ALEJANDRO SANTORUM VARELA 44090946-S gr. 730

REPESCA 2º PARCIAL

1.

1.1) Como $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = L$, sabemos que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R > 0$ tal que si $\|x\| \geq R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

► Veamos primero que f es acotada:

Podemos escoger $\varepsilon = 1$, entonces $\exists R > 0$ tal que si $\|x\| \geq R$, $|f(x) - L| \leq 1$. Esto quiere decir que $\forall x : \|x\| \geq R \Rightarrow$ $\Rightarrow L - 1 \leq f(x) \leq L + 1$.

En $\overline{B(0,R)}$, que es compacto porque es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, f alcanza un máximo y un mínimo (M y m respectivamente) $\Rightarrow \min\{m, L-1\} \leq f(x) \leq \max\{M, L+1\}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ es acotada.

► Veamos ahora que f es uniformemente continua bajo las hipótesis del enunciado:

Hay que ver que $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Debido a que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = L$, $\forall \varepsilon/2 > 0$ $\exists R \overset{(1)}{>} 0$ tal que si $\|x\| \geq R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2$.

↳ escogemos $\varepsilon/2$ para el argumento que viene a continuación.

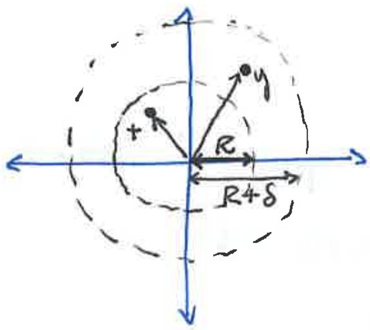
Dado un $\varepsilon > 0$, sea $R > 0$ el del argumento anterior (1).

Si $x, y \in \mathbb{R}^n : \|x\|, \|y\| \geq R$ entonces:

$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Por lo tanto $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ cuya norma sea mayor que R, queda demostrada la continuidad uniforme. Continuemos ahora con el resto de los casos.

Si $x,y \in \mathbb{R}^n$: $\|x\|, \|y\| \leq R \Rightarrow x,y \in \overline{B(0,R)}$, que es compacto (cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$) $\Rightarrow$ Como f es continua, en un compacto f es uniformemente continua.(2) Queda demostrada la continuidad uniforme $\forall x,y : \|x\|, \|y\| \leq R$.

Por último, si $x \in \overline{B(0,R)}$, $y \notin \overline{B(0,R)}$ y $\|x-y\| < \delta$,



podemos coger en la definición de límite (1) un $R' > R$ tal que $R' = R+\delta$. Si la definición de límite dado un $\varepsilon > 0$ se cumplía para un cierto R, también se cumplirá para un $R' > R$.

Ahora bien, $x \in \overline{B(0,R')}$ porque $x \in \overline{B(0,R)} \subsetneq \overline{B(0,R')}$; $y \in \overline{B(0,R')}$ porque $\|y\| \leq R'$. Entonces podemos utilizar el mismo razonamiento que en (2): $\overline{B(0,R')}$ es compacto, por lo que f continua restringida a ese compacto es uniformemente continua.

En conclusión, $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $\|x-y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow f$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

qed.

1.2) En primer lugar es obvio que $\mathbb{R}^n$ es convexo, porque $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ el segmento $[x,y] := \{y + t(x-y) : 0 \leq t \leq 1\}$ está completamente contenido en $\mathbb{R}^n$.

Ahora demostremos la desigualdad $|f(x)-f(y)| \leq \sup_{\xi \in [x,y]} \|\nabla f(\xi)\| |x-y|$.
Para ello utilizaremos la parametrización γ y la función g dadas por:

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad \gamma(t) = y + t(x-y)$$

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad g(t) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$$

Aplicando el T^{ma} fundamental del cálculo obtenemos:

$$f(x) - f(y) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt = \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)) . \gamma'(t)\,dt =$$

$$= \left(\int_0^1 \nabla f(\gamma(t))\,dt \right) . \underbrace{(x-y)}_{\gamma'(t)}$$. Tomamos normas y acotamos.

$$|f(x) - f(y)| \leq \left\| \int_0^1 \nabla f(\gamma(t))\,dt \right\| |x-y| \leq \left(\int_0^1 \|\nabla f(\gamma(t))\,dt \right) |x-y| \leq$$

$$\leq \sup_{\xi \in [x,y]} \|\nabla f(\xi)\| . |x-y| .$$

Una vez tenemos esto, junto con la hipótesis de que $v = \lim_{\|x\| \to \infty} \nabla f(x)$ (con $v \in \mathbb{R}^n$) $\Longrightarrow K = \lim_{\|x\| \to \infty} \nabla f(x) < \infty \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \sup_{\xi \in [x,y]} \|\nabla f(\xi)\| . |x-y| \leq K . |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

$\Longrightarrow f$ es lipschitz.

qed.

1.3) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^1 y $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|=\infty$, probar que f no puede ser uniformemente continua.

El enunciado resulta ser ligeramente incorrecto. Piense en una función que sea cada vez más empinada pero cada vez más pequeña. Un contraejemplo que se me ha ocurrido es:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x} \quad \text{con} \quad f(0)=0$$

Entonces es fácil ver que $f\in C^1$ y que como f se desvanece en infinito (tiende a cero cuando $x\to\infty$) es uniformemente continua. Pero su derivada:

$$f'(x)=\frac{5x^5\cos(x^5)-\operatorname{sen}(x^5)}{x^2}$$

Su valor en $\sqrt[5]{2n\pi}$ es $(5n\pi)^{3/5}$, i.e., $f(\sqrt[5]{2n\pi})=(5n\pi)^{3/5}$, que se puede hacer arbitrariamente grande $\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|=\infty$.

Por otro lado, si imponemos que $\lim_{x\to\infty}|f'(x)|=\infty$ entonces el enunciado sería correcto. Suponiendo que f es uniformemente continua con $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, de clase C^1, y $\lim_{x\to\infty}|f'(x)|=\infty$, entonces utilizando el Teorema del Valor Medio llegamos a una contradicción:

Si f es uniformemente continua existe un $\delta>0$ tal que $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<1$. Aplicando el T.V.M. en $(z,z+\frac{\delta}{2})$ $\exists c\in[z,z+\frac{\delta}{2}]$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(z+\frac{\delta}{2})-f(z)}{z+\frac{\delta}{2}-z}<\dfrac{1}{\delta/2}=\dfrac{2}{\delta}$, pero si $z\to\infty$, $\lim_{z\to\infty}|f'(z)|=\infty$ y $f'(c)<\frac{2}{\delta}$

contradicción $\Rightarrow$ f no puede ser uniformemente continua.

qed

$\boxed{2.}$

2.1) He encontrado dos posibles soluciones para este apartado.

La primera solución es la siguiente:

$Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua porque $Q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ que es un polinomio cuadrático.

$Q|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y como está definida en un compacto, alcanza su máximo (T^{ma} Weierstrass).

Sea $C_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left| Q|_{S^{n-1}}(x) \right|$.

Si $y \in S^{n-1}$, e.d., $\|y\|_2 = 1 \Rightarrow |Q(y)| \leq C_1$.

Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1} \Rightarrow \left| Q\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right|$

Por propiedades del producto escalar: $\left| Q\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right| = \left| \frac{1}{\|x\|_2^2} Q(x) \right| =$

$= \frac{1}{\|x\|_2^2} |Q(x)| \leq C_1 \Rightarrow Q(x) \leq C_1 \|x\|_2^2$.

qed

La segunda solución es:

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle \underset{\text{desigualdad Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|Ax\|_2 \|x\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \|x\|_2 = \|A\|_2 \|x\|_2^2$$

Sea $C_1 = \|A\|_2 \Rightarrow Q(x) \leq C_1 \|x\|_2^2$. qed.

2.2)

$$Q(x+y) = \langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax+Ay, x+y\rangle = \langle Ax,x\rangle + \langle Ax,y\rangle +$$
$$+ \langle Ay,x\rangle + \langle Ay,y\rangle = Q(x) + 2\langle Ax,y\rangle + Q(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$$

qed

vector de incrementos.

Sea $x_0\in\mathbb{R}^n$ y $h\in\mathbb{R}^n$

$$Q(x_0+h) = \underbrace{Q(x_0)}_{\text{imagen de } x_0} + \underbrace{2\langle Ax_0,h\rangle}_{\text{lineal en } x_0} + \underbrace{Q(h)}$$

$\hookrightarrow$ término de error en función del vector de incrementos

Para ver que Q es diferenciable tenemos que ver que $Q(h) = o(h)$, o equivalentemente, $Q(\|h\|) = o(\|h\|)$.

$|Q(h)| \leq C\|h\|_2^2$ por el apartado 2.1 $\Rightarrow Q(h) = O(\|h\|_2^2)$

$\Rightarrow Q(h) = o(h)$.

En conclusión, Q es diferenciable y $Df_{x_0}(h) = 2\langle Ax_0, h\rangle =$

$= 2(Ax_0)h \Rightarrow df_{x_0} = \boxed{\nabla f(x_0) = 2Ax_0.}$

2.3) Siguiendo un razonamiento parecido al apartado 1,

$Q|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua definida en un compacto $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Q alcanza un máximo y un mínimo (T^{ma} Weierstrass).

Sean $c = \min_{x \in \mathbb{R}^n} |Q|_{S^{n-1}}(x)|$ y $C' = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |Q|_{S^{n-1}}(x)|$.

propiedades del producto escalar

Si $x \in S^{n-1} \Rightarrow \|x\| = 1 \Rightarrow c \leq Q(x) \leq C'$.

Si $x \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1} \Rightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1 \Rightarrow c \leq Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq C' \Rightarrow$

$\Rightarrow c \leq \frac{1}{\|x\|_2^2} Q(x) \leq C' \Rightarrow c\|x\|_2^2 \leq Q(x) \leq C'\|x\|_2^2$.

$\|x\|_2^2 \geq 0$

qed

2.4) $Q(x) = \langle Ax, x \rangle$

Si $A = Id \Rightarrow Q(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 1\} = Q^{-1}(1)$

$Q(x) = 1 \Leftrightarrow \|x\|_2^2 = 1 \Leftrightarrow x \in S^{n-1}$

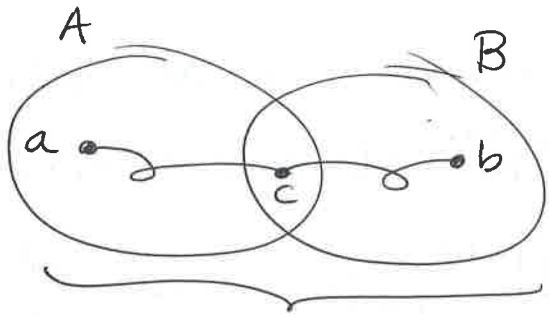
$\Rightarrow \boxed{S = S^{n-1}}$

Comprobamos que $1 \in \mathbb{R}$ es valor regular, e.d., que si $x \in Q^{-1}(1)$ $(Q(x) = 1) \Rightarrow \nabla Q(x) \neq 0$. Como $\nabla Q(x) = 2Ax$, si $Ax = 0$ $\Rightarrow Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0 \Rightarrow x \notin Q^{-1}(1) \Rightarrow \nabla Q(x) \neq 0$

$\Rightarrow Q^{-1}(1)$ es subvariedad C^∞ de $\mathbb{R}^n$ de dim $n-1$, es decir, hipersuperficie.

qed.

$\boxed{3.}$



$X = A \cup B$

3.1) Sean $a, b \in X$.

- Si $a, b \in A \Rightarrow \exists \varphi_A : [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que $\varphi_A(0) = a$ y $\varphi_A(1) = b$, porque A es conexo por caminos por hipótesis.

- Si $a, b \in B \Rightarrow \exists \varphi_B : [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que $\varphi_B(0) = a$, y $\varphi_B(1) = b$, debido a que B es conexo por caminos por hipótesis.

- Si $a \in A$ y $b \in B \Rightarrow \exists c \in A \cap B$ ya que $A \cap B \neq \emptyset$.

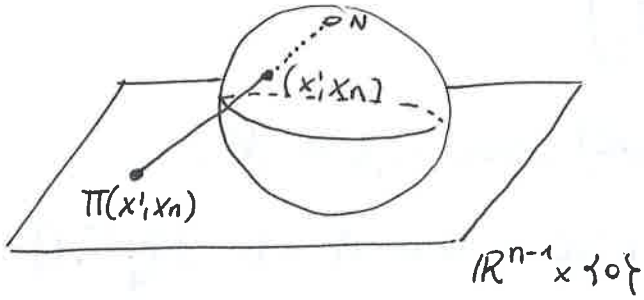
Como $a, c \in A$ podemos definir $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = c$ porque A es conexo por caminos. De forma similar, $b, c \in B$ por lo que existe $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que $\beta(0) = c$ y $\beta(1) = b$, porque B es conexo por caminos.

Entonces podemos definir $\varphi : [0,1] \longrightarrow X$ como:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

tal que $\varphi(0) = \alpha(0) = a$ y $\varphi(1) = \beta(1) = b \Rightarrow A \cup B$ con $A \cap B \neq \emptyset$ es conexo por caminos si A, B son conexos por caminos. qed

3.2) Vamos a ver primero que $(\pi^{-1} \circ \pi)(x', x_n) = (x', x_n)$:



$$\pi^{-1}\Big(\underbrace{\frac{x'}{1-x_n}}_{u}\Big) \qquad u = \Big(\underbrace{\frac{x_1'}{1-x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}'}{1-x_n}}_{n-1 \text{ coord.}}\Big)$$

$$\|u\|^2 + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i'^2}{(1-x_n)^2} = 1 + \frac{1}{(1-x_n)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1 + \frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2} =$$

$$= 1 + \frac{(1-x_n)(1+x_n)}{(1-x_n)^2} = 1 + \frac{1+x_n}{1-x_n} = \frac{2}{1-x_n}$$

Análogamente: $\|u\|^2 - 1 = \dfrac{1+x_n}{1-x_n} - 1 = \dfrac{2x_n}{1-x_n}$

$$\Rightarrow \pi^{-1}\left(\frac{x'}{1-x_n}\right) = \left(\frac{2x'/1-x_n}{2/1-x_n}, \frac{2x_n/1-x_n}{2/1-x_n}\right) = (x', x_n) \quad \checkmark$$

Veamos ahora que $(\pi \circ \pi^{-1})(u) = u$:

$$(\pi \circ \pi^{-1})(u) = \pi\Big(\underbrace{\frac{2u}{\|u\|^2+1}}_{x'}, \underbrace{\frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1}}_{x_n}\Big) \quad (1)$$

$$1 - x_n = 1 - \frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1} = \frac{2}{\|u\|^2+1}$$

$$\frac{1}{1-x_n} = \frac{\|u\|^2+1}{2}$$

$$\Rightarrow (1) = \frac{2u}{\|u\|^2+1} \cdot \frac{\|u\|^2+1}{2} = u$$

Como hay inversa de π en ambos lados $(\equiv \pi^{-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi$ es biyectiva.

$$\Pi(S^{n-1}\setminus\{N\}) = \mathbb{R}^{n-1}$$

Si $u=(u_1,\dots,u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ $\quad u = \Pi(\Pi^{-1}(u))$

Comprobemos que Π es continua:

$\tilde{\Pi}: U=\{x_n<1\} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ definida por

$\Pi(x', x_n) = \left(\frac{x'}{1-x_n}\right)$ es continua

$\Longrightarrow \Pi = \tilde{\Pi}\big|_{S^{n-1}\setminus\{N\}}$ es continua en $S^{n-1}\setminus\{N\}$

con la topología subespacio.

Comprobemos que Π^{-1} es continua:

$\Pi^{-1}(u) = \left(\frac{2u}{\|u\|^2+1}, \frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1}\right)$ es continua como aplicación de $\mathbb{R}^{n-1}$ a $\mathbb{R}^n$, debido a que todas las funciones coordenada son continuas porque son funciones racionales donde no se anula el denominador.

Como $\Pi^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \subseteq S^{n-1}\setminus\{N\} \Longrightarrow \Pi^{-1}$ es continua como aplicación $\Pi^{-1}: \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}\setminus\{N\}$

En conclusión, podemos sostener que Π es un homeomorfismo (obviamente Π^{-1} también lo es).

qed

3.3) Si $n \geq 2$, sabemos que $\mathbb{R}^{n-1}$ es conexo por arcos.

Como Π^{-1} es homeomorfismo (apartado 3.2), $\underbrace{\Pi^{-1}(\mathbb{R}^{n-1})}_{\| \atop A = S^{n-1}\setminus\{N\}}$ es conexo por arcos.

De la misma forma, $(\Pi^S)^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}) = S^{n-1}\setminus\{S\} = B$ es conexo por arcos.

↳ "polo sur"

Como $A \cap B = S^{n-1}\setminus\{N,S\}$ con $n \geq 2 \Rightarrow A\cap B \neq \emptyset$ (por ejemplo, $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ con $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1 \in A \cap B$) $\Rightarrow$ Tenemos que A, B son conexos por arcos con $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B = S^n$ es conexo por arcos (Capartado 3.1).

qed