CÁLCULO 1: 1^0 del grado de Matemáticas y doble grado MAT-IngINF

Hoja 5: Límites y derivadas

1.- Sea f tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. probar que

$$\lim_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

Indicación: ver ejercicio 9-b de la hoja de problemas número 2.

2.- (*) Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{x^4+x^3}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2 \operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{3\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^5 x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x+x^2}{2x^2}$ (e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{[x]}}$ (f) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\log(x^4+x^2+1)}{\log(x^{10}+x^7+100)}$

(g) $\lim_{x\to 1^-} (x^5-2x^4+3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$ (h) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{2+x\,2^x}{2+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (i) $\lim_{x\to 1^+} (x^5-2x^4+3)^{\frac{-2}{(x-1)^3}}$

(j) $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x-1}$ (k) $\lim_{x\to 0^+} |\operatorname{sen} x|^{\frac{1}{\log x}}$ (l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))}$

3.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones. Calcular la derivada en los puntos que exista.

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (b) $f(x) = \arccos x$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|}$

(d) $f(x) = \log\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ (e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (f) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

(g) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

4.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 2, \\ a\cdot x+b & \text{si} \quad x > 2. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} a+b\cdot x^2 & \text{si} \quad |x| \le 2, \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} a\cdot\cos x & \text{si} \quad x \le 0, \\ b-x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ c\cdot\arctan x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x)+a & \text{si} \quad x \le 0, \\ a+b\cdot x & \text{si} \quad 0 < x < 2, \\ c\cdot e^{x^2} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

5.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y = \log\dfrac{x-1}{x+1}$ (b) $y = \operatorname{sen}(\log x)$ (c) $y = \log(x^2\log^3 x)$

(d) $y = x^{\tan(2\pi x)}$ (e) $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{x^2-1}$ (f) $y = x^{\log x}$

(g) $y = \log_x e^x$ (h) $y = \tan(x^2+\log x+\arctan x)$ (i) $y = \sec(\operatorname{cosec} x)$

6.- Probar que si $f(x)$ es derivable en $x = a$ y $f(a) \neq 0$ entonces $|f(x)|$ es derivable en $x = a$.

7.- (*) a) Sea f una función diferenciable par. Calcular $f'(0)$.
b) Sea f una función diferenciable. Demostrar que si f es par entonces f' es impar. Demostrar que si f es impar entonces f' es par.
c) Encontrar un contraejemplo que pruebe que aunque f' sea par esto no implica que f sea impar.

8.- (*) a) Sean f, g, h funciones tales que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

demostrar que si $g(0) = h(0)$ y además $g'(0) = h'(0) = 0$ entonces f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.
b) Encontrar un contraejemplo que demuestre que aunque además de lo anterior tengamos $g''(0) = h''(0) = 0$, es posible que $f''(0)$ no exista.

9.- (*) Demostrar que no existen funciones derivables f y g con $f(0) = g(0) = 0$ tales que para todo x se cumple $x = f(x)g(x)$. ¿Y si no se pide que sean derivables?

10.- (*)Sean I un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ un función derivable en cierto $a \in I$. Definimos $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Probar que $t(x)$ es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, es decir, demostrar:

(I) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0.$

(II) Si $l(x) = m \cdot x + n$ y $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - l(x)}{x - a} = 0$, entonces $l(x) = t(x)$.

11.- Hallar el área del triángulo determinado por el eje X y las rectas tangente y normal a la gráfica de $f(x) = 9 - x^2$ en el punto $(2, 5)$.

12.- (*) Estudiar si existe algún valor de x para el que la tangente a $f(x) = x/(x+1)$ sea paralela a la secante que conecta los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.

13.- (*) Sea $f(x) = x^2 - 2$ y sea x_0 un número racional mayor que $\sqrt{2}$. Calcular una fórmula para la intersección $(x_1, 0)$ de la tangente a $f(x)$ en x_0 con el eje X y probar que $\sqrt{2} < x_1 < x_0$. Comprobar con una calculadora que iteraciones sucesivas de esta fórmula llevan rápidamente a una aproximación de $\sqrt{2}$ mediante fracciones y explicar esta aproximación geométricamente.

14.- ¿Cuántas derivadas sucesivas existen para la función $f(x) = |x|^3$? Calcularlas. Hacer lo mismo con $g(x) = x\,|x|$.

15.- Sea $f(x) = \text{sen}(2x)$. Calcular $f^{2010)}(x)$ (derivada de orden 2010).

HOJA 5

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$

$$(1+f(x))^{1/f(x)} = e^{\log (1+f(x))^{1/f(x)}} = e^{\frac{1}{f(x)} \log(1+f(x))} = e^{\frac{\log(1+f(x))}{f(x)}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = \frac{0}{0} \text{ IND} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to a} \frac{\frac{\cancel{f'(x)}}{1+f(x)}}{\cancel{f'(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{1}{1+f(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

$\Rightarrow e^1 = e$ qed.

---

1. $f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ a.x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- La función f_1 está definida a trozos, y cada función, $g(x) = x^2$ $x \le 2$ y $h(x) = ax+b$ $x > 2$, es continua y derivable en su dominio.

Para que f_1 sea derivable en $x=2$, tiene que ser continua.

$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$; $\lim_{x \to 2^+} ax+b = 2a+b$; $f(2) = 4$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 2a+b = 4$

$$f_1'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 2^+} f_1'(x) = a = \lim_{x \to 2^-} f_1'(x) = 4 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

$2.4 + b = 4 \Rightarrow \boxed{b = -4}$

$\boxed{4.}$ a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{x^4+x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{x^3(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^3 \dfrac{1}{x+1} = 1 \cdot 1 = 1$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))}$; tiene la siguiente forma:

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = \left(\frac{0}{0}\ \text{IND}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{f(x)\to 0} \frac{\cos f(x) \cdot \cancel{f'(x)}}{\cancel{f'(x)}} = \lim_{f(x)\to 0} \cos f(x) = 1$$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\log(x^4+x^2+1)}{\log(x^{10}+x^7+100)} \approx \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x^4}{\log x^{10}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{\cancel{\log x}}{\cancel{\log x}} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

si no vale, L'H.

Demostrar que es comparable

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^2+1}{x^4} = 1 \ \left(\text{son comparables en } x\to\infty\right) \Longleftrightarrow x^4+x^2+1 \approx x^4 \qquad \log(x^4+x^2+1) \approx \log x^4}$$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{[x]}}$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^0} = 1$

$\boxed{15.}$ $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$; calcular $f^{2010)}(x)$ (derivada de orden 2010).

$f'(x) = 2\cos(2x)$; $f''(x) = \underbrace{-4}_{-2^2} \operatorname{sen}(2x)$; $f'''(x) = \underbrace{-8}_{-2^3} \cos(2x)$; $f^{IV}(x) = \underbrace{16}_{2^4} \operatorname{sen}(2x$

$2010 = 4 \cdot 502 + 2$

$f^{2010)}(x) = -2^{2010} \operatorname{sen}(2x)$

$\boxed{6.}$ $\left.\begin{array}{l} f \text{ es derivable en } x=a \\ f(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)|$ es derivable en $x=a$.

f derivable en a: $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

$f(a) \neq 0$

f derivable en a $\Rightarrow$ f continua en a

$|f(x)|$ derivable en a? $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$ $\qquad f(a)\neq 0$

- Supongamos $f(a)>0$

$\exists \delta>0 \quad f(x)>0$ si $|x-a|<\delta$

Como $f(a)>0 \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ en un entorno reducido de a: en $|x-a|<\delta$

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} \overset{f(a)>0}{=} \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

qed. $|f(x)|$ derivable en $x=a$

- Supongamos $f(a)<0$

$\exists \delta>0 \quad f(x)<0$ si $|x-a|<\delta$

Como $f(a)<0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ en un entorno reducido de a: en $|x-a|<\delta$

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-f(x)+f(a)}{x-a} = -f'(a)$$

qed. $|f(x)|$ derivable en $x=a$.

7. a) f diferenciable (que es derivable) par. Calcular $f'(0)$.

$$\boxed{f \text{ par}: \ f(x) = f(-x) \ \forall x}$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -f'(0) \\ \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \end{array}\right\} \quad -f'(0) = f'(0) \iff f'(0) = 0$$

x → ligeramente negativo

x → ligeramente positivo

c) $f'(x) = x^2$ es par; pero $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3$ NO es impar.

14. $f(x) = |x|^3$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^3}{x} = 0$$

$$f(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ x^3 & x < 0 \end{cases} \quad ; \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases} \quad ;$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x \geq 0 \\ -6x & x < 0 \end{cases} \quad ; \quad f'''(x) = \begin{cases} 6 & x \geq 0 \\ -6 & x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{6.}$ f derivable en $x=a$; $f(a) \neq 0 \Rightarrow |f(x)|$ derivable en $x=a$.

f derivable en $x=a \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \right| < \varepsilon$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = |f'(a)|$$

$$\left| \frac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} - |f'(a)| \right| \leq \left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \right| < \varepsilon$$

OTRA FORMA : $F(x) = |f(x)|$; $g(x) = |x|$

$F(x) = g \circ f(x)$

$f(x)$ derivable en $x=a$

$g(x)$ derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pero como $f(a) \neq 0$ $F(x) =$
$= g \circ f(x)$ es derivable en $x=a$.

$F(x) = |f(x)|$ derivable en $x=a$.

$\boxed{7.}$ f diferenciable y par $\longrightarrow f(-x) = f(x)$

impar $\longrightarrow f(-x) = -f(x)$ ej: $f(x) = x^3$

a) $$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$\boxed{h = -c} \rightarrow \lim_{c\to 0^+} \frac{f(-c) - f(0)}{-c} = \lim_{c\to 0^+} \frac{\overbrace{f(c)}^{\text{porque } f \text{ es par}} - f(0)}{-c} = -f'(0^+)$$

$$f'(0^+) = f'(0^-) = -f'(0^+) = 0$$

b) Demostrar: f par $\Rightarrow f'$ impar

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x-h)}^{f \text{ es par}} - \overbrace{f(x)}^{f \text{ es par}}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$$

c) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ no es par ni impar

$$f'(x) = x^2$$

$\boxed{8.}$ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$g(0) = h(0)$

$g'(0) = h'(0) = 0$

Como $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ y $g(0) = h(0)$ entonces $f(0) = g(0) = h(0)$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$$

$$h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = ?$$

Sandwich

$\boxed{14.}$ $f(x) = |x|^3$; $g(x) = x|x|$

Sabemos que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$; entonces $(|x|)' = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$

$$f'(x) = 3|x|^2 \cdot \frac{|x|}{x} = 3|x|^2 \frac{x}{|x|} = 3x|x|$$

$$g'(x) = |x| + x(|x|)' = |x| + x \cdot \frac{|x|}{x} = 2|x|$$

$g'(x)$ no es derivable más en 0.
$g'(x)$ es derivable infinitamente $\forall x \neq 0$.

9. f, g diferenciables $\quad f(0) = g(0) = 0$

$\boxed{\forall x \quad x = f(x)g(x)}$ Demostrar que no existe

Derivada:

$$x = f(x)g(x) \Rightarrow (x)' = \left(f(x)g(x)\right)' \Rightarrow 1 = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Como es para todo x cogemos $x=0$

$$1 = f'(0)\underbrace{g(0)}_{0} + \underbrace{f(0)}_{0}g'(0) \Rightarrow 1 = 0$$

10. $f: I \to \mathbb{R}$ derivada en $a \in I$

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Demostrar:

i) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-t(x)}{x-a} = 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$$

ii) Si $l(x) = mx+n$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-l(x)}{x-a} = 0$; entonces $l(x) = t(x)$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-t(x)+t(x)-l(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-t(x)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{t(x)-l(x)}{x-a} =$$

por el apartado anterior esto es 0.

$$= \lim_{x\to a} \frac{t(x)-l(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a)+f'(a)(x-a)-mx-n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a)+f'(a)(x-a)-mx-ma+ma-n}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(f'(a)-m)(x-a)+f(a)-ma-n}{x-a} = (f'(a)-m) + \lim_{x\to a} \frac{f(a)-ma-n}{x-a} = 0$$

tiene que ser 0 — tiene que ser igual a 0

$$f'(a)-m = 0 \Rightarrow m = f'(a) \quad ; \quad f(a)-ma-n = 0 \Rightarrow f(a) = ma+n$$

$$t(x) = \underbrace{f(a)}_{ma+n} + \underbrace{f'(a)}_{m}(x-a) \Rightarrow t(x) = ma+n+m(x-a) = m(x-\cancel{a}+\cancel{a})+n =$$

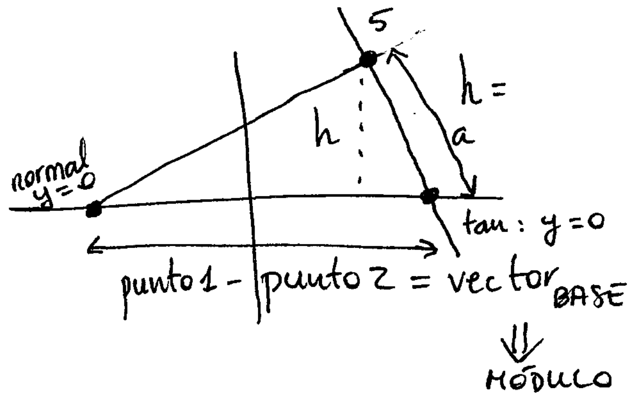
$$= mx+n = l(x)$$

$\boxed{11}$ $f(x) = 9 - x^2$ en $(2,5)$

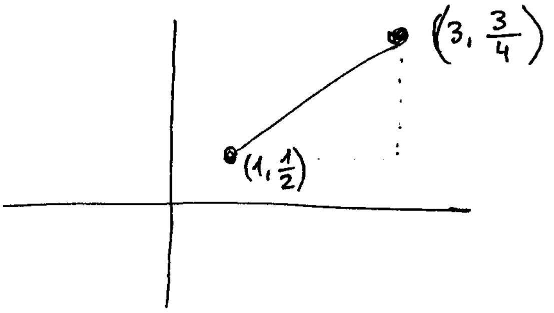
FÓRMULA RECTA TANGENTE
$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$

tangente: $y - 5 = f'(2)\,(x-2)$

normal: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(2)}\,(x-2)$



$\boxed{12.}$ tangente a $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ $\parallel$ $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$



$f(1) = \dfrac{1}{2}$; $f(3) = \dfrac{3}{4}$

$$m = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{3-1} = \frac{1}{8}$$

Entonces buscar x tal que $f'(x) = \dfrac{1}{8}$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \;;\; \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow (1+x)^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8} - 1$$

$\boxed{5.}$ d) $f(x) = x^{\tan(2\pi x)}$

$f(x) = e^{\log x^{\tan(2\pi x)}} = e^{\tan(2\pi x) \cdot \log x}$

$f'(x) = f(x) \cdot (\tan 2\pi x \cdot \log x)' = f(x) \left(\frac{2\pi}{\cos^2(2\pi x)} \log x + \frac{\tan(2\pi x)}{x} \right)$

$x \to 0 \qquad \log(1+x) \simeq x$

$f(x) \to 0 \qquad \log(1+f(x)) \approx f(x)$