Algunos resultados de Teoría de Grupos útiles

Al lo largo de esta hoja, todos los grupos considerados son finitos. Este es un compendio de resultados sin prueba, tampoco aparecen todas las definiciones de los conceptos involucrados. (La mayoría de las pruebas, y todas las definiciones, las podéis encontrar en el libro de Gabriel Navarro en la bibliografía del curso.)

1. Sean $g, h \in G$.

a) $o(g)$ divide a G, por tanto, $g^{|G|} = 1$.

b) Si $o(g) = n$, entonces $H = |\langle g \rangle| = n$. Para cada divisor d de n, existe un único subgrupo de H de orden d generado por $g^{n/d}$.

c) Si $gh = hg$ y $(o(g), o(h)) = 1$, entonces $o(gh) = o(g)o(h)$.
Por ejemplo si $i, \omega \in \mathbb{C}$ donde ω es una raíz cúnica de la unidad, entonces $\alpha = i\omega$ es una raíz duodécima de la unidad.

2. Como consecuencia del ejercicio anterior si $(n, m) = 1$, entonces $\mathsf{C}_n \times \mathsf{C}_m = \mathsf{C}_{nm}$.

3. Un grupo G es cíclico si, y solo si, existe un $g \in G$ tal que $o(g) = |G|$. Si G es cíclico y $H \leq G$, entonces H es cíclico.

4. Un subgrupo $H \leq G$ es normal si para todo $g \in G$ se tiene que $H^g = H$, es decir, $\mathbf{N}_G(H) = G$.

5. Si $N \triangleleft G$ (leemos N es normal en G) entonces, el conjunto $G/N = \{Ng \mid g \in G\}$ tiene estructura de grupo, y decimos que G/N es el grupo cociente de G por N.

6. Si $H, K \leq G$ entonces $HK \subseteq G$ y $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

7. Si $H, K \leq G$ entonces $HK \subseteq G$ es un subgrupo de G si, y solo si, $HK = KH$.

a) Si $K \triangleleft G$ entonces, HK es un subgrupo de G.

b) Si $H, K \triangleleft G$ entonces, $HK \triangleleft G$ y $G/KH \cong \frac{G/K}{KH/K}$.

8. Si $N \triangleleft G$ y $H \leq G$ entonces $NH \leq G$ y $NH/N \cong H/N \cap H$.

9. Si $H \leq G$ y $|G : H| = p$ siendo p le menor primo que divide a $|G|$, entonces $H \triangleleft G$.

10. Si G es abeliano, entonces todo subgrupo $H \leq G$ es normal.
El recíproco no es cierto, por ejemplo, todo subgrupo de Q_8 es normal.

11. (Producto directo) Si $N, M \triangleleft G$ y además $G = NM$ y $N \cap M$, entonces $G \cong N \times M$.

12. (Producto semidirecto) Si $N \triangleleft G$ y existe un $H \leq G$ tal que $G = NH$ y $N \cap H = 1$, entonces $G \cong N \rtimes H$, donde H actúa sobre N como automorfismos por conjugación.

Supongamos que G actúa sobre Ω finito y $\alpha \in G$, entonces $\mathcal{O}_\alpha = \{\alpha \cdot g \mid g \in G\}$ es la órbita de α bajo la acción y $G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha \cdot g = \alpha\} \leq G$ es el estabilizador de α. Se tiene que $G_\alpha^g = G_{\alpha \cdot g}$.

13. (Teorema Órbita-Estabilizador) Si G actúa sobre Ω y $\alpha \in \Omega$ entonces $|\mathcal{O}_\alpha| = |G : G_\alpha|$.

14. (Ecuación de clases) Si G actúa sobre Ω y $\{\alpha_j \mid 1 \leq t\}$ son representantes de las G-órbitas en Ω, entonces

$$|\Omega| = \sum_{j=1}^{t} |G : G_{\alpha_j}| \,.$$

15. Supongamos que G actúa sobre Ω (finito), entonces $\rho\colon G \to \mathsf{S}_\Omega$ definido por $\rho(g)(\alpha) = \alpha \cdot g$ para todo $\alpha \in G$ es un homomorfismo de grupos con $\ker(\rho) = \bigcap_{\alpha\in\Omega} G_\alpha$. La acción se dice fiel si $\ker(\rho) = 1$, es decir, si G se puede identificar con un subgrupo de S_Ω. G actúa transitivamente sobre Ω si para cada $\alpha, \beta \in \Omega$ existe algún $g \in G$ tal que $\alpha \cdot g = \beta$. Si G actúa transitiva y fielmente sobre Ω, entonces $G \leq \mathsf{S}_\Omega$ es un subgrupo transitivo.

16. Si G actúa sobre sí mismo por conjugación la ecuación de clases de la acción queda como

$$|G| = |\mathbf{Z}(G)| + \sum_{j=1}^{n} |G : \mathbf{C}_G(g_j)|,$$

donde g_j son los representantes de clases de conjugación con más de un elemento.

17. Si $|G| = p^a$ donde p es un primo, entonces $|\mathbf{Z}(G)| > 1$.
Es consecuencia del ejercicio/resultado anterior.

18. Si $G/\mathbf{Z}(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

19. Si $|G| = p^2$, entonces G es abeliano. *Es consecuencia de los dos ejercicios/resultados anteriores.*

20. (Teoremas de Sylow) Sea $|G| = p^a m$ con $(p, m) = 1$, escribimos $\mathrm{Syl}_p(G) = \{P \leq G \mid |P| = p^a\}$.

a) (Existencia) $\mathrm{Syl}_p(G) \neq \emptyset$.

b) (Conjugación) Sean $P_1, P_2 \in \mathrm{Syl}_p(G)$, existe un $g \in G$ tal que $P_1^g = P_2$.

c) (Dominio) Si $Q \leq G$ es un p-subgrupo de G, entonces $Q \leq P$ para algún $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

d) Sea $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ (sabemos que es no vacío por (a)), se tiene que $|\mathrm{Syl}_p(G)| = |G : \mathbf{N}_G(P)| \equiv 1 \mod p$.

21. $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_n) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, en particular, $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_n)$ es abeliano.

22. Si $H \leq G$ y consideramos el conjunto de coclases a derecha $\Omega = \{Hg \mid g \in G\}$ que tiene cardinal $|\Omega| = |G : H|$. Entonces G actúa transitivamente sobre Ω por multiplicación a derecha y núcleo de esta acción (entendiendo $\rho\colon G \to \mathsf{S}_\Omega$ como en 14) es $\mathrm{core}_G(H) = \bigcap_{x\in G} H^x$, que es el mayor subgrupo normal de G contenido en H.

23. Demuestra que S_4 es un subgrupo transitivo de S_6 usando el ejercicio anterior. (Es decir, S_4 actúa fielmente y transitivamente sobre un conjunto de 6 elementos.)

a) El grupo dihédrico D_{2n} puede verse como un subgrupo transitivo de S_n.
El grupo dihédrico de orden $2n$ es el grupo de transformaciones de un polígono regular de n lados, y siempre puede puede pasarse de un vértice a otro a través de una rotación.

b) Prueba que $\mathbf{Z}(\mathsf{D}_{2n}) = 1$ si n es impar y $\mathbf{Z}(\mathsf{D}_{2n}) = \langle a^{n/2} \rangle$ si n es par.

24. El grupo cuaternio que denotamos por Q_8 es un grupo no abeliano de orden 8 caracterizado por admitir una presentación $\mathsf{Q}_8 = \langle i, j, k \mid i^4 = j^4 = k^4 = 1, ijk = -1 \rangle$. El grupo cuaternio es un ejemplo de grupo Hamiltoniano, es decir, un grupo no abeliano en el que todo subgrupo es normal.

a) Demuestra que $-1 \in H$ para cualquier subgrupo propio H de G.

b) Describe el retículo de subgrupos de Q_8.

c) Demuestra que Q_8 no actúa fielmente sobre ningún conjunto Ω con menos de 8 elementos. En particular, si $\mathsf{Q}_8 \leq \mathsf{S}_n$, entonces $n \geq 8$. (La clave está en el apartado (a), el elemento -1 estará en el núcleo de cualquier acción sobre un conjunto de menos de 8 elementos puesto que los estabilizadores serán subgrupos propios.)

25. Prueba que, salvo isomorfismo, todos los grupos de orden ≤ 15 están representados en la tabla siguiente. Además, da una presentación de cada uno de los grupos de la tabla mediante generadores y relaciones.

n	Abelianos	No abelianos
1	1	
2	C_2	
3	C_3	
4	$\mathsf{C}_4, \mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2$	
5	C_5	
6	C_6	$\mathsf{S}_3 \cong \mathsf{D}_6$
7	C_7	
8	$\mathsf{C}_8, \mathsf{C}_4 \times \mathsf{C}_2, \mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2$	D_8, Q_8
9	$\mathsf{C}_9, \mathsf{C}_3 \times \mathsf{C}_3$	
10	C_{10}	D_{10}
11	C_{11}	
12	$\mathsf{C}_{12}, \mathsf{C}_6 \times \mathsf{C}_2$	D_{12}, A_4, $T = \langle x, y \mid x^6 = 1, y^2 = x^3, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$
13	C_{13}	
14	C_{14}	D_{14}
15	C_{15}	

Nota que $T = \langle x, y \mid x^6 = 1, y^2 = x^3, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ admite otra presentacíń. Sea $a = x^2$ y $b = y$ tenemos que $a^3 = 1 = y^4$ y $a^y = (x^y)^2 = (x^{-1})^2 = (x^2)^{-1} = a^{-1}$. Luego $T = \langle a, b \mid a^3 = 1 = b^4, a^b = a^{-1} \rangle = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \cong \mathsf{C}_3 \rtimes \mathsf{C}_4$, donde el generador C_4 actúa invirtiendo los elementos de C_3. Además nota que $\mathbf{Z}(T) = \langle b^2 \rangle$.

Nota también que los distintos subgrupos de la tabla pueden distinguirse atendiendo únicamente al número de elementos de cada orden que tienen (un criterio completamente válido para identificar la clase de isomorfía de un grupo de Galois). Por ejemplo, Q_8 tiene un único elemento de orden 2, mientras que D_8 tiene 5. El grupo alternado A_4 es el único grupo de orden 12 sin elementos de orden 6. ¿Cómo podrías distinguir D_{12} y el grupo denominado T en la tabla?

26. Si $n \geq 5$, entonces el grupo alternado A_n es simple.

27. Si $n \geq 3$, una presentación del grupo dihédrico D_{2n} de orden $2n$ es $\langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle$.

28. Demuestra que S_5 tiene un único subgrupo de orden 60 y no tiene subgrupos de orden 30 ni 40. *Sugerencia: Si $H \leq \mathsf{S}_5$ tiene orden 60 y $H \neq \mathsf{A}_5$, entonces $H \lhd \mathsf{S}_5$ y $H \cap \mathsf{A}_5 \lhd \mathsf{A}_5$*; pero A_5 es simple. Para la segunda parte, por reducción al absurdo, considera la acción de S_5 sobre las coclases definidas por tales subgrupos.