1. Espacios de medida

1.1. Álgebras y σ-álgebras

1. Sea $\mathcal{F}$ una colección finita de $\mathcal{P}(X)$. Mostrar que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra si y sólo si $\mathcal{F}$ es álgebra.

2. Sea $X = \{a, b, c, d\}$, comprobar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X, donde

$$\mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\big\}.$$

3. Sean $A, B \subset X$. Describir la σ-álgebra generada por $\mathcal{C} = \{A, B\}$, es decir, $\sigma(\mathcal{C})$.

4. Una colección de conjuntos $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ es un álgebra si y sólo si $X \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es cerrada para diferencias (es decir, $A - B \in \mathcal{F}$ siempre que $A, B \in \mathcal{F}$).

5. Supongamos que $X \in \mathcal{F}$ y que $\mathcal{F}$ es cerrada para la complementación y para uniones finitas disjuntas. Mostrar que $\mathcal{F}$ no es necesariamente un álgebra.

6. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Mostrar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra si y sólo si es un álgebra cerrada para uniones numerables disjuntas.

7. Demostrar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre X si y sólo si $\mathcal{F}$ cumple

(a) $X \in \mathcal{F}$

(b) $\mathcal{F}$ es cerrada para diferencias.

(c) $\mathcal{F}$ es cerrada para uniones numerables disjuntas.

8. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la familia constituida por todos los conjuntos A tales que $x \in A$ si y sólo si $x + 1 \in A$. Probar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra y que $\{x\} \notin \mathcal{F}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Se consideran las siguientes colecciones de $\mathcal{P}(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \{A \subset X : \ A \text{ es finito ó } A^c \text{ es finito}\},\\
\mathcal{F}_2 &= \{A \subset X : \ A \text{ es contable ó } A^c \text{ es contable}\},\\
\mathcal{F}_3 &= \{A \subset X : \ A \subset B \text{ ó } A^c \subset B\}, \quad \text{donde } B \subset X \text{ es fijo.}
\end{aligned}$$

(a) Mostrar que $\mathcal{F}_1$ es σ-álgebra cuando y sólo cuando X es finito.

(b) Mostrar que $\mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_3$ son σ-álgebras.

10. Demuestra o da un contraejemplo para las siguientes afirmaciones.

(a) La unión de álgebras no es necesariamente un álgebra.

(b) Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ y cada $\mathcal{F}_n$ es un álgebra, entonces $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ es un álgebra.

(c) La unión de σ-álgebras no es necesariamente una σ-álgebra incluso cuando $\mathcal{F}$ no es finito.

(d) Si $\{\mathcal{F}_n\}$ es una colección creciente de σ-álgebras ($\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$), la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ puede no ser una σ-álgebra.

Sugerencia: Para los apartados (c) y (d) se puede usar el conjunto de los números naturales y σ-álgebras del tipo $\mathcal{F}_3$ del problema anterior.

11. Sea X un conjunto no vacío. Describir $\sigma(\mathcal{H})$, donde

(a) $\mathcal{H} = \{A_1, A_2, \dots\}$ es una *partición* (contable) de X, es decir, los elementos de $\mathcal{H}$ son dos a dos disjuntos y la unión de todos ellos es X.

(b) $\mathcal{H}$ es la colección de los subconjuntos finitos de X. Distinguir si X es contable o no.

12. Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ no vacío y $B \subset X$ fijo. Consideramos el conjunto de *trazas*

$$\mathcal{E} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathcal{E}\}.$$

Queremos demostrar que $\sigma(\mathcal{E} \cap B) = \sigma(\mathcal{E}) \cap B$ (sobre B). Para ello mostrar:

(a) $\sigma(\mathcal{E}) \cap B$ es una σ-álgebra sobre B y por tanto $\sigma(\mathcal{E} \cap B) \subset \sigma(\mathcal{E}) \cap B$.

(b) $\mathcal{F} = \{A \in \sigma(\mathcal{E}) : A \cap B \in \sigma(\mathcal{E} \cap B)\}$ es una σ-álgebra sobre X y por tanto $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$.

(c) Finalmente, $\sigma(\mathcal{E} \cap B) = \sigma(\mathcal{E}) \cap B$.

13. Mostrar que cada una de las siguientes colecciones de intervalos genera la σ-álgebra boreliana usual sobre la recta real:

$$\{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{(a,b] : a,b \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{[a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{[a,b] : a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

$$\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{[a,\infty) : a \in \mathbb{Q}\}, \qquad \{(a,\infty) : a \in \mathbb{Q}\}.$$

14. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $f, g : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ funciones reales tales que los conjuntos

$$\{x \in X : f(x) > \lambda\}, \quad \{x \in X : g(x) > \lambda\} \in \mathcal{F}, \qquad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mostrar que los siguientes conjuntos también pertenecen a $\mathcal{F}$

$$\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}, \quad \{x \in X : f(x) = \lambda\}, \quad \{x \in X : f(x) < g(x)\}.$$