ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 3: Aplicaciones lineales

1. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

(a) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (2x, y-x)$.
(b) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (y,x)$.
(c) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = xy$.
(d) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (\sin x, y)$.
(e) $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $F(x) = (2x, 0)$.
(f) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = e^{x+y+z}$.
(g) $F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ definida por $F(x) = (2x, 0, x/2)$.
(h) $F : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ definida por $F(p(x)) = p'(x)$.
(i) $F : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ definida por $F(x,y) = \begin{pmatrix} 5x & 0 \\ x-3y & x \end{pmatrix}$
(j) $F : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n$ definida por $F(A) = A^T$.
(k) $I : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ continua}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$.
(l) $J : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ derivable}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $J(f) = (f'(-1), f(2) + f'(0))$.

2. (i) Halla $T(1,0)$ si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal para la que sabemos que $T(3,1) = (1,2)$ y $T(-1,0) = (1,1)$.

(ii) Lo mismo sabiendo que $T(4,1) = (1,1)$ y $T(1,1) = (3,-2)$.

3. Decide en cada caso si existe una aplicación lineal con las propiedades que se indican. (Si existe defínela y si no existe da una justificación).

(a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(1,-1,1) = (1,0)$ y $T(1,1,1) = (0,1)$.
(b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(\alpha_i) = \beta_i$ $(i = 1,2,3)$ con $\alpha_1 = (1,1)$,
$\alpha_2 = (2,-1), \alpha_3 = (-3,2), \beta_1 = (1,0), \beta_2 = (0,1)$ y $\beta_3 = (1,1)$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_3 - x_1).$$

Determina la imagen por T del plano $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

5. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ la aplicación definida por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)x^2 + (c+d)x$.

(a) Demuestra que f es lineal y halla bases para el núcleo de f y la imagen de f.
(b) Halla la matriz de f respecto a la base estándar de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base $\{x^2+1, x^2+3x, 5\}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$.

6. Sean $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ c-d & 5a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, -c, d-a).$$

(a) Halla las matrices de f y g respecto a las bases estándar.

(b) Comprueba que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Halla la matriz de f y las coordenadas de $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

(c) Halla la matriz de g respecto a la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(d) Halla la matriz de $g \circ f$ respecto a las bases estándar y respecto la base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ y la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

(e) Relaciona las diferentes matrices obtenidas.

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{(2,1,1), (1,1,1), (1,-1,1)\}.$$

(a) Calcula la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

(b) Calcula las coordenadas en la base $\mathcal{B}_1$ del vector cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$ son $(3,-2,1)$.

8. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentra la matriz A de f respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ (tanto en el espacio de partida como en el de llegada).

(b) Encuentra la matriz D de f respecto de la base $\mathcal{C}$ y la base $\mathcal{B}$ formada por los vectores siguientes:

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Calcula $D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Encuentra las coordenadas del vector $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{B}$.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

(a) Halla la matriz de T en la base estándar y la matriz de T respecto a la base $\{(1,0,1), (-1,2,1), (2,1,1)\}$.

(b) Demuestra que T es un isomorfismo y da una expresión para T^{-1}.

10. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Demuestra que:

(a) Los vectores $u_1 = v_1 + v_2, u_2 = v_2 + v_3$ y $u_3 = v_3 + v_1$ son linealmente independientes.

(b) Los vectores $w_1 = v_1, w_2 = v_1 + v_2$ y $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$ son linealmente independientes.

(c) Tres vectores cualesquiera u_1, u_2, u_3 del subespacio $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son independientes $\Leftrightarrow$ sus coordenadas respecto a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ son vectores independientes de $\mathbb{R}^3$.

(Sugerencia: escribe la matriz del endomorfismo $f : F \to F$ caracterizado por $f(v_i) = u_i, i = 1,2,3$ y deduce que f es un isomorfismo).

11. Sean f y g dos aplicaciones lineales. Demuestra que:

(a) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$

(b) Si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{\vec{0}\}$, entonces $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f+g)$.

12. Sea $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada. Demuestra que f es lineal, escribe su mariz respecto a la base estándar de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ y describe su núcleo y su imagen.

13. Sean $V_1, V_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $V_1 \oplus V_2 = V$. Definimos la función $p_1 : V \to V$ como la aplicación que asocia a cada vector $u \in V$ su proyección sobre V_1 en la dirección de V_2, es decir, si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, entonces $p_1(u) = v_1$.

(a) Demuestra que p_1 es lineal y que $p_1^2 = p_1$.

(b) Si $B_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $B_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de V_1 y V_2 respectivamente escribe la matriz de p_1 respecto a la base $B = B_1 \cup B_2$.

(c) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podría definir la proyección de manera similar?

14. Sean $V_1, V_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $V_1 \oplus V_2 = V$. Definimos la función $s : V \to V$ como la aplicación que asocia a cada vector $u \in V$ su simétrico sobre V_1 en la dirección de V_2, es decir, si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, entonces $s(u) = v_1 - v_2$.

(a)Demuestra que s es lineal y que $s^2 = id$.

(b) Si $B_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $B_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de V_1 y V_2 respectivamente escribe la matriz de s respecto a la base $B = B_1 \cup B_2$.

(c) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podría definir la simetría de manera similar?

HOJA 3: Aplicaciones lineales

$\boxed{1.}$

h) $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ definida por $F(p(x)) = p'(x)$

$$(\alpha p(x) + \beta q(x))' = \alpha p'(x) + \beta q'(x)$$

k) $I: \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f \text{ continua}\} \to \mathbb{R}$ definida por $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx + \beta \int_0^1 g(x)\,dx$$

l) $J: \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f \text{ derivable}\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $J(f) = (f'(-1), f(2) + f'(0))$

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))'\Big|_{x=-1} = \alpha f'(x) + \beta g'(x)\Big|_{x=-1} = \alpha f'(-1) + \beta g'(-1)$$

otra): $T(f) = f(x_0)$ es lineal

porque $T(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) =$

$$= \alpha T(f) + \beta T(g)$$

$\boxed{2.}$ a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(-1,0) = (1,1)$; $[T(3,1) = (1,2)]$; $T(1,0) = ?$

$$T(1,0) = -T(-1,0) = (-1,-1)$$

b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(4,1) = (1,1)$; $T(1,1) = (3,-2)$; $T(1,0) = ?$

Si damos $(1,0) = \alpha(4,1) + \beta(1,1) \Rightarrow T(1,0) = \alpha T(4,1) + \beta T(1,1) =$

$$= \alpha(1,1) + \beta(3,-2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{3} \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$T(1,0) = \frac{1}{3}(1,1) - \frac{1}{3}(3,-2) = \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$$

5. $f: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_{\mathbb{R}}[x]$ definida por $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)x^2 + (c+d)x$

a) $\underbrace{\text{Demuestra que es lineal}}_{\text{obvio}}$, y halla bases del núcleo y la imagen de f.

$$\operatorname{Ker} f = \{ v \in M_2(\mathbb{R}) : f(v) = 0 \}$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (a-b)x^2 + (c+d)x = 0 \iff \begin{cases} a - b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

Base de soluciones:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base de } \operatorname{Ker} f = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Im} f = \{ f(v) : v \in M_2(\mathbb{R}) \}$$

$$= \left\langle f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle x^2, -x^2, x, x \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Base de } \operatorname{Im} f = \{ x^2, x \}$$

b) Hallar la matriz de f respecto de la $\underbrace{\text{base estándar}}_{C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}}$ $M_2(\mathbb{R})$ y la base $\underbrace{\{x^2 + 1, \; x^2 + 3x, \; 5\}}_{B}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$

$$M_{CB}(f) = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

coordenadas de $f(e_1)$ según B

$f(e_2)$ según B

$f(e_3)$ según B

$f(e_4)$ según B

$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2$

$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -x^2$

$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x$

$f(e_4) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x$

$$\begin{array}{c} x^2 \\ x \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow$$

continuación 5.b

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{I}}$ $\begin{cases} t = -\frac{\ }{5} \\ y = 1 + 5z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$\boxed{\text{II}}$ $\begin{cases} z = \frac{1}{15} \\ y = 5z = \frac{1}{3} \\ x = -y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$M_{CB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1/15 & 1/15 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3.}$

a) $T(1,-1,1) = (1,0)$

$T(1,1,1) = (0,1)$

$T(?) =$ el vector que quiera

b) $T(1,1) = (1,0)$

$T(2,-1) = (0,1)$

$[T(-3,2) = (1,1)]$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{cases} \beta = \frac{-5}{3} \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$T(-3,2) = T(\alpha(1,1) + \beta(2,-1)) = \alpha T(1,1) + \beta T(2,-1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

No existe, $T(-3,2)$ está obligado a valer $\left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}\right)$.

$\boxed{11.}$ a) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f+g)$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Ker} f = \{v \in V \ / \ f(v) = 0\} \\ \operatorname{Ker} g = \{w \in W \ / \ g(w) = 0\}\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{v \in \operatorname{Ker} f \wedge v \in \operatorname{Ker} g \ / \ f(v) \wedge g(v) = 0\}$$

$\operatorname{Ker}(f+g) = \{v \text{ tal que } f(v) + g(v) = 0\}$

$$\Rightarrow \text{si } \begin{array}{l} f(v) = 0 \\ g(v) = 0 \end{array} \Rightarrow f(v) + g(v) = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f+g)$$

b) Si $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{\vec{0}\}$, entonces $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f+g)$

$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{w \text{ tal que } w = f(v_1) \wedge w = g(v_2)\}$

$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\vec{0}\} = \nexists\, w : w \neq \vec{0} \quad w = f(v_1) \wedge w = g(v_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ si $w = f(v_1) = g(v_2) \Rightarrow w = 0$ $(*)$

$\operatorname{Ker}(f+g) = \{v : f(v) + g(v) = 0\} = \{v : f(v) = g(-v) = w \overset{(*)}{\Rightarrow} w = 0\}$

$\operatorname{Ker}(f+g) \subset \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$

por el apartado a sabemos $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f+g) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\vec{0}\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f+g)$

$\boxed{12.}$ $f: \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$

$f(p) = p'$

Matriz respecto de la base canónica

Describe $\ker f$, $\operatorname{Im} f$

$\ker f = \{ p \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] : p' = 0 \} = \{ c : c \in \mathbb{R} \}$

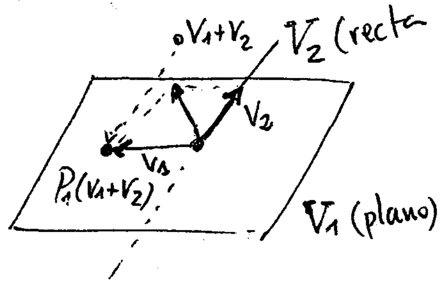
Base de $\ker f = \{1\}$

$\operatorname{Im} f = \{ p(x) = a + bx + cx^2, \ a,b,c \in \mathbb{R} \}$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \end{array}$$

$\boxed{13.}$ $V_1, V_2 \subset V$ subespacio tal que $V_1 \oplus V_2 = V \equiv \{ V_1 \cap V_2 = 0;\ V_1 + V_2 = V \}$

, $P_1 : V \to V$, $P_1(v_1 + v_2) = v_1$, donde $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$



a) P_1 es lineal y $P_1^2 = P_1$ $\quad (P_1^2 = P_1 \circ P_1)$

Si tenemos $u, u' \in V$, entonces $u = v_1 + v_2$,

$u' = v_1' + v_2'$ con $\quad v_1, v_1' \in V_1$
$\quad v_2, v_2' \in V_2$

$$P_1(\alpha u + \beta u') = P_1(\underbrace{\alpha v_1 + \beta v_1'}_{\in V_1} + \underbrace{\alpha v_2 + \beta v_2'}_{\in V_2}) = \alpha v_1 + \beta v_1' =$$

$$= \alpha P_1(v_1 + v_2) + \beta P_1(v_1' + v_2') = \alpha P_1(u) + \beta P_1(u')$$

<u>Queja</u>

Si $u = v_1 + v_2 = w_1 + w_2$, entonces $P_1(u) = P_1(v_1 + v_2) = v_1$
$= P_1(w_1 + w_2) = w_1$

¿porqué $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$? Porque como $V_1 \oplus V_2$, la representación $u = v_1 + v_2$ es única

$u = v_1 + v_2$, $P_1(u) = v_1$; $P_1^2(u) = P_1(v_1) = v_1$

$P_1(u) = P_1^2(u) \quad \forall u \in V \Rightarrow P_1 = P_1^2$

b) Si $B_1 = \{w_1, \dots, w_m\}$ y $B_2 = \{w_{m+1}, \dots, w_n\}$ son bases de V_1 y V_2, calcular $M_{BB}(P_1)$, $B = B_1 \cup B_2$ (es base V)

¿porqué $w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n$ son independientes?

$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0$

$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = \lambda_{m+1} w_{m+1} - \dots - \lambda_n w_n \in V_1 \cap V_2 = 0$

$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ porque B_1 es l. indep.

$\lambda_{m+1} w_{m+1} + \dots + \lambda_n w_n = 0 \Rightarrow \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0$ porque B_2 es l. indep.

Calculames $p(w_j)$, $j = 1, \dots, n$

$$\left.\begin{array}{l} P_1(w_1) = w_1 \\ \vdots \\ P_1(w_m) = w_m \\ P_1(w_{m+1}) = 0 \\ \vdots \\ P_1(w_n) = 0 \end{array}\right\} M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & & \vdots \\ & & & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times n-m} \\ 0_{n-m\times m} & 0_{n-m\times n-m} \end{pmatrix}$$

porque $P_1(\underset{V_1}{0} + \underset{V_2}{v_2}) = P_1(0) = 0$

$\operatorname{Ker} P_1 = V_2$; $\operatorname{Im} P_1 = V_1$

c) Si $V_1 + V_2$ no es suma directa, ¿puede definirse P_1 de manera similar?

Si $V_1 + V_2 \neq V$

- $V_1 \cap V_2 \neq 0 \Rightarrow \underset{V_1 \cap V_2}{v} \neq 0$

$P_1(v + 0) = v$
$P_1(0 + v) = 0$
contradicción

$\boxed{10.}$

c) $u_1, u_2, u_3 \in F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son l. independientes $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ sus coordenadas respecto de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ son vectores independientes de $\mathbb{R}^3$.

$B := \{v_1, v_2, v_3\}$ base de F

(sugerencia: escribe la matriz de $f: F \to F$, $f(v_i) = u_i$, deduce que f es un isomorfismo).

$$u_j = \alpha_1^j v_1 + \alpha_2^j v_2 + \alpha_3^j v_3$$

los vectores que me interesan son:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_3^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1^3 \\ \alpha_2^3 \\ \alpha_3^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $M_{BB}(f)$ es invertible porque sus columnas son vectores l. indep. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ tiene inversa $\Rightarrow$ f es un isomorfismo

OBS) Si f es inyectiva, entonces lleva conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes ($v_1, \dots, v_k$ indep $\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_k)$ son indep

f isomorfismo + v_1, v_2, v_3 indep $\Rightarrow$ $u_1, u_2, u_3 = f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ son l. independientes.

$\boxed{\Rightarrow}$ u_1, u_2, u_3 son independientes $\underset{\dim F = 3}{\Rightarrow}$ son base $\Rightarrow$ f lleva una base (B) en otra base ($\{u_1, u_2, u_3\}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es invertible: $f^{-1}(u_j) = v_j$ lo que define una aplicación lineal y $(f \circ f^{-1})(u_j) = u_j \Rightarrow f \circ f^{-1} = id$ $\Rightarrow f$ es invertible (isomorfismo)

$(f^{-1} \circ f)(v_j) = v_j \Rightarrow f^{-1} \circ f = id$ $\Rightarrow$ sus columnas son l. independientes

4. En $\mathbb{K}$

$B_1 = \{(1,0,1),\ (-1,1,1),\ (1,-1,0)\}$ $\qquad$ $B_2 = \{(2,1,1),\ (1,1,1),\ (1,-1,1)\}$

a) Matriz de cambio de base de B_2 a B_1. $M_{B_2B_1}$

$$M_{B_1C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{B_2C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedad

- $M_{B_2B_3}(f) \cdot M_{B_1B_2}(g) = M_{B_1B_3}(f \circ g)$ $\qquad$ // $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- $M_{B_1B_2} = M_{B_1B_2}(id)$
- $\left(M_{B_1B_2}(f)\right)^{-1} = M_{B_2B_1}(f^{-1})$
- $M_{B_1B_2}{}^{-1} = M_{B_2B_1}$

$$M_{B_2B_1} = M_{CB_1} \cdot M_{B_2C} = \underbrace{M_{B_1C}{}^{-1} \cdot M_{B_2C}}$$

$$\left(M_{B_1C} \mid M_{B_2C}\right) = \sim \cdots \sim = \left(I \mid M_{B_1C}{}^{-1} \cdot M_{B_2C}\right)$$

b) Coordenadas según B_1 del vector cuyas coordenadas según B_2 son

$(3,2,-1) = w$

$$M_{B_2B_1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = w \text{ en coordenadas de } B_1$$

8. $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}$$

a) La matriz A de f respecto de la base canónica C (tanto en salida como en llegada)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matriz D de f según C y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{D = M_{CB}(f)}$

Sabemos: $\begin{cases} A = M_{CC}(f) \\ M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$D = M_{CB}(f) = M_{CB} \cdot M_{CC}(f) = M_{BC}^{-1} \cdot M_{CC}(f) = M_{BC}^{-1} \cdot A$$

c) Calcula $D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = w$

d) Encuentra las coordenadas de $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ según B

Es el vector w, porque se calculan como $M_{CB}(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$