Economía y finanzas matemáticas
Optativa del grado en Matemáticas, UAM, 2020-2021

Hoja 3 (modelos matriciales)

1. Las acciones de las compañías A y B cotizan hoy a 108 y 3 euros, respectivamente. En nuestro modelo, con plazo de 1 mes, proponemos que, o bien la cotización de A pasará a valer 120 y la de B será 2, o bien la de A pasará a ser 85, y la de B será 5.

¿Hay oportunidades de arbitraje en el modelo? ¿Cuál es el factor de descuento a un mes en este modelo? Calcula la cartera de réplica del bono. (¡Y usa fracciones!).

2. Consideramos un modelo de mercado financiero con

- dos instantes de tiempo, $t = 0$ y $t = 1$ año,
- dos escenarios en $t = 1$: up y down,
- y dos instrumentos de mercado: la cuenta bancaria y una acción S.

El tipo de interés (anual, simple) es $r = 1\,\%$. La cotización de S hoy es 7, y en $t = 1$ puede ser 9 (en el escenario up) o 3 (en el down).

a) Comprueba que en el modelo no hay oportunidades de arbitraje.

b) Valora el instrumento Z que paga 12 en el escenario up, y -12 en el down.

c) Halla la composición de la cartera de cobertura del instrumento Z.

3. Consideramos un modelo de mercado financiero con

- dos instantes de tiempo, $t = 0$ y $t = 1$,
- dos escenarios en $t = 1$: up y down,
- y dos instrumentos de mercado: S_1 y S_2.

El activo S_1

- cotiza hoy a 10;
- y paga 15 en el escenario up y 5 en el down.

El activo S_2

- cotiza hoy a x;
- y paga 1 en el escenario up y -1 en el down.

Halla el rango de valores de x para el que no hay arbitraje en el modelo.

4. En un modelo matricial con cuatro estados $\{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$ consideramos, como activos básicos, los cuatro siguientes: el bono; un subyacente que toma los valores S_1, S_2, S_3, S_4 en cada uno de los escenarios; una call sobre ese subyacente con strike K y una put sobre el subyacente con ese mismo strike. Comprueba que el mercado no es completo. ¿Por qué no lo es?

5. Considera el siguiente modelo matricial:

$$
\text{precios hoy} \to \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad \text{flujos en } t=1 \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{matrix} & \end{array}
$$

a) Comprueba si el mercado es completo.

b) Prueba que no existen oportunidades de arbitraje.

c) Valora el activo que paga 1, 2 y 3 en los escenarios ω_1, ω_2 y ω_3, respectivamente.

d) Supongamos que el precio hoy del tercer activo es 1/3, en lugar de 0.1. Comprueba que hay oportunidades de arbitraje; halla una.

6. Considera el siguiente modelo matricial:

$$
\text{precios hoy} \to \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{flujos en } t=1 \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{matrix} & \end{array}
$$

a) ¿Es completo el mercado? Describe los activos que son replicables en este mercado.

b) ¿Cuánto deberá valer x para que no haya oportunidades de arbitraje en el modelo?

c) Escoge para x el valor obtenido en el apartado anterior y toma como numerario el activo S_1. Halla todas las probabilidades de valoración asociadas a este numerario.

d) Comprueba que el activo $X = (1, 2, 3, 4)$ no es replicable. ¿Qué rango de precios le podemos asignar?

7. Tenemos un modelo matricial con estados $\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. Supongamos que para un cierto numerario $\mathbf{N}$ ya hemos hallado una probabilidad $p_1, \ldots, p_k$ de valoración asociada. Ahora tomamos un numerario distinto, $\mathbf{M}$.

¿Podrías calcular una probabilidad $q_1, \ldots, q_k$ de valoración asociada a $\mathbf{M}$? (en términos, claro, de los $p_1, \ldots, p_k$ y de los valores de $\mathbf{N}$ y $\mathbf{M}$ en tiempos $t = 0$ y $t = 1$).

(Sugerencia: argumenta con el precio de un activo replicable cualquiera).

8. Tenemos un modelo matricial con estados $\{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ y activos $\{S_1, \ldots, S_M\}$. Los activos son linealmente independientes, y se tiene que $M < N$, de manera que el mercado no será completo.

Sea $\mathcal{X}$ un activo cualquiera (quizás replicable, quizás no), cuyos flujos vienen dados por $X = (X(\omega_1), \ldots, X(\omega_N))$.

Una cartera $\mathcal{C}$ viene dada por $(\alpha_1, \ldots, \alpha_M)$, donde cada α_j indica el número de unidades del activo S_j. Sus flujos en tiempo $t = 1$ vienen dados por

$$
C = \Big(\sum_{j=1}^{M} \alpha_j \, S_j(\omega_1), \ldots, \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \, S_j(\omega_N) \Big).
$$

Halla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_M)$ para minimizar $\|X - C\|^2$ (esto es, halla la cartera $\mathcal{C}$ cuyos flujos estén los más cerca posible de los de $\mathcal{X}$ en el sentido de los mínimos cuadrados).

(Se pide que escribas el sistema de ecuaciones que determina $(\alpha_1, \ldots, \alpha_M)$).