Teoría de la integral y de la medida
Hoja n^0 3 *(Funciones medibles)* **SOLUCIONES**

1.- Sea $\mathcal{A}$ la σ álgebra formada por $\{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, \infty)\}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0] \\ 1, & \text{si} \quad x \in (0, 1] \\ 2, & \text{si} \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$

¿Es f medible? **SOL**: NO, $f^{-1}\{1\} = (0, 1] \notin \mathcal{A}$.
¿Cómo son en general las funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$? **SOL**: Constantes en $(-\infty, 0]$ y en $(0, \infty)$.

2.- Para funciones $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
a) $| f |$ medible $\Rightarrow f$ medible. **SOL**: NO, si D es un conjunto no medible entonces $F = \chi_D - \chi_{D^c}$ no es medible pero $|F| = 1$ sí lo es.
b) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible. **SOL**: NO; basta tomar f_1 no medible y $f_2 = -f_1$.
c) $f_1.f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible **SOL**: NO; tomamos $f_1 = f_2 = F$, con F como en a)
d) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible **SOL**: NO
d) $f_1 - f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible **SOL**: NO

3.- Sea $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$ una función medible no-negativa, μ una medida σ -finita en $\mathcal{A}$. Probar que $f(x) = \lim t_n(x)$ siendo $\{t_n\}_n$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas, tales que t_n toma valores distintos de cero solamente en un conjunto de medida finita. Sugerencia: Construir $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \mathcal{B}_n \dots \quad \mu(\mathcal{B}_n\} < \infty$, tomar $t_n = s_n \chi_{\mathcal{B}n}$, siendo s_n una sucesión creciente de funciones simples no-negativas con límite f.

4.- Probar que si $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ verifica que $f^{-1}((r, \infty])$ es medible para todo $r \in \mathbf{Q}$, entonces f es medible. (El resultado es cierto en general si $r \in A$, con A denso en $\mathbb{R}$).

SOL: Basta ver que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $f^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{\{r \in \mathbb{Q} :\, r > a\}} f^{-1}((r, \infty])$ (unión numerable de medibles)

5.- Si $f_n : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $n = 1, 2, \dots$, son medibles, probar que el conjunto $A = \{x \in X : \text{existe } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$ es un elemento de $\mathcal{A}$. **SOL**: visto en clase. Sabemos que tanto $g(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ como $h(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ son medibles. Ahora, es fácil ver que A es el conjunto donde $g(x) = h(x)$, es decir, $A = (g - h)^{-1}(0)$ y por tanto es medible.

6.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean X_1 X_2 dos **variables aleatorias** sobre él, (i.e., dos funciones medibles de $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$) y sean F_{X_1} , F_{X_2} las **funciones de distribución** de las medidas de probabilidad inducidas por X_1, X_2 respectivamente ($F_{X_j}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \le x\}$, j=1,2). Probar que si $P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\} = 1$ entonces $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

SOL: Para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, los conjuntos $A_j = \{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \le x\}, j = 1, 2$ cumplen $P(A_1 \setminus A_2) = 0$ y $P(A_2 \setminus A_1) = 0$

7.- Consideramos el espacio de probabilidad $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), P)$ siendo $P(n) = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Definimos $X : \mathbf{N} \to \{0, 1, \ldots k-1\}$ mediante $X(n) =$ resto de n (modulo k), ($k \in \mathbf{N}$, fijo). Sea P^* la probabilidad inducida por X (ver ejercicio 14, Hoja 2) . Calcular $P^*(r)$, $0 \le r \le k-1$.

SOL: Se tiene, por definición,

$$P^*(r) = P(X^{-1}\{r\}) = P(\{r + nk : n = 0, 1, 2, \ldots\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r+nk}} = \frac{2^{-r}}{1 - 2^{-k}}, \quad \text{si } r \neq 0$$

$$P^*(0) = P(X^{-1}\{0\}) = P(\{nk : n = 1, 2, \ldots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nk}} = \frac{2^{-k}}{1 - 2^{-k}}$$

8.- Se considera el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P)$, donde $P(A) = \int_A f(x)dx$ viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$

Sea $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ definida mediante

$$X(x) = \begin{cases} -2 \log x, & \text{si} \quad x > 0 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Hallar F_X, la función de distribución de la probabilidad inducida por X.

SOL: Se tiene, por definición,

$$F_X(y) = P(\{x \in \mathbb{R} : X(x) \le y\}) = P(\{x \in [0,1] : -2\log x \le y\}) = P(\{x \in [0,1] : x \ge e^{-y/2}\}).$$

Ahora bien, se tiene

$$\{x \in [0,1] : x \ge e^{-y/2}\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si} \quad y < 0 \\ [e^{-y/2}, 1], & \text{si} \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$F_X(y) = P(\{x \in [0,1] : x \ge e^{-y/2}\}) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad y < 0 \\ \displaystyle\int_{e^{-y/2}}^{1} 1\, dx = 1 - e^{-y/2}, & \text{si} \quad y \ge 0. \end{cases}$$