Ej. 1	Ej.2	NOTA

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

Geometría de Curvas y Superficies. Segundo parcial. 11 de abril de 2019.

Apellidos .... Nombre .... D.N.I. ....

Ejercicio 1.

Sea S el catenoide de parametrización $\mathbb{X}(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \operatorname{sen} u, v)$, con $(u,v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Se pide:

a) Calcular la primera forma fundamental.
b) Calcular la segunda forma fundamental.
c) Calcular las curvaturas principales.
d) Determinar las lineas de curvatura.
e) Calcular la curvatura gaussiana.
f) Determinar las curvas asintóticas.

Ejercicio 2.

Decidir razonadamente (es decir, indicando una demostración o dando un contraejemplo) si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a) La esfera tiene un paralelo de puntos parabólicos.
b) Sea S una superficie regular. Supongamos que, en un punto $p \in S$, la curvatura gaussiana es igual a 7, mientras que la curvatura media es igual a 4. Entonces:
   (i) Una de las curvaturas principales en p puede ser igual a 1.
   (ii) Una de las curvaturas principales en p tiene que ser igual a 1.
c) Cualquier curva en la esfera (birregular y parametrizada por longitud de arco) tiene curvatura normal constante.
d) El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es localmente isométrico al plano $z = 0$.
e) Sea $f : S_1 \to S_2$ una isometría local, $\alpha : I \to S_1$ una curva parametrizada por longitud de arco y $\beta = f \circ \alpha : I \to S_2$ la curva imagen. Entonces:
   (i) La curva β está también parametrizada por longitud de arco.
   (ii) Para todo $s \in I$ las curvaturas normales de α y β en s son iguales, es decir, $k_n^\beta(s) = k_n^\alpha(s)$.

EJERCICIO 1

$\mathbb{X}(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \,\mathrm{sen}\, u, v)$

$\mathbb{X}_u = \cosh v(-\mathrm{sen}\, u, \cos u, 0)$

$\mathbb{X}_v = (\mathrm{senh} v \cos u, \mathrm{senh} v\, \mathrm{sen} u, 1)$

$\longrightarrow \begin{cases} E = \cosh^2 v \\ F = 0 \\ G = \mathrm{senh}^2 v + 1 = \cosh^2 v \end{cases}$

$N = \mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v \cdot \dfrac{1}{\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|} \Rightarrow N = \dfrac{1}{\cosh v}(\cos u, \mathrm{sen}\, u, -\mathrm{senh}\, v)$

$\mathbb{X}_{uu} = -\cosh v\,(\cos u, \mathrm{sen}\, u, 0)$

$\mathbb{X}_{uv} = \mathrm{senh} v(-\mathrm{sen}\, u, \cos u, 0)$

$\mathbb{X}_{vv} = (\cosh v \cos u, \cosh v\, \mathrm{sen}\, u, 0)$

$\longrightarrow \begin{cases} e = \langle N, \mathbb{X}_{uu}\rangle = -1 \\ f = 0 \\ g = 1 \end{cases}$

$$W = I^{-1} \cdot II = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2 v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\cosh^2 v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 v} \end{pmatrix}$$

$K_1 = \dfrac{-1}{\cosh^2 v} \qquad K_2 = \dfrac{1}{\cosh^2 v}$

$F = f = 0 \Longleftrightarrow$ líneas coordenadas son las de curvatura

$\downarrow$ demostración

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & v'^2 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} = u'v'(Eg - Ge) = 0 \Leftrightarrow u' = 0 \text{ ó } v' = 0$$

$K_n = 0 \Longleftrightarrow II(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0 \Longleftrightarrow eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 = 0$

$-u'^2 + v'^2 = 0$

$\shortparallel$

$(v' - u')(v' + u')$

$u + v = \text{constante}_1$

y

$u - v = \text{constante}_2$

a) FALSO

Todos los puntos de la esfera son elípticos ($\mathbb{K} = cte.$)

b) $\mathbb{K} = 7 \quad H = 4$

$\mathbb{K} = K_1 \cdot K_2 = 7 \longrightarrow K_2(8-K_2) = 7 \Longrightarrow K_2 = \begin{cases} K_2 = 7 \\ K_2 = 1 \end{cases}$

$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = 4 \longrightarrow K_1 = 8 - K_2$

$\Longrightarrow K_1 = \begin{cases} K_1 = 1 \\ K_1 = 7 \end{cases}$

Por lo tanto tiene que ser una igual a uno. VERDADERO

c) En la esfera todos los puntos son umbílicos y $K_n =$

VERDADERO

d) $x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow{param.} \mathbb{X}(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$

$\mathbb{X}_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)$ $\quad E = 1$

$\mathbb{X}_v = (0, 0, 1)$ $\quad F = 0 \quad I_{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad G = 1$

$\Phi(u,v) \longrightarrow (u,v,0) \longrightarrow I_{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ VERDADERO

e)

i) VERDADERO

$\|\beta'(t)\| = \|df \cdot \alpha'(t)\| = \|\alpha'(t)\| = 1$

ii) FALSO : contraejemplo $\longrightarrow$ plano y el cilindro.

i) Calcular $\mathbb{X}_u , \mathbb{X}_v \rightarrow \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = E$

$\langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_u \rangle = F$

$\langle \mathbb{X}_{\cancel{u}}, \mathbb{X}_v \rangle = G$

) Calcular $N : \dfrac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{\| \mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v \|}$

$e = \cancel{\langle \mathbb{X}_u, N \rangle} \cancel{\langle \mathbb{X}_u, N \mathbb{X}_u \rangle} \quad \langle \mathbb{X}_{uu}, N \rangle$

$f = \langle \mathbb{X}_{uv}, N \rangle$

$g = \langle \mathbb{X}_{vv}, N \rangle$

:) $\cancel{K = \dfrac{ef - g^2}{EF - G^2}} \quad \cancel{K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}} \quad W = I^{-1} \cdot II$

$\rightarrow$ autovalores de W

d) ~~Autovectores de W.~~

Calcular autovectores de $W \Rightarrow$ tenemos direcciones principales $\Rightarrow \alpha'(t) =$ autovector

$\Rightarrow \alpha(t) = \int$ autovector

e) $K = K_1 K_2$ $\quad K_{n,\alpha} = K_\alpha \langle \mathbb{n}_\alpha , N \circ \alpha \rangle$

f) $\cancel{K} \quad K_{n,\alpha} = 0 \Leftrightarrow \overbrace{II(\alpha', \alpha')}^{K_{n,\alpha} \,=} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e u'^2 + 2 f u' v' + g v'^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(v' - u')(v' + u') = 0$ $\quad \cancel{\int v' = \int}$

$$\phi(u,\theta) = (r(u)\cos\theta,\ r(u)\operatorname{sen}\theta,\ z(u))$$

$$\Phi_u = (r'(u)\cos\theta,\ r'(u)\operatorname{sen}\theta,\ z'(u))$$

$$\Phi_\theta = (-r(u)\operatorname{sen}\theta,\ r(u)\cos\theta,\ 0)$$

$$\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle = r'(u)^2 + z'(u)^2 = E$$

$$\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0 = F \qquad I_\Phi \equiv \begin{pmatrix} r'(u)^2 + z'(u)^2 & 0 \\ 0 & r(u)^2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \Phi_v, \Phi_v \rangle = r(u)^2 = G$$

$\cancel{\langle a\vec{v}, a\vec{w} \rangle}$

$\phi(u,v)$

$$\phi_u = b_\alpha(v)$$

$$\phi_v = \alpha'(v) + u\, b'_\alpha(v) = \alpha'(v) + u(-V_\alpha \tau_\alpha n_\alpha) =$$

$$= t_\alpha - u\tau_\alpha n_\alpha \qquad X(u,v) = (r\cos u,\ r\operatorname{sen}u,\ v)$$

$$\langle b_\alpha(v), b_\alpha(v) \rangle = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle b_\alpha, t_\alpha - u\tau_\alpha n_\alpha \rangle = 0$$

$$\langle t_\alpha - u\tau_\alpha n_\alpha, t_\alpha - u\tau_\alpha n_\alpha \rangle =$$

$$= \langle t_\alpha, t_\alpha \rangle + \langle t_\alpha, \cancel{-u\tau_\alpha n_\alpha} \rangle^{0} + \langle \cancel{-u\tau_\alpha n_\alpha}, t_\alpha \rangle^{0}$$

$$+ \langle -u\tau_\alpha n_\alpha, -u\tau_\alpha n_\alpha \rangle = 1 + u^2\tau_\alpha^2$$

$$n \qquad \frac{t'}{\|t'\|} \qquad ¿t'?$$