ECUACIONES LINEALES DE 2º ORDEN

~~Solucionar la homogénea~~ → Lista de coef. indeterminados
ejemplos
más comunes.

TEOREMAS DE LIAPUNOV & CHETAEV: ¿Solo valen para resolver la estabilidad en (0,0) o en cualquier punto?

SISTEMAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES:
CASO DE NÚMEROS IMAGINARIOS

EJERCICIO 4 HOJA 4

Prolongabilidad

¿Potencial es lo mismo que integral primera?

POTENCIAL
→ $x'' = f(x) \quad (= -U'(x))$ $\quad$ $U(x)$ es el potencial

1 dimensión

$x : I \to \mathbb{R}$

dimensión más alta: $x'' = -\nabla U \quad x : I \to \mathbb{R}^d \quad d > 1$

INTEGRAL 1ª

cantidad constante en las órbitas.

EDO más simple: $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$ ← sólo depende de x

Entonces: $y = \int f(x)\,dx$

(*) RECORDAR: Toda estas integrales originan una constante, determinable por un P.V.I.

EDO de ecuaciones separables o variables separadas:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

Entonces: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

Isoclinas: $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$

$y' = \tan\theta$ = pendiente a la recta tangente al gráfico de $y(x)$ en $(x_0, y(x_0))$

Para esto, utilizamos CAMPOS DE PENDIENTES: ver estas pendientes para muchos pto

TRAYECTORIAS ORTOGONALES:

$y' = f(x,y)$ familia original de curvas. Entonces: $\tilde{y}' = \frac{-1}{f(x,y)}$ familia ortogonal.

EDOS DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES HOMOGÉNEAS: $f(tx, ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y)$ ← homogénea grado 0

Esto nos permite hacer $t = \frac{1}{x}$: $f(x,y) = f(1, y/x) = f(1,z)$ con $z = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$. Esto convierte $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ en $z + x\frac{dz}{dx} = f(1,z)$

y podemos separar variables: $\frac{dz}{f(1,z) - z} = \frac{dx}{x}$

ECUACIONES AUTÓNOMAS: $y' = \frac{dy}{dx} = f(y)$ no depende y' de x.

Normalmente aparecen en ejercicios de cálculo de puntos críticos, línea de fase, crecimiento/decrecimiento y estabilidad (ptos. críticos atractores o repulsores).

ECUACIONES EXACTAS: y definida implícitamente como $f(x,y) = cte.$

Derivando respecto a x: $f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x)) \cdot \underbrace{y'(x)}_{\frac{dy}{dx}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{f_x(x,y(x))}_{M} dx + \underbrace{f_y(x,y(x))}_{N} dy = 0$$

¿Cómo reconocerlas? $\Rightarrow \boxed{M_y = N_x}$

¿Resolución?

1. $f = \int M dx + g(y)$ [*]

2. Derivamos [*] respecto a y e igualando a N:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M dx + g'(y) = N$$ despejamos $g'(y)$ e integramos

$\Rightarrow$ Obtenemos $f(x,y) = c$.

FACTORES INTEGRANTES: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ resulta ser no exacta.

Buscamos μ tal que $\mu M dx + \mu N dy = 0$ y sea exacta.

Normalmente se intenta que μ dependa solo de una de las dos variables.

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \quad \text{ecuación}$$

ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN: $y' + P(x)y = Q(x)$ continuas intervalo $[a,b]$

Solución general (libro): $\boxed{y = e^{-\int P dx}\left(\int Q e^{\int P dx} dx + c\right)}$

Apuntes:

$$\boxed{y(x) = \underbrace{\bar{y}(x)}_{\text{solución particular}} + \underbrace{\lambda e^{\int P dx}}_{\text{solución general homogénea}}}$$

$\hookrightarrow \bar{y}(x) = e^{\int P dx}\int Q e^{-\int P dx} dx$

REDUCCIÓN DEL ORDEN:

La ecuación diferencial general de primer orden tiene la forma:

$$\underbrace{F(x, y, y', y'')}_{\text{coef. de } y'' = \text{cero}} = 0$$

Veamos ahora formas de resolver ecuaciones diferenciales de 2º orden con métodos de primer orden:

- **Ausencia variable dependiente**: Si y no aparece $\equiv f(x, y', y'') = 0$
  Entonces hacemos el cambio $z = y' = \frac{dy}{dx}$ e $z' = y'' = \frac{dz}{dx}$
  Resolvemos e integramos z'.

- **Ausencia variable independiente**: Si x no aparece $\equiv f(y, y', y'') = 0$
  Entonces (*) $\underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}} = z$ e $y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \overset{(*)}{=} z \frac{dz}{dy}$
  Generando: $f\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$

EDOs DE SEGUNDO ORDEN

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + y_h(x)}$$

$y_p(x)$ → solución particular

$y_h(x)$ → Solución general homogénea: $y'' + Py' + Qy = 0$

- **¿Cómo conseguimos $y_h(x)$?**

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, entonces $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ es la solución general.

No existe un método general para obtener $y_1(x)$ e $y_2(x)$, pero sí que podemos obtener $y_2(x)$ a partir de $y_1(x)$ utilizando el método de la variación de las constantes, o el método de los coeficientes indeterminados.

OJO: Si $P(x)$ y $Q(x)$ son coeficientes constantes podemos hallar las soluciones de la ecuación homogénea de una forma sencilla: Consideramos el pol. característico $p_c(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ y hallamos sus raíces:

- Dos raíces reales: Soluciones indep. homog.:
  λ_1, λ_2 raíces reales $\longrightarrow e^{\lambda_1 x}$ y $e^{\lambda_2 x}$
- Dos raíces reales iguales: multiplicidad doble
  λ raíz real $\longrightarrow e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$ soluciones indep. homog.
- Dos raíces complejas: $\lambda = a \pm ib$
  $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\operatorname{sen} bx$ soluciones indep. homog.

- ¿Cómo conseguimos $y_p(x)$?

MÉTODO COEFICIENTES INDETERMINADOS:
Útil cuando $R(x)$ es una exponencial, seno, coseno o combinación de tales funciones, como polinomios.

→ revisar hoja 3 + pág 103 Simmons + pág 31 apuntes

MÉTODO VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES / PARÁMETROS:

soluciones particulares homog.

Tenemos $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \xrightarrow{\text{var. consts.}} y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

Entonces resolvemos: $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(x) \end{pmatrix}$ $\qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow C_1' = \frac{-y_2 R(x)}{W} \Rightarrow C_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W}\, dx$$

$$\Rightarrow C_2' = \frac{y_1 R(x)}{W} \Longrightarrow C_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W}\, dx$$

EXISTENCIA, UNICIDAD, PROLONGABILIDAD

Consideremos el P.V.I. $[P] \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Una <u>solución</u> de [P] es una función $y(t)$ derivable en un intervalo $t_0 \in I$ tal que $y(t_0) = y_0$ y tal que para todo $t \in I$ se cumple que $(t, y(t)) \in D$ e $y'(t, y(t))$.
↑subconjunto de definición

<u>TEOREMA 1</u>: Sean f y f_y continuas en $Q = [t_0, t_0+h] \times [y_0 - r, y_0 + r]$.
Entonces el problema [P] posee una única solución definida al menos en un intervalo $I = [t_0, t_0+d]$ con $d \leq h$

Podemos abreviar el teorema y escribir:

→LOCAL fuerte
* <u>TEyU</u>: f y f_y continuas en un entorno de $(t_0, y_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ [P] posee solución única definida al menos en un intervalo que contiene a t_0.

⊛ Esto se puede relajar (como veremos próximamente) si f es Lipschitz

<u>TE</u>: f continua en un entorno de $(t_0, y_0) \Rightarrow$ tiene [P] al menos una solución en un entorno de t_0.

<u>f Lipschitz</u>: Diremos que f es Lipschitz (respecto de la variable y) en $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe L tal que:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in D$$

→LOCAL fino
* <u>TEyU</u>: f continua y Lipschitz respecto de la variable y en $Q = [t_0, t_0+h] \times [y_0 - r, y_0 + r] \Rightarrow$ [P] posee solución única definida al menos en $I = [t_0, t_0 + d]$ con $d = \min\left\{h, \frac{r}{M}, \frac{1}{2L}\right\}$, siendo M el máximo de $|f(t,y)|$ en Q y L constante de Lipschitz.

TEO: Sea $f:[t_0, t_0+h]\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y ...

$\exists L \in \mathbb{R}$ con $|f(t,Y_1) - f(t,Y_2)| \leq L|Y_1 - Y_2| \quad \forall t \in [t_0, t_0+h],\ Y, Y_1 \in \mathbb{R}^d$

(f Lipschitz) $\Longrightarrow$ existe solución global y es única para [P].

Trataremos ahora de prolongabilidad de las soluciones de [P]. Supongamos f y f_y continuas en $D \subset \mathbb{R}^2$ y que (t_0, y_0) es interior a D. Entonces hay una única solución local $y(t)$ definida en $[t_0-d, t_0+d]$. Pero, ¿hasta donde se puede prolongar?, e.d., ¿cuál es el máximo intervalo I en que está definida?

TEOREMA: Si f y f_y son continuas en D la gráfica de la solución $y(t)$ de [P] no se para en el interior de D.
En particular si D es el semiplano $\{t \geq t_0\}$ o bien $y(t)$ está definida en $[t_0, \infty)$, o bien existe t_1 tal que $|y(t)| \xrightarrow[t\to t_1]{} \infty$.

ESTABILIDAD

DEFINICIONES: Si [P] tiene solución única $y(t)$ definida en $[t_0, \infty)$ se dice que $y(t)$ es ESTABLE si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que toda solución $\hat{y}(t)$ con $|y_0 - \hat{y}_0| < \delta$ satisface:

1) $\hat{y}(t)$ existe y está definida en $[t_0, \infty)$
2) $|y(t) - \hat{y}(t)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$

Decimos que $y(t)$ es ASINTÓTICAMENTE ESTABLE si además $\hat{y}(t)$ satisface

3) $|y(t) - \hat{y}(t)| \longrightarrow 0$ cuando $t \to \infty$.

Una solución que NO es estable se dice INESTABLE.

SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES LINEALES

Sean $[S]$ $x' = A(t)x + f(t)$ y $[SH]$ $x' = A(t)x$ con A, f continuas y de periodo T (e.d. $A(t+T) = A(t)$; $f(t+T) = f(t)$)

TEOREMA: $x(t)$, solución de $[S]$, es de periodo $T \iff x(0) = x(T)$

TEOREMA: El sistema $[S]$ tiene una única solución T-periódica $\iff$ el sistema $[SH]$ tiene como única solución T-periódica la trivial $x \equiv 0$.

GRONWALL Y CONSECUENCIAS

$u, f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas con $g \geq 0$ y $u(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)u(s)\,ds$

$$\Rightarrow \quad u(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)\, e^{\int_s^t g(u)du}\, ds$$

CASOS PARTICULARES

1) $f \equiv M$ constante $\Rightarrow$ $u(t) \leq M e^{\int_a^t g(s)ds}$

2) $f \equiv M$, $g \equiv L$ constantes $\Rightarrow$ $u(t) \leq M e^{L(t-a)}$

CONSECUENCIAS

PROPOSICIÓN: Sea Ω abto. en $\mathbb{R}^d$, $F : [a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua y tal que $|F(t,\xi) - F(t,\eta)| \leq L|\xi - \eta|$ $\quad \xi, \eta \in \Omega$, $t \in [a,b]$ $(L \in \mathbb{R}, L \geq 0)$

Sean $X_1, X_2 : [a,b] \longrightarrow \Omega$ C^1, y sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tales que

$$\left|X_j'(t) - F(t, X_j(t))\right| \leq \varepsilon_j \quad t \in [a,b], \; j = 1,2 \quad \left(\|X_j' - F(t, X_j)\|_\infty \overset{\text{en } [a,b]}{\leq} \varepsilon_j \right)$$

Entonces: $$|X_1(t) - X_2(t)| \leq |X_1(a) - X_2(a)|e^{L(t-a)} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{L(t-a)} - 1}{L}$$

$t \in [a,b]$