

# Cálculo de Variaciones: Mecánica

D.Faraco y R.Orive

Madrid, Mayo 2020

# Introducción a la mecánica

La mecánica estudia el movimiento de objetos sometidos a distintas fuerzas.

Tras el trabajo pionero de Newton  $F = m\ddot{x}$ , existen varios desarrollos alternativos. En el marco clásico son equivalentes pero tienen la ventaja de que se pueden extender a situaciones correspondientes a otros campos de la física como el electromagnetismo, a la mecánica estadística o a la mecánica cuántica.

En la mecánica Newtoniana, calcular aceleraciones variando las coordenadas es muy difícil. Sin embargo la mecánica Lagrangiana simplifica mucho estos cálculos.

"Los principios Variacionales de la mecánica están enraizados en el gran siglo del liberalismo que empieza con Descartes y contempla la vida de Leibnitz, Spinoza, Goethe y Bach. Es el primer periodo de pensamiento cósmico desde los griegos." Cornelius Lanczos

# Distintos enfoques a la mecánica

Existen tres enfoques para la mecánica clásica.

- Mecánica Newtoniana  $F = m\ddot{x}$ .
- Mecánica Lagrangiana basada en el Cálculo de Variaciones.
- Mecánica Hamiltoniana. Dual a la Lagrangiana. Sistemas de primer orden. Es una formidable extensión de los sistemas planares.

Además la mecánica moderna, se divide en estas tres grandes ramas.

- Mecánica Estadística.
- Mecánica Relativista.
- Mecánica cuántica.

# La mecánica Lagrangiana: Notación

La mecánica Lagrangiana comienza estudiando la evolución de una partícula, cuya posición es

$$q(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (q_i(t))_{i=1}^3$$

sobre la que actúa una fuerza conservativa (es decir, derivada de un potencial). En esta situación, recordamos:

**Energía cinética**  $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$

**Energía Potencial.** Viene dada por  $V = V(q_1, q_2, q_3)$ , En ocasiones el potencial depende de la velocidad.

Se define el **Lagrangiano** como

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q_1, q_2, q_3)$$

# El principio de Hamilton

Muchos problemas físicos se pueden describir minimizando una función adecuadamente escogida, que llamamos Lagrangiano. En el caso de una única partícula la relación es especialmente nítida.

## Theorem (Principio de Mínima Acción de Hamilton)

*Una partícula sometida a una fuerza conservativa  $F = -\nabla V$  que en el instante  $t_1$  está en  $P$  y en el instante  $t_2$  está en  $P_2$  recorre una trayectoria que hace estacionaria la acción definida por*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(p(t), \dot{p}(t)) dt$$

# Ventajas del enfoque Lagrangiano (Variacional)

Esto se puede extender a describir sistemas formados por  $N$  partículas, donde estas partículas pueden estar afectadas por restricciones o **ligaduras** y usamos para ello **coordenadas generalizadas**,  $q$ .

- Independiente de coordenadas.
- Las restricciones (ligaduras) se expresan en terminos de las coordenadas generalizadas.
- Es más fácil tratar con el potencial que con las fuerzas. (Escalar versus vectorial).
- Es más fácil de extender a los campos modernos de la mecánica.

# Variaciones de Lagrange en funciones de varias variables

Consideramos funcionales que depende de varias funciones  $y_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) dx$$

Con las condiciones de contorno  $y_i(a) = y_{ia}$ ,  $y_i(b) = y_{ib}$ , usamos la notación  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\dot{\vec{y}} = (\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)$ .

**Variaciones:** Seguimos la filosofía de Lagrange definiendo variaciones  $h_i = \epsilon \varphi_i$  donde  $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$  y repetimos el proceso como en 1D:

- Paso 1, derivamos respecto a  $\epsilon$
- Paso 2, integramos por partes.

# Ecuaciones de Euler-Lagrange

Paso 1: Derivamos

$$\delta J[\vec{y}, \vec{\varphi}] = \frac{d}{d\epsilon} J(\vec{y} + \epsilon \vec{\varphi}) = \sum_{i=1}^n (f_{y_i} \varphi_i + f_{\dot{y}_i} \dot{\varphi}_i)$$

Paso 2: Integramos por partes

$$\delta J[\vec{y}, \vec{\varphi}] = \sum_{i=1}^n \int_a^b [f_{y_i} - \frac{d}{dx}(f_{\dot{y}_i})] \varphi_i dx$$

Escogemos primero para cada  $j \neq i$ ,  $\varphi_j = 0$  de modo que

$$\int_a^b [f_{y_i} - \frac{d}{dx} f_{\dot{y}_i}] \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \text{ tq } \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

y usando el lema fundamental del campo de variaciones, obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n}$$



# Lagrange versus Newton

Recordemos que

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{q}_i^2 - V(q).$$

En particular,  $L$  es autónomo

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = m\ddot{q}_i$

- $\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$

- $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow \overbrace{m\ddot{q}_i = F_i}^{\text{Segunda ley de Newton}}$

Las ecuaciones de Euler Lagrange del principio de mínima acción de Hamilton son las ecuaciones de la mecánica de Newton

# La energía es una integral primera

Como el Lagrangiano  $L = T - V$  no depende del tiempo, tenemos que para cada coordenadas  $q_i$

$$f - y'f_{y'} \equiv L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \text{ es constante.}$$

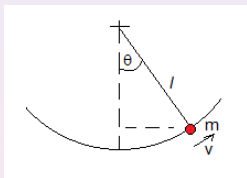
En nuestro caso,  $V$  no depende de la velocidad,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$

$$L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2 - V(q) - \dot{q}_i m\dot{q}_i$$

## Proposición

Los minimizadores de un Lagrangiano  $L = T - V$  conservan  $E_{Total} = T + V$  la suma de la energía cinética y potencial.

# El péndulo simple



Péndulo de longitud  $l$  y masa  $m$ , cuya posición viene dada por un ángulo  $\theta$ . Su velocidad se expresa por  $v = l\dot{\theta}$ . La fuerza es la gravedad así que  $V = mgy$ . Por tanto el Lagrangiano es

$$T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) = L(\theta, \dot{\theta}). \text{ Euler-Lagrange:}$$

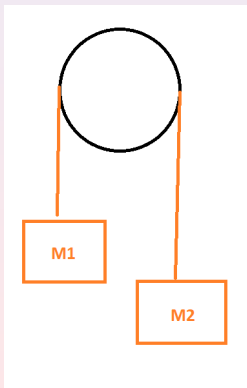
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}2ml^2\dot{\theta}\right) = ml^2\ddot{\theta}, & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin(\theta), \\ & & \Rightarrow \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin(\theta). \end{aligned}$$

Si  $\theta$  es pequeño  $\sin(\theta) \approx \theta$  se resuelve....  $\theta = \theta_0 \cos(t\sqrt{g/l})$

# La máquina de Atwood

La energía potencial es la que la gravedad le otorga a las dos masas

$$V = -M_1gx - M_2g(l - x), \quad T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2$$



Por tanto, el lagrangiano es  $L = T - V$ .

Calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}g.$$

Figura: Máquina de Atwood

# Teorema de Noether

El teorema de Noether nos dice que las simetrías del Lagrangiano, dan lugar a más cantidades conservadas además de la energía. Existen muchos enunciados distintos pero vamos a ver uno sencillo y adecuado a nuestros propósitos. Específicamente.

## Invarianza del Lagrangiano respecto a un parámetro

Sean  $q_i$  las coordenadas generalizadas. Supongamos que las hacemos variar respecto a otro parámetro  $h$ ,  $q_i = q_i(h, t)$  de manera que  $L(q_i(t, h)) = L(q_i(t, 0))$ . Entonces

### Theorem (Noether)

*Si el lagrangiano es invariante respecto a  $h$  entonces*

$$I_h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h}$$

*se conserva para todo  $h$ . En particular para  $h = 0$ .*

# Demostración

La invarianza de  $L$  se lee como  $\frac{\partial L}{\partial h}(t, h) = 0$ . Por la regla de la cadena

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} \quad \underbrace{=}_{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_i}{\partial h} \right)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_i}{\partial h} \right) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)} \frac{\partial q_i}{\partial h}$$

donde la última igualdad viene de la ecuación de Euler Lagrange. Usando la regla del producto se sigue que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} \right) = 0$$

Y se demuestra la conservación con respecto al tiempo

# Conservación del momento lineal

Consideramos que el potencial de la fuerza solo depende de la distancia relativa de las partículas (física). Entonces podemos escribir el Lagrangiano como

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \left( m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \sum_{j>i} V(\|(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - z_j)\|) \right)$$

en particular, se satisface la tercera ley de Newton. Este Lagrangiano es independiente de las traslaciones

$$L(q_i, \dot{q}_i) = L(q_i + h, \dot{q}_i + \dot{h})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial q_i}{\partial h} = 1$$

Conservación del momento lineal:

$$P = \sum_i m_i (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) \text{ se conserva.}$$

## Coordenadas cíclicas.

Decimos que una coordenada generalizada  $q_i$  es **cíclica** si  $L$  no depende de  $q_i$  (aunque pueda depender de  $\dot{q}_i$ ). Llamamos

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} m,$$

cantidad de momento generalizada, canónica o conjugada. Es clave en el enfoque Hamiltoniano de la mecánica. En nuestra búsqueda de cantidades conservadas, la aplicación directa de las ecuaciones de Euler Lagrange, nos dice que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Si  $q_j$  es cíclica se conserva el correspondiente momento generalizado. Es decir, el momento generalizado es una integral primera!.



# Mecánica Hamiltoniana

Es una reinterpretación de la mecánica clásica que proporciona parte del lenguaje de la mecánica estadística y la mecánica cuántica.

- La mecánica lagrangiana nos genera  $n$  ecuaciones de orden 2, con  $n$  variables independientes  $q$  y  $2n$  valores iniciales.
- La mecánica hamiltoniana nos genera  $2n$  ecuaciones de orden 1, con  $2n$  variables independientes. Unas son las coordenadas generalizadas  $q$  y las otras  $n$  son las **cantidades de movimiento conjugadas**

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t, q_i(t), \dot{q}_j(t))$$

- Las variables  $(q, p)$  se denominan **variables canónicas**.
- Derivar la formulación hamiltoniana partiendo de la formulación lagrangiana se logra mediante la **transformada de Legendre**.

# Transformada de Legendre

Dos funciones diferenciables  $f$  y  $f^*$  son una transformada de Legendre de otra  $\mathcal{L}[f] = f^*$  si cada una de sus primeras derivadas son función inversa de la otra:  $Df = (Df^*)^{-1}$ .

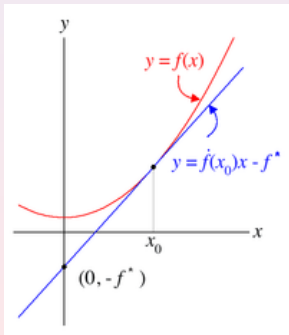


Figura: Interpretación geométrica

Sea la familia  $y = px + b$ . Para que sea la tangente en  $x_0$ , tomo  $p = f'(x_0)$  y  $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ . Así, podemos definir  $b$  en función de  $p$  para todo  $x = (f')^{-1}(p)$  y

$$\begin{aligned} f^*(p) &= -b = px - f(x) \\ &= p(f')^{-1}(p) - f((f')^{-1}(p)) \end{aligned}$$

Notar  $df^*(p) = (f')^{-1}(p)$  y  $\mathcal{L}[f^*] = f$

# Hamiltoniana

Se define la **hamiltoniana** como la transformada de Legendre de la lagrangiana con respecto las variables  $\dot{q}_i$ :

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$$

**Ejemplo:** Sea una lagrangiana asociada a un potencial:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{q}_i)^2 - V(q) \Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i,$$

$p_i$  son los momentos lineales (!!!). Entonces,

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{q}_i^2 + V(q) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} (p_i)^2 + V(q) \end{aligned}$$

$H$  es la energía total (!!!).

# Ecuaciones de Hamilton

Por la transformación de Legendre, tenemos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, q, p), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Por la definición de las variables conjugadas y EL:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

resultando el resto de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t, q, p), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Notar  $(\dot{q}_i, \dot{p}_i)^t = S \cdot DH(q, p)$ ,  $S$  la **matriz simpléctica**.