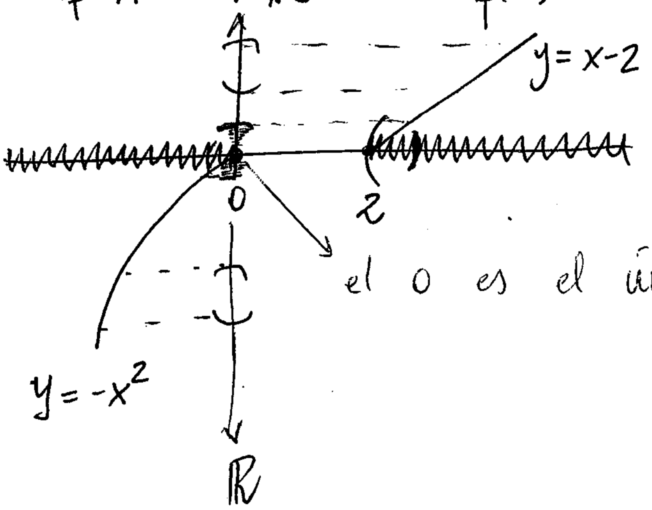
HOJA 3

$\boxed{7.}$ Visto ej 8 hoja 2.

$\boxed{8.}$ $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



el 0 es el único punto problemático

① A con top. del orden $\Rightarrow$ f cont. + f homeom. :

Sea $g = f^{-1}$, $g: \mathbb{R} \longrightarrow A$

$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} x+2 & x > 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$

¿Es g continua?

Punto problemático: el cero

1.| La primera parte es un teorema visto en teoría.

Demostrar que si $X \xrightarrow{f} Y$ continua, Y es T_2 $\Longrightarrow$

$\Rightarrow K = \{(x_1,x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$.

Sea $G := \complement K = \{(x_1,x_2) \mid f(x_1) \neq f(x_2)\}$ ¿Es G abierto?

Sea $(x_1,x_2) \in G$. Entonces si $y_1 = f(x_1)$, $y = f(x_2)$, $y_1 \neq y_2 \overset{Y \text{ es } T_2}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow \exists \Omega_1 \in \mathcal{U}_{y_1}$ abierto, $\exists \Omega_2 \in \mathcal{U}_{y_2}$ abierto tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$

Pongamos $W_1 = f^{-1}(\Omega_1)$, $W_2 = f^{-1}(\Omega_2)$ abiertos porque f es continua. Además $(x_1,x_2) \in W_1 \times W_2$, ¿$W_1 \times W_2 \subset G$?

Si es que sí, terminamos

Sea $a = (a_1,a_2) \in W_1 \times W_2$ y supongamos que $a \notin G \Longrightarrow$

$f(a_1) = f(a_2) = z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ (porque $a_1 \in W_1 \Rightarrow f(a_1) \in \Omega_1$ $\wedge$ $a_2 \in W_2 \Longrightarrow f(a_2) \in \Omega_2$ como $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$)

Pero $\Omega_1 \cap \Omega_2 \overset{\text{↓}}{=} \emptyset$ (contradicción)

$\Longrightarrow W_1 \times W_2 \subset G$ ∎

2.| a) Pregunta si es cierto el recíproco del ejercicio 1.

$$(\mathbb{R}, \tau_u) \xrightarrow[f \text{ es cont.}]{f = id_{\mathbb{R}}} (\mathbb{R}, \tau_{cofinita})$$

Sea $K = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \underset{id_{\mathbb{R}}(x_1)}{\overset{\shortparallel}{x_1}} = \underset{id_{\mathbb{R}}(x_2)}{\overset{\shortparallel}{x_2}}\}$ cerrado en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_\times)$

Pero $(\mathbb{R}, \tau_{cofinita})$ no es Hausdorff (contraejemplo)

b) $f: X \to Y$ abierta y sobre tal que $K = \{(x_1,x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X \Longrightarrow Y$ es T_2. → esto es porque f es sobre

$y_1 \neq y_2$ en Y. [Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$]. Luego $(x_1,x_2) \in \complement K$ que es ABIERTO $\Longrightarrow \exists \Omega_1 \in \mathcal{U}_{x_1}$ abto., $\exists \Omega_2 \in \mathcal{U}_{x_2}$ abierto, $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \complement K$.

Definimos $W_1 = f(\Omega_1)$, $W_2 = f(\Omega_2)$ abiertos, por ser f abierta $\Rightarrow$
$\Rightarrow y_1 \in W_1$, $y_2 \in W_2$, nos preguntamos si ¿ $W_1 \cap W_2 = \emptyset$?

Si sí $\Rightarrow$ demostrado.

Supongamos que existe $y \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \begin{cases} y \in W_1 \Rightarrow y = f(a_1) \text{ con } a_1 \in \Omega_1 \\ y \in W_2 \Rightarrow y = f(a_2) \text{ con } a_2 \in \Omega_2 \end{cases}$

$\Rightarrow (a_1, a_2) \in (\Omega_1 \times \Omega_2)$ pero también $(a_1, a_2) \in R$ porque $y = f(a_1) = f(a_2)$
y eso es una contradicción porque $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \complement R$. ■

$\boxed{3.}$ $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ cont. Y es $T_2 \Rightarrow \{x \mid f(x) = g(x)\} \subset X$ cerrado

$G := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. ¿ G abierto ?

Sea $x_0 \in G$, entonces $f(x_0) \neq g(x_0) \Rightarrow \exists\, \Omega_1 \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$, $\Omega_2 \in \mathcal{U}_{g(x_0)}$ abtos., $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. (*) Entonces, por ser f continua, $U_1 = f^{-1}(\Omega_1)$ es abto. en X, y además $x_0 \in U_1$.
Por ser g continua, $U_2 = g^{-1}(\Omega_2)$ es abto. en X, y además $x_0 \in U_2$.

Por lo tanto $x_0 \in U_1 \cap U_2$ abierto que contiene a x_0.

¿ $U_1 \cap U_2 \subset G$? Sea $\tilde{x} \in U_1 \cap U_2$, supongamos que $f(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) = z$

Como $z = f(\tilde{x}) \Rightarrow z \in \Omega_1$
Como $z = g(\tilde{x}) \Rightarrow z \in \Omega_2$
$\Rightarrow z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ pero esto es una contradicción con (*)

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \subset G$. ■

$\boxed{4.}$ $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ continuas, Y es T_2. Supongamos que existe un conjunto denso D en X tal que $f|_D \underset{(*)}{=} g|_D \Rightarrow f = g$.

▸ 1ª FORMA: Sabemos que bajo las hipótesis dadas

$K = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ cerrado en X (ejercicio 3)

$$\left.\begin{array}{l} D \subset K \text{ por } (*) \Longrightarrow \underbrace{\overline{D}}_{\substack{\| \\ X}} \subset \overline{K} \underset{\uparrow}{=} K \\ \qquad\qquad \text{D denso} \qquad\qquad \text{K cerrado} \end{array}\right\} \Rightarrow K = X \Rightarrow f = g \quad \forall x \in X$$

∎

▸ 2ª FORMA: $x_0 \in X$, $x_0 \notin D$, ¿esto implica que $f(x_0) = g(x_0)$?

Sup. $f(x_0) \neq g(x_0)$, $\Omega_1 \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$, $\Omega_2 \in \mathcal{U}_{g(x_0)}$ abtos.

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} U_1 = f^{-1}(\Omega_1) \in \mathcal{U}_{x_0} \text{ abto.} \\ U_2 = g^{-1}(\Omega_2) \in \mathcal{U}_{x_0} \text{ abto.} \end{array}\right\} U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_{x_0} \ \underline{\text{abto.}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (U_1 \cap U_2) \cap D \neq \emptyset$ (los abiertos cortan a los densos)

Sea $a \in (U_1 \cap U_2) \cap D \Rightarrow \omega = \underset{\substack{\cap \\ \Omega_1}}{f(a)} = \underset{\substack{\cap \\ \Omega_2}}{g(a)}$ (porque $a \in D$)

Contradicción con que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

∎

$\boxed{5.}$ a) $(-n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow ?$ $\quad (\mathbb{R}, \tau_{\leftarrow})$, $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$

(no es T_2)

$x_n \longrightarrow \hat{x}$

$\forall \Omega \in \mathcal{U}_{\hat{x}}$, $\exists n_0$ tal que $x_n \in \Omega$ $\forall n \geq n_0$.

b) $\boxed{\left.\begin{array}{l} x_n \longrightarrow a \\ x_n \longrightarrow b \end{array}\right\}, \text{ en } (X, \tau) \text{ Hausdorff} \Longrightarrow a = b}$

Si $a \neq b \Longrightarrow \exists \Omega_a \in \mathcal{U}_a$, abierto, $\Omega_b \in \mathcal{U}_b$ abierto, $\Omega_a \cap \Omega_b = \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} \exists n_a \mid n \geq n_a,\ x_n \in \Omega_a \\ \exists n_b \mid n \geq n_b,\ x_n \in \Omega_b \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \hat{n} = \max\{n_a, n_b\},\ n \geq \hat{n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_n \in \Omega_a \cap \Omega_b = \emptyset$ abierto.

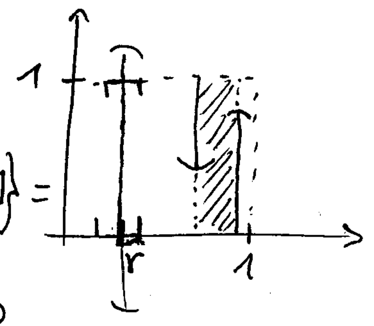
contradicción $\Rightarrow \underline{\underline{a = b}}$ ∎

c) La propiedad ~~que~~ de separación que tiene es T_1:

$T_1 \equiv a \neq b, (\exists \Omega_a \in \mathcal{U}_a, b \notin \Omega_a) \vee (\exists \Omega_b \in \mathcal{U}_b, a \notin \Omega_b)$

9. $(X=[0,1], \tau_u)$, $(Y=[0,1]\times[0,1], \tau_{lex})$

a) $f(t)=(t,t)$



$$f^{-1}\Big(\underbrace{\{r\}\times[0,1]}_{\text{abierto en } Y}\Big) = \{t\in[0,1] \mid (t,t)\in\{r\}\times[0,1]\} =$$

$= \{r\}$ NO es abierto $\Rightarrow$ f no es continua

b) $g(t)=\left(\frac{1}{2}, \frac{2t+1}{4}\right)$

$$g^{-1}(\{r\}\times[0,1]) = \left\{t\in[0,1] \mid \left(\frac{1}{2},\frac{2t+1}{4}\right)\in\{r\}\times[0,1]\right\} = \begin{cases} \emptyset & r\neq \frac{1}{2} \\ [0,1] & r=\frac{1}{2}\end{cases}$$

abiertos en X

$\Rightarrow$ g continua

El truco "por si acaso": FÓRMULAS SIMÉTRICAS $Fr(A) = Fr(A^c)$

Demostrar que $Fr(A) = \emptyset \iff A$ cerrado y abierto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = A \cap (X \setminus A) = \emptyset$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset \Rightarrow A \cap X \setminus \mathring{A} = \emptyset =$

Observación

$\boxed{A \cap (X \setminus K) = \emptyset \Rightarrow A \subset K}$

$\Rightarrow A \subset \mathring{A} \Rightarrow A = \mathring{A}$ (e.d. abto)

Ahora nos acordamos que $Fr(A) = Fr(A^c) = Fr(X \setminus A)$

Aplicando lo mismo a $X \setminus A$ llegamos a que $X \setminus A$ es abierto

$\Rightarrow A$ cerrado.

$\boxed{11.}$ $\left.\begin{matrix}(X, \tau_1) \\ (Y, \tau_2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$

$\tau = \tau_1 \times \tau_2$ $\quad \mathcal{B}$ base para τ

$\Rightarrow$ $Pr_1(\mathcal{B}) = \{Pr_1(B) : B \in \mathcal{B}\}$ base para τ_1

$Pr_2(\mathcal{B}) = \{Pr_2(B) : B \in \mathcal{B}\}$ base para τ_2

Basta demostrar que $Pr_1(\mathcal{B})$ es base para τ_1 pues

$(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2) \simeq (Y \times X, \tau_2 \times \tau_1)$ (aprovechamos los homeomorfismos)

① $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} Pr_1(B)$ ② $A_1, A_2 \in Pr_1(\mathcal{B}) \Rightarrow \forall x \in A_1 \cap A_2$, $\exists A_3 \in Pr_1(\mathcal{B})$, $x \in A_3$
$A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

① $X \times Y = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \Rightarrow X = Pr_1(X \times Y) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} Pr_1(B)$

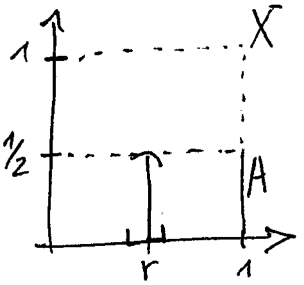
② $A_1 = Pr_1(B_1)$, $B_1 \in \mathcal{B}$; $A_2 = Pr_1(B_2)$, $B_2 \in \mathcal{B}$

$x = Pr_1(b_1) = Pr_1(b_2)$, $\underset{(x, c_1)}{\overset{}{b_1}} \in B_1$, $\underset{(x, c_2)}{b_2} \in B_2$ $\qquad A_3 = A_1 \cap A_2$

Falta argumentar por qué A_3 es $Pr_1(B_3)$ para algún $B_3 \in \mathcal{B}$.

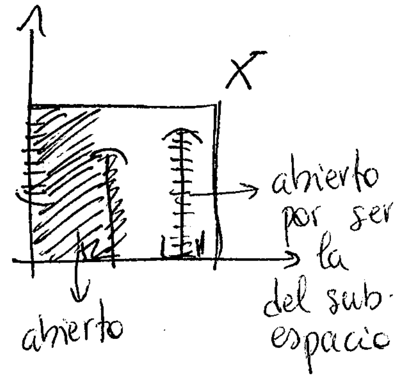
$X = [0,1] \times [0,1] \subset (\mathbb{R}^2, <_{lex})$

a) Con la $\underbrace{\text{topología asociada al orden}}_{\tau_X := (\tau_{<_{lex}})_X}$, $A = [0,1] \times [0, 1/2) \subset X$



$$A = \bigcup_{r \in [0,1]} \{r\} \times [0, 1/2) \Longrightarrow A \text{ abto.} \Longrightarrow A = \operatorname{int} A$$

$$\bar{A} = [0,1] \times [0, 1/2]$$

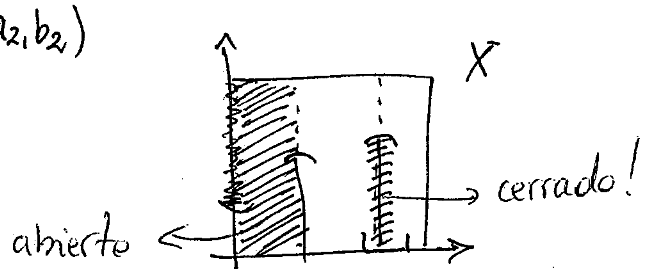


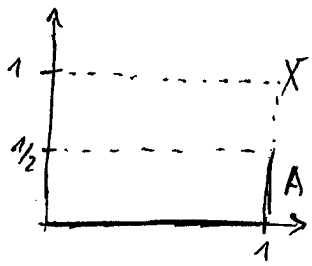
b) Con la $\underbrace{\text{topología asociada al orden } <_{lex} \text{ en } X}_{\equiv \prec \, = \, <_{lex}|_X}$, $A = [0,1] \times [0, 1/2) \subset X$

$(a_j, b_j) \in X$: $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 < a_2 \\ \text{ó} \\ a_1 = a_2 \Rightarrow b_1 < b_2 \end{cases}$

Topología asociada a $\prec$ en X:

$$\underset{\substack{\| \\ (a_1,b_1)}}{(P_1}, \underset{\substack{\| \\ (a_2,b_2)}}{P_2)} = \{(x_1, x_2) \in X \mid (a_1, b_1) < (x_1, x_2) < (a_2, b_2)\}$$





$\operatorname{int} A = \bigcup_{r \in [0,1]} \{r\} \times (0, 1/2) \subsetneq A$ (los puntos en rojo no están en el int)

$\bar{A} =$

18. $X = \mathbb{R}^2$

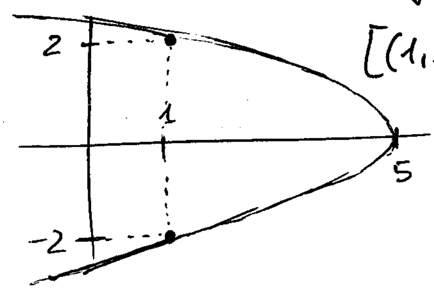
i) Relación de equivalencia: $(x_0, y_0) \equiv (x_1, y_1) \iff x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$
Identifica el esp. top. X^* con alguno conocido.

$$X^* = X/_{\equiv} = \{[(x_0,y_0)] : (x_0,y_0) \in X = \mathbb{R}^2\}$$

ejemplo

$\downarrow$

$[(1,2)]$



Observar $[(x_0,y_0)] \underset{\uparrow}{=} \{(x,y) : x + y^2 = r_0\}$

$r_0 = x_0 + y_0^2$

$$[(1,2)] = \{(x,y) : x + y^2 = 5\}$$

$\mathbb{R}^2/_{\equiv}$ Un representante de cada clase pueden ser los vértices

$$= \{[(r_0, 0)] : r_0 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^2/_{\equiv} \ni [(r_0,0)] \xrightarrow{f} r_0 \in \mathbb{R}$$ ¿Es f homeomorfismo?

- Paso 1: Vemos que está bien definida

$(r_0, 0) \sim (x,y)$ ¿ $f([(x,y)]) = f([(r_0,0)])$? claramente sí

- Paso 2: Vemos que f es continua

¿ $f^{-1}((a,b))$ es abto en $\mathbb{R}^2/_{\equiv}$? Sí (falta justificarlo con cuidado)

- Paso 3: Vemos que f es biyectiva y f^{-1} continua.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "h"] & \mathbb{R} \\ (x,y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "p\ \text{cociente}"'] & x+y^2 \\ \mathbb{R}^2/_{\equiv} \arrow[ur] & \\ {[(x,y)]} & \end{tikzcd}$$

Teorema

$\exists \tilde{h} : h = \tilde{h} \circ p$

Basta ver que h es continua y es cte. en cada fibra de p.

$f((a,b)) = \{ [(x,y)] : a < x+y^2 < b \}$
$\qquad\qquad\qquad\quad \parallel$
$\qquad\qquad\quad [(x+y^2, 0)]$

es abierto en $X^* = X/_{\equiv} \iff \{(x,y) : a < x+y^2 < b\}$ es abierto y saturado en $X = \mathbb{R}^2$. ✓

¿f^{-1} continua? Tomamos un abierto saturado de $\mathbb{R}^2/_{\equiv}$ y miramos su preimagen:

Ω abto. saturado en $\mathbb{R}^2$

$\overline{\Omega} = \{[(x,y)] : (x,y) \in \Omega\} \subset X^*$

$\uparrow$ abto. en X^*.

$f(\overline{\Omega}) = \{ r \in \mathbb{R} : [(r,0)] \in \overline{\Omega} \} = \{ r \in \mathbb{R} : (r,0) \in \underbrace{\Omega \cap \{y=0\}}_{\text{abto en } \mathbb{R}} \} =$

$= \Omega \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ abto.

porque es abto. en $\mathbb{R}^2$ intersecado con $\mathbb{R}$ ($\{y=0\}$)

ii) Repetir el apartado anterior para: $(x_0,y_0) \sim (x_1,y_1) \iff x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$

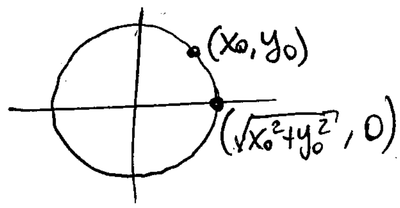
$(x_0,y_0) = (0,0) \implies [(0,0)] = \{(0,0)\}$

$[(x_0,y_0)] = \{(x,y) : x^2+y^2 = x_0^2+y_0^2\}$ $\qquad [(1,2)] = \{(x,y) : x^2+y^2 = 5\}$
$\quad\ \neq (0,0)$

$[(x_0,y_0)]$ = cirunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$

$X^* = \mathbb{R}^2/_{\sim} \longrightarrow [0,\infty)$

$[(x_0,y_0)] \longmapsto \sqrt{x_0^2+y_0^2}$



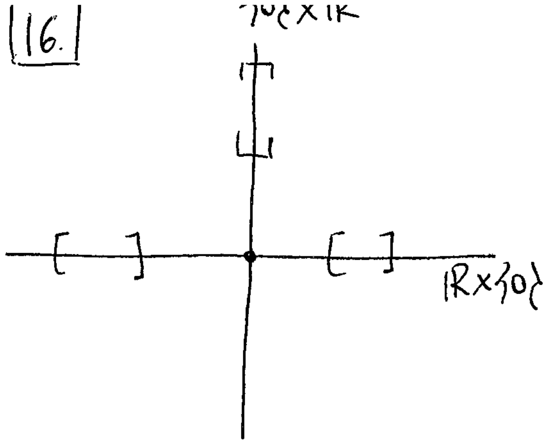
$f^{-1}((a,b)) = \{ [(x_0,y_0)] : a < \sqrt{x_0^2+y_0^2} < b \}$

$f^{-1}([0,\varepsilon)) = \{ [(x_0,y_0)] : \sqrt{x_0^2+y_0^2} < \varepsilon \}$

$f^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow X^*$

$r \longmapsto [(r,0)]$

16.



$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ni (x,y) \longmapsto x \in \mathbb{R}$

$X = \{0\}\times\mathbb{R} \cup \mathbb{R}\times\{0\}$

$g = P_1|_X : X \ni (a,b) \longrightarrow a \in \mathbb{R}$

a) ¿g no es abierta? $g(\{0\}\times(1,2)) = \{0\}$ no abierto en $\mathbb{R}$

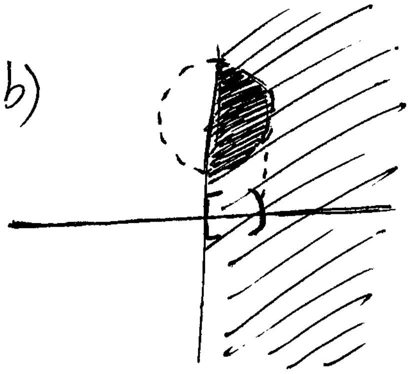
¿g cerrada? Si F es un cerrado de X

Si $(0,0)\in F \Rightarrow 0 \in P_1(F)$

Si F pertenece a $\{0\}\times\mathbb{R} \Rightarrow P_1(F) = P_1(F\cap(\mathbb{R}\times\{0\})) =$

$= P_1(\{(x,y)\in F \mid y=0\}) = \{x\in\mathbb{R} : (x,0)\in F\}$ cerrado en $\mathbb{R}$.

b)



$Y = (\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}\times\{0\}) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$h = P_1|_Y : Y \ni (a,b) \longrightarrow a \in \mathbb{R}$

¿h cerrada? No, basta ver los puntos $\{(x,\frac{1}{x}), x\neq 0\} \cap Y$.

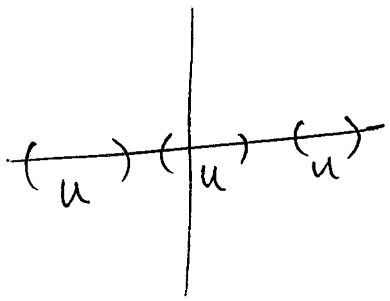
¿h abierta? No, mírese dibujo abierto con la topología relativa. $[\ )$ no abto. en $\mathbb{R}$.

h cociente: $h: Z_1 \longrightarrow Z_2$, h cociente $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [U$ abto. en $Z_2 \Leftrightarrow h^{-1}(U)$ abto. en $Z_1]$

En nuestro problema: $h: Y \longrightarrow \mathbb{R}$, h cociente $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [U$ abto. en $\mathbb{R} \Leftrightarrow h^{-1}(U)$ abto. en $Y]$



$P_1^{-1}(U) = U\times\mathbb{R}$

$h^{-1}(U) = Y \cap pr_1^{-1}(U) \Rightarrow h^{-1}(U) \cap (\mathbb{R}\times\{0\}) =$

$= U\times\{0\}$