Universidad Autónoma de Madrid Álgebra Lineal y Geometría. Curso 2017-18

Ingeniería Informática-CC. Matemáticas

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 2. Espacios Euclídeos y Unitarios II. Ortogonalidad. Gram-Schmidt. Complementos ortogonales. Proyecciones ortogonales.

---

1. Sea $\|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2|$ definida en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la ley del paralelogramo.

2. Sea V un espacio vectorial euclídeo con un producto escalar φ y sea $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ la norma inducida por φ. Sean $u, v \in V$. Demuestra que:

a) Los vectores $u + v$ y $u - v$ son ortogonales si y sólo si $\|u\| = \|v\|$. ¿Vale la equivalencia si V es unitario?

b) Los vectores u y **V** son ortogonales si y sólo si $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (en un espacio vectorial normado dos vectores son *ortogonales en el sentido de Birkhoff* si satisfacen esta condición).

c) ¿Vale la equivalencia anterior en un espacio unitario?

3. Sea V un espacio euclídeo o unitario. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2,$$

si los vectores $v_1, \vec{v}_2, \ldots, v_n \in V$ son ortogonales dos a dos.

4. Sea V un espacio unitario con producto escalar φ. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz: para todo par de vectores $u, v \in V$,

$$|\varphi(u, v)|^2 \leq \varphi(u, u)\varphi(v, v).$$

5. Sea $V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. En $V_n \times V_n$ considera la aplicación

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar.

b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x.

c) Para $n = 3$ calcula una base ortogonal de V_3.

d) ¿Cómo definirías el producto escalar análogo en $W_n : \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$?

6. Considera la forma bilineal $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.

b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de ψ sea diagonal.

7. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que φ es un producto escalar.

b) Calcula una base ortonormal de V respecto al producto escalar definido por φ.

8. Sean $u_1 = (-2, -1, 1)$, $u_2 = (0, -1, 0)$ y $u_3 = (1, -1, 0)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Demuestra que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual B' es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.

c) Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual B' es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

9. Calcula el complemento ortogonal de la recta

$$L := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$$

respecto al producto escalar

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3),$$

y respecto al producto escalar usual.

10. En $\mathbb{R}^3$ encuentra un producto escalar para el cual el complemento ortogonal del plano $x = 0$ sea la recta $\{x = y, z = 0\}$. ¿Es único ese producto escalar?

→ matrices

11. Calcula la expresión analítica de la proyección ortogonal sobre la recta de $\mathbb{R}^3$, $l = \{x = y = z\}$. Calcula la proyección ortogonal sobre l del vector $(0, 1, 2)$.

12. Encuentra la expresión en coordendas de la proyección ortogonal sobre la recta $l = \{x - (1+i)z = 0,\ y = 0\}$.

→ P_W

13. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar con matriz en una base $B = \{w_1, w_2, w_3\}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula la proyección ortogonal del vector con coordenadas $(1, 1, 1)$ respecto a la base B sobre el plano $\{y + z = 0\}$.

14. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz en una base ortonormal B es:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Demuestra que f es una proyección ortogonal sobre la recta $ax + by = 0$, donde $\alpha = b^2/(a^2 + b^2)$ y $\beta = -ab/(a^2 + b^2)$.

15. Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de las matrices cuadradas de orden 2. Usando el producto escalar del ejercicio 10 (b) de la hoja 1, encuentra la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal sobre el plano $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

HOJA 2

$\boxed{1.}$ $\|x\| = \overset{x}{\overset{\shortparallel}{|x_1|}} + \overset{y}{\overset{\shortparallel}{|x_2|}}$ en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que es una norma que no proviene de ningún producto escalar, ya que no satisface la ley del paralelogramo.

Basta encontrar x e $y \in \mathbb{R}^2$ tal que la igualdad

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

no se cumpla.

Contraejemplo: $x = (2,0)$ $\quad x+y = (1,1) \quad \|x+y\| = 2 \quad \|x\| = 2$

$y = (-1,1) \quad x-y = (3,-1) \quad \|x-y\| = 4 \quad \|y\| = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 16 = 20 \\ 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 2(4+4) = 16\end{array}\right\} \nRightarrow$$ contraejemplo

$\boxed{2.}$ (V, φ) euclídeo $\quad u \in V$, $\|u\| = +\sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{\varphi(u,u)}$. Demuestra:

a) $u+v$ y $u-v$ son ortogonales $\Leftrightarrow \|u\| = \|v\|$

$$\varphi(u+v, u-v) = 0 \Leftrightarrow \varphi(u,u) + \varphi(\cancel{u},v) - \varphi(v,v) - \varphi(\cancel{u},v) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\|u\|^2}{\underset{\shortparallel}{\varphi(u,u)}} = \underset{\|v\|^2}{\underset{\shortparallel}{\varphi(v,v)}} \Leftrightarrow \|u\| = \|v\| \quad \text{qed.}$$

$\boxed{\text{No vale en el } ⊛ \text{ caso unitario}}$

⊛ $\langle u,u\rangle - \langle v,u\rangle \overbrace{-\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}}^{= -2\,\mathrm{Im}(\langle u,v\rangle)} = 0$

b) u y v son ortogonales $(u \perp v) \Leftrightarrow \|u + \lambda v\| \geq \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

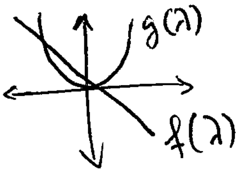
($u \perp_B v$, u y v son ortogonales en sentido Birkchoff).

$$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle \geq \langle u,u\rangle$$

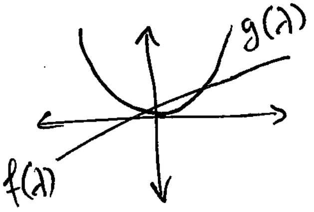
$$\overset{\shortparallel}{\langle \cancel{u},u\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle + 2\lambda\langle u,v\rangle} \geq \overset{\shortparallel}{\langle \cancel{u},u\rangle}$$

$$\Leftrightarrow \underset{g(\lambda)\,=}{\lambda^2\langle v,v\rangle} \geq -2\lambda\langle u,v\rangle = f(\lambda)$$

- Si $\langle u,v\rangle > 0$



- Si $\langle u,v\rangle < 0$



entonces: Si $\langle u,v\rangle = 0 \Rightarrow u \perp_B v$

Si $u \perp_B v \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\langle u,v\rangle \leq 0 \\ \langle u,v\rangle \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \langle u,v\rangle = 0$

Otra forma:

$\langle u, v\rangle = 0$ sii $\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle \geq \langle u,u\rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Por el contrarrecíproco

Supongamos que $\langle u,v\rangle \neq 0$ y sea $\lambda = -\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$

$$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u,u\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle + 2\lambda\langle u,v\rangle =$$

$$= \langle u,u\rangle + \frac{\langle u,v\rangle^2}{\langle v,v\rangle^{\cancel{2}}}\cancel{\langle v,v\rangle} - 2\frac{\langle u,v\rangle^2}{\langle v,v\rangle^2} =$$

$$= \langle u,u\rangle + \frac{\langle u,v\rangle^2}{\langle v,v\rangle} - \frac{2\langle u,v\rangle^2}{\langle v,u\rangle} = \langle u,u\rangle - \frac{\overset{>0}{\langle u,v\rangle^2}}{\underset{>0}{\langle v,v\rangle}} > \langle u,u\rangle$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\langle u,v\rangle = 0$

$$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u,u\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle + 2\lambda\underset{0}{\cancel{\langle u,v\rangle}} \geq \langle u,u\rangle \quad \square$$

→ Buscar contraejemplos en el caso unitario.

RECUERDO:

- $f: V \longrightarrow V$ lineal es una proyección si $f^2 = f$.

Si f es una proyección, entonces $\exists W, W' < V$

$V = W \oplus W \quad f|_W = id_W \;,\; f|_{W'} = 0$ cte.

- $W \leq V$ entonces podemos calcular $W^\perp = \{v\in V / \langle v,w\rangle 0 \;\; \forall w\in W\}$

Sabemos que $V = W \oplus W^\perp$

- Una proyección $f: V \longrightarrow V$ se dice ortogonal si:

$$\boxed{W' = W^\perp}$$

Fijado $\{0\} \neq W < V$ existe $\exists! \underset{\underset{P_W}{\shortparallel}}{f}$ proy. ortogonal

¿Cómo calcular la proyección ortogonal P_W respecto a un subespacio?

$\hookrightarrow$ $W \leqslant V$ $\qquad V = W \oplus W^{\perp}$

Base $\{w_1, \dots, w_s\}$ de W

Calculamos $W^{\perp} \Rightarrow \{w_{s+1}, \dots, w_n\}$ base de $W^{\perp}$

$B = \{w_1, \dots, w_s, w_{s+1}, \dots, w_n\}$ base de V

$u \in V$, $P_W(u)$ y sabemos $P_W|_W = id$ y $P_W|_{W^{\perp}} = 0$

$$u = \underbrace{\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_s w_s}_{\overset{\cap}{W}} + \underbrace{\lambda_{s+1} w_{s+1} + \dots + \lambda_n w_n}_{\overset{\cap}{W^{\perp}}} \ ; \lambda_i$$

$$P_W(u) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_s w_s$$

$$Q_W(u) = u - P_W(u) \in W^{\perp}$$

$u = (x_1 \dots x_n)$

$\langle Q_W(u), w_j \rangle = 0 \qquad j = 1, \dots, s$

$$\overset{\shortparallel}{}$$

$$\langle u, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \langle w_i, w_j \rangle$$

$\{w_1 \dots w_s\}$ es ortonormal

$\langle u, w_j \rangle - \lambda_j = 0$

sistema de ecuaciones lineales

$\downarrow$

λ_j en función de las coordenadas de u.

Ejemplo

$V=\mathbb{R}^3$, producto usual ; W el plano $x=y$. Calcular P_W

$$\uparrow$$

$$\left\{\underset{w_1}{\underset{\shortparallel}{(1,1,0)}},\ \underset{w_2}{\underset{\shortparallel}{(0,0,1)}}\right\}$$

$$W^{\perp}=\langle\underset{w_3}{\underset{\shortparallel}{(1,-1,0)}}\rangle$$

$$P_W(u)=\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2$$

$$\underset{(x,y,z)}{\underset{\shortparallel}{u}}\in\mathbb{R}^3$$

$$Q_W(u)=u-P_W(u)$$

$$Q_W(u)=(x,y,z)-(\lambda_1,\lambda_1,0)-(0,0,\lambda_2)=$$

$$=(x-\lambda_1,\ y-\lambda_1,\ z-\lambda_2)$$

$$\langle Q_W(u),w_1\rangle=0\longrightarrow(x-\lambda_1,\ y-\lambda_1,\ z-\lambda_2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=x-\lambda_1+y-\lambda_1=0$$

$$\langle Q_W(u),w_2\rangle=0\longrightarrow(x-\lambda_1,\ y-\lambda_1,\ z-\lambda_2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=z-\lambda_2=0$$

$$\lambda_1=\frac{x+y}{2}$$

$$\lambda_2=z$$

$$P_W(\underset{(x,y,z)}{\underset{\shortparallel}{u}})=\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2},\ z\right)$$

Mismo ejemplo: otro método

W en el plano $x=y$. Calcular $P_W \longleftrightarrow M_{B'}(P_W)$

canónica

$$B \begin{cases} \text{Base de } W & (1,1,0),\ (0,0,1) \\ \text{Base de } W^{\perp} & (1,-1,0) \end{cases}$$

$$M_B(P_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{B'}(P_W) = M_{B'B} \cdot M_B(P_W) \cdot M_{BB'}$$

sin acabar, está en los apuntes

$\boxed{3.}$ Demostrar que si $V_1, \dots, V_n \in V$ son ortogonales dos a dos $(\langle V_i, V_j\rangle = 0 \ \forall i \neq j)$, entonces $\|V_1 + \dots + V_n\|^2 = \|V_1\|^2 + \dots + \|V_n\|^2$

① Los NO cruzados son ceros, e.d., $\underset{i\neq j}{\langle V_i, V_j\rangle = 0} \Rightarrow$ los iguales $\neq 0$

② Por inducción sobre n

CASO BASE $n=2$

$$\|V_1 + V_2\|^2 = \langle V_1 + V_2, V_1 + V_2\rangle = \langle V_1, V_1\rangle + \cancelto{0}{\langle V_1, V_2\rangle} + \cancelto{0}{\langle V_2, V_1\rangle} + \langle V_2, V_2$$

$$= \langle V_1, V_1\rangle + \langle V_2, V_2\rangle$$

Suponemos que es cierto para $n-1$ vectores.

$$\|V_1 + \dots + V_n\|^2 = \underset{w = V_1 + \dots + V_{n-1}}{\|w + V_n\|^2} = \|w\|^2 + \|V_n\|^2 = \|V_1\|^2 + \dots + \|V_{n-1}\|^2 + \|V_n\|^2$$

$$\langle w, V_n\rangle = \langle V_1, V_n\rangle + \dots + \langle V_{n-1}, V_n\rangle$$

$\boxed{5.}$ d) producto escalar análogo en

$W_n = \{ p(x) \in \mathbb{C}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n \}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$

$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, \overline{q}(x)\, dx$ donde si:

$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ $a_i \in$

$\overline{q}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1} x + \cdots + \overline{a_n} x^n$ $a_i \in$

$$\langle p, \lambda q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, \overline{\lambda q}(x) = \overline{\lambda} \int_{-1}^{1} p(x)\, \overline{q}(x) = \overline{\lambda} \langle p, q \rangle$$

Falta comprobar que $\langle -, - \rangle$ es def. positivo, e.d.,

$\langle p, p \rangle \geq 0$ y $= 0 \Leftrightarrow p = 0$

b) $\langle x \rangle^{\perp} = \{ p \in V_n \,/\, \langle p, x \rangle = 0 \} = \{ \underbrace{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}_{p(x)} \,/$

$/ \, \langle p(x), x \rangle = 0 \}$

$$\langle a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, x \rangle = \int_{-1}^{1} (a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1})\, dx =$$

$$= \frac{a_0 x^2}{2} + \frac{a_1 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^{n+2}}{n+2} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

→ sustituir y conseguir una relación para $a_0 \ldots a_n$

$\boxed{8.}$ $u_1=(-2,-1,1)$ $u_2=(0,-1,0)$, $u_3=(1,-1,0)$

a) demuestra que $B'=\{u_1, u_2, u_3\}$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad u_1,u_2,u_3 \text{ l.indep.} \quad \mathbb{R}^3 \ dim=3 \Rightarrow B' \text{ base } \mathbb{R}^3$$

b) demuestra que existe un prod. escalar $\underset{\overset{\shortparallel}{\varphi}}{<.,.>}$ de forma que B' es ortogonal.

B' es ortogonal respecto a $\overset{\varphi}{\overset{\shortparallel}{<.,.>}}$ $\Leftrightarrow$ $M_{B'}(\varphi)$ es diagonal

Solo tenemos que definir φ tal que $M_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} d1 & 0 & 0 \\ 0 & d2 & 0 \\ 0 & 0 & d3 \end{pmatrix}$

y que sea la matriz de un prod. escalar $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{simétrica } \checkmark \\ \text{def.pos.} \Leftrightarrow d_1,d_2,d_3 > \end{cases}$

Por lo tanto, <u>existe y no es único</u>.

$$M_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\underset{\underset{\underset{\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3}{\shortparallel}}{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}}{\underset{\shortparallel}{u}}$ y $\underset{\underset{\underset{\mu_1u_1+\mu_2u_2+\mu_3u_3}{\shortparallel}}{(\mu_1,\mu_2,\mu_3)}}{\underset{\shortparallel}{v}}$ están expresados en la base B'.

$$<u,v> = \varphi(u,v) = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3) \ M_{B'}(\varphi) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

d) Buscamos una matriz que sea la identidad y φ es único.

B' es una base ortonormal para el producto escalar φ

$\Leftrightarrow$ $M_{B'}(\varphi) = I_3 \longrightarrow$ matriz única $\longrightarrow$ φ único.

d.2) $B=\{e_1, e_2, e_3\}$

¿$M_B(\varphi)$?

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{B'B} = (M_{BB'})^T$$

$$M_B(\varphi) = M_{BB'} \, . \, M_{B'}(\varphi) \, . \, (M_{BB'})^T$$

$\boxed{6.}$ $\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$M_\varphi = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$ en la base canónica.

a) ¿prod. escalar?

→ Como viene dada por matriz ya es bilineal/sesquilineal. ✓

→ Matriz simétrica ✓

→ Criterio de Sylvester $|1|>0$ $\quad \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1 > 0$ $\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix} = 1 > 0$

✓ def. positiva

b) Encuentra una base B de $\mathbb{R}^3$ de modo que $M_B(\varphi)$ sea diagonal.

→ Empiezo con la base canónica:

$\{e_1, e_2, e_3\}$ buscamos $\{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormales dos a dos:

$v_1 = e_1 \longrightarrow \|v_1\|^2 = \varphi(v_1,v_1) = (1\ 0\ 0)\,(M_\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1$

$v_2 = e_2 - \underbrace{\varphi(e_2,v_1)}\,.\,v_1 \quad \in \langle v_1\rangle^\perp$

$\hookrightarrow \varphi(e_2,\underset{\overset{\shortparallel}{(1\ 0\ 0)}}{v_1}) = (0\ 1\ 0)\,(M_\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (1\ 2\ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow v_2 = e_2 - e_1 = (-1,1,0)$ ⟶ tenemos que normalizar v_2

$\|v_2\|^2 = \varphi(v_2,v_2) = (-1,1,0)\ M_\varphi.\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = (0\ 1\ -1)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 1$ ya está normalizado

$v_3 = e_3 - \underbrace{\cancel{\varphi(e_3,v_1)}^{\,0}}\,v_1 - \underbrace{\varphi(e_3,v_2)}\,v_2 \quad \in \langle v_1, v_2\rangle^\perp$

$\hookrightarrow \varphi(e_3,v_2) = (0\ 0\ 1)\,(M_\varphi)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = (0\ -1\ 2)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} =$

$\hookrightarrow \varphi(e_3,v_1) = (0\ 0\ 1)\ M_\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (0\ -1\ 2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$

$v_3 = e_3 - (-1)v_2 = e_3 + v_2 = (-1,1,1)$

normalizamos v_3 (que ya es módulo 1)

$B = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (-1,1,0),\ v_3 = (-1,1,1)\}$ $\qquad M_B(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\tilde{V_3} = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\|\tilde{V_3}\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx = \cdots = \frac{2.2^2}{5.3^2}$$ (no 100 fiabilida

$$\|\tilde{V_3}\| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$$

$$V_3 = \tilde{V_3} / \|\tilde{V_3}\| = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} x^2 - \sqrt{5}/2\sqrt{2}$$

$\boxed{11.}$ Expresión en coordenadas (P_W) de la proyección ortogonal sobre la recta $W = \{(x\ y\ z) / x = y = z\}$

$$\overline{W} = \langle (1,1,1) \rangle$$

$u = (x\ y\ z) \in \mathbb{R}_3$

$$P_W(u) = \lambda(1,1,1)$$

$$Q_W(u) = u - P_W(u) = (x\ y\ z) - \lambda(1,1,1) =$$
$$= (x-\lambda,\ y-\lambda,\ z-\lambda)$$

Sabemos que:

$$\varphi\big(Q_W(u), (1,1,1)\big) = 0 \Rightarrow (x-\lambda, y-\lambda, z-\lambda)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \lambda + y - \lambda + z - \lambda = 0 \Rightarrow x + y + z - 3\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x+y+z}{3}$$

Entonces: $P_W(u) = \dfrac{x+y+z}{3}(1,1,1)$

b) $v = (0,1,2)$, $P_W(v)$?

$$P_W(v) = P_W((0,1,2)) = \frac{1+2}{3}(1,1,1) = (1,1,1)$$

$\boxed{9.}$ $L^{\perp}$? $\quad L = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_1 = x_2 = x_3\}$

Con el producto usual:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{\perp}_{\text{prod. usual}} = \left\{(x, y, z) / (x \ y \ z) . M . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{(x,y,z) / x + y + z = 0\}$$

con el $\Phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$

Calculamos $M_{\{e_1, e_2, e_3\}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$L^{\perp}(\Phi) = \left\{(x, y, z) / 0 = (x \ y \ z) . M_{\{e_1, e_2, e_3\}}(\Phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{(x,y,z) / 6x + 5y + 3z = 0$$

$\boxed{5.}$ c) Base ortonormal para $V_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] / \text{grado}(p) \leq 2\} = \langle 1, x, x^2 \rangle$

Por Gram-Schmidt buscamos una base $\{V_1, V_2, V_3\}$ ortonormal.

$$\tilde{V}_1 = 1 \qquad \|\tilde{V}_1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1 dt = x \Big|_{-1}^{1} = 2$$

$$\boxed{V_1 = 1/\sqrt{2}}$$

$$\tilde{V}_2 = x - \underbrace{\varphi(x, V_1)}_{} V_1 = x \qquad \|\tilde{V}_2\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$'' \int_{-1}^{1} 1/\sqrt{2} \cdot x \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} \right) = 0$$

$$\boxed{V_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x}$$

$$\tilde{V}_3 = x^2 - \underbrace{\varphi(x^2, V_1)}_{} V_1 - \underbrace{\varphi(x^2, V_2)}_{} V_2$$

$$'' \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^{1} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\boxed{12.}$ Expresión en coordenadas de P_W sobre $W = \{(x,y,z) / x-(1+i)z = 0, y =$

Base $W = \{(1+i \ , \ 0 \ , \ 1)\}$ $\qquad$ $u = (x \ y \ z) \in \mathbb{C}^3$

$P_W(u) = \lambda(1+i, 0, 1)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

$u - P_W(u) = (x - \lambda(1+i), \ y, \ z-\lambda) \in W^\perp$

$$0 = (x-\lambda(1+i) \ , \ y \ , \ z-\lambda) \overline{\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = (x-\lambda(1+i))(1-i) + z - \lambda =$$

$$= (1-i)x - 2\lambda + z - \lambda \Rightarrow 3\lambda = (1-i)x + z$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{(1-i)x+z}{3}}$$

$$\boxed{P_W((x,y,z)) = \frac{(1-i)x+z}{3}(1-i, 0, 1)}$$

$\boxed{10.}$ $\mathbb{R}^3$, prod. escalar tal que compl. ortogonal de $\boxed{\begin{matrix}\text{plano}\\ x=0\end{matrix}}$ sea $l = \{x=y, z=0\}$. ¿Único?

Base plano $= \{u_1 = (0,1,0), \ u_2 = (0,0,1)\}$

Base recta $= \{u_3 = (1,1,0)\}$

$\tilde{B} = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(0,1,0), (0,0,1), (1,1,0)\}$

Sabemos que:

$\varphi(u_1,u_3) = \varphi(u_2,u_3) = 0$

y $M_{\tilde{B}}(\varphi)$ es simétrica

por lo que $\varphi(u_3,u_1) = \varphi(u_2,u_3) =$

$$M_{\tilde{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & \delta & 0 \\ \delta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ \alpha\beta - \delta^2 > 0 \\ \gamma > 0 \end{matrix}$$

Podemos ver fácilmente que $M_{\tilde{B}}(\varphi)$ <u>no es única</u>.

$\boxed{11.}$ expresión analítica (matrices) de la proyección ortogonal sobre la recta $W = \{(x,y,z) / x = y = z\}$ $\left(M_B(P_W) \quad B = \{e_1, e_2, e_3\}\right)$

$$\text{Base } W = \{\overset{u_1}{(1,1,1)}\}$$

$$\text{Base } W^{\perp} = \{(x\ y\ z) / \overset{\text{usual}}{\varphi}((x,y,z),(1,1,1)) = 0\} = \{(x\ y\ z) / x + y + z = 0\} =$$

$$= \{\underset{u_2}{(1,-1,0)}, \underset{u_3}{(0,1,-1)}\}$$

$$B = \{u_1, u_2, u_3\} \qquad M_B(P_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{calculamos su inversa} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_{CB}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_C(P_W) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v = (0,1,2)$$

$$P_W((0,1,2)) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{13.}$ $\mathbb{R}^3$ considera prod. escalar con matriz en base $B=\{w_1,w_2,w_3\}$

$$M_B(\varphi)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{pmatrix}$$

Calcula la proy. ortogonal del vector con coordenadas $(1,1,1)$ respecto a la base B sobre el plano $\{y+z=0\}$

Base plano $=\{(0,1,-1),(1,0,0)\}\equiv$ Base W

$u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$P_W(u)=\lambda_1(0,1,-1)+\lambda_2(1,0,0)$$

$$Q_W(u)=u-P_W(u)=(x,y,z)-\lambda_1(0,1,-1)-\lambda_2(1,0,0)=(x-\lambda_2,\ y-\lambda_1,\ z+\lambda_1)$$

$$0=\varphi\big(Q_W(u),(0,1,-1)\big)=(x-\lambda_2,y-\lambda_1,z+\lambda_1)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=(x-\lambda_2,y-\lambda_1,z+\lambda_1)\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=$$

$$=x-\lambda_2-3z-3\lambda_1=0$$

$$=\varphi\big(Q_W(u),(1,0,0)\big)=(x-\lambda_2,y-\lambda_1,z+\lambda_1)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(x-\lambda_2,y-\lambda_1,z+\lambda_1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=$$

$$=x-\lambda_2+y-\lambda_1=0$$

$$\begin{cases}x-\lambda_2-3z-3\lambda_1=0\\-x+\lambda_2-y+\lambda_1=0\end{cases}$$

$$-y-3z-2\lambda_1=0\Rightarrow\boxed{\lambda_1=\frac{-y-3z}{2}}$$

$$\Rightarrow -x+\lambda_2-y+\frac{-y-3z}{2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z=-\lambda_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\lambda_2=x+\frac{3}{2}(y+z)}$$

$$\boxed{\underset{\substack{\downarrow\\ \text{vector}}}{P_W(u)}=\underbrace{\frac{-y-3z}{2}}_{\text{número}}\underbrace{(0,1,-1)}_{\text{vector}}+\underbrace{\left(x+\frac{3}{2}(y+z)\right)}_{\text{número}}\underbrace{(1,0,0)}_{\text{vector}}}$$

$$P_W((1,1,1))=-2(0,1,-1)+4(1,0,0)=(4,-2,2)$$

Otro ejemplo proyecciones ortogonales

Proyección ortogonal sobre el plano $\pi : \{x = y\}$

$u \in \mathbb{R}^3$ genérico

Base $\pi = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$

$$u = (x,y,z) = P_{\pi}(x,y,z) + Q(x,y,z)$$

$$P_{\pi}(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1)$$

$$\Rightarrow Q(x,y,z) = (x,y,z) - \alpha(1,1,0) - \beta(0,0,1)$$

Sabemos:

$$(x,y,z) - \alpha(1,1,0) - \beta(0,0,1) \perp \pi = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$$

$$\varphi\big((x-\alpha, y-\alpha, z-\beta), (1,1,0)\big) = 0 \Rightarrow x - \alpha + y - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{2}$$

$$\varphi\big((x-\alpha, y-x, z-\beta), (0,0,1)\big) = 0 \Rightarrow z = \beta$$

$$P_{\pi} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longmapsto P_{\pi}(x,y,z) = \frac{x+y}{2}(1,1,0) + z(0,0,1) =$$

$$= \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$