UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, 2018-2019

Convocatoria ordinaria, 8 de enero de 2019

Apellidos :　　　　　　　　　　　　　　　　Grupo :

Nombre :

3/10 puntos

1.

1. Determinar los valores de λ para los que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1\,x_3^3 + x_2\,x_4 + \lambda\,x_1 = 1\,, \\ 2\,x_1\,x_2^3 + x_3\,x_4^2 + \lambda\,(x_2 - 1) = 0\,, \end{cases}$$

define a (x_1, x_2) como función implícita diferenciable de los (x_3, x_4) en un entorno de los puntos $a = (0, 1)$ y $b = (0, 1)$.

2. Si designamos dicha función mediante $(x_1, x_2) = F(x_3, x_4)$, calcular los valores de λ para los cuales F admite una inversa local de clase C^1 en un entorno de b.

3. Demostrar que para los valores de λ no obtenidos en el primer apartado no puede existir tal función F.

2/10 puntos

2. Considérese el conjunto M de los $x = (x_1\,, x_2\,, x_3) \in \mathbb{R}^3$ que verifican

$$x_2^3 - x_1\,x_2 - x_3 = 0\,.$$

A.

1. Demostrar que M es una C^∞-subvariedad 2-dimensional de $\mathbb{R}^3$.

2. Demostrar que $\mathrm{X} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\mathrm{X}(u) = \big(u_1\,, u_2\,, u_2^3 - u_1\,u_2\big)\,, \qquad u = (u_1\,, u_2) \in \mathbb{R}^2\,,$$

satisface:

   a. X es inyectiva en $\mathbb{R}^2$ y $M = \mathrm{X}(\mathbb{R}^2)$.
   b. $D\mathrm{X}(u)$ tiene rango 2 en todo $u \in \mathbb{R}^2$.
   c. $\mathrm{X}^{-1} : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es continua.

B. Siendo $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal $\pi(x) = (x_1\,, 0\,, x_3)$, considérese

$$\mathrm{Y} = \pi \circ \mathrm{X}\,.$$

1. Hallar

$$S = \big\{\, u \in \mathbb{R}^2 \;:\; \operatorname{rango} D\mathrm{Y}(u) \neq 2 \,\big\}$$

y comprobar que $\Gamma = \mathrm{Y}(S)$ es

$$\Gamma = \big\{\, x \in \mathbb{R}^3 \;:\; 4\,x_1^3 = 27\,x_3^2\,, \quad x_2 = 0 \,\big\}\,.$$

2. ¿Es Γ una subvariedad 1-dimensional de $\mathbb{R}^3$?

3/10 puntos **3.** Sean (X, d) un espacio métrico, $\Omega \subset X$ un abierto en (X, d) y $K \subset \Omega$ un compacto en (X, d). Considérese

$$d(K\,, \partial\Omega) = \text{distancia entre los conjuntos } K \text{ y } \partial\Omega\,.$$

A. Demostrar:

1. $\partial\Omega$ es cerrado en (X, d).
2. $K \cap \partial\Omega = \emptyset$.
3. Para cada $x \in K$ existe $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ tal que

$$d(x, y) \geq \varepsilon \qquad \text{para todo } y \in \partial\Omega\,.$$

4. Utilizar que K es compacto para demostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) \geq \delta > 0 \qquad \text{para todo } x \in K \text{ y todo } y \in \partial\Omega\,.$$

5. Demostrar que $d(K\,, \partial\Omega) \geq \delta > 0$.

B. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ en el que se tiene $K \subset \Omega$ con K cerrado pero no compacto y Ω abierto y las conclusiones de los apartados A.4 y A.5 son falsas.

2/10 puntos **4. Elegir una de las dos opciones:**

Opción A. Sea, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\, |x_j|^p \right)^{1/p} \,,$$

donde $a_1\,, \ldots\,, a_n > 0$ son constantes y $p \geq 1$ otra constante. Probar:

1. $f(x)$ define una norma de vectores en $\mathbb{R}^n$. *Indicación*: reducir el problema al caso conocido de las normas $\|\cdot\|_p\,,\; p \geq 1$.
2. En el caso $a_1, \ldots, a_n = 1$ (ésto es, la norma $\|\cdot\|_p$ usual) y con $p > 1$, usar el Método de Multiplicadores de LAGRANGE para calcular la constante óptima $C_{n,p}$ para la cual se cumple

$$\|x\|_p \leq C_{n,p}\, \|x\|_2\,, \qquad \text{para todos los } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Opción B. 1. Dadas las formas diferenciales

$$\boldsymbol{\omega}_1 = -y\, dx + x\, z\, dy\,, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = dx + x^3\, dz\,,$$

y la función

$$X(u, v) = (\cos u\,, \sin u\,, v)\,,$$

calcular

$$X^*\boldsymbol{\omega}_1\,, \quad X^*(d\,\boldsymbol{\omega}_1)\,, \quad X^*(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)\,, \quad X^*(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge d\,\boldsymbol{\omega}_2)\,.$$

2. Dado el sistema de coordenadas (X, U) en el hiperboloide

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 1 \right\},$$

determinar una normal unitaria $\boldsymbol{N}$ compatible con X , siendo

$$\mathrm{X}(\theta, \varphi, u) = \left(\sqrt{1+u^2}\, \cos\varphi\, \sin\theta\,, \sqrt{1+u^2}\, \sin\varphi\, \sin\theta\,, \sqrt{1+u^2}\, \cos\theta\,, u \right)$$

y

$$\mathrm{U}: \quad 0 < \theta < \pi\,,\; 0 < \varphi < 2\pi\,,\; u \in \mathbb{R}\,.$$