Examen del día 22 de diciembre de 2015

N°1.-

$X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} Y$, $A \subset X$, $f_1 \sim_A f_2$, $Y \xrightarrow{g} Z$.

Sea $F : X \times [0,1] \ni (x,t) \longmapsto F(x,t) \in Y$ continua tal que $F(x,0) = f_1(x)$, $F(x,1) = f_2(x)$,

$F(a,t) = f_1(a) = f_2(a)$, $\forall a \in A$.

Definimos $G := g \circ F$. Entonces $G : X \times [0,1] \longrightarrow Z$ continua y también

$G(x,0) = g(F(x,0)) = g \circ f_1(x)$

$G(x,1) = g(F(x,1)) = g \circ f_2(x)$

$G(a,t) = g(F(a,t)) = (g \circ f_1)(a)$

$= (g \circ f_2)(a)$, $\forall a \in A$.

Luego $g \circ f_1 \sim_A g \circ f_2$

<u>nº 2</u>. - $p: S^1 \ni z \longrightarrow z^3 \in S^1$.

Pongamos $z_0 = e^{i\theta_0}$ para $\theta_0 \in [0, 2\pi)$.
Para un intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ con $(b-a) < 2\pi$ denotamos por

$$S_{(a,b)} = \{ z = e^{i\theta} \mid \theta \in (a,b) \}$$

Luego para $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \pi$,

$S_{(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)}$ es un entorno de $z_0 \in S^1$,

y además:

$$p^{-1}(S_{(\theta_0-\varepsilon, \theta_0+\varepsilon)}) = S_0 \cup S_1 \cup S_2$$

donde

$$S_0 = \left\{ z = e^{i\alpha} \;\middle|\; \frac{\theta_0 - \varepsilon}{3} < \alpha < \frac{\theta_0 + \varepsilon}{3} \right\},$$

$$S_1 = \left\{ z = e^{i\beta} \;\middle|\; \frac{\theta_0 + 2\pi - \varepsilon}{3} < \beta < \frac{\theta_0 + 2\pi + \varepsilon}{3} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ z = e^{i\gamma} \;\middle|\; \frac{\theta_0 + 4\pi - \varepsilon}{3} < \gamma < \frac{\theta_0 + 4\pi + \varepsilon}{3} \right\}.$$

Las aplicaciones $p|_{S_j}: S_j \longrightarrow S_{(\theta_0-\varepsilon,\, \theta_0+\varepsilon)}$ son homeomorfismos pues $p|_{S_j}(z)=z^3$ tiene por inversa local $\varphi_j(z)=\varphi_j(e^{i\theta})= e^{i\frac{\theta+2j\pi}{3}}$, $(0\leq j\leq 2)$.

<u>Nº3</u>.- $S \ni [(s,\frac{1}{2})] \xhookrightarrow{i} [(s,\frac{1}{2})] \in M$.

(1)

$M \ni [(x,y)] \xrightarrow{r} [(x,\frac{1}{2})] \in S$ continua.

Además:

$r\circ i([(s,\frac{1}{2})]) = [(s,\frac{1}{2})]$, $\forall\ s\in[0,1]$.

$i\circ r([(x,y)]) = [(x,\frac{1}{2})]$, $\forall x\in[0,1]$.

Consideremos:

$$\begin{array}{ccc} M\times[0,1] & \xrightarrow{H} & M \\ ([(x,y)],t) & \longmapsto & \left[\left(x,\ t\cdot\frac{1}{2}+(1-t)y\right)\right] \end{array}$$

- H está bien definida y es continua. Por ejemplo, si $[(x,y)]=[(1-x,1-y)]$

$H([x,y],t)=\left[(x,t\frac{1}{2}+(1-t)y)\right]=\left[(1-x,\,t\frac{1}{2}+(1-t)(1-y))\right]$

$= \boxtimes$

Además:

$$H([(x,y)],0) = id_M([(x,y)]),$$

$$H([(x,y)],1) = r([(x,y)]),$$

y si $y = 1/2$, entonces $H([(x,\frac{1}{2})],t) = [(x,\frac{1}{2})]$.

(2) Sea $N = S \times [0,1]$. N es homeomorfo a un cilindro. Consideremos las aplicaciones continuas:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h_1} & N \\ [(x,y)] & \longmapsto & \left([(x,\frac{1}{2})], y(1-y)\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{h_2} & M \\ \left([(x,\frac{1}{2})], y\right) & \longmapsto & [(x,y)] \end{array}$$

Entonces:

$$(h_2 \circ h_1)([(x,y)]) = [(x, y(1-y))]$$

$$(h_1 \circ h_2)\left([(x,\frac{1}{2})], y\right) = \left([(x,\frac{1}{2})], y(1-y)\right)$$

Así, basta considerar:

$$L_1 : M \times [0,1] \longrightarrow M$$
$$([(x,y)], t) \longmapsto [(x, y - ty^2)]$$

$$L_2 : N \times [0,1] \longrightarrow N$$
$$\left(\left([(x,\tfrac{1}{2})], y\right), t\right) \longmapsto \left([(x, \tfrac{1}{2})], y - ty^2\right)$$

Y obtenemos que:

$h_2 \circ h_1 \sim id_M$ mediante L_1,

$h_1 \circ h_2 \sim id_N$ mediante L_2.

En consecuencia M y N son homotópicamente equivalentes.

4. -

Indicación:

(*) Si $X \xrightarrow{f} Y$ continua, $Y \xrightarrow{g} X$ continua, y $f\circ g \sim id_Y$

$\Rightarrow \forall y \in Y$ existe una curva γ_y que une y con un punto de $f(X)$.

Sol: Sea $y_0 \in Y$. Sea $G: Y \times [0,1] \to Y$ ~~una~~ homotopía entre $f\circ g$ e id_Y. Así:

$$G(y,0) = id_Y(y) \quad , \quad G(y,1) = f(g(y)) \; , \; \forall y \in Y.$$

Pongamos $\gamma_{y_0}(t) := G(y_0, t)$, $x_0 := g(y_0) \in X$.

Se tiene que $\gamma_{y_0}(0) = y_0$, $\gamma_{y_0}(1) = f(x_0) \in f(X)$.

Así, $\gamma_{y_0} : I \to Y$ es una curva que une y_0 con $f(x_0) \in f(X)$.

Sol. del problema 4:

Como X e Y son homotópicamente equivalentes, existen funciones continuas $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ tales que $f\circ g \sim id_Y$, $g\circ f \sim id_X$.

Como X es conexo, $f(X)$ es conexo.

Para cada $y \in Y \setminus f(X)$, sea γ_y una curva que une y con un punto de $f(X)$; según afirma (*) una tal curva existe. La denotaremos por γ_y.

El conjunto $\Omega_y = \gamma_y(I) \cup f(X)$ es conexo pues es unión de dos conjuntos conexos de intersección no vacía. Además

$$\bigcap_{y \in Y \setminus f(X)} \Omega_y \supset f(X)$$

Luego $\displaystyle\bigcup_{y \in Y \setminus f(X)} \Omega_y$ es conexo. Pero:

$$\bigcup_{y \in Y \setminus f(X)} \Omega_y = \bigcup_{y \in Y \setminus f(X)} \left(\gamma_y(I) \cup f(X)\right) \supset \bigcup_{y \in Y \setminus f(X)} \left(\{y\} \cup f(X)\right)$$

Por lo que $\displaystyle Y = \bigcup_{y \in Y \setminus f(X)} \Omega_y$, luego Y es conexo.