

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 1: Matrices y Sistemas Lineales

1. Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de eliminación de Gauss.

$$\text{i)} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{array} \right\} \quad \text{ii)} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{iii)} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ y - z = 5 \\ x + z + 2t = 1 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{iv)} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{v)} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = -11 \end{array} \right| \begin{array}{l} -8 \\ -2 \\ 9 \\ -15 \end{array} \right\}$$

$$\text{vi)} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 3 + 6i \end{array} \right\} \quad \text{vii)} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + iz + t = 0 \\ 2x - y + 2z - t = 1 \\ x + iy - z + it = 2 \\ x + y + z - t = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{viii)} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} -8 \\ -2 \\ 9 \end{array} \right\} \quad \text{ix)} \quad \left. \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 = 10 \\ x_1 - 3x_2 = -4 \\ x_1 - x_3 = 4 \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 = 10 \end{array} \right| \begin{array}{l} -8 \\ -2 \\ 9 \\ -15 \end{array} \right\}$$

Soluciones: i) $\{x_1 = 2, x_2 = 8, x_3 = 21\}$, ii) $\{x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0\}$,

iii) $\{z = -1, y = 4, t = 5, x = -8\}$, iv) $\{x_2 = 0, x_3 = 1, x_1 = -1\}$

v) $\{x_4 = -\frac{101}{13}, x_3 = -\frac{157}{13}, x_1 = \frac{97}{13}, x_2 = \frac{16}{13}\}$ y $\{x_1 = 0, x_3 = -1, x_4 = 4, x_2 = 2\}$

vi) $\{x_1 = 4 + 3i, x_2 = 1 - 3i\}$ vii) $\{x = 1 + i, y = -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i, z = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i, t = -\frac{11}{10} + \frac{3}{10}i\}$

viii) $\{x_1 = 23 + 2x_4, x_2 = 9 + x_4, x_3 = 19 + 4x_4\}$ y

$\{x_1 = -8 + 2x_4, x_2 = -2 + x_4, x_3 = -17 + 4x_4\}$

ix) $\{x_1 = 23, x_2 = 9, x_3 = 19\}$ y no hay solución respectivamente.

2. Calcula, si existe, la inversa de la matriz A en los siguientes casos

$$\text{i)} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{ii)} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{iii)} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

i.e. encuentra una matriz $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ tal que $AB = I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\text{i)} B = \begin{pmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \text{ no existe,} \quad \text{iii)} B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra el valor de A^n y demuestra el resultado utilizando el método de inducción.