ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
VARIEDADES LINEALES

CAROLINA VALLEJO RODRÍGUEZ

Resumen. Como vamos a centrarnos en hacer los problemas tipo de la hoja 5 de cara al examen parcial, os escribo una guía para hacer los ejercicios de un corte más teórico.

Recordad que dados puntos $P_1, \ldots, P_k$ de un espacio afín $\mathbb{A}^n$, la variedad que generan estos puntos, es decir, la mínima variedad lineal que contiene a los puntos, es exactamente

$$P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_k} \rangle.$$

También recordad que los puntos $P_1, \ldots, P_k$ de $\mathbb{A}^n$ son afínmente independientes si los $k-1$ vectores $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_k}$ son linealmente independientes. Si escribimos las coordenadas de los vectores en una matriz, serán linealmente independientes si, y sólo, si la matriz tiene rango $k-1$. Como tal matriz tiene rango menor o igual que n (porque estamos en un espacio afín n-dimensional, así que las coordenadas son n-tuplas), podemos concluir que un espacio afín n-dimensional tiene como máximo $n+1$ puntos afínmente independientes. Hasta aquí la teoría por ahora.

Ejercicio 3. Demuestra que un subconjunto H del espacio afín $\mathbb{A}^n$ es una variedad lineal si, y sólo si, para todo par de puntos de H la recta que pasa por esos dos puntos está contenida en H.

Prueba. Primero notad que la implicación ($\Rightarrow$) es consecuencia directa de la definición de variedad lineal. Para probar la implicación ($\Leftarrow$) vamos a proceder por inducción, pero primero tenemos que preguntarnos, ¿qué queremos probar por inducción? Si H fuera una variedad lineal, entonces $P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_l} \rangle \subseteq H$, para cualquier conjunto de puntos $\{P_1, \ldots, P_l\}$ de H. Supongamos que esto se cumple, vamos a ver que esta condición es suficiente para que H sea variedad lineal. Sea k el número máximo de puntos afínmente independientes de H. Sean $\{P_1, \ldots, P_k\}$ puntos afínmente independientes de H. Si $H = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_k} \rangle$, entonces hemos acabado porque H es variedad lineal. En otro caso, cogemos $R \in H \setminus P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_k} \rangle$. Como las variedades lineales $\{R\}$ y $P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_k} \rangle$ no se cortan, tenemos que $\overrightarrow{P_1R} \notin \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_k} \rangle$, es decir, $\{R, P_1, \ldots, P_k\}$ son afínmente independientes; pero esto contradice la elección de k.

Con esto acabamos de ver que para probar ($\Leftarrow$) basta probar que dados puntos de H (que podemos suponer afínmente independientes), la variedad lineal que generan está dentro de H. Y esto es lo que vamos a probar por inducción. El enunciado concreto es el siguiente:

Sea H un subconjunto del espacio afín $\mathbb{A}^n$ tal que para todo par de puntos en H la recta que los une está contenida en H. Entonces, dados k puntos afínmente independientes $P_1, \dots, P_k$ en H, la variedad lineal que generan $P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_k} \rangle$ está dentro de H.

Veamos unos cuantos casos para hacernos la idea.

- Si $n = 1$, entonces la variedad lineal que genera $P_1 \in H$ es $\{P_1\} \subseteq H$.
- Si $n = 2$, entonces la variedad lineal que generan P_1 y P_2 es la recta $P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle$, que está contenida en H por hipótesis.
- Si $n = 3$, entonces la variedad que generan es el plano $\Pi = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \rangle$. Supongamos que Π no está contenido en H. Lo que sí sabemos por hipótesis es que la recta r_1 que pasa por P_1 y P_2 y la recta r_2 que pasa por P_1 y P_3 están incluidas en H. Sea $R \in \Pi$, podéis convenceros de que existe una recta que pasa por R y que corta a r_1 y r_2 haciendo un dibujo. Basta coger $r = R + \langle v \rangle$, de forma que $\langle \overrightarrow{P_1P_3} \rangle \neq \langle v \rangle \neq \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle$. Es decir, cogemos una recta que pase por R y que no sea paralela ni a r_1 ni a r_2. Tenemos que $r \cap r_1 = \{R_1\}$ y $r \cap r_2 = \{R_2\}$. Ahora, la recta que pasa por R_1 y R_2 está contenida en H por hipótesis, y contiene a R, por tanto, $R \in H$. Esto es lo que queríamos, porque hemos cogido un punto cualquiera de Π y hemos probado que está en H.

Como no nos ha hecho falta usar inducción, aunque la idea va a ser la misma, vamos a hacer el caso siguiente:

- Si $n = 4$, entonces la variedad lineal que generan los cuatro puntos es $L = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4} \rangle$ y tiene dimensión 3. De nuevo, si está contenida en H hemos acabado, supongamos que no lo está, y sea $R \in H \setminus L$. Queremos ver que existe una recta que pasa por dos puntos de H y que pasa por R, por hipótesis esto implicará que $R \in H$. Por inducción, sabemos que los planos generados por cualesquiera tres puntos de $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ están contenidos en H. (En el caso anterior $n = 3$ no había que aplicar inducción porque las rectas que unen dos puntos de H están en H por hipótesis). Entonces $\Pi_1 = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \rangle$ y $\Pi_2 = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_4} \rangle$ están contenidos en H. Ahora, tenemos que convencernos de que existe una recta que pasa por R y que corta a estos dos planos, es decir, queremos una recta que no sea paralela a ninguno de estos dos planos. Basta con tomar la recta $r = R + \langle v \rangle$ donde la dirección v no está contenida ni en el plano $\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \rangle$ ni en el plano $\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_4} \rangle$. Si $v_2 = \overrightarrow{P_1P_2}$, $v_3 = \overrightarrow{P_1P_3}$ y $v_4 = \overrightarrow{P_1P_4}$ podemos tomar $v = v_2 + v_3 + v_4$ (porque v_4 es linealmente independiente a Π_1 y v_3 es linealmente independiente a P_2).

Para el caso general, podéis completar los detalles del argumento siguiente:

Dados k puntos afínmente independientes en H, las variedades lineales generadas por $k-1$ de estos puntos están contenidas en H por inducción. Cogemos dos conjuntos distintos de $k-1$ puntos y consideramos las variedades lineales que generan $L_1, L_2 \subseteq H$. Ahora, sea R un punto cualquiera en la variedad generada por los k puntos, podemos encontrar una recta que corta a L_1 y L_2 y que contiene a R, por hipótesis esta recta está contenida en H. En particular $R \in H$, como queríamos demostrar.

Ejercicio 5. Decide de manera razonada si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(a) Dos rectas paralelas en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ o bien son coincidentes o bien no se cortan.

Solución. Sean $r = P + \langle v \rangle$ y $s = Q + \langle w \rangle$ dos rectas en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$. Como son paralelas $\langle v \rangle = \langle w \rangle$. Ahora se cortan si, y sólo si, $\overrightarrow{PQ} \in \langle v, w \rangle = \langle v \rangle$, si y sólo si, $Q \in r$, si, y sólo si, $r = s$. Este enunciado es verdadero.

(b) Dos rectas en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ que no se cortan deben ser paralelas.

Solución. Sean $r = P + \langle v \rangle$ y $s = Q + \langle w \rangle$ dos rectas en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Como no se cortan $\overrightarrow{PQ} \notin \langle v, w \rangle$; pero como nuestro espacio vectorial es $\mathbb{R}^2$ de dimensión 2, esto puedo ocurrir, si y sólo si, $\langle v, w \rangle = \langle v \rangle$, es decir si, y sólo si, $\langle v \rangle = \langle w \rangle$, y en este caso las rectas son paralelas. El enunciado es verdadero.

(c) En $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ con $n \geq 3$ dos rectas que no se cortan no tienen por qué ser paralelas.

Solución. También es verdadero, simplemente hay que pensar que cuando $n \geq 3$ tenemos dimensión suficiente para hacer que las rectas se crucen sin ser paralelas. Por ejemplo, podemos tomar $r = P + \langle v \rangle$ y $s = Q + \langle w \rangle$, de modo que $\langle v \rangle \neq \langle w \rangle$. Esto asegura que las rectas no son paralelas. Sabemos que las rectas no se cortan si $\overrightarrow{PQ} \notin \langle v, w \rangle$, pero estamos en dimensión ≥ 3 y $\langle v, w \rangle$ tiene dimensión 2, así que podemos escoger P y Q de modo que esto pase.

Ejercicio 9. Muy sucintamente, notad que si fijamos un punto (P_1, P_2, P_3) que sea solución del sistema, entonces cualquier solución del sistema se puede escribir como $(P_1, P_2, P_3) + v$ donde $v = (v_1, v_2, v_3)$ es un vector del espacio vectorial definido por la ecuación matricial $Ax = 0$, donde A es la matriz 3 por 3 dada en el enunciado.

Ejercicio 10. Sean L y M dos variedades lineales de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con $L + M = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ y $L, M \neq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, y supongamos que las dimensiones de L y M son las mínimas posibles con estas propiedades. Describir las dimensiones de L y de M así como su posición relativa.

Solución. ¿Qué significa dimensiones mínimas con estas propiedades? Por ejemplo, para $n = 3$, dos rectas que se cruzan cumplen estas propiedades, y también un plano y un punto que no esté contenido en este plano. Los pares de dimensiones son $(1, 1)$ y $(0, 2)$. No hay un orden total en pares de números naturales, así que la respuesta dependerá de cómo entendamos el enunciado. Podéis comprobar lo siguiente. Si entendemos como dimensiones mínimas,que la dimensión máxima de entre las dimensiones de L y de M es mínima, entonces la solución sería una recta (dimensión 1) y una variedad de dimensión $n - 2$ que se cruzan. Si entendemos que la dimensión mínima de entre la de L y la de M es mínima, entonces la solución sería un hiperplano (dimensión $n - 2$) y un punto fuera del hiperplano (dimensión 0). Lo que sí está claro es que para que la dimensión sea mínima en cualquiera de los dos sentidos, debemos imponer $L \cap M = \emptyset$. Se trata de jugar con la fórmula de Grassman a partir de esto.