Problemas de valor inicial

Matteo Bonforte, Rafael Orive
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Septiembre 2020

Objetivos

- Repaso EDO
- Lema de Gronwall
- Resultado(s) de existencia. Picard
- Qué es un problema de valor inicial
- Discretización, mallados
- Diferenciación numérica.

Algunos métodos numéricos

- Euler: forward, backward
- Leap-frog y euler modificado
- Método de Taylor
- Trapecio

PVI: Problema de Valor Inicial

El marco teórico de los métodos numéricos se va a plantear sobre la siguiente EDO

Definition (PVI)

El problema de valor inicial

$$Y'(t) = f(t, Y(t)), \qquad Y(t_0) = Y_0, \qquad t \in [t_0, T], \tag{1}$$

con f continua en $D = (t_0, T) \times \mathbb{R}^d$ y Lipschitz con respecto a la segunda variable en D.

El problema discreto es dado un mallado $\{t_0, \ldots, t_N\} \subset [t_0, T]$, conjunto discreto de puntos, vamos a calcular unos valores $y_0, \ldots, y_N$ de $\mathbb{R}^d$ que permitan aproximar a la solución $Y(t)$ de (1), i.e.,

$$Y(t_n) = y_n + \text{error}_n, \qquad n = 0, \ldots, N$$

Observación. Error de arranque. Error propio del algoritmo.

Objetivos. Convergencia

- Obtener valores y_n que puedan sustituir a $Y(t_n)$ porque no sabemos resolver $Y(t)$ (o es imposible, o es muy costoso)
- Problema 1: Identificar fórmulas (algoritmos) para calcular y_n.
- Problema 2: Controlar error$_n$

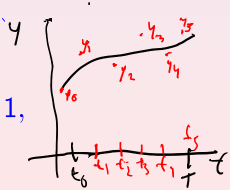
Sea $h_n = t_{n+1} - t_n$, el paso n del mallado, y sea $h = \max\{h_n,\ n = 0, \ldots, N-1\}$, nos planteamos que nuestro método converge si

$$\lim_{h \to 0} \|Y(t_n) - y_n\| = 0, \qquad \forall n,$$

y que converge con orden k si

$$\|\text{error}_n\| \leq Ch^k \qquad \forall n = 0, \ldots, N-1,$$

con C independiente de h y N.



Método de Euler

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + \underbrace{h_n}_{= t_{n+1}-t_n} Y'(t_n) + \frac{1}{2}\underbrace{Y''(s)h_n^2}_{\text{residuo}}.$$

Usando (1)

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + h_n f(t_n, Y(t_n)) + \frac{1}{2}Y''(s)h_n^2.$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) = y_n + h_n f_n} \qquad \text{Euler explícito}$$

El error de truncamiento viene de utilizar una fórmula aproximada (Euler) en vez de la fórmula exacta (1).

$Y(t_n) + h_n Y'(t_n)$

- Tomo $y_n = Y(t_n)$
- Aplico Euler $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) = Y(t_n) + h_n f(t_n, Y(t_n))$
- Por Taylor $Y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2$, $s \in (t_n, t_{n+1})$:

Consistencia

Error local de truncamiento: $\tau_{n+1} = \frac{Y(t_{n+1}) - y_{n+1}}{h_n} = \frac{h_n}{2} Y''(s).$

Error global de truncamiento: $\tau(h) = \max_{n=1,\dots,N} |\tau_n| = \frac{Mh}{2}.$

donde $M = \max_{s \in [t_0, T]} |Y''(s)|$.

Atención: el error de truncamiento es el originado al avanzar una vez el algoritmo. Como consecuencia, el método de Euler es un método de orden 1.

Euler implícito

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_n) = Y(t_{n+1}) - h_n Y'(t_{n+1}) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

Usando (1)

$g(x) = g(x_0) + (x-x_0) g'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 g''(s) \quad s \in](x, x_0)$

$$Y(t_n) = Y(t_{n+1}) - h_n f(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) + \frac{1}{2} Y''(s) h_n^2.$$

$y_n = y_{n+1} - h\, f(t_{n+1}, y_{n+1})$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h_n f_{n+1}} \qquad \text{Euler implícito}$$

Atención: no es (en general) inmediatamente resoluble porque puede ser no lineal. Entonces necesitaremos de métodos de resolución no lineales (Newton)

$$Y_n = Y(t_n) \qquad y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$Y(t_{n+1}) - y_{n+1} = Y(t_{n+1}) - Y(t_n) - h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$Y(t_n) = Y(t_{n+1}) - h_n Y'(t_{n+1}) + \frac{h_n^2}{2} Y''(s)$$

$$Y(t_n) - Y(t_{n+1}) + h_n Y'(t_{n+1}) = \frac{h^2}{2} Y''(s)$$

$$= Y(t_{n+1}) - Y(t_n) - h_n Y'(t_{n+1}) + \underbrace{h_n Y'(t_{n+1})}_{= h_n f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))} - h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \le \frac{h_n^2}{2} |Y''(s)| + h_n |f(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})|$$

$$\le \frac{h_n^2}{2} |Y''(s)| + h_n L |Y(t_{n+1}) - y_{n+1}|$$

$$\left.\begin{array}{l} (1 - h_n L) |Y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \le \frac{h_n^2}{2} M \\ \underset{si}{\Rightarrow} 1 - h_n L \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow h_n \le \frac{1}{L} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}|}{h_n} \le \frac{h_n^{\cancel{2}} M \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\,\cancel{h_n}} = M h_n$$

Método de Taylor

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + h_n Y'(t_n) + \frac{1}{2} Y''(t_n) h_n^2 + \frac{1}{6} Y'''(s) h_n^3.$$

Usando (1), que $Y''(t_n) = f_t(t_n, Y(t_n)) + f_y(t_n, Y(t_n)) Y'(t_n)$

$$\begin{aligned} Y(t_{n+1}) \quad &= \quad Y(t_n) + h_n f(t_n, Y(t_n)) + \frac{1}{2} f_t(t_n, Y(t_n) h_n^2 \\ &\qquad + \frac{1}{2} f_y(t_n, Y(t_n)) f(t_n, Y(t_n)) h_n^2 + \frac{1}{6} Y'''(s) h_n^3. \end{aligned}$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f_n + \frac{h_n^2}{2} (f_t(t_n, y_n) + f_n f_y(t_n, y_n))} \qquad \text{Taylor orden 2}$$

Orden de truncatura 2 y explícito, pero necesita evaluar 2 funciones más...

Utilizando el desarrollo de Taylor, existe $s_1, s_2 \in (t_n, t_{n+1})$ tal

$$Y(t_{n+1}) = Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) + \frac{h_n}{2} Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) + \frac{1}{2} Y''\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\left(\frac{h_n}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} Y'''(s_1)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3,$$

$$Y(t_n) = Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) - \frac{h_n}{2} Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) + \frac{1}{2} Y''\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\left(\frac{h_n}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} Y'''(s_2)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3,$$

$g(x) = g(x_0) + (x-x_0) g'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} g''(x_0)$

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\right) + \frac{1}{3} Y'''(s)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3$$

$s \in (t_n, t_{n+1})$

Mejor orden pero el punto intermedio no está en el mallado.

Solución 1

Aproximamos el valor intermedio con Taylor

$$Y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) = Y(t_n) + \frac{h_n}{2} f\left(t_n, Y\left(t_n\right)\right) + \frac{1}{2} Y''(s) \left(\frac{h_n}{2}\right)^2.$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f_n\right)}$$

Método de Runge

Es un método Runge-Kutta explícito de 2 etapas

$$K_1 = f(t_n, y_n), \quad K_2 = f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} K_1\right), \quad y_{n+1} = y_n + h_n K_2.$$

Demostrar que es de orden de truncatura 2.

Solución 2

Tomamos mallado equidistante ($h_n \equiv h$) y los pasos t_n, t_{n+1}, t_{n+2} y existe $s \in [t_n, t_{n+2}]$ tal

$$Y(t_{n+2}) = Y(t_n) + 2h\underbrace{\overset{Y'(t_{n+1})}{\overset{\shortparallel}{f\left(t_{n+1}, Y(t_{n+1})\right)}}}_{f(t_{n+1}, y_{n+1}) = f_{n+1}} + \frac{1}{3}Y'''(s)h^3$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}} \qquad \text{Tipo leap-frog}$$

Método multipaso (de dos pasos) y explícito. **Demostrar que es de orden de truncatura 2.**

y_0, calculo y_1 con un método de un paso (Euler) $y_1 \overset{LF}{\Rightarrow} y_2$

$y_1, y_2 \Rightarrow y_3$

Utilizando la aproximación del punto intermedio existe $s \in [t_n, t_{n+1}]$ tq

$$Y'\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) = \frac{Y'(t_n) + Y'(t_{n+1})}{2} + \frac{1}{2} Y'''(s) h_n^2$$

Usandolo

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \frac{h_n}{2}\left(\overset{Y'(t_n)}{\overset{\parallel}{f(t_n, Y(t_n))}} + \overset{Y'(t_{n+1})}{\overset{\parallel}{f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))}}\right) + O\left(h_n^3\right)$$

Considerando $\{Y(t_n)\} \approx \{y_n\}$ y prescindiendo del residuo

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}(f_n + f_{n+1})}$$

Crank-Nicolson. Trapecio

Método implícito. **Demostrar que es de orden de truncatura 2.**

Otra forma de obtener fórmulas. Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$Y'(t) = f(t, Y(t))$ $Y'(s)$

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, Y(s))\, ds$$

Aproximamos la integral con reglas de cuadratura, p.e., la regla del trapecio

$$\int_a^b f(s)\, ds = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \qquad \xi \in [a, b].$$

Aplicando esta regla obtenemos Crank-Nicolson (trapecio) y se prueba que es de orden de truncatura 2.

$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \frac{h_n}{2}\left(f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))\right) - \frac{h^3}{12} Y'''(s) \quad s \in (t_n, t_{n+1})$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}\left(\underset{f_n}{f(t_n, y_n)} + \underset{f_{n+1}}{f(t_{n+1}, y_{n+1})}\right)$

$$y_k'(t) = f_k(t, Y(t)) \qquad Y = (y_1, \ldots, y_d) \quad k = 1, \ldots, d$$

$$y_k''(t) = \partial_t \left(f_k(t, Y(t)) \right) = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, Y(t)) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(t, Y(t))\, y_i'(t)$$

$$Y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, Y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y(t))\, Y'(t)$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ es una matriz cuadrada de tamaño d cuya fila i y columna j es el coeficiente $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, Y(t))$

$\{y_n\} \approx \{Y(t_n)\}$

Método de Runge

$$Y\left(t_n+\frac{h_n}{2}\right) \approx y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n) \; *$$

$$Y(t_{n+1}) \approx Y(t_n) + h_n f\left(t_n+\frac{h_n}{2}, Y\left(t_n+\frac{h_n}{2}\right)\right)$$

$$y_{n+1} \approx y_n + h_n f\left(t_n+\frac{h_n}{2}, Y\left(t_n+\frac{h_n}{2}\right)\right) \underset{*}{\approx} y_n + h_n f\left(t_n+\frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - f(x) = 0 \qquad x \in [a,b] \qquad f \text{ es continua} \qquad \text{TEOREMA DE BOLZANO}$$

$$Y(t_n+2h) = Y(t_{n+2}) = Y(t_{n+1}) + h Y'(t_{n+1}) + \frac{h^2}{2} Y''(t_{n+1}) + O(h^3)$$

$$Y(t_n) = Y(t_{n+1}) - h Y'(t_{n+1}) + \frac{h^2}{2} Y''(t_{n+1}) + O(h^3)$$

$$Y(t_{n+2}) - Y(t_n) = 2h \underset{\substack{\| \\ f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))}}{Y'(t_{n+1})} + O(h^3)$$