Estadística I
Grado en Matemáticas, UAM, 2018-2019

Hoja 2. Normal multidimensional y distribuciones asociadas

Normales multidimensionales

1. El vector $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\intercal$ sigue una normal n-dimensional con vector de medias $\mathbf{m}$ y matriz de varianzas/covarianzas V.

Consideramos el vector $\mathbb{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)^\intercal$ dado por

$$Z_j = \sum_{i=1}^{j} X_i \qquad \text{para cada } j = 1, \ldots, n.$$

a) Justifica por qué $\mathbb{Z}$ sigue una normal multidimensional.
b) Calcula su vector de medias y su matriz de varianzas/covarianzas

- en el caso en el que $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$;
- en el caso en el que $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, V)$, donde V es la matriz cuyas entradas son

$$v_{i,j} = 0 \quad \text{si } i \neq j, \qquad \text{y} \qquad v_{i,i} = i \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

2. El vector $\mathbb{X} = (X_1, X_2, X_3)^\intercal$ sigue una normal tridimensional, con parámetros:

$$\text{vector de medias:} \quad \mathbf{m} = (1, 1, 0), \qquad \text{matriz de varianzas/covarianzas:} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Consideramos el vector $\mathbb{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)^\intercal$ dado por

$$\begin{cases} Z_1 &= X_1 + X_2 \\ Z_2 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ Z_3 &= 2X_1 + X_2 \end{cases}$$

Calcula las medias de Z_1, Z_2 y Z_3, la varianza de Z_3, y la covarianza entre Z_1 y Z_2.

3. Sean $Y, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ variables normales estándar independientes. Sea $\rho \in (0, 1)$. Definimos el vector aleatorio $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\intercal$ mediante

$$X_j = \sqrt{\rho}\, Y + \sqrt{1-\rho}\, Z_j \qquad \text{para cada } j = 1, \ldots, n.$$

Dando por sentado que el vector $\mathbb{X}$ sigue una normal multidimensional, halla su vector de medias y su matriz de varianzas/covarianzas.

Sobre la χ^2, la t de Student y la F de Fisher

4. Sea $Z \sim \chi^2_n$.

a) Comprueba que, para $n > 4$,

$$\mathbf{E}(1/Z^2) = \frac{1}{(n-2)(n-4)}\,.$$

b) Calcula el coeficiente de asimetría de Z en términos de n.

(Sugerencia: si X es normal estándar, $\mathbf{E}(X^2) = 1$, $\mathbf{E}(X^4) = 3$ y $\mathbf{E}(X^6) = 15$).

5. Comprueba que si $Z \sim F_{n,m}$ entonces

$$\mathbf{V}(Z) = \frac{2(m+n-2)m^2}{n(m-4)(m-2)^2}\,.$$

Ejercicio adicional

6. Para cada $n \geq 1$, la función de densidad de una variable t de Student con n grados de libertad viene dada por

$$f_{t_n}(t) = D_n\Big(\frac{1}{1+t^2/n}\Big)^{(n+1)/2}, \quad \text{donde } D_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

Comprueba que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_{t_n}(t) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}.$$

Sugerencia: usa la fórmula de Stirling

$$n! \sim n^n\, e^{-n}\, \sqrt{2\pi n} \quad \text{cuando } n \to \infty$$

para deducir que

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

y de ahí que

$$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \sim \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \text{cuando } n \to \infty.$$