Ejercicios 64 a 70

64. Probar que todos los puntos $x \in \mathbb{R}^4$ en los que

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

tiene un extremo local sujeto a las condiciones

$$\begin{cases} x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4\,, \\ x_2^2 + 2\,x_3^2 + 3\,x_4^2 = 9\,, \end{cases}$$

se hallan entre

$$\big(0\,,0\,,\pm\sqrt{3}\,,\pm 1\big)\,,\quad \big(0\,,\pm 1\,,2\,,0\big)\,,\quad \big(\pm 1\,,0\,,0\,,\pm\sqrt{3}\big)\,,\quad \big(\pm 2\,,\pm 3\,,0\,,0\big)\,.$$

¿Cuáles de ellos determinan máximos locales y cuáles mínimos locales?

65. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1\,.$$

66. Sean

$$\mathbb{S}^{n-1} = \big\{\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\|_2 = 1 \,\big\}$$

la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$ y el hiperplano afín

$$H = \big\{\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle x\,, a\rangle = c \,\big\}\,,$$

donde $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$.

1. Demostrar que el ínfimo en la distancia entre $\mathbb{S}^{n-1}$ y H,

$$\operatorname{dist}\,(\mathbb{S}^{n-1}\,, H) = \inf\,\big\{\, \|x-y\|_2 \;:\; x \in \mathbb{S}^{n-1}\,,\ y \in H \,\big\}$$

se alcanza en un único par $s_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$, $x_0 \in H$, es decir, es un mínimo.

2. Considérense las funciones

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,$$

dadas por

$$f(x,y) = \|x-y\|_2^2\,, \qquad g(x,y) = \big(\, \|x\|_2^2 - 1\,,\, \langle x\,, a\rangle - c\,\big)\,,$$

para calcular x_0 y s_0, utilizando multiplicadores de Lagrange.

67. Sean $a\,,b > 0$ y $p > 1$.

1. Calcular el máximo de la función

$$f(x,y) = a\,x + b\,y\,,$$

de los $x > 0\,,\ y > 0$ sujetos a la condición

$$x^p + y^p = 1\,.$$

2. Demostrar que todos los $x > 0\,,\ y > 0$ satisfacen

$$a\,x + b\,y \leq (x^p + y^p)^{1/p}\,(a^q + b^q)^{1/q}\,,$$

donde q viene dado por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

3. Utilizar lo anterior para demostrar la *desigualdad de* Hölder

$$\sum_{i=1}^n x_i\,y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^n x_i^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^n y_i^q\Big)^{1/q}\,,$$

válida para reales positivos $x_i\,, y_i$.

UAM Universidad Autónoma de Madrid
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

68. Demostrar que todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisface

$$n^n \prod_{j=1}^n x_j^2 \leq \|x\|_2^{2n}\,.$$

Obtener como consecuencia la *desigualdad geométrico-aritmética*

$$(15) \qquad \big(\,a_1\,a_2 \cdots a_n\big)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\,,$$

válida para reales positivos a_i.

69. Sean $t_1 \, , t_2 \, , \dots \, , t_n \geq 0$ tales que

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$$

y $x_1 \, , x_2 \, , \dots \, , x_n$ tales que

$$0 < m \leq x_j \leq M \, , \qquad j = 1 \, , 2 \, , \dots \, , n \, .$$

Para demostrar la *desigualdad de* Kantorovich

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} t_j \, x_j \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{x_j} \Big) \leq \frac{(m+M)^2}{4 \, m \, M} \, , \tag{16}$$

procedemos como sigue:

1. Es suficiente demostrar la desigualdad cuando $m \, M = 1$ y, en este caso, $0 < m < 1$.
2. Demostrar
$$\sum_{j=1}^{n} t_j \, x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{x_j} \leq m + \frac{1}{m} \, ,$$
3. Utilizar la desigualdad geométrico-aritmética (15) para llegar a (16).

70. Dada

$$f(x) = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \, , \qquad\qquad x = (x_1 \, , x_2 \, , \dots \, , x_n) \, ,$$

probar que un extremo local de f sujeto a la condición

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$$

es

$$a^k \, n^{1-k} \, .$$