Teoría de la integral y de la medida
Hoja n^0 4 *(Integración y teoremas de convergencia)* **SOLUCIONES**

1.- Sea $f(x) : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ definida mediante $f(x) = 0$, si x es racional, $f(x) = n$, si n es el número de ceros inmediatamente después del punto decimal en la representación de x en la escala decimal. Calcular $\int f(x)dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

SOL: Por la definición que nos dan, se tiene que $f(x) = n$ en el conjunto $I_n = (10^{-n-1}, 10^{-n}] \cap \mathbb{Q}^c$. De esta forma podemos escribir $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \chi_{I_n}(x)$. Usando que la medida de Lebesgue de I_n es la misma que la del intervalo $\tilde{I}_n = (10^{-n-1}, 10^{-n}]$, es decir, $9/10^{n+1}$ su integral es

$$\int f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{9}{10^{n+1}} = \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \frac{1/10}{(1-1/10)^2} = \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9}.$$

2.- Sea $f(x) = 0$ en cada punto del conjunto ternario de Cantor en [0,1]. Sea $f(x) = p$ en cada intervalo del complementario de longitud $\frac{1}{3^p}$. Demostrar que f es medible y calcular $\int f(x)dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

SOL: El complementario del conjunto de Cantor en $[0,1]$ viene dado por un abierto de la forma $\bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{p-1}} I_{p,k}$, donde los $I_{p,k}$ son intervalos abiertos disjuntos cada uno de medida 3^{-p}. La función f se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} p\, \chi_{I_{p,k}}(x),$$

y su integral vale por tanto

$$\int f dm = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} p\, m(I_{p,k}) = \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{2^{p-1}}{3^p} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \left(\frac{2}{3}\right)^p = \frac{1}{2} \frac{2/3}{(1-2/3)^2} = 3.$$

3.- Sea $f(x)$ la función definida en $(0,1)$ mediante $f(x) = 0$, si x es racional, $f(x) = [\frac{1}{x}]$ si x es irracional ($[\frac{1}{x}]$ es la parte entera de $\frac{1}{x}$). Calcular $\int f(x)dm$ siendo m la medida de Lebesgue.

SOL: Observamos primero que $[y] \geq y - 1$. Como el conjunto de números racionales tiene medida 0 con respecto a la medida de Lebesgue, se sigue que $f(x) \geq \frac{1}{x} - 1$ c.t.p. Por tanto

$$\int f dm \geq \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = \infty.$$

4.- Llamemos $d_i(x)$ a los dígitos del desarrollo decimal $0.d_1d_2...$ de un $x \in (0,1)$. Decir por qué son convergentes las siguientes series:

$$f(x) = \sum_i d_i(x)/2^i \quad g(x) = \sum_i (-1)^{d_i(x)}/2^i,$$

y hallar $\int_0^1 f$, $\int_0^1 g$, expresándolas como sumas de series. ¿Por qué son válidas esas expresiones?

SOL: $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{9}{2}$ y $\int_0^1 g(x)\, dx = 0$, que ya veremos con calma ...

5.- Sea $f_{2n-1} = \chi_{[0,1]}$ $\quad f_{2n} = \chi_{(1,2]}$ $n = 1, 2, \ldots$ Comprobar que se verifica la desigualdad de Fatou estrictamente.

SOL: $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ porque $f_n(x) = 0$ bien si n es par o bien si n es impar. Por tanto $\displaystyle\int \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0 < \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = 1$.

6.- Comprobar $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x} dm = \infty$, siendo m la medida de Lebesgue.

7.- Sea $f_n \geq 0$, medible, $\lim f_n = f$, $f_n \leq f$ $\quad \forall n$. Comprobar que $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$. (Sugerencia: Usar el lema de Fatou y que $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$)

SOL: Por el Lema de Fatou y las hipótesis, $\displaystyle\int f d\mu = \int \lim f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$.

8.- Sea $f_n(x) = \min(f(x), n)$ siendo $f(x) \geq 0$ y medible. Demostrar que $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.

SOL: Basta observar que $\{f_n\}_n$ es una sucesión creciente de funciones medibles y que $\lim f_n(x) = f(x)$ puntualmente $\forall x$. A continuación se usa el TCM.

9.- Sean $f \geq 0$, $g \geq 0$ medibles $f \geq g$, $\int g d\mu < \infty$. Probar que

$$\int f d\mu - \int g d\mu = \int (f - g) d\mu$$

10.- Sean $f_n(x)$ funciones medible no negativas y acotadas. Supongamos que $f_n(x) \downarrow f(x)$ y que para algún k se verifica $\int f_k d\mu < \infty$. Probar que (**TCM para sucesiones decrecientes**):

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

(Sugerencia: Formar la sucesión $g_n = f_k - f_{k+n}$).

SOL: La sucesión $\{g_n\}_n$ es creciente y cumple $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f_k(x) - f(x), \forall x$. Por el TCM,

$$\int f_k d\mu - \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f_k - f_{k+n}) d\mu = \int f_k d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Despejando queda el resultado.

11.- Sea $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3, \ldots, \geq a_n, \ldots$, una sucesión de números positivos tales que $\lim a_n = 0$. Sea $f_n(x) = a_n/x$, $\quad x > a > 0$. Comprobar que f_n decrece a cero uniformemente pero $\int f_n dm = \infty$ para $\forall n$.

12.- Sea $f_n : [0, 1] \to [0, \infty)$, definida mediante

$$f_n(x) = n, \text{ si } 0 < x < \tfrac{1}{n}$$
$$f_n(x) = 0, \text{ en otro caso.}$$

Comprobar que $f_n \to 0$, puntualmente pero $\int f_n dm = 1$.

13.- Sea $g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$ integrable. Sea $\{E_n\}$ uns sucesión decreciente de conjuntos tal que $\cap_1^\infty E_n = \emptyset$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g d\mu = 0$

SOL: Usar TCD con $f_n = g\chi_{E_n}$ y función dominante $F = |g|$.

14.- Sea $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ medible y $f\in L^1(m)$. Sea $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida mediante $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dm$. Probar que $F(x)$ es continua. (Sugerencia: Usar teoremas de convergencia)

Probar que dados $x_1<x_2<x_3<\ldots$ números reales, se tiene

$$\sum_k |F(x_{k+1})-F(x_k)|\le \int_{\mathbb{R}}|f|dm$$

SOL: La continuidad se deduce del TCD de la forma siguiente: fijamos x y elegimos $\{z_n\}_n$ una sucesión convergente a x, supongamos además que $z_n<x,\forall n$. Definimos $f_n(y)=f(y)\chi_{(z_n,x)}(y)$ (es decir, $f_n(y)=f(y)$ si $z_n<y<x$ y $f_n(y)=0$ en el resto. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}|F(z_n)-F(x)|\le\lim_{n\to\infty}\int_{z_n}^x|f|dm=\lim_{n\to\infty}\int|f_n|dm=0,$$

porque $\lim_{n\to\infty}f_n(y)=0,\forall y$ y las f_n están dominadas por la función integrable $|f|$.

15.- Sea $\mu(X)<\infty$. Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L^1(\mu)$, con $f_n(x)\to f(x)$ uniformemente. Demostrar que $f\in L^1(\mu)$ y que $\int f_n d\mu\to\int f d\mu$. (Sugerencia: Estudiar la sucesión $\varepsilon_n(x)=f_n(x)-f(x)$, escribir $f(x)=f_n(x)-(f_n(x)-f(x))$.

16.- Sea $A=[0,1]\cap\mathbf{Q}$, entonces $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\ldots\}$. Definimos $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ mediante: $f_n(x)=1$ si $x\in\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ y $f_n(x)=0$ en los demás casos. Probar que f_n es integrable Riemann, hallar $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ y estudiar si $f(x)$ es integrable Riemann

SOL: f es la función de Dirichlet, luego no es integrable Riemann.

17.- Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}}=1.$

(Sugerencia: Usar que para $n>1$ $(1+\frac{x}{n})^n\ge\frac{x^2}{4}$)

SOL: Definimos $f_n(x)=\dfrac{1}{(1+\frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}}$. Se tiene $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=e^{-x},\forall x>0$. Sea por otro lado

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^{1/2}} & \text{si}\quad x<1\\ \frac{4}{x^2} & \text{si}\quad 1\le x\end{cases}$$

Entonces, F es integrable y $f_n(x)\le F(x)$, si $n\ge2$. Por el TCD, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n dx=\int_0^\infty e^{-x}dx=1.$

18.- Sea $f_n(x)=\frac{nx-1}{(x\log n+1)(1+nx^2\log n)}$, $x\in(0,1]$. Comprobar que $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ y sin embargo $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2}$.

(Sugerencia: $f_n(x)=\frac{-1}{x\log n+1}+\frac{nx}{(n\log n)x^2+1}$).

SOL: Con la sugerencia, podemos encontrar una primitiva de forma directa que nos da

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log[(n\log n)x^2+1]}{2\log n}-\frac{\log(x\log n+1)}{\log n}\right)\Bigg|_0^1\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log[(n\log n)+1]}{2\log n}-\frac{\log(\log n+1)}{\log n}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esto no contradice el TCD porque no existe función “dominante” que permita usarlo.

19.- Calcular $\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x^2}dx$, estudiando los casos $a<0$, $a=0$, $a>0$.
¿ Qué teoremas de convergencia son aplicables ?

SOL: Sea $f_n(x)=\frac{n}{1+n^2x^2}$. Se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0, \forall x>0$. Definimos $F(x)=\frac{1}{x^2}$. Entonces, F es integrable en (a,∞) si $a>0$ y $f_n(x)\le F(x)$, $\forall n$. Por el TCD, $\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f_n dx=0$ si $a>0$.

Sin embargo, dado cualquier $\epsilon>0$ el cambio de variable $y=nx$ nos da

$$\int_0^\epsilon \frac{n}{1+n^2x^2}dx=\int_0^{n\epsilon}\frac{1}{1+y^2}dy=\arctan(n\epsilon)\longrightarrow\frac{\pi}{2},\quad \text{si}\quad n\to\infty.$$

Por simetría, lo mismo ocurre en $(-\epsilon,0)$. Por tanto $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n dx=\frac{\pi}{2}$ y $\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f_n dx=\pi$, si $a<0$.

20.- Calcular $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}dx$.

SOL: Sea $f_n(x)=\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}$. Se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0, \forall x>0$. Definimos

$$F(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<1 \\ \frac{4}{x^2} & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}$$

Entonces, F es integrable y $f_n(x)\le F(x)$, si $n\ge 2$ (porque, por el desarrollo del binomio de Newton, $(1+x^2)^n\ge 1+nx^2+\frac{n(n-1)}{2}x^4$). Por el TCD, $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n dx=0$.