Estadística II
Grado en Matemáticas, UAM, 2020-2021

Hoja 1 (Preliminares)

Sobre matrices simétricas y matrices idempotentes

1. Sea A una matriz real, de dimensiones $n \times n$, simétrica. Prueba que

$$A \text{ es definida positiva} \quad \Longleftrightarrow \quad A = R^{\intercal} R, \quad \text{con } R \text{ matriz } n \times n \text{ invertible}$$

(Puedes usar que una matriz simétrica definida positiva tiene todos los autovalores positivos).

2. Sea A una matriz real, de dimensiones $n \times n$, simétrica y definida positiva.

a) Sea B una matriz $n \times n$ invertible. Prueba que la matriz $C = B^{\intercal} A B$ es simétrica y definida positiva.

b) Calcula los coeficientes de la matriz L de dimensiones $n \times n$ y triangular superior tal que

$$A = L^{\intercal} \cdot L$$

(descomposición de Cholesky) para los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Puedes escribir los coeficientes de L en términos de los coeficientes de A y/o como procedimiento recursivo. Comprueba que todas las raíces cuadradas que aparecen tienen sentido justamente porque A es definida positiva.

3. Sea V una matriz (real, $n \times n$) simétrica y *semidefinida* positiva. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Prueba que

$$\mathbf{a}^{\intercal} V \mathbf{a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad V\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

(Sugerencia: para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, considera la función cuadrática $p(\lambda) = (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b})^{\intercal} V (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b})$.)

4. Sea A una matriz (real, $n \times n$) simétrica ($A = A^{\intercal}$) e idempotente ($A^2 = A$). Digamos que A no es ni la matriz identidad, ni la matriz nula.

a) Comprueba que $\text{traza}(A) = \text{rango}(A)$, y que es un entero positivo $< n$.

b) Comprueba que $I_n - A$ es también simétrica e idempotente.

c) ¿Cómo son las matrices simétricas e idempotentes para $n = 2$?

Sobre la normal multidimensional

5. Sea $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^{\intercal}$ un vector aleatorio con distribución $\mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$, donde $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ y

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula la distribución del vector $(X_1, X_2)^{\intercal}$, donde $X_1 = Y_1 + Y_3$ y $X_2 = Y_2 + Y_3$.

(b) ¿Existe alguna combinación lineal de las variables aleatorias Y_i que sea independiente de X_1?

6. Sea $\mathbb{X} = (X_1, X_2, X_3)^\intercal$ un vector aleatorio con distribución $\mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$, donde $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ y

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina razonadamente cuáles de los siguientes pares de variables o vectores aleatorios son independientes y cuáles no: (i) X_1 y X_2; (ii) $(X_1, X_3)^\intercal$ y X_2; (iii) X_1 y $X_1 + 3X_2 - 2X_3$.

7. Sea $\mathbb{X} = (X_1, X_2)^\intercal$ un vector aleatorio con distribución $\mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$, donde $\mathbf{m} = (1, 1)^\intercal$ y

$$V = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula la distribución de $X_1 + X_2$ condicionada por el valor de $X_1 - X_2$.

8. Sea $\mathbb{X} = (X_1, X_2, X_3)^\intercal$ un vector aleatorio con distribución $\mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$, donde $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ y

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se definen las variables aleatorias $Y_1 = X_1 + X_3$, $Y_2 = 2X_1 - X_2$ e $Y_3 = 2X_3 - X_2$.

Calcula la distribución de Y_3 dado que $Y_1 = 0$ e $Y_2 = 1$.

9. El vector $\mathbb{X} = (X_1, X_2, X_3)^\intercal$ sigue una normal multidimensional $\mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$, de parámetros

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad V = \begin{pmatrix} 3 & a & 1/2 \\ a & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí, a es un cierto número real.

a) ¿Para qué valores de a es V una matriz definida positiva?

b) Definimos el vector $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2)^\intercal$ mediante $Y_1 = X_1 + 2X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$. ¿Qué valor debe tomar a para que Y_1 e Y_2 sean independientes? Justifica bien todos los pasos que te lleven a la respuesta.

c) En este apartado, tomamos $a = 2$. Determina la distribución de $(X_1, X_2)^\intercal$ condicionando a que $X_3 = 1/2$.

10. El vector $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_4)^\intercal$ sigue una normal multidimensional $\mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$, de parámetros

$$\mathbf{m} = \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad V = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la probabilidad de que la variable $Y = 2X_1 - 3X_4$ sea $\leq A$.

b) Determina la distribución de $(X_1, X_2)^\intercal$ condicionando a que $X_4 = 1$.

11. El vector $\mathbb{X} = (X_1, X_2)^\intercal$ sigue una normal bidimensional con vector de medias $\mu = (1, -\sqrt{2}/2)^\intercal$ y matriz de covarianzas $V = 3 \cdot I_{2\times 2}$. Considera la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1/3 & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Determina cómo se distribuye la variable aleatoria

$$Z = \frac{1}{3}\, \mathbb{X}^\intercal \cdot B \cdot \mathbb{X}.$$