HOJA 1

6. a) $\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$ b) $\mathcal{B}_{\rightarrow} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n)$$

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\leftarrow} \Rightarrow \forall x \in B_1 \cap B_2$

$\exists B_3 \in \mathcal{B}_{\leftarrow}$, $x \in B_3$ con $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

$B_1 = (-\infty, b_1)$ $B_2 = (-\infty, b_2)$

Cogemos $b = \min\{b_1, b_2\} \Rightarrow (-\infty, b) \subset (-\infty, b_1) \cap (-\infty, b_2)$

Para $\mathcal{B}_{\rightarrow}$ es análogo.

Vamos a intentar demostrar que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{\leftarrow} \cup \mathcal{B}_{\rightarrow}$ es una base (una vez hecho esto el apartado iii sale solo)

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$

Basta demostrar el caso $B_1 \in \mathcal{B}_{\leftarrow}$ y $B_2 \in \mathcal{B}_{\rightarrow}$

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= (-\infty, b_1) \\ B_2 &= (a_2, \infty) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall x \in B_1 \cap B_2 = (a_2, b_1) \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}$$

$a_2 < x < b_1$

falso $B_3 = (a,b)$ no es $\in$ en $\mathcal{B}$

$x \in B_3$, $B_3 \subset B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_{\leftarrow} \cup \mathcal{B}_{\rightarrow}$ no es una base

pero es UNA SUB-BASE

↳ y nos vale para este ejercicio

$\tau_u \leftarrow \mathcal{B}_u$ = base para la top. usual = $= \{(a,b) / a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$

$\tau^* \leftarrow \mathcal{B}$

La pregunta es ¿$\tau_u = \tau^*$?

$\subset$ fácil $\supset$ fácil

Llamemos $\tau_{\leftarrow}$ a la topología generada por $\mathcal{B}_{\leftarrow}$, y $\tau_{\rightarrow}$ a la generada por $\mathcal{B}_{\rightarrow}$.

① ¿ $\tau_{\leftarrow} \subset \tau_{\rightarrow}$?

② ¿ $\tau_{\leftarrow} \supset \tau_{\rightarrow}$?

$$(-\infty, b) = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (a_\alpha, \infty)}$$

$\exists k > b$ tal que $k \in (a_\alpha, \infty)$ } contradicción

Si se da $= \Rightarrow k \in (-\infty, b) \Rightarrow k < b$

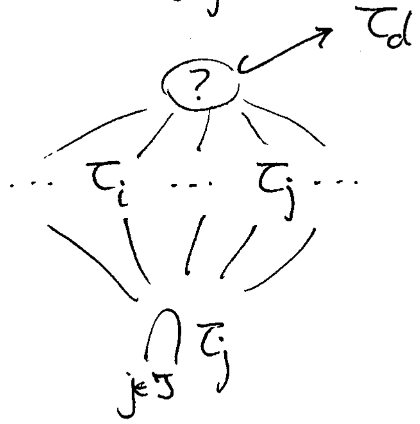
$\Rightarrow \tau_{\leftarrow}$ y $\tau_{\rightarrow}$ no se pueden comparar.

τ_u

" la mínima top. que cont. a $\tau_{\leftarrow}, \tau_{\rightarrow}$

$$\begin{tikzcd} & \text{la mínima top. que cont. a } \tau_{\leftarrow}, \tau_{\rightarrow} & \\ \tau_{\leftarrow} \arrow[ur] & & \tau_{\rightarrow} \arrow[ul] \\ & \tau_{\leftarrow} \cap \tau_{\rightarrow} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{8.}$ $\{\tau_j\}_{j\in J}$



Buscamos (?), pero por el ejercicio 2.1 sabemos que no es $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\tau_\alpha$.

(?) = la mínima topología <u>generada</u> por la familia $\mathcal{S}$:

$\| $

$\tilde{\tau}$

$$\mathcal{S} := \bigcup_{\alpha\in\Lambda}\tau_\alpha$$

Sea $\mathcal{S}$ la familia $\bigcup_{j\in J}\tau_j$. Definimos la familia

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{j\in J} S_j \ : \ \underbrace{|J| < \aleph_0}_{\text{finito}} \ , \ S_j \in \mathcal{S} \quad \forall j\in J\}$$

Demostremos que $\mathcal{B}$ es base para una top. τ^* sobre X.

En efecto, $X\in\mathcal{B}$ pues $X\in\tau_\alpha$, $\forall\alpha\in\Lambda$. Además, dados $B_1, B_2\in\mathcal{B}$ se tiene que $B_1 = \bigcap_{j\in J_1} S_j$, $B_2 = \bigcap_{j\in J_2} S_j$ con $|J_1|<\infty$, $|J_2|<\infty$, $S_j\in\mathcal{S}$ $\forall j\in J_1\cup J_2$. Sea $x\in B_1\cup B_2 = \bigcap_{j\in J_1\cup J_2} S_j$

Sea $B_3 = B_1\cup B_2$, entonces $x\in B_3$ y $B_3\subseteq B_1\cup B_2$.

Como $|J_1\cup J_2|<\infty$, entonces $B_3\in\mathcal{B}$.

Luego existe τ^* tal que $\mathcal{B}$ es base de τ^*.

Además $\forall\alpha\in\Lambda$, $\tau_\alpha\subset\tau^*$, es decir $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\tau_\alpha\subset\tau^*$.

Veamos que si τ' es otra topología tal que $\bigcup\tau_\alpha\subset\tau'$ entonces $\tau^*\subset\tau'$.

Basta demostrar que si $B\in\mathcal{B}$ entonces $B\in\tau'$. Pero $B=\bigcap_{j\in J} S_j$, $|J|<\aleph_0$, $S_j\in\mathcal{S}$ $\forall j\in J$, luego $\forall j\in J$ $\exists\alpha\in\Lambda$ tal que $S_j\in\tau_\alpha\subset\tau'$

$\Rightarrow \bigcap_{j\in J} S_j\in\tau'$ por ser τ' top. (prop. 3), es decir $B\in\tau'$.

$$\tilde{\tau} := \tau^*$$

$\blacksquare$

2.1 $X :=$ conjunto con mas de dos elementos

i) τ_1, τ_2 sobre X tal que $\tau_1 \cup \tau_2$ no es una topología.

Hecho con el ejercicio de $\tau_{\leftarrow}$ y $\tau_{\rightarrow}$.

Mi EJEMPLO:
$X = \{a, b, c\}$
$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$
$\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$
$\tau_1 \cup \tau_2$ no cumple las prop. de top

ii) $\{\tau_j\}_{j \in J} \Rightarrow \tau^* = \bigcap_{j \in J} \tau_j$ es top

1) ¿$\emptyset, X \in \tau^*$? Como $\emptyset, X \in \tau_j, \forall j \Rightarrow \emptyset, X \in \tau^*$

2) ¿ $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}, A_\alpha \in \tau^* \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau^*$?

$\forall \alpha \in \Lambda,\ A_\alpha \in \tau_j\ \forall j \in J \Rightarrow \forall j \in J\ \forall \alpha \in \Lambda,\ A_\alpha \in \tau_j \xRightarrow{\tau_j \text{ top}}$

$\Rightarrow \forall j \in J \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau_j \right) \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau^*$

3) ¿ $A, B \in \tau^* \Rightarrow A \cap B \in \tau^*$?

$\forall j \in J,\ A \in \tau_j,\ B \in \tau_j \underset{\tau_j \text{ top}}{\Longrightarrow} \forall j \in J,\ A \cap B \in \tau_j \Rightarrow A \cap B \in \tau^*$.

7. $\mathcal{B}$ base para una $\tau \Rightarrow \overbrace{\tau_{\mathcal{B}} := \text{la top. generada por } \mathcal{B}}^{\text{dato}}$ es igual a $\bigcap_{j \in J} \tau_j$, donde τ_j es top. que contiene a $\mathcal{B}$.

$\tau_{\mathcal{B}} \supset \bigcap_{\substack{\tau_j \text{ top.} \\ \tau_j \supset \mathcal{B}}} \tau_j$ (gratis) ¿$\subset$?

$\boxed{\subset}$ • Sea $B \in \mathcal{B}$; sea τ_j topología sobre X tal que $\mathcal{B} \subset \tau_j$.

Entonces $B \in \tau_j \Rightarrow B \in \bigcap_{\substack{\tau_j \text{ top} \\ \tau_j \supset \mathcal{B}}} \tau_j$

• Sea $G \in \tau_{\mathcal{B}} \Rightarrow G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha,\ B_\alpha \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall \alpha \in \Lambda\ \ B_\alpha \in \bigcap_{\substack{\tau_j \text{ top.} \\ \tau_j \supset \mathcal{B}}} \tau_j$ (es top. por ej. 2.2.)

$\Rightarrow G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \in \bigcap_{\substack{\tau_j \text{ top} \\ \tau_j \supset \mathcal{B}}} \tau_j$

$\boxed{1.}$ X conjunto infinito, τ top. sobre X tal que todos los subconjuntos infinitos son abtos para τ $\Rightarrow$ $\tau = \tau_d = \mathcal{P}(X)$

- $\tau \subset \tau_d$ es gratis (trivial).
- Para demostrar que $\tau_d \subset \tau$ basta ver que $\{p\}$ son abiertos y cerrados para τ $\forall p \in X$.

$\triangleright$ $K := \{p\}$ es cerrado pues $X \setminus K = X \setminus \{p\}$ es un conjunto infinito, luego abto. para τ.

$\triangleright$ $G := \{p\}$ es abierto. Sea $Y := X \setminus G = X \setminus \{p\}$ y $|Y| = \infty$.

Sean $A, B \subsetneq Y$ (subconjuntos propios de Y) tales que

$Y = A \uplus B$, $|A| = \infty$, $|B| = \infty$

Sea $A_1 = A \cup \{p\}$, $|A_1| = \infty$

Sea $B_1 = B \cup \{p\}$, $|B_1| = \infty$

Luego $A_1 \in \tau$, $B_1 \in \tau$ y además $A_1 \cap B_1 = \{p\}$

Luego $G = \{p\} \in \tau$.

$\boxed{4.}$ 1) Trivialmente sabemos que $\emptyset, X \in \tau_a$.

2) Sea $\{A_i\}_{i \in \Lambda}$ familia tal que $A_i \in \tau_a$, e.d., $\forall i \in \Lambda$ $a \in A_i$ ó $A_i = \emptyset$ $\Rightarrow$ $a \in \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{i \in \Lambda} A_i \in \tau_a$.

3) Sean $A_1, \dots, A_n \in \tau_a$, e.d., $a \in A_i$ ó $A_i = \emptyset$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

- Si $A_i = \emptyset$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ $\Rightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_a$
- Si $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ $\Rightarrow$ $a \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ($a \in A_i$ $\forall i$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_a$.

Hemos demostrado que τ_a es una topología.

$\boxed{5.}$ a) Hay que ver que $\left| d(x,y) - d(x',y') \right| \leq d(x,x') + d(y,y')$,

e.d., $-d(x,x') - d(y,y') \underset{[1]}{\leq} d(x,y) - d(x',y') \underset{[2]}{\leq} d(x,x') + d(y,y')$

[1] Partimos de que $d(x',y') \leq d(x',x) + d(x,y) + d(y,y')$ (desigualdad triangular). Cambiando de signo:

$-d(x',y') \geq -d(x',x) - d(x,y) - d(y,y') \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,y) - d(x',y') \geq -d(x,x') - d(y,y')$

[2] Partimos de que $d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y)$ (desigualdad triangular). Pasando restando $d(x',y')$ obtenemos:

$d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y,y')$

■

b)

Igual que arriba partimos de:

$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n)$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \leq d(x,y) + \cancelto{0}{\lim_{n\to\infty} \left(d(x_n,x)\right)} + \cancelto{0}{\lim_{n\to\infty} \left(d(y_n,y)\right)}$$

Recordando la def. de límite:

$\lim_{n\to\infty} S_n = S_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |S_n - S_0| < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0$

En nuestro caso S_n se corresponde con $d(x_n,y_n)$ y S_0 con $d(x,y)$. Hemos demostrado que $d(x_n,y_n) \leq d(x,y)$ $n \to \infty$,

e.d., $\left| d(x_n,y_n) - d(x,y) \right| \leq 0$ $n \to \infty$ (recordar que $d(x,y) \neq d(x_n,y_n)$ porque $d(x_n,x) \to 0$, $d(y_n,y) \to 0$)

$\Rightarrow d(x_n,y_n) = d(x,y)$ cuando $n \to \infty$.

■

$\boxed{3.}$

1) $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}$ (está claro)

2) $\{A_i\}_{i\in\Lambda} \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall i \ \forall (a,b) \in A_i \ \exists \varepsilon_i : ((a-\varepsilon_i, a+\varepsilon_i) \times \{b\}) \cup$
$\cup (\{a\} \times (b-\varepsilon_i, b+\varepsilon_i)) \subset A_i \Rightarrow \forall (a,b) \in \bigcup_{i\in\Lambda} A_i \ \exists \varepsilon_i$
(podemos coger cualquier ε_i válido del A_i de procedencia del elemento (a,b)) $\Rightarrow \bigcup_{i\in\Lambda} A_i \in \mathcal{T}$

3) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall (a,b) \in A_1, \dots, A_n \ \exists \varepsilon_i : ((a-\varepsilon_i, a+\varepsilon_i) \times \{b\}$
$\cup (\{a\} \times (b-\varepsilon_i, b+\varepsilon_i)) \subset A_i \Rightarrow \forall (a,b) \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \ \exists \varepsilon_0$
(por ser $A_i \in \mathcal{T}$ son abiertos) que podría ser $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$
(cada (a,b) estaba en $A_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ y tenía asociado su ε_i)
$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.

COMPLEMENTO 1

RECUERDO:

(X, τ) espacio topológico

Una base para τ es una subfamilia $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B : \mathcal{G} \subset \mathcal{B} \right\} \quad \forall \mathcal{G} \subset \mathcal{B}$$

$$G \in \tau \iff \exists \mathcal{G} \subset \mathcal{B} \text{ tal que } G = \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B$$

Una sub-base $\mathcal{S}$ para τ es una subfamilia de τ tal que $\left\{ \bigcap_{j \in J} B_j : |J| < \aleph_0 , B_j \in \mathcal{S} \right\}$ forman una base para τ

$$G \in \tau \iff G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \bigcap_{j_\alpha \in J_\alpha} B_{j_\alpha} , \ |J_\alpha| < \aleph_0 , \ \forall \alpha \in \Lambda , \ \forall B_{j_\alpha} \in \mathcal{S} \iff$$

$\iff$ G se describe como unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de la sub-base.

Ejercicio: $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{\text{finitas}} S , \ S \in \mathcal{S} \right\}$$

¿Existe una topología τ^* en X tal que $\mathcal{S}$ es una sub-base para τ^*?

¿Es $\mathcal{B}$ base para una topología τ^* sobre X?

a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B \rightarrow$ para demostrar esto dependería de $\mathcal{S}$, p. ej., si $\mathcal{S} = \{(0,2), (1,3)\}$ intersecciones finitas de $\nleq$ subconjuntos de $\mathcal{S}$ no generan $\mathbb{R}$.

Hay que añadirlo de hipótesis: $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, $X = \bigcup_{B \in \mathcal{S}} B$

b) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall x \in B_1 \cap B_2 , \exists B_3 \in \mathcal{B}$ ~~con~~ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \rightarrow$
$\rightarrow$ com inters. finita de inters. finitas es finitas podemos $B_3 = B_1 \cap B_2$