Autómatas y Lenguajes

3er curso
1er cuatrimestre

Alfonso Ortega: alfonso.ortega@uam.es

UNIDAD 3: Equivalencias y caracterización

TEMA: Conjuntos regulares

Minimización y equivalencia de autómatas finitos

Minimización y equivalencia de autómatas finitos

1 Minimización de autómatas finitos deterministas

2 Equivalencia de autómatas finitos deterministas y no deterministas

1

Minimización AFD

Introducción

- Un autómata finito determinista define un lenguaje único.
- Sin embargo, hay muchos autómatas finitos distintos que pueden reconocer un lenguaje dado.
- Estos autómatas suelen diferir mucho en su número de estados.
- En este instante, desde el punto de vista **teórico**, puede haber poca diferencia entre todos los autómatas para el mismo lenguaje.
- Desde el punto de vista **práctico**, los algoritmos de simulación de autómatas finitos requieren un espacio proporcional al número de sus estados por lo que interesa que su número sea el menor posible.

Introducción

- En las próximas páginas se analizarán diferentes maneras de reducir los autómatas que se pueden agrupar en
  - Eliminación de estados **inaccesibles**.
  - Agrupación de estados **equivalentes**.

Estados accesibles: definición

- Dado un autómata

$$A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

Se dice que un estado $p \in Q$ es accesible desde otro $q \in Q$ si existe una palabra $x \in \Sigma^*$ tal que

$$\hat{\delta}(q, x) = p$$

- Recuerde que $\hat{\delta}(q, x)$ es la extensión de la función de transición de autómatas finitos a palabras y representa el estado al que se llega desde el q tras procesar la cadena de entrada x.

Estados accesibles: algunos resultados

- Resultará de interés disponer de los siguientes resultados:

Todo estado es accesible desde él mismo

  - Para demostrarlo es suficiente recordar que

$$\forall q \in Q \Rightarrow \hat{\delta}(q, \lambda) = q$$

Estados inaccesibles: algoritmo de eliminación

- Es fácil comprobar que si q es un estado inaccesible desde el estado inicial de un autómata finito A, el autómata finito A' obtenido a partir del $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ eliminando el estado q y todas las transiciones en las que aparece (ya sea como estado origen o destino) acepta el mismo lenguaje.
- El resultado anterior respecto a la longitud de la cadena para identificar estados accesibles a partir de otros, proporciona el siguiente algoritmo para la eliminación de estados inaccesibles.

1. Marcar el estado inicial (q_0) como accesible
2. Desde $i=1$ hasta $|Q|-1$ y mientras se marque algún estado en la iteración
   - Para cada estado (q) marcado como accesible (es suficiente con comprobar los nuevos, es decir, los marcados en la última iteración)
     1. Estudiar sus transiciones y formar el conjunto $\{\delta(q,a)\ \forall a \in \Sigma\}$.
     2. Marcar como accesibles todos los estados del conjunto anterior.

- Los estados que queden sin marcar son inaccesibles y pueden ser eliminados ellos y todas las transiciones en las que aparecen.

Estados inaccesibles: algoritmo de eliminación, ejemplos

- El algoritmo general de minimización de autómatas finitos incluye la eliminación de estados inaccesibles.
- Los ejemplos de los dos algoritmos se estudiarán juntos.

Equivalencia de estados

- Se va a definir una relación de equivalencia entre los estados de un autómata finito, se llamará E a esa relación.
- Informalmente

> Dos estados p y q de un autómata finito A son equivalentes (o **indistinguibles**) si, ante todas las posibles cadenas del alfabeto de entrada, son simultáneamente de aceptación.

- Formalmente
  - Dado un autómata $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$$\forall p, q \in Q, pEq \Leftrightarrow \text{(def)}$$

$$\forall w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(p,w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q,w) \in F$$

Teorema af.2: La equivalencia de estados es una relación de equivalencia

> La relación E definida anteriormente es una relación de equivalencia

- **Demostración**:
  - **Reflexividad**: resulta claro que $\forall p \in Q, pEp$ ya que p y p son simultáneamente de aceptación
  - **Simetría**: resulta claro que $\forall p, q \in Q, pEq \Rightarrow qEp$ ya que si p y q son simultáneamente de aceptación, también lo son q y p.
  - **Transitiva**: resulta claro que $\forall p, q, r \in Q, pEq \wedge qEr \Rightarrow pEr$ ya que si p y q son simultáneamente de aceptación y también lo son q y r, inevitablemente también lo son p y r.

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Estados distinguibles

- Asociada a la relación anterior, puede definirse la negación de la misma.
- Informalmente

> Dos estados p y q de un autómata finito A son **distinguibles** si no son indistinguibles, es decir, si existe alguna cadena del lenguaje para la que uno de ellos es de aceptación y el otro no

- Formalmente

$$\forall p,q \in Q,\ p \not{E} q \Leftrightarrow (\text{def})$$
$$\exists w \in \Sigma^* \mid \left(\hat{\delta}(p,w) \in F \wedge \hat{\delta}(q,w) \notin F\right) \vee \left(\hat{\delta}(p,w) \notin F \wedge \hat{\delta}(q,w) \in F\right)$$

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Algoritmo para la equivalencia de estados: cálculo de Q/E

1. Eliminar los estados inaccesibles.
2. Para cada pareja de estados ($\forall(p, q) \in Q \times Q$) marcar el par como **distinguible** sólo si
   $$p \in F \Leftrightarrow q \in F$$
3. Repetir el siguiente proceso hasta que no haya cambios:
   - $\forall(p, q) \in Q \times Q$ marcar el par como **distinguible** sólo si
     $\forall a \in \Sigma \Rightarrow (\delta(p, a), \delta(q, a))$ distinguible
   - Obsérvese, también, que es suficiente mirar las parejas de estado que son aún indistinguibles

- Realmente se podría definir la relación de equivalencia anterior teniendo en cuenta la longitud de las palabras consideradas. Así el paso 2 calcularía Q/E_0 y el paso 3 Q/E_{i+1} a partir de Q/E_i. Éste será el enfoque que sigamos como se ve a continuación

Algoritmo para la equivalencia de estados: cálculo de Q/E

- El algoritmo construye Q/E de forma incremental desde Q/E_0 hasta como mucho $Q/E_{|Q|-2}$. Para ello se proporciona el algoritmo de cálculo de Q/E_0 y el de Q/E_{i+1} a partir de Q/E_i.

1. Se construye Q/E_0 de la siguiente manera;

$$pE_0q \Leftrightarrow \quad p \in F \Leftrightarrow q \in F \quad \Leftrightarrow \quad (p \in F \wedge q \in F) \vee (p \notin F \wedge q \notin F)$$

2. Se parte de $Q/E_i=\{c_1, c_2,...c_m\}$ y se construye Q/E_{i+1} de la siguiente manera;

$$pE_{i+1}q \Leftrightarrow (\exists j \mid p,q \in c_j) \wedge (\forall a \in \Sigma \Rightarrow \delta(p, a)E_i\delta(q, a))$$

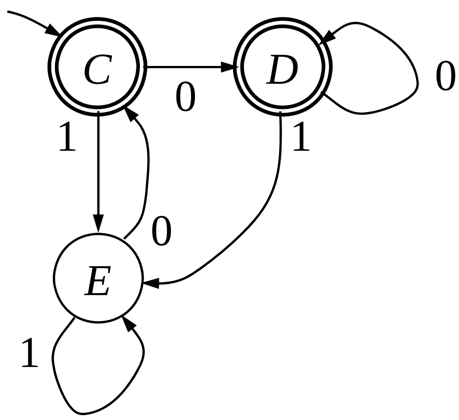
o lo que es lo mismo

$$pE_{i+1}q \Leftrightarrow \begin{cases} \exists j \mid p,q \in c_j \\ \wedge \\ \forall a \in \Sigma, \exists k \mid \delta(p,a), \delta(q,a) \in c_k \end{cases}$$

3. Este proceso se detiene en cuanto $Q/E_i= Q/E_{i+1}$ (y en el peor de los casos cuando $i=|Q|-2$)

Equivalencia de estados: ejemplo 1

- Se considera el autómata finito ($A=(Q=\{C,D,E\}, \Sigma=\{0,1\}, \delta, q_0, F=\{C,D\})$) cuya función de transición (δ) se puede deducir del siguiente diagrama de transiciones:



- El primer paso del algoritmo proporciona el siguiente resultado:

$$Q/E_0=\{ \{C,D\}, \{E\} \}$$

  - Ya que los estados C y D son finales y el estado E no lo es.

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: Matriz de estados distinguibles: ejemplo 1

- Relación que puede representarse mediante la **matriz de estados distinguibles**:
  - Como se trata de una relación de equivalencia, es simétrica y reflexiva por lo que podemos omitir la diagonal y una de las submatrices que representan los pares simétricos y serán iguales a los de la otra mitad de la matriz.
    - En este caso es suficiente con 3 casillas como se muestra en la tabla
  - Se escribirá x en las casillas correspondientes a pares de estados **distinguibles**, es decir, como

$$Q/E_0=\{ \{C,D\}, \{E\} \}$$

D		
E	x	x
	C	D

    - Es decir, los pares (C, E) y (D, E) son distinguibles por perteneces a clases distintas
  - Obsérvese que, aunque se están construyendo conjuntos de estados equivalentes (indistinguibles) en la matriz se marcan las parejas distinguibles.

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 1

- En el siguiente paso para el cálculo de Q/E_1 hay que estudiar todas las transiciones de todas las parejas que se puedan formar con cada clase de equivalencia:
  - Para la clase $\{C,D\}$:
    - La pareja C,D siguen perteneciendo a la misma clase ya que:
      - El símbolo 0: $\delta(C,0)=D$ y $\delta(D,0)=D$
      - El símbolo 1: $\delta(C,1)=E$ y $\delta(D,1)=E$
  - Para la clase $\{E\}$ sólo hay un estado por lo que no cambiará en el siguiente paso.
- Ya que

$$Q/E_0= Q/E_1 \Rightarrow \quad Q/E =\{ \{C,D\}, \{E\} \}$$

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 1

- Y la matriz final no añade cambios a la del último paso:

$$Q/E = \{ \{C,D\}, \{E\} \}$$

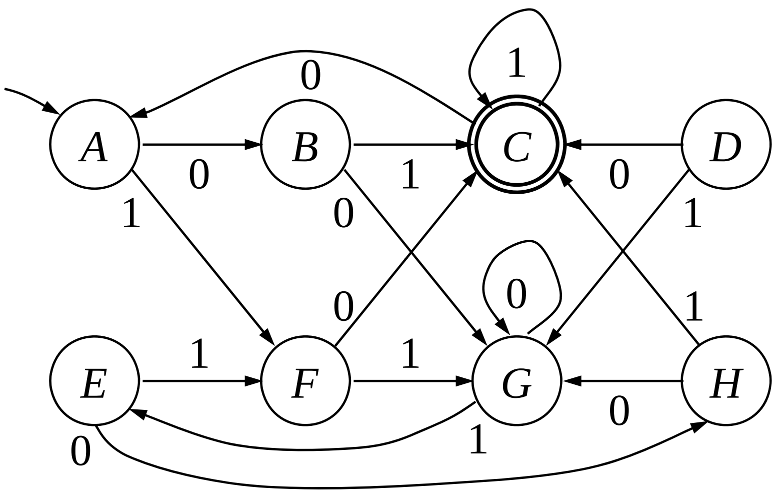
  - Se representa gráficamente de la siguiente forma

D		
E	x	x
	C	D

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- Se considera el autómata finito ($A=(Q=\{A,B,C,D,E,F,G,H\}, \Sigma=\{0,1\}, \delta, q_0=A, \boldsymbol{F}=\{C\})$) cuya función de transición (δ) se puede deducir del siguiente diagrama de transiciones:



Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- El primer paso del algoritmo proporciona el siguiente resultado:

$$Q/E_0=\{c_0=\{A, B, D, E, F, G, H\}, c_1=\{C\}\}$$

  - Ya que C es el único estado final.

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- Que se puede representar matricialmente de la siguiente manera

$$Q/E_0=\{c_0=\{A, B, D, E, F, G, H\}, c_1=\{C\}\}$$

  - Ya que C es distinguible de todos los demás.

B							
C	*x*	*x*					
D			*x*				
E			*x*				
F			*x*				
G			*x*				
H			*x*				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- En el siguiente paso para el cálculo de Q/E_1 hay que estudiar todas las transiciones de todas las parejas que se puedan formar con cada clase de equivalencia:
  - Para la clase $\{A, B, D, E, F, G, H\}$:
    - La pareja A,B no pertenecen a la misma clase:
      - El símbolo 0: $\delta(A,0)=B$ y $\delta(B,0)=G$
      - El símbolo 1: $\delta(A,1)=F \notin \boldsymbol{F}$ y $\delta(B,1)=C \in \boldsymbol{F}$
    - La pareja A,D no pertenecen a la misma clase:
      - El símbolo 0: $\delta(A,0)=B \notin \boldsymbol{F}$ y $\delta(D,0)=C \in \boldsymbol{F}$
      - El símbolo 1: $\delta(A,1)=F$ y $\delta(D,1)=G$
    - La pareja A,E pertenecen a la misma clase: $c_0=\{A, E, ...\}$
      - El símbolo 0: $\delta(A,0)=B$ y $\delta(E,0)=H$
      - El símbolo 1: $\delta(A,1)=F$ y $\delta(E,1)=F$

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- La pareja A,F no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(A,0)=B \notin \boldsymbol{F}$ y $\delta(F,0)=C \in \boldsymbol{F}$
  - El símbolo 1: $\delta(A,1)=F$ y $\delta(F,1)=G$
- La pareja A,G pertenecen a la misma clase: $c_0=\{A, E, G,...\}$
  - El símbolo 0: $\delta(A,0)=B$ y $\delta(G,0)=G$
  - El símbolo 1: $\delta(A,1)=F$ y $\delta(G,1)=E$
- La pareja A,H no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(A,0)=B$ y $\delta(H,0)=G$
  - El símbolo 1: $\delta(A,1)=F \notin \boldsymbol{F}$ y $\delta(H,1)=C \in \boldsymbol{F}$
- La pareja B,D no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(B,0)=G \notin \boldsymbol{F}$ y $\delta(D,0)=C \in \boldsymbol{F}$
  - El símbolo 1: $\delta(B,1)=C \in \boldsymbol{F}$ y $\delta(D,1)=G \notin \boldsymbol{F}$
- La pareja B,E no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(B,0)=G$ y $\delta(E,0)=H$
  - El símbolo 1: $\delta(B,1)=C \in \boldsymbol{F}$ y $\delta(E,1)=F \notin \boldsymbol{F}$

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- La pareja B,F no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(B,0)=G\notin\boldsymbol{F}$ y $\delta(F,0)=C\in\boldsymbol{F}$
  - El símbolo 1: $\delta(B,1)=C$ y $\delta(F,1)=G$
- La pareja B,G no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(B,0)=G$ y $\delta(G,0)=G$
  - El símbolo 1: $\delta(B,1)=C$ y $\delta(G,1)=E$
- La pareja B,H pertenecen a la misma clase: $c_3=\{B, H,...\}$
  - El símbolo 0: $\delta(B,0)=G$ y $\delta(H,0)=G$
  - El símbolo 1: $\delta(B,1)=C$ y $\delta(H,1)=C$
- La pareja D,E no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(D,0)=C\in\boldsymbol{F}$ y $\delta(E,0)=H\notin\boldsymbol{F}$
  - El símbolo 1: $\delta(D,1)=G$ y $\delta(E,1)=E$
- La pareja D,F pertenecen a la misma clase: $c_2=\{D, F,...\}$
  - El símbolo 0: $\delta(D,0)=C$ y $\delta(F,0)=C$
  - El símbolo 1: $\delta(D,1)=G$ y $\delta(F,1)=G$

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- La pareja D,G no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(D,0)=C\in\boldsymbol{F}$ y $\delta(G,0)=G\notin\boldsymbol{F}$
  - El símbolo 1: $\delta(D,1)=G$ y $\delta(G,1)=E$
- La pareja D,H no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(D,0)=C\in\boldsymbol{F}$ y $\delta(H,0)=G\notin\boldsymbol{F}$
  - El símbolo 1: $\delta(D,1)=G$ y $\delta(H,1)=C$
- La pareja E,F no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(E,0)=F\notin\boldsymbol{F}$ y $\delta(F,0)=C\in\boldsymbol{F}$
  - El símbolo 1: $\delta(E,1)=H$ y $\delta(F,1)=G$
- La pareja E,G pertenecen a la misma clase: $c_0=\{A, E, G, ...\}$
  - El símbolo 0: $\delta(E,0)=F$ y $\delta(G,0)=G$
  - El símbolo 1: $\delta(E,1)=H$ y $\delta(G,1)=E$
- La pareja E,H no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(E,0)=F$ y $\delta(H,0)=G$
  - El símbolo 1: $\delta(E,1)=H\notin\boldsymbol{F}$ y $\delta(H,1)=C\in\boldsymbol{F}$

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- La pareja F,G no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(F,0)=C\in \boldsymbol{F}$ y $\delta(G,0)=G\notin \boldsymbol{F}$
  - El símbolo 1: $\delta(F,1)=G$ y $\delta(G,1)=E$
- La pareja F,H no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(F,0)=C\in \boldsymbol{F}$ y $\delta(H,0)=G\notin \boldsymbol{F}$
  - El símbolo 1: $\delta(F,1)=G$ y $\delta(H,1)=C$
- La pareja G,H no pertenecen a la misma clase:
  - El símbolo 0: $\delta(G,0)=G$ y $\delta(H,0)=G$
  - El símbolo 1: $\delta(G,1)=E\notin \boldsymbol{F}$ y $\delta(H,1)=C\in \boldsymbol{F}$
- Para la clase $\{C\}$ sólo hay un estado por lo que no cambiará en el siguiente paso.
- Por lo que

$$Q/E_1=\{c_0=\{A, E ,G\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\} , c_3=\{B, H\} \}$$

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- Que se puede representar matricialmente de la siguiente manera

$$Q/E_1=\{c_0=\{A, E ,G\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\} , c_3=\{B, H\} \}$$

- Ya que A es distinguible de D y de F.

	A	B	C	D	E	F	G
B							
C	x	x					
D	x		x				
E			x				
F	x		x				
G			x				
H			x				

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- Que se puede representar matricialmente de la siguiente manera

  $Q/E_1=\{c_0=\{A, E ,G\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\} , c_3=\{B, H\} \}$

  - Y que E y G también lo son.

B							
C	x	x					
D	x		x				
E			x	x			
F	x		x		x		
G			x	x		x	
H			x				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- Que se puede representar matricialmente de la siguiente manera

  $Q/E_1=\{c_0=\{A, E ,G\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\} , c_3=\{B, H\} \}$

  - Y A , E y de G también es distinguible de B y de H.

B	x						
C	x	x					
D	x		x				
E		x	x	x			
F	x		x		x		
G		x	x	x		x	
H	x		x		x		x
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- Que se puede representar matricialmente de la siguiente manera

  $Q/E_1=\{c_0=\{A, E, G\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\}, c_3=\{B, H\}\}$

  - Y D y de F también son distinguibles de B y de H.

B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G		x	x	x		x	
H	x		x	x	x	x	x
	A	B	C	D	E	F	G

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- En el siguiente paso para el cálculo de Q/E_2 hay que estudiar todas las transiciones de todas las parejas que se puedan formar con cada clase de equivalencia:
  - Para la clase $c_0=\{A, E, G\}$:
    - La pareja A,E pertenecen a la misma clase: $c_0=\{A, E, ...\}$
      - El símbolo 0: $\delta(A,0)=B\in c_3$ y $\delta(E,0)=H\in c_3$
      - El símbolo 1: $\delta(A,1)=F$ y $\delta(E,1)=F$
    - La pareja A,G no pertenecen a la misma clase:
      - El símbolo 0: $\delta(A,0)=B\in c_3$ y $\delta(G,0)=G\in c_0$
      - El símbolo 1: $\delta(A,1)=F\in c_2$ y $\delta(G,1)=E\in c_0$
    - La pareja E,G no pertenecen a la misma clase:
      - El símbolo 0: $\delta(E,0)=F\in c_2$ y $\delta(G,0)=G\in c_0$
      - El símbolo 1: $\delta(E,1)=H\in c_3$ y $\delta(G,1)=E\in c_0$
  - Para la clase $c_2=\{D, F\}$:
    - La pareja D,F pertenecen a la misma clase: $c_2=\{D, F,...\}$
      - El símbolo 0: $\delta(D,0)=C$ y $\delta(F,0)=C$
      - El símbolo 1: $\delta(D,1)=G$ y $\delta(F,1)=G$

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- Para la clase c_3={B, H}:
  - La pareja B,H pertenecen a la misma clase: $c_3=\{B, H,...\}$
    - El símbolo 0: $\delta(B,0)=G$ y $\delta(H,0)=G$
    - El símbolo 1: $\delta(B,1)=C$ y $\delta(H,1)=C$
- Para la clase $\{C\}$ sólo hay un estado por lo que no cambiará en el siguiente paso.
- Por lo que

$$Q/E_2=\{c_0=\{A, E\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\}, c_3=\{B, H\}, c_4=\{G\}\}$$

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- Por lo que, ya que,

$$Q/E_1=\{c_0=\{A, E ,G\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\} , c_3=\{B, H\} \}$$
$$Q/E_2=\{c_0=\{A, E\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\}, c_3=\{B, H\}, c_4=\{G\}\}$$

- Y D y de F también son distinguibles de B y de H.

	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x

- Observe que sólo es necesario anotar los pares (A,G) y (E,G) ya que su clase se ha separado ($G\notin c_0$) pero todos los pares de A, E y G con el resto de las clases distintas de c_0 se mantienen del paso anterior.

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- En el siguiente paso para el cálculo de Q/E_3 hay que estudiar todas las transiciones de todas las parejas que se puedan formar con cada clase de equivalencia:
  - Para la clase $c_0=\{A, E\}$:
    - La pareja A,E pertenecen a la misma clase: $c_0=\{A, E, ...\}$
      - El símbolo 0: $\delta(A,0)=B\in c_3$ y $\delta(E,0)=H\in c_3$
      - El símbolo 1: $\delta(A,1)=F$ y $\delta(E,1)=F$
  - Para la clase $c_2=\{D, F\}$:
    - La pareja D,F pertenecen a la misma clase: $c_2=\{D, F,...\}$
      - El símbolo 0: $\delta(D,0)=C$ y $\delta(F,0)=C$
      - El símbolo 1: $\delta(D,1)=G$ y $\delta(F,1)=G$
  - Para la clase $c_3=\{B, H\}$:
    - La pareja B,H pertenecen a la misma clase: $c_3=\{B, H,...\}$
      - El símbolo 0: $\delta(B,0)=G$ y $\delta(H,0)=G$
      - El símbolo 1: $\delta(B,1)=C$ y $\delta(H,1)=C$
  - El resto de clases sólo tienen un elemento por lo que:

$$Q/E_3=Q/E_2=Q/E= \{c_0=\{A, E\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\}, c_3=\{B, H\}, c_4=\{G\}\}$$

Equivalencia de estados: ejemplo 2

- Que se puede representar matricialmente de la siguiente manera

$$Q/E_3=Q/E_2=Q/E= \{c_0=\{A, E\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\}, c_3=\{B, H\}, c_4=\{G\}\}$$

  - La tabla definitiva es la misma del último paso.

B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x
	A	B	C	D	E	F	G

Otros algoritmos para la equivalencia de estados

- En los ejemplos anteriores se ha utilizado la **matriz de estados distinguibles** como una representación auxiliar en los sucesivos pasos del cálculo de Q/E.
- Algunos autores [HopcroftUllman03] proponen algoritmos de cálculo de Q/E basándose en el relleno de esta matriz.
- Obsérvese que esto es posible porque las dos relaciones (equivalente=indistinguible, distinguible) son complementarias y los pares de estados que pertenecen a una no pertenecen a la otra (y viceversa)
- El algoritmo sigue los siguientes pasos
  1. La matriz se rellena de forma similar a como se ha visto en los ejemplos.
  2. Se lee la relación Q/E a partir de la matriz.

Otros algoritmos...: lectura de Q/E desde la matriz de estados distinguibles

- Para el paso 2 del algoritmo:
  - Se puede leer el conjunto cociente directamente de la matriz mediante las casillas que hayan quedado sin marcar
  - Hay que tener en cuenta las siguientes propiedades de la relación de equivalencia:
    - Simétrica
    - Transitiva

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Lectura de Q/E desde la matriz de estados distinguibles: ejemplo 1

- Partiendo de la **matriz de estados distinguibles** del primer ejemplo:

D		
E	x	x
	C	D

- Se puede concluir que
  - Por el par no marcado (C,D) los dos estados pertenecen a la misma clase de equivalencia.
  - Como no hay más pares no marcados el conjunto cociente hay que concluir que todos los demás estados (en este caso sólo el E) no son equivalentes a ningún otro y tienen que aparecer cada uno de ellos en una clase unitaria.

$$Q/E = \{ \{C,D\}, \{E\} \}$$

  - Que coincide con el resultado ya obtenido.

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Lectura de Q/E desde la matriz de estados distinguibles: ejemplo 2

- Partiendo de la **matriz de estados distinguibles** del primer ejemplo:

B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x
	A	B	C	D	E	F	G

- Recorriendo los pares no marcados en orden, podemos concluir:
  - Que A y E son de la misma clase

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Lectura de Q/E desde la matriz de estados distinguibles: ejemplo 2

- Partiendo de la **matriz de estados distinguibles** del primer ejemplo:

B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x
	A	B	C	D	E	F	G

- Recorriendo los pares no marcados en orden, podemos concluir:
  - Que A y E son de la misma clase
  - Que B y H son de la misma clase (de otra)

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Lectura de Q/E desde la matriz de estados distinguibles: ejemplo 2

- Partiendo de la **matriz de estados distinguibles** del primer ejemplo:

B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x
	A	B	C	D	E	F	G

- Recorriendo los pares no marcados en orden, podemos concluir:
  - Que A y E son de la misma clase
  - Que B y H son de la misma clase (de otra)
  - Que D y F son de la misma clase (de otra)

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

Lectura de Q/E desde la matriz de estados distinguibles: ejemplo 2

- Partiendo de la **matriz de estados distinguibles** del primer ejemplo:

B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x
	A	B	C	D	E	F	G

- Recorriendo los pares no marcados en orden, podemos concluir:
  - Que A y E son de la misma clase
  - Que B y H son de la misma clase (de otra)
  - Que D y F son de la misma clase (de otra)
  - Que los demás estados forman clases unitarias.
- Es decir

$$Q/E=\{\ c_0=\{A, E\},\ c_1=\{C\},\ c_2=\{D, F\},\ c_3=\{B, H\},\ c_4=\{G\}\}$$

- Observe que los tres pares originan clases distintas porque no comparten elementos y no se pueden agrupar en una sola mediante la propiedad transitiva.

Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

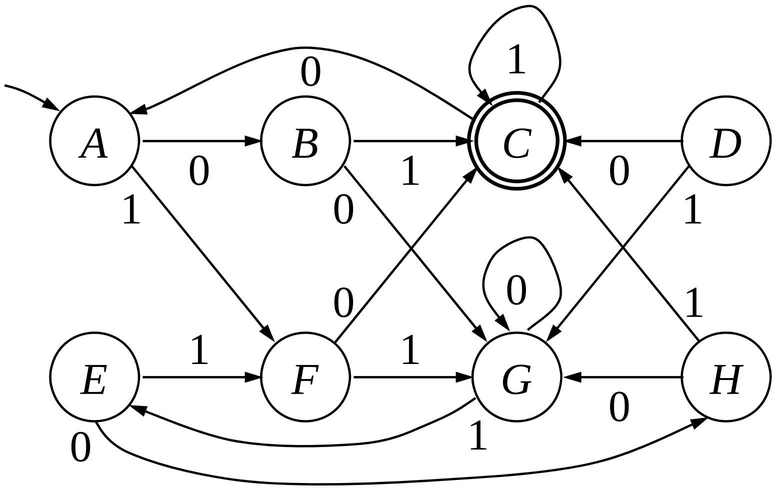
Minimización de autómatas finitos

- Informalmente el autómata finito mínimo equivalente asociado a uno dado $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es el inducido por el conjunto cociente Q/E.
- Formalmente, el autómata finito mínimo equivalente a uno dado $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ se construye de la siguiente manera:

1. Eliminar los estados inaccesibles desde q_0 para obtener $A_1=(Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$.
2. Construir Q_1/E.
3. El autómata finito mínimo equivalente es $A'=(Q'=Q_1/E, \Sigma, \delta', q'_0, F')$
   - Donde
     - $q'_0 = [q_0]$.
     - $F' = \{c \in Q_1/E \mid c \cap F_1 \neq \Phi\}$.
     - $\delta'([q],a) = [\delta(q,a)] = \{p \in Q_1 \mid pE\delta(q,a)\}\ \forall\ q \in Q_1$.

Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

- Se considera el autómata finito (A=(Q={A,B,C,D,E,F,G,H}, Σ={0,1}, δ, q_0=A, $\boldsymbol{F}$={C})) cuya función de transición (δ) se puede deducir del siguiente diagrama de transiciones:



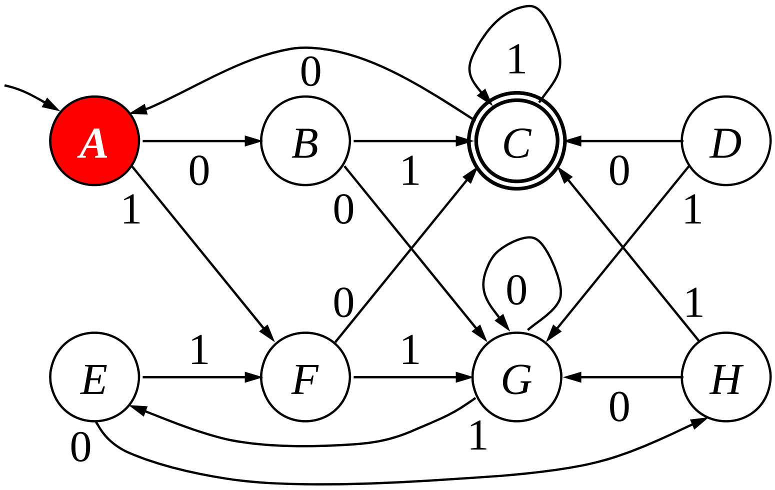
- Este autómata ha sido estudiado previamente

Minimización de autómatas finitos

1. Eliminar los estados inaccesibles desde q_0 para obtener A_1 =(Q_1, Σ, δ_1, q_0, F_1).
   - A continuación se muestran los resultados de los diferentes pasos del algoritmo:
     - Inicialmente *estados_accesibles*={A}.
     - Tras la primera iteración *estados_accesibles*={A,B,F}.
     - Tras la siguiente iteración *estados_accesibles*={A,B,C,F,G}.
     - Tras la siguiente iteración *estados_accesibles*={A,B,C,E,F,G}.
     - Tras la siguiente iteración *estados_accesibles*={A,B,C,E,F,G,H}.
   - Como se puede comprobar en lo siguientes diagramas.

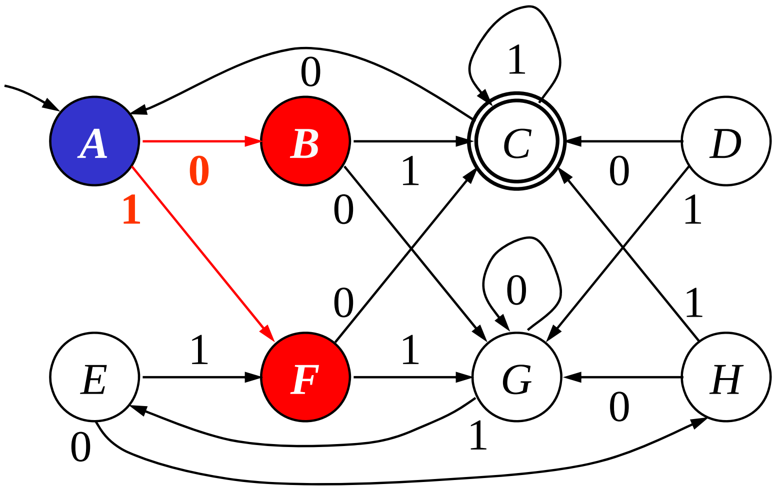
Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

- Se resaltan los estados accesibles desde el inicial.



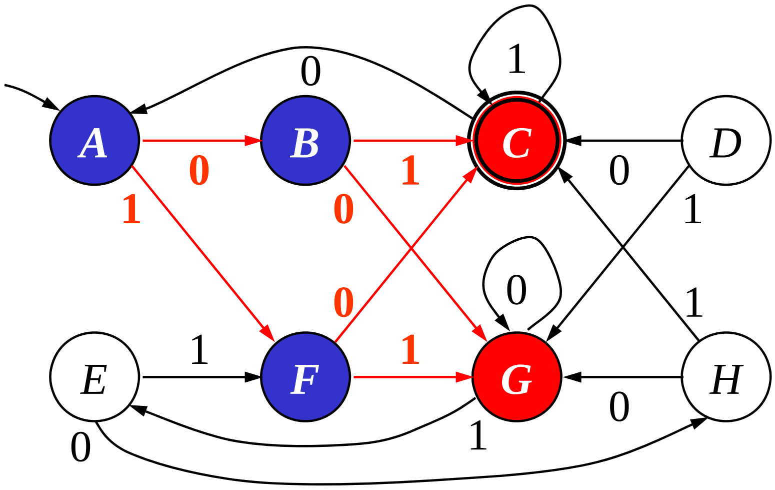
Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

- Se resaltan los estados accesibles desde el inicial.



Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

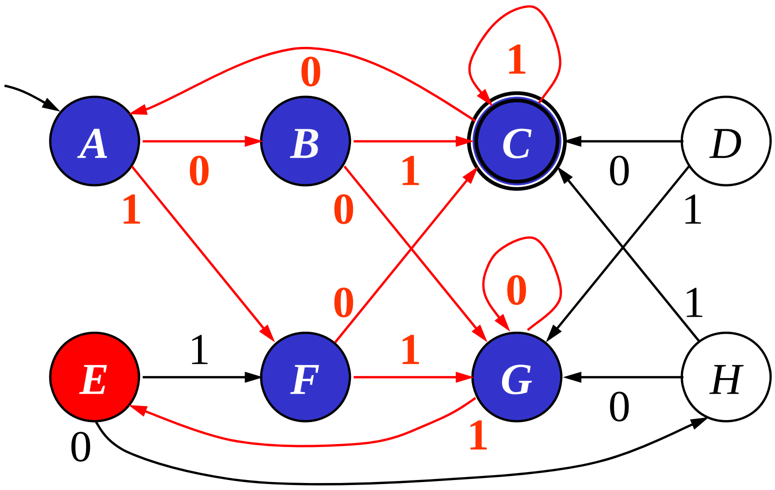
- Se resaltan los estados accesibles desde el inicial.



Equivalencia y minimización de Autómatas Finitos

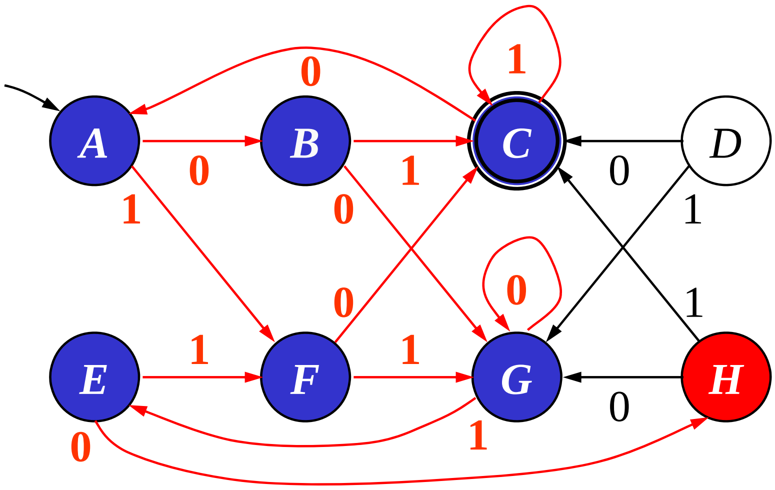
Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

- Se resaltan los estados accesibles desde el inicial.



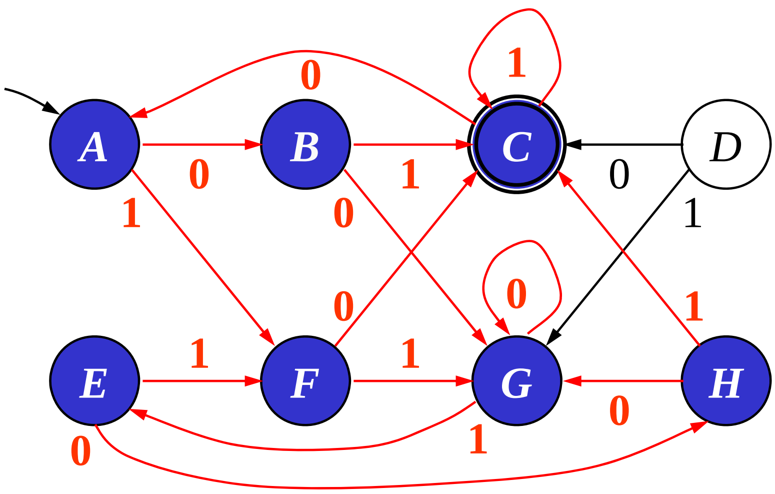
Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

- Se resaltan los estados accesibles desde el inicial.



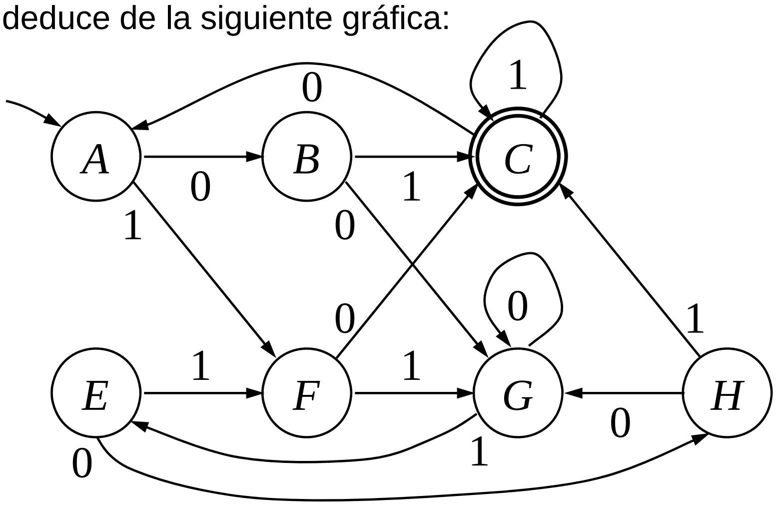
Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

- Se resaltan los estados accesibles desde el inicial.



Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

- Al no producirse cambios, se ha terminado el proceso y el estado D es inaccesible; puede obtenerse un autómata (conexo) equivalente al de partida cuya función de transición se deduce de la siguiente gráfica:



$$A_1 = (Q_1=\{A,B,C,E,F,G,H\}, \Sigma=\{0,1\}, \delta_1, q_0, F_1=\{C\})$$

Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

2. Construir Q_1/E.
   - Se ha estudiado previamente el conjunto cociente del autómata de partida, es suficiente eliminar los estados que han sido suprimidos.
     - Se obtuvo

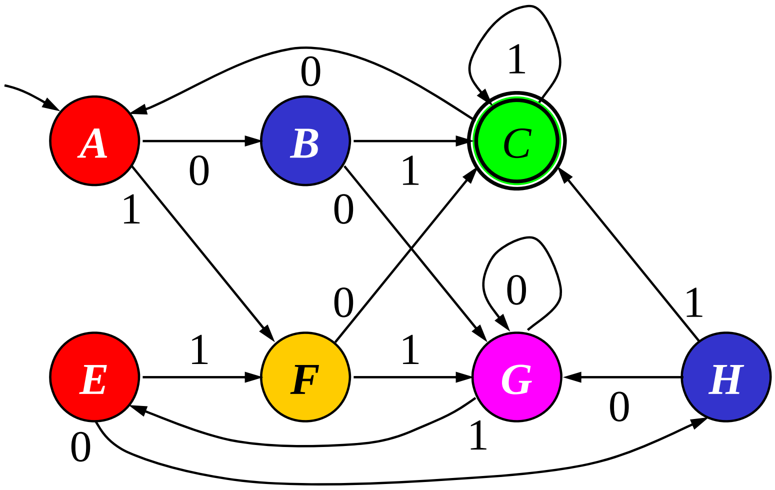
       $$Q/E= \{c_0=\{A, E\}, c_1=\{C\}, c_2=\{D, F\}, c_3=\{B, H\}, c_4=\{G\}\}$$

     - Por lo que, tras eliminar los estados inaccesibles (D), se obtiene:

       $$Q_1/E=\{c_0=\{A, E\}, c_1=\{C\}, c_2=\{F\}, c_3=\{B, H\}, c_4=\{G\}\}$$

Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

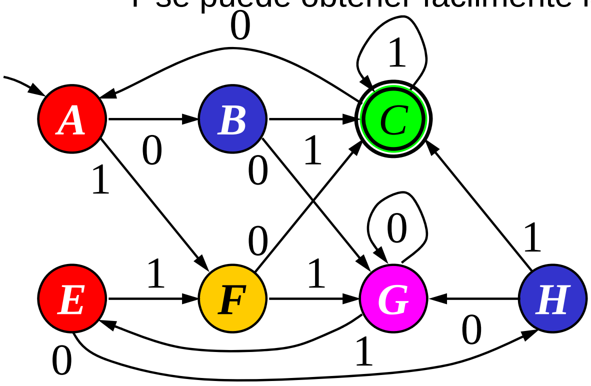
3. Se construye el autómata determinista finito mínimo equivalente $A' = (Q' = Q_1/E, \Sigma, \delta', q'_0, F')$

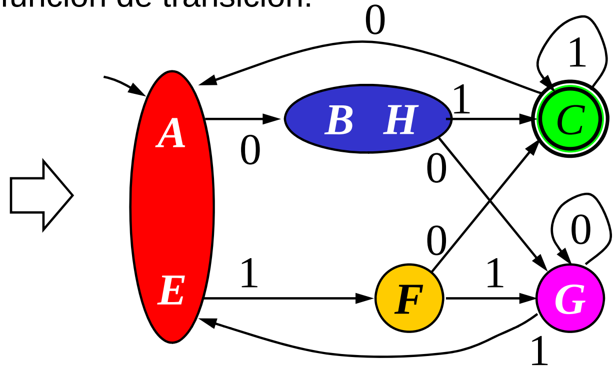


- Se resaltan con el mismo color los estados de la misma clase de equivalencia

Minimización de autómatas finitos: ejemplo 1

- Y se puede obtener fácilmente la función de transición:





	0	1
$\rightarrow\{A,E\}$	$\{B,H\}$	$\{F\}$
$\{B,H\}$	$\{G\}$	$*\{C\}$
$\{F\}$	$\{C\}$	$\{G\}$
$\{G\}$	$\{G\}$	$\{A,E\}$
$*\{C\}$	$\{A,E\}$	$*\{C\}$

2

Equivalencia AF/AFD

Autómatas finitos no deterministas

Introducción, relación/matriz : Λ

- Ya se ha estudiado en temas anteriores que una de las dificultades del análisis del comportamiento de los autómatas finitos no deterministas es la posibilidad de realizar transiciones lambda.
- Estas transiciones consisten en cambios de estado sin consumir símbolos de entrada.
- En este tema se estudiará que las transiciones lambda y las no deterministas que consumen entrada simplemente proporcionan una manera más cómoda de definir autómatas finitos ya que no se aumenta la potencia expresiva de los autómatas finitos no deterministas.
- Las dos tareas que hay que realizar para reducir el no determinismo serán las siguientes:
  - Agrupar en un único estado todos los estados a los que se pueda transitar desde uno dado con el mismo símbolo de entrada.
  - Agrupar en un único estado todos los estados a los que se pueda transitar sin consumir símbolos de entrada.
- Para este último paso será útil la relación que se presenta en las siguientes trasparencias.

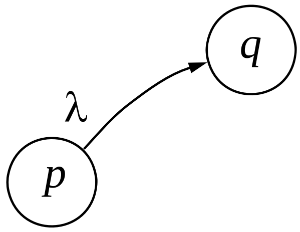
Autómatas finitos no deterministas

Definición formal: Λ

- Aunque no es estrictamente necesario, es conveniente, a veces, considerar la relación Λ (lambda mayúscula) sobre el conjunto de estados, definida de la siguiente manera

$$\forall p,q \in Q \qquad p\Lambda q \Leftrightarrow (\text{def.})\ \delta(p,\lambda)=q$$

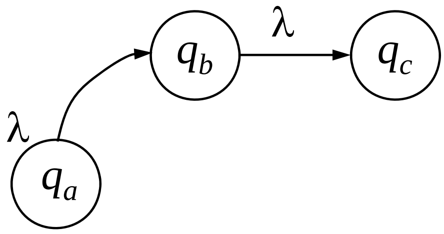
- Gráficamente:

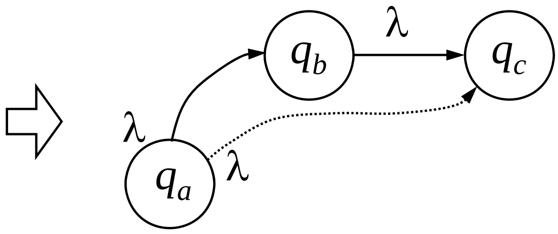


Autómatas finitos no deterministas

Definición formal: Λ

- Esta relación facilita los desarrollos teóricos y prácticos
- Las transiciones λ mencionadas explícitamente en las transiciones de un autómata, inducen otras:
  - De





  - Que sugieren el interés de Λ^+, **cierre *transitivo* de** Λ, que se define como

$p\Lambda^+q \Leftrightarrow$ “si q es accesible desde p por medio sólo de transiciones con λ, es decir, sin consumir ningún símbolo de entrada ”

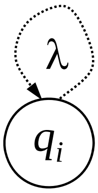
  - Y que se puede calcular de la siguiente forma $\Lambda^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda^i$

Autómatas finitos no deterministas

Definición formal: Λ

- Y, estrictamente hablando, por definición, cualquier autómata permanece en el mismo estado sin consumir símbolos de entrada. Por lo que se cumpliría

  $\forall\ A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ autómata finito y $\forall\ q_i \in Q$



- Que sugiere el interés de Λ^*, **cierre *transitivo* y *reflexivo* de** Λ, que se puede calcular como

$$\Lambda^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Lambda^i$$

- Por conveniencia, si se necesita, se asociará con Λ también el siguiente significado:

$$\forall p \in Q \qquad \Lambda(p)=\{q \in Q \mid p \Lambda q\}=\{q \in Q \mid \delta(p,\lambda)=q\}$$

  - Es decir, $\Lambda(p)$ es el conjunto de estados para los que hay una transición lambda directa desde p.
  - Si es conveniente, veremos más adelante que sí lo es, utilizar esta notación en lugar de para un estado, para un conjunto de estados, se colocará una "línea" sobre lambda para indicar esta circunstancia.

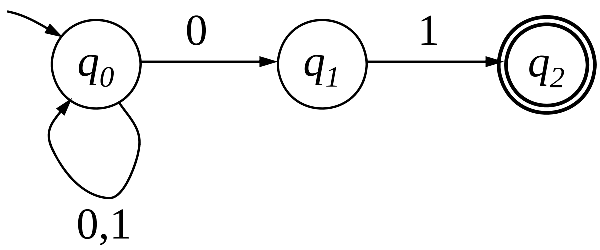
Autómatas finitos no deterministas

Ejemplo 1

- Considérese el siguiente autómata finito no determinista:

$$A=(Q=\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma=\{0,1\}, \delta, q_0, F=\{q_2\})$$

  - Donde el diagrama de transiciones de δ es el siguiente:



Autómatas finitos no deterministas

Ejemplo 1

- Que también se puede representar mediante la siguiente tabla de transiciones:

	0	1	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	Φ
q_1	Φ	$\{*q_2\}$	Φ
$*q_2$	Φ	Φ	Φ

- De cuya última columna resulta claro que no hay transiciones λ por lo que

$$\Lambda = \Lambda^+ = \Lambda^* = \mathbf{0}$$

  - Donde **0** representa la matriz que consta sólo de 0's.

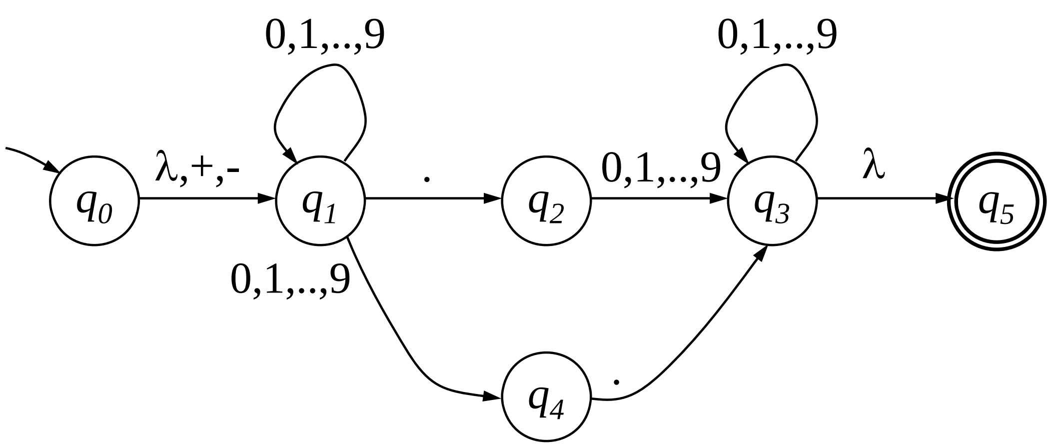
Autómatas finitos no deterministas

Ejemplo 3

- Considérese el siguiente autómata finito no determinista:

$$A=(Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \Sigma=\{0,1,...,9,+,-, .\}, \delta, q_0, F=\{q_5\})$$

- Donde el diagrama de transiciones de δ es el siguiente:



Ejemplo 2

- Que también se puede representar mediante la siguiente tabla de transiciones (obsérvese que se han agrupado en una sola columna varias que serían idénticas; el nombre de la columna acumula todos los nombres como en +,- y 0,1,...,9, la tabla real tiene 14 columnas):

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

Ejemplo 3

- La función de transición define la siguiente matriz Λ que resulta ser también Λ^+, por lo que Λ^* queda como se muestra a continuación:

$\Lambda=\Lambda^+$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	0	1	0	0	0	0
q_1	0	0	0	0	0	0
q_2	0	0	0	0	0	0
q_3	0	0	0	0	0	1
q_4	0	0	0	0	0	0
q_5	0	0	0	0	0	0

Λ^*

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	1	1	0	0	0	0
q_1	0	1	0	0	0	0
q_2	0	0	1	0	0	0
q_3	0	0	0	1	0	1
q_4	0	0	0	0	1	0
q_5	0	0	0	0	0	1

Ejemplo 4

- Y concluir que

$\Lambda(q_0)=\Lambda^+(q_0)=\{q_1\}$, $\Lambda^*(q_0)=\{q_0, q_1\}$,
$\Lambda(q_1)=\Lambda^+(q_0)= \Phi$, $\Lambda^*(q_1)=\{q_1\}$,
$\Lambda(q_2)=\Lambda^+(q_2)= \Phi$, $\Lambda^*(q_2)=\{q_2\}$,
$\Lambda(q_3)=\Lambda^+(q_3)=\{q_5\}$, $\Lambda^*(q_3)=\{q_3, q_5\}$,
$\Lambda(q_4)=\Lambda^+(q_4)= \Phi$, $\Lambda^*(q_4)=\{q_4\}$,
$\Lambda(q_5)=\Lambda^+(q_5)= \Phi$, $\Lambda^*(q_5)=\{q_5\}$

$\Lambda=\Lambda^+$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	0	1	0	0	0	0
q_1	0	0	0	0	0	0
q_2	0	0	0	0	0	0
q_3	0	0	0	0	0	1
q_4	0	0	0	0	0	0
q_5	0	0	0	0	0	0

Λ^*

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	1	1	0	0	0	0
q_1	0	1	0	0	0	0
q_2	0	0	1	0	0	0
q_3	0	0	0	1	0	1
q_4	0	0	0	0	1	0
q_5	0	0	0	0	0	1

Observaciones: los autómatas finitos no deterministas incluyen los deterministas

- Resulta fácil comprobar el siguiente resultado

$$AF \subseteq AFN$$

- Ya que un autómata finito determinista no es más que un autómata finito no determinista en el que:
  - Las imágenes de la función de transición son siempre conjuntos unitarios.
  - No hay transiciones λ.

Autómatas finitos no deterministas

Teorema af.4: equivalencia entre AF y AFN

- Se puede formalizar este enunciado de la siguiente manera:

AF = AFN

- Demostración
  - Ya se ha explicado previamente que AF $\subseteq$ AFN
  - Queda demostrar

AFN $\subseteq$ AF

- Dado un autómata finito no determinista $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Se puede demostrar que

$$A' = \left(Q' \subseteq 2^Q, \Sigma, \delta', q'_0 = \hat{\delta}(q_0, \lambda), F' = \{c \in Q' = 2^Q \mid c \cap F \neq \Phi\}\right)$$

  - donde

$$\delta'(c, a) = \bigcup_{q \in c} \hat{\delta}(q, a) \qquad \forall c \in 2^Q, a \in \Sigma$$

  - es equivalente a A'.

Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN

- Se puede proporcionar una versión más práctica (algoritmo) del punto anterior.
- Para construir el autómata finito determinista equivalente al no determinista de partida $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ se siguen los siguientes pasos:

1. **Cálculo del estado inicial**:
   - Son los estados a los que se puede acceder desde q_0 sin consumir símbolos de entrada $q'_0 = \hat{\delta}(q_0, \lambda) = \Lambda^*(q_0)$

2. **Cálculo del resto de estados, δ' y conjunto de estados finales**:
   - Es más eficiente generar sólo los estados necesarios, ya que la indicación del teorema

$$Q' \subseteq 2^Q$$

   - Implica un conjunto "demasiado grande" (explosión combinatoria)
   - Para ello se parte del estado inicial y se generan sólo los elementos accesibles de 2^Q adecuados para A'.

Equivalencia entre AF y AFN

2. Cálculo del resto de estados, δ' y conjunto de estados finales: (cont.)

- A partir del estado inicial q'_0 y mientras aparezcan nuevos elementos de 2^Q no marcados (como estudiados) se realiza el siguiente proceso:

1. Llamamos $c_i=\{q_{i1}, q_{i2},..., q_{im}\}$ al estado de Q' que se está tratando (inicialmente q'_0).
2. Se marca, como estudiado, el elemento c_i.
3. Para cada símbolo $a \in \Sigma$ se somete a c_i al siguiente tratamiento para actualizar Q' y δ' que consta de dos fases:
   1. Acumular en $\delta'(c_i,a)$ el resultado de δ para todos los elementos de c_i.

$$\delta'(c_i,a) \supseteq \bigcup_{q_{ij} \in c_i} \delta(q_{ij},a)$$

   - Este paso es más fácil a partir de la tabla de transición de δ ya que, para cada columna, es suficiente con acumular en una casilla (la de la fila de c_i) las casillas de todos los estados que contiene.
   - La siguiente página muestra gráficamente esta situación

Equivalencia entre AF y AFN

2. Cálculo del resto de estados, δ' y conjunto de estados finales: (cont.)

	a_1		$a_{\|\Sigma'\|}$
q_1	{…}	…	{…}
q_{i1}	◖	…	✱
q_{i2}	◓	…	✱
q_{im}	◗	…	✱
q_n	{…}	…	{…}

	a_1		$a_{\|\Sigma'\|}$
c_1	{…}	…	{…}
$c_i=\{q_{ij}\}_{j=1..m.}$	◖ ◓ ◗	…	✱ ✱ ✱
$c_{\|Q'\|}$	{…}	…	{…}

Equivalencia entre AF y AFN

2. **Cálculo del resto de estados, δ' y conjunto de estados finales**: (cont.)
   3. Para cada símbolo $a \in \Sigma$ ...: (cont.)
      2. (Sólo si hay transiciones λ) añadir el cierre reflexivo y transitivo para transiciones λ de cada elemento actual de $\delta'(c_i,a)$.

$$\forall q_j \in c_i \qquad \delta'(c_i,a) \supseteq \Lambda^*(q_j)$$

   4. Se añade, si no estuviera, a Q', el $\delta'(c_i,a)$ recién calculado.
   5. Se realiza la siguiente comprobación adicional sobre los elementos que finalmente contiene $\delta'(c_i,a)$: se añade al conjunto de estados finales si contiene algún estado que en el autómata de partida era final.

$$\delta'(c_i,a) \cap F \neq \Phi \qquad \Rightarrow \qquad \delta'(c_i,a) \in F'$$

   6. Si no hay más elementos en Q' no marcados como no estudiados, se ha terminado la construcción del autómata equivalente.
   7. En otro caso, se elige uno de los elementos de Q' no marcados como estudiados
   8. Se va al paso 2.

Equivalencia entre AF y AFN

- **Observación**:
  - Todos los elementos de 2^Q que pertenecen a Q' cumplen la propiedad de **ser cerrados respecto al cierre reflexivo y transitivo de las transiciones** λ, es decir:

$$c = \Lambda^*(c) \qquad \forall c \in Q'$$

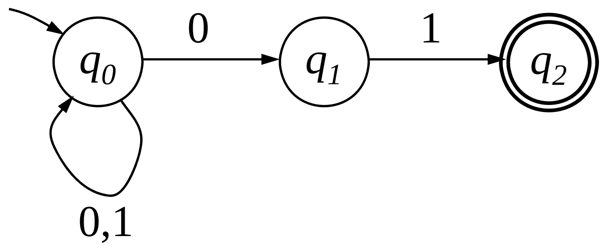
Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- Considérese al AFN del ejemplo 1:

$$A=(Q=\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma=\{0,1\}, \delta, q_0, F=\{q_2\})$$

  - Donde el diagrama de transiciones de δ es el siguiente:

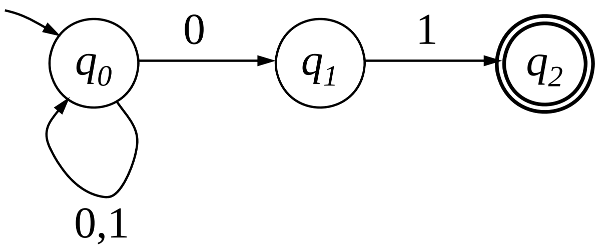


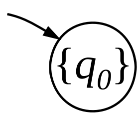
	0	1	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	Φ
q_1	Φ	$\{*q_2\}$	Φ
$*q_2$	Φ	Φ	Φ

Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- Se va a construir el autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito:



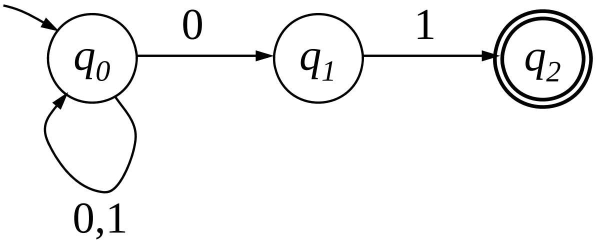


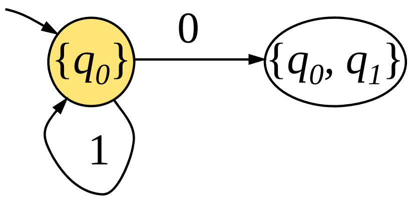
	0	1	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	Φ
q_1	Φ	$\{*q_2\}$	Φ
$*q_2$	Φ	Φ	Φ

	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$		

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- Se va a construir el autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito:



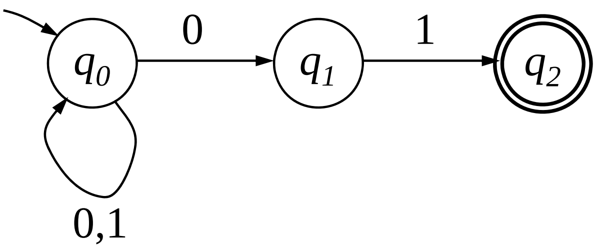


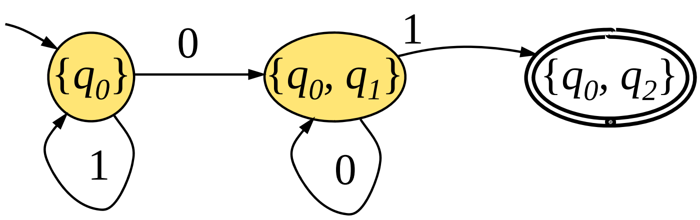
	0	1	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	Φ
q_1	Φ	$\{*q_2\}$	Φ
$*q_2$	Φ	Φ	Φ

	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- Se va a construir el autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito:





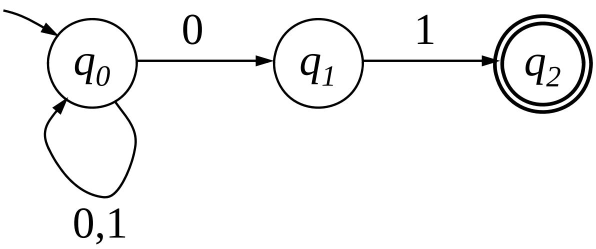
	0	1	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	Φ
q_1	Φ	$\{*q_2\}$	Φ
$*q_2$	Φ	Φ	Φ

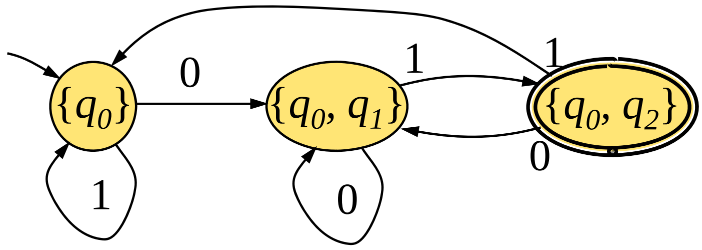
	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- Se va a construir el autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito:





	0	1	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	Φ
q_1	Φ	$\{*q_2\}$	Φ
$*q_2$	Φ	Φ	Φ

	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

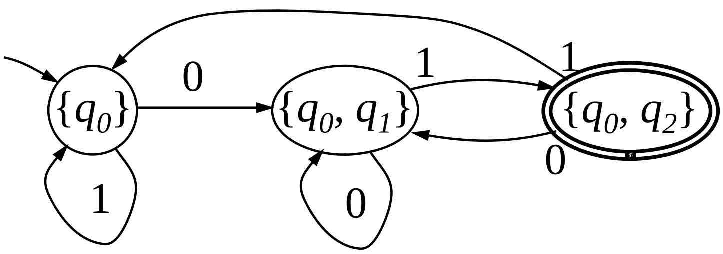
Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata resultado es el siguiente

$$A'=(Q'=\{\{q_0\}, \{q_0,q_1\}, \{q_0,q_2\}\}, \Sigma=\{0,1\}, \delta', q'_0=\{q_0\}, F=\{\{q_0,q_2\}\})$$

  - Donde el diagrama de transiciones de δ es el siguiente:



	0	1
$\rightarrow\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 2

- Considérese el siguiente autómata finito no terminista estudiado anteriormente:

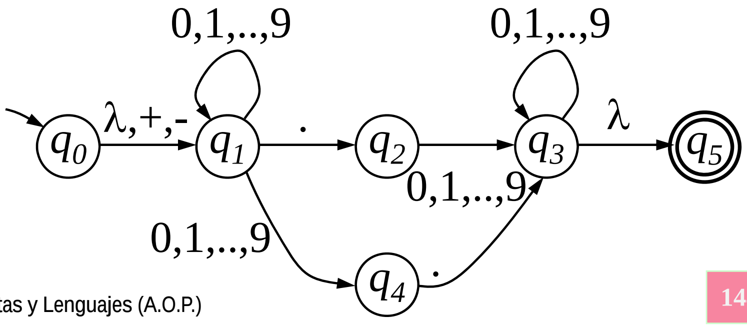
$A=(Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5\},\Sigma=\{0,1,...,9,+,-,\ .\},\delta,q_0,F=\{q_5\})$

  - Donde δ es la siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

Λ^*

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	1	1	0	0	0	0
q_1	0	1	0	0	0	0
q_2	0	0	1	0	0	0
q_3	0	0	0	1	0	1
q_4	0	0	0	0	1	0
q_5	0	0	0	0	0	1



Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

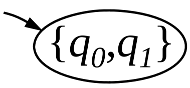
- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\rightarrow \{q_0,q_1\}$			

$\Lambda^*(q_0)=\{q_0,q_1\}$

q_0	1	1	0	0	0	0



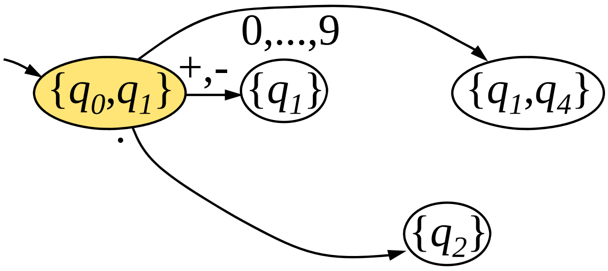
Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\rightarrow \{q_0,q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$

$\Lambda^*(q_1)=\{q_1\}$	q_1	0	1	0	0	0	0
$\Lambda^*(q_2)=\{q_2\}$	q_2	0	0	1	0	0	0
$\Lambda^*(q_4)=\{q_4\}$	q_4	0	0	0	0	1	0



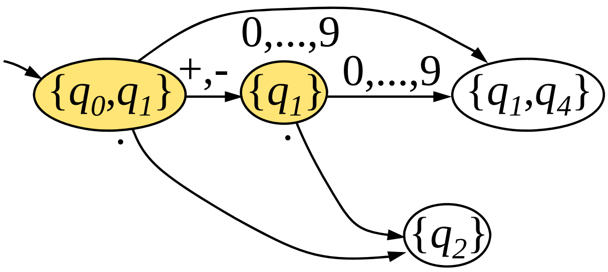
Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\rightarrow \{q_0,q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1\}$		$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$

$\Lambda^*(q_1)=\{q_1\}$	q_1	0	1	0	0	0	0
$\Lambda^*(q_2)=\{q_2\}$	q_2	0	0	1	0	0	0
$\Lambda^*(q_4)=\{q_4\}$	q_4	0	0	0	0	1	0



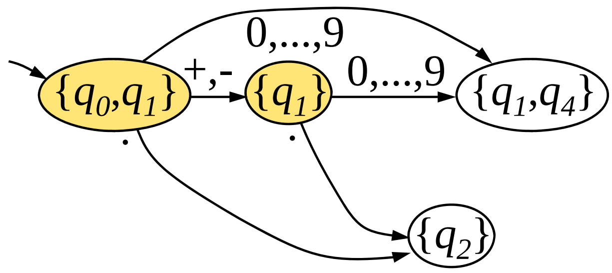
Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\rightarrow \{q_0,q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1\}$		$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1, q_4\}$		$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2, q_3\}$

$\Lambda^*(q_1)=\{q_1\}$	q_1	0	1	0	0	0	0
$\Lambda^*(q_4)=\{q_4\}$	q_4	0	0	0	0	1	0



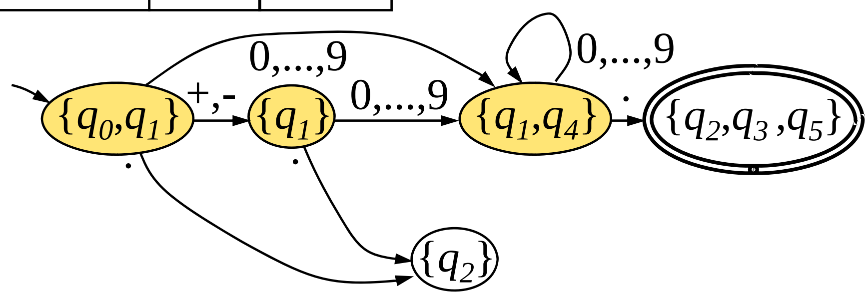
Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\rightarrow \{q_0,q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1\}$		$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1, q_4\}$		$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2, q_3, q_5\}$

$\Lambda^*(q_2)=\{q_2\}$	q_2	0	0	1	0	0	0
$\Lambda^*(q_3)=\{q_3,q_5\}$	q_3	0	0	0	1	0	1



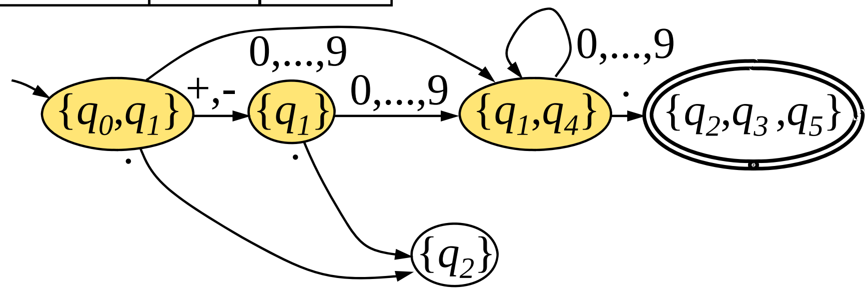
Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\{q_2\}$		$\{q_3\}$	

$\Lambda^*(q_3)=\{q_3,q_5\}$ q_3	0	0	0	1	0	1



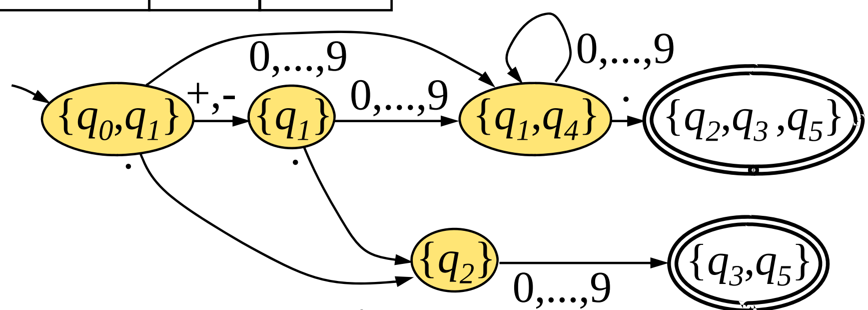
Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\{q_2\}$		$\{q_3, q_5\}$	

$\Lambda^*(q_3)=\{q_3,q_5\}$ q_3	0	0	0	1	0	1



Autómatas finitos no deterministas

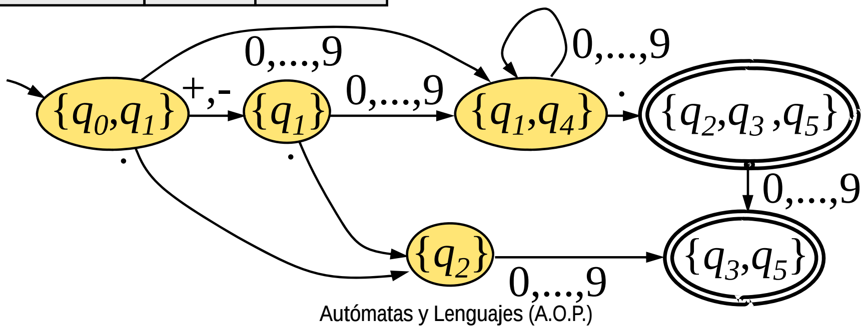
Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\{q_2\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_2, q_3, q_5\}$		$\{q_3\}$	

$\Lambda^*(q_3)=\{q_3,q_5\}$ q_3	0	0	0	1	0	1



Autómatas finitos no deterministas

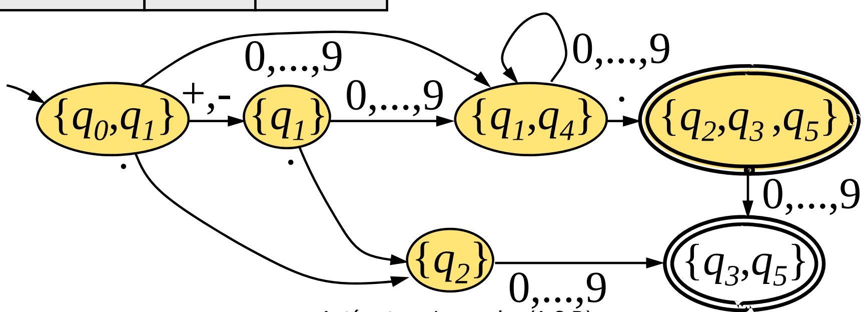
Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\{q_2\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_2, q_3, q_5\}$		$\{q_3, q_5\}$	

$\Lambda^*(q_3)=\{q_3,q_5\}$ q_3	0	0	0	1	0	1



Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

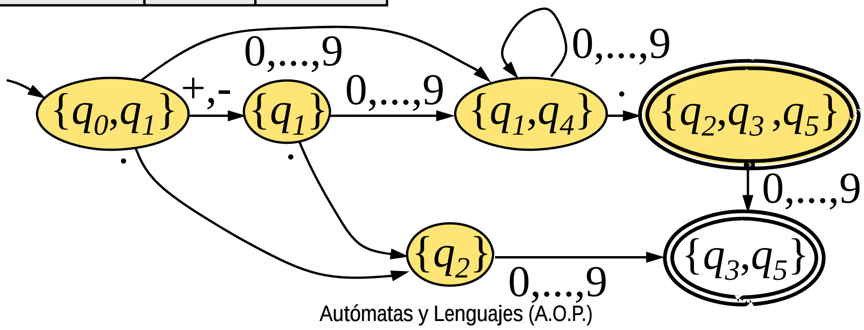
- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\{q_2\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_2, q_3, q_5\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_3, q_5\}$		$\{q_3\}$	

$\Lambda^*(q_3)=\{q_3,q_5\}$

q_3	0	0	0	1	0	1



Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

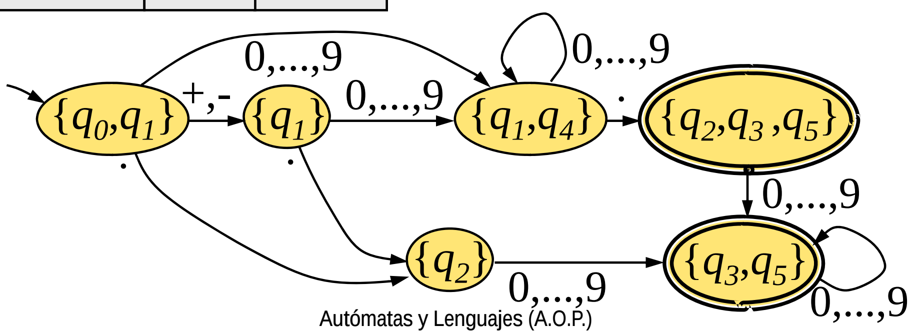
- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\{q_2\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_2, q_3, q_5\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_3, q_5\}$		$\{q_3, q_5\}$	

$\Lambda^*(q_3)=\{q_3,q_5\}$

q_3	0	0	0	1	0	1



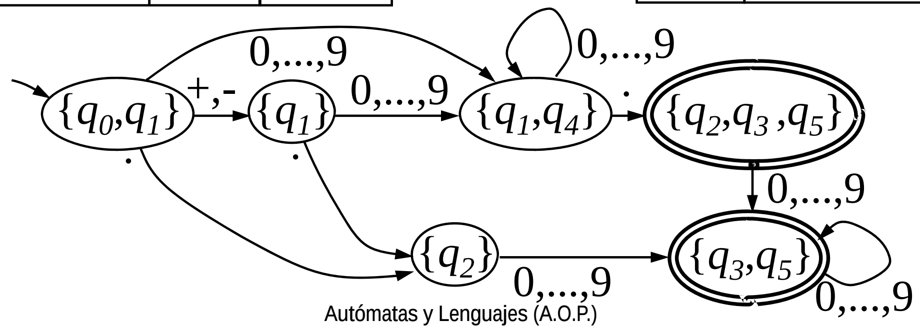
Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata finito determinista equivalente con el algoritmo descrito es el siguiente:

	+,-	0,1,...,9	.	λ
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	Φ	Φ	$\{q_1\}$
q_1	Φ	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$	Φ
q_2	Φ	$\{q_3\}$	Φ	Φ
q_3	Φ	$\{q_3\}$	Φ	$\{*q_5\}$
q_4	Φ	Φ	$\{q_3\}$	Φ
$*q_5$	Φ	Φ	Φ	Φ

	+,-	0,1,...,9	.
$\rightarrow \{q_0,q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1\}$		$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1, q_4\}$		$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2, q_3, q_5\}$
$\{q_2\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_2, q_3, q_5\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_3, q_5\}$		$\{q_3, q_5\}$	



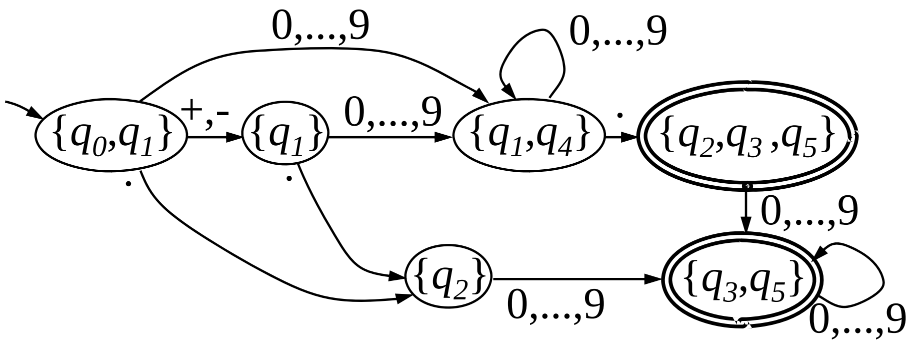
Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- El autómata resultado es el siguiente

$$A'=(Q'=\{\{q_0\}, \{q_0,q_1\}, \{q_0,q_2\}\}, \Sigma=\{0,1\}, \delta', q'_0=\{q_0\}, F=\{\{q_0,q_2\}\})$$

  - Donde el diagrama de transiciones de δ es el siguiente (se omiten sumideros):



Autómatas finitos no deterministas

Equivalencia entre AF y AFN: ejemplo 1

- Y la tabla de transiciones la siguiente (se omiten sumideros):

	+,-	0,1,...,9	.
$\rightarrow \{q_0,q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1\}$		$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1, q_4\}$		$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2, q_3, q_5\}$
$\{q_2\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_2, q_3, q_5\}$		$\{q_3, q_5\}$	
$*\{q_3, q_5\}$		$\{q_3, q_5\}$	

Autómatas Finitos

Bibliografía

[HopcroftUllman03] Hopcroft, J. E.; Motwani, R.; Ullman, J. D.; *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation 2nd edition* Pearson Education.

[Kleene56] Kleene, S. C., *Representations of events in nerve nets and finite automata*. Automata Studies, 3-42, Princeton University Press, Princeton N.J.