ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 1. Espacio Euclídeos y unitarios I. Formas bilineales y hermíticas. Productos escalares. Normas inducidas por productos escalares.

1. Decide de manera razonada si las siguientes funciones $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ son formas bilineales o sesquilineales en los espacios vectoriales V sobre K con $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

a) $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, con $\varphi(A, B) = \text{traza}(A + \overline{B})$;

b) $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, con $\varphi(A, B) = \text{traza}(A\overline{B})$;

c) $V = \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, con $\varphi(A, B) = \text{traza}(A\overline{B}) - \text{traza}(A)\text{traza}(\overline{B})$;

d) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable}\}$, con $\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g(t)dt$;

e) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, con $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)(x^2 + 1)dx$;

f) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, con $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x - 1)dx$;

g) $V = \mathbb{K}^2$, con $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + y_1)^2 - x_2 y_2$.

2. Considera la base estándar $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Escribe la matriz $M_B(\varphi)$ de las siguientes formas bilineales:

a) $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_3 + 2x_2y_2 - 5x_2y_3 + 4x_3y_1$;

b) $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

3. Considera ahora la base $B' = \{(1, 2, 3), (-1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y denotamos por $(x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2)$ las coordenadas de dos vectores de $\mathbb{R}^3$ respecto a la base B'. Escribe la expresión en términos de las coordenadas anteriores de las formas bilineales del ejercicio 2.

4. Decide de manera razonada cuáles de las funciones del ejercicio 1 son formas bilineales simétricas, o sesquilineales hermíticas, según corresponda.

5. Se dice que una forma bilineal (respectivamente, sesquilineal) $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ es antisimétrica si para todo par de vectores $u, v \in V$ se tiene que $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$.

a) Encuentra una forma bilineal antisimétrica $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

b) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea φ una forma bilineal en V. Da una condición necesaria y suficiente sobre $M_B(\varphi)$ para que φ sea antisimétrica;

c) Demuestra que toda forma bilineal (respectivamente, sesquilineal) φ en V se puede escribir como la suma de una forma bilineal simétrica (respectivamente, hermítica) y una antisimétrica.

6. Sea V un espacio vectorial sobre K , sea $\varphi : V \times V$ una forma bilineal simétrica y sea $W \subset V$ un subespacio vectorial. Demuestra que el conjunto:

$$V' := \{v \in V : \varphi(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

es un subespacio vectorial de V. Se dice que V' es el *subespacio ortogonal a* V.

7. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \quad \to \quad (2x_1 - 2x_2 + 4x_3)y_1 + (-2x_1 - 2x_3)y_2 + (6x_3 + 4x_1 - 2x_2)y_3.$$

a) Demuestra que ϕ es una forma bilineal simétrica.

b) Calcula el subespacio ortogonal al vector $(1, -1, -1)$ respecto a ϕ.

c) Describe geométricamente el conjunto de rectas de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a sí mismas respecto a la forma ϕ.

8. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considera en $\mathbb{R}^3$ la aplicación bilineal

$$\phi_\alpha\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula los valores de α para los que ϕ_α es un producto escalar.

b) Sea M_α el plano ortogonal a $(1, 1, 1)$ respecto a ϕ_α. Demuestra que el conjunto $\{M_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un haz de planos que pasa por una recta. Describe la recta.

9. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considera en $\mathbb{R}^3$ la aplicación bilineal

$$\phi_{\alpha,\beta}\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Describe el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ determinado por los pares (α, β) para los que $\phi_{\alpha,\beta}$ es un producto escalar.

b) Determina los valores de α y β para que el plano de ecuación $x + y + z = 0$ sea ortogonal al vector $(1, 0, 1)$ respecto al producto escalar $\phi_{\alpha,\beta}$.

10. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(A, B) = \text{traza}\,(AB^T)$.

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

b) ¿Cuál sería el producto escalar análogo en $\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{C})$?

11. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

Demuestra que φ es un producto escalar.

12. Sea V un espacio vectorial unitario.

a) Demuestra la **Identidad del paralelogramo**: *Para todo par de vectores $u, v \in V$,*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

b) Demuestra la **Identidad de polarización**: *Para todo par de vectores $u, v \in V$,*

$$4\varphi(u, v) = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2.$$

c) Demuestra que para todo par de vectores $u, v \in V$,

$$2\varphi(u, v) = \|u + v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - (1 + i)\|u\|^2 - (1 + i)\|v\|^2.$$

d) ¿Cuáles serían las identidades de los apartados anteriores si V fuera un espacio vectorial euclídeo?

HOJA 1

$\boxed{1.}$ $\boxed{4.}$ Decide de manera razonada si las funciones $\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$ son formas bilineales o sesquilineales en los espacios vectoriales V sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Además, decide de manera razonada cuáles de las funciones son formas bilineales simétricas, o sesquilineales hermíticas, según corresponda.

a) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, con $\varphi(A,B) = \text{traza}(A + \overline{B})$

$$\varphi(A+C, B) = \text{traza}((A+C) + \overline{B}) = \text{traza}(A) + \text{traza}(C) + \text{traza}(\overline{B}) \neq$$

$$\neq \varphi(A,B) + \varphi(C,B) = \text{traza}(A+\overline{B}) + \text{traza}(C+\overline{B})$$

$\Rightarrow$ NO es bilineal $\Rightarrow$ NO es simétrica

b) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, con $\varphi(A,B) = \text{traza}(A\overline{B})$

- $\varphi(A+C, B) = \text{traza}((A+C)\overline{B}) = \text{traza}(A\overline{B}) + \text{traza}(C\overline{B}) = \varphi(A,B) + \varphi(C,B)$ ✓
- $\varphi(A, B+C) = \text{traza}(A(\overline{B+C})) = \text{traza}(A(\overline{B}+\overline{C})) = \text{traza}(A\overline{B}) + \text{traza}(A\overline{C}) =$
  $= \varphi(A,B) + \varphi(A,C)$ ✓
- $\varphi(\lambda A, B) = \text{traza}(\lambda A\overline{B}) = \lambda\,\text{traza}(A\overline{B}) = \lambda\varphi(A,B)$ ✓
- $\varphi(A, \lambda B) = \text{traza}(A\overline{\lambda B}) = \text{traza}(A\overline{\lambda}\,\overline{B}) = \overline{\lambda}\,\text{traza}(A\overline{B}) = \overline{\lambda}\varphi(A,B)$ ✓

$\Rightarrow$ ES bilineal/sesquilineal

- ¿$\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$?

$\varphi(A,B) = \text{traza}(A\overline{B})$

$\varphi(B,A) = \text{traza}(B\overline{A})$

Sabiendo que $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$ podemos afirmar que es simétrica (caso en $\mathbb{R}$).

- ¿$\varphi(A,B) = \overline{\varphi(B,A)}$? $\Rightarrow$ ¿$\text{traza}(A\overline{B}) = \overline{\text{traza}(B\overline{A})}$?

$$\text{traza}(A\overline{B}) = \text{traza}(\overline{B}A) = \overline{\overline{\text{traza}(\overline{B}A)}} = \overline{\text{traza}(\overline{\overline{B}}\,\overline{A})} = \overline{\text{traza}(B\overline{A})}\ ✓$$

$\Rightarrow$ ES hermítica (caso en $\mathbb{C}$).

c) $V = M_{2\times 2}(\ldots)$

- $\varphi(A+C,B) = \text{traza}((A+C)\bar{B}) - \text{traza}(A+C)\,\text{traza}(\bar{B}) =$
$= \text{traza}(A\bar{B}) + \text{traza}(C\bar{B}) - [\text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B}) + \text{traza}(C)\,\text{traza}(\bar{B})] =$
$= \text{traza}(A\bar{B}) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B}) + \text{traza}(C\bar{B}) - \text{traza}(C)\,\text{traza}(\bar{B}) =$
$= \varphi(A,B) + \varphi(C,B)$ ✓

- $\varphi(A,B+C) = \text{traza}(A(\overline{B+C})) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\overline{B+C}) =$
$= \text{traza}(A\bar{B}) + \text{traza}(A\bar{C}) - [\text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B}) + \text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{C})] =$
$= \text{traza}(A\bar{B}) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B}) + \text{traza}(A\bar{C}) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{C}) =$
$= \varphi(A,B) + \varphi(A,C)$ ✓

$\varphi(\lambda A,B) = \text{traza}((\lambda A)\bar{B}) - \text{traza}(\lambda A)\,\text{traza}(\bar{B}) = \lambda\,\text{traza}(A\bar{B}) - \lambda\,\text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B})$
$= \lambda(\text{traza}(A\bar{B}) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B})) = \lambda\varphi(A,B)$

- $\varphi(A,\lambda B) = \text{traza}(A(\overline{\lambda B})) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\overline{\lambda B}) = \bar{\lambda}\,\text{traza}(A\bar{B}) - \bar{\lambda}\,\text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B}) =$
$= \bar{\lambda}(\text{traza}(A\bar{B}) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B})) = \bar{\lambda}\varphi(A,B)$

$\Rightarrow$ ES bilineal/sesquilineal

¿$\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$? (CASO EN $\mathbb{R}$)

$\left.\begin{array}{l} \varphi(A,B) = \text{traza}(AB) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(B) \\ \varphi(B,A) = \text{traza}(BA) - \text{traza}(B)\,\text{traza}(A) \end{array}\right\}$ como $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(A,B) = \varphi(B,A) \Rightarrow$ SIMÉTRICA

¿$\varphi(A,B) = \overline{\varphi(B,A)}$? (CASO EN $\mathbb{C}$)

$\varphi(A,B) = \text{traza}(A\bar{B}) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B})$

$\overline{\varphi(B,A)} = \overline{\text{traza}(B\bar{A}) - \text{traza}(B)\,\text{traza}(\bar{A})} = \overline{\text{traza}(B\bar{A})} - \overline{\text{traza}(B)\,\text{traza}(\bar{A})} =$
$= \text{traza}(\overline{B\bar{A}}) - \text{traza}(\bar{B})\,\text{traza}(\bar{\bar{A}}) =$
$= \text{traza}(\bar{B}A) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B}) = \text{traza}(A\bar{B}) - \text{traza}(A)\,\text{traza}(\bar{B})$

$\Rightarrow \varphi(A,B) = \overline{\varphi(B,A)} \Rightarrow$ ES HERMÍTICA

d) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es diferenciable$\}$, con $\varphi(f,g) = \int_0^1 f'(t) g(t)\, dt$

- $\varphi(f+h, g) = \int_0^1 (f+h)'(t) g(t)\, dt = \int_0^1 (f'(t) + h'(t))\, g(t)\, dt =$
$= \int_0^1 f'(t) g(t)\, dt + \int_0^1 h'(t) g(t)\, dt = \varphi(f,g) + \varphi(h,g)$ ✓

- $\varphi(f, g+h) = \int_0^1 f'(t)\,(g+h)(t)\, dt = \int_0^1 f'(t) g(t)\, dt + \int_0^1 f'(t) h(t)\, dt =$
$= \varphi(f,g) + \varphi(f,h)$ ✓

- $\varphi(\lambda f, g) = \int_0^1 \lambda f'(t) g(t)\, dt = \lambda \int_0^1 f'(t) g(t)\, dt = \lambda \varphi(f,g)$ ✓

- $\varphi(f, \lambda g) = \int_0^1 f'(t) \cdot \lambda g(t)\, dt = \lambda \int_0^1 f'(t) g(t)\, dt = \lambda \varphi(f,g)$ ✓

$\Rightarrow$ Es bilineal pero es ¿sesquilineal?

- ¿$\varphi(f,g) = \varphi(g,f)$?

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(f,g) = \int_0^1 f'(t) g(t)\, dt \\ \varphi(g,f) = \int_0^1 g'(t) f(t)\, dt \end{array}\right\} \neq$$
$\Rightarrow$ NO ES simétrica

e) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es continua$\}$ con $\varphi(f,g) = \int_0^1 f(x) g(x) (x^2+1)\, dx$

- $\varphi(f+h, g) = \int_0^1 (f+h)(x)\; g(x)\; (x^2+1)\, dx = \int_0^1 f(x) g(x) (x^2+1) dx + \int_0^1 h(x) g(x) (x^2+1)\, dx =$
$= \varphi(f,g) + \varphi(h,g)$ ✓

- $\varphi(f, g+h) = \int_0^1 f(x)\,(g+h)(x)\,(x^2+1)\, dx = \int_0^1 f(x) g(x) (x^2+1) dx + \int_0^1 f(x) h(x) (x^2+1) dx = \varphi(f,g) + \varphi(f,$

- $\varphi(\lambda f, g) = \int_0^1 \lambda f(x) g(x) (x^2+1) dx = \lambda \int_0^1 f(x) g(x) (x^2+1)\, dx = \lambda \varphi(f,g)$ ✓

- $\varphi(f, \lambda g) = \int_0^1 f(x) \lambda g(x) (x^2+1)\, dx = \lambda \int_0^1 f(x) g(x) (x^2+1)\, dx = \lambda \varphi(f,g)$ ✓

$\Rightarrow$ ES bilineal, pero es ¿sesquilineal?

- ¿$\varphi(f,g) = \varphi(g,f)$?

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(f,g) = \int_0^1 f(x) g(x) (x^2+1)\, dx \\ \varphi(g,f) = \int_0^1 g(x) f(x) (x^2+1)\, dx \end{array}\right\} =$$
$\Rightarrow$ ES simétrica

• $\varphi(f+h,g) = \int_0^1 [f(x)+h(x)]\, g(x-1)\,dx = \int_0^1 f(x)\,g(x-1)\,dx + \int_0^1 h(x)\,g(x-1)\,dx =$

$= \varphi(f,g) + \varphi(h,g)$ ✓

• $\varphi(f,g+h) = \int_0^1 f(x)\,[g(x-1) + h(x-1)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,g(x-1)\,dx + \int_0^1 f(x)\,h(x-1)\,dx =$

$= \varphi(f,g) + \varphi(f,h)$ ✓

• $\varphi(\lambda f, g) = \int_0^1 \lambda f(x)\, g(x-1)\,dx = \lambda \int_0^1 f(x)\,g(x-1)\,dx = \lambda\varphi(f,g)$ ✓

$\varphi(f,\lambda g) = \int_0^1 f(x)\,\lambda\, g(x-1)\,dx = \lambda \int_0^1 f(x)\,g(x-1)\,dx = \lambda\varphi(f,g)$ ✓

$\Rightarrow$ <u>ES</u> bilineal, pero es ¿sesquilineal?

• ¿$\varphi(f,g) = \varphi(g,f)$?

$$\left.\begin{aligned} \varphi(f,g) &= \int_0^1 f(x)\,g(x-1)\,dx \\ \varphi(g,f) &= \int_0^1 g(x)\,f(x-1)\,dx \end{aligned}\right\} \neq \text{ en general } \Rightarrow \underline{\text{NO}} \text{ es simétrica}$$

g) $V = \mathbb{K}^2$, con $\varphi((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1+y_1)^2 - x_2y_2$

• $\varphi((x_1,y_1)+(x_3,y_3),(x_2,y_2)) = \varphi((x_1+x_3, y_1+y_3),(x_2,y_2)) = ((x_1+x_3)+(y_1+y_3))^2 - x_2y_2$

$\varphi((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + \varphi((x_3,y_3),(x_2,y_2)) = (x_1+y_1)^2 - x_2y_2 + (x_3+y_3)^2 - x_2y_2$ $\#$

$\Rightarrow$ <u>NO</u> es bilineal $\Rightarrow$ <u>NO</u> es simétrica

$\boxed{5.}$ $\varphi: \bar{V} \times \bar{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ antisimétrica si $\varphi(u,v) = -\varphi(v,u)$.

a) Encontrar una f. bilineal antisimétrica $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(a,b)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = bc - ad \qquad \varphi((a,b),(c,d)) \longmapsto bc-ad$$

b) Que la $M_B(\varphi)$ es antisimétrica $\Rightarrow M_{B_{3\times3}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

$$M(\varphi)^T = -M(\varphi)$$

c) $A \in M_B(\varphi)$

caso $\mathbb{R}$

$$A = \underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{A_{\text{simétrica}}} + \underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{A_{\text{antisimétrica}}}$$

$$\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T+A}{2} \checkmark$$

$$\left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T-A}{2} = -\frac{A-A^T}{2} \checkmark$$

caso $\mathbb{C}$

$$A = \frac{A+\bar{A}^T}{2} + \frac{A-\bar{A}^T}{2}$$

$$\overline{\left(\frac{A+\bar{A}^T}{2}\right)}^T = \frac{\bar{A}^T+\bar{A}}{2} = \frac{\bar{\bar{A}}+\bar{A}^T}{2} = \frac{A+\bar{A}^T}{2} \checkmark$$

$\underline{6.}$ $\varphi: \bar{V} \times \bar{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ bilineal simétrica

$W \leq \bar{V}$ (subespacio vectorial)

$$\bar{W}'\,(=W^\perp) = \{v \in \bar{V} \,/\, \varphi(v,w) = 0 \quad \forall w \in \bar{W}\}$$

① $W' \leq \bar{V}$ porque φ es bilineal

$$\left.\begin{aligned} \varphi(v_1+v_2, w) &= \varphi(v_1,w) + \varphi(v_2,w) = 0 \\ \varphi(\lambda v, w) &= \lambda\varphi(v,w) = 0 \end{aligned}\right\} \forall w \in \bar{W}$$

② Si B es una base de $\bar{W}$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$\bar{W}' = \{v \in \bar{V} \,/\, \varphi(v, v_i) = 0 \quad \forall v_i \in B\}$$

7.| a) $M_c(\Phi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

$$M_c(\Phi) = M_c^{T}(\Phi) \quad \checkmark$$

b) $\left\{ v \in \mathbb{R} \,/\, (a\ b\ c) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} =$

$= \cancel{2a} - \cancel{2b} + \cancel{4c} + \cancel{2a} + \cancel{2c} - \cancel{4a} + \cancel{2b} - \cancel{6c} = 0$

$\langle (1,-1,-1) \rangle' = \mathbb{R}^3$

c) $(a\ \ b\ \ c) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2(a^2 + 3c^2 - 2ab + 4ac - 2bc) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow a^2 + 3c^2 - 2ab + 4ac - 2bc = (a+c)(a + 3c - 2b) = 0$

$\to a + c = 0$ plano 1

$\to a + 3c - 2b = 0$ plano 2

8.| $\Phi_\alpha((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1\ \ x_2\ \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

a) Simétrica $\checkmark$ bilinealidad $\checkmark$

Φ_α es producto escalar si Φ_α es def. positiva:

$|1| > 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 1 > 0 \Longleftrightarrow \alpha > 1$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \alpha - 1 > 0 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$

b) $M_\alpha = \langle (1,1,1) \rangle' = \langle (1,0,0), \left(0, 1, \frac{-\alpha}{\alpha+1}\right) \rangle$

$(a\ b\ c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha b + (\alpha + 1) c = 0$

$\boxed{11.}$ $V = \mathbb{C}^3$ $\quad B$ base estándar

$$M_\varphi(B) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

$\checkmark$ sesquilineal por definición

hermítica $\quad M_\varphi(B)^T = \overline{M_\varphi(B)}$ $\checkmark$ fácil de ver

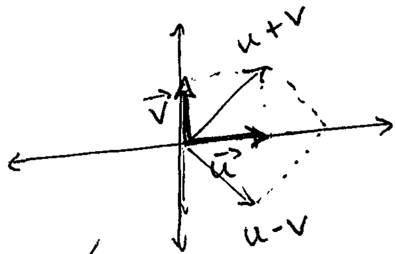
def. positiva $\to$ $\varphi(u,u) \geq 0 \quad \forall u \in V \ \wedge \ \varphi(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$\to$ criterio de Sylvester $\quad |1| > 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 - 2 = 1 > 0$$

$\boxed{12.}$



a) Identidad del paralelogramo:

$$\boxed{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)}$$

$$\langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \cancel{\langle u,v\rangle} + \cancel{\overline{\langle u,v\rangle}} + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle -$$

$$- \cancel{\langle u,v\rangle} - \cancel{\overline{\langle u,v\rangle}} + \langle v,v\rangle = 2\left(\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle\right)$$

b) Identidad de polarización: $4\varphi(u,v) = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2$

$$\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle + i\left(\langle u+iv, u+iv\rangle - \langle u-iv, u-iv\rangle\right) =$$

$$= \cancel{\langle u,u\rangle} + \cancel{\langle v,v\rangle} + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} - \cancel{\langle u,u\rangle} - \cancel{\langle v,v\rangle} + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}$$

$$+ i\left(\cancel{\langle u,u\rangle} - \cancel{\langle v,v\rangle} - i\langle u,v\rangle + i\langle v,u\rangle - \cancel{\langle u,u\rangle} + \cancel{\langle v,v\rangle} - i\langle u,v\rangle +\right.$$

$$\left. + i\langle v,u\rangle\right) = \langle u,v\rangle + \cancel{\langle v,u\rangle} + \langle u,v\rangle + \cancel{\langle v,u\rangle} + \langle u,v\rangle -$$

$$- \cancel{\langle v,u\rangle} + \langle u,v\rangle - \cancel{\langle v,u\rangle} = 4\langle u,v\rangle$$

d) Euclídeo $\equiv$ en $\mathbb{R}$

a) la misma $\qquad$ b) $4\langle u,v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2$

c) $2\langle u,v\rangle = \|u+v\|^2 - \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$