TIM

(Teoría de la Integral y de la Medida)

Grado en Matemáticas

Estructura del curso

Javier Cárcamo

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
javier.carcamo@uam.es

Información de contacto

Profesor: Javier Cárcamo

Correo electrónico: javier.carcamo@uam.es

Teléfono: 91 497 7635

Despacho: Módulo 17 - Despacho 412

Página web: http://verso.mat.uam.es/~javier.carcamo/

Tutorías: Bajo petición

Teoría de la Integral y de la Medida (TIM)

Tema 1. Espacios de medida

Tema 2. Integración en espacios de medida

Tema 3. Medidas con signo y diferenciación de integrales

1. Formalizar la idea de *medir* conjuntos.
2. Relacionar la noción de medida con la de integración.
3. Desarrollar la teoría de Lebesgue sobre medida e integración.
4. Familiarizarse con las técnicas habituales de la teoría.
5. Entender y saber utilizar los teoremas de convergencia bajo el signo integral, el teorema de Fubini y el de Radon-Nikodym.

Transparencias: Se pueden descargar en moodle:

Apuntes TIM 1on1
Apuntes TIM 2on1
Apuntes TIM 4on1

Relaciones de problemas: Dado el limitado tiempo, sólo haremos en clase los problemas en los que se tengan dificultades. Estos ejercicios se pedirán por adelantado al profesor para desarrollarlos en las clases de problemas.

Página web: En el moodle de la asignatura se encontrará disponible el resto del material del curso: Guía docente, horarios, calificaciones (cuando las haya), información acerca de las revisiones, etc.

Examen parcial: Se realizará un examen parcial cuando se termine el primer tema. La fecha del mismo dependerá de la marcha del curso.

Examen final: Martes 8 de enero de 2019, por la tarde (15 h.).

Calificación: La nota final será:

$$\text{Nota} = 0{,}3 \times \text{Nota parcial} + 0{,}7 \times \text{Nota final}.$$

Nota: La asistencia a clase y la entrega voluntaria de algunos problemas propuestos pueden ayudar a mejorar la nota.

Evaluación extraordinaria: Aquellos alumnos que no hayan superado la convocatoria ordinaria podrán presentarse al examen extraordinario el jueves 6 de junio de 2019 por la mañana (10 h.). La nota del examen parcial se conservará para esta convocatoria.

Bibliografía

- V.I. Bogachev, Measure Theory, Volume 1; Springer, 2007.
- D.L. Cohn, Measure Theory; Birhäuser, 1980.
- P.L. Ulyanov, M.I. Dyachenko, Análisis Real. Medida e Integración; Addison-Wesley/ UAM, 2000.
- G. de Barra, Measure Theory and Integration; John Wiley, 1981.
- G. Folland, Real Analysis, 2nd edition; John Wiley, 1999.
- W. Rudin, Análisis real y complejo, Tercera edición; McGraw Hill, 1988.
- E.M. Stein, R. Shakarchi, Real Analysis; Princeton University Press, 2005.

Algunas referencias adicionales se pueden encontrar en la guía docente de la asignatura.

TIM

Grado en Matemáticas

Tema 1
Espacios de medida

Javier Cárcamo

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
javier.carcamo@uam.es

Tema 1: Espacios de medida

Objetivos principales del curso

1. Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo real. La *longitud de* I es:

$$\text{Long}(I) = b - a.$$

Objetivo 1: Dado $A \subset \mathbb{R}$ (en principio cualquier conjunto), queremos definir $\text{Long}(A)$, y su extensión en el caso en que $A \subset \mathbb{R}^n$ (o en espacios más generales).

▶▶**Teoría de la medida**◀◀

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función integrable (Riemann). Podemos calcular su integral de Riemann,

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Objetivo 2: Queremos extender la clase de funciones para las que podemos calcular esta integral, así como el conjunto de conjuntos sobre el que podemos integrar.

▶▶**Teoría de la integral**◀◀

Deseamos construir una función μ que a cada $A \subset \mathbb{R}^n$ le asigne un valor $\mu(A) \in [0, \infty]$, la *medida de A*. Queremos que μ preserve la medida de los conjuntos que sabemos medir (por ejemplo, los productos de intervalos).

Pregunta: ¿Qué propiedades debería satisfacer μ?

(i) σ-**aditividad** o **aditividad numerable**: Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión finita o numerable de conjuntos disjuntos dos a dos:

$$\mu\left(\bigcup A_i\right) = \sum \mu(A_i).$$

Pregunta: ¿Por qué no pedir simplemente aditividad?

(ii) **Invariante por traslaciones, rotaciones y reflexiones**: Si A es congruente con B (A puede ser trasformado en B mediante traslaciones, rotaciones y reflexiones), entonces $\mu(A) = \mu(B)$.

(iii) **Normalización**: $\mu(Q) = 1$, donde Q es el cubo unidad:

$$Q = [0, 1]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_j \le 1, \text{ para } j = 1, \ldots, n\}.$$

Observación: Las condiciones (i), (ii) y (iii) son mutuamente inconsistentes: no existe $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ satisfaciendo (i)–(iii).

Ejemplo: (Caso $n = 1$.) En $[0,1)$, definimos la relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$ (racional).

$$[x] = \{y \in [0,1) : x \sim y\} \quad \text{(clase de equivalencia de } x\text{)}.$$

$$N = \{1 \text{ elemento de cada clase de equivalencia}\}.$$

Sea $R = \mathbb{Q} \cap [0,1)$ (racionales en $[0,1)$), y para $r \in R$, definimos:

$$N_r = \{x + r : x \in N \cap [0, 1-r)\} \cup \{x + r - 1 : x \in N \cap [1-r, 1)\}.$$

Idea: $N_r \equiv$ mover N a la derecha r unidades y trasladar la parte que queda fuera de $[0,1)$ 1 unidad a la izquierda.

Ejemplo: (Caso $n = 1$.) En $[0,1)$, definimos la relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$ (racional).

$$[x] = \{y \in [0,1) : x \sim y\} \quad \text{(clase de equivalencia de } x\text{)}.$$

$$N = \{1 \text{ elemento de cada clase de equivalencia}\}.$$

Sea $R = \mathbb{Q} \cap [0,1)$ (racionales en $[0,1)$), y para $r \in R$, definimos:

$$N_r = \{x + r : x \in N \cap [0, 1-r)\} \cup \{x + r - 1 : x \in N \cap [1-r, 1)\}.$$

(1) Para $r \in R$, $N_r \subset [0,1)$.

(2) $[0,1) = \bigcup_{r \in R} N_r$.

Si $y \in [0,1)$, existe $x \in N$ y $r \in \mathbb{Q}$ tal que $y = x + r$.

  (a) Si $y \geq x$, entonces $r \in R$ e $y \in N_r$.

  (b) Si $y < x$, entonces $r' = r + 1 \in R$ e $y \in N_{r'}$

(3) $\{N_r\}_{r \in R}$ son disjuntos dos a dos.

(4) Si μ satisface (i) y (ii), $\mu(N) = \mu(N_r)$, $r \in R$.

Usando (1)–(4) se llega a que *no* existe μ verificando (i), (ii) y (iii).

Algunas observaciones:

❶ Podríamos pensar relajar la condición (i) a (i′), donde

(i′) **Aditividad finita:** Si $A_1, \ldots, A_k$ es una sucesión finita de conjuntos disjuntos: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$.

Sin embargo, la σ-aditividad es fundamental para que la teoría funcione bien con los límites y la continuidad.
Además, si $n \geq 3$, incluso (i′) es incompatible con (ii) y (iii).

❷ **Moraleja:** $\mathbb{R}^n$ contiene conjuntos demasiado "salvajes" para poder definir una medida que tenga un sentido geométrico razonable sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Nos conformaremos con definir μ para los conjuntos que suelen aparecen en la práctica en matemáticas.

❸ Conviene desarrollar una teoría general en espacios abstractos ya que la noción de medida aparece en muchas situaciones. ¿Cuáles?

Pregunta: ¿Qué condiciones (de (i), (ii) y (iii)) se relacionan con la geometría euclídea y se pueden eliminar en un marco general?

Idea: Sea X un conjunto no vacío. Las σ-álgebras son familias de conjuntos de X que sirven de dominios naturales de las medidas.

Una colección de conjuntos $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ (partes de X) se dice que es una σ-**álgebra** si

(1) $X \in \mathcal{F}$.

(2) $\mathcal{F}$ es cerrada o estable para la complementación.

$$\text{Si } A \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c \in \mathcal{F}.$$

(3) $\mathcal{F}$ es estable para la unión numerable.

$$\text{Si } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}, \text{ entonces } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Ejemplos: $\{\emptyset, X\}$ σ-**álgebra trivial** y $\mathcal{P}(X)$ σ-**álgebra total**.

El par $(X, \mathcal{F})$ se denomina **espacio medible** y los elementos de $\mathcal{F}$ **conjuntos medibles**.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
   (Estable para la intersección numerable.)
3. Si $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
   (Estable para la intersección y unión finita.)

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Decimos que A_n **crece** hasta A, $A_n \uparrow A$, si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ y $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Decimos que A_n **decrece** hasta A, $A_n \downarrow A$, si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ y $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

4. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ y $A_n \uparrow A$, entonces $A \in \mathcal{F}$.
   (Estable para límites crecientes.)
5. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ y $A_n \downarrow A$, entonces $A \in \mathcal{F}$.
   (Estable para límites decrecientes.)

Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-álgebras, entonces $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ es σ-álgebra.

Dado $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, se define la **mínima σ-álgebra** que contiene a $\mathcal{C}$

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{F}\ \sigma\text{-álgebra}\}.$$

El conjunto $\mathcal{C}$ se denomina **generador de la σ-álgebra** $\sigma(\mathcal{C})$.

Ejercicio: Si $A \in \mathcal{P}(X)$, calcula $\sigma(\{A\})$.

Nota: Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(X)$ dos clases de conjuntos. Se tiene

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}') \text{ si y sólo si } \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}') \text{ y } \mathcal{C}' \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

Nota: La unión de σ-álgebras *no* tiene que ser una σ-álgebra.

Aplicación: $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ σ-álgebras y $\mathcal{C} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}_1 \text{ y } B \in \mathcal{F}_2\}$.

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2).$$

σ-álgebras de Borel

Si (X,τ) es un espacio topológico, la σ-álgebra $\sigma(\tau)$ se denomina **σ-álgebra boreliana o de Borel asociada a** τ. Si $A \in \sigma(\tau)$, A se dice **boreliano**.

Pregunta: ¿Qué tipo de conjuntos contiene $\sigma(\tau)$?

De interés especial para nosotros serán:

- $X = \mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$, $\tau = \tau_u$ (topología usual).
- $X = \mathbb{R}^k$ o $\overline{\mathbb{R}}^k$, $\tau = \tau_u$ (topología usual).

$\sigma(\tau_u) = \mathcal{B}$ σ-álgebra Boreliana (sin especificar la topología).

Observación: Si τ tiene una base contable β (el espacio topológico (Ω,τ) es 2-contable), entonces $\sigma(\tau) = \sigma(\beta)$.

Ejemplo: Cada una de las siguientes colecciones genera la σ-álgebra Boreliana en $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(a) $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$.

(b) $\{(a,b] : a,b \in \mathbb{Q}\}$.

(c) $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$.

(d) $\{[a,b] : a,b \in \mathbb{Q}\}$.

(e) $\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{Q}\}$.

(f) $\{(-\infty,a) : a \in \mathbb{Q}\}$.

(g) $\{[a,\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$.

(h) $\{(a,\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$.

Espacios de medida

Sea $(X,\mathcal{F})$ un espacio medible. Se dice que μ es una **medida (positiva)** sobre $(X,\mathcal{F})$ si $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0,\infty]$ verificando:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) **σ-aditividad** o **aditividad numerable**: $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$), entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

El triplete $(X,\mathcal{F},\mu)$ se llama **espacio de medida**.

(X conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ σ-álgebra y μ medida sobre $\mathcal{F}$)

- $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un **espacio de medida finita** si $\mu(X) < \infty$.
- Si $\mu(X) = 1$, μ se llama **medida de probabilidad**.
- $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un **espacio de medida σ-finito** si existe $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\mu(A_i) < \infty$, para todo i.

Algunos ejemplos elementales de espacios de medida

1. **Delta de Dirac:** $(X, \mathcal{P}(X))$ y $a \in X$. Dado $A \in \mathcal{P}(X)$,
$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases}$$
2. X no contable. $\mathcal{F} = \{A \subset X : A \text{ contable ó } A^c \text{ contable}\}$ es σ-álgebra.
$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ contable}, \\ 1 & \text{si } A^c \text{ contable}. \end{cases}$$
3. **Medidas definidas mediante funciones peso:** Sea $p : X \to [0, \infty]$ (peso). En $(X, \mathcal{P}(X))$ consideramos
$$\mu_p(A) = \sum_{x \in A} p(x).$$
¿Cómo se define esta suma cuando X no es contable?

Si $p \equiv 1$, μ_p se llama **medida de contar**. La medida delta de Dirac es un caso particular de μ_p, ¿cuál es su función peso?

Propiedades de la medida

1. $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ disjuntos, entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.
2. A, $B \in \mathcal{F}$, con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. A, $B \in \mathcal{F}$, con $A \subset B$ y $\mu(A) < \infty$, entonces $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.
4. $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$, entonces $\mu(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.
5. $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ y $A_n \uparrow A$, entonces $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.
6. $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{F}$, $A_n \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.
   Pregunta: ¿Es cierta esta propiedad cuando $\mu(A_1) = \infty$?
7. $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{F}$, $\mu(\cup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.

¿Cómo podemos llamar a las propiedades 1, 2, 4, 5, 6 y 7?

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Los conjuntos $N \in \mathcal{F}$ con $\mu(N) = 0$ se llaman **conjuntos nulos** o μ-**nulos**. Se dice que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es **completo** (o simplemente μ es **completa**) si todos los subconjuntos de los conjuntos nulos están en $\mathcal{F}$. Es decir, si

$$\forall N \in \mathcal{F} \text{ con } \mu(N) = 0, \text{ se tiene que } M \in \mathcal{F}, \forall M \subset N.$$

Observación: Para evitar problemas técnicos, siempre es recomendable trabajar con medidas completas. Es fácil extender cualquier espacio de medida a uno completo.

Teorema de completación

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : \mu(N) = 0\}$. Definimos

$$\bar{\mathcal{F}} = \{A \cup M : A \in \mathcal{F} \text{ y } M \subset N \text{ para algún } N \in \mathcal{N}\}.$$

Entonces, $\bar{\mathcal{F}}$ es una σ-álgebra y existe una única extensión $\overline{\mu}$ de μ a una medida completa sobre $\overline{\mathcal{F}}$. Es decir, $\overline{\mu}|_{\mathcal{F}} = \mu$ y $\overline{\mu}$ completa.

Teorema de completación

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : \mu(N) = 0\}$.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{A \cup M : A \in \mathcal{F} \text{ y } M \subset N \text{ para algún } N \in \mathcal{N}\}.$$

Entonces, $\bar{\mathcal{F}}$ es una σ-álgebra y existe una única extensión $\bar{\mu}$ de μ a una medida completa sobre $\bar{\mathcal{F}}$ (dada por $\bar{\mu}(A \cup M) = \mu(A)$).

$\bar{\mu}$ se llama la **completación** de μ y $\bar{\mathcal{F}}$ la **completación** de $\mathcal{F}$ (respecto a μ).

Paso 1: $\overline{\mathcal{F}}$ es una σ-álgebra.

Idea: Para $A \cup M \in \bar{\mathcal{F}}$, con $A \in \mathcal{F}$ y $M \subset N \in \mathcal{N}$, definimos

$$\bar{\mu}(A \cup M) = \mu(A).$$

Paso 2: La aplicación $\bar{\mu}$ está bien definida.
Paso 3: $\bar{\mu}$ es una medida sobre $\bar{\mathcal{F}}$ y $\bar{\mu}|_{\mathcal{F}} = \mu$.
Paso 4: $\bar{\mu}$ es completa.
Paso 5: $\bar{\mu}$ es la única extensión de μ sobre $\bar{\mathcal{F}}$.

Objetivo: Construir medidas sobre σ-álgebras "grandes".

Idea: Empezar con una colección $\mathcal{E}$ de conjuntos sencillos para los que el concepto de medida está claramente definido. Extender la medida a todos los conjuntos aproximándolos por exceso. Finalmente, obtener una medida sobre una σ-álgebra adecuada.

Se dice que $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ es una **medida exterior** si

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
(2) Si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
(3) Si $\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$, entonces $\mu^* \left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$.

Nota: Toda medida sobre $\mathcal{P}(X)$ es una medida exterior.

Un conjunto $M \subset X$ se dice μ^*-**medible** si verifica que

$$\text{para todo } A \subset X,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c).$$

Nota: Siempre se verifica $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c)$.

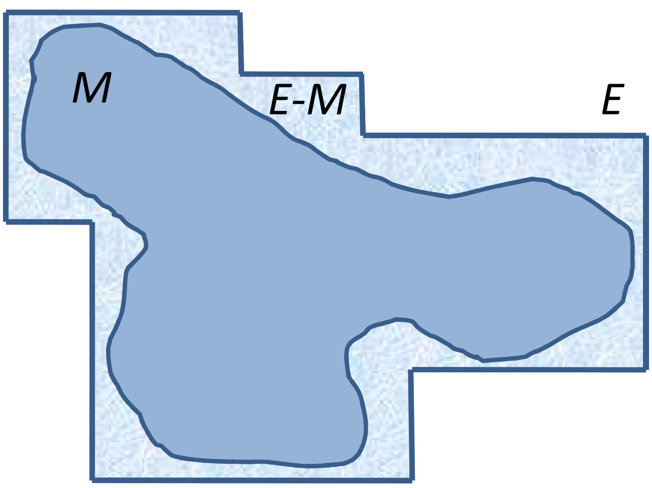
Nota: Si μ^* es una medida, todos los conjuntos son μ^*-medibles.

Un conjunto $M \subset X$ se dice μ^*-**medible** si verifica que

$$\text{para todo } A \subset X,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c).$$

Idea: Si $M \subset E$, con E conjunto maravilloso y M μ^*-medible:

$$\mu^*(M) = \mu^*(E) - \mu^*(E - M)$$



$\mu^*(M) =$ medida por exceso de M.
$\mu^*(E) - \mu^*(E - M) =$ medida por defecto de M.

Un conjunto $M \subset X$ se dice μ^*-**medible** si verifica que

$$\text{para todo } A \subset X, \ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap M) + \mu^*(A \cap M^c).$$

Definimos el **conjunto de conjuntos μ^*-medibles**

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{P}(X) : M \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}.$$

Teorema de Carathéodory

La colección $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y la restricción $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida completa (sobre $\mathcal{M}$).

Observación importante: El Teorema de Carathéodory permite construir una medida completa a partir de una medida exterior.

Objetivo 1: $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra.

Objetivo 2: $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida.

Objetivo 3: $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ es completa.

Teorema de Carathéodory

$\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida completa.

Paso 1: $M, N \in \mathcal{M}$, entonces $M \cup N \in \mathcal{M}$.

Paso 2: Si $\{M_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{M}$ disjuntos y $S_n = \cup_{j=1}^n M_j$, entonces

$$\mu^*(A \cap S_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(A \cap M_j), \quad \forall A \subset X \quad \text{(usad inducción)}.$$

Paso 3: Si $\{M_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ disjuntos y $S = \cup_{j=1}^\infty M_j$, entonces

$$\mu^*(A \cap S) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A \cap M_j), \quad \forall A \subset X.$$

Paso 4: Si $\{M_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ disjuntos, entonces $S = \cup_{j=1}^\infty M_j \in \mathcal{M}$.

Objetivos 1 y 2: $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida.

Paso 5: Si $\mu^*(M) = 0$, entonces $M \in \mathcal{M}$.

Objetivo 3: $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ es completa.

Una colección $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es una **álgebra** (sobre X) si

(1) $X \in \mathcal{A}$.

(2) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

(3) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Ejercicio: Propiedades de las álgebras

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Si $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ y $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.
   (Estable para la intersección y unión finita.)
3. Si A, $B \in \mathcal{A}$, entonces $A - B \in \mathcal{A}$.
   (Estable para diferencias.)

Pregunta: ¿Cómo podemos construir álgebras interesantes?

Una colección $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ se llama **familia elemental** si

(1) $X \in \mathcal{E}$.

(2) Si $E, F \in \mathcal{E}$, entonces $E \cap F \in \mathcal{E}$.

(3) Si $E \in \mathcal{E}$, entonces E^c es unión disjunta finita de elementos de $\mathcal{E}$.

Proposición: Si $\mathcal{E}$ es una familia elemental, la colección $\mathcal{A}$ de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{E}$ es un álgebra.

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \biguplus_{j=1}^{J} E_j : \{E_j\}_{j=1}^{J} \subset \mathcal{E} \text{ disjuntos} \right\}.$$

Ejemplo: La familia $\mathcal{E}$ sobre $\mathbb{R}$ formada por los **intervalos semiabiertos** es una familia elemental.

$$\mathcal{E} = \{\ (a,b],\ (a,\infty) \text{ y } \emptyset, \quad \text{para } -\infty \leq a < b < \infty\}.$$

Una aplicación $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ se dice que es una **medida sobre el álgebra** $\mathcal{A}$ (o una **premedida** sobre el álgebra $\mathcal{A}$) si verifica

(1) $\mu_0(\emptyset) = 0$.

(2) σ-**aditividad**: $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tales que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i).$$

Nota: Es mucho más fácil definir una medida sobre un álgebra que sobre una σ-álgebra. El siguiente objetivo será extender una medida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ a todo la σ-álgebra $\sigma(\mathcal{A})$.

Objetivo: Dada una medida μ_0 sobre $\mathcal{A}$, queremos construir una medida μ sobre $\sigma(\mathcal{A})$ tal que $\mu(A) = \mu_0(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$ $(\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0)$.

Propiedades de la medida sobre álgebras

Ejercicio: Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y μ_0 una premedida sobre $\mathcal{A}$. Mostrar las siguientes propiedades de la aplicación μ_0.

1. $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}$ disjuntos, entonces
$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_0(A_i).$$

2. $A,\ B \in \mathcal{A}$, con $A \subset B$, entonces $\mu_0(A) \leq \mu_0(B)$.

3. $A,\ B \in \mathcal{A}$, con $A \subset B$ y $\mu_0(A) < \infty$, entonces
$$\mu_0(B - A) = \mu_0(B) - \mu_0(A).$$

4. $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}$, entonces $\mu_0(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_0(A_i)$.

5. Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ con $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, entonces
$$\mu_0(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i).$$

Extensión de medidas

Sea $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ una medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$. Definimos

$$\mu^*(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A} \text{ y } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}, \quad A \subset X.$$

Teorema de Hahn

1. μ^* es una medida exterior y $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.
2. $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} = \{M \subset X : M \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$.

Construcción de la medida: μ_0 medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$.

$$\mu_0 \xrightarrow{\text{Hahn}} \mu^* \xrightarrow{\text{Carathéodory}} \mu$$

$$\mu_0 : \mathcal{A} \to [0,\infty] \hookrightarrow \mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty] \hookrightarrow \mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$$

Observación fundamental: $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$. Mediante este procedimiento obtenemos una medida (completa) μ que extiende a μ_0 y está definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ que contiene a $\sigma(\mathcal{A})$.

Extensión de medidas

Sea $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ una medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$. Definimos

$$\mu^*(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A} \text{ y } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}, \quad A \subset X.$$

Si $\{A_j\} \subset \mathcal{A}$ con $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $\{A_j\}$ se denomina un **cubrimiento** o **recubrimiento** del conjunto A (por elementos de $\mathcal{A}$).

Teorema de Hahn

1. μ^* es una medida exterior y $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.
2. $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} = \{M \subset X : M \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$.

Paso 1: μ^* es medida exterior.

Paso 2: $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

Paso 3: $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$

Extensión de medidas

Pregunta: Sabemos que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$, pero ¿qué pinta tiene $\mathcal{M}$?

Sea $\mathcal{A}$ álgebra. El espacio $(X, \mathcal{A}, \mu_0)$ se dice σ-**finito** si existe $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\mu_0(A_i) < \infty$, para todo i.

Proposición: Caracterización de $\mathcal{M}$ en espacios σ-finitos

Sea $\mathcal{A}$ una álgebra y $(X, \mathcal{A}, \mu_0)$ un espacio σ-finito, entonces

$$\mathcal{M} = \overline{\sigma(\mathcal{A})}, \quad \text{la completación de } \sigma(\mathcal{A}).$$

Paso 1: $\forall M \in \mathcal{M}$, $\exists A \in \sigma(\mathcal{A})$ verificando

(a) $M \subset A$. (b) $\mu(A) = \mu(M)$. (c) $\mu(A - M) = 0$.

(Distinguir los casos: Caso 1: $\mu(M) < \infty$. Caso 2: $\mu(M) = \infty$.)

Objetivo: $\mathcal{M} = \overline{\sigma(\mathcal{A})}$.

Nota: En general ($(X, \mathcal{A}, \mu_0)$ no necesariamente σ-finito), se puede mostrar que $\mathcal{M}$ es la *saturación* de la completación de $\sigma(\mathcal{A})$.

Unicidad de la extensión

Sea $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ una medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$.

$$\mu^*(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A} \text{ y } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}, \quad A \subset X.$$

Sea la medida $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$, con $\mathcal{M} = \{M \subset X : M \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$.

Teorema (sobre la unicidad de la extensión)

Sea ν una medida sobre $\sigma(\mathcal{A})$ que extiende a μ_0 ($\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$).

1. $\nu(A) \leq \mu(A)$, para todo $A \in \sigma(\mathcal{A})$.
2. Si $A \in \sigma(\mathcal{A})$ con $\mu(A) < \infty$, entonces $\nu(A) = \mu(A)$.

Teorema: Unicidad de la extensión en espacios σ-finitos

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu_0)$ un espacio σ-finito.

Si $\nu : \sigma(\mathcal{A})$ ó $\mathcal{M} \to [0, \infty]$ tal que $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$, entonces $\nu \equiv \mu$.

Paso 1: $\nu|_{\sigma(\mathcal{A})} = \mu$.

Paso 2: Ejercicio. $\nu = \mu$, en todo $\mathcal{M} = \overline{\sigma(\mathcal{A})}$.

Los "ladrillos" con los que construiremos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ son los intervalos semiabiertos:

$$\mathcal{E} = \{\ (a,b],\ (a,\infty)\ \text{y}\ \emptyset, \quad \text{para } -\infty \le a < b < \infty\}.$$

Consideramos:

$$\mathcal{A} = \{\text{Uniones finitas de intervalos semiabiertos disjuntos}\}.$$

$A \in \mathcal{A}$ sii $A = \biguplus_{j=1}^n I_j$, con $\{I_j\}$ intervalos semiabiertos disjuntos.

Nota: $\mathcal{A}$ álgebra sobre $\mathbb{R}$ y $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (σ-álgebra de Borel).

Queremos extender la aplicación $m_0((a,b]) = b - a$.

$$m_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$$
$$A = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \longmapsto m_0(A) = \sum_{j=1}^{n} m_0(I_j).$$

Teorema: m_0 es una medida σ-finita sobre el álgebra $\mathcal{A}$.

$$m_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$$
$$A = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \longmapsto m_0(A) = \sum_{j=1}^{n} m_0(I_j).$$

Teorema: m_0 es una medida σ-finita sobre el álgebra $\mathcal{A}$.

Paso 1: Si $\{I_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{E}$ disjuntos con $\bigcup_{j=1}^n I_j = I \in \mathcal{E}$, entonces

$$m_0(I) = \textstyle\sum_{j=1}^n m_0(I_j).$$

Paso 2: m_0 está bien definida: Si $A \in \mathcal{A}$ se puede escribir como $A = \bigcup_{j=1}^m I_j = \bigcup_{k=1}^n J_k$, entonces

$$\textstyle\sum_{j=1}^m m_0(I_j) = \sum_{k=1}^n m_0(J_k).$$

Paso 3: Si $\{I_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{E}$ intervalos semiabiertos disjuntos con $\bigcup_{j=1}^\infty = I \in \mathcal{E}$, entonces

$$m_0(I) = \textstyle\sum_{j=1}^\infty m_0(I_j).$$

Paso 4: m_0 es una medida σ-finita sobre $\mathcal{A}$.

$$m_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty] \text{ con } m_0(A) = \sum_{j=1}^n m_0(I_j) \text{ si } A = \biguplus_{j=1}^n I_j.$$

Teorema: m_0 es una medida σ-finita sobre el álgebra $\mathcal{A}$.

Nota: Usando los teoremas de Hahn, Carathéodory, y la unicidad de la extensión bajo σ-finitud, podemos extender m_0.

Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Existe una única medida completa m sobre $\mathcal{L}$ con $m|_{\mathcal{A}} = m_0$.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ es } m^*\text{-medible}\} \qquad (\mathcal{B} \subset \mathcal{L} \text{ y } \bar{\mathcal{B}} = \mathcal{L}).$$

$$m(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} m_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A} \text{ y } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}, \quad A \in \mathcal{L}.$$

La aplicación m se llama **medida de Lebesgue en** $\mathbb{R}$ y los conjuntos $A \in \mathcal{L}$, se llaman **conjuntos medibles Lebesgue**.

Algunas consecuencias

1. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\{x\} \in \mathcal{L}$ y $m(\{x\}) = 0$.
2. Si $A = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ conjunto contable, entonces $A \in \mathcal{L}$ y $m(A) = 0$. En particular, $m(\mathbb{Q}) = 0$.

Observación: Hay conjuntos con el cardinal del continuo y cuya medida de Lebesgue es también 0. El ejemplo más conocido es el conjunto de Cantor. Este conjunto es muy útil para construir ejemplos y contraejemplos varios.

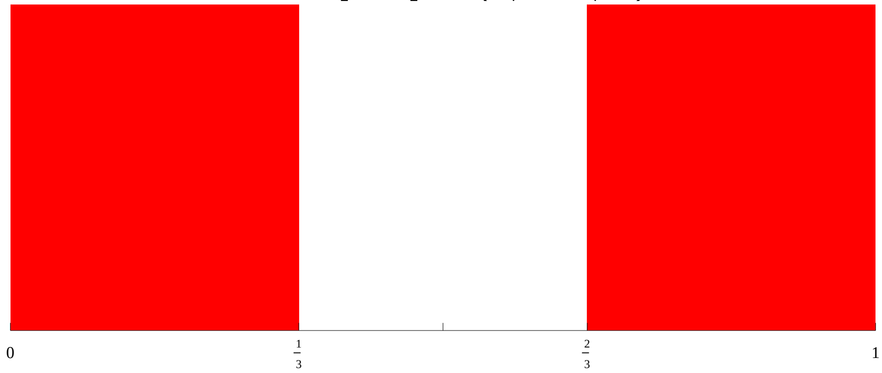
El **conjunto de Cantor (terciario)** es el conjunto de los números reales en $[0, 1]$ tal que en su representación en base 3 no aparece la cifra 1.

$$C = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}, \text{ con } a_n \in \{0, 2\} \right\}.$$

El conjunto de Cantor (geométricamente)

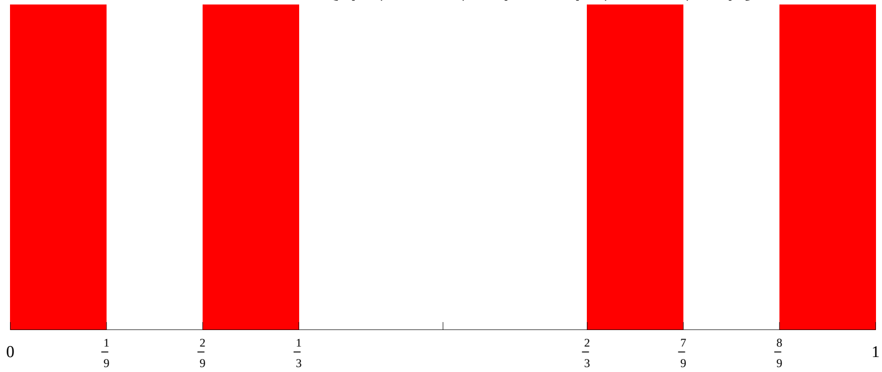
Comenzamos con $C_0 = [0,1]$

$C_1 = [0,1] - (1/3, 2/3)$

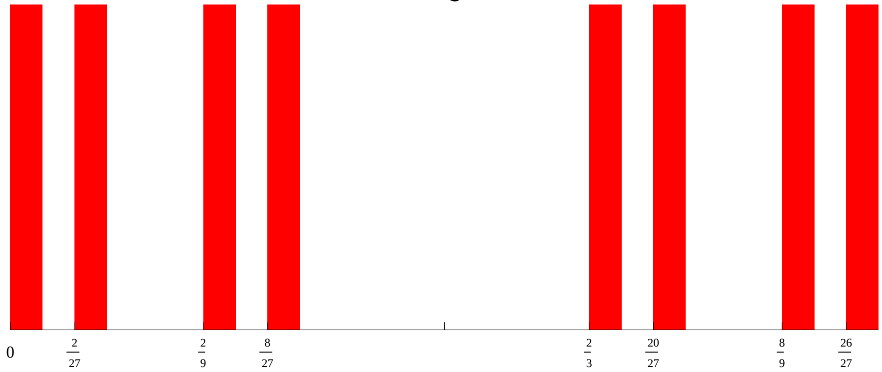


El conjunto de Cantor (geométricamente)

$C_2 = C_1 - \{(1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)\}$

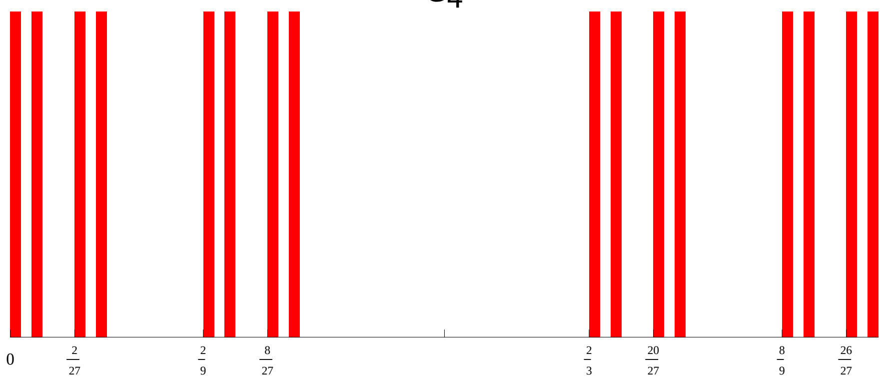


C_3

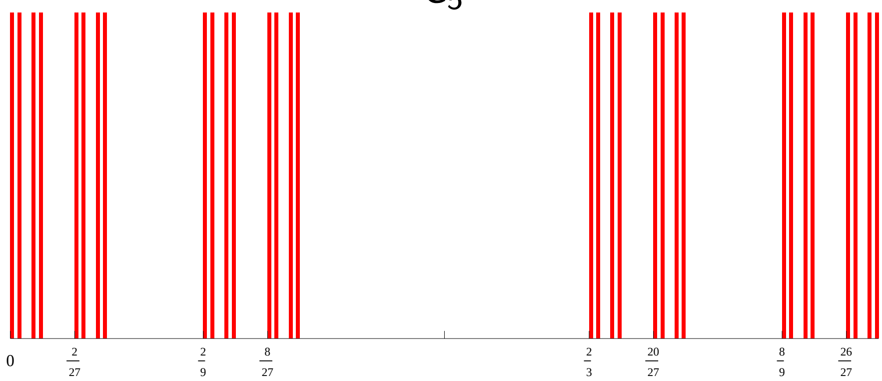


El conjunto de Cantor (geométricamente)

C_4

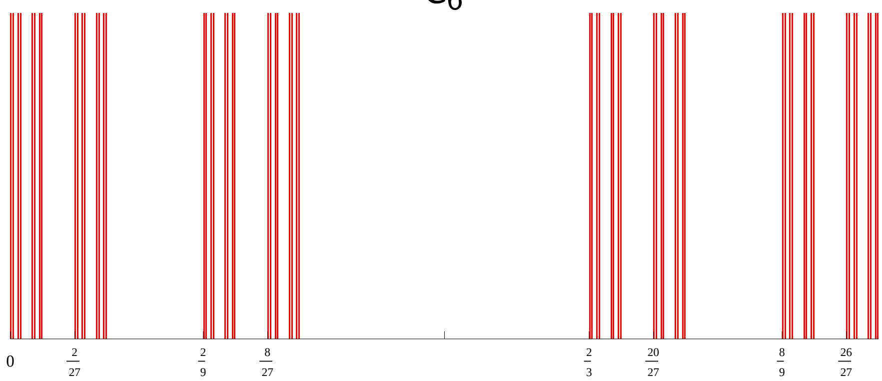


C_5

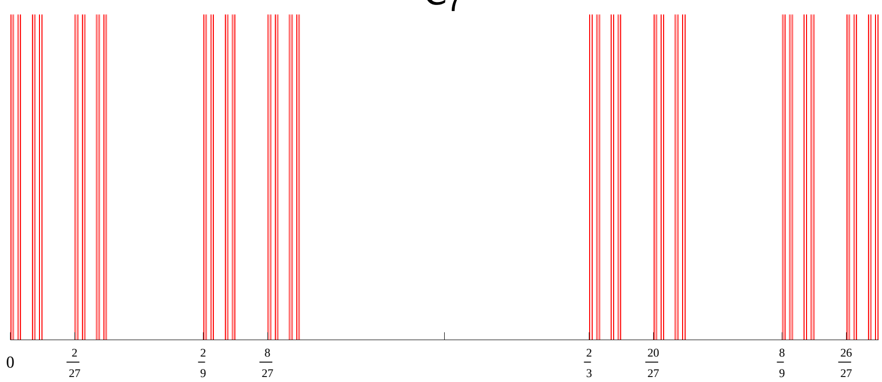


El conjunto de Cantor (geométricamente)

C_6

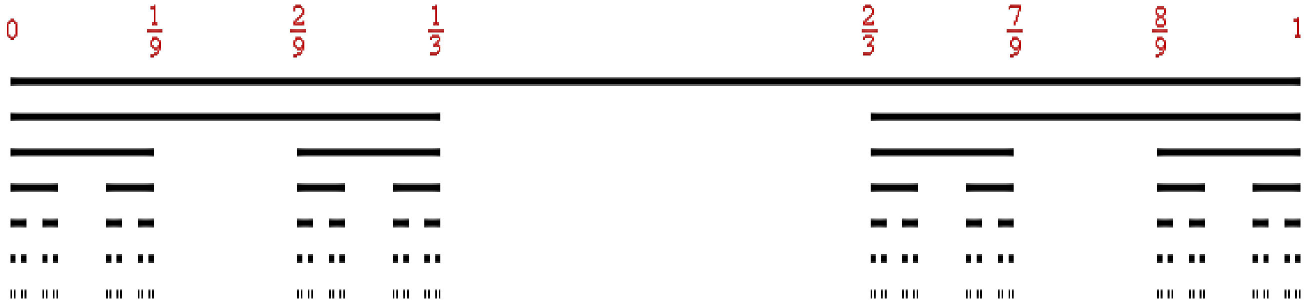


C_7



El conjunto de Cantor (geométricamente)

El conjunto de Cantor, C, es la intersección de esta colección de conjuntos encajados ($C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$) $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.



Algunas propiedades de C

1. C es compacto.
2. $m(C) = 0$.
3. $\mathrm{Card}(C) = c$.

Aplicación: $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. De hecho,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = c \quad \text{y} \quad \mathrm{Card}(\mathcal{L}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^c.$$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

La construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) se puede hacer de forma análoga considerando los intervalos semiabiertos $(a, b] = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^n$ y la premedida

$$m_0((a,b]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Extendiendo m_0 obtenemos la **medida de Lebesgue** en $\mathbb{R}^n$, que llamaremos también m, definida sobre la σ-**álgebra de Lebesgue en** $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$.

Algunas propiedades

1. Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\{x\} \in \mathcal{L}$ y $m(\{x\}) = 0$.
2. Si $A = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}^n$ conjunto numerable, entonces $A \in \mathcal{L}$ y $m(A) = 0$. En particular, $m(\mathbb{Q}^n) = 0$.
3. Si H es un espacio afín de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k < n$, entonces $m(H) = 0$.

Ejercicio: Si $H = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, a) : x_i \in \mathbb{R}\}$, entonces $m(H) = 0$.

Nota: Un medida μ sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F})$ con $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se dice **regular** si $\mu(K) < \infty$ para todo compacto K y además μ se caracteriza por

- $\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) : A \subset U$ y U es abierto$\}$, para $A \in \mathcal{F}$.
- $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A$ y K es compacto$\}$, para $A \in \mathcal{F}$.

Teorema: m es una medida regular

1. Sea $A \in \mathcal{L}$, $m(A) = \text{ínf}\{m(U) : U \supset A$ y U es abierto$\}$.
2. Sea $A \in \mathcal{L}$, $m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A$ y K es compacto$\}$.

Paso 1: $m(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} m((a_j, b_j)) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right\}$.

Objetivo 1: Mostrar ❶.

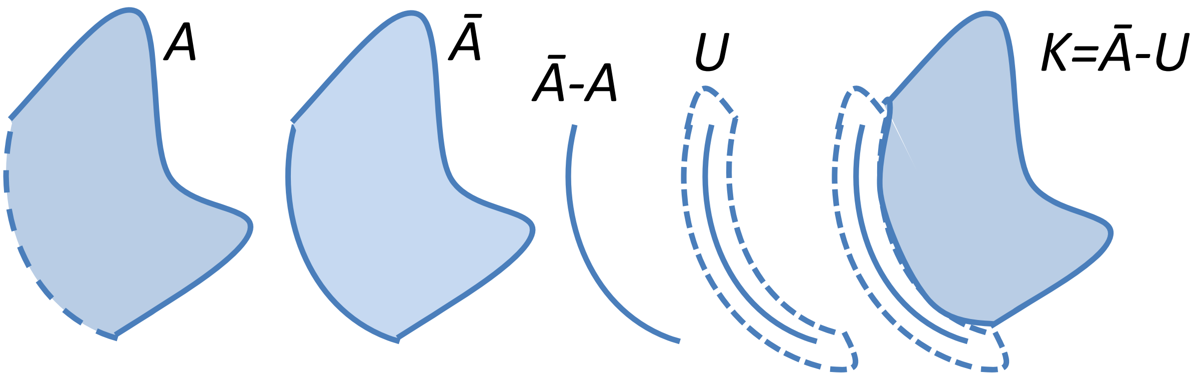
Objetivo 2: Mostrar ❷.

(a) A acotado.
- (a-1) A cerrado.
- (a-2) A no cerrado.

(b) A no acotado.
- (b-1) $m(A) < \infty$.
- (b-2) $m(A) = \infty$.

❷ $m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A$ y K es compacto$\}$.

(a-2) A acotado y no cerrado.



$\bar{A} - A \in \mathcal{L}$, y por ❶, para cada $\epsilon > 0$, existe U abierto con $\bar{A} - A \subset U$ y $m(U) - m(\bar{A} - A) \leq \epsilon$. Tomamos $K = \bar{A} - U$.

(i) K compacto.
(ii) $K \subset A$.
(iii) $m(A) - m(K) \leq \epsilon$.

Nota: La demostración es análoga en el caso n-dimensional.

Propiedades de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. El **conjunto trasladado** de A por x es

$$A + x = \{a + x : a \in A\}.$$

Proposición: La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones

Si $A \in \mathcal{L}$, entonces $A + x \in \mathcal{L}$ y $m(A + x) = m(A)$.

Paso 1: La σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, es invariante por traslaciones.

Paso 2: La aplicación

$$\begin{aligned} \nu_x : \mathcal{B} &\longrightarrow [0, \infty] \\ B &\longmapsto \nu_x(B) = m(B + x). \end{aligned}$$

es una medida sobre $\mathcal{B}$ (ejercicio) y verifica $\nu_x = m|_{\mathcal{B}}$.

Paso 3: Si $A \in \mathcal{L}$, entonces $A + x \in \mathcal{L}$ y $m(A + x) = m(A)$.

Pregunta: ¿Por qué no podemos utilizar el teorema de unicidad en el Paso 2 directamente para concluir que $\nu_x = m$ sobre $\mathcal{L}$?

Propiedades de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Proposición: Unicidad de las medidas invariantes por traslaciones

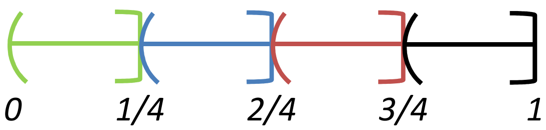
Si $\mu : \mathcal{B}$ ó $\mathcal{L} \to [0, \infty]$ es una medida invariante por traslaciones, entonces existe $k \geq 0$ tal que $\mu \equiv k\, m$ (m medida de Lebesgue).

Definimos $k = \mu(I_0) \geq 0$, donde $I_0 = (0, 1]^n = (0, 1] \times \cdots \times (0, 1]$.

Queremos ver que $\mu(I_z) = k\, m(I_z)$ para $z \in \{a, b, c, d, e\}$, donde:

(a) $I_a = (0, 1/m_1] \times \cdots \times (0, 1/m_n]$, con $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$.

Punto clave: $(0, 1] = \biguplus_{j_i=1}^{m_i} \left\{ x_{j_i}^i + (0, 1/m_i] \right\}$ (disjunta), con $x_{j_i}^i = (j - 1)/m_i$, para $j_i = 1, \ldots, m_i$ e $i = 1, \ldots, n$.



(b) $I_b = (0, r_1] \times \cdots \times (0, r_n]$, con $0 \leq r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ ($r_i = l_i/m_i$).

(c) $I_c = (0, b_1] \times \cdots \times (0, b_n]$, con $0 \leq b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

(d) $I_d = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$, con $a_i \leq b_i$ y $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

(e) I_e intervalo semiabierto (no necesariamente acotado).

Transformaciones ortogonales

Una matriz $n \times n$ T se dice **ortogonal** si $T\,T' = T'\,T = I$.

Recordamos algunas propiedades

1. $T^{-1} = T'$ (matriz traspuesta) y $\det(T) = \pm 1$.
2. La transformación lineal asociada $u(x) = T\,x$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ preserva el producto escalar en $\mathbb{R}^n$. Por tanto, es una isometría del espacio Euclídeo (una **rotation** o una **reflexión**).
3. El conjunto de matrices ortogonales $n \times n$ forman el **grupo ortogonal** $O(n)$. También diremos que $u \in O(n)$ si $u(x) = T\,x$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, con $T \in O(n)$ (u es una **transformación ortogonal** en $\mathbb{R}^n$).
4. Si $T \in O(2)$, $T = T_\alpha$ o $T = T_\alpha^-$, para algún α, donde

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T_\alpha^- = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

(rotación) (reflexión)

Proposición: m es invariante por transformaciones ortogonales

Si $u \in O(n)$ y $A \in \mathcal{L}$, entonces $u(A) \in \mathcal{L}$ y $m(u(A)) = m(A)$.

Paso 1: $\mathcal{B}$ es invariante por transformaciones ortogonales.

Paso 2: La aplicación

$$\begin{aligned} \nu_u : \mathcal{B} &\longrightarrow [0, \infty] \\ B &\longmapsto \nu_u(B) = m(u(B)). \end{aligned}$$

es una medida invariante por traslaciones.

Paso 3: $\nu_u = k\,m$, con $k = 1$, sobre $\mathcal{B}$.

Paso 4: Si $A \in \mathcal{L}$, entonces $u(A) \in \mathcal{L}$ y $m(u(A)) = m(A)$.

Corolario: m es invariante por traslaciones, rotaciones y reflexiones

Si A es congruente con B (A puede ser trasformado en B mediante traslaciones, rotaciones y reflexiones), entonces $m(A) = m(B)$.

Proposición: m y las transformaciones lineales

Sea $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal dada por una matriz T ($n \times n$). Si $A \in \mathcal{L}$, entonces $t(A) \in \mathcal{L}$ y $m(t(A)) = |\det(T)|\, m(A)$.

Caso a: $\det(T) = 0$.

Caso b: $\det(T) \neq 0$.

Paso b-1: Podemos suponer que $T = D$ (matriz diagonal).

Paso b-2: Si $d(x) = D\,x$ ($x \in \mathbb{R}^n$), la aplicación

$$\begin{aligned} \nu_d : \mathcal{B} &\longrightarrow [0, \infty] \\ B &\longmapsto \nu_d(B) = m(d(B)). \end{aligned}$$

es una medida invariante por traslaciones.

Paso b-3: $\nu_d = k\, m$ (sobre $\mathcal{B}$), con $k = m((0,1]^n) = |\det(D)|$.

Paso b-4: Si $A \in \mathcal{L}$, entonces $d(A) \in \mathcal{L}$ y $m(d(A)) = |\det(D)|\, m(A)$.

Las medidas μ cuyo dominio es la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se denominan **medidas de Borel**.

Idea: Al igual que en Probabilidad, si tenemos una medida de Borel finita μ, podemos definir la **función de distribución** de μ como

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La función de distribución F es creciente (no decreciente) y continua por la derecha. Además. $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$.

Teorema: medidas de Borel-Stieltjes

Sea $F : \mathbb{R}$ ó $\bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua por la derecha. Existe una única medida de Borel m_F tal que

$$m_F((a,b]) = F(b) - F(a), \quad \text{para todo } a < b \in \mathbb{R}.$$

La medida m_F se llama **medida de Borel-Stieltjes** asociada a F.

Nota: Si $F(x) = x$, tenemos que $m_F = m$ (medida de Lebesgue).

Teorema: medidas de Borel-Stieltjes

Sea $F : \mathbb{R}$ ó $\bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua por la derecha. Existe una única medida de Borel m_F tal que

$$m_F((a,b]) = F(b) - F(a), \quad \text{para todo } a < b \in \mathbb{R}.$$

Nota: La construcción es análoga a la de la medida de Lebesgue.

$$\mathcal{E} = \{\ (a,b],\ (a,\infty) \text{ y } \emptyset, \quad \text{para } -\infty \le a < b < \infty\}.$$

Para $I = (a,b] \in \mathcal{E}$, definimos $\mu_F(I) = F(b) - F(a)$.

$$\mathcal{A} = \{\text{Uniones finitas de intervalos semiabiertos disjuntos}\}.$$

$$\mu_F : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$$
$$A = \biguplus_{j=1}^{n} I_j \longmapsto \mu_F(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_F(I_j).$$

Teorema: μ_F es una medida σ-finita sobre el álgebra $\mathcal{A}$.

Ejercicios:

(a) ¿Por qué necesitamos que la función F sea creciente? ¿Y continua por la derecha?

(b) Calcula $m_F(\{x\})$, para $x \in \mathbb{R}$. ¿Cuándo se verifica que $m_F(\{x\}) = 0$?

(c) Consideramos la **función de Heavyside**, h,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0), \\ 1 & \text{si } x \in [0,\infty). \end{cases}$$

Describe la medida m_h, es decir, calcula $m_h(A)$, para todo $A \in \mathcal{B}$. ¿Cómo se llama esta medida?

Teorema: La medida de Borel-Stieltjes m_F es una medida regular.

Nota: Demostración igual que para la medida de Lebesgue.

Proposición: sobre la unicidad de las medidas de Borel-Stieltjes

Sean F, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones crecientes y continuas por la derecha.

$$m_F = m_G \iff F - G \text{ es constante.}$$

Teorema: caracterización de las medidas de Borel-Stieltjes

Sea μ una medida de Borel. Son equivalentes:

(a) μ es finita sobre compactos ($\mu(K) < \infty$ si K es compacto).

(b) Existe F (creciente y continua por la derecha) tal que $\mu = m_F$.

En (a) $\Rightarrow$ (b) podemos tomar

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\mu((x,0]) & \text{si } x < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Algunas observaciones finales

1. La teoría para la medida de Lebesgue y las medidas de Borel-Stieltjes se podría haber desarrollado usando los intervalos $[a, b)$ y funciones F continuas por la izquierda.
2. Si μ es una medida de Borel finita, $\mu = m_F$, con $F(x) = \mu((-\infty, x])$, la **función de distribución de** μ. (Esta función difiere de la definida en $(*)$ por la constante $\mu((-\infty, 0])$.)
   Pregunta: ¿Por qué necesitamos que la medida sea finita?
3. La función de distribución $F(x) = \mu((-\infty, x])$ caracteriza las medidas finitas, en particular las medidas de probabilidad.
4. Usando el Teorema de completación, podemos construir la medida $\bar{m}_F$ definida sobre toda la σ-álgebra de Lebesgue, $\mathcal{L}$. Esta medida recibe el nombre de **medida de Lebesgue-Stieltjes** (asociada a F).

TIM

Grado en Matemáticas

Tema 2
Integración en espacios de medida

Javier Cárcamo

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
javier.carcamo@uam.es

Tema 2: Integración en espacios de medida

Anti-imagen de una función

Cualquier aplicación $f : X \to Y$ induce otra $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}, \quad B \subset Y.$$

El conjunto $f^{-1}(B)$ se denomina la **anti-imagen** de B por f.

Notación alternativa: $f^{-1}(B) = \{f \in B\}$, para $B \subset Y$.

Ejercicio: La anti-imagen preserva las uniones, intersecciones, complementarios y conjuntos disjuntos.

(a) $\{B_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(Y)$, $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(b) $\{B_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(Y)$, $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(c) $B \subset Y$, $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

(d) Si $B_1, B_2 \subset Y$ disjuntos, $f^{-1}(B_1)$ y $f^{-1}(B_2)$ disjuntos.

Ejercicio: Si $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra en Y, entonces

$$f^{-1}(\mathcal{G}) = \{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{G}\} \text{ es } \sigma\text{-álgebra en } X.$$

Funciones medibles

Función medible: Sean $(X, \mathcal{F})$ y $(X', \mathcal{F}')$ dos espacios medibles. Una función $f : (X, \mathcal{F}) \to (X', \mathcal{F}')$ se dice que es **$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-medible** si para todo $B \in \mathcal{F}'$, se tiene que $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Proposición: (Composición de funciones medibles.) Si $f : (X, \mathcal{F}) \to (X', \mathcal{F}')$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-medible y $g : (X', \mathcal{F}') \to (X'', \mathcal{F}'')$ es $\mathcal{F}'/\mathcal{F}''$-medible, entonces $g \circ f$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}''$-medible.

Proposición: $f : (X, \mathcal{F}) \to (X', \mathcal{F}')$. Si $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{C}')$, entonces

f es $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-medible si y solo si para todo $C \in \mathcal{C}'$, $f^{-1}(C) \in \mathcal{F}$.

Funciones con valores reales

- Una función $f : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$ se dice que es **$\mathcal{F}$-medible** o simplemente **medible** si es $\mathcal{F}/\mathcal{B}$-medible.
- Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$ se dice **medible Borel** (resp. **medible Lebesgue**) si es $\mathcal{B}/\mathcal{B}$-medible (resp. $\mathcal{L}/\mathcal{B}$-medible).

Nota: Si f medible Borel, entonces f medible Lebesgue.

Proposición: Sea $f : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:

1. f es $\mathcal{F}$-medible (i.e., $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, para todo $B \in \mathcal{B}$.).
2. $f^{-1}((a, \infty)) = \{f > a\} = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
3. $f^{-1}([a, \infty)) = \{f \geq a\} = \{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{F}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
4. $f^{-1}((-\infty, a)) = \{f < a\} = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
5. $f^{-1}((-\infty, a]) = \{f \leq a\} = \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{F}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
6. $f^{-1}(I) = \{f \in I\} \in \mathcal{F}$, para cada I intervalo.
7. $f^{-1}(U) = \{f \in U\} \in \mathcal{F}$, para cada U abierto.
8. $f^{-1}(K) = \{f \in K\} \in \mathcal{F}$, para cada K cerrado.

Observación: El resultado anterior es válido si substituimos "$a \in \mathbb{R}$" por "$a \in \mathbb{Q}$".

Nota: $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \to \overline{\mathbb{R}}$ medible se llama **variable aleatoria**.

Proposición: (Continuidad y medibilidad.)
Consideremos $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$, donde τ y τ' son dos topologías y sean $\mathcal{B}_\tau$ y $\mathcal{B}_{\tau'}$ sus σ-álgebras Borelianas asociadas.

Si f es τ/τ' continua, entonces f es $\mathcal{B}_\tau/\mathcal{B}_{\tau'}$-medible.

Aplicación: Si $f : (X, \mathcal{F}) \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, entonces las siguientes funciones también son medibles:

- f^n $(n \in \mathbb{N})$.
- $|f|^\alpha$ $(\alpha > 0)$.
- λf $(\lambda \in \mathbb{R})$.
- e^f.
- $f^+ = \max\{f, 0\}$ (**parte positiva de** f).
- $f^- = \max\{-f, 0\}$ (**parte negativa de** f).
- $\cdots$

Observación: El recíproco de la proposición anterior no es cierto.

Ejemplo: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces f es medible Borel.

(a) Límite inferior y superior de sucesiones de números reales.
(b) Límite inferior y superior de sucesiones de funciones.
(c) Límite inferior y superior de sucesiones de conjuntos.

(a) Límite inferior y superior de sucesiones de números reales

Sea $\{a_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Formamos la sucesión:

$$\left\{\begin{array}{lcl} b_1 & = & \sup_{k\geq 1} a_k \\ b_2 & = & \sup_{k\geq 2} a_k \\ \vdots & & \vdots \\ b_n & = & \sup_{k\geq n} a_k \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$$

$\{b_n\}$ es una sucesión decreciente en $\overline{\mathbb{R}}$. Por tanto, existe $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\geq 1} b_n$. Se define el **límite superior de** $\{a_n\}$ como

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right).$$

Sea $\{a_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Formamos la sucesión:

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1 & = & \inf_{k\geq 1} a_k \\ c_2 & = & \inf_{k\geq 2} a_k \\ \vdots & & \vdots \\ c_n & = & \inf_{k\geq n} a_k \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \quad c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots \leq c_n \leq \cdots$$

$\{c_n\}$ es una sucesión creciente en $\overline{\mathbb{R}}$. Por tanto, existe $\lim_{n\to\infty} c_n = \sup_{n\geq 1} b_n$. Se define el **límite inferior de** $\{a_n\}$ como

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right).$$

Ejercicio: Calcular el límite superior e inferior de las siguientes sucesiones: $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$; $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$; $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_{2n-1} = 1$ y $a_{2n} = 0$.

Propiedades: (Entendemos que $n \to \infty$.)

1. $\liminf a_n = -\limsup(-a_n)$; $\quad \limsup a_n = -\liminf(-a_n)$.
2. $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.
3. $\liminf a_n = \limsup a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff$ existe $\lim a_n = l$.
4. $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$ con $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces
   - $\limsup a_n \leq \limsup b_n$,
   - $\liminf a_n \leq \liminf b_n$.
5. $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, entonces
   - $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$,
   - $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$,

   siempre y cuando $\{a_n + b_n\}$ esté bien definida y los miembros de la derecha estén bien definidos.

(b) Límite inferior y superior de sucesiones de funciones

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones con $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se define la función **límite superior de** $\{f_n\}$ como $\limsup_{n\to\infty} f_n$ tal que

$$\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in X.$$

Análogamente, el **límite inferior de** $\{f_n\}$ es $\liminf_{n\to\infty} f_n$ tal que

$$\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in X.$$

(c) Límite inferior y superior de sucesiones de conjuntos.

X conjunto. $(\mathcal{P}(X), \subset)$ parcialmente ordenado. $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$

- $A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, $i \in I$. $\bigcup_{i\in I} A_i$ es cota superior de $\{A_i\}_{i\in I}$.
- Si $A_i \subset B$, $i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \subset B$. $\bigcup_{i\in I} A_i$ es la menor cota superior.

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \sup_{i\in I} A_i. \quad \left(\text{Análogamente} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \inf_{i\in I} A_i.\right)$$

Definición: Dada $\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$, se definen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} A_k\right).$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} A_k\right).$$

Propiedades: Entendemos que $n \to \infty$.

1. $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow \limsup A_n$ y $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \uparrow \liminf A_n$.
2. **Caracterización por elementos:**
   - $x \in \limsup A_n \iff x \in A_n$ para infinitos n-s.
   - $x \in \liminf A_n \iff x \in A_n$ $n \geq n_0$ (para casi todo n).
3. **Interpretación:** $\{A_n\} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \limsup A_n, \liminf A_n \in \mathcal{F}$.
   - $\limsup A_n =$ los puntos que están en infinitos A_n.
   - $\liminf A_n =$los puntos que están en casi todos los A_n (están en todos salvo en un número finito de ellos).
4. $\limsup A_n = (\liminf A_n^c)^c$, $\liminf A_n = (\limsup A_n^c)^c$.
5. $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Definición: $\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$. $A_n \to A$ si $\limsup A_n = \liminf A_n = A$.

Ejercicio: Si $A_n \uparrow A$ ó $A_n \downarrow A$, entonces $A_n \to A$.

Proposición: (Operaciones con funciones medibles.)

Sean $f_n : (X, \mathcal{F}) \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \geq 1)$ funciones $\mathcal{F}$-medibles. Las siguientes funciones también son $\mathcal{F}$-medibles:

(a) $\sup_n f_n$.

(b) $\inf_n f_n$.

(c) $\limsup_n f_n$

(d) $\liminf_n f_n$

(e) Si existe $f = \lim_n f_n$, entonces f es $\mathcal{F}$-medible.

Ejemplos básicos

(1) **Constantes:** Si $f \equiv a$ constante, entonces f es medible.

(2) **Indicadores:** Si $A \subset X$, se llama **indicador de** A a la función $1_A : X \to \mathbb{R}$ tal que $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Pregunta: ¿Cuándo 1_A es una función medible?

(3) **Funciones simples:** Una función $s : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ se llama **función simple** si es medible y $s(X)$ es un conjunto finito.

Propiedad: Sea $s : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ con $s(X) = \{a_1, \ldots, a_k\}$.

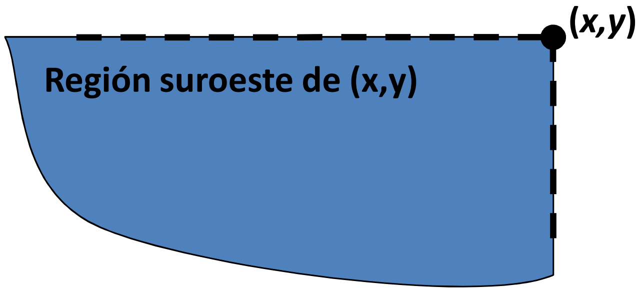
s es simple si y solo si $s^{-1}(\{a_i\}) = \{s = a_i\} \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, k$.

Nota: Si $s : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ es simple y $s(X) = \{a_1, \ldots, a_k\}$, entonces $s = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{\{s=a_i\}}$ (**representación estándar de** s). (Con esta representación es posible que algún valor a_i sea 0.)

Una función $f : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}^n$(o $\overline{\mathbb{R}}^n$) se dice que es $\mathcal{F}$-**medible** o simplemente **medible** si es $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-medible. Es decir, si $\{f \in B\} \in \mathcal{F}$, para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la **región suroeste generada por** x:

$$S_x = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n].$$



Observación: $\mathcal{C} = \{S_x : x \in \mathbb{R}^n\}$ genera a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ($\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Por tanto,

$f : X \to \mathbb{R}^n$ medible si y solo si $\{f \in S_x\} \in \mathcal{F}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición: $f = (f_1, \dots, f_n) : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}^n$ aplicación.

f es medible si y solo si $f_1, \dots, f_n$ son medibles.

Corolario: Sean $f_1, \dots, f_n$ medibles sobre $(X, \mathcal{F})$ con valores en $\mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible (en particular continua). Se tiene que $h = g(f_1, \dots, f_n)$ es medible.

Aplicación: Sean $f_1, \dots, f_n$ funciones medibles. Las siguientes funciones también son medibles:

- $\sum f_i$, $\sum f_i^2$, $\prod f_i$, $e^{f_1 + \cdots + f_n}$.
- $\max\{f_1, \dots, f_n\}$, $\min\{f_1, \dots, f_n\}$.
- f medible si y solo si f^+ y f^- son medibles ($f = f^+ - f^-$)

Nota: $X = (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \to \mathbb{R}^n$(o $\overline{\mathbb{R}}^n$) medible se llama **vector aleatorio**.

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Una propiedad P sobre X se verifica **en casi todo punto** ("se verifica P a.e. (*almost everywhere*)") si se verifica P salvo en un conjunto μ-nulo. Es decir, $N = \{x \in X : x \text{ no verifica P}\} \in \mathcal{F}$ y $\mu(N) = 0$.

Proposición: Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida completo y $f : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$. Si $f = 0$ a.e., entonces f es $\mathcal{F}$- medible.

Corolario: Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio completo y $f, g : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$, con f función $\mathcal{F}$-medible. Si $g = f$ a.e., entonces g es $\mathcal{F}$- medible.

Ejemplo: La **función de Dirichlet** es medible Lebesgue.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Nota: Esta función *no* es integrable Riemann.

Pregunta: ¿Es la función f medible Borel?

Recordamos que una función $s : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ se llama **función simple** si es medible y $s(X)$ es un conjunto finito.

Operaciones algebraicas con funciones simples

Proposición: Sean s y t funciones simples sobre $(X, \mathcal{F})$. Las siguientes funciones también son simples:

(a) $s + t$.

(b) $s - t$.

(c) $c\,s$, donde c es una constante.

(d) st.

(e) $1/t$.

(f) s/t.

(En (e) y (f) se supone que t no toma el valor 0.)

σ-álgebras generadas por funciones

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}}$) una aplicación. La colección

$$\sigma(f) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\} \quad \text{es una } \sigma\text{-álgebra}$$

denominada **σ-álgebra asociada o generada por** f.

Observación: $f : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ es medibles si y solo si $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$.
($\sigma(f)$ es la mínima σ-álgebra sobre X que hace medible a f.)

Los conjuntos de la forma $f^{-1}(B)$, con $B \in \mathcal{B}$, se llaman **conjuntos asociados a** f.

Sea $\{f_i : i \in I\}$ con $f_i : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$.

$$\sigma(f_i : i \in I) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(f_i)\right)$$

es la mínima σ-álgebra sobre X que hace medibles a todas las f_i simultáneamente.

El teorema fundamental de aproximación

Teorema fundamental de aproximación

Sea $f : X \to [0, \infty]$ una función no negativa.
Existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ verificando:

(a) Las s_n son $\sigma(f)$-medibles.

(b) $0 \leq s_n \leq s_{n+1}$, para todo n ($\{s_n\}$ es una sucesión creciente).

(c) $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

(Existe $\{s_n\}$ funciones simples $\sigma(f)$-medibles con $0 \leq s_n \uparrow f$.)

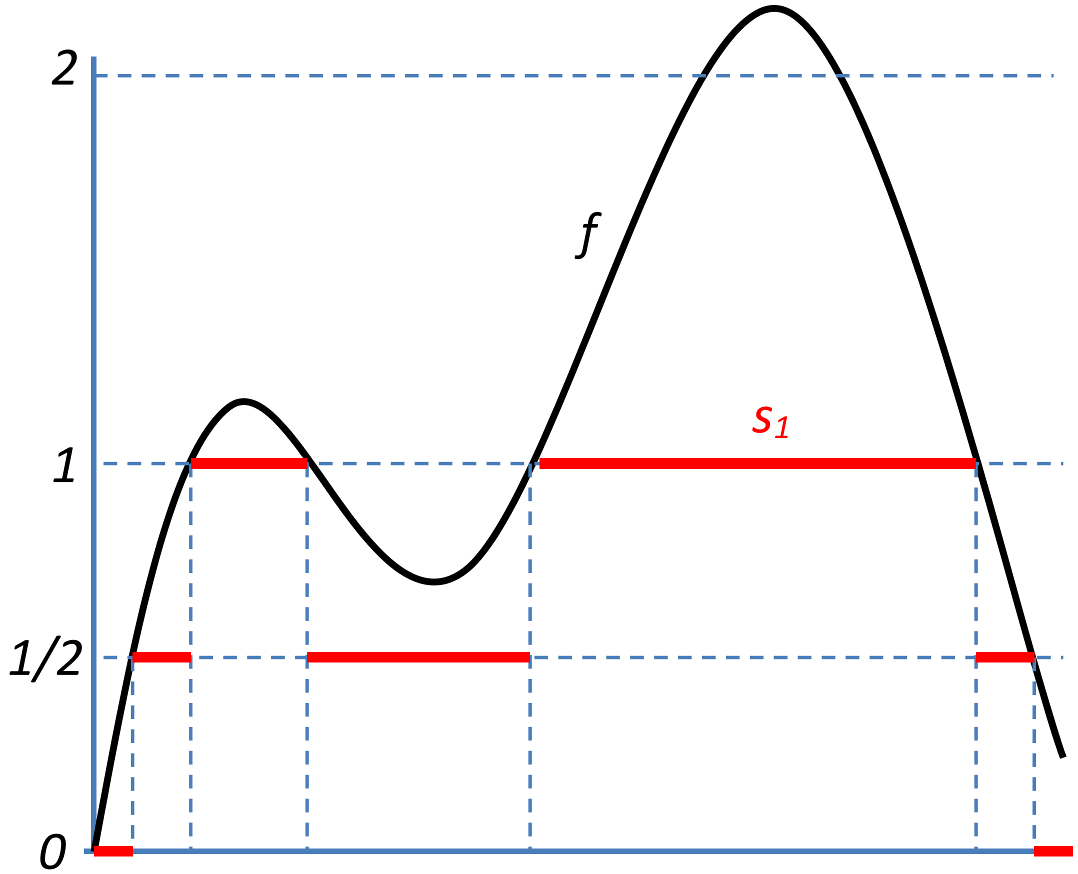
Construcción: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, definimos

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{q-1}{2^n}, & \text{si} \quad \frac{q-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{q}{2^n}, \quad q = 1, \ldots, n2^n, \\ n, & \text{si} \quad f(x) \geq n. \end{cases}$$

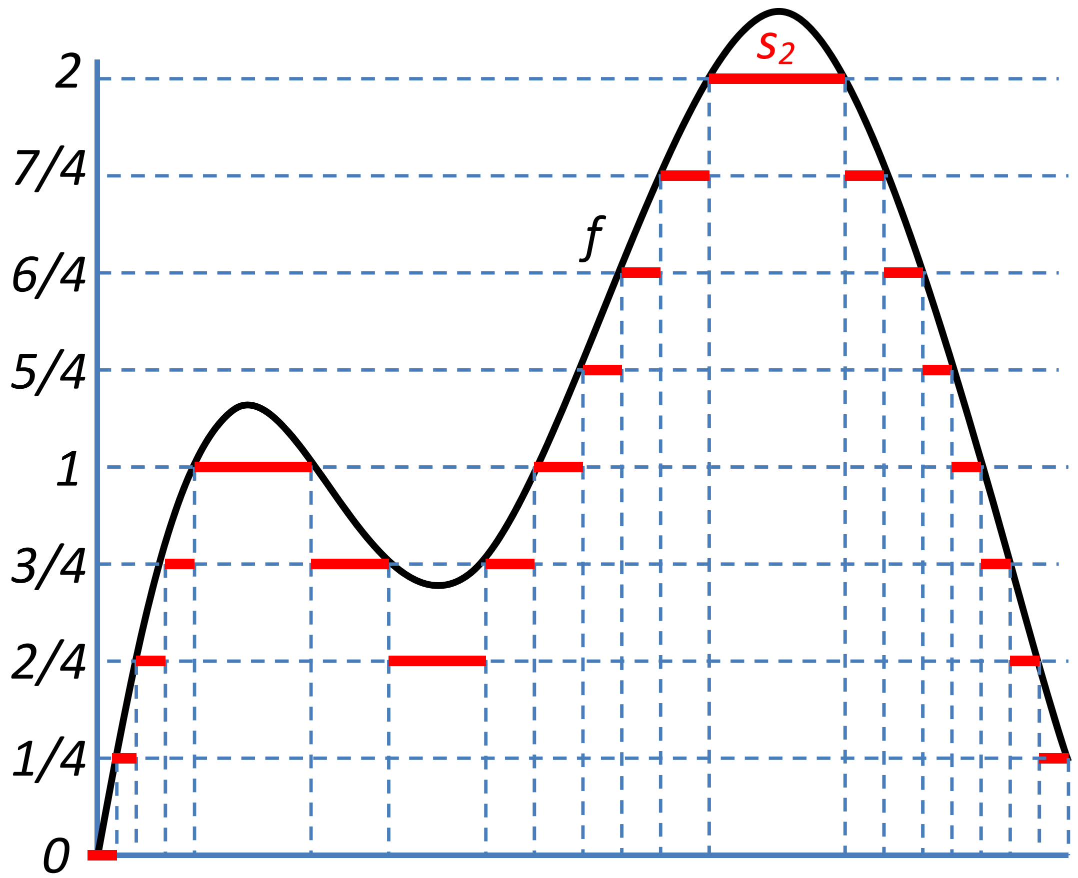
Es decir,

$$s_n = \sum_{q=1}^{n2^n} \frac{q-1}{2^n} 1_{\{\frac{q-1}{2^n} \leq f < \frac{q}{2^n}\}} + n\, 1_{\{f \geq n\}}.$$

El teorema fundamental de aproximación



El teorema fundamental de aproximación



Teorema fundamental de aproximación

Dada $f : X \to [0, \infty]$, $\exists\{s_n\}$ simples $\sigma(f)$-medibles con $0 \leq s_n \uparrow f$.

Construcción: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, definimos

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{q-1}{2^n}, & \text{si} \quad \frac{q-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{q}{2^n}, \quad q = 1, \dots, n2^n, \\ n, & \text{si} \quad f(x) \geq n. \end{cases}$$

Objetivo 1: s_n son simples y $\sigma(f)$-medibles.

Nota: Sobre el conjunto $\{f \leq n\}$, se tiene $0 \leq f - s_n \leq 1/2^n$.

Objetivo 2: Para todo $x \in X$, se tiene $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.

(a) Caso $f(x) < \infty$.
(b) Caso $f(x) = \infty$.

Nota: Se tiene que $2\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor$, $x \geq 0$.

Objetivo 3: $s_n \leq s_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

Teorema fundamental de aproximación

Dada $f : X \to [0, \infty]$, $\exists\{s_n\}$ simples $\sigma(f)$-medibles con $0 \leq s_n \uparrow f$.

Algunas observaciones sobre la demostración:

1. La convergencia $s_n \to f$ es uniforme sobre cualquier conjunto sobre el que f esté acotada.
2. Si f es $\mathcal{F}$-medible, entonces $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$ y las funciones s_n son también $\mathcal{F}$-medibles.
3. Se pueden considerar otros aproximantes "más sencillos":

$$t_n(x) = \begin{cases} \frac{q-1}{n}, & \text{si} \quad \frac{q-1}{n} \leq f(x) < \frac{q}{n}, \quad q = 1, \dots, n^2, \\ n, & \text{si} \quad f(x) \geq n. \end{cases}$$

Sin embargo, $\{t_n\}$ así definida *no* es necesariamente creciente. Esto se puede arreglar tomando $s_n = \max\{t_1, \dots, t_n\}$ $(n \geq 1)$.

Pregunta: ¿Qué diferencias observas con la aproximación que se hace para calcular la integral de Riemann?

Corolario 1 (del teorema fundamental de aproximación)

Sea $f : X \to [-\infty, 0]$ una función no positiva.
Existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ verificando:

(a) Las s_n son $\sigma(f)$-medibles.

(b) $s_{n+1} \leq s_n \leq 0$, para todo n ($\{s_n\}$ es una sucesión decreciente).

(c) $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

(Existe $\{s_n\}$ funciones simples $\sigma(f)$-medibles con $0 \geq s_n \downarrow f$.)

Corolario 2 (del teorema fundamental de aproximación)

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función.
Existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ verificando:

(a) Las s_n son $\sigma(f)$-medibles.

(b) $|s_n| \leq |f|$, para todo n. (De hecho $0 \leq |s_n| \uparrow |f|$.)

(c) $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Operaciones algebraicas con funciones medibles

Proposición: Sean $f, g : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ ó $\overline{\mathbb{R}}$ funciones $\mathcal{F}$-medibles y c constante. Las siguientes funciones también son $\mathcal{F}$-medibles:

(a) $f + g$.

(b) $f - g$.

(c) $c\,f$.

(d) fg.

(e) $1/g$.

(f) f/g.

(Supuesto que estén bien definidas, es decir, que no aparezcan expresiones del tipo $\infty - \infty$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$ ó $a/0$.)

Nota: Para la demostración también se puede usar el teorema fundamental de aproximación junto con la estabilidad de las funciones medibles respecto a los límites.

Observación: Sean $f, g, h : (X, \mathcal{F}) \to \bar{\mathbb{R}}$ funciones $\mathcal{F}$-medibles.

$$\{f = g\}, \{f < g\}, \{f \geq g\}, \{f + g \leq x\}, \{f \geq g \geq h\}, \dots \in \mathcal{F}.$$

Construcción de la integral de una función medible

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}$-medible. Queremos definir la **integral de la función f (respecto de la medida μ)**.

Notación: Integral de f respecto de la medida μ.

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x) = \int_X f(x) \, \mu(dx).$$

Cuando no haya posibilidad de confusión también escribiremos

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f = \int f.$$

Nota: Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad y $X : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ variable aleatoria, $\mathrm{E}X = \int_\Omega X \, d\mathrm{P}$ (la **esperanza matemática** de X).

La construcción se realiza en tres etapas:

- **Caso 1:** Funciones simples no negativas (positivas).
- **Caso 2:** Extensión a funciones medibles positivas.
- **Caso 3:** Extensión a cualquier función medible.

Caso 1: Integral de una función simple positiva

Sea s una función simple y positiva,

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}, \quad a_i \geq 0, \quad A_i \in \mathcal{F}.$$

Definimos la **integral de s (respecto de la medida μ)** como

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Algunas observaciones:

- Por convenio se entiende que $0 \cdot \infty = 0$.
- $\int s \, d\mu \in [0, \infty]$. (La integral $\int s \, d\mu$ puede ser igual a ∞.)
- Si $s = c \geq 0$ constante, entonces $\int s = c\mu(X)$.
- $\int 1_A = \mu(A)$, para $A \in \mathcal{F}$.

Caso 1: Integral de una función simple positiva

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \quad \Longrightarrow \quad \int_X s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Propiedades de la integral de funciones simples positivas

Sean s, t funciones simples positivas.

1. **Linealidad:**
   (a) $\int (cs) = c \int s$, para todo $c \geq 0$.
   (b) $\int (s+t) = \int s + \int t$.
2. **Monotonicidad:** Si $s \leq t$, entonces $\int s \leq \int t$.

Pregunta: ¿Cuál es la integral de la función de Dirichlet respecto de la medida de Lebesgue?

Caso 2: Integral de una función medible y positiva

Sea $f : (X, \mathcal{F}, \mu) \to [0, \infty]$ una función $\mathcal{F}$-medible positiva. Definimos la **integral de f (respecto de la medida μ)** como

$$\int_X f\, d\mu = \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s \text{ simple}}} \int_X s\, d\mu.$$

Observaciones:

- Esta definición es consistente con la anterior. Es decir, si f es simple, ambas definiciones coinciden.
- El TFA asegura que para $f \geq 0$, existe $\{s_n\}$ simples tal que $0 \leq s_n \uparrow f$. Podríamos haber definido la integral de f como:

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X s_n\, d\mu, \quad \text{con } 0 \leq s_n \uparrow f \text{ (simples)}.$$

(Estas dos definiciones son equivalentes debido al TCM.)

Caso 2: Integral de una función medible y positiva

Ejercicio: Sea $A \in \mathcal{F}$. Consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad x \in A, \\ 0, & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

(i) Muestra que $f : (X, \mathcal{F}) \to [0, \infty]$ es una función $\mathcal{F}$-medible.
(ii) Usa la segunda definición de integral (como límite de integrales de funciones simples) para calcular $\int f$.

Observación: Comenzaremos con la definición de la integral dada a través del supremo. La propiedad 2 (teorema de la convergencia monótona) de la siguiente hoja muestra que esta definición es equivalente a la definición de la integral como límite de funciones simples.

$$f \geq 0 \text{ medible} \quad \Longrightarrow \quad \int_X f\, d\mu = \sup_{\substack{0 \leq s \leq f \\ s \text{ simple}}} \int_X s\, d\mu.$$

Propiedades de la integral de funciones medibles positivas

Sean $f, g : (X, \mathcal{F}, \mu) \to [0, \infty]$ funciones positivas $\mathcal{F}$-medibles.

1. **Monotonicidad:** Si $f \leq g$, entonces $\int f \leq \int g$.
2. **Teorema de convergencia monótona (TCM):**
   Si $\{f_n\}$ funciones medibles tales que $0 \leq f_n \uparrow f$, entonces
   $$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$
3. **Linealidad:**
   (a) $\int (cf) = c \int f$, para todo $c \geq 0$ constante.
   (b) $\int (f + g) = \int f + \int g$.
4. Si $\int f < \infty$, entonces $\mu(\{f = \infty\}) = 0$ (i.e., $f < \infty$ a.e.).
5. $\int f = 0$ si y solo si $f = 0$ a.e.

Nota: En general si $f_n \to f$, puede ocurrir que $\int f_n \not\to \int f$.

Ejemplos: Calcula $\lim \int f_n$ y $\int \lim f_n$ para $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

(a) $f_n = 1_{(n,n+1)}$, (b) $f_n = n\, 1_{(0,1/n)}$.

Teorema de convergencia monótona (TCM)

Si $\{f_n\}$ son funciones medibles tales que $0 \leq f_n \uparrow f$, entonces

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Paso 1: Existe el límite $\lim \int f_n$.

Paso 2: $\lim \int f_n \leq \int f$.

Paso 3: Para $\alpha \in (0,1)$ y $0 \leq s \leq f$ (función simple cualquiera),

$$E_n = \{f_n \geq \alpha\, s\} = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\, s(x)\}, \quad n \geq 1.$$

(a) $E_n \uparrow X$.

(b) $\int f_n \geq \alpha \int (s 1_{E_n})$.

(c) $\lim \int f_n \geq \alpha \int s$.

(d) $\lim \int f_n \geq \int f$.

Aplicación: Sea $f \geq 0$ medible con $f(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$. Mostrar

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, \mu(\{f = x_n\}).$$

Corolario 1 del TCM: Paso de la serie en la integral ($f \geq 0$)

Sean $f_n : X \to [0,\infty]$ ($n \geq 1$) funciones medibles positivas.

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Idea: Consideramos $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ($n \geq 1$).

Paso 1: La función $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es medible.

Paso 2: Aplicamos el TCM a la sucesión g_n.

Sea $f \geq 0$ medible y $A \in \mathcal{F}$. La **integral indefinida de f sobre A**

$$\int_A f\, d\mu = \int_X f\, 1_A\, d\mu.$$

Nota: La definición es igual en el caso en el que f no sea positiva.

Corolario 2 del TCM: Funciones de μ-densidad

Sea $f : X \to [0, \infty]$ una función medible positiva. La aplicación

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{F} &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\longmapsto \nu(A) = \int_A f\, d\mu, \end{aligned}$$

es una medida sobre $(X, \mathcal{F})$. Se denota $d\nu = f\, d\mu$ y f se denomina la **función de μ-densidad** de la medida ν.

Nota: Si $\mu = m$ (medida de Lebesgue), se dice que f es la **densidad** de ν. Si además $\int f\, dm = 1$, entonces f se llama **densidad de probabilidad**. **Pregunta:** ¿Qué ocurre si $f \equiv 1$?

Caso 3: Integral de una función medible

Sea $f : (X, \mathcal{F}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\mathcal{F}$-medible.

$$f = f^+ - f^- \quad \text{con} \quad f^+ \geq 0 \quad \text{y} \quad f^- \geq 0 \quad (\mathcal{F}\text{-medibles}).$$

Si $\int f^+ < \infty$ ó $\int f^- < \infty$, se dice que f **tiene integral** y se define la **integral de f (respecto de la medida μ)** como

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu.$$

En particular, si $\int f^+ < \infty$ y $\int f^- < \infty$, entonces $\int f < \infty$ y se dice que f es **integrable**. Se denota $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ o $f \in \mathcal{L}^1$.

Nota: Si $\int f^+ = \infty$ y $\int f^- = \infty$, entonces $\int f$ no está definida y se dice que f **no tiene integral**.

Observación: La definición es consistente con las anteriores.

Caso 3: Integral de una función medible

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu.$$

Observación: $f \in \mathcal{L}^1$ si y sólo si $\int |f| < \infty$.

Ejemplo: Si f es medible y toma los valores $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$, entonces

- $f \in \mathcal{L}^1 \iff \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,\mu(\{f = x_n\}) < \infty.$
- Si $f \in \mathcal{L}^1$, entonces $\displaystyle\int_X f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\,\mu(\{f = x_n\}).$

Propiedades de la integral de funciones medibles

1. Si f tiene integral, entonces $\int f \in \bar{\mathbb{R}}$.
2. $f \in \mathcal{L}^1$ si y sólo si $\int f \in \mathbb{R}$.
3. **Linealidad:**
   (a) Si f tiene integral, entonces cf tiene integral, para todo $c \in \mathbb{R}$ y $\int (cf) = c \int f$.
   (b) Si $f + g$ está bien definida y
   $\int f^+ < \infty$, $\int g^+ < \infty$ ó $\int f^- < \infty$, $\int g^- < \infty$,
   entonces $f + g$ tiene integral y $\int (f + g) = \int f + \int g$.

   En particular, si f, $g \in \mathcal{L}^1$ y toman valores en $\mathbb{R}$, para todo a, $b \in \mathbb{R}$, tenemos $af + bg \in \mathcal{L}^1$ y $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$.
4. **Monotonicidad:** Si f, g tienen integral y $f \le g$, entonces $\int f \le \int g$.

   En particular, si f tiene integral, entonces $\left|\int f\right| \le \int |f|$.

El espacio $L^1 = L^1(\mu)$

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \left\{ f : (X, \mathcal{F}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}} : \int_X |f| \, d\mu < \infty \right\} \quad \text{(esp. vectorial sobre } \mathbb{R}\text{)}$$

(Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $af + bg \in \mathcal{L}^1(\mu)$.)

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu, \qquad f \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

$\| \bullet \|_1$ es una **seminorma**: Para $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica

1. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ (desigualdad triangular).
2. $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$.

Si identificamos $f \sim g$ si y sólo si $f - g = 0$ a.e., entonces

$(L^1 = L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu)/\sim, \| \bullet \|_1)$ es un espacio normado.

Convergencia en L^1:

$$f_n \to f \text{ en } L^1 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_1 \to 0 \Leftrightarrow \int |f_n - f| \to 0.$$

El método de la cadena ascendente

El TFA y la construcción de la integral es la base de un método de demostración que se conoce como el **método de la cadena ascendente (MCA)**.

Problema: Queremos mostrar que se verifica una propiedad $\mathcal{P}$, relacionada con integrales de funciones.

El MCA consiste en seguir los pasos siguientes:

1. **Indicadores:** Se prueba que si $f = 1_A$, con $A \in \mathcal{F}$, entonces f verifica $\mathcal{P}$.
2. **Funciones simples:** Se prueba que si $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ simple y positiva, entonces f verifica $\mathcal{P}$.
3. **Funciones positivas:** Si $f \geq 0$ medible, se usa el TFA para aproximar f por funciones simples y se usa el paso anterior. En este punto en ocasiones también se apela al TCM.
4. **Caso general:** Si f medible real cualquiera, se escribe como $f = f^+ - f^-$ y se usa el punto anterior y la linealidad de la integral para mostrar que verifica $\mathcal{P}$.

Ejercicio: Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y ν medida sobre $(X, \mathcal{F})$ con μ-densidad f (es decir, $d\nu = f\, d\mu$). Usar el MCA para mostrar que cualquier función medible g verifica

$$\int_X g\, d\nu = \int_X g\, f\, d\mu.$$

(1) $g = 1_A$, con $A \in \mathcal{F}$.

(2) $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ simple y positiva.

(3) $g \geq 0$ medible.

(4) g medible real cualquiera.

Idea: En muchos situaciones en matemáticas surge el problema de pasar un límite dentro de una integral.

Problema: Dada $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles, encontrar condiciones que garanticen que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu.$$

Veremos 3 teoremas fundamentales que aparecen constantemente en innumerables áreas y son de gran utilidad para un matemático.

1. **El teorema de la convergencia monótona**
2. **El lema de Fatou-Lebesgue**
3. **El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue**

Objetivos: Entenderlos, saber aplicarlos correctamente y manejarlos con soltura es uno de los objetivos del curso.

Teorema de la convergencia monótona (TCM)

Sean f_n $(n \geq 1)$ funciones medibles.

(a) **Ascendente:** Si $f_n \uparrow f$ y existe k tal que $f_k^- \in \mathcal{L}^1$, entonces

(a-1) $f_k, f_{k+1}, \ldots, f$ tienen integral.

(a-2) $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$

(b) **Descendente:** Si $f_n \downarrow f$ y existe k tal que $f_k^+ \in \mathcal{L}^1$, entonces

(b-1) $f_k, f_{k+1}, \ldots, f$ tienen integral.

(b-2) $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$

Nota:

(i) Si $0 \leq f_n \uparrow f$, se tiene $\int f_n \uparrow \int f$.

(ii) Si $0 \geq f_n \downarrow f$, se tiene $\int f_n \downarrow \int f$.

Lema: Teorema de la convergencia monótona descendente (TCMD)

Sean $\{f_n\}$ funciones medibles tales que $0 \leq f_n \downarrow f$. Si existe un k tal que $\int f_k < \infty$, entonces

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Idea clave lema: Aplicar el TCM a $g_n = f_k - f_n$ $(n \geq k)$.

Demostración del TCM (apartado (a))

Paso 1: Mostrar que $f^-, f_n^- \leq f_k^-$, para $n \geq k$.

Objetivo 1: Demostrar el apartado (a-1).

Paso 2: Si $f_n \uparrow f$, entonces $0 \leq f_n^+ \uparrow f^+$ y $0 \leq f_n^- \downarrow f^-$.

Objetivo 2: Mostrar (a-2) usando el lema previo.

Ejercicio: Demostrar el apartado (b) del TCM.

Lema de Fatou-Lebesgue (LF)

Sean f_n $(n \geq 1)$, g y h funciones medibles.

(a) Si $f_n \leq g$ $(n \geq 1)$ y $g^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$, entonces

(a-1) f_n para todo $n \geq 1$ y $\limsup f_n$ tienen integral.

(a-2) $\displaystyle\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$

(b) Si $f_n \geq h$ para todo $n \geq 1$ y $h^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$, entonces

(b-1) f_n para todo $n \geq 1$ y $\liminf f_n$ tienen integral.

(b-2) $\displaystyle\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$

Nota:

(i) Si $f_n \leq 0$, se tiene $\int \limsup f_n \geq \limsup \int f_n$.

(ii) Si $f_n \geq 0$, se tiene $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

Demostración del LF (apartado (a))

Idea clave: $g_n = \sup_{k\geq n} f_k \downarrow \limsup f_n$.

Paso 1: Mostrar que $f_n^+, g_n^+, (\limsup f_n)^+ \leq g^+$ $(n \geq 1)$.

Objetivo 1: Demostrar (a-1) (f_n y $\limsup f_n$ tienen integral).

Objetivo 2: Aplicar el TCMD a g_n para mostrar (a-2).

Demostración del LF (apartado (b))

Idea clave: Aplicar el LF (a) a las funciones $\tilde{f}_n = -f_n$ $(n \geq 1)$.

Ejercicio: Demostrar el apartado (b) del LF siguiendo los pasos de la prueba de (a) y usando el TCM (ascendente).

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (TCD)

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles. Supongamos que

(1) **Convergencia:** $f_n \to f$.

(2) **Dominancia:** existe $g \in \mathcal{L}^1$ tal que $|f_n| \leq g$, $n \geq 1$.

Entonces, se tiene:

(a) $f_1, f_2, \ldots, f \in \mathcal{L}^1$.

(b) $\displaystyle\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

Objetivo 1: Mostrar que $f_1, f_2, \ldots, f \in \mathcal{L}^1$.

Objetivo 2: Aplicar el LF ((a) y (b)) a f_n ($-g \leq f_n \leq g$).

Corolario 1 del TCD: Paso de la serie bajo el signo integral

Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\,d\mu < \infty$. Entonces,

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a.e.

(b) $f \in L^1(\mu)$.

(c) $\int f\,d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu$

Idea: Sea $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \geq 0$. Usar el Corolario 1 del TCM (paso de la serie en la integral de funciones positivas). Además, es fácil ver que $F \in \mathcal{L}^1$ (dominancia para el TCD).

Corolario 2 del TCD: Densidad de las funciones simples en L^1

Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Existe $\{s_n\}$ sucesión de funciones simples integrables tal que $\int |f - s_n| \to 0$. Es decir, el conjunto de funciones simples integrables es denso en L^1, con la métrica de L^1.

Idea: Usar el Corolario 2 del TFA y el TCD.

Paso al límite bajo el signo integral

Corolario 3 del TCD: Derivación bajo el signo integral

Sean $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $f : I \times X \to \mathbb{R}$ función que cumple

(a) $\forall t \in I$, $f(t, \bullet) : X \to \mathbb{R}$ es una función medible e integrable.

(b) $\forall x \in X$, $f(\bullet, x) : I \to \mathbb{R}$ es derivable.

(c) $\exists\, g : X \to \mathbb{R}^+$ función medible positiva e integrable tal que

$$|f'(t,x)| \leq g(x), \quad \forall t \in I, \forall x \in X.$$

Definimos la función $\qquad H(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x).$

Se tiene que H es derivable y $\quad H'(t) = \int_X f'(t,x)\, d\mu(x).$

Idea: Aplicar el TCD al cociente incremental de H.

La integral de Riemann y de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Consideramos $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ (medida de Lebesgue) y $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue. La integral de f respecto de la medida de Lebesgue se llama **integral de Lebesgue**.

Notación:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f\, dm, \qquad \int_A f(x)\, dx = \int_A f\, dm, \quad A \in \mathcal{L}.$$

Pregunta: ¿Qué relación tiene la integral de Lebesgue con la integral de Riemann?

Teorema: Relación entre la integral de Riemann y la de Lebesgue

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es integrable Riemann, entonces f es medible Lebesgue (e integrable Lebesgue) y

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f\, dm.$$

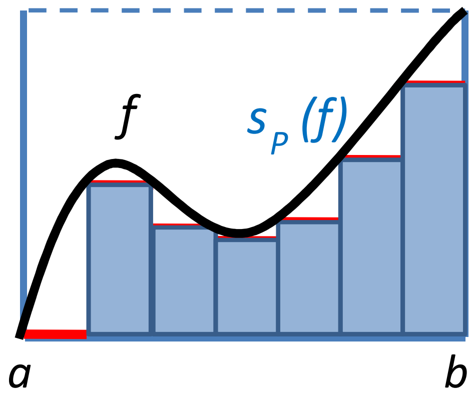
Nota: Por supuesto, el recíproco no es cierto. ¿Algún ejemplo?

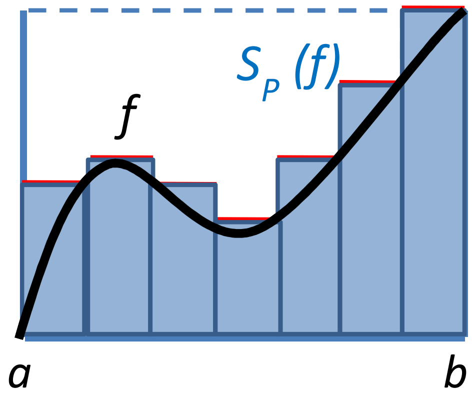
Recordatorio: La integral de Riemann. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.

Una **partición** de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es una sucesión finita $P = \{t_j\}_{j=0}^n$ tal que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Para cada P, definimos la **suma de Riemann inferior y superior de f sobre P** mediante

$$s_P(f) = \sum_{j=1}^n m_j(t_j - t_{j-1}), \quad S_P(f) = \sum_{j=1}^n M_j(t_j - t_{j-1}).$$

$$m_j = \text{ínf}\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}, \quad M_j = \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}.$$





Recordatorio: La integral de Riemann. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.

La **suma de Riemann inferior y superior de f sobre P**

$$s_P(f) = \sum_{j=1}^n m_j(t_j - t_{j-1}), \quad S_P(f) = \sum_{j=1}^n M_j(t_j - t_{j-1}).$$

$$m_j = \text{ínf}\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}, \quad M_j = \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}.$$

Consideramos la **integral (de Riemann) inferior y superior de f**

$$\underline{I}_a^b(f) = \sup_P s_P(f), \quad \overline{I}_a^b(f) = \inf_P S_P(f).$$

Cuando $\underline{I}_a^b(f) = \overline{I}_a^b(f)$, se dice que f es **integrable Riemann** y la **integral de Riemann de f sobre $[a, b]$** es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{I}_a^b(f) = \overline{I}_a^b(f).$$

Teorema: Relación entre la integral de Riemann y la de Lebesgue

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Si f es integrable Riemann, entonces f es medible e integrable Lebesgue y ambas integrales coinciden.

Paso 1: Para cualquier $P = \{t_j\}_{j=0}^n$ partición de $[a, b]$, definimos

$$g_P = \sum_{j=1}^n m_j \, 1_{(t_{j-1}, t_j]} \quad \text{y} \quad G_P = \sum_{j=1}^n M_j \, 1_{(t_{j-1}, t_j]}.$$

Calcula $\int_{[a,b]} g_P \, dm$ y $\int_{[a,b]} G_P \, dm$ (observa que $g_P \leq f \leq G_P$).

Paso 2: f int. Riemann $\Rightarrow \exists P_n = \{t_j^n\}_{j=0}^{N_n}$ particiones tales que

(a) P_{n+1} es un refinamiento de P_n ($\{t_j^n\}_{j=0}^{N_n} \subset \{t_j^{n+1}\}_{j=0}^{N_{n+1}}$).
¿Cómo son las funciones g_{P_n} y G_{P_n} cuando n crece?

(b) La amplitud de P_n converge a 0. ($\text{máx}_j\{(t_j^n - t_{j-1}^n)\} \to 0$.)

(c) $s_{P_n}(f)$, $S_{P_n}(f) \to \int_a^b f(x) \, dx$ (integral de Riemann).

Paso 3: Usa el TCD o TCM para calcular $\int_{[a,b]} g \, dm$ y $\int_{[a,b]} G \, dm$, con $g = \text{lím} \, g_{P_n}$ y $G = \text{lím} \, G_{P_n}$. Remata el resultado.

Nota sobre integrales impropias: Algunas integrales impropias también se pueden entender como integrales de Lebesgue.

Si f es integrable Riemann en $[0, M]$, para todo $M > 0$, la **integral impropia** de f en $[0, \infty)$ se define como

$$\int_0^\infty f(x) \, dx = \lim_{M \to \infty} \int_0^M f(x) \, dx.$$

Ejercicio: Si f es medible Lebesgue y positiva o integrable

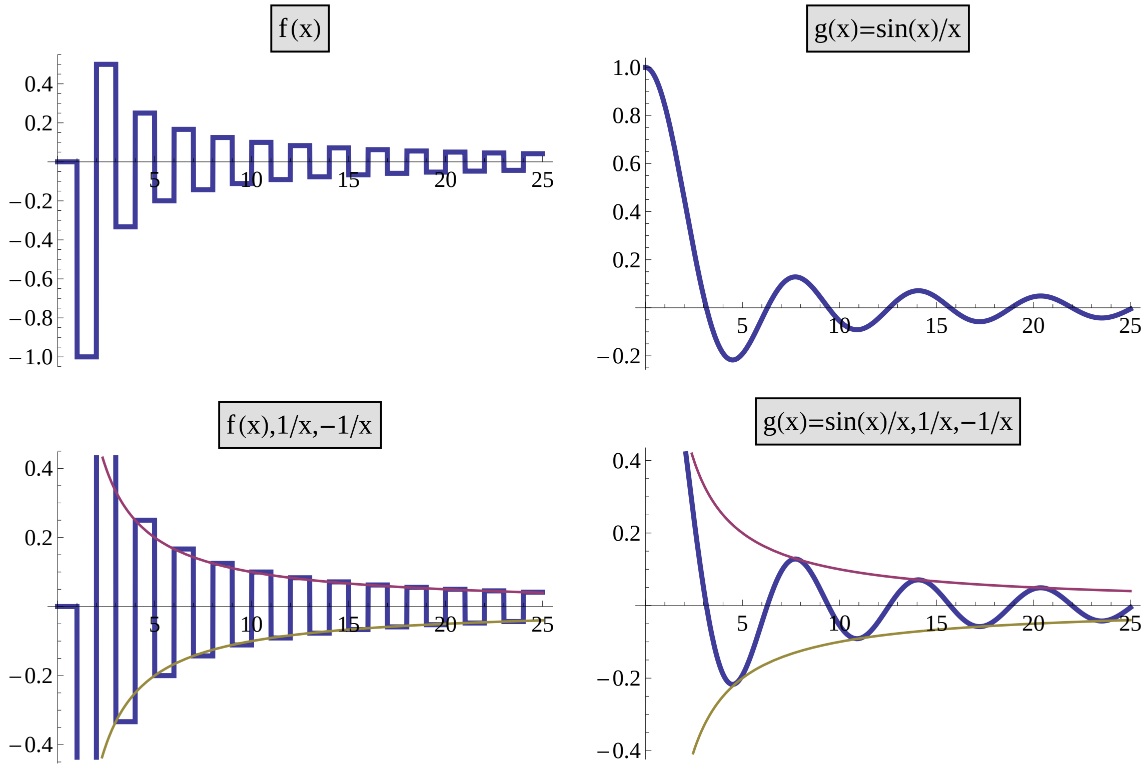
$$\int_{[0,\infty]} f \, dm = \lim_{M \to \infty} \int_{[0,M]} f \, dm.$$

Nota: El límite de la derecha puede existir incluso cuando f *no* es integrable.

Ejemplos: $f = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} 1_{(n,n+1]}, \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x} \; (x > 0).$

La integral de Riemann y de Lebesgue en $\mathbb{R}$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} 1_{(n,n+1]} \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x} \ (x > 0).$$



La integral de Riemann y de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Ventajas de la integral de Lebesgue frente a la de Riemann

1. La clase de funciones que podemos integrar es mucho mayor.
2. La colección de conjuntos sobre los que podemos integrar es mucho mayor.
3. Se verifican los potentes teoremas de convergencia bajo el signo integral (TCM, LF y TCD).
4. Los espacios de funciones cuyas métricas se definen mediante integrales son completos cuando se consideran funciones integrables Lebesgue y no lo son cuando consideramos únicamente funciones integrables Riemann. Un ejemplo es el espacio $(L^1(\mathbb{R}), \|\bullet\|_1)$ que hemos estudiado previamente.

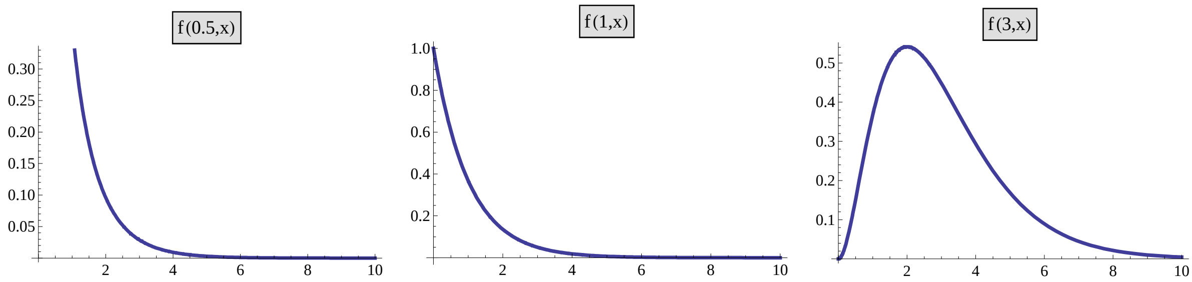
Nota: La idea principal de la integral de Lebesgue consiste en agrupar los puntos de acuerdo a la proximidad de los valores de la función a integrar y no de acuerdo a su proximidad en el conjunto de definición de la función, como se hace en la integral de Riemann (véase el TFA).

La función gamma de Euler

La **función gamma de Euler** $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx.$$

Gráficos de $f(p,x) = x^{p-1}e^{-x}$ para diferentes valores de p.



Ejercicio: $\Gamma(p) < \infty$, para $p > 0$ (i.e., $f(p,\cdot) \in L^1((0,\infty))$).

Integrando por partes, se obtiene la **ecuación funcional** de Γ:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad p > 0.$$

Nota: Como $\Gamma(1) = 1$, tenemos $\Gamma(n+1) = n!$, para $n \in \mathbb{N}$.

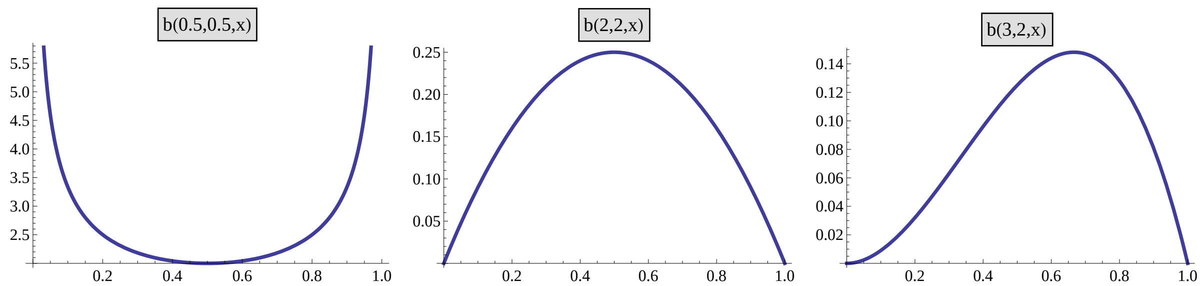
Nota: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

La función beta de Euler

La **función beta de Euler** $\beta : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx.$$

Gráficos de $b(p,q,x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ para diferentes valores de p y q.



Ejercicio: $\beta(p,q) < \infty$, para $p,q > 0$ (i.e., $b(p,q,\cdot) \in L^1((0,1))$).

Relación con la función gamma: Se tiene

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ dos espacios de medida.

Objetivo: Definir una nueva medida $\mu \times \nu$ sobre $X \times Y$.

Llamamos **rectángulo (medible)** a los conjuntos $A \times B$, con $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$. Queremos que $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

(A) Definir una σ-álgebra sobre $X \times Y$ que contenga a los rectángulos medibles. La **σ-álgebra producto** $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ es

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{F} \text{ y } B \in \mathcal{G}\}).$$

Ejercicio: $\mathcal{E} = \{A \times B : A \in \mathcal{F} \text{ y } B \in \mathcal{G}\}$ es familia elemental.

(B) Definir una premedida sobre un álgebra que contenga a $\mathcal{E}$.

Nota: La colección $\mathcal{A}$ es una álgebra sobre $X \times Y$, donde

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \biguplus_{j=1}^{J} (A_j \times B_j) : A_j \in \mathcal{F} \text{ y } B_j \in \mathcal{G} \right\}.$$

Definimos la aplicación

$$\mu \times \nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

$$A = \biguplus_{j=1}^{J} (A_j \times B_j) \longmapsto (\mu \times \nu)(A) = \sum_{j=1}^{J} \mu(A_j)\nu(B_j).$$

Teorema: $\mu \times \nu$ es medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$. Además, si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ son σ-finitos, entonces $(X \times Y, \mathcal{A}, \mu \times \nu)$ es σ-finito.

Paso 1: Si $A \times B = \biguplus_j (A_j \times B_j)$ (unión contable), con $A, A_j \in \mathcal{F}$ y $B, B_j \in \mathcal{G}$, entonces

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j).$$

Paso 2: La aplicación $\mu \times \nu$ está bien definida.

Paso 3: $\mu \times \nu$ es premedida sobre el álgebra $\mathcal{A}$.

Paso 4: Si μ y ν σ-finitas $\Rightarrow$ $\mu \times \nu$ σ-finita.

(C) Extender la medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$ a toda la σ-álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ utilizando los teoremas de Hahn y Carathéodory.

Teorema: Medida producto

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ dos espacios de medida.

(a) Existe una medida definida sobre $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, que denotamos $\mu \times \nu$, tal que

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \text{ para todo } A \in \mathcal{F} \text{ y } B \in \mathcal{G}.$$

La medida $\mu \times \nu$ se llama la **medida producto** de μ y ν.

(b) Si μ y ν son σ-finitas, entonces $\mu \times \nu$ es también σ-finita y $\mu \times \nu$ es la *única* medida sobre $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ tal que

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \text{ para todo } A \in \mathcal{F} \text{ y } B \in \mathcal{G}.$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m)$ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

- La **medida de Lebesgue** en $\mathbb{R}^n$, m, es la completación del producto (n veces) de la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ consigo misma. Es decir, la completación de $m \times \cdots \times m$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- Equivalentemente, m es la completación de $m \times \cdots \times m$ sobre $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$.
- El dominio de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, es la familia de conjuntos **medibles Lebesgue** en $\mathbb{R}^n$.
- En general, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ se suele utilizar sobre el dominio más pequeño $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Nota: La σ-álgebra producto $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$ *no* es completa (ejercicios). Por tanto, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})} = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})} = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}.$$

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ dos espacios de medida.

Consideramos $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu)$ medida producto.

Objetivo: Probar el **Teorema de Fubini**, que proporciona condiciones para intercambiar el orden de integración. Es decir,

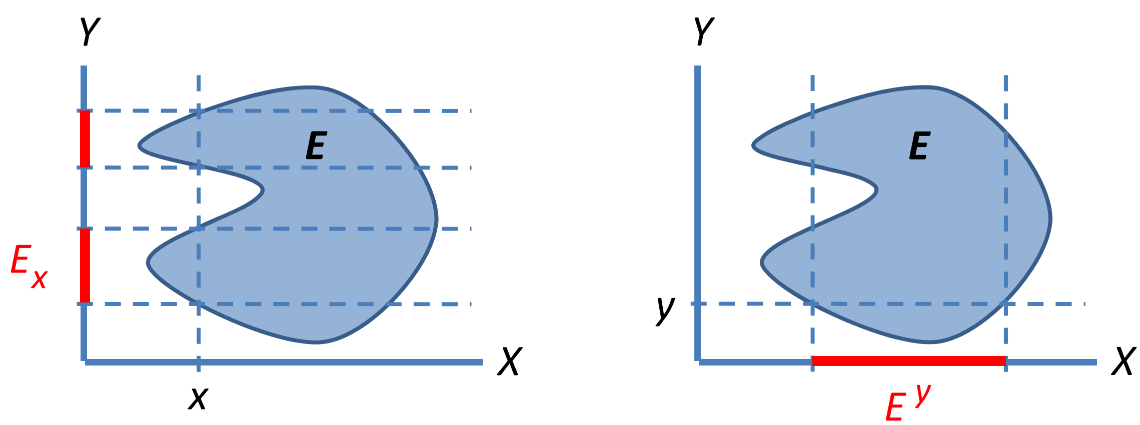
$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$
$$= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Observación: Primero tendremos que asegurar que todas las integrales que aparecen tengan sentido, es decir, que las correspondientes funciones sean medibles en el espacio en el que estamos integrándolas.

Nota: Para la demostración del TF usaremos el MCA.

Sea $E \subset X \times Y$. Para $x \in X$ e $y \in Y$, se define la **sección** de E por x (x-**sección**) y la **sección** de E por y (y-**sección**) mediante

$$E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}, \qquad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}.$$



Sea $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Definimos la x-**sección** y la y-**sección** de f

$$f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{tal que} \quad f_x(y) = f(x,y).$$
$$f^y : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{tal que} \quad f^y(x) = f(x,y).$$

Ejercicio: Sean $E, \{E_i\}_{i\in I} \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$ y $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Mostrar que:

(1) $(1_E)_x = 1_{E_x}$ y $(1_E)^y = 1_{E^y}$.

(2) $(E_x)^c = (E^c)_x$ y $(E^y)^c = (E^c)^y$.

(3) $\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)_x = \bigcup_{i\in I} (E_i)_x$ y $\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)^y = \bigcup_{i\in I} (E_i)^y$.

(4) $(f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x$ y $(f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y$ $(B \in \mathcal{B})$.

Proposición: Medibilidad de las secciones

(a) Si $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, entonces

$$E_x \in \mathcal{G},\ \forall x \in X \quad \text{y} \quad E^y \in \mathcal{F},\ \forall y \in Y.$$

(b) Si $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-medible, entonces

$$f_x \text{ es } \mathcal{G}\text{-medible},\ \forall x \in X \quad \text{y} \quad f^y \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible},\ \forall y \in Y.$$

Resultado auxiliar: El teorema de la clase monótona.

Una familia $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es una **clase monótona** si es estable para límites crecientes y decrecientes, es decir,

$$\text{Si } \{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C} \text{ tal que } C_n \uparrow C \text{ o } C_n \downarrow C, \text{ entonces } C \in \mathcal{C}.$$

Observación: Si $\mathcal{F}$ es σ-álgebra, entonces $\mathcal{F}$ es clase monótona.

Contraejemplo: El recíproco de la observación anterior no es cierto. Consideramos $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{I}$ el conjunto de todos los intervalos. Se tiene que $\mathcal{I}$ es clase monótona, pero no σ-álgebra.

Ejercicio: $\mathcal{F}$ σ-álgebra si y sólo si $\mathcal{F}$ álgebra y clase monótona.

Si $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ clases monótonas, entonces $\bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$ es clase monótona.

Dado $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, la **mínima clase monótona** que contiene a $\mathcal{A}$ es

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{C} : \mathcal{A} \subset \mathcal{C} \text{ y } \mathcal{C} \text{ clase monótona}\}.$$

Teorema de la clase monótona

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Observación: Bastará demostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es un álgebra.

Paso 1: $X \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ (trivial).

Paso 2: $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es cerrada para la complementación: Sea

$$\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

Se comprueba que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$ y que $\mathcal{M}_1$ es clase monótona.

Paso 3: $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ es cerrada para intersecciones finitas: Sean

$$\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ \forall B \in \mathcal{A}\}.$$

$$\mathcal{M}_3 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

Se comprueba que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M}_i$ es clase monótona $(i = 2, 3)$.

Nota: Esta técnica de demostración es muy común en Teoría de la medida y se conoce como *el principio de los buenos conjuntos*.

Teorema de Fubini para indicadores

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-finitos y $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

(a) $g : X \to [0, \infty]$ dada por $g(x) = \nu(E_x)$ es $\mathcal{F}$-medible y

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X g(x)\, d\mu(x) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x).$$

(b) $h : Y \to [0, \infty]$ dada por $h(y) = \mu(E^y)$ es $\mathcal{G}$-medible y

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_Y h(y)\, d\nu(y) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

Observación: Si lo escribimos en términos de indicadores:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} 1_E(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y) &= \int_X \left(\int_Y 1_E(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X 1_E(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Demostración del Teorema de Fubini para indicadores

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} : E \text{ verifica el teorema}\}.$$

Observación: Para demostrar el teorema bastará mostrar:

(1) $\mathcal{A} = \left\{E = \biguplus_{j=1}^{J}(A_j \times B_j) : A_j \in \mathcal{F} \text{ y } B_j \in \mathcal{G}\right\} \subset \mathcal{C}$.

(2) $\mathcal{C}$ es clase monótona.

CASO A: μ y ν finitas.

Paso 1: $\mathcal{E} = \{E = A \times B : A \in \mathcal{F} \text{ y } B \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{C}$.

Paso 2: $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$.

Paso 3: $\mathcal{C}$ es clase monótona.

CASO B: μ y ν σ-finitos.

Teorema de Fubini-Tonelli (para funciones positivas)

$(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-finitos. $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-medible.

(a) $g(x) = \displaystyle\int_Y f_x(y)\, d\nu(y)$ es $\mathcal{F}$-medible y

$$\int_X g(x)\, d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu)(x,y).$$

(b) $h(y) = \displaystyle\int_X f^y(x)\, d\mu(x)$ es $\mathcal{G}$-medible y

$$\int_Y h(y)\, d\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu)(x,y).$$

Conclusión: Si f medible y positiva en $X \times Y$:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\times\nu)(x,y) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_Y f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Teorema de Fubini

$(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-finitos. $f \in L^1(\mu \times \nu)$.

(a) $f_x \in L^1(\nu)$ a.e. $x \in X$, $g(x) = \int_Y f_x(y)\, d\nu(y) \in L^1(\mu)$ y

$$\int_X g(x)\, d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu)(x,y).$$

(b) $f^y \in L^1(\mu)$ a.e. $y \in Y$, $h(y) = \int_X f^y(x)\, d\mu(x) \in L^1(\nu)$ y

$$\int_Y h(y)\, d\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu)(x,y).$$

Conclusión: Si f es integrable en $X \times Y$:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$
$$= \int_Y \left(\int_Y f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Notación: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m)$ y $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dm(x).$$

Para $a \in \mathbb{R}^n$, consideramos la aplicación traslación a unidades

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \tau_a(x) = x + a. \end{aligned}$$

Proposición: Invariancia por traslaciones de la integral de Lebesgue

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue y $a \in \mathbb{R}^n$.

(a) La función $f \circ \tau_a$ es medible Lebesgue.

(b) Si $f \geq 0$ o $f \in L^1(m)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x+a)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$.

Paso 1: Calcula $(f \circ \tau_a)^{-1}(B)$, para $B \in \mathcal{B}$ y muestra (a).

Paso 2: Usa el MCA para probar (b) (y también (a)).

El **grupo lineal general**, $GL(n)$, es el conjunto de las matrices T $(n \times n)$ invertibles. También diremos que la transformación lineal asociada, $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $t(x) = Tx$, está en $GL(n)$ si $T \in GL(n)$.

Proposición: La integral de Lebesgue de transformaciones lineales

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue y $t \in GL(n)$.

(a) La función $f \circ T$ es medible Lebesgue.

(b) Si $f \geq 0$ o $f \in L^1(m)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = |\det(T)| \int_{\mathbb{R}^n} f(t(x))\, dx$.

Demostración: Usa el MCA y las propiedades de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ para mostrar (a) y (b).

La integral de Lebesgue y las transformaciones diferenciables

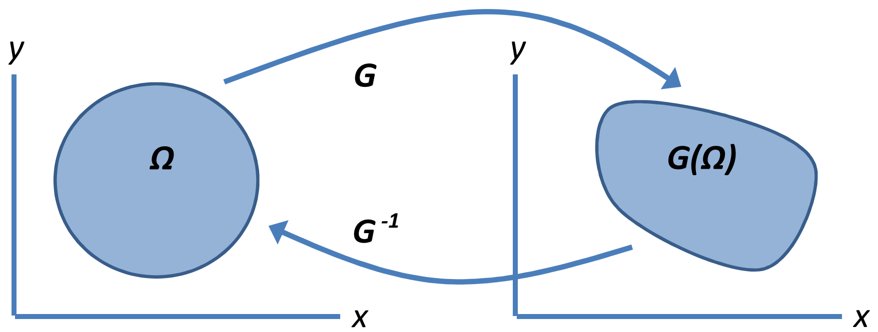
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $G = (g_1, \ldots, g_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ **difeomorfismo de clase** C^1, es decir,

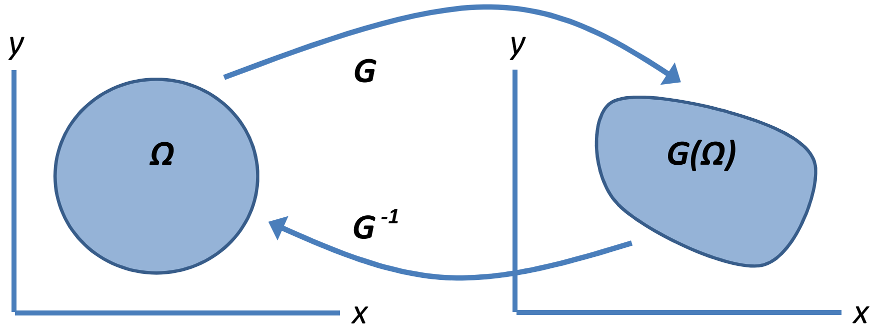
(a) G es inyectiva.

(b) $g_1, \ldots, g_n \in C^1$ (derivables con derivada continua).

(c) La matriz jacobiana $D_x G = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right)$ es invertible $\forall x \in \Omega$.

Nota: El teorema de la función inversa garantiza que $G^{-1} : G(\Omega) \to \mathbb{R}^n$ es también difeomorfismo de clase C^1 y que $D_x(G^{-1}) = [D_{G^{-1}(x)} G]^{-1}$, $\forall x \in G(\Omega)$.





Teorema: La integral de Lebesgue de transformaciones diferenciables

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismo de clase C^1.

(a) Si $E \subset \Omega$ y $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $G(E) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y

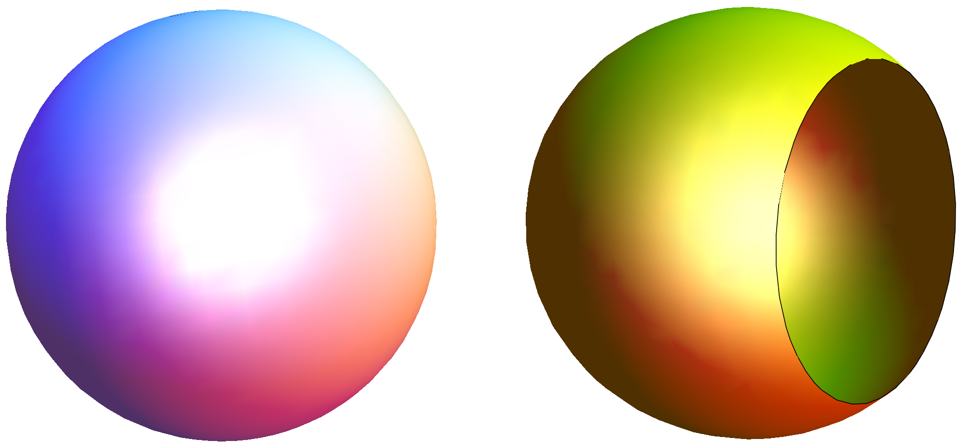
$$m(G(E)) = \int_E |\det(D_x G)| \, dx.$$

(b) Si f es medible Lebesgue sobre $G(\Omega)$, $f \circ G$ es medible Lebesgue sobre Ω. Si $f \geq 0$ o $f \in L^1(G(\Omega), m)$, entonces

$$\int_{G(\Omega)} f(x) \, dx = \int_\Omega f(G(x)) \, |\det(D_x G)| \, dx.$$

Medida de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$

Consideramos la bola unidad en $\mathbb{R}^n$, $\overline{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.



$$\Omega_n = m(\overline{B}_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)}.$$

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $\Phi : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-medible. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{G} &\longrightarrow [0, \infty] \\ B &\longmapsto \nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Teorema: La medida imagen

La aplicación ν es una medida sobre $\mathcal{G}$ que se denomina **medida imagen** (de μ a través de Φ) y se suele denotar $\nu = \Phi(\mu)$ o μ_Φ.

Ejercicio. Demostrar el teorema.

Ejercicio: $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $\Phi : (X, \mathcal{F}, \mu) \to Y$ aplicación cualquiera. Consideramos

$$\mathcal{F}_\Phi = \{B \subset Y : \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}.$$

La clase $\mathcal{F}_\Phi$ es una σ-álgebra sobre Y y Φ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}_\Phi$-medible.

Ejercicio: $\Phi : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ es $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-medible sii $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\Phi$.

Teorema de cambio de variable

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{F}, \mu) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, dotted, "f \circ \Phi"'] & (Y, \mathcal{G}, \mu_\Phi) \arrow[d, "f"] \\ & \overline{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

Supongamos que Φ y f son medibles. Se tiene:

$$\int_X (f \circ \Phi)\, d\mu \quad \text{existe si y sólo si} \quad \int_Y f\, d\mu_\Phi \text{ existe.}$$

En tal caso:

$$\int_X (f \circ \Phi)\, d\mu = \int_Y f\, d\mu_\Phi.$$

Demostración: MCA (para las funciones f).

Los sistemas de coordenadas no lineales más importantes en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son:

(a) **Coordenadas polares:** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(b) **Coordenadas esféricas:** $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$, $z = r\cos\phi$.

Al aplicar el Teorema anterior (La integral de Lebesgue de transformaciones diferenciables), obtenemos

$$dx\,dy = rdr\,d\theta \quad \text{y} \quad dx\,dy\,dz = r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Observación 1: Cambios similares existen en dimensiones superiores, pero son muy complejos cuando la dimensión aumenta.

Observación 2: En muchos casos es suficiente conocer que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ se puede descomponer como el producto de una medida sobre $(0,\infty)$ por otra *medida de superficie* sobre la esfera unidad.

Objetivo: Obtener esta descomposición de la medida de Lebesgue.

Integral de una función radial

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice **radial** si $f(x) = \varphi(\|x\|)$, donde $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Es decir, $f = \varphi \circ \rho$, con

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0,\infty) \\ x &\longmapsto \rho(x) = \|x\|. \end{aligned}$$

Proposición: Sea μ la medida imagen de m a través de ρ, es decir $\mu = \rho(m)$. Se tiene que $\mu = m_g$ (medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a g) con $g(r) = \Omega_n r^n$. Es decir, $d\mu = \Omega_n n r^{n-1}\,dr$.

Demostración: Calcular $\mu((a,b])$ y usar que $\Omega_n = m(B_n)$.

Teorema: Integración de funciones radiales

Sea $f = \varphi \circ \rho$ una función radial medible. Se tiene,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = n\Omega_n \int_0^\infty \varphi(r) r^{n-1} dr.$$

Demostración: Usar el Teorema de cambio de variable.

Demostración (Teorema de integración de funciones radiales)

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, m) \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, dotted, "f=\varphi\circ\rho"'] & ([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), \mu = \rho(m)) \arrow[d, "\varphi"] \\
& \overline{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

Aplicación: Sea $\alpha > 0$ y $c > 0$.

(a) $\displaystyle\int_{\{\|x\|>c\}} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\, dx < \infty$ si y sólo si $\alpha > n$.

(b) $\displaystyle\int_{\{\|x\|<c\}} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\, dx < \infty$ si y sólo si $\alpha < n$.

Ejercicio: Calcular las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2}\, dx \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/2}\, dx.$$

Sea $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ la **esfera unidad** de $\mathbb{R}^n$.

$$\Phi : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow (0,\infty) \times S^{n-1}$$

$$x \longmapsto \Phi(x) = \left(r = \|x\|, x' = \frac{x}{\|x\|} \right).$$

(Φ es una biyección continua con inversa $\Phi^{-1}(r, x') = r\,x'$.)

Sea $m_* = \Phi(m)$, la medida imagen de m a través de Φ y sea ρ la medida sobre $(0,\infty)$ tal que $d\rho = r^{n-1}\, dr$ ($\rho(E) = \int_E r^{n-1}\, dr$).

Teorema: Integración en coordenadas polares

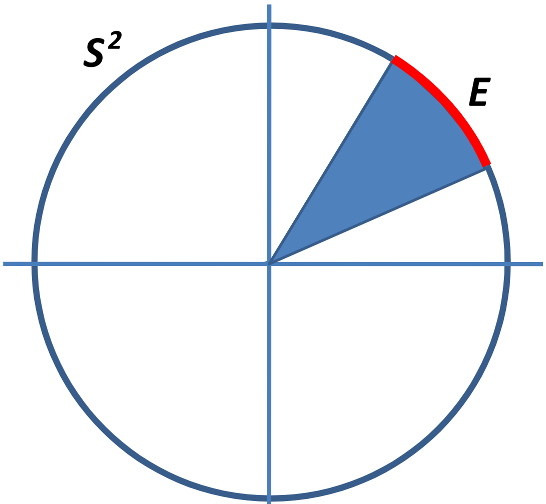
Existe una *única* medida de Borel σ sobre S^{n-1} tal que $m_* = \rho \times \sigma$. Además, si f es medible Borel en $\mathbb{R}^n$ y $f \geq 0$ o $f \in L^1(m)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx') r^{n-1}\, d\sigma(x')\, dr. \qquad (*)$$

(A) Construcción de σ, medida sobre la esfera S^{n-1}

Paso 1: Supongamos que existe una medida σ tal que $m_* = \rho \times \sigma$.
Entonces, para $E \in \mathcal{B}(S^{n-1})$, se tiene $m_*((0,1] \times E) = \frac{1}{n}\sigma(E)$.

Paso 2: La aplicación $\sigma(E) = n\, m\left(\left\{x : \|x\| \leq 1 \text{ y } \frac{x}{\|x\|} \in E\right\}\right)$
es una medida de Borel sobre S^{n-1}.



(B) Demostración del teorema

Sea $E_c = \Phi^{-1}((0,c] \times E) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq c \text{ y } \frac{x}{\|x\|} \in E\right\}$.

Paso 3: Para $0 < a < b$ y $E \in \mathcal{B}(S^{n-1})$, se tiene

$$m_*((a,b] \times E) = (\rho \times \sigma)((a,b] \times E).$$

Objetivo 1: $m_* = \rho \times \sigma$ sobre $\mathcal{B}((0,\infty)) \times \mathcal{B}(S^{n-1})$ y σ es única.

Fijemos $E \in \mathcal{B}(S^{n-1})$ y sea $\mathcal{A}_E = \left\{\biguplus_{j=1}^{N}(a_j, b_j] \times E\right\}$.

(i) $\mathcal{A}_E$ es álgebra sobre $(0,\infty) \times E$.
(ii) $\sigma(\mathcal{A}_E) = \mathcal{F}_E = \mathcal{B}((0,\infty)) \times E$.
(iii) $\mathcal{F} = \bigcup_{E \in \mathcal{B}(S^{n-1})} \mathcal{F}_E$ genera $\mathcal{B}((0,\infty)) \times \mathcal{B}(S^{n-1})$.

$m_* = \rho \times \sigma$ sobre $\mathcal{A}_E \Rightarrow$ sobre $\mathcal{F}_E \Rightarrow$ sobre $\mathcal{B}((0,\infty)) \times \mathcal{B}(S^{n-1})$.

Objetivo 2: Ejercicio: Demostrar la identidad $(*)$. Comprobar que $m = \Phi^{-1}(\rho \times \sigma)$ y usar el Teorema de cambio de variable.

Algunas consecuencias
(del Teorema de integración en coordenadas polares)

(1) La medida de la esfera unidad S^{n-1}:

$$\omega_{n-1} = \sigma(S^{n-1}) = n\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

(2) Sea $f = \varphi \circ \rho$ una función radial medible. Se tiene,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \omega_n \int_0^{\infty} \varphi(r) r^{n-1} dr.$$