Soluciones 2

Matteo Bonforte, Rafael Orive
Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Octubre 2020

Ejercicio 7. Hoja 2

$Y'(t) = \lambda Y(t), \quad Y(0) = 1, \quad t \geq 0, \quad \lambda < 0 \qquad \lambda \in \mathbb{C} \quad Re(\lambda) < 0$

$Y(t) = e^{\lambda t} \quad t \to \infty \Rightarrow Y(t) \to 0$

① Euler

$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) = y_n + h(\lambda y_n) = (1+\lambda h) y_n \longrightarrow y_n = (1+h\lambda)^n \cdot 1$

¿ $y_n \to 0$ cuando $n \to \infty$?

Esto ocurre si $|1+h\lambda| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1+h\lambda < 1$

$\Leftrightarrow -2 < h\lambda < 0 \Leftrightarrow h < \frac{2}{|\lambda|}$

$\mathbb{C} \ni z = h\lambda \quad R(\lambda h) = 1 + h\lambda \Leftrightarrow R(z) = 1 + z$ función de estabilidad

② Euler implícito

$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h\lambda y_{n+1} \Rightarrow (1-h\lambda) y_{n+1} = y_n$

$y_{n+1} = (1-h\lambda)^{-1} y_n \longrightarrow y_n = (1-h\lambda)^{-n} \quad \forall n \geq 0$

$y_n \to 0 \iff |(1-h\lambda)^{-1}| < 1 \iff 1 < |1-h\lambda| \iff$

$1-h\lambda > 1 \iff 0 > h\lambda$ ✓

ó $\Rightarrow y_n \to 0$ siempre

$1-h\lambda < -1 \iff 2 < h\lambda$ ✗

La función de estabilidad del Euler implícito $R(z) = \dfrac{1}{1-z}$ $\quad \underline{\underline{z=h\lambda}}$

3 Trapecio

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) = y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda y_{n+1})$$

$$\left(1-\frac{h\lambda}{2}\right) y_{n+1} = \left(1+\frac{h\lambda}{2}\right) y_n \longrightarrow y_n = \left(\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right)^n \cdot 1$$

$$\left|\frac{1+h\lambda/2}{1-h\lambda/2}\right| < 1 \to z = h\lambda \qquad R(z) = \frac{1+z/2}{1-z/2} = \frac{2+z}{2-z}$$

función de estabilidad del trapecio

Necesito que $\left|\dfrac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right| < 1 \longleftrightarrow -2+h\lambda < 2+h\lambda < 2-h\lambda$

$-4+2h\lambda < 2h\lambda < 0$ siempre ocurre para $\lambda < 0$

Ejercicio 2. Condición suma

$$Z_{n+1} = Z_n + h\sum_{i=1}^{s} K_i b_i \qquad z_n = \begin{pmatrix} t_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, y(t)) \end{pmatrix}$$

$$K_i^{(1)} = F^{(1)}\left(Z_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_j\right) = 1$$

$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_n \\ y_n \end{pmatrix} + h\sum_{i=1}^{s} b_i \begin{pmatrix} 1 \\ k_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_n + h \\ y_n + \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \end{pmatrix}$$

$$\xi_i = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_n + c_j h, \xi_j)$$

$$Z_i = Z_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} F(Z_j)$$

$\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_s \end{pmatrix}$ son los pasos de la ecuación autónoma

$$Z_i^{(1)} = t_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}$$

$\quad\|$

$t_n + c_i h$ $\quad$ xq es el mismo algoritmo en las componentes solución

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$$

Ejercicio 3. RKE 3 pasos

Ejercicio 4.