Tarea 7 29/11/2020

Consideramos el método:

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{h}{4}\left(f_{n+2} + 8f_{n+1} + 3f_n\right)$$ Método Lineal Multipaso 2-pasos.

Supongamos que verifica (H_{MN}). Ver si se verifica el criterio de la raíz e identificar su orden de consistencia.

Criterio de la raíz

Veamos cuál es el polinomio característico:

$$p(\zeta) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j \cdot y_{n+j}^{j} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y_{n+1} + \alpha_2 \cdot y_{n+2}^{2} \quad \text{siendo} \begin{cases} \alpha_0 = -2 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$P(\zeta) = y_{n+2}^{2} + y_{n+1} - 2$$

Resolvemos la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ $\quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tenemos dos soluciones, se cumple $|x_2| = 1 \leq 1$ ✓

Pero tenemos $|x_1| = 2 < 1$ ¡NO

Luego no verifica el criterio de la raíz.

Orden de consistencia $\quad \alpha_0 = -2 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \beta_0 = 3/4 \quad \beta_1 = 2 \quad \beta_2 = 1/4$

Usaremos la proposición que dice que un MLM es consistente de orden $p \geq 1$

$$\Longleftrightarrow \quad c_q = \frac{1}{q!}\left[\sum_{j=0}^{K} \alpha_j j^q - \sum_{j=0}^{K} \beta_j j^{q-1}\right] = 0 \qquad q = 0, 1, \dots, p$$

y la constante de error $c_{p+1} \neq 0$.

$$c_0 = \sum_{j=0}^{k=2} \alpha_j = -2 + 1 + 1 = 0 \ ✓$$

$$c_1 = \left[\sum_{j=0}^{k=2} \alpha_j j - \sum_{j=0}^{k=2} \beta_j\right] = 1 + 2 - \left(\frac{3}{4} + 2 + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0 \ ✓$$ Orden al menos 1

$$c_2 = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^2 - 2\sum_{j=0}^{2} \beta_j \cdot j\right] = \frac{1}{2}\left[1 + 4 - 2\left(2 + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + 4 - 4 - 1\right] = 0 \ ✓$$ Orden al menos 2.

$$c_3 = \frac{1}{6}\left[\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^3 - 3\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^2\right] = \frac{1}{6}\left[1 + 8 - 3\left(2 + \frac{1}{4}\cdot 4\right)\right] = \frac{1}{6}\left[1 + 8 - 6 - 3\right] = 0 \ ✓$$ Orden al menos 3.

$$c_4 = \frac{1}{24}\left[\sum_{j=0}^{2} \alpha_j j^4 - 4\sum_{j=0}^{2} \beta_j j^3\right] = \frac{1}{24}\left[1 + 16 - 4\left(2 + \frac{1}{4}\cdot 8\right)\right] = \frac{1}{24}\left[1 + 16 - 8 - 8\right] = \frac{1}{24} \neq 0$$

$R_n = C_4 \cdot h^4 \Longrightarrow$ EL ORDEN ES EXACTAMENTE 3 $\qquad \tau = \frac{R_n}{h} = C_4 \cdot h^3$

Tarea 7.

$$y_{n+2} - y_n = \frac{2h}{3}\left(f_{n+2} + f_{n+1} + f_n\right).$$

El método cumple el criterio de la raíz (por tanto es 0-estable) ya que las raíces de x^2-1, que es el 1er polinomio característico, son $x=1$, $x=-1$.

Además es un método lineal de dos pasos con:

$\alpha_0=-1$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$ $\quad \beta_0=\frac{2}{3}$, $\beta_1=\frac{2}{3}$, $\beta_2=\frac{2}{3}$,

así que es un método simétrico y su orden será par.

Con esta información estudiamos solo las condiciones de orden impar:

$$C_1 = \sum_{j=0}^{2} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{2} \beta_j = 2 - \frac{2}{3}(1+1+1) = 0 \checkmark$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}\left(\sum_{j=0}^{2} j^3\alpha_j - 3\sum_{j=0}^{2} j^2\beta_j\right) = \frac{1}{3!}\left(8 - 3\cdot\frac{2}{3}(4+1)\right) = -\frac{1}{3}.$$

Llegamos a que el orden de consistencia del método es **2**.

TAREA 7

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = h\left(\frac{13}{12}f_{n+2} - \frac{5}{3}f_{n+1} - \frac{5}{12}f_n\right)$$

Supongamos que se verifican las hipótesis (HMN). Ver si se verifica el criterio de la raíz y identificar su orden de consistencia.

- **CRITERIO DE LA RAÍZ.**

El primer polinomio característico sabemos que es;

$$p(x) = x^2 - 3x + 2$$

Hallemos sus raíces;

$$p(x) = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 1, 2.$$

Es decir;

$$p(x) = (x-1)(x-2) \longrightarrow 2 \text{ es raíz de módulo mayor que } 1$$

NO CUMPLE EL CRITERIO DE LA RAÍZ.

Por lo que, no podemos garantizar la 0-estabilidad del M.N.

- **ORDEN DE CONSISTENCIA.**

Identifiquemos los valores de los vectores α y β;

$$\alpha_0 = 2, \alpha_1 = -3, \alpha_2 = 1. \sim \alpha = (2, -3, 1)$$

$$\beta_0 = \frac{-5}{12}, \beta_1 = \frac{-5}{3}, \beta_2 = \frac{13}{12} \sim \beta = \left(\frac{-5}{12}, \frac{-5}{3}, \frac{13}{12}\right)$$

Ahora estudiemos la consistencia en orden;

orden de Consistencia 2.

- Consistente de orden 1;

$$(C_0): \sum_{i=0}^{2} \alpha_i = 2 - 3 + 1 = 0 \checkmark$$

$$(C_1): \sum_{j=0}^{2} j\alpha_j - \sum_{i=0}^{2} \beta_i = \cancelto{0}{0 \cdot 2} + 1\cdot(-3) + 2\cdot 1 + \frac{5}{12} + \frac{5}{3} - \frac{13}{12} =$$

$$= -1 + 1 = 0 \checkmark.$$

- Consistencia de orden 2;

$$(C_2): \frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{2} j^2\alpha_j - 2\sum_{i=0}^{2} i\beta_i\right] = \frac{1\cdot(-3) + 4\cdot 1}{2} + 1\left(\frac{5}{3}\right) - 2\left(\frac{13}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \checkmark$$

- Consistencia de orden 3;

$$(C_3): \frac{1}{3!}\left[\sum_{j=0}^{2} j^3\alpha_j - 3\sum_{i=0}^{2} i^2\beta_i\right] = \frac{-3+8}{3!} + \frac{5}{6} - \frac{13}{6} =$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{8}{6} = -\frac{1}{2} \neq 0. \times$$

Considera el siguiente método con paso equidistante:

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = h\left(\frac{13}{12} f_{n+2} - \frac{5}{3} f_{n+1} - \frac{5}{12} f_n\right)$$

Supongamos que se verifiquen las hipótesis H_{MN}. Ver si se verifica el criterio de la raíz e identificar su orden de consistencia.

Como el método se puede escribir de la forma:

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{n+j} = h.\sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) \qquad n = 0, \dots, N-2$$

con $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -3$, $\alpha_0 = 2$

y $\beta_2 = \frac{13}{12}$, $\beta_1 = -\frac{5}{3}$, $\beta_0 = -\frac{5}{12}$ $\Big\}$ $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$

Entonces, se trata de un método lineal de 2 pasos.

CRITERIO DE LA RAÍZ

Un MN satisface el C.R si $|\alpha_j| \leq 1$ y si $|\alpha_j| = 1 \Rightarrow \alpha_j$ es simple.

Pero $|\alpha_1| = 3$ y $|\alpha_0| = 2$ y 3 y $2 > 1$ $\Rightarrow$ El método NO satisface el criterio de la raíz.

ORDEN DE CONSISTENCIA

El método será consistente si y sólo si

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{2} \beta_j = \sum_{j=0}^{2} j\alpha_j$$

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 3 + 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2} \beta_j &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = -\frac{5}{12} - \frac{5}{3} + \frac{13}{12} = -1 \\ \sum_{j=0}^{2} j\alpha_j &= \alpha_1 + 2\alpha_2 = -3 + 2\cdot 1 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{j=0}^{2} \beta_j = \sum_{j=0}^{2} j\alpha_j$$

$\Rightarrow$ El método es consistente.

El método es consistente de orden p si:

$C_q = 0$ para $q = 0, \dots, p$ y $C_{p+1} \neq 0$. siendo

$$C_q = \frac{1}{q!}\left(\sum_{j=0}^{2} \alpha_j \, j^q - q \sum_{j=0}^{2} \beta_j \, j^{q-1} \right)$$

$$C_0 = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j = 0$$ por ser consistente.

$$C_1 = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j \, j - \sum_{j=0}^{2} \beta_j = 0$$ por ser consistente.

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{2} j^2 \alpha_j - 2 \sum_{j=0}^{2} j \beta_j \right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{j=0}^{2} j^2 \alpha_j = \alpha_1 + 2^2 \alpha_2 = -3 + 4 = 1$$

$$\sum_{j=0}^{2} j \beta_j = \beta_1 + 2\beta_2 = -\frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{13}{12} = \frac{1}{2}$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}\left(\sum_{j=0}^{2} j^3 \alpha_j - 3 \sum_{j=1}^{2} j^2 \beta_j \right) = \frac{1}{3!}\left(5 - 3 \cdot \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3!} \cdot (-3) = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$$\sum_{j=0}^{2} j^3 \alpha_j = \alpha_1 + 8\alpha_2 = -3 + 8 = 5$$

$$\sum_{j=0}^{2} j^2 \beta_j = \beta_1 + 4\beta_2 = -\frac{5}{3} + 4 \cdot \frac{13}{12} = \frac{8}{3}$$

$C_0 = C_1 = C_2 = 0$ y $C_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ El método es consistente de orden 2.

☒