3 Ejercicio 3

i) Tomemos un divisor d de n menor que $\sqrt{n}$. Por ser d divisor de n tenemos que existe un m tal que $dm = n$. Además este m tiene que ser mayor que $\sqrt{n}$ ya que $m = n/d > n/\sqrt{n} = \sqrt{n}$. Que un divisor mayor que $\sqrt{n}$ está asociado con un divisor menor que $\sqrt{n}$ es análogo.

ii) Veamos primero que los $s^2 - t^2$ con $s, t \in \mathbb{Z}$ están asociados a un divisor de n mayor que $\sqrt{n}$. $n = s^2 - t^2 = (s+t)(s-t)$, con lo que vemos que $(s+t)$ y $(s-t)$ son divisores de n (uno mayor que $\sqrt{n}$). Ahora veamos que a cada divisor mayor que $\sqrt{n}$ le podemos asociar una única expresión $s^2 + t^2$. Sea $n = ab$ con, por ejemplo, $a > \sqrt{n}$. Definamos $s' = \frac{a+b}{2}, t' = \frac{a-b}{2}$, que son ambos enteros ya que, al ser n impar, ni a ni b pueden ser pares, y tanto la suma como la diferencia de impares es par. Estos s', t' cumplen la igualdad $s`^2 - t`^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab}{4} = \frac{4ab}{4} = ab = n$, por lo que ya hemos encontrado la pareja s, t asociada a a.

iii) Divisores de 15: 1,3,5,15
$(15+1)/2 = 8, (15-1)/2 = 7, 8^2 - 7^2 = 15$
$(5+3)/2 = 4, (5-3)/2 = 1, 4^2 - 1^2 = 15$

Divisores de 45: 1,3,5,9,15,45
$(45+1)/2 = 23, (45-1)/2 = 22, 23^2 - 22^2 = 45$
$(15+3)/2 = 9, (15-3)/2 = 6, 9^2 - 6^2 = 45$
$(9+5)/2 = 7, (9-5)/2 = 2, 7^2 - 2^2 = 45$