7 Teoremas de la divergencia y de Stokes

Si X es una hipersuperficie en $\mathbb{R}^n$ que admite una normal unitaria continua $\nu : X \to \mathbb{R}^n$, escribiremos (X, ν) para indicar la **variedad orientada** formada por X y la orientación correspondiente a ν mediante la fórmula (62) del apartado 6.3.

7.1 Notación musical

Sea E un espacio vectorial de dimensión n. Hay dos números $\binom{n}{s}$ iguales a n: $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Por lo tanto los espacios E, $\mathcal{A}^1(E)$ y $\mathcal{A}^{n-1}(E)$ son linealmente isomorfos. Sucede que hay dos isomorfismos lineales de gran utilidad cuando se los efectúa, punto a punto, sobre campos. Utilizaremos símbolos musicales para denotarlos.

Definición 165. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. A cada* **campo de vectores** $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ *le asociamos la $(n-1)$-forma $\mathbf{F}^\natural$ ("efe becuadro") que en cada punto $x \in U$ es como sigue:*

$$\mathbf{F}^\natural_x(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) \; = \; \det\big[\, \mathbf{F}(x) \,|\, \mathbf{v}_1 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{v}_{n-1} \,\big] \, ,$$

y también le asociamos la 1-forma $\mathbf{F}^\flat$ ("efe bemol") que en cada $x \in U$ está dada por:

$$\mathbf{F}^\flat_x(\mathbf{v}) \; = \; \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{v} \, .$$

Damos ahora fórmulas concretas para esos isomorfismos. Si $\mathbf{F} = \big(f_1(x) \, , \, \ldots \, , \, f_n(x) \big)$, entonces:

$$\mathbf{F}^\natural \; = \; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \, f_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \, , \tag{95}$$

donde el circunflejo $\widehat{\ }$ puesto encima de un factor indica que dicho factor ha sido suprimido. Para $n = 2$:

$$\mathbf{F}^\natural \; = \; f_1 \, dy - f_2 \, dx \, , \tag{96}$$

y para $n = 3$:

$$\mathbf{F}^\natural \; = \; f_1 \, dy \wedge dz - f_2 \, dx \wedge dz + f_3 \, dx \wedge dy \, , \tag{97}$$

que algunas personas prefieren escribir $\mathbf{F}^\natural = f_1 \, dy \wedge dz + f_2 \, dz \wedge dx + f_3 \, dx \wedge dy$ para exhibir una simetría cíclica, pero no hay simetría cíclica ni en la fórmula (96) ni en la general (95).
Se ve claramente en (95) que $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}^\natural$ es biyectiva: para cada $(n-1)$-forma ω en U hay un único campo de vectores $\mathbf{F}$ en U tal que $\omega = \mathbf{F}^\natural$.
Por otra parte, en la fórmula:

$$\mathbf{F}^\flat \; = \; f_1 \, dx_1 + \cdots + f_n \, dx_n \, , \tag{98}$$

claramente vemos que $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}^\flat$ es biyectiva de campos de vectores a formas de Pfaff en U.

Es fácil comprobar que las siguientes identidades se cumplen para todo n:

$$\boxed{\big(\nabla f\big)^\flat \; = \; df} \tag{99}$$

$$\boxed{d\left(\mathbf{F}^\natural\right) \; = \; \big(\operatorname{div} \mathbf{F}\big) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k} \tag{100}$$

y que la siguiente se cumple para $n = 3$:

$$\boxed{d\left(\mathbf{F}^\flat\right) \; = \; \big(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}\big)^\natural} \, . \tag{101}$$

Las identidades $\mathbf{rot}\,\nabla f = 0$ y $\operatorname{div}\left(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}\right) = 0$ pueden entenderse, gracias a las fórmulas (99), (100) y (101), como dos casos particulares de la fórmula (86) del apartado 6.9.
Se suele decir, a la vista de las fórmulas (99), (100) y (101), que la derivada exterior unifica en un único concepto los tres operadores del Cálculo Vectorial: gradiente, divergencia y rotacional.

Esto es parcialemnte cierto: en justicia, hay que reconocer que el rotacional tiene aspectos importantes que quedan ocultos en la derivada exterior. Uno de estos aspectos es que **rot** es un **endomorfismo** del espacio $\ker(\text{div}) = \{\mathbf{F} : \text{div}(\mathbf{F}) = 0\}$ y, como tal, tiene (muchas) **autofunciones,** por ejemplo el campo de vectores $\mathbf{F} = \big(\cos(\lambda z)\,,\, -\cos(\lambda x) - \text{sen}(\lambda z)\,,\, \text{sen}(\lambda x)\big)$ es tal que $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \lambda\,\mathbf{F}$. En cambio la derivada exterior, de 1-formas a 2-formas en $\mathbb{R}^3$, no es un endomorfismo y, para que pueda tener autofunciones, es preciso modificarla.

7.2 Flujo a través de un trozo de hipersuperficie

Definición 166. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie orientable, $\nu : X \to \mathbb{R}^n$ la normal unitaria correspondiente a una de las orientaciones de X y $P \subseteq X$ una parcela. El* **flujo a través de P en el sentido de** *ν de un campo de vectores $\mathbf{F} : P \to \mathbb{R}^n$ es el siguiente número que puede ser positivo, cero o negativo, según como sea $\mathbf{F}$:*

$$\int_P (\mathbf{F} \cdot \nu)\, d\,\text{área}\,, \tag{102}$$

El flujo a través de P y el isomorfismo musical $\mathbf{F} \longmapsto \mathbf{F}^\natural$ están relacionados por el siguiente resultado.

Proposición 167. *En las condiciones de la definición 166 se cumple la siguiente igualdad:*

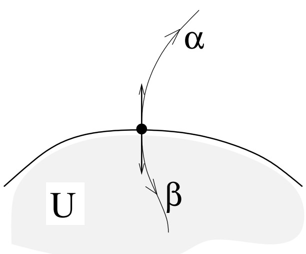
$$\int_{(P,\nu)} \mathbf{F}^\natural = \int_P (\mathbf{F} \cdot \nu)\, d\,\text{área}\,. \tag{103}$$

Véase el apartado 7.7 para la demostración.

A pesar de que las integrales $\int_P f\, d\,\text{área}$ son del tipo (par), descrito en los apartados 6.4 y 6.5, los dos miembros de la igualdad (103) cambian de signo al cambiar la orientación de P porque la función $\mathbf{F} \cdot \nu$, que estamos integrando en el miembro de la derecha, es sensible a ese cambio. Esto hace posible la proposición 167.

7.3 Dominios elementales

Consideramos una hipersuperficie X en $\mathbb{R}^n$ tal que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $\text{Fr}\, U = X$. Esto requiere que X sea un subconjunto cerrado. Suponemos, además, que U **está a un solo lado de** X. Esto quiere decir que, dado cualquier punto $p \in X$ y las dos normales unitarias que X tiene en p, hay un camino $\alpha(t) : [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ empezando en $\alpha(0) = p$, con velocidad una de esas normales y disjunto con U, y hay otro camino $\beta(t) : [0, \delta) \to \mathbb{R}^n$ que empieza en p con velocidad la otra normal y que está contenido en U para $0 < t < \delta$.



Veamos un ejemplo. Dada la esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, hay exactamente tres abiertos que la tienen por frontera:

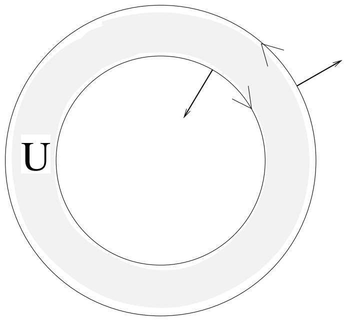
$$B(\mathbf{0}, 1) \quad , \quad \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \quad \text{y} \quad B(\mathbf{0}, 1) \cup \big(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\mathbf{0}, 1)\big)\,.$$

El primer abierto y el segundo están cada uno a un lado de la esfera, mientras que el tercero está a ambos lados.

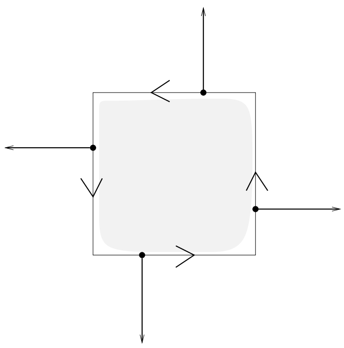
Una vez que el abierto U está a un solo lado de $X = \text{Fr}\, U$, de las dos normales unitarias que tiene X en cada punto $p \in X$ llamamos **normal exterior a** U a la que es velocidad

de caminos empezando en p y disjuntos con U. La otra normal unitaria se llamama **normal interior a** U, pero no la vamos a utilizar.
Por ejemplo, la normal unitaria de S^{n-1} exterior a la bola Euclídea $B(\mathbf{0},1)$ es $\nu(x)=x$.
Se demuestra que la normal exterior es continua. Por lo tanto define, a través de la fórmula (62) del apartado 6.3, una *orientación preferida* de la hipersuperficie X, que resulta ser orientable.

Ejemplo. El abierto $U=\{(x,y)\,:\,4<x^2+y^2<9\}$ es la corona circular abierta con radio menor 2 y radio mayor 3. Su frontera $X=\operatorname{Fr}U$ tiene dos componentes conexas por caminos: la circunferencia de radio 2 y la circunferencia de radio 3. De las *cuatro* orientaciones que admite X, la normal unitaria exterior a la corona elige una preferida. La siguiente figura muestra la normal unitaria exterior a la corona; también muestra las correspondientes orientaciones de las circunferencias, vistas como sentidos de recorrido.



En realidad, para decidir cuál es la normal exterior a U en un punto frontera p no necesitamos conocer todo U ni tampoco toda su frontera: nos basta con lo que ocurre en un pequeño entorno de p. Aplicamos esta observación a un abierto U cuya frontera sea una unión $P_1\cup\cdots\cup P_s$ de parcelas $P_i\subset X_i$ de unas hipersuperficies X_i, $i=1,\ldots,s$. Fijado i definimos $Y_i\subseteq P_i$ como el interior de P_i *relativo a* X_i. Entonces Y_i es una hipersuperficie y en cada punto $p\in Y_i$ está bien determinada la normal unitaria exterior a U.
La siguiente figura muestra el cuadrado $U=(-1,1)^2\subset\mathbb{R}^2$, cuya frontera es unión de cuatro segmentos compactos. Los correspondientes segmentos abiertos son variedades de dimensión 1 en las que la normal unitaria exterior al cuadrado está bien definida y los convierte en curvas orientadas. La figura muestra las normales exteriores al cuadrado y las orientaciones de los segmentos vistas como sentidos de recorrido.



El resto de la frontera del cuadrado (lo que no está en los segmentos abiertos) son las “bisagras”: los vértices donde se encuentran dos segmentos distintos.

Definición 168. *Un* **dominio elemental** *es un abierto* ***acotado*** $U\subseteq\mathbb{R}^n$ *y que cumple las siguientes condiciones:*

1. $\operatorname{Fr}U$ *es unión de una* ***parte suave*** $\partial U=Y_1\cup\cdots\cup Y_s$*, con las* Y_i *hipersuperficies, y una* ***parte bisagra*** $\operatorname{Fr}U\setminus\partial U$ *que a su vez es una unión finita de variedades de dimensiones no mayores que* $n-2$.

2. *En todo punto* $p\in\partial U$ *el abierto* U *está de un solo lado de* ∂U.

Por lo explicado, cada una de las "partes suaves" Y_i de $\operatorname{Fr} U$ tiene una orientación preferida, inducida, según la fórmula (62) del apartado 6.3, por la normal unitaria ν exterior a U.
En la parte bisagra puede no estar definida la normal. Pero el área de esta parte es nula y no influye en el valor de las integrales. De hecho, para todo integrando paramétrico L se tiene:

$$\int_{\operatorname{Fr} U} L = \int_{\partial U} L .$$

7.4 Teorema de la divergencia

El siguiente enunciado se conoce como **teorema de la divergencia.** En el caso particular $n=3$ también se lo llama **teorema de Gauss.**

Teorema 169. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio elemental cuyo cierre $\overline{U}$ (que es compacto) está contenido en un abierto un poco mayor: $\overline{U} \subset U_1$. Para todo campo de vectores $\mathbf{F} : U_1 \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$, se tiene:*

$$\boxed{\int_U \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\partial U} (\mathbf{F} \cdot \nu)\, d\,\text{área}} \tag{104}$$

siendo ν la normal unitaria exterior a U.

Hacemos algún comentario sobre la demostración en el apartado 7.7.

Corolario 170. *Sea $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ la normal exterior a U. Para toda función f de clase $\mathcal{C}^1$ en U_1 y todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene:*

$$\boxed{\int_U f_{x_i}\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\partial U} f\, \nu_i\, d\,\text{área}} \tag{105}$$

Resulta de aplicar el teorema de la divergencia al campo $\mathbf{F} = f\, \mathbf{e}_i$.

Corolario 171. (Integración por partes). *Dadas f, g de clase $\mathcal{C}^1$ en U_1 y dado un índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene:*

$$\int_U f_{x_i}\, g\, dx_1 \cdots x_n = -\int_U f\, g_{x_i}\, dx_1 \cdots dx_n + \int_{\partial U} (f\, g\, \nu_i)\, d\,\text{área} .$$

A continuación enunciamos el corolario que más nos interesa aquí. Se llama **teorema de Stokes para funciones paramétricas.**

Teorema 172. *Sea un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^N$ en el que hay definida una $(k-1)$-forma ω. Sea un dominio elemental $U \subset \mathbb{R}^k$, cuyo cierre $\overline{U}$ está contenido en un abierto un poco más grande U_1, y sea ∂U la parte suave de $\operatorname{Fr} U$ orientada por la normal ν exterior a U. Dada una función $\Phi : U \to V$, restricción de una $\Psi : U_1 \to V$ de clase al menos $\mathcal{C}^2$, se tiene:*

$$\boxed{\int_\Phi d\,\omega = \int_{(\partial U, \nu)} \Phi^* \omega} \tag{106}$$

A veces se define el **borde orientado** $\partial\Phi$ de Φ como el par $\big(\Phi|_{\partial U}, \mathcal{O}\big)$ formado por la restricción de Φ a ∂U y la orientación $\mathcal{O}$ de ∂U inducida por la normal ν exterior a U. Entonces $\int_{(\partial U,\nu)} \Phi^*\omega = \int_{(\partial U,\mathcal{O})} \Phi^*\omega$ también se denota $\int_{\partial\Phi} \omega$ y (106) queda $\int_\Phi d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega$.

Demostración del teorema 172.
Tenemos $\Psi^*\omega = \mathbf{F}^\natural$ para un único campo de vectores $\mathbf{F} : U_1 \to \mathbb{R}^k$. Entonces:

$$\int_\Phi d\,\omega = \int_U \Phi^*\, d\,\omega \overset{(*)}{=} \int_U d\,\Phi^*\,\omega = \int_U d\left(\mathbf{F}^\natural\right) = \int_U (\operatorname{div} \mathbf{F})\, du_1 \cdots du_k .$$

En la igualdad marcada con $(*)$ hemos utilizado la fórmula (91) del apartado 6.10 y la hipótesis de que Ψ es al menos $\mathcal{C}^2$. Por otra parte, por la proposición 167:

$$\int_{(\partial U,\nu)} \Phi^*\omega = \int_{(\partial U,\nu)} \mathbf{F}^\natural = \int_{\partial U} (\mathbf{F} \cdot \nu)\, d\,\text{área} .$$

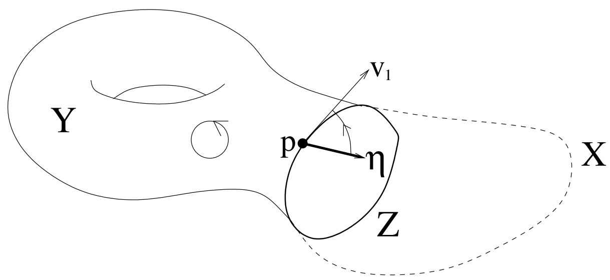
Se deduce la igualdad (106) aplicando el teorema de la divergencia en $\mathbb{R}^k$. □

7.5 Teorema de Stokes para variedades

Definición 173. *Sea X una variedad en $\mathbb{R}^n$ de dimensión k. Una* **variedad con borde** *es un subconjunto $Y \subset X$ que está separado del complemento $X \setminus Y$ por otra variedad $Z \subset X$ con $\dim Z = k-1$. La dimensión de Y es k. La variedad Z se denota ∂Y y se llama* **borde** *de Y.*

Ejemplos. La bola cerrada $\overline{B}(p,r)$ es una variedad con borde de dimensión n en $\mathbb{R}^n$. Su borde es la variedad de dimensión $n-1$ que la separa del resto de $\mathbb{R}^n$, es decir la esfera de centro p y radio r.
El segmento $Y = \{2\} \times [0,1] \times \{4\}$ es una variedad con borde de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$, contenida en la recta $X = \{x=2, z=4\}$. El borde ∂Y es el conjunto de dos puntos $\{(2,0,4),(2,1,4)\}$, pues separa el segmento del resto de la recta X.

En cada punto $p \in \partial Y$ tenemos dos **conormales unitarias,** que son los vectores unitarios tangentes a X y normales a ∂Y. Entre ellas se distingue la **conormal exterior a** Y de manera enteramente análoga a lo explicado para dominios en el apartado 7.3. Si además Y está orientada entonces se induce una orientación en ∂Y de la siguiente manera. Dado $p \in \partial Y$, una base ordenada $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ de $T_p\partial Y$ pertenece a la orientación inducida si al añadir en el primer puesto la conormal η_p exterior a Y resulta una base ordenada $\{\eta_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ perteneciente a la orientación de Y.



Enunciamos ya el teorema de Stokes para variedades.

Teorema 174. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto en el que hay definida una $(k-1)$-forma ω. Sea Y una variedad* ***compacta*** *con borde de dimensión k contenida en U. Si Y está orientada y damos a ∂Y la orientación inducida, entonces:*

$$\boxed{\int_Y d\omega \;=\; \int_{\partial Y} \omega} \tag{107}$$

Idea de la demostración. Para una parcela $P \subset Y$ y su borde ∂P el teorema es un corolario del 172. En general Y no se puede cubrir por una única parametrización biyectiva $\Phi : U \to Y$, por lo que es preciso hacerle una parcelación. Entonces $\int_Y d\omega$ es la suma de las integrales de $d\omega$ sobre las parcelas. Dicha suma es igual a la suma Σ de las integrales de ω sobre los bordes orientados de las parcelas. Una parte del borde común a dos parcelas recibe orientaciones opuestas de ellas, por lo que contribuye cero a la suma total de integrales de ω. Las partes pertenecientes al borde de una sola parcela forman una parcelación de ∂Y y tienen la misma orientación que ∂Y, luego la suma Σ es igual a $\int_{\partial Y} \omega$. $\square$

Nos fijamos ahora en un caso particular: $n=3$ y $k=2$. Tenemos, pues, un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$, una forma de Pfaff ω definida en U y una superficie compacta con borde $Y \subset U$ que además está orientada por una normal unitaria ν. El borde ∂Y es una unión de curvas cerradas orientadas. Tomamos el único campo de vectores $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$ tal que $\omega = \mathbf{F}^\flat$ y tenemos:

$$\int_{\partial Y} \mathbf{F}^\flat \;=\; \int_Y d\,\mathbf{F}^\flat \;=\; \int_Y (\mathbf{rot}\,\mathbf{F})^\natural \;=\; \int_Y (\mathbf{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \nu \; d\,\text{área}\,,$$

Es decir $\int_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_Y \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$, que es el **teorema de Stokes clásico.**

La demostración a base de parcelas que hemos hecho del teorema 174 sirve también para el caso en que Y es una **variedad cerrada,** es decir compacta con borde vacío, obteniéndose:

$$\partial Y \;=\; \varnothing \;\Longrightarrow\; \int_Y d\,\omega \;=\; 0\,. \tag{108}$$

En efecto, hacemos una parcelación de Y y ahora resulta que todo trozo de borde es común a dos parcelas; luego contribuye cero a la suma de integrales de ω sobre los bordes orientados de las parcelas. Entonces dicha suma es nula, que es lo que se afirma en (108).

Proposición 175. *Fijamos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Para que una k-forma μ sea exacta en U es **necesario** que sea cerrada y además que su integral sobre cualquier variedad cerrada $Y \subset U$ de dimensión k sea nula.*

Ejemplo. Sea $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. En este abierto consideramos la siguiente 2-forma:

$$\mu \;=\; \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Big(x\,dy\wedge dz - y\,dx\wedge dz + z\,dx\wedge dy \Big)\,,$$

y se comprueba que $d\mu \equiv 0$, o sea que μ es cerrada. Además $\mu = \mathbf{F}^\natural$, donde $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^3$ es el **campo gravitatorio** (o el electrostático). La esfera unidad S^2 está contenida en U y el flujo de $\mathbf{F}$ a su través, según la normal exterior a la bola $\nu = \mathbf{r}$, es:

$$\int_{S^2} (\mathbf{F}\cdot\nu)\,d\,\text{área} \;=\; \int_{S^2} r^{-3}\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\,d\,\text{área} \;=\; \int_{S^2} 1\cdot d\,\text{área} \;=\; \text{área}\big(S^2\big) \;=\; 4\pi\,,$$

distinto de cero. Luego μ es cerrada pero no exacta en U. En vista de la fórmula (101), este resultado nos dice que el campo gravitatorio $\mathbf{F}$ no tiene nigún **potencial vector** en U, es decir no existe ningún campo $\mathbf{G}$ de clase al menos $\mathcal{C}^1$ en todo U y tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$. Por supuesto, sí que tiene potenciales vector en cada abierto *convexo* $V \subset U$; lo que ocurre es que es imposible "pegar" esos potenciales vector de modo a obtener uno definido en todo U. Los libros de Física no muestran un potencial vector para el campo gravitatorio en $\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$... por una buena razón.

7.6 Casos especiales

Cuando $k = n = 2$ el teorema de Stokes es el **teorema de Green,** que afirma que si $\omega \equiv P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ es una forma de Pfaff, definida en un abierto del plano que contenga la adherencia $\overline{U}$ de un dominio elemental U, y damos al borde ∂U la orientación inducida por la normal exterior a U, entonces:

$$\int_{\partial U} \big(P\,dx + Q\,dy \big) \;=\; \iint_U (Q_x - P_y)\,dxdy\,.$$

Pero ahora tenemos una ayuda para recordar, sin equivocarnos, cuál es el integrando de la integral doble, porque:

$$\begin{aligned}
d\big(P\,dx + Q\,dy\big) \;&=\; dP\wedge dx + dQ\wedge dy \;= \\
&=\; (P_x\,dx + P_y\,dy)\wedge dx + (Q_x\,dx + Q_y\,dy)\wedge dy \;= \\
&=\; P_y\,dy\wedge dx + Q_x\,dx\wedge dy \;=\; (Q_x - P_y)\,dx\wedge dy\,.
\end{aligned}$$

Por último vamos a estudiar el caso $k = 1$. Ahora tenemos una 0-forma en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, es decir una función escalar $f : U \to \mathbb{R}$. El dominio elemental es un intervalo $U = (a,b) \subset \mathbb{R}$ y la función paramétrica es un camino $\alpha(t) : (a,b) \to U$ restricción de un $(a',b') \to U$ definido en un intervalo más grande: $a' < a$ y $b' > b$; por lo tanto también está definido $\alpha : [a,b] \to U$.

Definiciones 176. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad compacta de dimensión 0, es decir un conjunto finito de puntos. Una* **orientación** *de M es un objeto $\mathcal{O}$ que coloca en cada punto $p \in M$ una de las dos etiquetas "salida" o "llegada".*
Si $(M, \mathcal{O})$ es una variedad orientada de dimensión 0 y f es una función escalar (una 0-forma) definida en los puntos de M, la **integral de f sobre** *$(M, \mathcal{O})$ es el número:*

$$\int_{(M,\mathcal{O})} f \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \sum_{p \text{ punto de llegada } \in M} f(p) \quad - \quad \sum_{p \text{ punto de salida } \in M} f(p) \; .$$

Para $M = \varnothing$ definimos $\displaystyle\int_M f = 0$.

Un conjunto M de N puntos tiene 2^N orientaciones. El caso que aquí nos interesa es el de un camino $\alpha(t) : [a, b] \to U$ y $M = \{\alpha(a), \alpha(b)\}$ el conjunto de sus extremos. Cuando el camino no es *cerrado,* este conjunto tiene dos elementos y admite 4 orientaciones. De entre estas cuatro elegimos la "especial", para la cual el punto inicial $\alpha(a)$ es de salida y el punto final $\alpha(b)$ es de llegada.

Definición 177. *Sea $\alpha(t) : [a, b] \to U$ un camino. El* **borde de** *α es el objeto $\partial\alpha$ que se define de la manera siguiente. Si α es un camino cerrado entonces $\partial\alpha = \varnothing$. Si α no es cerrado entonces $\partial\alpha$ es la variedad de dimensión cero $\{\alpha(a), \alpha(b)\}$ con la orientación para la cual $\alpha(a)$ es de salida y $\alpha(b)$ es de llegada.*

Con esas definiciones, tenemos:

$$\int_{\partial\alpha} f \;=\; f\big(\alpha(b)\big) \;-\; f\big(\alpha(a)\big) \; ,$$

tanto si α es cerrado como si no lo es. Pero sabemos desde el capítulo 5 que:

$$f\big(\alpha(b)\big) \;-\; f\big(\alpha(a)\big) \;=\; \int_\alpha df \; .$$

Juntando las dos igualdades, deducimos:

$$\int_\alpha df \;=\; \int_{\partial\alpha} f \; .$$

7.7 Demostraciones

Demostración de la proposición 167. En el apartado 1.1 hemos definido el concepto de **matriz de Gram** de una sucesión de vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, que es semidefinida positiva y por lo tanto con determinante no negativo. Por ejemplo, para $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ dicha matriz es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2 \\ \\ \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^t \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 57 \end{bmatrix} .$$

De igual modo, la matriz de Gram de las columnas $\Phi_{u_1}, \ldots, \Phi_{u_k}$ de $D\Phi$ es la matriz $(D\Phi)^t \, D\Phi$ que en el apartado 6.5 hemos llamado "matriz pequeña". La fórmula (70) de dicho apartado es consecuencia inmediata de la siguiente identidad algebraica:

$$\|\Delta(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\|_2^2 \;=\; \det\Big(\text{matriz de Gram de } \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\Big) \, . \tag{109}$$

Tenemos una parametrización regular y biyectiva $\Phi(u_1, \ldots, u_{n-1}) : D \to P$, compatible con ν según la fórmula (62) del apartado 6.3. Para cada $u \in D$ los vectores:

$$\nu\big(\Phi(u)\big) \, , \; \Phi_{u_1}(u) \, , \; \ldots \; , \; \Phi_{u_{n-1}}(u) \; ,$$

forman una base de $\mathbb{R}^n$ con determinante positivo. La utilizamos para describir cualquier campo $\mathbf{F} : P \to \mathbb{R}^n$ como combinación lineal:

$$\mathbf{F}\big(\Phi(u)\big) \;=\; g_1(u)\,\nu\big(\Phi(u)\big) + g_2(u)\,\Phi_{u_1}(u) + \cdots + g_n(u), \Phi_{u_{n-1}}(u)\;.$$

Nótese que $g_1 = \mathbf{F}\cdot\nu$. El miembro izquierdo de (103) es igual a lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\int_D \det\big[\,\mathbf{F}\big(\Phi(u)\big)\,|\,\Phi_{u_1}\,|\,\cdots\,|\,\Phi_{u_{n-1}}\,\big]\;du_1\cdots du_{n-1} \;= \\ =\;&\int_D \det\big[\,g_1(u)\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,\Phi_{u_1}\,|\,\cdots\,|\,\Phi_{u_{n-1}}\,\big]\;du_1\cdots du_{n-1} \;= \\ =\;&\int_D \big(\mathbf{F}\cdot\nu\big)_{\Phi(u)}\,\det\big[\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,D\Phi\,\big]\;du_1\cdots du_{n-1}\;. \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} &\det\Big(\big[\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,D\Phi\,\big]\Big)^2 \;= \det\Big(\big[\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,D\Phi\,\big]^t\,\big[\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,D\Phi\,\big]\Big) \;= \\ =\;\det&\left(\left[\begin{array}{c}\nu\big(\Phi(u)\big)^t\\ \hline (D\Phi)^t\end{array}\right]\big[\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,D\Phi\,\big]\right) \;=\; \det\left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & (D\Phi)^t D\Phi \end{array}\right]\;. \end{aligned}$$

En la última matriz son nulas las cajas fuera de la diagonal porque los vectores $\Phi_i(u)$ son tangentes a la parcela P en el punto $\Phi(u)$, luego ortogonales a $\nu\big(\Phi(u)\big)$. Así llegamos a la identidad $\det\Big(\big[\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,D\Phi\,\big]\Big)^2 = \det\big((D\Phi)^t D\Phi\big)$ y, utilizando (109), obtenemos:

$$\det\Big(\big[\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,D\Phi\,\big]\Big)^2 \;=\; \|\Delta(D\Phi)\|_2^2\;, \tag{110}$$

Como por hipótesis Φ es compatible con ν, es $\det\big(\big[\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,D\Phi\,\big]\big) > 0$ y de (110) deducimos que $\det\big(\big[\,\nu\big(\Phi(u)\big)\,|\,D\Phi\,\big]\big) = \|\Delta(D\Phi)\|_2$, luego:

$$\int_{(P,\nu)} \mathbf{F}^\natural \;=\; \int_D \big(\mathbf{F}\cdot\nu\big)_{\Phi(u)}\,\|\Delta(D\Phi)\|_2\,du_1\cdots du_{n-1} \;=\; \int_P \big(\mathbf{F}\cdot\nu\big)\,d\,\text{área}\;.$$

□

Demostración del teorema 169. Exisen básicmente tres demostraciones: por particiones de la unidad, por cálculo de variaciones y por flujos. Aquí sólo explicamos algunas ideas de la demostración por flujos.

El **flujo**[3] de un campo de vectores $\mathbf{F}$ es una familia de difeomorfismos φ_t entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales $\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi_t(x) = \mathbf{F}\big(\varphi_t(x)\big)$ y además $\varphi_0 = \mathrm{id}$.

Para dominios muy pequeños $E \subset U$ y un punto $p \in E$, se tiene

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})_p\cdot\operatorname{Vol}(E) \;\approx\; \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\operatorname{Vol}\big(\varphi_t(E)\big)\;,$$

con un error que, a medida que reducimos E, se va haciendo despreciable frente a $\operatorname{Vol}(E)$. Si vamos partiendo U en dominios cada vez más pequeños, en el límite obtenemos:

$$\int_U (\operatorname{div}\mathbf{F})\;dx_1\cdots dx_n \;=\; \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\operatorname{Vol}\big(\varphi_t(U)\big)\;. \tag{111}$$

Por otra parte la diferencia de volúmenes $\operatorname{Vol}\big(\varphi_t(U)\big) - \operatorname{Vol}(U)$ viene dada por lo que $\varphi_t(U)$ sobresale de U menos lo que se mete dentro de U. Partiendo de esta idea, no es difícil ver que

$$\operatorname{Vol}\big(\varphi_t(U)\big) - \operatorname{Vol}(U) \;=\; t\cdot\int_{\partial U}(\mathbf{F}\cdot\nu)\;d\;\text{área} + \mathrm{o}(|t|)\;,$$

de donde:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\operatorname{Vol}\big(\varphi_t(U)\big) \;=\; \int_{\partial U}(\mathbf{F}\cdot\nu)\;d\;\text{área}\;. \tag{112}$$

Juntando (111) y (112) tenemos el teorema de la divergencia. □

[3] No confundir con "flujo a través", que es un número definido en el apartado 7.2.