HOJA DE EJERCICIOS 1: Lógica de predicados EDyL 2012-2013

[Fecha de publicación: 2012/10/03]
[Fecha de entrega: 2012/10/15, 10:00]
[Resolución en clase: 2012/10/15]

EJERCICIO 1 [Adaptado de Rosen, sec. 1.1, ej. 60]:

Utilizando el predicado M(x,y): "x envió un mensaje a y", el predicado T(x,y): "x llamó por teléfono a y", y el predicado de igualdad I(x,y): "x es igual a y", y suponiendo que el dominio de las variables son los estudiantes de tu clase, escribir FBFs de la lógica de predicados que expresen de manera correcta y lo más literal posible las siguientes frases

Dominio de las variables:
$x,y \in$ {estudiantes de la clase}

1. "Hay al menos dos estudiantes en tu clase que se han enviado mensajes el uno al otro".
   $\exists\, x,y\ [M(x,y) \wedge M(y,x) \wedge \neg Igual(x,y)]$

2. "Hay al menos un estudiante en tu clase que no ha recibido ningún mensaje ni ninguna llamada telefónica de nadie en su clase".
   $\exists x\ [\forall y\ [\neg M(y,x)] \wedge \forall z\ [\neg T(z,x)]]$

3. "Hay al menos dos estudiantes en tu clase que, entre los dos, han enviado algún mensaje o llamado por teléfono al resto de los estudiantes en la clase".
   $\exists x,y\ [\neg Igual(x,y) \wedge$
   $\forall z[(\neg Igual(z,x) \wedge \neg Igual(z,y)) \Rightarrow$
   $(M(x,z) \vee M(y,z) \vee T(x,z) \vee T(y,z))]]$

EJERCICIO 2 [Adaptado de Rosen]:

Traduce las siguientes frases a lógica de predicados.

1. "La vida en un planeta es posible únicamente si existe oxígeno en la atmósfera de dicho planeta".

Constantes simbólicas (significado)	
Variables (ámbito)	**p (planetas)**
Predicados (significado)	**Oxigeno(p)** **Vida(p)**
Funciones (significado)	**-**
Traducción	**$\forall$p Vida(p) $\Rightarrow$ Oxigeno(p)**

2. "Sólo a los músicos a cuyas madres les gusta algún compositor de la escuela de Edgard Varèse, les gusta Frank Zappa."

Constantes simbólicas (significado)	**FZ: "Frank Zappa"**
Variables (ámbito)	**x (personas)**
Predicados (significado)	**Gusta(x,y): "A x le gusta y"** **Musico(x): "x es músico"** **EscuelaVarese(x): "x es un compositor de la escuela de Varese"**
Funciones	**madreDe(x)**
Traducción	**$\forall$x[(Gusta(x,FZ)$\wedge$Musico(x))$\Rightarrow$** **$\exists$y [Gusta(madreDe(x),y)$\wedge$EscuelaVarese(y)]**

EJERCICIO 3:

Consideremos el conjunto de grafos no dirigidos

Variables: x,y,z,... (dominio: vértices)
g,h,... (dominio: grafos no dirigidos)
t,s,... (dominio: trayectorias)

Predicados o relaciones para vértices: Adyacentes^2, Conectados^2

Predicados o relaciones para grafos: Conexo^1, Hamiltoniano^1

Otros predicados: Pertenece^2

Los superíndices indican el número de argumentos que toma la función o predicado correspondiente.

Interpretación: Dados los vértices A y B y el grafo G

- El predicado "Adyacentes(A,B)" toma el valor de verdad *Verdadero* si existe al menos un enlace entre los nodos A y B.
- El predicado "Conectados(A,B)" toma el valor de verdad *Verdadero* si existe al menos una trayectoria de longitud no nula entre los nodos A y B.
- El predicado "Conexo(G)" toma el valor de verdad *Verdadero* si el grafo G es conexo.
- El predicado "Hamiltoniano(G)" toma el valor de verdad *Verdadero* si el grafo G contiene al menos un circuito Hamiltoniano.
- El predicado "Pertenece(A,G)" toma el valor de verdad *Verdadero* si el nodo A pertenece al conjunto de vértices del grafo G.

No olvides utilizar paréntesis para delimitar el ámbito de las variables.

Escribe las siguientes frases como FBFs

a) "Dos vértices adyacentes están conectados"

$\forall x,y \ \ \text{Adyacentes}(x,y) \Rightarrow \text{Conectados}(x,y)$

b) No todos los vértices conectados son adyacentes

$\neg\forall x\forall y \ \ [\text{Conectados}(x,y) \Rightarrow \text{Adyacentes}(x,y)] \equiv$
$\exists x\ \exists y\ [\text{Conectados}(x,y) \wedge \neg\ \text{Adyacentes}(x,y)]$

c) Define la relación "Conectados" en función de la relación "Adyacentes" mediante la recursión: "Dos vértices están conectados si son adyacentes o si algún vecino de uno de los dos vértices está conectado con el otro vértice"

$$\forall x,y\ [\text{Conectados}(x,y) \Leftrightarrow [\text{Adyacentes}(x,y) \vee \exists z\ [\text{Adyacentes}(x,z) \wedge \text{Conectados}(z,y)]]]$$

d) "Todos los pares de vértices de un grafo conexo están conectados entre sí"

$$\forall x,y,g\ [(\text{Pertenece}(x,g) \wedge \text{Pertenece}(y,g) \wedge \text{Conexo}(g) \wedge \neg\, \text{Igual}(x,y)) \Rightarrow \text{Conectados}(x,y)]$$

e) Define un grafo conexo de acuerdo con la especificación: "Un grafo conexo es aquel en el que todos los pares de vértices están conectados entre sí"

$$\forall g\ [\ \text{Conexo}(g) \Leftrightarrow [\forall x,y\ (\text{Pertenece}(x,g) \wedge \text{Pertenece}(y,g) \wedge \neg\, \text{Igual}(x,y)) \Rightarrow \text{Conectados}(x,y)]$$

EJERCICIO 4:

Dados los siguientes elementos para una ontología de los números enteros:

- Constante: 0 [es la única constante que se puede utilizar]
- Variables: x,y,z,... [dominio:enteros]
- La función s^1: s(x) [≡ sucesor de x]
- Los predicados
  $SucesorDe^2$ $MayorQue^2$, $Suma^3$, $Producto^3$

Ej.	SucesorDe(x,y)	"x es el sucesor de y"
	MayorQue(x,y)	"x es mayor que y"
	Suma(x,y,z)	"z es la suma de x e y"
	Producto(x,y,z)	"z es el producto de x e y"

Sin utilizar el predicado de igualdad, escribe las siguientes frases como FBFs

a) "La suma de cualquier número con cero es ese mismo número"

$\forall x \; Suma(x,0,x)$

b) "El producto de cualquier número con uno (el sucesor de cero) es ese mismo número"

$\forall x \; Producto(x,s(0),x)$

c) "La suma de dos números positivos existe y es positiva"

$\forall x,y \; [[MayorQue(x,0) \wedge MayorQue(y,0)] \Rightarrow [\exists z \; Suma(x,y,z) \wedge MayorQue(z,0)]]$

d) "Un número es mayor que otro si y sólo si o bien el primero es sucesor del segundo o si el primero es sucesor de un número que es mayor que el segundo"

$\forall x,y \; [MayorQue(x,y) \Leftrightarrow [SucesorDe(x,y) \vee \exists z[SucesorDe(x,z) \wedge MayorQue(z,y)]]]$