$\boxed{57.}$ $M \subseteq \mathbb{R}^2$ cuyas coords. polares satisfacen $r = \dfrac{6}{1-2\cos\theta}$

1. Encontrar $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞ y tal que:
   a. $M = f^{-1}(\{0\})$
   b. $Df(x)$ tiene rango 1 $\forall x \in M$

$f = f(x,y)$ $\qquad x = r\cos\theta$

$\qquad\qquad\qquad y = r\operatorname{sen}\theta$

$r(1-2\cos\theta) = 6 \Rightarrow r - 2r\cos\theta = 6 \Rightarrow r - 2x = 6 \Rightarrow r = 6+2x \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = (6+2x)^2$;

$x^2 + y^2 - (6+2x)^2 = 0$ sobre puntos $(x,y) \in M$

Voy a probar que $f(x,y) = x^2 + y^2 - (6+2x)^2$

$M \subseteq f^{-1}(0)$ por como he construido f.

$f^{-1}(0) \subseteq M$ porque podemos hacer el camino para atrás en cada una de las implicaciones anteriores.

$Df(x,y) = \left(2x - 2(6+2x).2 \quad 2y\right)$

Si $\operatorname{rango} Df(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2(6+2x).2 = 0 \\ \wedge \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -4$, $y = 0$ $\quad$ Pero $(-4,0)$, $f(-4,0) = 16 - (-2)^2 = 12 \neq 0$

El ! punto donde $\operatorname{Rang} Df = 0$ no está en $M \Rightarrow \operatorname{Rg} Df = 1$ $\forall (x,y) \in M$

$\Rightarrow$ Como $M = f^{-1}(\{0\})$ cumple a., b. entonces M es variedad (de dim $= 2-1 = 1$)

2. Decide si $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$X(t) = (-4 + 2\cosh t,\ 2\sqrt{3}\,\operatorname{senh} t)$ define un sistema de coords

en M, o en algún subconjunto de M.

Como M es variedad basta ver tres cosas:

(1) $X(\mathbb{R}) \subseteq M$

(2) X es inyectiva

(3) dX_t tiene rango máximo $\forall t \in \mathbb{R}$ (en este caso, $\operatorname{Rg} dX_t = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$

(1) $t \in \mathbb{R}$ $\quad x = -4 + 2\cosh t$
$\quad y = 2\sqrt{3}\,\operatorname{senh} t$

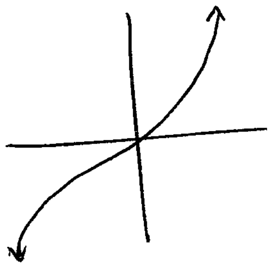
Como $M = f^{-1}(0)$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + (6+2x)^2$ basta ver si
$(-4+2\cosh t)^2 + (2\sqrt{3}\,\operatorname{senh} t)^2 + (6+8+4\cosh t)^2 = 0$?

Sustituimos $\cosh^2 t = \operatorname{senh}^2 t + 1$ y desarrollamos ✓

(2) Si $X(t) = X(t')$, $t, t' \in \mathbb{R}$

$2\sqrt{3}\,\operatorname{senh} t = 2\sqrt{3}\,\operatorname{senh} t' \Rightarrow t = t'$

senh x es inyectiva



(3) $dX_t = (2\operatorname{senh} t,\ 2\sqrt{3}\cosh t)$

$\operatorname{Rg} = 1$ dado que $2\sqrt{3}\,\underbrace{\cosh t}_{\geq 1} \neq 0$

$\boxed{58.}$ $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2^3 - x_1x_2 - x_3 = 0\}$

(A)

1. Demostrar que M es una C^∞- subvariedad 2-dimensional de $\mathbb{R}^3$.

¿ Rango máximo?

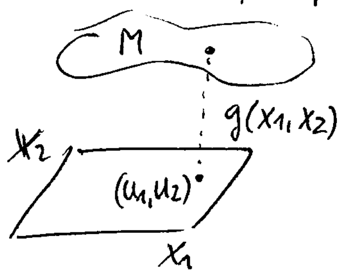
$f(x_1,x_2,x_3) = x_2^2 - x_1x_2 - x_3$ | hay que demostrar que es

$Rg\, Df = 1 \quad \forall x \in f^{-1}(0)$ | de rango máximo

$x_3 = x_2^3 - x_1x_2 = g(x_1,x_2)$

$M = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_3 = g(x_1,x_2)\}$ que es el grafo de la funció

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, que es C^∞ $\Rightarrow$ M es una subvariedad de dim



2. $X: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad X(u_1,u_2) = (u_1,u_2,\, u_2^3 - u_1u_2)$

$u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$

a) inyectividad de X en $\mathbb{R}^2$, $\quad M = X(\mathbb{R}^2)$

b) $DX(u)$ rango 2 $\forall u \in \mathbb{R}^2$ $\quad \ldots \quad \begin{pmatrix} \vdots & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \vdots & - \; - \; - \end{pmatrix}$ ✓

c) $X^{-1}: M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua

$X^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$

$X^{-1}: M \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\shortparallel$

$\pi|_M$ donde $\pi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua

$(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow (x_1,x_2)$

$\Rightarrow$ Como π continua y $X^{-1} = \pi|_M$, X^{-1} continua

b) $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ proyección ortogonal ... $(x_1, 0, x_3)$

$$Y = \pi \circ X.$$

1. $S = \{u \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{Rg} DY(u) \neq 2\}$

Comprobar $\Gamma = Y(S)$ con $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1^3 = 27x_3^2 \ , \ x_2 = 0\}$

$$Y(u_1, u_2) = (u_1, 0, u_2^3 - u_1 u_2)$$

$$DY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -u_2 & 3u_2^3 - u_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -u_2 & 3u_2^3 - u_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 3u_2^2 - u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 3u_2^2$$

$$\Gamma = Y(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1^3 = 27x_3^2 \ , \ x_2 = 0\}$$

Si $(u_1, u_2) \in S$, $u_1 = 3u_2^2$

$$Y(u_1, u_2) = (u_1, 0, u_2^3 - u_1 u_2) = (3u_2^2, 0, u_2^3 - 3u_2^3) = (3u_2^2, 0, -2u_2^3)$$

$$4(3u_2^2)^3 = 27(-2u_2^3)^2 \ \text{ y } \ x_2 = 0 \ \checkmark \quad \Rightarrow Y(S) \subseteq \Gamma$$

Si $(x_1, 0, x_3) \in \Gamma$, $\exists x_1 = 3u_2^2$, $x_3 = -2u_2^3$ para algún u_2

$$\Rightarrow u_2 = \left(-\tfrac{1}{2}x_3\right)^{1/3}$$

Comprobar que si $u_2 = \left(-\tfrac{1}{2}x_3\right)^{1/3}$ da x_1, x_3 pedidos.

2. ¿Es Γ subvariedad 1-dim de $\mathbb{R}^3$?

Podríamos poner $\varphi(u_2) = (3u_2^2, 0, -2u_2^3)$

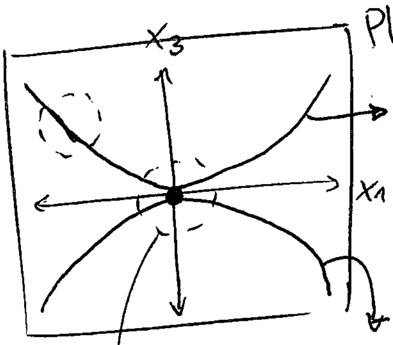
$$d\varphi = (6u_2, 0, -6u_2^2)$$

$d\varphi_0 = (0,0,0) \Rightarrow \varphi$ no es sist. de coordenadas cerca de 0.

No es variedad 0-dim ó 2-dim por el rango.

Basta ver que no lo es de dim 1.

Plano $x_2 = 0$

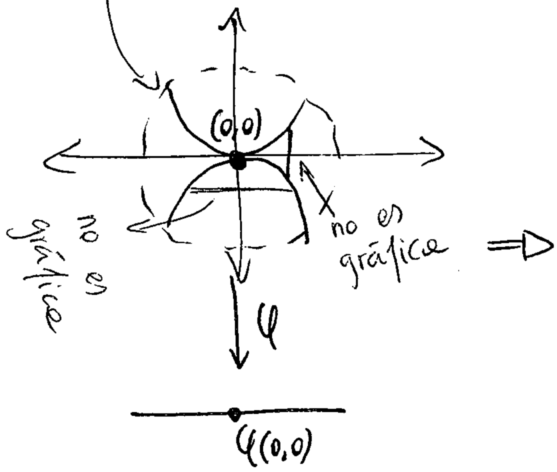


$x_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} x_1^{3/2}$

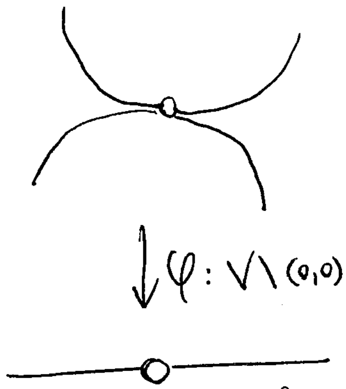
$$4x_1^3 = 27x_3^2$$

$$\frac{4}{27}x_1^3 = x_3^2$$

$x_3 = \frac{-2}{3\sqrt{3}} x_1^{3/2}$



$\Longrightarrow$



$\varphi : V \setminus (0,0) \longrightarrow \varphi(V) - \varphi(0)$

homeomorfismo (no lo es)

$\boxed{59.}$ $f(x,y) = x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + y^3$

$$L_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = c\}$$

1. Demostrar L_c se obtiene por homotecia de L_1, L_0 ó L_{-1}.

$(x,y) \in L_c \quad x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + y^3 = c$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{x}{|c|^{1/3}}\right)^3 - 4\left(\frac{x}{|c|^{1/3}}\right)^2\left(\frac{y}{|c|^{1/3}}\right) + 2\left(\frac{x}{|c|^{1/3}}\right)\left(\frac{y}{|c|^{1/3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{|c|^{1/3}}\right)^3 = \pm 1$$

$c > 0$ ó $c < 0$

Si $(x,y) \in L_c$, $(x,y) = H_{|c|^{1/3}}\underbrace{\left(\frac{x}{|c|^{1/3}}, \frac{y}{|c|^{1/3}}\right)}_{\in L_1}$

$$L_c = H_c(L_{\pm 1}) \quad \checkmark$$

$f(x,y)$

$$Df(x,y) = (\underset{\overset{\|}{0}}{3x^2 - 8xy + 2y^2}, \underset{\overset{\|}{0}}{-4x^2 + 4xy + 3y^2})$$

$\Rightarrow (x,y) \in ¿\, f^{-1}(1)$?

$$\underbrace{x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + y^3}_{(x-y)(x^2-3xy-y^2)} = 0$$

$$(x-y)(x^2-3xy-y^2) = (x-y)\left(x - \frac{3+\sqrt{13}}{2}y\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{13}}{2}y\right) = f(x,y)$$

$$x = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2+4y^2}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}\, y$$

$$x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + y^3 = 1$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} u = x - y \\ v = x - \alpha y \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

$$uv(au + bv) = 1$$

$$avu^2 + buv^2 - 1 = 0$$

$$u = \frac{-bv^2 \pm \sqrt{b^2v^4 - 4a^2v^2}}{2av}$$

deshacer el cambio

$\boxed{60.}$

(B)

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2$$

Puntos críticos: $\quad 2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\operatorname{Rg} Df = 0 \qquad 2(x_1 + \cdots + x_3) = 0$

Puntos críticos: $\forall (x_1, x_2, x_3)$ con $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

(1) Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 - 1)^2 \neq 0 \Rightarrow x_1 + \cdots + x_3 - 1 \neq 0 \Rightarrow$

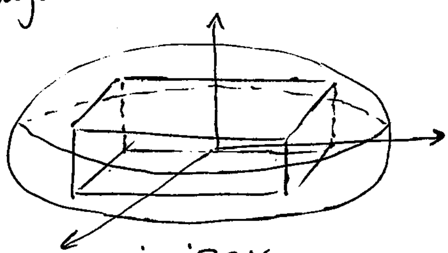
$\Rightarrow \operatorname{Rg} Df = 1 \Rightarrow f^{-1}(\lambda)$ es variedad de dim $3 - 1 = 2$

(2) Si $\lambda = 0 \qquad f^{-1}(0) = \{x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \Rightarrow$ es variedad

inacabado

$\boxed{65.}$ Dimensiones de la caja de mayor volumen inscrita en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Basta considerar (x, y, z), $x, y, z \geq 0$ y maximizar

$V(x, y, z) = xyz$ (por simetría) sujeta a la condición $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} =$

$$F(\bar{x}, \lambda) = xyz - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= yz - \lambda \frac{2x}{a^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= xz - \lambda \frac{2y}{b^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= xy - \lambda \frac{2z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} &+ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a^2 yz &= 2\lambda x \\ b^2 xz &= 2\lambda y \\ c^2 xy &= 2\lambda z \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &+ \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$a^2xyz = 2\lambda x^2$$
$$b^2xyz = 2\lambda y^2$$
$$c^2xyz = 2\lambda z^2$$
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} xyz = 2\lambda \frac{x^2}{a^2} = 2\lambda \frac{y^2}{b^2} = 2\lambda \frac{z^2}{c^2} \\ \Downarrow \\ \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad \text{junto con} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

$$a, b, c > 0 \Longrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}},\ y = \frac{b}{\sqrt{3}},\ z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$\boxed{54.}$ $x \in \mathbb{R}^4$ $\quad f(x) = x_1^2 + x_2^2$

Extremos de f sujetos a la restricción $\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4 \\ x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 = 9 \end{array} \right.$

$\to g_2 = x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2$

$\to g_1 = x_1^2 + x_3^2 + x_4^2$

$$F(\overbrace{x, \lambda_1, \lambda_2}^{\lambda}) = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{f} - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$$

$$\nabla f - \lambda_1 \nabla g_1 - \lambda_2 \nabla g_2 = 0$$

$$(x_1, x_2, 0, 0) - \lambda_1(x_1, 0, x_3, x_4) - \lambda_2(0, x_2, 2x_3, 3x_4) = 0$$

$$\nabla g_1 = 2(x_1, 0, x_3, x_4)$$
$$\nabla g_2 = 2(0, x_2, 2x_3, 3x_4)$$

$$\Longrightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 x_1 \\ x_2 = \lambda_2 x_2 \\ 0 = \lambda_1 x_3 + 2\lambda_2 x_3 \\ 0 = \lambda_1 x_4 + 3\lambda_2 x_4 \\ x_1^2 + x_3^2 + x_1^2 = 4 \\ x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 = 9 \end{array} \right\}$$

CASO 1 $\quad x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 1 = \lambda_2$$
$$3x_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = 0$$
$$4x_4 = 0 \Longrightarrow x_4 = 0$$
$$\left. \begin{array}{l} x_1^2 = 4 \\ x_2^2 = 9 \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{(\pm 2, \pm 3, 0, 0)}$$

CASO 2 $\quad x_1 = 0, \quad x_2 \neq 0 \implies \lambda_2 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} (2+\lambda_1)x_3 = 0 \\ (3+\lambda_1)x_4 = 0 \\ x_3^2 + x_4^2 = 4 \\ x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 = 9 \end{array}\right\}$$

CASO 2.1: Si $x_3 = 0$, $x_4 = \pm 2$

$\implies \lambda_1 = -3$

$x_2^2 + 12 = 9 \longrightarrow \nexists$ sol $\mathbb{R}$

CASO 2.2: $x_3 \neq 0 \quad \lambda_1 = -2$

$x_1 = 0 \quad x_3 = \pm 2$

$x_2^2 + 8 + 0 = 9 \longrightarrow x_2 = \pm 1$

$(0, \pm 1, \pm 2, 0)$

CASO 3: $x_1 \neq 0, \quad x_2 = 0$

CASO 4: $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$

$\boxed{67.}$

1) Maximizar $f(x,y) = ax + by$ con $a,b \geq 0$, $x,y \geq 0$ y sujeta a la condición $g(x,y) = 1$, siendo $g(x,y) = x^p + y^p$ con $p > 1$ fijo fijo.

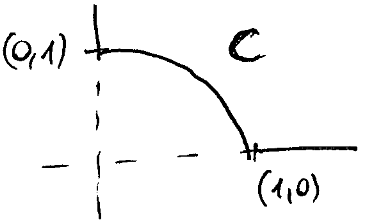
Existencia del máximo:

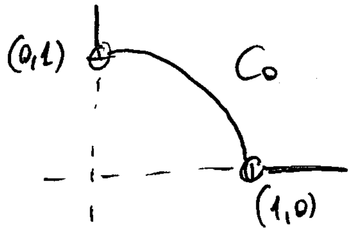
Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0,\ g(x,y) = 1\}$

C es cerrado por ser intersección de cerrados y g continua.
C es acotado porque si $(x,y) \in C \Rightarrow x,y \geq 0$ y además $x^p + y^p = 1 \Rightarrow 0 \leq x^p, y^p \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x,y \leq 1$

Como f es continua, alcanza un máximo en C, que es compac

El interior relativo de C es $C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0,\ g(x,y) = 1\}$





Variedad en $\mathbb{R}^2$ porque $C_0 = \{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = 1\}$

siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0\}$ (abierto en $\mathbb{R}^2$) y $g(x,y) = x^p + y^p$
$(\nabla g(x,y) = (px^{p-1}, py^{p-1}))$.

El borde relativo de C es $\overline{C} \setminus C_0 = C \setminus C_0$ (porque C cerrado)
$= \{(1,0), (0,1)\}$

En estos puntos f vale o bien a o bien b.

Si en C_0 hay algún extremo relativo, se debe cumplir C
Condición de Lagrange $\Leftrightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Updownarrow$

- $\nabla f(x,y) = (a,b)$
- $\nabla g(x,y) = (px^{p-1}, py^{p-1})$

$$\begin{cases} a = px^{p-1}\lambda \\ b = py^{p-1}\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Si a ó $b \neq 0$ $(1) \Rightarrow \lambda \neq 0$
Si $a = b = 0$, problema trivial $\rightarrow f = 0$

Si $b \neq 0$, (1) $\Rightarrow$ $0 < t = \frac{a}{b} = \left(\frac{x}{y}\right)^{p-1}$ (he eliminado λ)

$\Rightarrow \frac{x}{y} = t^{1/p-1}$; $x = y\, t^{1/p-1}$

Si $g(x,y) = 1$ (la condición) $\Rightarrow$ $1 = x^p + y^p = y^p\left(1 + t^{\frac{p}{p-1}}\right)$

Observemos que $p' = \frac{p}{p-1} \in (1,\infty)$ es el exponente conjugado de $p \in (1,\infty)$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Rightarrow p' = \frac{p}{p-1}$

Maximizar $ax + by$ sujeto a $g(x,y) = x^p + y^p = 1$ $\begin{pmatrix} a,b \geq 0 \\ x,y \geq 0 \end{pmatrix}$

Si $b \geq 0$ y $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$;

$$(x,y) \in C = \{(t,s) : t,s \geq 0 ,\ t^p + s^p = 1\}$$

$$0 \leq t = \frac{a}{b} = \left(\frac{x}{y}\right)^{p-1}$$ (eliminando λ: multiplicador)

Tengo que imponer $1 = g(x,y) = x^p + y^p = y^p(1 + t^{p'}) =$

$$= y^p\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{p'}\right) = y^p\, \frac{a^{p'} + b^{p'}}{b^{p'}} \Rightarrow y^p = \frac{b^{p'}}{a^{p'} + b^{p'}} \in [0,1]$$

$$\longrightarrow x^p = 1 - y^p = \frac{a^{p'}}{a^{p'} + b^{p'}}$$

$$x_0 = \left(\frac{a^{p'}}{a^{p'} + b^{p'}}\right)^{1/p} , \quad y_0 = \left(\frac{b^{p'}}{a^{p'} + b^{p'}}\right)^{1/p} ,$$

es el único pto. crítico de f en $C_0 = C \setminus \{(1,0),(0,1)\}$

Queremos ver que f alcanza un máximo en C en $p = (x_0, y_0)$

Compacto $\Rightarrow$ f alcanza un máximo en C.

Si lo hiciera en C_0 (variedad), el único punto donde lo podría hacer sería en p.

Para asegurar que es máximo basta ver que $f(p) \geq \max\{f(0,1), f(1,0)\}$

$$f(p) = ax_0 + by_0 = \frac{a^{1+p'/p} + b^{1+p'/p}}{(a^{p'} + b^{p'})^{1/p}} = \frac{a^{p'} + b^{p'}}{(a^{p'} + b^{p'})^{1/p}} = (a^{p'} + b^{p'})^{1 - 1/p} =$$

$$= (a^{p'} + b^{p'})^{1/p'}$$

$$1 + \frac{p'}{p} = p'$$

Supongamos $a \geq b > 0$

$f(p) > (a^{p'})^{1/p'} = a = \max\{f(0,1), f(1,0)\}$

p es máximo global además de local.

$\max_{(x,y)\in C} f(x,y) = f(p)$ ∎

2) Probar que si $x, y \geq 0$ y $a, b \geq 0$

$$ax + by \leq (x^p + y^p)^{1/p}(a^{p'} + b^{p'})^{1/p'}$$

Si $x^p + y^p = 1$ es lo demostrado en el apartado anterior.

Si x ó $y = 0$ es trivial.

Si $x = 0$ $ax + by = by$; $(x^p + y^p)^{1/p}(a^{p'} + b^{p'})^{1/p'} = \underbrace{y \underbrace{(a^{p'} + b^{p'})^{1/p'}}_{\geq b}}_{\geq by}$

Podemos suponer $x, y > 0$.

Sea $(x', y') = \left(\frac{x}{(x^p + y^p)^{1/p}}, \frac{y}{(x^p + y^p)^{1/p}}\right)$ con $x'^p + y'^p = 1$

$$\Rightarrow f(x', y') \leq (a^{p'} + b^{p'})^{1/p'}$$

$$\frac{f(x,y)}{(x^p + y^p)^{1/p}} \Rightarrow f(x,y) \leq (x^p + y^p)^{1/p}(a^{p'} + b^{p'})^{1/p'}$$

(f es lineal)

3) Usar 2 para probar $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{p'}\right)^{p'}$

$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0$

Observamos que en 2) tenemos el caso con $n=2$.
Vamos a proceder por inducción. Suponemos que se cumple para $n \geq 1$.

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_j y_j = x_{n+1}y_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq x_{n+1}y_{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n} x_j^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{p'}\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq \left[x_{n+1}^{p} + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{p}\right)^{p/p}\right]^{1/p} \cdot \left[y_{n+1}^{p'} + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{p'}\right)^{p'/p'}\right]^{1/p'} =$$

so $n=2$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n+1} x_j^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j^{p'}\right)^{1/p'} \blacksquare$$

$\boxed{68.}$

a) Probar que $n^n \prod_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \|x\|^{2n}$

Consideramos $f(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^2$ en $S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\|x\|^2}_{g(x)} = 1 \}$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 2x_i \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}} x_j^2 \quad , \quad \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = 2x_i$$

Entonces si $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \iff \begin{cases} a) \ \exists i \text{ entre } 1 \text{ y } n \text{ con } x_i = 0. \\ b) \ \forall x_i \neq 0 \text{ y entonces} \\ \quad \partial f(x) = \dfrac{2f(x)}{x_i} = 2x_i \end{cases}$

Si estamos en b $\quad \dfrac{2f(x)}{x_i} = 2x_i \lambda \quad (i = 1, \dots, n)$

y como $f(x) > 0$ (por ser $x_1, \dots, x_n \neq 0$) $\Rightarrow \lambda \neq 0$

$$\frac{f(x)/x_i}{f(x)/x_j} = \frac{x_j \lambda}{x_i \lambda} \Rightarrow t = \frac{x_j}{x_i} \text{ cumple } t = t^{-1} \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |x_1| = \cdots = |x_n| > 0$

Imponiendo $(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} \Rightarrow |x_1| = \cdots = |x_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y

$x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ $\quad 2^n$ posibilidades

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j^2}{n} = \frac{1}{n^n} > 0$$

Como en la variedad no hay más puntos críticos, estos puntos corresponden al máximo global de f.

$\Rightarrow \max_{x \in S^{n-1}} f(x) = \dfrac{1}{n^n} \Rightarrow f(x) \leq \dfrac{1}{n^n} \ \forall x \in S^{n-1} \Rightarrow n^n f(x) \leq 1 \quad \forall x \in S^{n-1}$

La desigualdad $n^n f(x) \leq \|x\|^{2n}$ es trivial si $x = 0$

Si $x \neq 0$, considero $x' = \dfrac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$

$\Rightarrow n^n f(x') \leq 1$

$$n^n \prod_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\|x\|^2} \Rightarrow n^n \prod_{j=1}^{n} x_j^2 \leq 1 \cdot \|x\|^{2n} = \|x\|^{2n} \quad \blacksquare$$

Obtener como consecuencia que $\left(\prod_{j=1} a_j\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1} a_j$

$(a_1, \dots, a_n \geq 0)$ (Desigualdad aritmético-geométrica)

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, por (a) $\Rightarrow \prod_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq$

$$\leq \frac{1}{n^n} \|(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\|^{2n} = \frac{1}{n^n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^{1/2}\right]^{2n} = \frac{1}{n^n}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^n \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \left(\prod_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^{1/n} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \quad ; \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad (2)$$

hemos usado $(*)$ junto con el hecho de que $t \longmapsto t^{1/n}$ es creciente en $[0, \infty)$

$\alpha_j^2 = a_j$ (si $a_j \geq 0$, existe un α_j así) (3)

(2) & (3) $\Rightarrow$ lo que queremos demostrar.

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ único pto. crítico en $x>0$, que es $x=1$

$g''(x) = \frac{2}{x^3} \geq 0$: g convexa

$\Rightarrow$ $x=1$ da el mínimo global de g en $(0,\infty)$, g alcanza un máximo en $[m, \frac{1}{m}]$ (con $0 \leq m \leq 1$) porque g es continua en $(0,\infty)$ y $[m, \frac{1}{m}] \subset (0,\infty)$ es compacto. $\Rightarrow$ g se maximiza en alguno de sus extremos.

$$g(m) = g(1/m) = m + \frac{1}{m} \Rightarrow \underbrace{\sup_{x\in[m,\frac{1}{m}]} g(x) = m + \frac{1}{m}}_{(3)}$$ y se alcanza en los extremos

$$(2)+(3) \Rightarrow G(x) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j \left(m + \frac{1}{m}\right) = m + \frac{1}{m} \quad \text{porque} \quad \sum_{j=1}^{n} t_j = 1$$

3. Utilizar la desigualdad aritmético - geométrica

Hemos probado que $\sum_{j=1}^{n} t_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{x_j} \leq m + \frac{1}{m}$ si $0 \leq m \leq x_1, \dots, x_n \leq 1/m$

Desigualdad aritmético-geométrica si $a_1, \dots, a_n \geq 0$ $\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j$

Caso $n=2$. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ $(a,b \geq 0)$ $\Rightarrow$ $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $(a,b\geq 0)$

$$a = \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \geq 0 \qquad b = \sum_{j=1}^{n} t_j \frac{1}{x_j} \geq 0$$

$$\Rightarrow \underset{\left(\sum t_j x_j\right)\left(\sum t_j \frac{1}{x_j}\right)}{\underset{\|}{ab}} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} t_j\left(x_j + \frac{1}{x_j}\right)\right)^2 \underset{\text{por (2)}}{\leq} \left(\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right)\right)^2 = \frac{\left(m+\frac{1}{m}\right)^2}{4}$$

5.1.1 $t_1, \dots, t_n \geq 0$ tales que ...

y $x_1, x_2, \dots, x_n$ tales que $0 < m \leq x_j \leq M$, $j = 1, 2, \dots, n$

Demostrar la desigualdad de Kantorovich:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{x_j}\right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} \qquad [1]$$

Procede de la manera siguiente:

1. $mM = 1$, $m \in (0,1)$

Si $0 < m' \leq x_j' \leq M'$ con $\begin{cases} m' = \alpha m \\ x_j' = \alpha x_j \ (j = 1, \dots, n) \\ M' = \alpha M \end{cases}$ $(\alpha > 0)$

[1] también se verifica para m', x_j' y M' debido a la invarianza.

Tomamos $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{mM}} > 0 \implies \begin{cases} m' = \dfrac{m}{\sqrt{mM}} = \sqrt{\dfrac{m}{M}} \leq 1 \\ M = \dfrac{M}{\sqrt{mM}} = \sqrt{\dfrac{M}{m}} \geq 1 \end{cases}$

y $0 < m' \leq 1 \leq M'$ con $m'M' = 1$

2. Demostrar: $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} t_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{x_j}}_{= \sum_{j=1}^{n} t_j \left(x_j + \frac{1}{x_j}\right)} \leq m + \dfrac{1}{m}$

otra opción

como $0 < \underbrace{m < x_j}_{\Downarrow\ x_j \leq \frac{1}{m}} \leq M$

Sustituimos x_j por $\frac{1}{m}$ porque $M = \frac{1}{m}$

Sea $G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} t_j \underbrace{\left(x_j + \frac{1}{x_j}\right)}_{\leq \sup_{x_j \in [m, 1/m]} g(x_j)}$ $\quad x_1, \dots, x_n \in [m, \frac{1}{m}]$ → compacto

$\iff (x_1, \dots, x_n) \in [m, \frac{1}{m}]^n = K$ compacto

$$\sup_{\in K} G(x) \overset{(2)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} t_j \sup_{x_j \in [m, \frac{1}{m}]} g(x_j) \ ; \quad \text{siendo} \quad g(x) = x + \frac{1}{x} \ (\text{para } x > 0)$$

uso que $t_1, \dots, t_n \geq 0$

166.

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$

$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = c\}$ con $a \in S^{n-1}$ (hiperplano en $\mathbb{R}^n$)

Entonces $\exists!\, s_0 \in S^{n-1}$ y $\exists!\, x_0 \in H$ tales que $\operatorname{dist}(S^{n-1}, H) = \|s_0 - x_0\|_2$

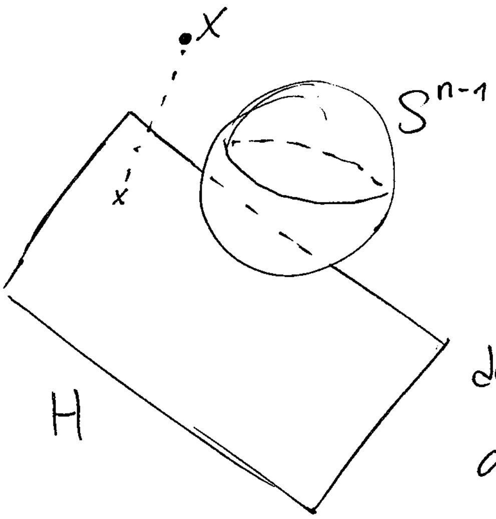
ERRATA: $c > 1$ y no $c \geq 0$

Observamos que $H \cap S^{n-1} \neq \emptyset$ si $c > 1$:

Si $x \in H \cap S^{n-1} \Rightarrow \langle x, a \rangle = c$ (porque $x \in H$) $\wedge$ $\|x\|_2 = 1$ (porque $x \in S^{n-1}$)

Como $c > 1 \Rightarrow 1 < c = \langle x, a \rangle = |\langle x, a \rangle| \leq \underbrace{\|x\|}_{=1}\underbrace{\|a\|}_{=1} = 1$ (contradicción)

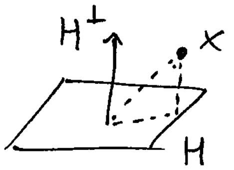
desigualdad de Schwarz



Dado $x \in \mathbb{R}^n$, queremos determinar $d(x, H)$

Si H fuera un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$

$\operatorname{dist}(x, H) = \|P_{H^\perp}(x)\|_2$



$x = P_H(x) + P_{H^\perp}(x)$

con $\|x\|_2^2 = \|P_H(x)\|^2 + \|P_{H^\perp}(x)\|^2 \geq$

$\geq \|P_{H^\perp}(x)\|^2$

Si $H \equiv \langle x, a \rangle = c$ con $c > 1$ y $a \in S^{n-1}$, $0 \notin H$ y H no es un subespacio vectorial. Pero entonces $H = q + \tilde{H}$ con $\tilde{H} \equiv \langle x, a \rangle = 0$ ($\tilde{H}$ es ahora un subespacio vectorial), ahora H es un subespacio afín. Tenemos que encontrar q.

$x \in H \Leftrightarrow x - q \in \tilde{H} \Leftrightarrow \langle x - q, a \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, a \rangle - \langle q, a \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x, a \rangle = \langle q, a \rangle = c$. Tomamos $q = ca$, y como $a \in S^{n-1}$, ya lo tengo.

$H = ca + \tilde{H}$

$d(x,H) = d(x-ca, \tilde{H}) = \| P_{\tilde{H}^\perp}(x-ca)\| \qquad \tilde{H}^\perp = \langle a \rangle$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$|\langle x-ca, a\rangle|$: esta es la función que tendremos que minimizar con la restricción $x \in S^{n-1}$.

Como $x \notin H$ si $x \in S^{n-1}$, $d(x,H) > 0$

En lugar de minimizar $d(x,H)$, minimizaremos $d(x,H)^2 =$

$= \underbrace{(d(x,H))^2}_{G(x)} = (\varphi \circ d(\cdot,H))(x)$ con $\varphi(t) = t^2$ que es creciente en $[0,\infty) \supset$ rango de $d(\cdot,H)$

$G(x) = (\langle x,a\rangle - c)^2 \qquad G(x)$ es C^∞ en $\mathbb{R}^n$

$\nabla G(x) \overset{(1)}{=} 2(\langle x,a\rangle - c).a \ ; \qquad a = \nabla(\langle x,a\rangle)$

$\downarrow$

R. de C.

$S^{n-1} = h^{-1}(1)$, con $h(x) = \|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$

S^{n-1} es una hipersuperficie, y $\nabla h(x) = 2x \quad (2)$

$G|_{S^{n-1}}$ tiene un punto crítico en $p \in S^{n-1}$ si y solo si $\nabla G(x) = \lambda h$

(para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$) $\xleftrightarrow{(1)+(2)} (\langle x,a\rangle - c).a \overset{(3)}{=} \lambda x$ (con $x \in S^{n-1}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

Como $x \in S^{n-1}$ y $c > 1$, $\underbrace{\langle x,a\rangle}_{\in C} - c < 0$

(3) sólo se cumple si $a = \pm x$ (porque $a, x \in S^{n-1}$)

$G(a) = (\langle a,a\rangle - c)^2 = (1-c)^2 = (c-1)^2 \qquad 0 < G(a) < G(-a)$

$G(-a) = (\langle -a,a\rangle - c)^2 = (c+1)^2$

$x=a$ corresponde el mínimo de distancia, y $x=-a$ corresponde con el máximo, la unicidad se sigue de que no hay otros puntos críticos.

$d(S^{n-1}, H)$ se realiza en los puntos $x_0 = a \in S^{n-1}$ $y_0 = a' =$ proyección a en H.