53 - 56

$\boxed{53}$ $a \in \mathbb{R}$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x_1^3 + x_2^3 - 3a x_1 x_2 \;,\; y x_1 - x_2) \qquad \begin{array}{l} x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ y \in \mathbb{R} \end{array}$$

1. Hallar $A \subset \mathbb{R}$ y $g: A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ / $f(g(y), y) = 0 \quad y \in A$.

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 - 3a x_1 x_2 = 0 \\ y x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Necesitamos despejar x_1 y x_2 en términos de la y.

CASO 1: Si $x_1 = 0 \Rightarrow x_2^3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow A = \mathbb{R} \quad g(y) = (0,0)$

CASO 2: Si $x_1 \neq 0 \Rightarrow x_2 = y x_1$

$$x_1^3 + y^3 x_1^3 - 3ay x_1^2 = 0$$

$$x_1^2 (x_1 + y^3 x_1 - 3ay) = 0$$

Como $x_1 \neq 0 \Rightarrow x_1(1+y^3) = 3ay \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3ay}{1+y^3} \\ x_2 = \dfrac{3ay^2}{1+y^3} \end{cases}$

$$g(y) = \left(\frac{3ay}{1+y^3} , \frac{3ay^2}{1+y^3} \right) \qquad A = (-1, \infty)$$

2. Determinar $(x,y) \in \mathbb{R}^3$ tal que $M(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right]$ no sea invertible.

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3a x_2 & 3x_2^2 - 3a x_1 \\ y & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det (M(x,y)) = (-3)\left(x_1^2 - a x_2 + y(x_2^2 - a x_1) \right) = 0 \Rightarrow y = - \frac{x_1^2 - a x_2}{x_2^2 - a x_1}$$

Puntos $\longrightarrow \left(x_1, x_2, - \dfrac{x_1^2 - a x_2}{x_2^2 - a x_1} \right)$ Estos son los ptos. que no cumplen las hipótesis del TFImpl.

Como no cumplen las hipótesis, no podemos saber si en estos ptos. existe. Por ejemplo: $(0,0,0)$ $\quad A = \mathbb{R} \quad g(y) = (\ldots)$

ó $x_1 = 2, \; x_2 = 1 \quad y = - \dfrac{4-a}{1-2a}$

Si $a = 4$ $\quad \overset{x_1\, x_2\, y}{(2,1,0)}$

$g(y) = (\ldots)$ y $A = (-1, \infty)$ $\quad$ Puntos en los que no se cumplen las hipótesis pero sí existe la función g.

3. Hallar abto. $B \subset \mathbb{R}$ y una función $h: B \to \mathbb{R}^2$ ...

tales que $\begin{cases} \det M(h(y),y) = 0 \\ y h_1(y) - h_2(y) = 0 \end{cases}$. Calcular $f_1(h(y),y)$ para los $y \in B$.

$h(y) = (x_1(y), x_2(y))$ $\qquad \begin{cases} x_1^2 - a x_2 + y(x_2^2 - a x_1) = 0 \\ y x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = x_1 y \end{cases}$

$$x_1^2 - a y x_1 + y(y^2 x_1^2 - a x_1) = 0 \Rightarrow x_1 \underbrace{\left(x_1 - ay + y^3 x_1 - ay\right)}_{=0} = 0$$

Suponemos $x_1 \neq 0$:

$(1+y^3) x_1 = 2ay$ $\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2ay}{1+y^3} \\ x_2 = \dfrac{2ay^2}{1+y^3} \end{cases} \Rightarrow h(y) = \left(\dfrac{2ay}{1+y^3}, \dfrac{2ay^2}{1+y^3}\right)$

$$f_1(h(y),y) = \left(\frac{2ay}{1+y^3}\right)^3 (1+y^3) - 3a \frac{4a^2y^3}{(1+y^3)^2}$$

$$\frac{8a^3y^3}{(1+y^3)^2} - \frac{12a^3y^3}{(1+y^3)^2} = \boxed{\frac{-4a^3y^3}{(1+y^3)^2}}$$

4. Utilizar polares para representar gráficamente en $\mathbb{R}^2$ g y h.

$g(y) = \Big(\underbrace{\dfrac{3ay}{1+y^3}}_{X}, \underbrace{\dfrac{3ay^2}{1+y^3}}_{Y}\Big)$ $\qquad X = r\cos\theta$, $\quad Y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ $\qquad y = \dfrac{Y}{X} = \tan\theta$

$$X = \frac{3a \frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{\mathrm{sen}^3\theta}{\cos^3\theta}} = \frac{3a\,\mathrm{sen}\theta \cos^2\theta}{\mathrm{sen}^3\theta + \cos^3\theta} = r\cos\theta \Rightarrow r = \frac{3a\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{\mathrm{sen}^3\theta + \cos^3\theta}$$

$$Y = \frac{3a\,\mathrm{sen}^3\theta\cos\theta}{\mathrm{sen}^3\theta + \cos^3\theta} \qquad r(\theta) = \left(\frac{3a\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{\mathrm{sen}^3\theta + \cos^3\theta}\right)$$

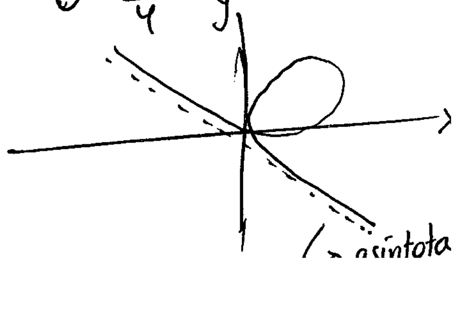
$\theta = 0$

$\mathrm{sen}^3\theta = -\cos^3\theta$ se anula denominador en $\dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ $\qquad \theta \in \left(\dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

La gráfica es simétrica con respecto a $\theta = \frac{\pi}{4}$

$r(\theta) = r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\left.\begin{array}{l} Y'(0) = 0 \\ X'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array}\right\}$ tangente pos OK Folium de Descartes



$\boxed{56.}$ Ecuación: $x^3 y_1 + x^2 y_1 y_2 + x + y_1^2 y_2 = 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$
$y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

1. Demostrar que $\exists \Omega$ abtos en $\mathbb{R}^2$, con $y_0 = (-1,1) \in \Omega$ y $\mathcal{U} \in \mathbb{R}$ con $x_0 = 1 \in \mathcal{U}$, tales que para cada $y \in \Omega$ la ecuació tiene una única solución $x = g(y) \in \mathcal{U}$. Demostrar que la función $g: \Omega \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ es de clase C^∞ en Ω.

$f(x, y_1, y_2) = x^3 y_1 + x^2 y_1 y_2 + x + y_1^2 y_2$

Como quiero $x = g(y)$ miro $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,1)$ $\quad$ (antes me aseguro que $f(1,-1,1) = 0$ ✓

$3x^2 y_1 + 2x y_1 y_2 + 1 \overset{(1,-1,1)}{=} -3 - 2 + 1 = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Cumple las hip. del TFI lo aplicamos y ya estar

2. Calcular $\nabla g(y_0)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 y_1}(y_0)$

$x = g(y)$; $g(y)^3 y_1^3 + g(y)^2 y_1 y_2 + g(y) + y_1^2 y_2 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y_1}(y_0) \longrightarrow 3g^2 \cdot \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot y_1 + g^3 + 2g \cdot \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot y_1 y_2 + g^2 y_2 + \frac{\partial g}{\partial y_1} + 2 y_1 y_2 =$

Sustituyo $y_0 = (-1,1)$, $g(y_0) = 1$.

$3 \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_0) \cdot (-1) + 1 - 2 \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_0) + 1 + \frac{\partial g}{\partial y_1}(y_0) - 2 = 0$

$-4 \frac{\partial y}{\partial y_1}(y_0) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial y_1}(y_0) = 0}$

$\frac{\partial f}{\partial y_2} = 3g^2 \frac{\partial g}{\partial y_2} y_1 + 2g \frac{\partial g}{\partial y_2} y_1 y_2 + g^2 y_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} + y_1^2 = 0$

$-3 \frac{\partial g}{\partial y_2} - 2 \frac{\partial g}{\partial y_2} - 1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} + 1 = 0$

$-4 \frac{\partial g}{\partial y_2}(y_0) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y_2}(y_0) = 0$

$\nabla g(y_0) = (0,0)$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1}(y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\frac{\partial g}{\partial y_1} = 0$$

$$6g\frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial g}{\partial y_1}y_1 + 3g^2\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1}y_1 + 3g^2\frac{\partial g}{\partial y_2} + 2\frac{\partial g}{\partial y_2}(\dots) +$$

$$+ 2g\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1}y_1 y_2 + 2g\frac{\partial g}{\partial y_1}y_1 + 2g\frac{\partial g}{\partial y_2}y_2 + g^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1} + 2y_1 = 0$$

Sustituyendo (como $\nabla g(y_0) = (0,0)$)

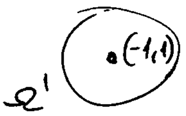
$$3\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1}(y_0)(-1) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1}(y_0)(-1) + 1 + \frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1}(y_0) - 2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_1}(y_0) = -\frac{1}{4}$$

3. Demuestra que $\nexists$ abtos $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ con $y_0 \in \Omega'$ y $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}$ con $-1 \in \mathcal{U}$, tales que para cada $y \in \Omega'$ la ecuación tiene solución única en $\mathcal{U}'$.

No se puede hacer con el TFImpl.

$$x^3 y_1 + x^2 y_1 y_2 + x + y_1^2 y_2 = 0$$



Si $y_1 = -1$:

$$-x^3 - x^2 y_2 + x + y_2 = 0$$

$$-x^2(x + y_2) + x + y_2 = 0$$

$$(x + y_2)(1 - x^2) = 0$$

se anula cuando $x = -y_2$, $x = 1$

Para ptos. $(-1, y_2)$ $\longrightarrow$ $g(-1, y_2) = -1$

$\longrightarrow$ $g(-1, y_2) = -y_2$

55. Dados $b>0$ y una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tales que $f(0) \neq -1$, $\int_0^b f(t)\,dt = 0$, demostrar que la ecuación $x = \int_x^a f(t)\,dt$ tiene, para a suficientemente próximo a b, solución única $x = g(a)$ con $g(a)$ próximo a 0. Demostrar que g es una función C^1 y calcular $g'(b)$. ¿Cómo cambia lo anterior cuando $b=1$ y $f(t) = -1+2t$?

$$x(a) = \int_{x(a)}^{a} f(t)\,dt$$

$$F(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt - x$$

① F es C^1 porque f es C

② $F(0,b) = \int_0^b f(t)\,dt - 0 = 0$ por hipótesis

Quiero ver que $F(g(y),y) = 0$.

Uso TF Impl.

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y f(t)\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_y^x f(t)\,dt\right) = -f(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -f(x) - 1 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,b) = -f(0) - 1 \neq 0 \text{ por hipótesis.}$$

Por el TF Impl. $\exists$ entorno $\mathcal{U}$ de b, un entorno V de 0, y una función C^1 $g: \mathcal{U} \longrightarrow V$ con $g(b) = 0$, y tal que $F(g(y),y) = 0$

$\int_{g(y)}^{y} f(t)\,dt = g(y)$. Si llamamos $\begin{matrix} y = a \\ g(y) = x \end{matrix}$ ya está.

$g'(b)$ $\quad \int_{g(a)}^{a} f(t)\,dt = g(a)$ Derivo respecto a a.

$$f(a) - f(g(a)) \cdot g'(a) = g'(a) \implies g'(a) = \frac{f(a)}{1+f(g(a))}$$

$$g'(b) = \frac{f(b)}{1+f(g(b))} = \frac{f(b)}{1+f(0)}$$

Si $b=1$, $f(t)=-1+2t$

$f(0)=1$ (no puedo usar TFImpl.)

$$\int_0^1 -1+2t\,dt = -t+t^2\Big]_0^1$$

Ecuación: $x=\int_x^a f(t)dt=\int_x^a -1+2t\,dt=(x-a)+a^2-x^2$

$x^2=a(a-1)$ $\quad x(a)$ prox. a 0 cuando a prox. a 1

Si $a<1$

$x^2=a(a-1)<0$

a

1

$\rightarrow x$ no está definido en este lado

$\boxed{54.}$ $x=y_1+y_2\operatorname{sen}x$ $\quad x$ incógnita $\quad \Omega=\{|y_2|<1\}$

$y=(y_1,y_2)$ parámetro

Ⓐ 1. Demostrar que tiene una solución única $x=g(y)$ cuando $y\in$

Demostrar que $g:\Omega\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ es $C^\infty(\Omega)$.

Fijo $(y_1,y_2)\in\Omega$ $\quad |y_2|<1$

$y_1+y_2\operatorname{sen}x-x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

Si $g'(x)=0$ $\quad y_2\cos x=1$

$|y_2\cos x|<|y_2|<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow g$ decreciente $\Rightarrow \exists x_0=x_0(y_1,y$

con $g(x_0)=0$, e.d., $x=y_1+y_2\operatorname{sen}$

$x=g(y)$ existe y es única

Falta difer, cont...

g C^∞ TFImpl.

$F(y_1,y_2,x)=y_1+y_2\operatorname{sen}x-x$

Supongamos $F(y_{10},y_{20},x_0)=0$

$x_0=g(y_{10},y_{20})$

$\frac{\partial F}{\partial x}=y_2\cos x-1\neq 0$ porque $|y_2|<1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(y_{10},y_{20},x_0)\neq 0$

$\Rightarrow$ TFImpl. $\Rightarrow \exists g=g(y_1,y_2)$ con $x_0=g(y_{10},y_{20})$ $\quad g$ es C^∞ úni