \qquad \lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}.$$

2.- Sea $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Demostrar que f es no decreciente, y utilizar el resultado para probar que $\operatorname{sen} x < x$ si $x > 0$, y $\operatorname{sen} x > x$ si $x < 0$.

3.- Calcular los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

4.- (*)Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, encontrar el mínimo valor de la función

$$F(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

5.- (*) Encontrar justificadamente el valor máximo de la función $F(x) = \dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-2|}$.

6.- Demostrar que de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

7.- Una empresa quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base R y la altura de la lata h, para que su construcción requiera el mínimo gasto de material?

8.- En un trozo rectangular de cartón de 8 $cm \times 15$ cm se han cortado cuatro cuadraditos iguales en cada esquina, de manera que la figura restante se puede doblar para construir una caja sin tapa. Hallar el lado de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo.

9.- Demostrar que la ecuación $x^3 - 3\,x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, tiene una o ninguna solución en $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de k existe efectivamente la solución?

10.- Demostrar que la ecuación $6\,x^4 - 7\,x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

11.- Demostrar que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

12.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si $b = -1$ y $c = 1$; comprobar que no existe ningún $a \in (b, c)$ tal que

$$f'(a) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

y explicar por qué esto no contradice el teorema del valor medio.

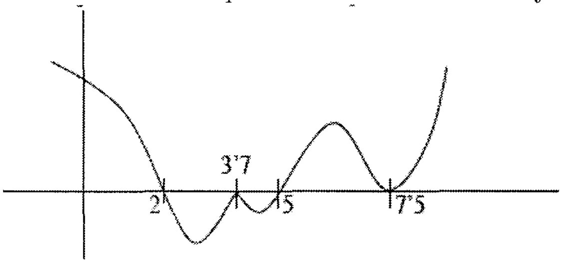
13.- Obtener las siguientes desigualdades usando el Teorema del valor medio:

(a) $1 + x \leq e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\log(1 + x) < x$, para todo $x > 0$.

14.- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x(x + 1)(x + 2)$.

15.- (*) Suponiendo que la derivada de una función tiene la gráfica de la figura, indicar todos los valores en los que se alcanzan máximos y mínimos locales.



16.- La derivada de una función f es

$$f'(x) = x^3(x - 1)^2(x + 1)(x - 2).$$

Indicar para qué valores de x la función f alcanza un máximo o un mínimo local.

17.- Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3}, \qquad f(x) = \frac{x}{\log x}, \qquad f(x) = e^{-x^2}, \qquad f(x) = \frac{2x^2}{x+1}.$$

18.- Determinar en qué intervalos es inyectiva (uno-uno) la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.

19.- (*) a) Demostrar que si f, g son inyectivas (uno-uno) entonces $f \circ g$ también lo es. Hallar $(f \circ g)^{-1}$ en términos de f^{-1}, g^{-1}. *Indicación: la solución NO es* $f^{-1} \circ g^{-1}$.
b) Hallar g^{-1} en términos de f^{-1} sabiendo que $g(x) = 1 + f(x)$.
c) Sabiendo que h es una función tal que $h'(x) = \cos^2(\cos(x + 1))$ y que $h(0) = 3$, se pide hallar $(h^{-1})'(3)$.
d) Hallar $(k^{-1})'(3)$, siendo $k(x) = h(x + 1)$ (h es la función del apartado anterior).

20.- (*) a) Dar tres ejemplos de funciones continuas f tales que $f(x) = f^{-1}(x)$ para todo x. *Indicación: tener en cuenta la interpretación geométrica de* f^{-1}.
b) Demostrar que si f es creciente y $f(x) = f^{-1}(x)$ para todo x, entonces $f(x) = x$.

HOJA 6

9. Demostrar que $x^3 - 3x + K = 0$ tiene una o ninguna solución en $[-1,1]$.

$f(x) = x^3 - 3x + K$ • Vamos a demostrar que NO tiene dos solucio

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Soluciones de $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Por lo tanto no pueden existir $x_1, x_2 \in [-1,1]$ con $f(x_1) = f(x_2) = 0$, ya que entonces existiría un $c \in (x_1, x_2)$ con $f'(c) = 0$. Pero sabemos que las únicas soluciones de f' so 1 y -

• ¿En qué casos tiene una solución? Como $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-1,1)$ f tendrá una solución si $f(-1) > 0$ y $f(1) < 0$. Es decir:

$(-1)^3 - 3(-1) + K \geq 0 \longrightarrow K \geq -2$

$1^3 - 3.1 + K \leq 0 \longrightarrow K \leq 2$

$-2 \leq K \leq 2$ Una solución única.

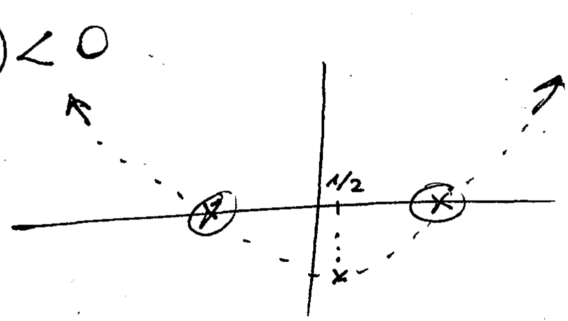
10 Ver que $6x^4 - 7x + 1 = 0$ no tiene más de 2 raíces distintas.

$f(x) = 6x^4 - 7x + 1$; $f'(x) = 24x^3 - 7$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 24x^3 - 7 = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{7}{24}\right)^{1/3}$

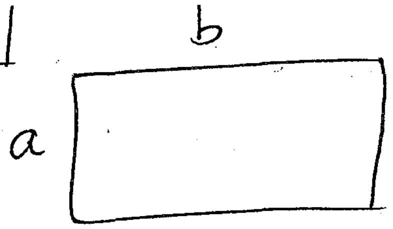
Por tanto, por el Teorema de Rolle tiene a lo sumo dos soluciones.

Podemos demostrar que tiene exactamente dos así:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to \infty} = \infty$; $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$



16.



$$P_0 (\text{fijo}) = 2(b+a) \Big\} \text{ fija}$$

$$A = b.a \Big\} \text{ optimizar}$$

$$P_0 = 2b + 2a \Rightarrow a = \frac{P_0 - 2b}{2}$$

$$A = b.a = b\,\frac{P_0 + 2b}{2} = \frac{bP_0}{2} - b^2$$

$$A'(b) = \frac{P_0}{2} - 2b \quad ; \quad A'(b) = 0 \Rightarrow \frac{P_0}{2} - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{P_0}{4}$$

$$a = \frac{P_0 - 2b}{2} = \frac{P_0 - 2P_0/4}{2} = \frac{P_0}{4}$$

CUADRADO $\boxed{a = b}$

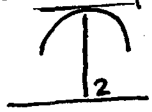
15.

Dibujar la gráfica de f

• Punto $x=2$ $\quad f'(2)=0$

Si $x<2$ $\quad f'(x)>0$ luego eso quiere decir que f crece

Si $x>2$ $\quad f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece



En $x=2$ f tiene un máximo.

• Punto $x=5$ $\quad f'(5)=0$

Si $x<5$ $\quad f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece

Si $x>5$ $\quad f'(x)>0 \Rightarrow f$ crece

En $x=5$ f tiene un mínimo.

• Punto $x=3'7$ $\quad f'(3'7)=0$

Si $x<3'7$ $\quad f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece

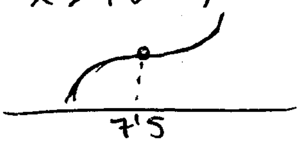
Si $x>3'7$ $\quad f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece

En $x=3'7$ f tiene un punto de inflexión

• Punto $x=7'5$ $\quad f'(7'5)=0$

Si $x<7'5$ $\quad f'(x)>0 \Rightarrow f$ crece

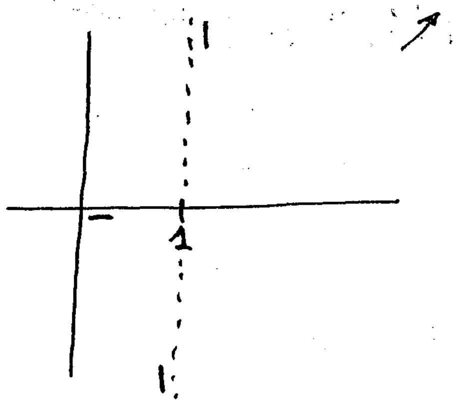
Si $x>7'5$ $\quad f'(x)>0 \Rightarrow f$ crece



En $x=7'5$ tiene f un punto de inflexión

17.

$f(x) = \frac{x}{\log x}$ $\quad x>0 \quad y \quad x \neq 1$



$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\log x} = 0$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\log x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\log x} = \infty$

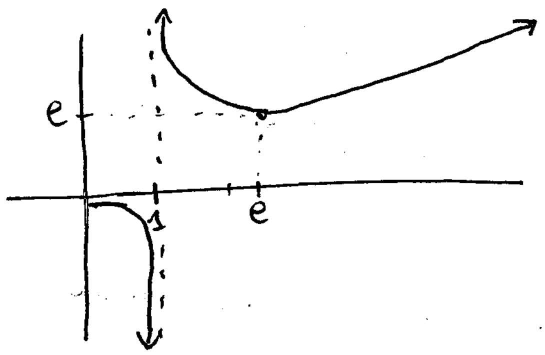
$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\log x} = \infty$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\log x - x\frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\log x - 1}{(\log x)^2} = 0 \Rightarrow \log x - 1 = 0 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow \boxed{x = e}$

$\left.\begin{array}{l} - \text{Si } x<e \quad f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ decrece} \\ - \text{Si } x>e \quad f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ crece} \end{array}\right\} x = e \text{ pto. mínimo}$

$f(e) = \frac{e}{1} = e$



$\boxed{19}$ A) f, g inyectivas $\Rightarrow f\circ g$ …

$$\boxed{\text{Si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$
F INYECTIVA

Suponemos que $f\circ g(x_1) = f\circ g(x_2)$

Entonces: $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ Como f es inyectiva sabemos que $g(x_1) = g(x_2)$

Tenemos $g(x_1) = g(x_2)$, pero como sabemos que g es inyectiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ qed.

A.2) $(f\circ g)^{-1}$ en términos de f^{-1} y g^{-1}.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "(f\circ g)"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\xleftarrow[g^{-1}]{} \qquad \xleftarrow[f^{-1}]{}$$

$$\boxed{\begin{gathered}(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1} \\ \text{Esto se cumplirá si:} \\ (f\circ g)^{-1}(g^{-1}\circ f^{-1})(x) = x\end{gathered}}$$

$$\underbrace{f\circ g\circ g^{-1}\circ f^{-1}(x)}_{(f\circ g)^{-1}(g^{-1}\circ f^{-1})(x)} = f(g(g^{-1}(f^{-1}(x)))) = f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{qed.}$$

B) Calcular g^{-1} en términos de f^{-1} sabiendo que $g(x) = 1 + f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \\ \quad\; y \longmapsto h(y) = 1 + y \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) = h\circ f(x)$$

$y = z - 1 \quad z = 1 + y \Rightarrow \underline{h^{-1}(z) = z - 1}$

$$g^{-1}(z) = (h\circ f)^{-1}(x) = f^{-1}\circ h^{-1}(x) = f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(z-1)$$

c) Se sabe que h cumple $h'(x) = \cos^2(\cos(x+1))$

$h(0) = 3$

Calcular $(h^{-1})'(3)$

EN GENERAL:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{donde } f(x_0) = y$$

$$(h^{-1})'(3) = \frac{1}{h'(\underbrace{x_0}_{\downarrow})}$$

punto EN que la h es 3

Como sabemos que $h(0) = 3 \Rightarrow (h^{-1})'(3) = \dfrac{1}{h'(0)}$

$$h'(0) = \cos^2(\cos 1)$$

$$(h^{-1})'(3) = \frac{1}{\cos^2(\cos 1)}$$

D) Hallar $(k^{-1})'(3)$ siendo $k(x) = h(x+1)$ donde h es la del apartado anterior:

$$(k^{-1})'(3) = \frac{1}{k'(x_0)}$$

punto en que $k(x_0) = 3 \longrightarrow k(x_0) = h(x_0+1) = 3$

Sabemos que $h(0) = 3$, entonces $x_0 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = -1}$

$$(k^{-1})'(3) = \frac{1}{k'(-1)}$$

$k'(x) = h'(x+1) \cdot 1$ derivada de ; $k'(-1) = h'(0) = \cos^2(\cos 1)$

4. Valor mínimo de $F(x) = \left(\sum_{k=1} (x-a_k)^2\right)^{1/2}$

$$F(x) = \left((x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2\right)^{1/2}$$

Buscamos el mínimo de $G(x) = (x-a_1)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$

Derivada: $G'(x) = 2(x-a_1) + \cdots + 2(x-a_n) = 2\left(nx - (a_1+a_2+\cdots+a_n)\right)$

$G'(x) = 0 \Leftrightarrow nx - (a_1+a_2+\cdots+a_n) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{(a_1+a_2+\cdots a_n)}{n}}$

Vamos a ver el signo de la derivada:

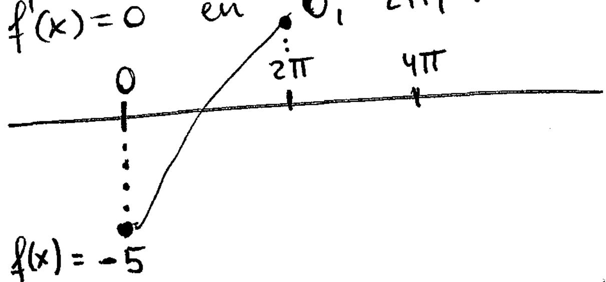
$$G'(x) = 2\left(nx - (a_1+a_2+\cdots+a_n)\right) = 2n\left(x - \frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x < \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \Rightarrow G'(x) < 0 \\ \text{Si } x > \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \Rightarrow G'(x) > 0 \end{array}\right\} \text{Pto. de mínimo}$$

DEMOSTRAR QUE $x - \operatorname{sen} x - 5 = 0$ tiene solución $\boxed{f(x) = x - \operatorname{sen} x - 5}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -5 < 0 \\ f(7) = 7 - 5 - \operatorname{sen} 7 > 0 \end{array}\right\} \text{T. Bolzano } \exists c \ f(c) = 0$$

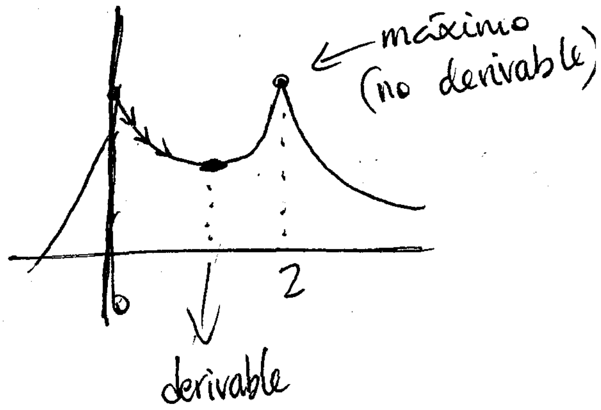
$f'(x) = 1 - \cos x$ $\qquad f'(x) = 0$ en $0,\ 2\pi,\ 4\pi$



$f'(x)$ se anula solo en $0, 2k\pi$; por lo tanto en los intervalos que no contengan a estos puntos f tendrá A LO SUMO 1 SOLUCIÓN.

5. $F(x) = \dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x-2} = \dfrac{-1}{1-x} + \dfrac{-1}{x-1} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{3-x} & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x>2 \end{cases}$

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(3-x)^2} & \text{si } x<0 \\ -\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(3-x)^2} & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x>2 \end{cases}$$



inacabado

2. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$, f no decreciente

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$

$x<y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

$0<x \Longrightarrow f(0) \leq f(x) \Rightarrow 0 \leq x - \operatorname{sen} x$

$x<0 \Longrightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow x - \operatorname{sen} x \leq 0$

$\boxed{11.}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ cont. en $x=0$

$$f(0) = f(x-x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x - x_0 + x_0) = \lim_{x\to x_0} \overset{0}{f(x-x_0)} + f(x_0) = f(x_0)$$

DE LA <u>HOJA 4</u>