# Topología, curso 2019-20

## Hoja 3

**1.** Demuestra que si $A \subset X$ y $B \subset Y$ entonces en el espacio topológico producto $X \times Y$ se cumple $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

**2.** Demuestra que $X$ es Hausdorff si y sólo si el conjunto $\Delta = \{(x, x) \mid \ \in X\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times X$. (Se conoce a $\Delta$ como la *diagonal* de $X \times X$).

**3.** Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden del diccionario. Determina los cierres de los siguientes subconjuntos de $X$:

$$\begin{aligned} A &= \{(1/n, 0) : \ n \in \mathbb{N}\} \\ B &= \{(1 - 1/n, 1/2) : \ n \in \mathbb{N}\} \\ C &= \{(x, 0) : \ 0 < x < 1\} \\ D &= \{(x, 1/2) : \ 0 < x < 1\} \\ E &= \{(1/2, y) : \ 0 < y < 1\} \end{aligned}$$

**4.** Sea $X$ un espacio topológico. Sea $\{\mathsf{A}_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de $X$.

**i)** Demuestra que $\bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i}$.

**ii)** Demuestra que si $I$ es finito, entonces $\bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i}$.

**iii)** Halla un contraejemplo que muestre que, en general, no es cierto que $\overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i}$.

**iv)** Busca un fallo en la siguiente demostración —falsa— de la inclusión anterior:
*Si $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i}$ entonces, para todo entorno $U$ de $x$, $U \cap (\bigcup_{i \in I} \mathsf{A}_i) \neq \varnothing$. Por tanto, $U \cap \mathsf{A}_{i_0} \neq \varnothing$ para algún $i_0 \in I$ y se tiene $x \in \overline{\mathsf{A}_{i_0}}$ y $x \in \bigcup_{i \in I} \overline{\mathsf{A}_i}$.*

**5.** Comprueba que $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una topología de $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$, donde $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

**i)** Halla todos los conjuntos cerrados en la topología $\mathcal{T}$.

**ii)** Describe todos los entornos abiertos del punto $m \in \mathbb{N}$ en la topología $\mathcal{T}$.

**iii)** Determina la clausura de los siguientes conjuntos $\mathsf{A}$ y $\mathsf{D}$: $\quad \mathsf{A} = \{9, 13, 48, 96\}, \quad \mathsf{D} = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.

**6.** Determina los conjuntos $A'$ y $\overline{A}$ para $A = \{(0, 2)\} \cup ([0, 1] \times [0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$.

**7.** Sean $A$ y $B$ subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dotado de la métrica euclídea. Sea $x$ un punto de acumulación de $A \bigcup B$. ¿Se puede concluir que $x$ es un punto de acumulación de $A$ o de $B$?

**8.** Se considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$: $A = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, 3\right) \cup \left\{\frac{3n+10}{n+3} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Halla $\mathring{\mathsf{A}}$, $\overline{\mathsf{A}}$ y $\mathsf{A}'$ en las siguientes topologías de $\mathbb{R}$:

**i)** La cofinita.

**ii)** La topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ de Sorgenfrey (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$).

**iii)** La que tiene como base $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

**iv)** $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$).

**9.** Si $A \subset X$, definimos la *frontera* de $A$ como el conjunto $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

**i)** Demuestra que $\mathring{A} \cap \partial A = \varnothing$ y que $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$.

**ii)** Demuestra que $\partial A = \varnothing$ si y sólo si $A$ es abierto y cerrado.

**iii)** Demuestra que $U$ es abierto si y sólo si $\partial U = \overline{U} \setminus U$.

**iv)** Si $U$ es abierto, ¿es verdad que $U = \mathring{\overline{U}}$?

**v)** Demuestra que $\partial \mathring{A} \subset \partial A$ y que $\partial \overline{A} \subset \partial A$. Da un ejemplo en que estos tres conjuntos sean diferentes entre sí.

**vi)** Si $A, B \subset X$, demuestra que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, y da un ejemplo en el que no se de la igualdad.

**vii)** Comprueba que si $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, entonces $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

**10.** Sea $X$ un espacio topológico y sean $\mathsf{A}, \mathsf{D} \subset X$. Demuestra que:

**i)** Si $\mathsf{A}$ es abierto, entonces $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{D}} \subset \overline{\mathsf{A} \cap \mathsf{D}}$. ¿Se satisface esta inclusión si $\mathsf{A}$ no es abierto?

**ii)** Si $\mathsf{A} \cup \mathsf{D} = X$, entonces $\overline{\mathsf{A}} \cup \mathring{\mathsf{D}} = \mathsf{Int}(\mathsf{A} \cup \overline{\mathsf{D}}) = X$.

**11.** Encuentra el cierre, el interior y la frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{(x,y) : \ y = 0\} \\ B & = & \{((x,y) : x > 0 \text{ e } y \neq 0\} \\ C & = & A \cup B \\ D & = & \{(x,y) : \ x, y \in \mathbb{Q}\} \\ E & = & \{(x,y) : \ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \\ F & = & \{.(x,y) \mid x \neq 0 \text{ e } y \leq 1/x\} \end{array}$$

**12.** **i)** Demuestra que $[0,1] \times [0,1]$ es la frontera de algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

**ii)** Demuestra que cualquier cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

**13.** Halla un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que, con la métrica usual de $\mathbb{R}$, tenga como frontera el conjunto dado:

$\partial \mathsf{A} = [1,2] \cup \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

**14.** Halla dos subconjuntos $\mathsf{A}, \mathsf{D}$ abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}$ para los que los cuatro subconjuntos $\mathsf{A} \cap \overline{\mathsf{D}}$, $\overline{\mathsf{A}} \cap \mathsf{D}$, $\overline{\mathsf{A}} \cap \overline{\mathsf{D}}$ y $\overline{\mathsf{A} \cap \mathsf{D}}$ sean distintos.

**15.** Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

**i)** Para cada $\mathsf{A} \subset X$, $\mathsf{Int}\,(\partial\,\mathsf{A}) = \varnothing$.

**ii)** Si $\mathsf{A} \neq \varnothing$ es cerrado y $\mathring{\mathsf{A}} = \varnothing$, existe $\mathsf{D}$ tal que $\mathsf{A} = \partial\,\mathsf{D}$.

**iii)** Para cada $\mathsf{A} \subset X$, $\overline{\mathsf{A}} = \overline{\mathsf{Int}\,\mathsf{A}}$.

**iv)** Si $\mathsf{A} \cap \partial\,\mathsf{A} = \varnothing$ entonces $\mathsf{A}$ es abierto.

**v)** Para cada $\mathsf{A} \subset X$, el conjunto $\mathsf{A}'$ es cerrado.

**vi)** Si $x \notin \mathsf{A}'$, entonces $x \notin (\overline{\mathsf{A}})'$.

**16.** Demuestra que la función identidad: $i(x) = x$, es continua de $(X, \mathcal{T})$ en $(X, \mathcal{T}^*)$ si y sólo si la topología $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}^*$.

**17.** Sea $X$ un espacio topológico. Demuestra que la función diagonal $d\colon X \to X \times X$ dada por $d(x) = (x,x)$ es continua para la topología producto de $X \times X$.

**18.** Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos.

**i)** Demuestra que se cumple el siguiente resultado: Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e $Y$ es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en el espacio producto $X \times X$.

**ii)** Demuestra que, con las mismas hipótesis del punto anterior, el conjunto

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : \ y = f(x)\},$$

es decir, la «gráfica» de la aplicación $f$, es un conjunto cerrado de $X \times Y$ con la topología producto.

**19.** Con la notación del ejercicio anterior:

**i)** Demuestra que el recíproco de la proposición del primer punto del ejercicio anterior no es cierto en general. Es decir, que $K$ puede ser cerrado sin que $Y$ sea Hausdorff.

**ii)** Demuestra que, sin embargo, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta y suprayectiva, y el conjunto

$$K = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$$

es cerrado en el espacio producto $X \times X$, entonces $Y$ es Hausdorff.

**20.** Sea $X = [0,1]$ con la topología usual e $Y = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico. Estudia si las siguientes funciones son continuas.

i) $f\colon X \to Y$ dada por $f(t) = (t,t)$

ii) $g\colon X \to Y$ dada por $g(t) = (1/2, (2t+1)/4)$

iii) $h\colon X \to Y$ dada por $h(t) = (t, 1)$.

**21.** Sea $Y$ un conjunto totalmente ordenado, con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ continuas, donde $X$ es un espacio topológico.

i) Demuestra que el conjunto $\{x \in X : \mid f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en $X$.

ii) Sea $h : X \to Y$ la aplicación $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Demuestra que $h$ es continua.

**22.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, considerando la topología usual.

i) Demuestra que el subespacio $(a,b) \subset \mathbb{R}$ es homeomorfo al subespacio $(0,1) \subset \mathbb{R}$ (con las topologías relativas). Idem para $[a,b]$ y $[0,1]$.

ii) Demuestra que cada uno de los subespacios $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$, dotados de la topología relativa, son homeomorfos a $\mathbb{R}$, definiendo explícitamente los homeomorfismos correspondientes.

iii) Demuestra que el disco unidad $\mathbb{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ (dotado de la topología relativa del plano) es homeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$, exhibiendo un homeomorfismo explícito.

Indicación: Conviene usar las coordenadas polares.

**23.** Estudia si $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{(\,]}$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

**24.** Demuestra que los espacios $X = [0,2) \cup [4,5]$ e $Y = [0,3]$, ambos con la topología del orden, son homeomorfos.

**25.** Sea $\mathsf{A} = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f : \mathsf{A} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Demuestra que $f$ es continua si $\mathsf{A}$ tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que es un homeomorfismo sólo con la primera de ellas.

**26.** Da un ejemplo de una función continua $f : X \to Y$ cuyo grafo $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ no sea cerrado en $X \times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea.

Indicación: Piensa en la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.

**27.** Prueba que existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{N}$ con la topología discreta que son sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{R}$ con la topología discreta que tengan tales propiedades.

Indicación: La imagen inversa de $\mathbb{R}$ sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a,b)$ contiene siempre un número racional.