CALCULO I. DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA.

SOLUCIÓN DE LA ENTREGA 2.

(1) (1 punto) **Demuestra que**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2$$

con la definición ε.

Por definición, una sucesión $\{a_n\}$ converge a un número l si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_\varepsilon$

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

En nuestro caso, dado $\varepsilon > 0$ buscamos un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+1} - 2\right| < \varepsilon$$

para todo $n > N_\varepsilon$. Calculamos dentro del valor absoluto:

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+1} - 2\right| = \left|\frac{2n^2+3-2n^2-2}{n^2+1}\right| = \left|\frac{1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1},$$

ya que $\frac{1}{n^2+1}$ es siempre positivo. Para todo $n > N_\varepsilon$ se tiene que

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+1} - 2\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{N_\varepsilon^2+1},$$

así que, si escogemos un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N_\varepsilon^2+1} < \varepsilon$$

tendremos que

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+1} - 2\right| < \frac{1}{N_\varepsilon^2+1} < \varepsilon$$

como queríamos. Nos bastaría con tomar cualquier

$$N_\varepsilon > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

(por ejemplo,

$$N_\varepsilon = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right\rfloor + 1,$$

ya que queremos que N_ε sea natural).

(2) (2 puntos) **Sea $\{a_n\}$ la sucesión de números reales definida por recurrencia con**

$$a_1 = 1, \quad \textbf{y} \quad a_n = \frac{2a_{n-1}+3}{4}.$$

Demuestra que esta sucesión es convergente y halla el límite.

Por el Teorema de Convergencia Monótona sabemos que si una sucesión es creciente y acotada superiormente (o decreciente y acotada inferiormente) entonces tiene límite. Vamos a intentar probar que esta sucesión es así.

En primer lugar calculamos el segundo término de la sucesión, para intentar ver si va a ser creciente o decreciente. Por la recurrencia, tenemos que

$$a_2 = \frac{2a_1 + 3}{4} = \frac{5}{4} > 1 = a_1.$$

Como $a_2 \geq a_1$, vamos a probar por inducción que $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con esto probaríamos que es una sucesión creciente.

Ya hemos probado el primer paso de la inducción viendo que $a_2 \geq a_1$, así que supongamos que $a_n \geq a_{n-1}$ y veamos que $a_{n+1} \geq a_n$. Por definición de a_n y por la Hipótesis de Inducción

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{4} \geq \frac{2a_{n-1} + 3}{4} = a_n,$$

así que, por Inducción, la sucesión es creciente.

Para ver que es convergente sólo faltaría probar que está acotada superiormente. Probamos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq 2$ (claramente tiene que ser un número mayor que 1, así que probamos con 2, si no es así con 3...).

El primer paso de la inducción es claro: $a_1 = 1 \leq 2$. Supongamos ahora que $a_n \leq 2$ y probemos que $_{n+1} \leq 2$. De nuevo por la definición de la sucesión y por la Hipótesis de Inducción,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{4} \leq \frac{2 \cdot 2 + 3}{4} = \frac{7}{4} \leq 2.$$

Por lo tanto la sucesión está acotada superiormente, y como ya hemos visto que es creciente, por el Teorema de la Convergencia Monótona, tiene límite.

Llamemos

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Como el límite de una sucesión, si existe, tiene que ser único, entonces también tenemos que

$$l = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}.$$

Tomando límites en la definición de la sucesión obtenemos que

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_{n-1} + 3}{4} = \frac{2l + 3}{4},$$

es decir,

$$l = \frac{2l + 3}{4}.$$

Despejando tenemos que

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}.$$

(1) (2 puntos) **Estudia la convergencia de la serie**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n+1}{n+1}^{\alpha}$$

según el valor del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Indicación: usar el criterio del cociente, sin olvidarse de estudiar ninguno de los tres casos.)

Reescribimos la serie como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n+1}{n+1}^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \right)^{\alpha},$$

por lo tanto el término general es

$$a_n = \left(\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \right)^{\alpha}.$$

Según el criterio del cociente, para ver si la serie es convergente o no estudiamos el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

Si $r > 1$ la serie diverge; si $r < 1$ la serie converge; y si $r = 1$ el criterio es inconcluyente y tenemos que estudiar la convergencia de otra manera.

En nuestro caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+2)!} \right)^{\alpha}}{\left(\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \right)^{\alpha}}.$$

Por las propiedades del factorial, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+2)(n+1)} \right)^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+10n+6}{n^2+3n+2} \right)^{\alpha} = 4^{\alpha} = r.$$

Aplicando el criterio, sabemos que:

- la serie convergerá si $r = 4^{\alpha} < 1$, es decir, si $\alpha < 0$,
- la serie divergerá si $r = 4^{\alpha} > 1$, o equivalentemente, si $\alpha > 0$,
- si $\alpha = 0$, que se corresponde con $r = 4^{\alpha} = 1$, no tenemos información de este criterio y hay que buscar otra manera de estudiarlo.

Sin embargo, en el caso $\alpha = 0$ lo que tenemos es la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n+1}{n+1}^{0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

que diverge ya que el término general $a_n = 1$ no tiende a cero.

En resumen, la serie converge para $\alpha < 0$ y diverge para $\alpha \geq 0$.