

# Sistemas Dinámicos. Caos

D.Faraco y R.Orive

Madrid, Abril 2020

Los puntos de equilibrio se analizan de forma análoga al caso  $n = 2$  aunque se suceden más cosas (caso lineal, Capítulo 4 de [FVV])

- **Puntos silla.**

Índice de inestabilidad, la dimensión de su subespacio inestable. Hay variedades estables e inestables locales e incluso globales (Teorema de Hartman-Grobman).

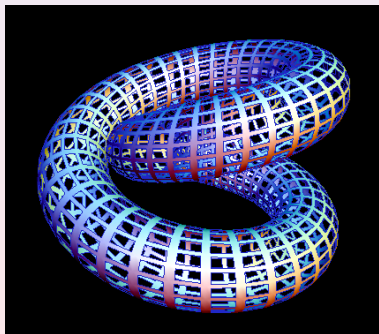
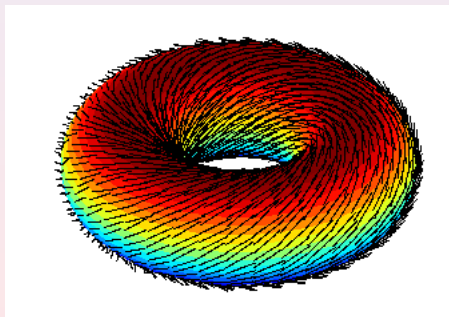
- **Puntos hipérbolicos**, que mantienen su robustez frente a perturbaciones de la ecuación.

- **Órbitas periódicas**, con comportamientos asimilables a los de dimensión 2.

La gran diferencia, **recurrencia**. Decimos una órbita  $\gamma(x_0)$  es **recurrente** si en todo entorno de  $x_0$  existen infinitos puntos de órbita.

# Recurrencia: Toros invariantes

Hay sistemas en  $\mathbb{R}^3$  (sistemas lineales en  $\mathbb{R}^4$ ) poseen **toros invariantes** sobre los que se desplazan trayectorias.



# Recurrencia. Osciladores armónicos

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned}x_1'' &= -\omega_1^2 x_1, \\x_2'' &= -\omega_2^2 x_2.\end{aligned}$$

Introduciendo unas nuevas variables  $y_1 = x_1'$  e  $y_2 = x_2'$ , la solución general viene dada por:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t), \\y_1(t) &= a_2 \cos(\omega_1 t) + b_2 \sin(\omega_1 t), \\x_2(t) &= a_3 \cos(\omega_2 t) + b_3 \sin(\omega_2 t), \\y_2(t) &= a_4 \cos(\omega_2 t) + b_4 \sin(\omega_2 t)\end{aligned}$$

- $\omega_1/\omega_2$  racional: trayectoria periódica.
- $\omega_1/\omega_2$  irracional: trayectoria que recorre el toro sin reencontrarse en ningún punto

En el sistema equivalente

$$x'_j = \omega_j y_j, \quad y'_j = -\omega_j x_j, \quad j = 1, 2,$$

considerando las coordenadas polares  $(r_j, \theta_j)$  tal que

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 \quad \text{y} \quad \tan(\theta_j) = \frac{y_j}{x_j}.$$

Diferenciando estas fórmulas, se obtienen las ecuaciones:

$$r'_j = 0, \quad \theta'_j = -\omega_j.$$

- $r_1$  y  $r_2$  permanecen constantes, 1 en particular.
- $\theta_1$  y  $\theta_2$  son periódicas de periodo  $2\pi$ .
- Las trayectorias recorren un toro de  $\mathbb{R}^4$ .

Pensar en  $\theta_1$  y  $\theta_2$  como variables en un cuadrado de longitud lateral  $2\pi$  donde pegamos los lados opuestos  $\theta_j = 0$  y  $\theta_j = 2\pi$  para hacer el toro  $\mathbb{T}$ .

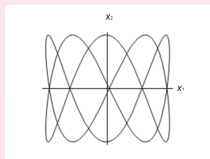
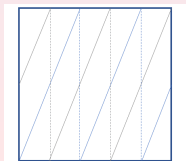
$$\omega_2/\omega_1$$

En  $\mathbb{T}$  nuestro campo vectorial ahora tiene pendiente constante

$$\frac{\theta_2'}{\theta_1'} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \theta_2(\theta_1) = \frac{\omega_2}{\omega_1}\theta_1 + c_0$$

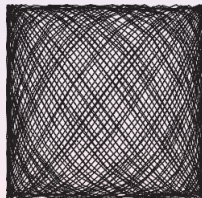
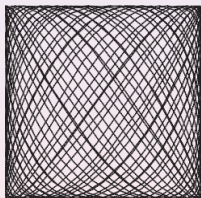
Por lo tanto, las soluciones se encuentran a lo largo de líneas rectas con pendiente  $\omega_2/\omega_1$  en este cuadrado.

- Si  $\omega_2/\omega_1 = n/m$ , entonces la solución comenzando en  $(\theta_1(0), \theta_2(0))$  pasará horizontalmente a través del toro exactamente  $m$  veces y verticalmente  $n$  veces antes de volver a su punto de partida. Ejemplo  $n/m = 5/2$ , con  $\mathbb{T}$  y el plano  $x_1x_2$



## $\omega_2/\omega_1$ , irracional

En el caso irracional, ocurre algo bastante diferente. Vease el plano  $x_1x_2$  despues de avanzar  $t = 50\pi$  y  $100\pi$  para  $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{2}$



Para entender este suceso vamos a recurrir a la función de Poincaré  $f$  (Poincaré map) en la circunferencia: dado  $x_0 \in (0, 2\pi)$

$$x_1 = f(x_0) = x_0 + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ módulo } 2\pi.$$

## $\omega_2/\omega_1$ , irracional

- $\theta_1 = 0$ , el borde izquierdo de  $\mathbb{T}$  (círculo).
- Un punto inicial en esta circunferencia,  $\theta_2 = x_0$ .
- Se continúa la trayectoria hasta llegar a  $\theta_1 = 2\pi$  en tiempo  $\tau = 2\pi/\omega_1 \Rightarrow \theta_2 = x_0 + 2\pi\omega_2/\omega_1$

El conjunto de puntos  $x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_n = f(x_1) = f^n(x_0)$  es la órbita de  $x_0$  bajo la iteración de  $f$

### Theorem

*Suponiendo  $\omega_2/\omega_1$  irracional. Entonces la órbita para cualquier dato inicial  $x_0$  en la circunferencia es densa en ella.*

Demostración, pag. 119 [HSD]. La trayectoria vuelve a estar muy cerca de sus posiciones iniciales una y otra vez a medida que pasa el tiempo debido a la densidad de estas soluciones en el toro. Este tipo de movimientos se conocen como **cuasiperiódicos**.



En 1884, el rey de Suecia decide entregar un premio "a un descubrimiento importante en el ámbito del análisis matemático superior". Mittag Leffler preside el tribunal (junto a Cayley, Chebisev, Hermite y Weierstrass) y los trabajos serían publicados en Acta Mathematica (fundada en 1882).

Henri Poincaré (1854-1912) eligió un problema contenido en la pregunta de si el Sistema Solar es estable para siempre, el "problema restringido de los tres cuerpos". Analizando el conjunto de las trayectorias llega a resultados sorprendentes:

- La existencia de soluciones periódicas
- De soluciones asintóticas
- Teorema de recurrencia
- Teoría de los exponentes característicos
- La **estabilidad**

En enero de 1889, ML notifica a Poincaré que ha obtenido el galardón y entrega a Phragmén el manuscrito (250 páginas) para su edición. Este se cartea con Poincaré para la mejora de su redacción. Poincaré mejora los puntos que le señala pero uno le hace ver que la **estabilidad es FALSA**. Hay trayectorias que se cruzan una infinidad de veces. "Estas intersecciones forman una especie de malla, de tejido, de red con mallas infinitamente apretadas". "Nos asombraríamos de la complejidad de esta figura, que ni siquiera intento trazar." (**Atractor caótico**)

Hace una nueva versión sin la estabilidad y se la envía en noviembre. Llega tarde, el número se ha publicado. Poincaré logra retirar su distribución, y publica el número de sus propios fondos. Poincaré aprovecho y desarrollo todas las consecuencias en *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1893).

# Teoría del Caos

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales en  $\mathbb{R}^n$  con flujo  $\phi_t$ . La teoría del caos tiene tres ingredientes:

- 1 **Movimiento oscilante.** Órbita periódica u órbita cuasiperiódica cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- 2 **Determinismo.** El comportamiento irregular, en dimensión finita, surge de la no linealidad no del azar (estocástico).
- 3 **Sensibilidad a las condiciones.** Condiciones iniciales muy similares acaban dando lugar a comportamientos diferentes pasado un tiempo suficientemente largo (**efecto mariposa**).

Los sistemas caóticos se caracterizan por ser modelizables mediante un sistema dinámico que posee un **atractor**  $\Lambda$ . Se caracteriza:

- 1  $\Lambda$  es un cjto de  $\mathbb{R}^n$  compacto e invariante
- 2  $\exists$  abierto  $U \supseteq \Lambda$  tq  $\forall x \in U, \phi_t(x) \in U$  y  $\bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_t(U)} = \Lambda$ .
- 3 **Transitividad.** Dados  $y_1, y_2 \in \Lambda$  y  $U_j$  entornos de  $y_j$ , hay una solución que empieza en  $U_1$  y luego pasa por  $U_2$

# Atractor extraño

Dentro de los atractores se define como **atractor extraño** cuando el atractor exhibe dependencia sensible de las condiciones iniciales.

La más famoso de todas las ecuaciones diferenciales caóticas es el sistema formulado en 1963 por **Lorenz** como un simplificado enormemente modelo de convección atmosférica.

Lorenz consideró una celda de fluido bidimensional que se calienta desde abajo y se enfría desde arriba. Después de una fuerte simplificación se queda con tres variables:

- la tasa de "vuelco" convectivo  $x$
- la variación de temperatura horizontal y vertical,  $y$  y  $z$  respectivamente.

El movimiento resultante condujo a un sistema 3D de ecuaciones diferenciales. que involucraba tres parámetros: el número de Prandtl  $\sigma > 0$ , el de Rayleigh  $r > 0$ , y otro parámetro  $b > 0$  ( $\sigma > b + 1$ ) que está relacionado con el tamaño físico.

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

Es invariante a la transformación:  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ .

Los tres puntos de equilibrio son:

$$(0, 0, 0), \quad Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

**Origen.** Los autovalores de su ecuación linealizada son  $-b$  y

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right)$$

- El origen es un pozo si  $0 \leq r < 1$
- $r = 1$  es un punto de bifurcación
- El origen es punto silla para  $r > 1$

**Puntos  $Q_{\pm}$ .** La matriz linealizada es:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -Q_{\pm} \\ Q_{\pm} & Q_{\pm} & -b \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (1 + \sigma + b)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

- Como  $\sigma > b + 1$ ,  $Q_{\pm}$  son pozos para

$$1 < r < r^* = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$$

- $r^*$  es una birfucación de Hopf

- Cuando  $r > 1$ , todas las soluciones que comienzan lejos del origen son atraídas a un conjunto dentro del elipsoide:

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = \nu^*,$$

para un cierto valor  $\nu^*$ .

- Sea  $\Lambda$  el conjunto de todos los puntos cuyas soluciones permanecen para siempre (hacia adelante y hacia atrás) en este elipsoide.
- El conjunto de  $\omega$ -límites de cualquier solución del sistema Lorenz debe estar en  $\Lambda$ .
- Cuando  $1 < r < r^*$ ,  $\Lambda = \{Q_{\pm}\}$
- Para  $r \geq r^*$ , ¿quién es?

$$|\Lambda| = 0$$

### Theorem (Teorema de Liouville)

Sea  $D$  una región de  $\mathbb{R}^3$  con frontera suave y sea  $D(t) = \phi_t(D)$  dado por un campo autónomo  $F(X)$ . Sea  $v(t)$  el volumen de  $D(t)$ . Entonces

$$\frac{dv}{dt} = \int_{V(t)} \operatorname{div}(F) dX$$

Aplicando este teorema al sistema de Lorenz al elipsoide  $V = \nu^*$ , se tiene

$$\frac{dv}{dt} = -(\sigma + 1 + b)v$$

Entonces, el volumen de  $\Lambda$  es 0.



$$|\Lambda| = 0$$

### Theorem (Teorema de Liouville)

Sea  $D$  una región de  $\mathbb{R}^3$  con frontera suave y sea  $D(t) = \phi_t(D)$  dado por un campo autónomo  $F(X)$ . Sea  $v(t)$  el volumen de  $D(t)$ . Entonces

$$\frac{dv}{dt} = \int_{V(t)} \operatorname{div}(F) dX$$

Aplicando este teorema al sistema de Lorenz al elipsoide  $V = \nu^*$ , se tiene

$$\frac{dv}{dt} = -(\sigma + 1 + b)v$$

Entonces, el volumen de  $\Lambda$  es 0.

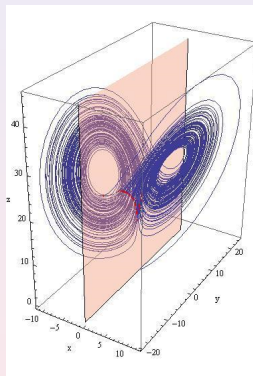
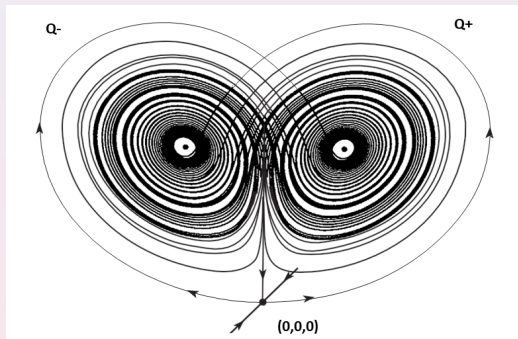
# Atractor de Lorenz

Sistema de Lorenz donde los parámetros están dados por  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  y  $r = 28$ :

$$\begin{cases} x' = 10(y - x) \\ y' = 28x - y - xz \\ z' = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

- Puntos de equilibrio:  $0$  y  $Q_{\pm} = (\pm\sqrt{72}, \pm\sqrt{72}, 27)$
- Autovalores en  $0$ :  $\lambda_1 = -8/3$  y  $\lambda_{\pm} = (-11 \pm \sqrt{1201})/2$ .
- Autovalores en  $Q_{\pm}$ : un único valor propio negativo real y un par de autovalores conjugados complejos con partes reales positivas, (inestables).
- La simetría en el sistema obliga a las rotaciones sobre  $Q_+$  y  $Q_-$  a tener orientaciones opuestas.

# Atractor de Lorenz



Las curvas cruzan repetidas veces una porción del plano  $z = 27$  que contiene  $Q_{\pm}$ . Esto sugiere

- Construir un Poincaré map  $\Phi$  (muy difícil).
- Construir un modelo simplificado que imite el comportamiento que encontramos en el sistema de Lorenz. **Ejercicio**

# Atractor de Lorenz

El mapa de Poincaré  $\Phi$  se determina por la sección  $\Sigma$  del plano  $z = 27$  que se corta transversalmente por las trayectorias de flujo.  $\Phi = (f(x, y), g(y))$  está completamente determinado por la dinámica de la función unidimensional  $g$  definida en el intervalo  $[-y^*, y^*]$ .

La iteración de  $g$  determina completamente el comportamiento de todas las soluciones en el atractor.

## Theorem

*El mapa de Poincaré  $\Phi$  restringido al atractor  $\Lambda$  para el modelo Lorenz tiene las siguientes propiedades:*

- 1. tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales;*
- 2. los puntos periódicos son densos en  $\Lambda$ ;*
- 3. es transitivo en  $\Lambda$ .*

Demostración por Tucker (2002) utilizando métodos numéricos rigurosos de aritmética de intervalos y formas normales.