## 2.3. Integral de una función medible

**1**. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible con $f(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$. Mostrar que

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}).$$

**2**. Sea $f$ una función medible e integrable. Mostrar que si $f$ está acotada, entonces $f^2$ es también integrable. Si $f$ no está acotada el resultado no es cierto en general. Encontrar un contraejemplo en este caso.

**3**. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Mostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| < \epsilon, \quad \text{siempre que } A \in \mathcal{F} \text{ y } \mu(A) < \delta.$$

Sugerencia: Proceder por reducción al absurdo. Tomar una sucesión $A_n$ con $\mu(A_n) < 1/2^n$ que no verifique el enunciado. Considerar $B = \limsup A_n$ y usar el primer lemma de Borel-Cantelli para llegar a una contradicción.

**4**. Consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función suelo o parte entera. Mostrar que $f$ es medible y calcular $\int_{(0,1)} f$.

**5**. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ una función medible. Mostrar la *desigualdad de Chebyshev*, es decir, para $\epsilon > 0$ y $\alpha > 0$, se verifica

$$\mu(\{|f| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^\alpha} \int_X |f|^\alpha \, d\mu.$$

**6**. Consideramos la medida delta de Dirac (concentrada en el punto $a$) sobre el espacio medible $(X, \mathcal{P}(X))$, es decir, $\delta_a(A) = 1_A(a)$, para $A \subset X$ y $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$.

(a) ¿Cuáles son las funciones medibles en este espacio?

(b) Calcular su integral de una función medible cualquiera $f$.

(c) ¿Cuáles son los funciones integrables en este espacio de medida?

**7**. En $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ consideramos $\mu$ la medida de contar, es decir, $\mu(A) = \text{card(A)}$.

(a) ¿Qué funciones son integrables? ¿Cuánto vale su integral?

(b) Mostrar que si $f_n \to f$ en $\mathcal{L}^1(\mu)$, entonces $f_n \to f$ (puntualmente).

(c) Consideramos la sucesión

$$f_n(k) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mostrar que $f_n$ converge uniformemente, pero no converge en $\mathcal{L}^1(\mu)$.
Recordatorio: $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ sobre el conjunto $D$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $n_0$ tal que para todo $n \geq n_0$, se tiene que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in D$.

(d) Probar que la sucesión

$$f_n(k) = \begin{cases} 1/k, & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

está en $\mathcal{L}^1(\mu)$ y converge uniformemente a una función que *no* está en $\mathcal{L}^1(\mu)$.

**8**. Si $f$ es una función medible en un espacio completo y $f = g$ a.e., se tiene que $g$ es medible y $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.

**9**. Calcular la integral de Lebesgue sobre el conjunto $[0, \pi/2]$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sin x$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \cos x, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si } \cos x \in \mathbb{Q}, \\ \sin^2 x, & \text{si } \cos x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

**10**. Calcular la integral de Lebesgue sobre $(0, \infty)$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = e^{-\lfloor x \rfloor}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{\lfloor x+1 \rfloor \lfloor x+2 \rfloor}$.

(c) $f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor !}$.

**11**. Definimos $f : [0, 1] \to \bar{\mathbb{R}}$ de la siguiente forma: $f(x) = \infty$, si $x \in C$, donde $C$ es el conjunto ternario de Cantor en [0,1]; $f(x) = n$ en cada intervalo del complementario de $C$ de longitud $\frac{1}{3^n}$. Demostrar que $f$ es medible Lebesgue y calcular $\int_0^1 f(x)\, dx$.