UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura: SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo: 236 y 240

Apellidos: Nombre:

Ejercicio del día: 14 de abril de 2016. Examen parcial.

1.1 (0.5)	1.2 (1)	1.3 (1.5)	2.1 (1.5)	2.2 (0.5)	2.3 (2)	2.4 (1.5)	2.5 (0.75)	2.6 (0.75)	Total (10)

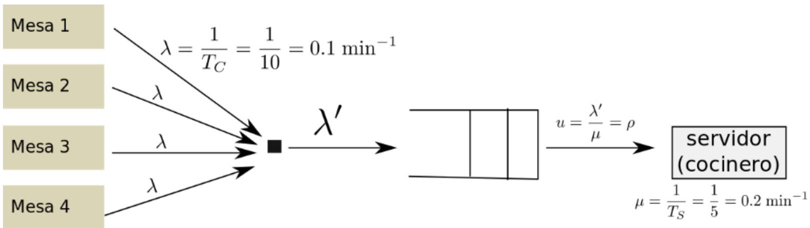
1. PROBLEMA (3 puntos).

En un restaurante los clientes disponen de una *tablet* en cada una de las mesas a través de la cual realizan sus pedidos a cocina. Estos pedidos son recibidos directamente por un cocinero que tarda un tiempo en despachar cada pedido que se encuentra distribuido de forma exponencial, y con un valor medio de **5 minutos**. El cocinero solo puede atender una comanda a la vez. Una vez que se tiene un pedido en curso, cada mesa no puede volver a realizar un pedido hasta que el que se encuentra pendiente sea despachado. Una vez despachado un pedido, cada mesa tarda en promedio **10 minutos** en realizar otro pedido en un tiempo que se encuentra distribuido exponencialmente. El restaurante cuenta con 4 mesas. Suponer despreciable el tiempo que tardan los camareros en llevar el pedido a cada una de las mesas y suponer que el cocinero tiene capacidad para almacenar todas las peticiones de los clientes.

1.1 (0.5 puntos) Justificar razonadamente un modelo de colas válido para describir el escenario planteado. No se considerarán respuestas sin razonar.

Se trata de un sistema **M/M/1/∞/4** debido a que:

- Hay M=4 mesas que se realizan peticiones al servicio (cocinero) pasado un tiempo que está distribuido de forma exponencial. Estas mesas son los clientes del sistema.
- Hay un servidor que es el cocinero. Luego c = 1.
- El tiempo que tarda el cocinero en despachar cada comanda está distribuido de forma exponencial.
- El tamaño de la cola se puede considerar infinito, dado que se dice que le cocinero tiene capacidad para almacenar todas las peticiones de los clientes.



1.2 (1 puntos) Calcular el tiempo promedio que tarda cada mesa en tener su pedido listo desde su petición.

El tiempo promedio que tarda cada mesa en tener su pedido listo desde su petición, es el tiempo medio de estancia en el sistema la petición; esto es W. Por tanto, se calculará el número medio de clientes en el sistema L y se aplicará el Teorema de Little.

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

El número medio de clientes en el sistema viene dado por:

$$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{\mu\rho}{\lambda}$$

Se calcula ρ: $\rho = 1 - p_0 = 1 - \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} = 1 - \left[\sum_{n=0}^{4} \frac{4!}{(4-n)!}\left(\frac{0,1}{0.2}\right)^n\right]^{-1} = 1 - [1+2+3+3+1.5]^{-1} = 0.905$

Por tanto, el número medio de clientes en el sistema será:

$$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{\mu\rho}{\lambda} = 4 - \frac{0.2 \cdot 0.905}{0.1} = 2.19 \text{ clientes}$$

Y el tiempo medio de estancia en el sistema vendrá dado por el Teorema de Little:

$$W = \frac{L}{\lambda\prime} = \frac{L}{\rho\,\mu} = \frac{2.19}{0.905 \cdot 0.2} = 12.1 \text{ minutos}$$

1.3 (1.5 puntos) Una nueva normativa laboral impone que a lo largo de la jornada laboral de 9 horas del cocinero, éste debe descansar, en promedio, 1 hora y 30 minutos. Determinar si el restaurante puede hacer frente a este nuevo escenario con la plantilla actual manteniendo el mismo tiempo medio de respuesta en los pedidos. En caso de no ser así, ¿qué variación de personal necesita el restaurante para ajustarse a la nueva normativa? No se considerarán respuestas sin justificar.

Dado que el cocinero debe tener en promedio 90 minutos libres a lo largo de las 9 horas de trabajo, esto implica que debe tener libre el 16.67% del tiempo ($\frac{1.5}{9} = 0{,}1\hat{6}$). Con la situación actual no se cumple la normativa, puesto que el factor de utilización del cocinero es de 0.905 y, por tanto, su fracción de tiempo libre es 1-0.905=0.095 (9.5%). Por tanto, no se puede hacer frente a la nueva normativa con la plantilla actual.

Para ajustarse a la nueva normativa, habrá por tanto que contratar más cocineros y, por tanto, se pasará a tener un modelo M/M/c/∞/4, donde c es el número de cocineros y c el parámetro a determinar. Conociendo $\lambda = 0.1\, min^{-1}$ y $\mu = 0.2\, min^{-1}$ e imponiendo $\rho = 7.5/9$ y W=12.1 en el modelo M/M/c/∞/4 se tiene:

$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{\mu\rho}{\lambda}$ y, por tanto, aplicando el Teorema de Little, $W = \frac{L}{\lambda\prime} = \frac{M - \frac{\lambda'}{\lambda}}{\lambda'} = \frac{M}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} = \frac{M}{c\rho\mu} - \frac{1}{\lambda}$.

Despejando c:

$$c = \frac{M}{\left(W + \frac{1}{\lambda}\right)\rho\mu} = \frac{4}{(12.1+10)\left(\frac{7.5}{9}\right)0.2} = 1.086.$$

Por tanto, hará falta contratar otro cocinero más.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día 14 de abril de 2016. Examen parcial.

2. PROBLEMA (7 puntos).

El sistema de bibliotecas de la universidad recibe peticiones de los clientes según un proceso de Poisson con una media de **2 peticiones por segundo**. Todas las peticiones son recibidas inicialmente por un **servidor A** con una tasa de servicio de **10 peticiones al segundo** y tiempo de servicio distribuido exponencialmente. Al finalizar su proceso, el servidor A distribuye las peticiones a otros servidores. De las peticiones recibidas, un **80%** son para consultar el catálogo de libros, mientras que el **20%** son para acceder a servicios al usuario como consulta de libros prestados, realización de reservas, cancelación de reservas, etc.

Las solicitudes que directamente requieren el acceso a servicios al usuario pasan a ser atendidas por un **servidor B** tras pasar por el servidor A. El servidor B tiene un tiempo de servicio distribuido exponencialmente y tasa de servicio de **2.5 peticiones al segundo**. Una vez procesadas por el servidor B, el **40%** de las peticiones requieren volver a pasar por el servidor B, mientras que el **60%** restante salen del sistema.

Por otra parte, las peticiones para la consulta del catálogo pasan a un **servidor C** que se encarga de consultar el catálogo de la UAM. Este servidor C tiene un tiempo de servicio que se puede considerar distribuido exponencialmente y con una tasa de servicio de **5 peticiones al segundo.** De las peticiones procesadas por el servidor C, el **30%** corresponden a libros que no se encuentran en el catálogo de la UAM y, por tanto, tras pasar por el servidor C pasan a un **servidor D** que busca en el catálogo de universidades de la Comunidad de Madrid. El servidor D tiene una tasa de servicio de **2 peticiones al segundo** y su tiempo de servicio se encuentra distribuido exponencialmente. Las peticiones que son encontradas en el catálogo de la UAM no pasan por el servidor D. De las peticiones procesadas por C o por C y D, un **20%** solicitan la reserva de un libro y, por tanto, pasan al servidor encargado de gestionar los servicios al usuario (servidor B). El **80%** de las peticiones restantes salen del sistema.

Suponer que todos los servidores tienen una cola de espera de tamaño infinito, que se encuentran en estado estacionario, y que existe un número muy grande de clientes, de modo que el número de peticiones pendientes de servicio no afecta al ritmo de llegada de nuevas peticiones.

2.1 (1.5 puntos) Dibujar el diagrama de proceso del sistema completo, y expresar (no calcular) las tasas de llegada a la entrada de cada servidor, indicando las suposiciones realizadas. Dar una explicación razonada de qué modelo, según la notación de Kendall, será aplicable a cada una de sus componentes.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II **Grupo** 236 y 240

Apellidos .... **Nombre** ....

Ejercicio del día 14 de abril de 2016. Examen parcial.

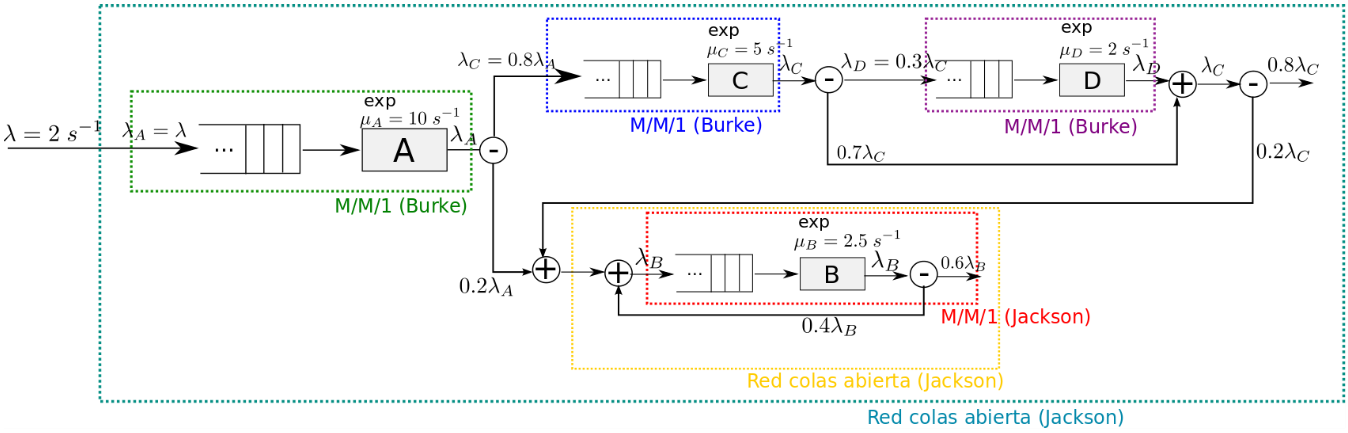


Figura 1 Diagrama de proceso del sistema completo

Las tasas de llegadas a la entrada de cada servidor se pueden obtener al <u>suponer que los sistemas se encuentran en estado estacionario</u> y, por tanto, en cada uno de los sistemas se tendrá a la salida la misma tasa que a la entrada. Entonces:

- La tasa de salida del servidor A será la tasa de llegadas,λ_A. De hecho está salida sabemos que sigue un proceso de Poisson de tasa λ_A de acuerdo al Teorema de Burke.
- La tasa de entrada al servidor C, λ_C, es el 80% de la tasa de salida del servidor A, por tanto será $\lambda_C = 0.8\ \lambda_A$. Puesto que la salida de A es un proceso de Poisson y la entrada de C se obtiene de la bifurcación aleatoria de dicho proceso de Poisson, la entrada de C también sigue un proceso de Poisson. De acuerdo al Teorema de Burke, la salida de C también será un proceso de Poisson.
- La tasa de entrada al servidor D, λ_D, es el 30% de la tasa de salida del servidor C, por tanto será $\lambda_D = 0.3\ \lambda_B = 0.3\ \cdot 0.8\ \cdot\ \lambda_A$. Puesto que la salida de C es un proceso de Poisson y la entrada de D se obtiene de la bifurcación aleatoria de dicho proceso de Poisson, la entrada de D también sigue un proceso de Poisson. De acuerdo al Teorema de Burke, la salida de D también será un proceso de Poisson.
- La tasa de entrada al servidor B es el 40% de la tasa de salida del servidor A y el 20% de las peticiones procesadas por C o C y D. Puesto que las salidas de A, C y D son procesos de Poisson, la suma aleatoria de estas tres salidas también es un proceso de Poisson. Por tanto, las llegadas externas (no procedentes de retroalimentación) al servidor B siguen un proceso de Poisson. Sin embargo, dado que el servidor B tiene retroalimentación, la tasa de llegadas efectiva al servidor B, λ_B, no sigue un proceso de Poisson. Viene dada por la siguiente expresión: $\lambda_B = 0.2\ \lambda_A + 0.8\ \cdot 0.2\ \lambda_A + 0.4\ \lambda_B$.

Cada uno de los cuatro subsistemas presentados en el diagrama se pueden modelar de acuerdo a un modelo M/M/1.

- Los servidores A, C y D son efectivamente modelos M/M/1 ya que su entrada es Poisson, el tiempo de servicio es exponencial, hay un único servidor y se puede considerar que el tamaño de la cola y el número de clientes son infinitos.
- El servidor B no tiene entrada Poissoniana, y por tanto, no es un modelo M/M/1 en el sentido estricto. Sin embargo, podemos aplicar el Teorema de Jackson (estado estacionario y red de colas abierta), y, por tanto, el número de clientes en B se puede modelar cada uno de acuerdo a un modelo M/M/1.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos ... Nombre ...

Ejercicio del día 14 de abril de 2016. Examen parcial.

2.2 (0.5 puntos) Calcular la tasa de llegadas efectiva a la entrada de cada servidor (A, B, C y D).

- Tasa de llegadas efectiva a la entrada de A: $\lambda_A = \lambda = 2\ s^{-1}$.
- Tasa de llegadas efectiva a la entrada de B: $\lambda_B = 0.2\ \lambda_A + 0.8\ \cdot 0.2\ \lambda_A + 0.4\ \lambda_B \ \Rightarrow \lambda_B = \frac{\lambda_A(0.2+0.8\ \cdot 0.2)}{1-0.4} = \frac{2(0.2+0.8\ \cdot 0.2)}{1-0.4} = 1.2\ s^{-1}$.
- Tasa de llegadas efectiva a la entrada de C: $\lambda_C = 0.8\ \lambda_A = 0.8\ \cdot 2 = 1.6\ s^{-1}$.
- Tasa de llegadas efectiva a la entrada de D: $\lambda_D = 0.3\ \lambda_B = 0.3\ \cdot 0.8\ \cdot\ \lambda_A = 0.3\ \cdot 0.8\ \cdot 2 = 0.48\ s^{-1}$.

Observar que en todos los casos la tasa de llegadas a cada servidor es menor que la tasa de servicio, y, por tanto, el sistema se encuentra efectivamente en estado estacionario.

2.3 (2 puntos) Calcular el tiempo medio de respuesta de las peticiones que encuentran un libro en el catálogo de la UAM y realizan una reserva sobre el mismo.

El tiempo de estancia de estas peticiones será la suma del tiempo medio de estancia en A, W_A, el tiempo medio de estancia en B, W_B, y el tiempo medio de estancia en C, W_C.

El tiempo de estancia en A vendrá dado por el modelo M/M/1, dado que no hay retroalimentación:

$$W_A = \frac{1}{\mu_A - \lambda_A} = \frac{1}{10-2} = 0.125\ s$$

El tiempo de estancia en C vendrá dado por el modelo M/M/1, dado que no hay retroalimentación:

$$W_C = \frac{1}{\mu_C - \lambda_C} = \frac{1}{5-1.6} = 0.294\ s$$

Para calcular el tiempo medio de respuesta del servidor B se aplicará el Teorema de Jackson sobre la red de colas abierta que define B (recuadro amarillo del diagrama)[1].

Para ello, se obtiene el tiempo medio de respuesta de B aplicando el Teorema de Little:

$$W_B = \frac{L_B}{0.2\ \lambda_A + 0.8\ \cdot 0.2\ \lambda_A}$$

Para calcular el número medio de clientes en B se aplican las ecuaciones del modelo M/M/1:

$$L_B = \frac{\lambda_B}{\mu_B - \lambda_B} = \frac{1.2}{2.5-1.2} = 0.923\ clientes$$

Por tanto:

[1] También podría resolverse esta cuestión calculando el tiempo medio de una pasada y el número medio de pasadas.

$$W_B = \frac{0.923}{0.2\,\lambda_A + 0.8\cdot 0.2\,\lambda_A} = \frac{0.923}{0.2\cdot 2 + 0.8\cdot 0.2\cdot 2} = 1.282\ s$$

Y el tiempo medio de las peticiones que encuentran un libro en el catálogo de la UAM y realizan una reserva sobre el mismo será:

$$W_{ABC} = W_A + W_B + W_C = 0.125 + 0.294 + 1.282 = 1.701\ s$$

2.4 (1.5 puntos) Calcular el tiempo medio de respuesta de todo el sistema.

Para calcular el tiempo medio de respuesta de todo el sistema, se pueden seguir dos alternativas:

1. Media ponderada de los tiempos de cada uno de los subsistemas.
2. Aplicar el Teorema de Little sobre el sistema total (recuadro azul claro del diagrama).

Opción 1: El tiempo medio de respuesta de todo el sistema vendrá dado por:

$$W = W_A + 0.8\,W_C + 0.8\cdot 0.3\cdot W_D + (0.2 + 0.8\cdot 0.2)W_B$$

Se necesita calcular W_D. Como se justificó en 2.1 se pueden aplicar las ecuaciones del modelo M/M/1:

$$W_D = \frac{1}{\mu_D - \lambda_D} = \frac{1}{2 - 0.48} = 0.658\ s$$

Por tanto, el tiempo medio de respuesta de todo el sistema será:

$$\begin{aligned} W &= W_A + 0.8\,W_C + 0.8\cdot 0.3\cdot W_D + (0.2 + 0.8\cdot 0.2)W_B \\ &= 0.125 + 0.8\cdot 0.294 + 0.8\cdot 0.3\cdot 0.658 + (0.2 + 0.8\cdot 0.2)\ 1.282 = 0.980\ s \end{aligned}$$

Opción 2: Aplicamos el Teorema de Little sobre el sistema global, teniendo en cuenta que el número medio de clientes en el sistema total es la suma del número medio de clientes en cada uno de los subsistemas.

$$W = \frac{L_A + L_B + L_C + L_D}{\lambda}$$

Como L_B ya se han calculado en el apartado 2.3, se precisa calcular L_A, L_C y L_D. Se pueden aplicar las fórmulas del modelo M/M/1.

$$L_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A - \lambda_A} = \frac{2}{10 - 2} = 0.25\ clientes$$

$$L_C = \frac{\lambda_C}{\mu_C - \lambda_C} = \frac{1.6}{5 - 1.6} = 0.471\ clientes$$

$$L_D = \frac{\lambda_D}{\mu_D - \lambda_D} = \frac{0.48}{2 - 0.48} = 0.316 \ \ clientes$$

Por tanto, el tiempo medio de estancia en el sistema global será:

$$W = \frac{L_A + L_B + L_C + L_D}{\lambda} = \frac{0.25 + 0.923 + 0.471 + 0.316}{2} = 0.980 \ s$$

2.5 (0.75 puntos). Determinar <u>justificadamente</u> un cuello de botella en el sistema descrito anteriormente.

Un cuello de botella es el servidor B encargado de procesar las peticiones referentes a los servicios de usuario. Este servidor tiene el factor de utilización más alto. Esto se puede ver calculando los factores de utilización de cada uno de los servidores de acuerdo a la ecuación para ρ del modelo M/M/1:

$$\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$\rho_B = \frac{\lambda_B}{\mu_B} = \frac{1.2}{2.5} = 0.48$$

$$\rho_C = \frac{\lambda_C}{\mu_C} = \frac{1.6}{5} = 0.32$$

$$\rho_D = \frac{\lambda_D}{\mu_D} = \frac{0.48}{2} = 0.24$$

2.6 (0.75 puntos). Determinar justificadamente la tasa de llegadas máxima que admitiría este sistema.

Nos piden calcular el máximo valor para la tasa de llegadas λ. La tasa máxima de llegadas se calcula imponiendo que todos los sistemas deben estar en estado estacionario, es decir, los factores de utilización de los servidores deben ser menores a 1. En este caso, puesto que el cuello de botella lo forma el servidor B, hay que determinar la tasa máxima de llegadas que acepta este servidor:

$$\rho_B = \frac{\lambda_B}{\mu_B} = \frac{\frac{\lambda_A(0.2 + 0.8 \ \cdot 0.2)}{1 - 0.4}}{2.5} = \frac{\frac{\lambda \ (0.2 + 0.8 \ \cdot 0.2)}{1 - 0.4}}{2.5} < 1$$

Por tanto:

$$\lambda < \frac{2.5\,(1-0.4)}{(0.2+0.8\,\cdot 0.2)} = 4.167\ s^{-1}$$

Se puede comprobar que para el resto de los servidores, se verifican las siguientes desigualdades, siendo la más estricta la correspondiente al servidor B:

$$\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A} = \frac{\lambda}{\mu_A} < 1 \Rightarrow \lambda < 10\ s^{-1}$$

$$\rho_C = \frac{\lambda_C}{\mu_C} = \frac{0.8\,\lambda}{\mu_C} < 1 \Rightarrow \lambda < 6.25\ s^{-1}$$

$$\rho_D = \frac{\lambda_D}{\mu_D} = \frac{0.8\,\cdot 0.3\,\cdot\,\lambda}{\mu_D} < 1 \Rightarrow \lambda < 8.33\ s^{-1}$$