ORDEN DEL ERROR DE TRUNCATURA : LEAP FROG.

- $y_{n+2} = y_n + 2h \cdot f_{n+1}$ ¿ $Y(t_{n+2}) - y_{n+2}$?

Como orden de truncatura: $y_n = Y(t_n)$, $y_{n+1} = Y(t_{n+1})$.

$$y_{n+2} \overset{LF}{=} y_n + 2h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}) =$$

$y_n = Y(t_n)$
$y_{n+1} = Y(t_{n+1})$

$$= Y(t_n) + 2h \cdot f(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) =$$

$$\overset{PVI}{=} Y(t_n) + 2h \cdot Y'(t_{n+1}).$$

Del desarrollo en TAYLOR obteníamos:

$$Y(t_{n+2}) - Y(t_n) = 2h\, Y'(t_{n+1}) - \frac{h^3}{3} Y'''(s) \qquad s \in [t_n, t_{n+2}].$$

Luego,

$$Y(t_{n+2}) - y_{n+2} = \frac{h^3}{3} Y'''(s) \qquad s \in [t_n, t_{n+2}].$$

ERROR DE TRUNCATURA LOCAL:

$$T_{n+2} = \frac{|Y(t_{n+2}) - y_{n+2}|}{h} = \frac{h^2}{3} \cdot |Y'''(s)| \qquad n = 0, \dots, N-2.$$

ERROR DE TRUNCATURA GLOBAL:

para algún

$$T(h) = \max_{n=2,\dots,N} T_n = \frac{h^2}{3} \cdot \max_{n=2,\dots,N} |Y'''(s)| \qquad s \in [t_{n-2}, t_n].$$

Podemos concluir que el error truncatura es de orden 2.

- Trapecio utilizando solo Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

Por Taylor:

$$Y(t_{n+1}) = Y\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} Y'\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 Y''\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3 Y'''(S_1), \quad S_1 \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$Y(t_n) = Y\left(t_n + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} Y'\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 Y''\left(t_n + \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3 Y'''(S_2), \quad S_2 \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = h\, Y'\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3} Y'''(S) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3, \quad S \in (t_n, t_{n+1}]$$

Por la aproximación del punto intermedio:

$$Y'\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \approx \frac{Y'(t_n) + Y'(t_{n+1})}{2} = \frac{1}{2}\left(f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))\right)$$

$$\Rightarrow Y(t_n) = Y(t_{n+1}) - \frac{h}{2}\left(f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))\right) - \frac{1}{3} Y'''(S) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3$$

Entonces, tomando $y_n = Y(t_n)$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) = Y(t_n) + \frac{h}{2}\left(f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) =$$

$$= Y(t_{n+1}) - \frac{h}{2}\left(f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))\right) + \frac{h}{2}\left(f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) - \frac{1}{3} Y'''(S) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3 =$$

$$= Y(t_{n+1}) + \frac{h}{2}\left(f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))\right) - \frac{1}{3} Y'''(S) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3$$

$$|Y(t_{n+1}) - y_n| \overset{DT}{\leq} \frac{h}{2} \left|f(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})\right| + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3 |Y'''(S)| \leq$$

$$\underset{f \text{ Lipschitz}}{\leq} \frac{h}{2} \cdot L\, |Y(t_{n+1}) - y_{n+1}| + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 |Y'''(S)|$$

$$\left(1 - \frac{h}{2}L\right) |Y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 |Y'''(S)|$$

Tomando h tal que: $1 - \frac{h}{2}L > 0 \Leftrightarrow \frac{h}{2}L < 1 \Leftrightarrow h < \frac{2}{L}$

$$|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \frac{h^3 |Y'''(S)|}{24\left(1 - \frac{h}{2}L\right)}$$

$$\tau_{n+1} = \frac{|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}|}{h} = \frac{h^2 |Y'''(S)|}{24\left(1 - \frac{h}{2}L\right)} \leq \frac{h^2 \cdot M}{24\left(1 - \frac{h}{2}L\right)}, \quad \text{donde } M = \max_{S \in [t_0, T]} |Y'''(S)|$$

$\Rightarrow$ Error de Truncatura de orden 2.

Ejercicio

El objetivo de éste ejercicio es obtener el orden del error de truncatura para el método del trapecio usando la regla de cuadratura.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(f_n + f_{n+1})}{2} \tag{1}$$

Donde $h = \frac{T-t_0}{N}$, distancia equiespaciada entre los puntos del mallado y $f_n = f(t_n, Y(t_n))$. Primeramente, veamos que, usando la regla de cuadratura:

$$\mathrm{Y}(\mathrm{t}_{n+1}) - Y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, Y(s))\; ds = \frac{h(f(t_n,Y(t_n))+f(t_{n+1},Y(t_{n+1}))}{2} - \frac{f''(\xi)h^3}{12}$$

(2)

Donde $\xi \in [t_n, t_{n+1}]$. Para calcular el error de truncatura cometido en cada paso, tenemos que ver cómo se comporta la diferencia

$$\frac{Y(t_{n+1}) - y_{n+1}}{h}$$

Veamos que utilizando (1):

$$Y(t_{n+1}) - y_{n+1} = Y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h(f_n + f_{n+1})}{2} = Y(t_{n+1}) - Y(t_n) - \frac{h(f_n + f_{n+1})}{2}$$

Aplicando lo obtenido por (2):

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) - \frac{h(f_n + f_{n+1})}{2} = \frac{h(f(t_n, Y(t_n)) + f(t_{n+1}, Y(t_{n+1}))}{2} - \frac{f''(\xi)h^3}{12} - \frac{h(f_n + f_{n+1})}{2}$$

Podemos realizar cancelaciones y obtener:

$$Y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h(f(t_{n+1}, Y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} - \frac{f''(\xi)h^3}{12}$$

Ahora, podemos tomar valores absolutos y utilizar que f es Lipschitz:

$$|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \frac{|f''(\xi)|h^3}{12} + \frac{hL|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}|}{2}$$

Despejando en la inecuación:

$$(1 - \frac{hL}{2})|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \frac{|f''(\xi)|h^3}{12}$$

Tomando ahora un número $0 < K < (1 - \frac{hL}{2}) < 1$, lo cual podemos hacer puesto que coger ese número K solo implica hacer pequeño h:

$$K < 1 - \frac{hL}{2} \rightarrow h < \frac{2(1-K)}{L}$$

Finalmente:

$$\frac{Y(t_{n+1}) - y_{n+1}}{h} \leq \frac{|Y(t_{n+1}) - y_{n+1}|}{h} \leq \frac{|f''(\xi)|h^2}{12K}$$

Por lo que concluimos que el orden de truncatura de éste método es dos.

HOJA 1

② Mallado equidistante, ¿orden de truncatura?

c) Runge: $y_{n+1} = y_n + hF(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f_n)$

Información que conozco:

① $Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = h_n F\left(t_n + \frac{h_n}{2}, Y(t_n + \frac{h_n}{2})\right) + \frac{1}{3} Y'''(s_1)\left(\frac{h_n}{2}\right)^3, s_1 \in (t_n, t_{n+1})$

② $Y(t_n + \frac{h_n}{2}) = Y(t_n) + \frac{h_n}{2} F(t_n, Y(t_n)) + \frac{1}{2} Y''(s_2)\left(\frac{h_n}{2}\right)^2, s_2 \in (t_n, t_n + \frac{h_n}{2})$

Veamos:

$$Y(t_{n+1}) - y_{n+1} = Y(t_{n+1}) - y_n - hF\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f_n\right) =$$

$$= Y(t_{n+1}) - Y(t_n) - hF\left(t_n + \frac{h}{2}, Y(t_n) + \frac{h}{2} F(t_n, Y(t_n))\right) \overset{\text{uso ①!}}{=}$$

$$= hF\left(t_n + \frac{h}{2}, Y(t_n + \frac{h}{2})\right) + \frac{1}{3} Y'''(s_1)\left(\frac{h}{2}\right)^3 - hF\left(t_n + \frac{h}{2}, Y(t_n) + \frac{h}{2} F(t_n, Y(t_n))\right)$$

$$\Rightarrow |Y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \frac{h^3}{2^3 \cdot 3} |Y'''(s_1)| + h\left|F(t_n + \tfrac{h}{2}, Y(t_n + \tfrac{h}{2})) - F(t_n + \tfrac{h}{2}, Y(t_n) + \tfrac{h}{2} Y'(t_n))\right|$$

desigualdad Δ!

$$\Rightarrow |Y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq \frac{h^3}{2^3 \cdot 3} |Y'''(s_1)| + hL\left|Y(t_n + \tfrac{h}{2}) - Y(t_n) - \tfrac{h}{2} Y'(t_n)\right| \overset{\text{uso ②!}}{=}$$

la función F es Lipschitz respecto a la 2ª var.

$$= \frac{h^3}{2^3 \cdot 3} |Y'''(s_1)| + hL\left|\frac{h^2}{2^3} Y''(s_2)\right| = \frac{h^3}{2^3}\left(\frac{1}{3}|Y'''(s_1)| + L|Y''(s_2)|\right)$$

Podemos suponer $\exists M_n$ tq $\frac{1}{3}|Y'''(s_1)| + L|Y''(s_2)| \leq M_n$

$\Rightarrow$ El error local de truncamiento, $T_{n+1} = \frac{Y(t_{n+1}) - y_{n+1}}{h} \leq \frac{h^{\cancel{3}\,2}}{2^3} \frac{M_n}{\cancel{h}} = \frac{M_n}{2^3} h^2$ (orden 2)

mallado equidistante!

$\Rightarrow$ El error global de truncamiento, $T(h) = \frac{M}{2^3} h^2$, donde $M = \max_{n=0,\dots,N-1} M_n$ (orden 2)