$\boxed{41.}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa

A) $\Omega^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega, f(x) \leq t\}$

$x \in \mathbb{R}^n$
$(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

· (Ω^+ se le denomina supergrafo de Ω)

(si tuviésemos "$f(x) \geq t$" $\longrightarrow$ subgrafo de f)

Demostrar que f es convexa en Ω si y solo si Ω^+ es convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\Rightarrow$ Si f es convexa en Ω y $(x_0, t_0), (x_1, t_1) \in \Omega^+$, dado $0 \leq s \leq 1$

$$(1-s)(x_0, t_0) + s(x_1, t_1) = \Big((1-s)x_0 + sx_1, \underbrace{(1-s)t_0 + st_1}_{(1)\ \ "t}\Big)$$

$(1-s)x_0 + sx_1 \in \Omega$ por ser Ω convexo

$$\Rightarrow f((1-s)x_0 + sx_1) \leq (1-s)\underbrace{f(x_0)}_{\leq t_0} + s\underbrace{f(x_1)}_{\leq t_1} \quad (f \text{ convexa en } \Omega)$$

$$\leq \underbrace{(1-s)t_0 + st_1}_{(1)} = t \quad \Rightarrow (1-s)(x_0, t_0) + s(x_1, t_1) \in \Omega^+.$$

$\Leftarrow$ Si Ω^+ es convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$, dados $x_0, x_1 \in \Omega$ y $0 \leq s \leq 1$

$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)) \in \Omega^+ \Rightarrow (1-s)(x_0, f(x_0)) + s(x_1, f(x_1)) \in \Omega^+$

(Ω^+ es convexo)

$$\big((1-s)x_0 + sx_1, (1-s)f(x_0) + sf(x_1)\big) \Rightarrow f\big((1-s)x_0 + sx_1\big) \leq$$

$$\leq (1-s)f(x_0) + sf(x_1)$$ ∎

B) Para $t \in \mathbb{R}$, sea $L_t = \{x \in \Omega : f(x) \leq t\}$

B.1) Demostrar L_t convexo siempre que f es convexa Ω.

e.d., Ω convexo y f convexo en $\Omega \Rightarrow L_t$ es convexo $\forall t \in \mathbb{R}$.

Si $x_0, x_1 \in L_t$ y $0 \leq s \leq 1$, $(1-s)x_0 + sx_1 \in \Omega$ ($x_0, x_1 \in L_t \subset \Omega$)
(Ω convexo)

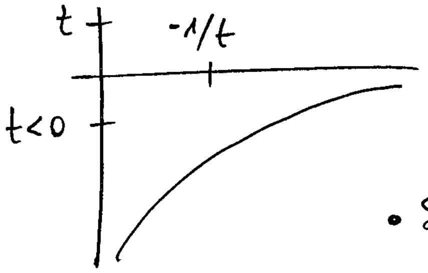
$$\Rightarrow f((1-s)x_0 + sx_1) \leq \underbrace{(1-s)}_{\geq 0}\underbrace{f(x_0)}_{\leq t} + \underbrace{s}_{\geq 0}\underbrace{f(x_1)}_{\leq t} \leq (1-s)t + st = t.$$

$\Rightarrow (1-s)x_0 + sx_1 \in L_t$. ∎

B.2) Dar un contraejemplo al recíproco de B1

$\Omega = (0,\infty)$ en $\mathbb{R}$

$f(x) = -1/x$; f es estrictamente cóncava en Ω ($\Rightarrow f$ no convexa en Ω).



$f'(x) = 1/x^2$; $f''(x) = \dfrac{-2}{x^3} < 0$

$f(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega$

- Si $t \geq 0 \Rightarrow L_t = \Omega$, que es convexo
- Si $t < 0$, $L_t = \{x \in (0,\infty) : \frac{-1}{x} \leq t\} = \left(0, \frac{-1}{t}\right]$: también es convexo.

c) $f(x) = dist(x, \Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cerrado

Entonces f es convexa en Ω si Ω es convexa (OJO: no es un si y solo si como pone el enunciado)

Puesto que Ω es cerrado, $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x,\Omega) = 0\} = \Omega$

Por tanto, $f(x) = dist(x,\Omega)$ con $x \in \Omega$ es $\equiv 0$,

y si Ω es convexo $\Rightarrow f \equiv 0$ también lo es (en Ω).

$\boxed{42.}$

A) Si $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ son 3 puntos, el triángulo que generan es $\left\{ \sum_{j=1}^{3} t_j x_j \; : \; t_1, t_2, t_3 \geq 0, \; t_1 + t_2 + t_3 = 1 \right\}$

$\longrightarrow$ Más en general: dados puntos $x_1, \dots, x_K \in \mathbb{R}^n$ definiremos

$P(x_1, \dots, x_K)$: mínimo convexo en $\mathbb{R}^n$ que contiene $x_1, \dots, x_K$,

y asimismo $C(x_1, \dots, x_K) = \left\{ \sum_{j=1}^{K} t_j x_j : t_1, t_2, \dots, t_K \geq 0, \; \sum_{j=1}^{K} t_j = 1 \right\}$

Entonces $P(x_1, \dots, x_K) = C(x_1, \dots, x_K)$ $\longrightarrow$ este está aquí $\rightarrow \cap C_i$

no es este, es cualquier convexo

$P(x_1, \dots, x_K) = \cap C_i \; : \; C_i \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $\{x_1, \dots, x_K\} \subset C_i$

(se denomina también envoltura convexa de $\{x_1, \dots, x_K\}$)

Tal $P(x_1, \dots, x_K)$ es asimismo convexo, por ser intersección de convexos.

$C(x_1, \dots, x_K)$ es convexo y $\{x_1, \dots, x_K\} \subset C(x_1, \dots, x_K)$

Cada $x_{j_0} \in C(x_1, \dots, x_K)$ porque $x_{j_0} = \sum_{j=1}^{K} t_j x_j$ con $t_{j_0} = 1$, $t_j = 0$ si $j \neq j_0$
$1 \leq j_0 \leq K$

$\in C(x_1, \dots, x_K)$

Si $p, q \in C(x_1, \dots, x_K)$, $p = \sum_{j=1}^{K} t_j x_j$, $t_1, \dots, t_K \geq 0$, $\sum_{j=1}^{K} t_j = 1$

$q = \sum_{j=1}^{K} t_j' x_j$, $t_1', \dots, t_K' \geq 0$, $\sum_{j=1}^{K} t_j' = 1$

Si $0 \leq s < 1$

$$(1-s)p + sq = (1-s) \sum_{j=1}^{K} t_j x_j + s \sum_{j=1}^{K} t_j' x_j = \sum_{j=1}^{K} \underbrace{\left[(1-s) t_j + s t_j' \right]}_{:= t_j''} x_j \; ;$$

$$t_j'' \geq 0, \quad j = 1, \dots, K \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{K} t_j'' = (1-s) \underbrace{\sum_{j=1}^{K} t_j}_{=1} + s \underbrace{\sum_{j=1}^{K} t_j'}_{=1} = (1-s) + s = 1$$

Como $C(x_1, \dots, x_n)$ es convexo en $\mathbb{R}^n$ que incluye en $\{x_1, \dots, x_k\}$ $\Longrightarrow$ $P(x_1, \dots, x_n) \subset C(x_1, \dots, x_k)$.

- Veamos que para un triángulo $P(x_1, x_2, x_3)$, $C(x_1, x_2, x_3) \subset P(x_1, x_2, x_3)$
$P(x_1, x_2, x_3) \supset [x_1, x_2], [x_1, x_3]$ y $[r, s] \subset P(x_1, x_2, x_3)$ si $\begin{cases} r \in [x_1, x_2] \\ s \in [x_1, x_3] \end{cases}$

Veamos que todo $p \in C(x_1, x_2, x_3)$ es de la forma anterior (y entonces estará en $P(x_1, x_2, x_3)$):

Si $p = t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3$ con $t_1, t_2, t_3 \geq 0$, $t_1 + t_2 + t_3 = 1$
y $t_2 = 0 \Longrightarrow p \in [x_1, x_3] \subset P(x_1, x_2, x_3)$

Si $t_2 > 0 \Longrightarrow p = (t_1 + t_2) \underbrace{\left[\frac{t_1}{t_1+t_2} x_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2} x_2 \right]}_{:= r} + t_3 x_3$
$\Longrightarrow t_1 + t_2 \geq t_2 \geq 0$

$r \in [x_1, x_2]$, porque $\frac{t_1}{t_1+t_2}, \frac{t_2}{t_1+t_2} \geq 0$ y suman 1

$\Longrightarrow p = \underbrace{(t_1 + t_2)}_{\geq 0} r + \underbrace{t_3}_{\geq 0} x_3$; $(t_1 + t_2) + t_3 = 1$

Ahora queremos ver en general que $C(x_1, \dots, x_k) \subset P(x_1, \dots, x_k)$
Argumento de inducción en k
Afirmo que para cualesquiera k puntos $x_1, \dots, x_k$ en $\mathbb{R}^n$,
$C(x_1, \dots, x_k) \subset P(x_1, \dots, x_k)$.

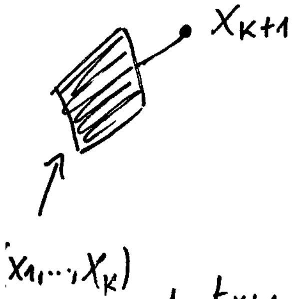
$k = 2, 3$ ✓

Pongamos que tengo $k+1$ puntos $x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$, y $p \in C(x_1, \dots, x_{k+1})$;
$p = \sum_{j=1}^{k+1} t_j x_j$; $t_1, \dots, t_{k+1} \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{k+1} t_j = 1$.

Si algún t_j con $1 \leq j \leq k$ es cero, entonces $p \in C(x_1, \overset{\hat{}}{\dots}, x_{k+1}) \subset$ excluyendo x_j
k puntos

$\subset P(x_1, \overset{\hat{}}{\dots}, x_{k+1}) \subset P(x_1, \dots, x_{k+1})$

H.I. excluyendo x_j



$p = \sum_{j=1}^{k+1} t_j x_j$ y algún t_{j_0} con $1 \le j_0 \le k$ es >0

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} t_j \ge t_{j_0} > 0$

$$p = \underbrace{\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{k} t_j\right)}^{1-t_{k+1}} \sum_{\ell=1}^{k} \underbrace{\frac{t_\ell}{\sum_{j=1}^{k} t_j}}_{=t'_\ell} x_j}_{:= r \in C(x_1,\dots,x_k) \subset P(x_1,\dots,x_k) \subset P(x_1,\dots,x_{k+1})} + t_{k+1} x_{k+1}$$

$t'_1,\dots,t'_k \ge 0$ y $\sum_{\ell=1}^{k} t'_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{t_\ell}{\sum_{j=1}^{k} t_j} =$

$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} t_j} \sum_{\ell=1}^{k} t_\ell' = 1$

$$p = (1-t_{k+1}) r + t_{k+1} x_k \in P(x_1,\dots,x_{k+1})$$

c) Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con Ω convexo. Entonces dados $x_1,\dots,x_k \in \Omega$ y $t_1,\dots,t_k \ge 0$ con $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$,

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} t_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{k} t_j \cdot f(x_j) \qquad (*)$$

Para $k=2$, definición de convexidad.

Por Ⓐ, si $\{x_1,\dots,x_k\} \subset \Omega$ y Ω es convexo $\Rightarrow$ $C(x_1,\dots,x_k)$ y si $p = \sum_{j=1}^{k} t_j x_j$ con $t_1,\dots,t_k \ge 0$, $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$, $p \in \Omega$

Inducción en k: La afirmación $(*)$ es cierta si $k=2$.

Si $p = \sum_{j=1}^{k+1} t_j x_j$ con $t_{k+1} = 0$, $p = \sum_{j=1}^{k} t_j x_j$ y usando la H.I.

$f(p) \le \sum_{j=1}^{k} t_j f(x_j) = \sum_{j=1}^{k+1} t_j f(x_j)$. Si $t_{k+1} = 1 \Rightarrow t_1,\dots,t_k = 0$

$\Rightarrow p = x_{k+1}$ y de nuevo $f(p) = f(x_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} t_j f(x_j)$

• Si $0 < t_{k+1} < 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} t_j = 1 - t_{k+1} > 0$

$$p = \left(\sum_{j=1}^{k} t_j\right) \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} \frac{t_\ell}{\sum_{j=1}^{k} t_j} x_j}_{:= r} + t_{k+1} x_{k+1}$$

$r \in C(x_1, \dots, x_k)$

$$f(p) \leq \left(\sum_{j=1}^{k} t_j\right) f(r) + t_{k+1} f(x_{k+1}) \qquad \text{(por el caso } k=2\text{)}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{k} t_j\right) \sum_{\ell=1}^{k} \frac{t_\ell}{\sum_{j=1}^{k} t_j} f(x_\ell) + t_{k+1} f(x_{k+1}) \qquad \text{(paso } k \text{ de inducción)}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} t_\ell f(x_\ell) + t_{k+1} f(x_{k+1}) = \sum_{\ell=1}^{k+1} t_\ell f(x_\ell) \qquad \blacksquare$$

12. (Guijarro)

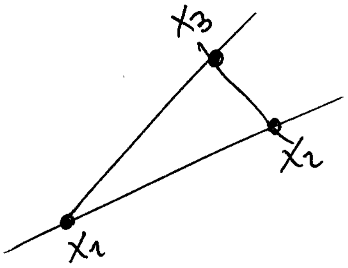
$\mathbb{R}^n$ Un punto x es combinación convexa de los puntos $x_1, \dots, x_m$ cuando $\exists t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ tales que $x = t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m$ con $t_j \geq 0$ $\forall j = 1, \dots, m$ y $t_1 + \cdots + t_m = 1$

$n=1$ $\quad \mathbb{R}$ $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = t_1 x_1 + t_2 x_2 \\ t_1, t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$$

$0 \leq t_2 = (1 - t_1) \Rightarrow t_1 < 1$

$x = t_1 x_1 + (1 - t_1) x_2 \qquad 0 \leq t_1, t_2 \leq 1$



a) $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ no alineados

$T = \Delta(x_1, x_2, x_3)$ (vértices)

Demostrar que todo $x \in \Delta$ es combinación convexa de x_1, x_2 y x_3.

Sol: $\overrightarrow{x_1 x_2}$ y $\overrightarrow{x_1 x_3}$ son linealmente independientes porque x_1, x_2, x_3 no están alineados.

Cualquier $x \in \mathbb{R}^2$, $x = x_1 + \lambda_2 \overrightarrow{x_1 x_2} + \lambda_3 \overrightarrow{x_1 x_3}$ $\quad \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Si $x \in$ segmento entre x_2 y x_3, $x = x_2 + \mu \overrightarrow{x_3 x_2}$ $\quad 0 \leq \mu \leq 1$

$\Rightarrow x = x_2 + \mu(x_3 - x_2) = (1-\mu) x_2 + \lambda x_3 \Rightarrow$

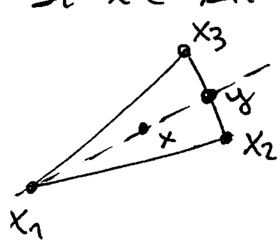
$\Rightarrow x = \lambda x_2 + (1-\lambda) x_3 = \underbrace{0}_{\lambda_1} . x_1 + \underbrace{\lambda}_{\lambda_2} x_2 + \underbrace{(1-\lambda)}_{\lambda_3} x_3$

con $\lambda \in [0,1]$

$\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 = (1-\lambda) \geq 0$ $\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda + 1 - \lambda = 1$

$\lambda_1 = 0 \geq 0$,

Si $x \in \Delta(x_1, x_2, x_3)$



La recta por x_1 y x corta al segmento $\overrightarrow{x_2 x_3}$ en un punto y. Como x está en el segmento $\overrightarrow{x_1 y}$

$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y$, $0 \leq \lambda_1$ $\quad 0 \leq \lambda_2$ $\quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$\Rightarrow x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 (\mu x_2 + (1-\mu) x_3) = \lambda_1 x_1 + (\lambda_2 \mu) x_2 + \lambda_2 (1-\mu) x_3$

$\Rightarrow t_1 = \lambda_1 \ , \ t_2 = \lambda_2 \mu \ , \ t_3 = \lambda_2 (1-\mu)$

Vamos a ver si t_i cumple las condiciones:

$t_1 = \lambda_1 \geq 0$

$t_2 = \lambda_2 \mu \geq 0 \quad (\lambda_2 \geq 0, \mu \geq 0)$

$t_3 = \lambda_2 (1-\mu) \qquad \lambda_2 \geq 0 \qquad 1-\mu \geq 0$ porque $\mu \leq 1$

$\Rightarrow t_1, t_2, t_3 \geq 0$

Queda ver que suman 1:

$t_1 + t_2 + t_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \mu + \lambda_2 (1-\mu) = \lambda_1 + \lambda_2 \mu + \lambda_2 - \lambda_2 \mu =$

$= \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ porque x estaba en el segmento $\overrightarrow{x_1 y}$.

b)

$x = t_1 x_1 + (t_2 x_2 + \cdots + t_m x_m) = t_1 x_1 + (1-t_1) \underbrace{\left(\frac{t_2}{1-t_1} x_2 + \cdots + \frac{t_m}{1-t_1} x_m \right)}_{z}$; x es combinación convexa de x_1 y z.

$x = t_1 x_1 + (1-t_1) z \qquad t_1 \geq 0$

$1 - t_1 \geq 0$? $\quad t_i \geq 0 \ , \ t_1 + \cdots + t_m = 1 \geq t_1 + 0 = t_1 \Rightarrow 1 - t_1 \geq 0$

Vamos a ver que z es combinación convexa de $x_2, \ldots, x_m$:

$z = \frac{t_2}{1-t_1} x_2 + \cdots + \frac{t_m}{1-t_1} x_m = s_2 x_2 + \cdots + s_m x_m \qquad s_i = \frac{t_i}{1-t_1}$

$t_i \geq 0 , \ 1 - t_i \geq 0$ porque $t_i \leq 1$

$s_i \geq 0 \qquad s_i = \frac{t_i}{1-t_1} \geq 0$

$\sum_{k=2}^{m} s_k = \sum_{k=2}^{m} \frac{t_k}{1-t_1} = \frac{1}{1-t_1} \sum_{k=2}^{m} t_k = \frac{1}{1-t_1} (1 - t_1) = 1$

$t_1 + \cdots + t_m = 1$

c) $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

f convexa $\Longleftrightarrow$ $\forall x$ combinación convexa se tiene que

$f(x) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_m f(x_m)$

$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad 0 \leq t \leq 1$

Sol:

$\boxed{\Leftarrow}$ Obvia. Conexo es la desigualdad dada con $m=2$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $x = t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m = s_1 x_1 + (1-s_1)\underbrace{z}_{\text{comb. convexa de } x_2, \ldots, x_m}$

$f(x) = f(s_1 x_1 + (1-s_1) z) \leq s_1 f(x) + (1-s_1) f(z)$ por convexidad

Usamos inducción en m.

$m=1$ obvio

$m=2$ de f convexa

Supongamos la desigualdad verdadera para $m-1$

$f(x) \leq t_1 f(x_1) + (1-t_1) f(z) = t_1 f(x_1) + (1-t_1) f\Big(\underbrace{\frac{t_2}{1-t_1} x_2 + \cdots + \frac{t_m}{1-t_1} x_m}_{m-1 \text{ puntos } x_2, \ldots, x_m}\Big) =$

$\leq t_1 f(x_1) + (1-t_1)\left(\frac{t_2}{1-t_1} f(x_2) + \cdots + \frac{t_m}{1-t_1} f(x_m)\right) =$

$= t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_m f(x_m)$ ∎

d) $V = \{x_1, \ldots x_m\}$, f convexa. $M = \max\{f(x_i),\ i = 1, \ldots, m\}$

$K = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ comb. convexa de } V\}$

d.1) K convexo

d.2) $f(x) \leq M \quad \forall x \in K$

Sol. d.2

$x = t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m \quad t_i \geq 0$ y $\sum_i t_i = 1$

$f(x) = f(t_1 x_1 + \cdots + t_m x_m) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_m f(x_m) \leq$

$\leq t_1 M + \cdots + t_m M = M(t_1 + \cdots + t_m) = M \cdot 1 = M$

Sol d.1

$$x = \sum t_i x_i \qquad t_i \geq 0 \qquad \sum t_i = 1$$

$$y = \sum s_i x_i \qquad s_i \geq 0 \qquad \sum s_i = 1$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$¿\,tx + (1-t)y \in K\,?$$

$$\overset{\shortparallel}{t \sum t_i x_i} + (1-t)\sum s_i x_i = \sum_i \underbrace{(t\,t_i + (1-t)s_i)}_{\lambda_i} x_i$$

1) $\lambda_i \geq 0 \qquad t \geq 0,\quad t_i, s_i \geq 0 \qquad 1-t \geq 0$

2) $\sum \lambda_i = \sum (t\,t_i + (1-t)s_i) = t\sum t_i + (1-t)\sum s_i = t + 1 - t = 1$

$\boxed{44.}$ f C^∞ en un entorno de $0 \in \mathbb{R}^n$. Ver que $\exists$ funciones g_i, g_{ij} de clase C^∞ cerca de 0 tal que

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n g_i(x)\,x_i$$

$$f(x) - f(0) - (df)_0(x) = \sum_{j,i=1}^n g_{ij}(x)\,x_i x_j \quad \text{en todo } x \in V$$

(1) Sea $g(t) = f(tx)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
t \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g(t)"'] & tx \arrow[r, mapsto] & f(tx)
\end{tikzcd}$$

Derivo con respecto a t:

$$g'(t) = (df)_{tx}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\cdot x_i$$

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\cdot x_i\,dt = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt}_{g_i(x)}$$

Sea $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt$

$$g(1) = f(1.x) = f(x)$$
$$g(0) = f(0.x) = f(0)$$
$$\Longrightarrow f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \underbrace{g_i(x)}_{C^\infty \text{ en } x_i}$$

(2)

$$g_i(0) = \int_0^1 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)}_{\text{no depende de } t}\, dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

Del apartado 1: $g_i(x) - g_i(0) \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)\cdot x_j$ para cada $i = 1,\dots,n$

de (1) $\Rightarrow$ $f(x) - f(0) = \sum_i x_i\, g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(g_i(0) + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)\, x_j \right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\, g_i(0) + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, x_i x_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)}_{(df_0)(x)} + \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\, g_{ij}(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) - df_0(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\, g_{ij}(x)$$

$\boxed{43.}$ A a) $a, b \in \mathbb{R}^2$ $\quad 2ab \leq a^2 + b^2$

$2ab \leq a^2 + b^2 \iff a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0$ ✓

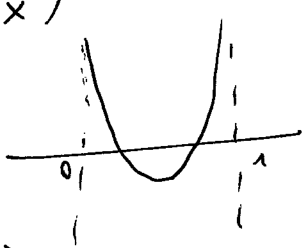
b) $a, b \in \mathbb{R}^2$ $\quad 4ab \leq (a+b)^2$

$4ab \leq (a+b)^2 \iff 4ab \leq a^2 + b^2 - 2ab \iff 2ab \leq a^2 + b^2$ demostrado ap. 1 ✓

c) $a > 0 \quad b > 0 \quad a + b = 1 \qquad \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left((1-x) + \frac{1}{1-x}\right)^2$$

Minimizo en $(0,1)$



$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

$$f'(x) = 2\left[x - \frac{1}{x^3} - (1-x) + \frac{1}{(1-x)^3}\right] = 0 \qquad f'(1/2) = 0$$

$$f''(x) = 2\left(1 + \frac{3}{x^4} + 1 + \frac{3}{(1-x)^4}\right) \geq 0$$

$x = 1/2$ hay mínimo

$$f(1/2) = \left(\frac{5}{25}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$\Rightarrow$ Mín. local es global

(B) $$f(x) = \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_1\, x_2 - \dfrac{\qquad}{(x_1^4+x_2^2)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

b.1) Demostrar f continua en $\mathbb{R}^2$.

En el $(0,0)$: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x_1^6 x_2^2}{(x_1^4+x_2^2)^2} = 0$

justificación

$4ab \leq (a+b)^2$

$$0 \leq \frac{4x_1^6 x_2^2}{(x_1^4+x_2^2)^2} = \frac{x_1^2\, 4x_1^4 x_2^2}{(x_1^4+x_2^2)^2} \leq \frac{x_1^2 (x_1^4+x_2^2)^2}{(x_1^4+x_2^2)^2} = x_1^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$$

b.2) f (recta por 0) : mínimo local estricto en 0.

(1) $y = \lambda x$ (2) $x = 0$

(1) $$g(x) = f(x, \lambda x) = x^2 + \lambda^2 x^2 - 2\lambda x^3 - \frac{4\lambda^2 x^8}{(x^4+\lambda^2 x^2)^2} =$$

$$= (1+\lambda^2)x^2 - 2\lambda x^3 - 4\lambda^2 \frac{x^4}{(x^2+\lambda^2)^2}$$

$g'(0) = 0$, $g''(0) = 1 + \lambda^2 > 0 \Rightarrow 0$ mínimo local

(2) $g(y) = f(0,y) = y^2$ mínimo local en $y=0$

b.3) $(0,0)$ no es mínimo local de f

$f(0,0) = 0$

Necesito puntos tan cerca de $(0,0)$ como quiera donde $f(x_1,x_2) <$ (

$$f(x,x^2) = x^2 + x^4 - 2x^4 - \frac{4x^6 x^4}{(x^4+x^4)^2} = x^2 - x^4 - \frac{4}{4}\cdot\frac{x^{10}}{x^8} = -x$$

$\boxed{45.}$ $f(x,y) = (\cosh x \cos y \,,\, \sinh x \sin y)$

definida en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

1. Ver que f es local pero no globalmente invertible en Ω. Calcular $Jf(x,y)$.

No es globalmente invertible porque no es inyectiva:

$$f(x, y+2\pi) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Localmente invertible:
($\forall (x,y) \in \Omega$, $\exists U$ de (x_0,y_0) tal que $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ es invertible)

Uso el TF Inversa: f es localmente en (x_0,y_0) sii $Jf(x_0,y_0) \neq 0$.

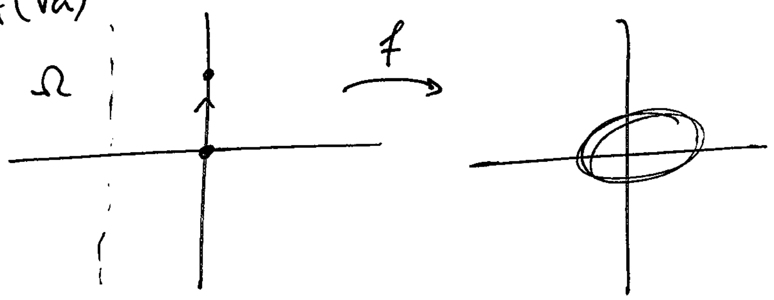
$$Jf(x,y) = \det \begin{pmatrix} \operatorname{senh} x . \cos y & -\cosh x . \operatorname{sen} y \\ \cosh x \operatorname{sen} y & \operatorname{senh} x . \cos y \end{pmatrix} = \operatorname{senh}^2 x . \cos^2 y + \underbrace{\cosh^2 x}_{(\operatorname{senh}^2 x + 1)} \operatorname{sen}^2 y =$$

$$= \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y \neq 0$$ ya que en $\Omega = \{x > 0\}$ $\operatorname{senh} x > 0$

2. $V_a = \{(a,y) : y \in \mathbb{R}\}$ $a > 0$

$H_b = \{(x,b) , x > 0\}$ $b > 0$

$f(V_a)$



$f(V_a)$

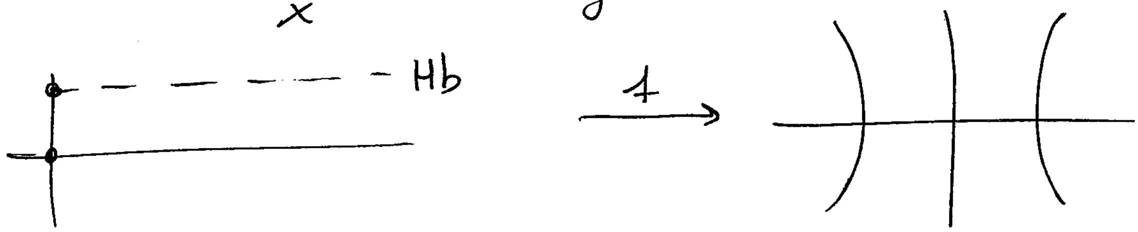
$f(a,y) = (\underbrace{\cosh a \cos y}_{x} \,,\, \underbrace{\operatorname{senh} a . \operatorname{sen} y}_{y})$

$$\frac{x^2}{(\cosh a)^2} + \frac{y^2}{(\operatorname{senh} a)^2} = 1$$

Elipses de semiejes $\cosh a$, $\operatorname{senh} a$

7 (Hb)

$$f(x,b) = (\underbrace{\cosh x \cdot \operatorname{sen} b}_{\bar{x}},\ \underbrace{\operatorname{senh} x \cdot \cos b}_{\bar{y}})$$



$$\left(\frac{x}{\operatorname{sen} b}\right)^2 - \left(\frac{y}{\cos b}\right)^2 = 1$$

3. Demostrar que f es inyectiva en:

$$\Omega_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < 2\pi\}$$

Supongamos $f(x_0,y_0) = f(x_1,y_1)$ $\quad x_0, x_1 > 0 \quad y_0, y_1 \in (0, 2\pi)$

$$f(x_0,y_0) = f(x_1,y_1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cosh x_0 \cdot \cos y_0 = \cosh x_1 \cdot \cos y_1 \\ \operatorname{senh} x_0 \cdot \operatorname{sen} y_0 = \operatorname{senh} x_1 \cdot \operatorname{sen} y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\begin{array}{l} x_0 = x_1 \\ y_0 = y_1 \end{array}$ viendo 1º que $\begin{array}{l} \cos y_0 = \cos y_1 \\ \operatorname{sen} y_0 = \operatorname{sen} y_1 \end{array}$ y usando $y_0, y_1 \in (0,$

$= \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y \neq 0$ ya que en $\Omega = \{x > 0\}$ $\operatorname{senh} x > 0$

Vamos a usar que: $\left\{\begin{array}{l} \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \\ \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{array}\right.$

$$\cosh^2 x_0 \cosh^2 y_0 = \cosh^2 x_1 \cosh^2 y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{senh}^2 x_0 \cos^2 y_0 + \cos^2 y_0 = \operatorname{senh}^2 x_1 \cos^2 y_1 + \cos^2 y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{senh}^2 x_0 \operatorname{sen}^2 y_0}{\operatorname{senh}^2 x_0 + \cos^2 y_0} = \frac{\operatorname{senh}^2 x_1 \operatorname{sen}^2 y_1}{\operatorname{senh}^2 x_1 + \cos^2 y_1}$$

43.| (otra forma)

2) $a, b \geq 0 \qquad a+b=1 \qquad \Longrightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

$f(x) = x^2$ convexa

$$f\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right) \leq \frac{1}{2} f\left(a+\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2} f\left(b+\frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$$

?

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq 2\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$$

Voy a ver que $\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geq 25$, e.d., $\frac{1}{ab} \geq 4$,

e.d., $4ab \leq 1 = (a+b^2)$ que se ha demostrado en el ap. 1.