Topología, curso 2019-20

Hoja 4

1. i) Demuestra que un espacio X es conexo si y sólo si no existe ninguna aplicación continua y sobreyectiva $f : X \longrightarrow Y$ donde $Y = \{0, 1\}$ con la topología discreta.

ii) Usa el apartado anterior para probar que si S es un subconjunto conexo de un espacio X y K satisface $S \subset K \subset \overline{S}$ entonces K es conexo.

2. i) Sean $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$ subconjuntos conexos de un espacio topológico tales que $\mathsf{A}_k \cap \mathsf{A}_{k+1} \neq \varnothing$ para todo $1 \leq k < n$. Prueba que $\bigcup_{k=1}^{n} \mathsf{A}_k$ es conexo. Generaliza el resultado para una colección numerable de conexos.

ii) Sean A y A_α, $\alpha \in I$, conjuntos conexos de un espacio topológico X, con la propiedad de que $\mathsf{A}_\alpha \cap A \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in I$. Demuestra que $(\cup_{\alpha \in I} \mathsf{A}_\alpha) \cup \mathsf{A}$ también es conexo.

3. i) Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Demuestra que la gráfica de una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ es un subconjunto conexo del plano.

ii) Para $\alpha \in I$, sean $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas que toman valores tanto positivos como negativos en $\mathbb{R}$ y sea F la función idénticamente nula en $\mathbb{R}$. Prueba que la unión de las gráficas de F y de las f_α es un subconjunto conexo del plano. ¿Se sigue la misma conclusión si no incluimos en la unión la gráfica de F?

4. i) Prueba que si $f \colon X \to Y$ es un homeomorfismo entonces, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X$, $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $Y \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ también son homeomorfos.

ii) Aplica lo anterior para demostrar que $(1, 2)$, $[1, 2]$ y $[1, 2)$ no son subconjuntos homeomorfos de $\mathbb{R}$.

iii) Demuestra que un intervalo abierto y un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ no pueden ser homeomorfos.

5. Estudia si $X = [0, 1] \times [0, 1]$ es conexo con:

i) La topología del orden lexicográfico en X.

ii) La topología heredada de $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico.

6. i) Demuestra que si X e Y son conexos y A, B son subconjuntos propios no vacíos de X e Y respectivamente entonces $X \times Y \setminus \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ es conexo.

ii) En la situación anterior, ¿es cierto que si X e Y son conexos por caminos entonces $X \times Y \setminus \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ también lo es?

7. i) Caracteriza todos los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología cofinita.

ii) Demuestra que las componentes conexas de $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey son los puntos.

8. i) Demuestra que si A es numerable entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \mathsf{A}$ es conexo por caminos. Indicación: El conjunto de rectas que pasan por un punto no es numerable.

ii) Demuestra que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto es no numerable.

9. Demuestra que $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$. ¿Son $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}^2$ homeomorfos?

10. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Si X es conexo por caminos y $\exists f \colon X \to Y$ continua y suprayectiva entonces Y también es conexo por caminos.

ii) Si A es un conexo por caminos de un espacio topológico X y $\mathsf{A} \subset \mathsf{D} \subset \overline{\mathsf{A}}$ entonces D es conexo por caminos.

iii) Si una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la conclusión del teorema de los valores intermedios en cualquier intervalo, entonces es necesariamente continua.

11. Sea $(X, \mathcal{T})$ el espacio topológico dado por $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{T} = \{X, \varnothing \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$.

i) ¿Es $(X, \mathcal{T})$ conexo?

ii) ¿Es $A = \{b, d, e\}$ un conexo de X?

12. Se dice que un espacio topológico es *totalmente disconexo* si sus únicos subconjuntos conexos son los conjuntos que constan de un único punto.

i) Demuestra que un espacio finito Hausdorff es totalmente disconexo.

ii) Demuestra que si la topología es la discreta entonces el espacio es totalmente disconexo. ¿Conoces un ejemplo de espacio totalmente disconexo cuya topología no sea la discreta?

13. Demuestra que un espacio X es conexo si y sólo si todo subconjunto propio $A \subset X$ tiene frontera no vacía. Recuerda que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ y que $\overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \partial A$.

14. **i)** Se considera a $\mathbb{N}$ y a $[0, 1)$ con sus respectivos órdenes usuales, y a los productos $\mathbb{N} \times [0, 1)$ y $[0, 1) \times \mathbb{N}$ con los correspondientes órdenes lexicográficos. ¿Cuáles son continuos lineales?

ii) Sea X un conjunto totalmente ordenado con la topología $\mathcal{T}$ del orden. Demuestra que $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y sólo si es un continuo lineal.