TEMA $\begin{cases} \text{NORMAL MULTIDIMENSIONAL} \\ \text{VECTORES NORMALES} \end{cases}$

A) VARIABLE NORMAL (1-dimensión)

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$

- $Y \sim N(0,1) \iff f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$ $y \in \mathbb{R}$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff X = \mu + \sigma Y$ con $Y \sim N(0,1)$

- X, Z normales independientes

  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Z \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

  $\Rightarrow \underbrace{X + Z}_{\text{variable normal}} \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

obs: si sumas dos normales dependientes, su suma no tiene porque ser normal.

$\hookrightarrow$ ejemplo: X ; $Z = -X \Rightarrow X + Z \equiv 0$ (no es normal)

B) $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$, V es matriz $n \times n$ $V \in M_{n\times n}$
simétrica y def. positiva (no basta semidef. positiva

$\underset{\text{vector aleatorio}}{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \sim N(\vec{m}, V)$ si su función de densidad es:

$$f_{\mathbb{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det(V)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})^t V^{-1} (\vec{x}-\vec{m})\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m) \cdot \frac{1}{\sigma^2}(x-m)\right)$$

C) CASO ESPECIAL (e importante): NORMAL ESTANDAR N-MULTIDIMENSIONAL

$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \mathbb{Y} \sim N(\vec{0}, I_n)$ $\quad f_{\mathbb{Y}}(\vec{y}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{y}^t \vec{y}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)$

normal estándar

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y_1^2/2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y_n^2/2}\right)$$

$\Rightarrow Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son independientes, porque la función de densidad conjunta es el producto de densidades de las variables aleatorias.

Además, $\forall i \; Y_i \sim N(0,1)$ para $1 \le i \le n$.

Y recíprocamente:

$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \sim N(\vec{0}, I_n)$ si y solo si $Y_1, \ldots, Y_n$ son independientes y normales estándar.

D) MATRICES SIMÉTRICAS / FORMAS CUADRÁTICAS. $\mathcal{M}_n$ = matrices $n \times n$ reales

<u>D.1.</u> $O \in \mathcal{M}_n$ es ORTOGONAL si $O^t O = I_n$, es decir, $O^{-1} = O^t$

$\Longleftrightarrow$ columnas son base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ filas son base ortonormal de $\mathbb{R}^n$

<u>Ejemplo</u>

BASE ORTOGONAL

$A = \left(\begin{bmatrix} \, \\ \, \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \, \\ \, \end{bmatrix} \right)$ en general $I_n \neq A^t A$, las columnas/filas tienen que ser ortonormales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

no es ortonormal

$\det(O) = \pm 1$.

D.2. Si A es simétrica, entonces A es orto-diagonalizabl
Es decir, $\exists O$ ortogonal tal que $A = ODO^t$

$\uparrow$ matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ autovalores de A

Las columnas de O son base ortonormal de autovectores.

D.3. A simétrica es definida positiva $\vec{x}^t A \vec{x} > 0$ si $\vec{x} \neq 0$. Definida positiva $\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

autovalores

D.4.

Lema: A simétrica y definida positiva $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists R \in \mathcal{M}_n$ tal que $A = R^t . R$ y R es no singular.

$\det(R) \neq 0$
$\Rightarrow \exists R^{-1}$

R se dice que es RAÍZ CUADRADA de A

Caso particular: A es diagonal $= \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

A definida positiva $\Leftrightarrow a_i > 0 \quad i = 1, \dots, n$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{a_n} \end{pmatrix} \qquad R^t R = RR = A$$

demostración lema

$\boxed{\Rightarrow}$ $A = O.D.O^t$ $\quad$ A def. positiva $\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \Rightarrow A = O.D.O^t = O.F.F.O^t = O.F.F^t.O^t =$$

$$= OF(OF)^t \Rightarrow R = (OF)^t$$

¿$\det(R)$? $\Rightarrow \det(R) = \underbrace{\det(O)}_{} . \underbrace{\det(F)}_{\prod \sqrt{\lambda}} \neq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $A = R^t R$ y R no singular $A, R \in \mathcal{M}_n$

- ¿A es simétrica? $A^t = R^t (R^t)^t = R^t R = A \longrightarrow A$ simétrica

- ¿A def. positiva?

$$\vec{x}^t A \vec{x} = \vec{x}^t R^t R \vec{x} = (R\vec{x})^t . (R\vec{x}) = \|R\vec{x}\|^2 \geq 0$$

y $\|R\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow R\vec{x} = \vec{0} \underset{R \text{ no singular}}{\Leftrightarrow} \vec{x} = \vec{0}$ $\blacksquare$

D.5. Inverso

$A \in \mathcal{M}_n$ simétrica y definida positiva $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^{-1}$ es simétrica y def. positiva

demostración

$$A = O . \underset{\substack{\| \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \; \lambda_i > 0}}{D} . O^t \Leftrightarrow A^{-1} = (O . D . O^t)^{-1} = O . \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^{-1}$ es simétrica porque $A^{-1} = (A^{-1})^t$

autovalores de $A^{-1} = \underbrace{\{1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n\}}_{>0} \Rightarrow$ def. positiv

observación:

$$A^n = (O D O^t)^n = O D^n O^t$$

E) $\mathbb{X} \sim N(\vec{m}, V)$ V es simétrica y definida positiva $\in M_n$

$V = UU^t$, $U \in M_n$ no singular $(U = R^t)$

$$V^{-1} = (U^{-1})^t\, U^{-1}$$

En la exponencial de la normal aparecía:

$$(\vec{x}-\vec{m})^t \cdot V^{-1} \cdot (\vec{x}-\vec{m}) = (\vec{x}-\vec{m})^t (U^{-1})^t \cdot U^{-1}(\vec{x}-\vec{m}) =$$

$$= \| U^{-1}(\vec{x}-\vec{m}) \|^2$$

$$f_{\mathbb{X}}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \frac{1}{|\det(U)|} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\|U^{-1}(\vec{x}-\vec{m})\|^2\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbb{X}}(x)\, dx_1 \dots dx_n = \boxed{\begin{array}{l}\text{cambio de variables} \\ \vec{Y} = U^{-1}(\vec{x}-\vec{m}) \\ \vec{x} = \vec{m} + U\vec{y}\end{array}} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\overbrace{|\det(U)|}^{|J|}}{|\det(U)|} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\|y\|^2\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_1^2/2}\right) \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_n^2/2}\right) = 1$$

F) Si $\mathbb{X} \sim N(\vec{m}, V)$

Definimos $\mathbb{Y} = U^{-1}(\mathbb{X} - \vec{m}) \sim N(\vec{0}, I_n)$

Mismo argumento que en el apartado E)

Por tanto: $\boxed{\mathbb{X} = \vec{m} + U\mathbb{Y}}$ → normal estándar $\qquad \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

G) TEOREMA: Si $\mathbb{X} \sim N(\vec{m}, V)$, entonces $\mathbb{E}(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix} = \vec{m}$, $\operatorname{cov}(\mathbb{X}) = V$. Además para $1 \leq j \leq n$, la coordenada $X_j \sim N(m_j, V_{jj})$

→ elemento V_{jj} de V

demostración

- ¿ $\vec{m} = \mathbb{E}(\mathbb{X})$?

Usamos que si $\mathbb{X} \sim N(\vec{m}, V) \longrightarrow \mathbb{X} = \vec{m} + U\mathbb{Y}$ → normal estándar

$\mathbb{Y} \sim N(\vec{0}, I_n) \qquad \mathbb{E}(\mathbb{Y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad I_n = \operatorname{cov}(\mathbb{Y}) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{Y}\mathbb{Y}^t}_{\text{matriz que en } (i,j) \text{ tiene } (Y_i \cdot Y_j)}) = \mathbb{E}((Y_i \cdot Y_j))$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } i = j: \quad \mathbb{E}((Y_i^2)) = \underbrace{V(Y_i)}_{=1} + \underbrace{\mathbb{E}(Y_i)}_{=0}{}^2 = 1 \\ \text{si } i \neq j: \quad \mathbb{E}((Y_i \cdot Y_j)) = \underbrace{\mathbb{E}(Y_i)}_{=0} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(Y_j)}_{=0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Y}^t) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{X} = \vec{m} + U\mathbb{Y} \qquad \mathbb{E}(\mathbb{X}) = \vec{m} + \mathbb{E}(U\mathbb{Y}) = \vec{m} + U \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{Y})}_{=\vec{0}} = \vec{m}$

$$\begin{array}{cc} U & \mathbb{Y} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aY_1 + bY_2 \\ cY_1 + dY_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} U & \mathbb{E}(\mathbb{Y}) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y_1) \\ \mathbb{E}(Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathbb{E}(Y_1) + b\mathbb{E}(Y_2) \\ c\mathbb{E}(Y_1) + d\mathbb{E}(Y_2) \end{pmatrix}$$

- ¿ $\operatorname{cov}(\mathbb{X}) = V$?

$\operatorname{cov}(\mathbb{X}) = (\operatorname{cov}(X_i, X_j)) = (\mathbb{E}(X_i - m_i)(X_j - m_j)) = \mathbb{E}((\mathbb{X} - \vec{m})(\mathbb{X} - \vec{m})^t) =$

$= \mathbb{E}(U\mathbb{Y}(U\mathbb{Y})^t) = \mathbb{E}(U\mathbb{Y}\mathbb{Y}^tU^t) = U\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{Y}\mathbb{Y}^t)}_{\operatorname{cov}(\mathbb{Y}) = I_n}U^t = UU^t = V$

$= \vec{m} + U\mathbb{Y}$

↳ normal estándar

• ¿ $X_j \sim N(m_j, V_{jj})$?

De $\mathbb{X} = \vec{m} + U\mathbb{Y}$ sacamos que $X_j = m_j +$ combinación lineal de $Y_1, \dots, Y_n$

Recordar que $\left[\begin{array}{l} Z_1, Z_2 \text{ son normales } \underline{\text{independientes}} \\ \quad \shortparallel \\ a_1Z_1 + a_2Z_2 \text{ es normal } \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

$\Rightarrow X_j + m_j + \underbrace{\text{combinación lineal de } Y_1, \dots, Y_n}_{\text{es una variable } \underline{\text{normal}}}$

$\vec{m} = \mathbb{E}(\mathbb{X}) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix} \Rightarrow m_j = \mathbb{E}(X_j)$

$V = UU^t$

$\operatorname{cov}(\mathbb{X}) = \mathbb{V}$

$\shortparallel$

$\begin{pmatrix} V(X_1) & & \overset{i \neq j}{\operatorname{cov}(X_i, X_j)} \\ & \ddots & \\ & & V(X_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{V}(X_j) = V_{jj}$

$\mathbb{X} = \vec{m} + U\mathbb{Y}$

$= \vec{h} + B(\vec{m} + U\mathbb{Y})$

$\mathbb{Z} = \vec{h} + B\vec{m} + BU\mathbb{Y}$

H) Sea $\mathbb{X} \sim N(\vec{m}, \mathbb{V})$. Además $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ y $B \in M_n$ no singular

Entonces $\mathbb{Z} = \vec{h} + B\mathbb{X}$. ¿qué distribución tiene $\mathbb{Z}$?

$\hookrightarrow \mathbb{Z} \sim N(\text{—}, \text{—})$

$\mathbb{Z} = \vec{h} + B(\vec{m} + U\mathbb{Y}) = (\vec{h} + B\vec{m}) + BU\mathbb{Y} \Rightarrow \mathbb{Z} \sim N(\vec{h} + B\vec{m}, (BU)(B$

$\Rightarrow \mathbb{Z} \sim N(\vec{h} + B\vec{m}, BUU^tB^t) \Rightarrow \mathbb{Z} \sim N(\vec{h} + B\vec{m}, B\mathbb{V}B^t)$

I) $\mathbb{Y}$ es $N(\vec{0}, I_n)$

O es matriz ortogonal $n\times n$ $\Big\}$ $O\mathbb{Y}$ $\quad \vec{m}=\vec{0} \quad V = I_n$
$\quad \vec{k}=\vec{0} \quad B = O$

$\Rightarrow O\mathbb{Y} \sim N(\vec{0}, \underset{\underset{\underset{I_n}{\parallel}}{O V O^t}}{\underset{\parallel}{I_n}})$ $\Big\{ OO^t = I_n$ porque O ortogonal

Conclusión, si O matriz ortogonal y $\mathbb{Y}$ normal estándar $\Rightarrow$
$\Rightarrow O\mathbb{Y}$ normal estándar

J) $\mathbb{X} \sim N(\vec{m}, V)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{a} \neq \vec{0}$

$\equiv$

$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, esto ya no es un vector aleatorio, es una variable aleatoria

$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \sim N(\ , \ )$

Lo siguiente: $\Big[x_1, \dots, x_n$ son variables normales $x_j \sim N(m_j, \sigma_j^2)$
entonces $\sum a_i x_j$ es normal $\Big]$

es FALSO. Sólo sería verdadero si $x_j \ \forall j$ son variables INDEPENDIENTES

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \vec{a}^t \mathbb{X} = \vec{a}^t(\vec{m} + V\mathbb{Y}) = \underbrace{\vec{a}^t\vec{m}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(\vec{a}^t V)}_{\in \text{ vector fila } = \vec{b}^t}\mathbb{Y} =$$

$$= \vec{a}^t\vec{m} + \sum_{j=1}^{n} b_j y_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \vec{a}^t \mathbb{X} \sim N(\underbrace{\vec{a}^t\vec{m}}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\vec{a}^t V \vec{a}}_{\in \mathbb{R}^+})$$

DISTRIBUCIONES ASOCIADAS A VECTORES NORMALES

(A) χ^2_n chi-cuadrado con n grados de libertad.

(B) $F_{n,m}$ distribución F con n,m grados

(C) t_n distribución t de Student con n grados.

A) Partimos de $\underbrace{\mathbb{X} \sim N(\vec{0}, I_n)}_{\text{vector de independientes}}$, y sea $Z = \|\mathbb{X}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Decimos que $Z = \chi^2_{n}$ $\xrightarrow{}$ grados de libertad

1. $\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) = n$

2. $\mathbb{V}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i^2) = 2n$

independientes

RECUERDO

$X \sim N(0,1)$

$\mathbb{E}(X) = 0$ $\mathbb{E}(X^2$

$1 = V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X$

OBSERVACIÓN

$X \sim N(0,1)$

$\mathbb{E}(X) = 0$ $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2$

$\mathbb{V}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X^2)$

otra manera de calcular $V(Z)$

$$V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$$

χ^2_n

$$\mathbb{E}(X^4) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{x^4}_{\text{valores}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}_{\text{prob}} dx =$$

$$= \int x^3 \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) dx \overset{\text{por partes}}{=} 3$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(X^2) = \underbrace{\mathbb{E}(X^4)}_{3} - \underbrace{\mathbb{E}(X^2)^2}_{1} = 2$$

$$Z = X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

$$Z^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^4 + \sum_{i \neq j} X_i^2 X_j^2$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j^4) + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) =$$

$$= 3n + \sum_{i \neq j} \underbrace{\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j^2)}_{\text{independientes}} = 3n + n(n-1) = n^2 + 2n$$

$$\Rightarrow V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = n^2 + 2n - n^2 = 2n$$

Caso $n=1$: función de densidad

$Z = X^2 \qquad X \sim N(0,1) \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$Z = h(X)$ con $h(x) = x^2$ pero esta NO ES BIYECTIVA

Cuidado, h no es biyectiva

Sacamos la función de distribución:

$$\mathbb{P}(Z \le z) = \mathbb{P}(X^2 \le z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}) =$$

$$= \mathbb{P}(X \le \sqrt{z}) - \mathbb{P}(X \le -\sqrt{z})$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\mathbb{P}(Z \le z) = \frac{d}{dz}\mathbb{P}(X \le \sqrt{z}) - \frac{d}{dz}\mathbb{P}(X \le -\sqrt{z}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2} + \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot z^{1/2-1} \cdot e^{-z/2} = \text{Gamma}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \quad \text{para } z > 0$$

$\mathbb{P}(Z \le z) = 0$ para $z < 0$ (porque $\mathbb{P}(Z \le z) = \mathbb{P}(\underset{\ge 0}{X^2} \le z)$)

LEMA: $Z = X^2$ con $X \sim N(0,1) \Rightarrow Z \sim \text{Gamma}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$

Recordatorio

$U \sim \text{Gamma}(\lambda, t)$ significa $\boxed{f_U(x) = \frac{1}{\Gamma(t)} \cdot (\lambda x)^t \cdot e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{x}}$

$U \sim \text{Gamma}(\lambda, t)$, $V \sim \text{Gamma}(\lambda, s)$, U, V independ. $\Rightarrow U + V \sim \text{Gamma}(\lambda, s+t)$

RECUERDO

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad Z = \|\mathbb{X}\|^2 = X_1^2 + \cdots + X_n^2 \text{ decimos que es } \chi_n^2$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}(Z) = n \\ \mathbb{V}(Z) = 2n \end{cases}$$

$N(\vec{0}, I_n)$, que es lo mismo que decir que $X_1, \dots, X_n \sim N(0,1)$

(1) $\underline{n=1}$ $\quad Z$ es χ_1^2 entonces: Z es $\text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(2) Recordar además que si $\begin{cases} U \text{ es } \text{Gamma}(\lambda, t) \\ V \text{ es } \text{Gamma}(\lambda, s) \end{cases} \Rightarrow U+V$ es $\text{Gamma}(\lambda, t+s)$

¡independientes!

Usando (1) y (2):

Si Z es χ_n^2 entonces $Z = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ es $\text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$

independientes

$\text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $\quad$ $\text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Recordar que W es $\text{Gamma}(\lambda, t) \Rightarrow f_W(x) = \frac{1}{\Gamma(t)} (\lambda x)^t e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{x}$

donde $\Gamma(s) = \int_0^\infty y^{s-1} e^{-y}\, dy$ $\quad \underline{s>0}$. $\quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $\underline{s>0}$

<u>LEMA</u>: Z es χ_n^2 y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{\frac{n}{2} + \alpha > 0}$,

entonces $\mathbb{E}(Z^\alpha) = 2^\alpha \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2} + \alpha)}{\Gamma(n/2)}$.

<u>demostración</u>

$$\mathbb{E}(Z^\alpha) = \int_0^\infty \underbrace{x^\alpha}_{\text{valores}} \cdot \underbrace{f_Z(x)}_{\text{prob.}}\, dx = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty x^\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} x^{n/2} \cdot e^{-x/2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

suma de cuadrados $(-\infty, 0) = 0$

cambio de variable $y = x/2$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty x^{\alpha + n/2} e^{-x/2} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{2^{n/2+\alpha}}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty y^{\alpha + n/2} \cdot e^{-y} \frac{dy}{y} =$$

$$= 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \alpha)}{\Gamma(n/2)}$$

CASOS PARTICULARES:

- $\alpha = 0 \longrightarrow \mathbb{E}(Z^0) = 1$
- $\alpha = 1 \longrightarrow n = \mathbb{E}(Z) = 2\,\dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = 2\,\dfrac{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = n$
- $\alpha = -1 \longrightarrow \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)} = \dfrac{1}{n-2}$
- $\alpha = \frac{1}{2} \longrightarrow \mathbb{E}(\sqrt{Z}) = \sqrt{2}\,\dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

$\hookrightarrow$ caso particular de $\alpha = \frac{1}{2}$

$n=2 \longrightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$\sqrt{Z} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ = distancia al origen

Z es χ^2_2

$\mathbb{E}$(distancia al origen) $= \mathbb{E}(\sqrt{Z}) =$

$= \sqrt{2}\,\dfrac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{1} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{1} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

B) Z es $F_{n,m}$ si $Z = \dfrac{U/n}{V/m}$ $\quad$ U es χ^2_n, V es χ^2_m independientes

(n, m: grados de libertad)

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(U/n)\cdot\underbrace{\mathbb{E}\left(\frac{m}{V}\right)}_{=\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{V/m}\right)} = 1\cdot\frac{m}{m-2} = \frac{m}{m-2}$$

$$V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \overbrace{\mathbb{E}(Z)^2}^{\text{conocido}}$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}\left(\frac{U^2}{n^2}\right)\cdot\mathbb{E}\left(\frac{m^2}{V^2}\right) =$$

$\hookrightarrow$ Lema anterior con $\alpha = -2$

$$V(U) = 2n = \mathbb{E}(U^2) - \underbrace{\mathbb{E}(U)^2}_{=n^2}$$

$$\Rightarrow V(Z) = \frac{2(m+n-2)m^2}{n(m-4)(m-2)^2}$$

c) $t_n \longrightarrow$ t de Student con n-grados de libertad

Z es t_n significa $\quad Z = \dfrac{Y}{\sqrt{U_n/n}}$ $\quad Y \longrightarrow N(0,1)$, $\quad U_n \longrightarrow \chi^2_n$ $\quad$ independientes $\quad (n \geq 2)$

$\mathbb{E}(Z) = 0$ porque $\mathbb{E}(Y) = 0$

$$\mathbb{E}(Z) = \underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{=0} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{U_n/n}}\right) = 0$$

$$V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \underbrace{\mathbb{E}(Z)^2}_{=0}$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \underbrace{\mathbb{E}(Y^2)}_{=1} \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left(\frac{n}{U_n}\right)}_{=\frac{n}{n-2}} = \frac{n}{n-2}$$

$$\Rightarrow V(Z) = \frac{n}{n-2}$$

NOTA: Cuando $n \to \infty$, $t_n \longrightarrow N(0,1)$

Idea: $\dfrac{U_n}{n}$; $\mathbb{E}\left(\dfrac{U_n}{n}\right) = 1$; $V\left(\dfrac{U_n}{n}\right) = \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n}$

Esto dice que $\dfrac{U_n}{n}$ (para n enorme) muy próximo a 1.

MODELO TEÓRICO DE MUESTREO ALEATORIO

X es variable aleatoria

$\underbrace{X_1, \dots, X_n}_{\text{independientes}} \longrightarrow$ clones de X $\left(X_j \overset{d}{=} X \quad 1 \leq j \leq n\right)$

Modelo de muestreo aleatorio de X.

Estadístico $\quad H: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (determinista)

$T = H(X_1, \dots X_n)$

T es estadístico asociado a H.
T es variable aleatoria
Cada T es un resumen de la muestra $(X_1, \dots, X_n)$

Ejemplos de estadísticos

1) $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ media muestral

2) $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})$ cuasivarianza muestral

3) $\begin{cases} \max(X_1, \dots, X_n) \\ \min(X_1, \dots, X_n) \end{cases}$

4) Estadístico de orden
$\hookrightarrow$ de orden r: se ordena la muestra y se coge el valor de la posición r.

Ejemplo

$n=3$ $\qquad X \sim Ber(p)$ $\qquad 0<p<1$

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to (1-p)^3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to p(1-p)^2$

$\vdots$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to p^3$

• ¿$\bar{x}$? $\qquad \bar{x} = \dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$

$\downarrow$ variable aleatoria

valores	probabilidad
$0/3$	$(1-p)^3$
$1/3$	$3p(1-p)^2$
$2/3$	$3p^2(1-p)$
$3/3$	p^3

• ¿$\max(X_1, X_2, X_3)$?

$\max(X_1, X_2, X_3)$

valores	probabilidades
0	$(1-p)^3$
1	$1-(1-p)^3$

• ¿$\min(X_1, X_2, X_3)$?

$\min(X_1, X_2, X_3)$

valores	probabilidades
0	$1-p^3$
1	p^3

• ¿S^2?

distribución de S^2

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \bar{x}=0$ y $S^2=0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \bar{x}=1/3$ y $S^2=\frac{1}{2}\left((1-1/3)^2+(0-1/3)^2+(0-1/3)^2\right)=1/3$

$=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \bar{x}=2/3$ y $S^2=\frac{1}{2}\left((1-2/3)^2+(1-2/3)^2+(0-2/3)^2\right)=1/3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \bar{x}=1$ y $S^2=0$

valores	probabilidades
0	$p^3+(1-p)^3$
$1/3$	$1-p^3-(1-p)^3$

¿$\mathbb{E}(S^2)$?

$\hookrightarrow =$

$=$ valores . probabil. $=$

$=\frac{1}{3}\left(1-p^3-(1-p)^3\right)+0$

- ESTUDIO DE $\bar{X}$

X variable aleatoria $\qquad \bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

$X_1, \ldots, X_n$ clones independientes

PROPOSICIÓN: $\mathbb{E}(\bar{X})$

$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}(X)$ para cualquier X.

demostración

clones de X (misma distribución

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\left(n\,\mathbb{E}(X)\right) = \mathbb{E}(X)$$

PROPOSICIÓN: $\mathbb{V}(\bar{X})$

$\mathbb{V}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X)$ para cualquier X.

demostración

independientes

$$\mathbb{V}(\bar{X}) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)\right) = \frac{1}{n^2}\left(n\mathbb{V}(X)\right) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X)$$

DISTRIBUCIÓN EXACTA DE $\bar{X}$

A veces (raramente) podemos escribir la distribución de probabilidad de $\bar{X}$.

Ejemplo: $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ $\qquad X_1, \ldots, X_n$ son $\mathrm{Ber}(p)$

$n\bar{X} = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

$n\bar{X}$ toma valores $0, \ldots, n$.

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} = \frac{k}{n}\right) = \mathbb{P}(n\bar{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n$$

Ejemplo: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k \text{ entero} \geq 0.$$

X, Y son indep.
$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$
$Y \sim \text{Poisson}(\mu)$
$\Longrightarrow X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda+\mu)$

$X_1, \dots, X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$n\bar{X} = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Poisson}(n\lambda)$

$n\bar{X}$ toma valores $0, 1, 2, \dots$

$\bar{X}$ toma valores $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} = \frac{k}{n}\right) = \mathbb{P}(n\bar{X} = k) = e^{-n\lambda} \cdot \frac{(n\lambda)^k}{k!} \qquad 0 \leq k \text{ entero}$$

Ejemplo: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X_1, \dots, X_n$ clones independientes

$X_1 + \dots + X_n$ es $N(n\mu, n\sigma^2)$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \text{ es } N\Big(\underset{\mathbb{E}(X)}{\underset{\shortparallel}{\mu}}, \underset{\frac{\mathbb{V}(X)}{n}}{\underset{\shortparallel}{\frac{\sigma^2}{n}}}\Big)$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$Y \sim N(\gamma, \eta^2)$
independ.
$\Longrightarrow X+Y \sim$
$\sim N(\mu+\gamma, \sigma^2+\eta^2)$

DISTRIBUCIÓN APROXIMADA

1) CHEBYSHEV para $\bar{X}$:

Variable aleatoria Y

Desigualdad de Chebyshev:

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\lambda^2}$$

Aplicado a $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ donde $X_1, \ldots, X_n$ son clones de X

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - \mathbb{E}(\bar{X})| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{X})}{\lambda^2}$$

es decir,

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{n\lambda^2}$$

Si $\mathbb{V}(X) = 1000$ y $\lambda = 0'01$ (error que quieres)

$\Rightarrow \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2} = 10^6$

2) TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

X $\quad X_1, \ldots, X_n$ clones de X independientes

$$X_1 + \cdots + X_n \underset{n \to \infty}{\overset{d}{\simeq}} N(n\mathbb{E}(X), n\mathbb{V}(X))$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \underset{n \to \infty}{\overset{d}{\simeq}} N\left(\mathbb{E}(X), \frac{\mathbb{V}(X)}{n}\right)$$

$$\bar{X} - \mathbb{E}(X) \underset{n \to \infty}{\overset{d}{\simeq}} N\left(0, \frac{\mathbb{V}(X)}{n}\right)$$

Lo escribimos como: (reescritura TCL)

$$\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mathbb{E}(X)\right) \underset{n \to \infty}{\overset{d}{\simeq}} N(0, \mathbb{V}(X))$$

Única hipótesis para esto:

$\mathbb{E}(X^2) < +\infty$

(que exista la media y la varianza)

- ## ESTUDIO DE S^2

X $\quad x_1, \dots, x_n$ clones de X independientes

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Expresiones alternativas de S^2: $\left(\mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2\right)$

$$\frac{S^2(n-1)}{n} = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}_{n} + \underbrace{\sum_{i\neq j}^{n} x_i x_j}_{n(n-1)}\Big)$$

$$\Rightarrow (n-1)S^2 = \sum x_j^2 - n\left(\frac{1}{n^2}\sum x_j^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} x_i x_j\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n(n-1)S^2 = (n-1)\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{i\neq j} x_i x_j}$$

PROPOSICIÓN: $\mathbb{E}(s^2)$

$\mathbb{E}(s^2) = \mathbb{V}(x)$ para cualquier X.

demostración

$$n(n-1)\,\mathbb{E}(s^2) = (n-1)\,n\,\mathbb{E}(x^2) - \sum_{i\neq j}\overbrace{\mathbb{E}(x_i x_j)}^{\mathbb{E}(x_i)\mathbb{E}(x_j) \text{ por independencia e } i\neq j} =$$

$$= (n-1)\,n\,\mathbb{E}(x^2) - n(n-1)\,\mathbb{E}(x)^2 \Rightarrow \mathbb{E}(s^2) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S^2) = \mathbb{V}(x)$$

$$V(s^2) = \underbrace{\mathbb{E}((s^2)^2)} - \mathbb{E}(s^2)^2 \qquad = V(X)$$

$\to \mathbb{E}((s^2)^2)$ TRUCO: hacer primero el caso tipificado
Suponemos primero $\mathbb{E}(X)=0$ y $V(X)=1$
Luego hacemos el caso general con un cambio lineal de variable.

PROPOSICIÓN: Si X es tipificada:

$$V(s^2) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X^4) - \frac{n-3}{n(n-1)}$$

Cálculo de $\mathbb{E}((s^2)^2)$ con X tipificada:

$\mathbb{E}((s^2)^2)$

$$n^2(n-1)^2\,\mathbb{E}((s^2)^2) = \mathbb{E}\Bigg(\Big(\underbrace{(n-1)\sum_{j=1}^n X_j^2}_{\substack{A \\ n \text{ sumandos}}} - \underbrace{\sum_{i\neq j} X_iX_j}_{\substack{B \\ n(n-1) \text{ sumandos}}}\Big)^2\Bigg)$$

$$AA = \underbrace{\sum_{j=1}^n X_j^4}_{n\mathbb{E}(X^4)} + \underbrace{\sum_{i\neq j} X_i^2X_j^2}_{n(n-1)} = n\,\mathbb{E}(X^4) + n(n-1)$$

$X_i^2X_j^2 \to = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X^2) = 1\cdot 1$ sumado $n(n-1)$ veces

$AB \longrightarrow$ términos $\underbrace{X_k^3X_j}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X)=0}}$ $k\neq j$ ó $\underbrace{X_k^2X_iX_j}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X)=0,\ \mathbb{E}(X)=0}}$ con $k\neq i\neq j$

$AB = 0$

$BB \longrightarrow$ términos
- $\to X_iX_j\,X_kX_l$ si $i\neq j\neq k\neq l$ $=0$
- $\to X_iX_j\,X_kX_l$ si $i\neq j \wedge k\neq l \wedge$ dos iguales $=0$
- $\to X_iX_j\,X_iX_j$ $i\neq j$ $= \mathbb{E}(X_iX_jX_iX_j) = \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j^2) =$
  se suma $2n(n-1)$ veces

$BB = 2n(n-1)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\Big(\big((n-1)\sum_{j=1}^n X_j^2 - \sum_{i\neq j}X_iX_j\big)^2\Big) = (n-1)^2\big(n\,\mathbb{E}(X^4) + n(n-1)\big) + 2n(n-1)$$

Ahora destipificamos:

X variable aleatoria $\quad x_1, \dots, x_n$ clones independientes

$$Y = \frac{\overset{\text{v.a.}}{X} - \mathbb{E}(X) \leftarrow n^{\circ}}{\mathbb{V}(X) \leftarrow n^{\circ}}$$ transformación lineal

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \qquad \mathbb{V}(Y) = 1 \qquad \bar{Y} = \frac{\bar{X} - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n-1} \sum \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\mathbb{V}(X)} = \frac{1}{\mathbb{V}(X)} S_X^2$$

Sabemos: $\mathbb{V}(S_Y^2) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y^4) - \frac{n-3}{n(n-1)}$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(S_Y^2) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{\mathbb{V}(X)} \cdot S_X^2\right) = \frac{\mathbb{V}(S_X^2)}{\mathbb{V}(X)^2}$$

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(Y^4) - \frac{n-3}{n(n-1)} = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\frac{(X - \mathbb{E}(X))^4}{\mathbb{V}(X)^2}\right) - \frac{n-3}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4)}{\mathbb{V}(X)^2} - \frac{n-3}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(S_X^2) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^4\right) - \frac{n-3}{n(n-1)} \mathbb{V}(X)^2$$

<u>Chebyshev para S^2</u>

<u>Estimación de dispersión de S^2</u>

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| > \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(Z)}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{P}(|S^2 - \mathbb{V}(X)| > \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(S^2)}{\lambda^2} \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{n} \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^4\right)$$

$\overline{X}, S^2$ para variables normales, SOLO NORMALES

<u>TEOREMA</u> (Fisher-Cochran)

$X \sim N(0,1)$ $\quad$ $X_1, \dots, X_n$ clones independientes

Calculamos los estadísticos $\overline{X}, S^2$.

1) $\overline{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$

2) $(n-1)S^2 \sim \chi^2_{\underbrace{n-1}_{\text{grados de libertad}}}$

3) $\overline{X}$ y S^2 son independientes

Analizamos caso $n=2$:

$$\overline{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

$$S^2 = \frac{1}{2-1}\left(\underbrace{(X_1 - \overline{X})}^2 + \underbrace{(X_2 - \overline{X})}^2\right) = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$$

$\longrightarrow X_2 - \overline{X} = X_2 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = \frac{1}{2}(X_2 - X_1)$

$\longrightarrow X_1 - \overline{X} = X_1 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N(\vec{0}, I_2) \qquad \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ X_1 - X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$N(\vec{0}, I_2)$$

$$\uparrow$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Recordar que si $\mathbb{X}$ es $N(\vec{0}, I_n)$ y O es matriz ortogonal $\Rightarrow$ $\Rightarrow O\mathbb{X}$ es $N(\vec{0}, I_n)$. Además, debemos recordar que si $\mathbb{X}$ es $N(\vec{0}, I_n) \iff X_1, \dots, X_n$ es $N(0,1)$ independientes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow (X_1 + X_2) \text{ y } (X_1 - X_2) \text{ son independientes}$$

demostración

Consideremos una matriz $\underset{M_{n\times n}}{\overset{}{A}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{n\times n}$ y A ortogonal.

Rellenamos el resto de las filas de la matriz con el método de Gram-Schmidt.

$$\underset{\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}}{\overset{}{\mathbb{Z}}} = A \underset{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}{\mathbb{X}}$$

a) $Z_1 = \sqrt{n}\ \bar{X}$

A es ortogonal

b) $\|\mathbb{Z}\|^2 \overset{A \text{ es ortogonal}}{=} \|\mathbb{X}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$

$\sum_{j=1}^{n} Z_j^2 \underset{\text{por (a)}}{=} n\bar{X}^2 + \sum_{j=2}^{n} Z_j^2$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} X_j^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{j=2}^{n} Z_j^2$$

1) Z_1 es $N(0,1) \Rightarrow \bar{X}$ es $N(0, \frac{1}{n})$

2) $\sum_{j=2}^{n} Z_j^2$ es χ^2_{n-1}

$\| $

$\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - n\bar{X}^2 = (n-1)S^2$; $(n-1)S^2$ es χ^2_{n-1}

recordar apuntes anteriores

3) $\bar{X}$ viene de Z_1 $(\bar{X} \leftarrow Z_1)$

S^2 viene de $Z_2, \dots, Z_n$ $(S^2 \leftarrow Z_2, \dots, Z_n)$ $\Big\} \Rightarrow \bar{X}$ y S^2 son independientes

COROLARIO: $X \sim N(0,1)$

$X_1, \dots, X_n$ son clones independientes

$$\frac{\overline{X}}{\left(\sqrt{S^2}/\sqrt{n}\right)} \text{ es } t_{n-1} \quad (t \text{ de Student con } n-1 \text{ grados})$$

demostración

$$\frac{\overline{X}}{\left(\sqrt{S^2}/\sqrt{n}\right)} = \frac{\overbrace{\sqrt{n}\,\overline{X}}^{\sim N(0,1)}}{\sqrt{\underbrace{(n-1)S^2}_{\chi^2_{n-1}}\big/ (n-1)}}$$

independientes

COROLARIO: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X_1, \dots, X_n$ son clones independientes

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad \overline{Y} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \Rightarrow \overline{X} = \mu + \sigma \overline{Y}$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{\sigma^2} S_X^2 \Rightarrow S_X^2 = \sigma^2 S_Y^2$$

$\overline{Y}$ es $N(0, 1/n) \Rightarrow \overline{X}$ es $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

independientes

$(n-1)S_Y^2$ es $\chi^2_{n-1} \Rightarrow (n-1)\frac{S_X^2}{\sigma^2}$ es χ^2_{n-1}

1) $\overline{X}$ es $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

2) $(n-1)\frac{S_X^2}{\sigma^2}$ es χ^2_{n-1}

3) $\overline{X}$ y S_X^2 son independientes

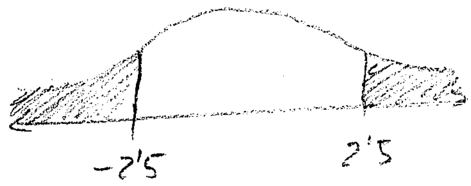
Ejemplo/ejercicio: $(X_1, \dots, X_{100})$ muestra aleatoria de normal con $\mu = 3$ y $\sigma^2 = 4$. Calcular $\mathbb{P}(|\bar{X}-\mu| > 1/2\,,\ S^2 < 4'2)$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}-\mu| > 1/2,\ S^2 < 4'2) \underset{\bar{X} \text{ y } S^2 \text{ indep.}}{=} \mathbb{P}(|\bar{X}-\mu| > 1/2) \cdot \mathbb{P}(S^2 < 4'2)$$

Ahora tenemos que expresarlo en términos de funciones de distribución, en este caso, de la normal.

$$\mathbb{P}(|\bar{X}-\mu| > 1/2) \overset{\text{tipificamos}}{=} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{0'2}\right| > \frac{0'5}{0'2}\right) = \underbrace{\mathbb{P}(|N(0,1)| > 2'5)}$$

desviación típica de $\bar{X}$ $= \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{100}} = 0'2$



por simetría

$$= 2\big(1 - \mathbb{P}(N(0,1) < 2'5)\big) = 2\big(1 - \Phi(2'5)\big) = 1'24\%$$

NOTACIÓN

$$\boxed{F_{\chi^2_n} := \text{función de distribución de } \chi^2_n}$$

$$\mathbb{P}(S^2 < 4'2) = \mathbb{P}\left(\frac{99}{4} S^2 < \frac{99 \cdot 4'2}{4}\right) = \mathbb{P}(\chi^2_{99} < 103) =$$

$(n-1)$

σ^2

$$= F_{\chi^2_{99}}(103) \cong 65\%$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|\bar{X}-\mu| > 1/2,\ S^2 < 4'2) = 0'0124 \cdot 0'65 = 0'00806 = 0'8\%$$

ESTADÍSTICOS: MÁXIMOS Y MÍNIMOS

X variable aleatoria
$X_1, \dots, X_n$ clones de X

$$\boxed{\begin{array}{l} M_n = \max(X_1, \dots, X_n) \\ m_n = \min(X_1, \dots, X_n) \end{array}}$$

1) Funciones de distribución

independen

$$F_{M_N}(t) = \mathbb{P}(M_n \le t) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \le t) = \mathbb{P}(X_1 \le t, \dots, X_n \le t) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \le t) \cdot \ \dots \ \cdot \mathbb{P}(X_n \le t) \underset{\text{clones de } X}{=} \mathbb{P}(X \le t)^n = \boxed{F_X(t)^n}$$

nota: Si X es continua y f_X es función de densidad:

$$f_{M_N}(t) = F'_{M_n}(t) = n f_X(t) \cdot F_X(t)^{n-1}$$

$$F_{m_N}(t) = \mathbb{P}(m_N \le t) = 1 - \mathbb{P}(m_N > t) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > t, \dots, X_n > t) =$$

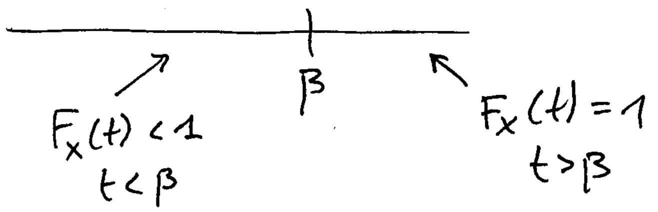
$$\underset{\substack{\text{independencia} \\ + \\ \text{clones de } X}}{=} 1 - \mathbb{P}(X > t)^n = \boxed{1 - (1 - F_X(t))^n}$$

nota: Si X es continua y f_X es función de densidad:

$$f_{m_N}(t) = F'_{m_N}(t) = n \cdot f_X(t) \cdot (1 - F_X(t))^{n-1}$$

2) Concentración

Supongamos que β es el MÁXIMO ESENCIAL de X, es decir,



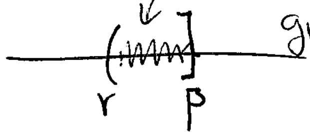
Ejemplos

Uniforme $[0,1]$ $\quad \beta = 1$
$Bin(n, p)$ $\quad \beta = n$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Normal} \\ \text{Poisson} \\ \text{Geométrica} \\ \text{Exp} \end{array}\right\} \longrightarrow \beta = \infty$$

Proposición: Si β es el máximo esencial de X entonces si $r<\beta$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(r \le M_n \le \beta) = 1$$

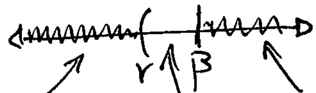


por aquí estaría el M_n para n muy grande. (por muy cercano que este el r).

demostración

$\mathbb{P}(M_n \le r) = F_X(r)^n$, pero $F_X(r) < 1 \Rightarrow F_X(r)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\mathbb{P}(M_n > \beta) = 0$ (porque $\mathbb{P}(X > \beta) = 0$)



probabilidad de que M_n caiga aquí tiende a cero cuando $n\to\infty$

lim=1

probabilidad igual a cero por definición de β