PROBLEMAS. HOJA 4. Sistemas EDOs.

1. Identificar que tipo de puntos de equilibrio (críticos) tiene el sistema

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - y) \\ y' = y(0{,}5 - 0{,}25y - 0{,}75x) \end{cases}$$

Solución: Los puntos de equilibrio son:

- $(0,0)$, autovalores reales positivos, nodo inestable (fuente)
- $(0,2)$, autovalores reales negaticos, nodo asintoticamente estable (sumidero)
- $(1,0)$, autovalores reales negativos, nodo asintoticamente estable (sumidero)
- $(1/2,1/2)$, un autovalor positivo y otro negativo, punto silla.

2. Sea $F = (f,g)$ un campo vectorial suave en $\mathbb{R}^2$.

a) Demuestra que F es un campo de divergencia cero, div$(F) = f_x + g_y = 0$ si, y solo si existe H tal que

$$F = \nabla^{\perp} H = (H_y, -H_x)$$

En este caso H se conoce como el *Hamiltoniano* y decimos que el *sistema es hamiltoniano*.
Solución: Rot$(-g,f) = 0$, por tanto como estamos en dominios simplemente conexos $(-g,f) = (H_x, H_y)$.

b) Siendo f, g las del punto anterior, considera el sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

Demuestra que H es una integral primera del sistema.
Solución:

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \nabla H \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = \nabla H \cdot \nabla^{\perp} H = 0$$

c) Transforma un sistema conservativo $\ddot{x} = F(x)$ en un sistema autónomo de dos variables x, y encuentra una integral primera. Interpretala físicamente.
Solución:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = F(x)$$

Consideramos $H_y = y$, $-H_x = F(x)$. Entonces,

$$H(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x F(t)dt.$$

H es la energía cinética más la energía potencial.

d) Demuestra que un sistema conservativo no puede tener puntos críticos asintóticamente estables.
Solución:
Supongamos que la trayectoria converge a un punto de equilibrio P_∞ asintóticamente estable. Por continuidad existe c tal que

$$\lim_{t \to \infty} H(x(t), y(t)) = c$$

y por tanto $H(P_\infty) = c$. Como es asintóticamente estable, en un entorno de P_∞ toda trayectoria converge a P_∞ así pues, toda punto P del entorno de P_∞ se satisface $H(P) = c$. Por tanto, H es constante en dicho entorno pero la definición de integral primera exige que P no sea constante.

3. Considera el péndulo con rozamiento $\ddot{x} = -c\dot{x} - \sin(x)$ donde $c \geq 0$ es el coeficiente de rozamiento.

   i) Reescribelo como sistema.
   Solución: $F(x, y) = (y, -cy - \sin(x))$

   ii) En el caso $c = 0$, demuestra que es Hamiltoniano y encuentralo.
   Solución: Es conservativo y
   $$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos(x)$$
   (Se añade el uno para que sea positiva).

   iii) En el caso $c > 0$ demuestra que el Hamiltoniano anterior es una función de Liapunov.
   Solución:
   $$\frac{d}{dt}H(t) = H_x(t)x'(t) + H_y(t)y'(t) = -c(y(t))^2$$

   iv) Discute que nos dicen los apartados anteriores sobre la estabilidad de $(0, 0)$ como punto crítico.
   Solución: Para $c = 0$ es estable, $c > 0$ es asintóticamente estable.

4. **Sistemas gradientes**. Sea $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función suave. El *Sistema gradiente asociado* es
   $$(\dot{x}, \dot{y}) = -\nabla V(x, y)$$
   Demostrar:

   i) Los puntos críticos son los puntos críticos de V.
   Solución: Directo de la definición de ambos.

   ii) V es una función de Liapunov estricta.
   Solución: Sea $g(t) = V(x(t), y(t))$. Se sigue que
   $$\frac{dg}{dt} = \langle \nabla V(x, y), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = -|\nabla V(x, y)|^2 < 0$$
   entonces, los puntos críticos son asintóticamente estables.

   iii) Las trayectorias cortan ortogonalmente a las superficies de nivel V.
   Solución: Un vector tangente a la curva nivel en (x, y) es
   $$\left(\frac{\partial V}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) \right)$$
   Y se tiene,
   $$\left(\frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)), -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \right) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0.$$

   iv) Sea $V(x, y) = x^2 + 2y^2$. Estudiar y comparar los correspondientes sistemas gradientes y Hamiltonianos.
   $$(\dot{x}, \dot{y}) = -\nabla V(x, y); \qquad (\dot{x}, \dot{y}) = \nabla^\perp V(x, y)$$

Solución: En el sistema conservativo las trayectorias son

$$(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-2t}, y_0 e^{-4t})$$

En el sistema hamiltoniano las trayectorias recorren elipses

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(2\sqrt{2}t) + y_0\sqrt{2}\sin(2\sqrt{2}t), \\ y(t) &= -\tfrac{x_0}{\sqrt{2}} \sin(2\sqrt{2}t) + y_0 \cos(2\sqrt{2}t). \end{aligned}$$

Estas forman una curva cerrada (una elipse). La trayectoria del sistema conservativo es una curva curva ortogonal a las elipses del sistema hamiltoniano.