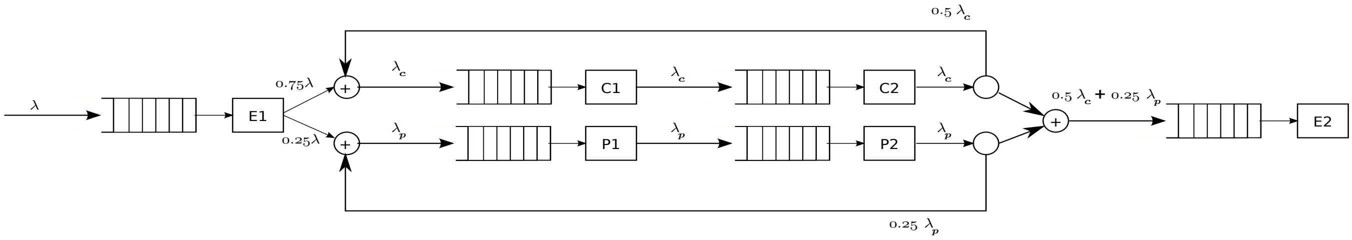
# Solución al Problema 21 del Tema 5

1. El diagrama del sistema viene dado por la siguiente figura




donde tenemos que:

- $\lambda = 1/D$ peticiones por día.
- $\mu_{E1} = 1$ peticiones por día.
- $\mu_{C1} = 1/4$ peticiones por día.
- $\mu_{C2} = 1/2$ peticiones por día.
- $\mu_{P1} = 1/10$ peticiones por día.
- $\mu_{P2} = 1/4$ peticiones por día.
- $\mu_{E2} = 1/0{,}25 = 4$ peticiones por día.

El sistema descrito se puede ver como una red colas abierta, pues el tiempo entre llegadas está distribuido de forma exponencial, todos los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial y las colas se pueden considerar de tamaño infinito. La probabilidad de salir de la red es mayor que uno. Suponemos que cada empleado está en estado estacionario (no recibe más peticiones de las que soporta su capacidad máxima), por lo que podemos aplicar el teorema de Jackson e interpretar todo el sistema como sistemas independientes.

Si cada sistema está en estado estacionario, la tasa de llegadas tiene que ser igual a la tasa de proceso o salida de cada empleado. Por ello, las tasas de llegada a cada empleado són:

- $\lambda_c = 0{,}75\lambda + 0{,}5\lambda_c$ con lo que tenemos que $\lambda_c = \frac{0{,}75}{0{,}5}\frac{1}{D} = \frac{1{,}5}{D}$.
- $\lambda_p = 0{,}25\lambda + 0{,}25\lambda_p$ con lo que tenemos que $\lambda_p = \frac{0{,}25}{0{,}75}\frac{1}{D} = \frac{1}{3D}$.
- $0{,}5\lambda_c + 0{,}75\lambda_p = \frac{0{,}75}{D} + \frac{0{,}75}{3D} = \frac{2{,}25}{3D} + \frac{0{,}75}{3D} = \frac{3}{3D} = \frac{1}{D} = \lambda$.

2. El tiempo medio de estancia en el sistema (tiempo de procesamiento del bufete) vendrá dado por por la suma de distitnos tiempos:

   $W_T = W_{E1} + 0{,}75W_C + 0{,}25W_P + W_{E2}$

   donde $W_C$ es el tiempo medio que pasa una petición en el sistema que incluye a los empleados C1 y C2 y $W_P$ es el tiempo medio que pasa un apetición en el sistema que incluye a los empleados P1 y P2. Estos dos sistemas se pueden describir cada uno como una red de colas abierta.

   Como sabemos que E1 y E2 son descritos mediante sistemas M/M/1, estos tiempos vienen dados por:

   - $W_{E1} = \frac{1}{\mu_{E1}-\lambda} = \frac{1}{1-1/D} = \frac{D}{D-1}$
   - $W_{E2} = \frac{1}{\mu_{E2}-\lambda} = \frac{1}{4-1/D} = \frac{D}{4D-1}$

   Para calcular $W_C$ y $W_P$ es necesario utilizar el teorema de Jackson y para ello realizamos las suposiciones necesarias para que se cumpla. En particular, $\lambda_c \leq \mu_{C1}$ y $\lambda_c \leq \mu_{C2}$ $\lambda_p \leq \mu_{P1}$ y $\lambda_p \leq \mu_{P2}$.

   Utilizando el teorema de Jackson y de Little, tenemos que $W_C$ y $W_P$ serán respectivamente:

   - $W_C = \frac{L_{C1}+L_{C2}}{0{,}75\lambda}$
   - $W_P = \frac{L_{P1}+L_{P2}}{0{,}25\lambda}$

   donde $L_{C1}$, $L_{C2}$, $L_{P1}$, $L_{P2}$ resperentan el número medio de peticiones en el sistema de cada empleado y vienen determinadas por las fórmulas correspondientes del modelo M/M/1. En particular:

- $L_{C1} = \frac{\lambda_c}{\mu_{C1}-\lambda_c} = \frac{1{,}5/D}{1/4-1{,}5/D} = \frac{1{,}5}{D/4-1{,}5}$.
- $L_{C2} = \frac{\lambda_c}{\mu_{C2}-\lambda_c} = \frac{1{,}5/D}{1/2-1{,}5/D} = \frac{1{,}5}{D/2-1{,}5}$.
- $L_{P1} = \frac{\lambda_p}{\mu_{P1}-\lambda_p} = \frac{1/3D}{1/10-1/3D} = \frac{1/3}{D/10-1/3}$.
- $L_{P2} = \frac{\lambda_p}{\mu_{P1}-\lambda_p} = \frac{1/3D}{1/4-1/3D} = \frac{1/3}{D/4-1/3}$.

Con lo que tenemos que:

$W_T = W_{E1} + 0{,}75 W_C + 0{,}25 W_P + W_{E2} = \frac{D}{D-1} + D\left(L_{C1} + L_{C2}\right) + D\left(L_{P1} + L_{P2}\right) + \frac{D}{4D-1} =$

$= \frac{D}{D-1} + \frac{1{,}5D}{D/4-1{,}5} + \frac{1{,}5D}{D/2-1{,}5} + \frac{D}{3D/10-1} + \frac{D}{3D/4-1} + \frac{D}{4D-1} =$
$= \frac{D}{D-1} + \frac{6D}{D-6} + \frac{3D}{D-3} + \frac{10D}{3D-10} + \frac{4D}{3D-4} + \frac{D}{4D-1}$