0 a 1 b

Hoja 1: Fundamentos

1.- Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $|x+1| > 3$,

(2) $|2x+1| < 1$,

(3) $|x-1| \leq |x+1|$,

(4) $x^2 - 4x + 6 < x$,

(5) $|x^2 - 3| \leq 1$,

(6) $\frac{x^2}{x^2-4} < 0$,

(7) $\frac{x-1}{x+2} > 0$,

(8) $|(x-2)(x-3)| < 1$,

(9) $|x-1| + |x-2| > 1$,

(10) $\frac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1$.

2.- Demostrar por inducción:

(1) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

(4) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

(5) $\forall n \geq 10$, $2^n \geq n^3$. apuntes

(6) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$. prácticas

(7) El número de rectas determinado por $n \geq 2$ puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es $\frac{1}{2}n(n-1)$.

(8) $4(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$.

? (9) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.

(10) Si n no es múltiplo de 4 la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es múltiplo de 10. (Comprobarlo para $n = 1, 2, 3$ y demostrar que si es cierto para n, lo es para $n + 4$.)

(11) $n(n^2 + 5)$ es divisible por 6.

(12) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! = n!$ para $n \geq 2$.

3.- Sea $\mathcal{P}(n) = \{n^2 + 5n + 1$ es un número par$\}$.
a) Demostrar que si $\mathcal{P}(n)$ es cierto, entonces $\mathcal{P}(n+1)$ también lo es.
b) Demostrar que $\mathcal{P}(n)$ es siempre falso.

4.- Demostrar que para todo número natural n y a y b cualesquiera se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ y } 0! = 1.$$

Indicación. Demostrar primero que $\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$.

5.- Demostrar por inducción sobre n que

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{si } r \neq 1.$$

6.- Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{para } x \geq -1.$$

7.- Sean a, b dos números no negativos, con $a \leq b$. Demostrar que

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

8.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(1) $A = \{x : x^2 < 4\}$,

(2) $B = \{x : x^2 \geq 4\}$,

(3) $C = \{x : 2 < x^2 \leq 4\}$,

(4) $D = \{\frac{n-1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$,

(5) $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(6) $F = E \cup \{0\}$,

(7) $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,

(8) $H = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 \leq 3\}$.

9.- Si el conjunto A tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

10.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

11.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, y sea $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Indicación. Para demostrar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ basta ver que $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Elegir a en A y b en B tales que $\sup A - a < \varepsilon/2$ y $\sup B - b < \varepsilon/2$.

12.- Donde está el fallo en los siguientes razonamientos:

(a) Sea $x = y$, entonces $x^2 = xy$ y $x^2 - y^2 = xy - y^2$. Así, $(x + y)(x - y) = y(x - y)$, es decir, $x + y = y$. De aquí se sigue que $2y = y$ y por lo tanto $2 = 1$. **Contradicción!!!**

(b) Vamos a hallar los x que verifican

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a $x + 1 \geq x - 1$, o lo que es lo mismo $1 \geq -1$. Como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el conjunto de valores que verifican la desigualdad anterior es $\mathbb{R}$. De esta forma, tomando en particular $x = -1$ obtenemos

$$0 = \frac{-1+1}{-1-1} \geq 1. \qquad \textbf{Contradicción!!!}$$

PRÁCTICAS CÁLCULO I

Irina Arévalo
irina.arevalo@uam.es

VALOR ABSOLUTO

~~$a \in \mathbb{R}$~~ $a \in \mathbb{R}$, el valor absoluto es:

$$|a| = \begin{cases} a, & a>0 \\ 0, & a=0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

Propiedades

- $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $|-a| = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- Si $c \geq 0$

$$|a| \leq c \iff -c \leq a \leq c$$

$$|a| \geq c \iff a \geq c \text{ ó } a \leq -c$$

- $|x - x_0| = \text{dist.}(x, x_0)$

$\{x : |x+1| > 3\} \equiv \{x : \text{dist}(x, -1) > 3\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} |x| = \sqrt{x^2} \\ |x|^2 = \cancel{x^2}\ x^2 \end{array}}$$

Hoja 1

$\boxed{1.}$ 1) $|x+1| > 3 \iff \begin{cases} x+1 > 3 \Rightarrow x > 2 \\ x+1 < -3 \Rightarrow x < -4 \end{cases}$

$x \in (-\infty, -4) \cup (2, \infty)$

$$\boxed{\{x \in \mathbb{R} / |x+1| > 3\} \equiv \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, -1) > 3\}}$$

3) $|x-1| \leq |x+1| \Rightarrow (x-1)^2 \leq (x+1)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} \leq \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1}$

$\Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Técnica de completar cuadrados:

$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{a}} x^2+\underbrace{\frac{b}{a}}_{2d}x+\frac{c}{a}=0 \qquad \frac{b}{a}=2d$$

$$\xrightarrow{d=\frac{b}{2a}} \underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \Longrightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \overbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Demostración fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

NO IMP

---

6) $\dfrac{x^2}{x^2-4}<0$

Para que sea <0 $\nearrow \frac{+}{-}<0$ $\searrow \frac{-}{+}<0$

• $x^2>0$ y $x^2-4<0$

$\Downarrow$

$x\neq 0$

$x^2<4$

$x<\sqrt{2}$ $=\pm 2$

$x\in(-2,0)\cup(0,2)$

• $x^2<0$ y $x^2-4>0$

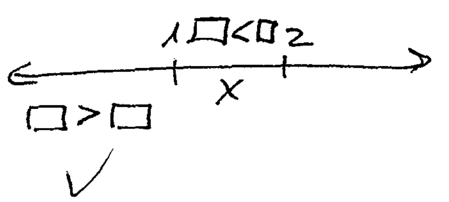
...

9) $|x-1|+|x-2|>1 \Rightarrow \left(|x-1|+|x-2|\right)^2>1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x-1|^2+2|x-1||x-2|+|x-2|^2>1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-6x+4+2|x-1||x-2|>0 \xrightarrow{/2} x^2-3x+2+|x-1||x-2|>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x-1||x-2|>-x^2+3x-2 \Longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}= \begin{cases}1\\2\end{cases}$$



PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

$P(n)$ propiedad del número natural n, y queremos probarla para todos los números naturales.

Ppio de inducción: Si verificamos:

(1) $P(1)$ es cierto

(2) Suponemos que $P(n)$ es cierto, entonces si $P(n+1)$ es cierto, entonces $P(n)$ también es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

hipótesis de inducción

Hoja 1

$\boxed{2.}$

5) $\forall n \geq 10$, $[2^n \geq n^3] = P(n)$

Paso 1 $\begin{cases} P(10): 2^{10} = 1024 \\ P(10): 10^3 = 1000 \end{cases}$ $1024 \geq 1000$ ✓

Paso 2: Suponiendo que $\boxed{2^n \geq n^3}$ vamos a probar que $2^{n+1} \geq (n+1)^3$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2$, $2^n \geq n^3$

Entonces basta con probar:

$\boxed{(n+1)^3 \leq 2 \cdot n^3}$ HI $\boxed{2 \cdot n^3 \geq (n+1)^3}$

$$\frac{(n+1)^3}{n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \qquad n \geq 10 \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \leq \left(1 + \frac{1}{10}\right)^3 = \left(\frac{11}{10}\right)^3 = \frac{1331}{1000} \leq 2$$

5) $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{\quad}{6}$

6) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $(x+y)$

Paso 1: $P(1) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ ✓

Paso 2: Suponemos que $P(n)$ es cierto:

$$x^{2n} - y^{2n} = K(x+y)$$

Queremos probar que $x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)}$ es divisible por $(x+y)$

$$x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)} = x^{2n+2} - y^2 \cdot x^{2n} + y^2 \cdot x^{2n} - y^{2n+2} =$$

$$= x^{2n}(x^2 - y^2) + \underbrace{y^2 (x^{2n} - y^{2n})}_{K(x+y)} =$$

$$= x^{2n}(x-y)(x+y) + y^2 K(x+y)$$

$\boxed{3.}$ $P(n) = \{ n^2 + 5n + 1 \text{ es par} \}$

a) Si $P(n)$ es cierto $\Longrightarrow$ $P(n+1)$ es cierto

$n^2 + 5n + 1 = 2K$ para ~~alguien~~ algún $K \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{(n+1)^2 + 5(n+1) + 1}_{\text{multiplicamos a lo bestia}} = 2.K \qquad K \in \mathbb{N}$$

y nos da un múltiplo de 2.

b) $P(n) = \{ n^2 + 5n + 1 \text{ es impar} \}$

$\boxed{4.}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

donde $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ y $0! = 1$

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n}$$

$\boxed{n=1}$

$$(a+b) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k . b^{1-k} =$$

$$= \binom{1}{0} a^0 . b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 . b^{1-1} = \frac{1!}{0!(1-0)!} \cdot a^0 \cdot b^1 +$$

$$+ \frac{1!}{1!(1-1)!} \cdot a^1 \cdot b^0 = b + a$$

$\boxed{n=2}$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k . b^{2-k} = \underbrace{\binom{2}{0} a^0 . b^{2-0}}_{k=0} + \underbrace{\binom{2}{1} a^1 . b^{2-1}}_{k=1} + \underbrace{\binom{2}{2} a^2 . b^{2-2}}_{k=2}$$

$$= b^2 + 2ab + a^2$$

PROBAMOS EL BINOMIO DE ...

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!\,\underbrace{(n-(k-1))!}_{(n-k+1)!}} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n-k+1}\cdot\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{1}{k}\cdot\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

"DEMOSTRAR PRIMERO"

$$(n-k+1)! = (n-k+1)\underbrace{(n-k)\,(n-k-1)\cdots}_{(n-k)!}$$

$$= \frac{k.n! + (n-k+1)\,n!}{(n-k+1)k\,.(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{\cancel{k.n!} + n.n! - \cancel{k.n!} + n!}{(n-k+1)k\,(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(n-k+1)\underbrace{k\cdot(k-1)!}_{k(k-1)! = k!}\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$(n-k+1)\,(n-k)! = (n-k+1)!$$

AHORA SÍ QUE PROBAMOS EL B.N POR INDUCCION

$$\boxed{P(n) = \left\{ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right\}}$$

- $P(1) = \left\{ a+b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k \cdot b^{1-k} \right\}$ (hecho anteriormente)

- Suponiendo $\underbrace{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}}_{H.I.}$, queremos probar:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \cdot b^{n+1-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^n}_{} \overset{H.I}{=}$$

$$(a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$(a+b) \cdot c = a.c + b.c$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1}}_{} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j}}_{} =$$

en la 1ª suma (1er SUMAT.) $\left\{ \begin{array}{l} k = j-1 \\ j = k+1 \end{array} \right.$

en la 2ª suma (2º SUMAT.) $\{ j = k$

$$= \underbrace{\binom{n}{0} a^0 \cdot b^{n+1}}_{j=0\ (2^{\circ}\ \text{sumat.})} + \underbrace{\binom{n}{0} a^1 b^n}_{j=1\ (1^{er}\ \text{sumat.})} + \underbrace{\binom{n}{1} a^1 b^n}_{j=1\ (2^{\circ}\ \text{sumat.})} + \underbrace{\qquad}_{j=2\ (1^{er}\ \Sigma)} + \underbrace{\qquad}_{j=2\ (2^{\circ}\ \Sigma)}$$

$$+ \dots + \underbrace{\binom{n}{n-1} a^n b^1}_{j=n\ (1^{er}\ \text{sumat.})} + \underbrace{\binom{n}{n} a^n b^1}_{j=n\ (2^{\circ}\ \text{sumat.})} + \underbrace{\binom{n}{n} a^{n+1} \cdot b^0}_{j=n+1\ (1^{er}\ \text{sumat.})} =$$

$$= b^{n+1} + \underbrace{\boxed{\binom{n+1}{1}} a^1 b^n}_{j=1} + \dots + \underbrace{\binom{n+1}{n} a^n b}_{j=n} + \underbrace{a^{n+1}}_{j=n+1} =$$

$$\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k} \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{0}$$

$0+1$

$$= \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{1} \cdot \underbrace{a^0}_{1=1} \cdot b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^1 b^n + \ldots + \binom{n+1}{n} a^n \cdot b^1 + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{1} a^{n+1} \cdot \underbrace{b^0}_{1} \quad 1 \cdot 1 = 1$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \cdot a^j \cdot b^{n+1-j}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \cdot a^j \cdot b^{n+1-j} \underset{j=k}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \cdot b^{n+1-k}}$$

PRÁCTICAS

$\boxed{2}$

11) $n(n^2+5)$ divisible por 6

- Si $n=2k \Rightarrow 2k(4k^2+5)$ divisible por 2
- Si $n=2k+1 \Rightarrow (2k+1)\big(\underbrace{(2k+1)^2}_{impar}+\underbrace{5}_{impar}\big)$ $\Rightarrow$ par $\Rightarrow$ divisible por 2.

$P(n) \equiv \{ n(n^2+5)$ es divisible por 3 $\}$

$P(1) = 1(1^2+5) = 6$ ✓

$P(n+1) = (n+1)\big((n+1)^2+5\big) = (n+1)(n^2+2n+6) = n^3+3n^2+8n+6 =$

$= n(n^2+5) + 3n^2+3n+6 = \underbrace{n(n^2+5)}_{H.I.} + \underline{\underline{3}}(n^2+n+2)$

---

10) $n \neq 4k \Rightarrow \underbrace{1^n}_{impar} + \underbrace{\underbrace{2^n}_{par} + \underbrace{\underbrace{3^n}_{impar} + \underbrace{4^n}_{par}}_{impar}}_{impar}$ múltiplo de 10.

$\underbrace{\qquad}_{par}$ $\Rightarrow$ múltiplo de 2

$\Rightarrow P(n+4)$

DESIGUALDAD TRIANGULAR INVERSA
$\lvert a\rvert = \lvert a-b+b\rvert \leq \lvert a-b\rvert + \lvert b\rvert \Rightarrow$
$\Rightarrow \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \leq \lvert a-b\rvert$

PRÁCTICAS: SUPREMOS E ÍNFIMOS

<u>SUPREMO</u>: Menor de las cotas superiores.

<u>ÍNFIMO</u>: Mayor de las cotas inferiores.

$\boxed{8.}$

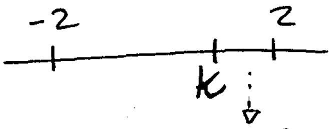
(a) $A = \{x : x^2 < 4\} = \{x : -2 < x < 2\} = (-2,2)$

$\boxed{\sup A = 2}$

- 2 es cota superior.

  $x \in A \Rightarrow x \leq 2$

- 2 es la menor cota superior: Supongamos $\exists K < 2$ tal que $\forall x \in A \quad x \leq K$.



$\frac{k+2}{2} \in A$

$2 > \frac{k+2}{2} > k \Rightarrow \exists x \in A \quad x > K$

contradicción

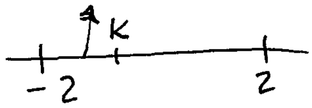
$\boxed{\inf A = -2}$

- -2 es cota inferior

  $x \in A \Rightarrow x \geq -2$

- -2 es la mayor cota inferior: Supongamos $\exists K > -2$ tal que $\forall x \in A \quad x \geq K$.

$\frac{-2+K}{2} \in A$



$-2 < \frac{-2+K}{2} < K \Rightarrow \exists x \in A \quad x < K$

contradicción

$\boxed{8.}$

(2) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \ , \ x \geq 2\} =$

$= (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

El conjunto no tiene ínfimo ni supremo.

Demostración:

- Supongamos un k supremo $\in B$: $k+1$ sería mayor que k y pertenecería también a B, por lo que sería una contradicción.
- Supongamos un k ínfimo $\in B$: $k-1$ sería menor que k y pertenecería también a B, por lo que sería una contradicción.

(7) $G = \left\{ \frac{1}{n} - (-1)^n : \underset{n \geq 1}{n \in \mathbb{N}} \right\}$

Para $n =$ par: $\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{4} - 1, \frac{1}{6} - 1, \ldots, = \frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{6} \ldots$

Para n impar: $\frac{1}{1} + 1, \frac{1}{3} + 1, \frac{1}{5} + 1, \ldots, = 2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5} \ldots$

[CO]MPROBACIÓN [D]E QUE [2] ES [CO]TA [SU]PERIOR

$$\left| \frac{1}{n} - (-1)^n \right| \underset{\text{desigualdad triangular}}{\leq} \frac{1}{n} + \left|(-1)^n\right| = \frac{1}{n} + 1 \leq 2$$

$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} - (-1)^n > -(-1)^n \geq -1$$

COMPROBACIÓN DE QUE -1 ES COTA INFERIOR

$\boxed{\sup G = 2}$

Supongamos que $\exists K < 2$ tal que $\forall g \in G$, $g \leq K$

Sin embargo, escogiendo $g = 2 \in G$ se tiene que

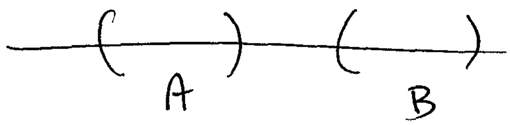
$K < 2 \Rightarrow$ contradicción!

$\boxed{\inf G = -1}$

De la forma $\frac{-1+k}{2}$

$\boxed{10.}$ $A, B \subset \mathbb{R}$; $A, B \neq \emptyset$; $a < b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$

$\Rightarrow \exists \sup A, \inf B$ y $\sup A \leq \inf B$



Fijamos $b_0 \in B \Rightarrow \forall a \in A,\ a < b_0 \Rightarrow A$ acotado superiormente

Prop. del supremo / Axioma de completitud $\Rightarrow \exists \sup A$

Fijamos $a_0 \in A \Rightarrow a_0 < b$ $\forall b \in B \Rightarrow B$ acotado inf $\Rightarrow \exists \inf B$

y $\sup A \leq \inf B$

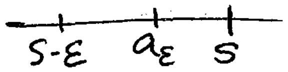
11. $A, B \subset \mathbb{R}$; $A, B \neq \emptyset$, acotados superiormente

$A + B = \{a + b : a \in A, \ b \in B\}$

Demostrar: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

PROPOSICIÓN: $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, s cota superior.

$s = \sup S \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in S, \ s - \varepsilon < a_\varepsilon \leq s$



$x \in A+B \Rightarrow x = a + b, \ a \in A, \ b \in B.$

Ax. completitud $\Rightarrow \exists \sup A$ y $\sup B$.

$x = a + b \leq \sup A + \sup B \quad \boxed{\forall x \in A+B}$

$\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

$\varepsilon > 0 \to \exists a_\varepsilon \in A \qquad \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a_\varepsilon \leq \sup A$

$\to \exists b_\varepsilon \in B \qquad + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b_\varepsilon \leq \sup B$

$\sup A + \sup B - \varepsilon < \underbrace{a_\varepsilon + b_\varepsilon}_{(a_\varepsilon + b_\varepsilon) \in (A+B)} \leq \sup(A+B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup A + \sup B - \varepsilon \leq \sup(A+B)$

$\boxed{a \leq b \leq a \Rightarrow a = b}$

$\begin{cases} \sup(A+B) \leq \sup A + \sup B \\ \sup A + \sup B - \varepsilon \leq \sup(A+B) \end{cases} \Rightarrow$ DEMOSTRADO $\boxed{\sup(A+B) = \sup A + \sup B}$

Para todo $\varepsilon > 0$

$\Downarrow$

puedes hacerlo todo lo pegado a cero que tú quieras, por lo tanto es insignificante.

12. a) Sea $x=y$

$x^2 = xy \Rightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 \Rightarrow (x-y)(x+y) = y(x-y) \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y=y \Rightarrow 2y = y \Rightarrow 2=1$

$\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)} = y$, como $x=y \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow$ no podemos dividir entre 0.

b)