$\boxed{39.}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo

$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, C^2

Son equiv:

1) f convexa en Ω

2) $(\text{Hess} f)_p$ semidef. $\oplus$ $\forall p \in \Omega$

$(2) \Rightarrow (1)$ Hay que ver que $\forall t \in [0,1]$ $\forall x, y \in \Omega$

$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

Sea $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(t) = f(tx + (1-t)y)$

f es $C^2 \Rightarrow g$ es C^2

Si $g'' \geq 0 \Rightarrow g$ es convexa $\Rightarrow g(t) = g(t.1 + (1-t).0) \leq$

$\leq t g(1) + (1-t) g(0) = t f(x) + (1-t) f(y) \Rightarrow f$ convexa

$\to g(t) = f(y + t(x-y))$

$$g'(t) = \langle \nabla f(y + t(x-y)), (x-y) \rangle = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + t(x-y)).(x_i - y_i)$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(y + t(x-y))\,(x_i - y_i)(x_j - y_j) =$$

$$= (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{(y + t(x-y))} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} =$$

$= \text{Hess} f_{(y + t(x-y))} \cdot (x-y) \geq 0$ por hipótesis

$\Rightarrow g$ es convexa $\Rightarrow f$ convexa.

b.3) Son equivalentes: $\to$ (X,d) localmente conexo (1)
$\to$ Comp. conexa de X abiertas (2)

(1) $\Rightarrow$ (2)

Supongamos (X,d) localmente conexo

$p \in X$. Sea C Comp. conexa de p.

X abto. y localm. conexo $\Rightarrow \exists G$ abto, conexo, $p \in G$

$p \in G$, conexo $\Rightarrow G \subseteq C$ porque C es la comp. conexa que contiene a $p \Rightarrow p \in G$ abierto $\subseteq C$.

Como p arbitrario, comp. conexas son abiertas.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Comp. conexa de X son abiertos

b.1) Comprobar que:

$M = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 \leq x \leq 1\}$

no es loc. conexo en ningún punto $(0,y)$, $-1 \leq y \leq 1$.

$A = B((0,y), r=|y|)$ La Comp. conexa que contiene a $p=(0,y)$ en A está en el eje OY.

Si $q \in A \cap M$, $q = (x,y)$, $x>0$ entonces $\exists r_0 > 0$ tal que $\{x<r_0\} \cap A \cap M$ y $\{x>r_0\} \cap A \cap M$ son disjuntos $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $q \in$ a una Comp. conexa diferente de $p=(0,y)$.

b.2) Si (X,d) localmente conexo $\Rightarrow$ todo abto. de X es localm. conexo

A abto. de X

Sea $p \in A$. Como (X,d) es localm. conexo $\Rightarrow \exists G$ conexo abto. con $p \in G \subseteq A$.

Si $x \in O \subseteq A$, con O abierto en A, $\nearrow$ O abto. en X

$\searrow$ $\exists G$ abto. en X de p con G convexo, $p \in G \subseteq O \subseteq A$.

Como G abto. en X, $G \cap A$ abto en A, pero $G \cap A = G$ abto. en A conexo y $p \in G$

$\boxed{36.}$

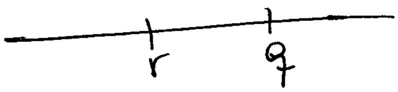
a) $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ para cada $q \in \mathbb{Q}$ calcular su componente conexa

Se define <u>componente conexa</u> que contiene a x como:

$\{y \in X \,/\, \exists$ conexo A con $x \in A,\ y \in A\}$

$x \sim y \Leftrightarrow \exists C$ conexo $: x, y \in C$

Componentes conexas definen una partición de X (clases de equivalencia) en conjuntos disjuntos.



Sea $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq q$, podemos suponer $r < q$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists s \notin \mathbb{Q}$ tal que $r < s < q \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(-\infty, s) \cap \mathbb{Q}}_{\text{abtos. en } \mathbb{Q}} \cup \underbrace{(s, \infty) \cap \mathbb{Q}}_{\text{abtos. en } \mathbb{Q}}$

$A = (-\infty, s) \cap \mathbb{Q}$ $\qquad$ $B = (s, \infty) \cap \mathbb{Q}$

A, B abtos disjuntos que dan una partición, tal que $r \in A$ y $q \in B$ $\Rightarrow$ r y q no están en la misma componente conexa $\Rightarrow$ cada elemento está solo en su componente conexa.

b) (X, d)

<u>Localmente conexo en $p \in X$</u> si $\forall A$ abto., $p \in A$

$\exists G$ abto., conexo, $p \in G \subseteq A$

El espacio (X, d) es localmente conexo si lo es cada uno de sus puntos.

3. Si $A \in M_{n\times n} \setminus \{0\}$ tal que $\forall f$ armónica, $g(y) = f(Ay)$ es armónica, demuestra que $A = \lambda B$, $B^T = B^{-1}$, $\lambda \neq 0$

$f_{ij}(x_1, \dots, x_n) = x_i x_j \quad i \neq j \quad \leadsto g_{ij}$ armónica $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ filas

$\tilde{f}_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}(x_i^2 - x_j^2)$

$\boxed{40.}$ $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, es armónica cuando

$\Delta f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>NOTA:</u> $\Delta f(x) = \text{traza}\left(\text{Hess} f(x)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = 0$

Matrices $n \times n$ $\quad A = \lambda B$, $\lambda \neq 0$, B ortogonal $B^{-1} = B^T$.

Cambio de variables $x = A.y$: $\quad g(y) = f(x) = f(Ay)$

1. $D^2 g(y) = A^T . D^2 f(x) . A$

$$\| $$

$$A^T . D^2 f(Ay) . A$$

$g(y) = f(Ay) = f(x_1, \dots, x_n)$ $\qquad x_i = (Ay)_i = \left[(a_{k\ell}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$

$\longrightarrow = f\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} y_j \right)$

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(Ay) . a_{ki}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_j \partial y_i}(y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(Ay) . a_{\ell j} \cdot a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} (A^T)_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell} (A)_{\ell j}$$

$$= \left(A^T . D^2 f(Ay) . A \right)_{ij}$$

2. Si $f(x)$ armónica y $A = \lambda B$, $B^T = B^{-1}$, $\lambda \neq 0 \implies$

$\implies g(y)$ armónica.

$$\Delta g(y) = \text{traza}\left(D^2 g(y)\right) = \text{traza}\left(A^T . D^2 f(Ay) . A\right) =$$

$$= \text{traza}\left(\lambda B^{-1} . D^2 f(Ay) . \lambda B \right) = \lambda^2 . \text{traza}\left(B^{-1} . D^2 f(Ay) . B \right) =$$

$$= \lambda^2 \,\text{traza}\left(D^2 f(Ay) \right) = \lambda^2 . \Delta f(Ay) = 0$$

$\uparrow$

$\text{traza}(B^{-1} C B) = \text{traza}(C)$

$Df(x+t(y-x)).(y-x)$

Sea $g(t) = \langle y-x, f(x+t(y-x)) \rangle = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)(f_i(x+t(y-x)))$

$g'(t) = \langle y-x, Df(x+t(y-x)).(y-x) \rangle = (y-x)^T . Df(x+t(y-x)).(y-x) > 0$ si $y-x \neq 0$

$\Rightarrow g$ crece $\quad g(0) = \langle y-x, f(x) \rangle \underset{\parallel}{} \rightarrow f(x) = f(y)$

$g(1) = \langle y-x, f(y) \rangle$

$\Rightarrow g(0) = g(1)$ pero $g'(t) > 0$ falla Rolle contradicción

$\boxed{39.}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, conexo

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ C^2. Demostrar que son equivalentes:

(1) f convexa en Ω

(2) $(\text{Hess } f)_p$ es semidef. pos $\forall p \in \Omega$

Teoría:

f convexa : $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y) \quad \forall t \in [0,1], x, y \in \Omega$

Teoría:

$\forall u \in \mathbb{R}^n \quad \text{Hess } f_p(u,u) \geq 0$

Sea $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(t) = f((1-t)x + ty)$ $\quad g$ función C^2, convexa en $[0,1]$

Si lo es, $g''(t) \geq 0$

$g'(t) = Df((1-t)x + ty).(y-x)$

$g''(t) = \text{Hess} f_{(1-t)x+ty} (y-x, y-x) \geq 0$

Si $u \in \mathbb{R}^n$, y quiero ver que en x $\text{Hess} f_x(u,u) \geq 0$

Repito lo de arriba con $y = u + x$ y en $t = 0$

inacabado

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ $\quad$ x, y continuas

$x: (t_{max}, 1) \longrightarrow (0,1)$ $\quad$ con $\lim_{t \to t_{max}^+} x(t) = 0$

$\Rightarrow \exists t_n$ con $x(t_n) = \dfrac{1}{n\pi + \pi/2}$

$$y(t_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x(t_n)}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_{max}^+} \alpha(t) = \lim_{n \to \infty} \alpha(t_n) = (0,1)$$

contradicción

$\alpha(t_{max}) = (0,0)$

cuando $t \to t_{máx}^+$

$\alpha(t) \in S$, $\lim_{t \to t_{max}^+} \alpha(t) = (0,$

por continuidad de α

Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t))$

Existen $t_k \to t_{máx}$ con

$x(t_k) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

$\Rightarrow y(t_k) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x(t_k)} = $

$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1.$

$\Rightarrow \alpha(t_k) \xrightarrow{k \to \infty} (0,1) \neq (0,0)$

contradicción con la continuidad de α

$\boxed{38.}$ $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de C^1.

Demostrar que si $\xi^T Df(x)\, \xi > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow f$ es inyectiva en $\mathbb{R}^n$. $\qquad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

Analizando que es $\xi^T Df(x)\, \xi$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$Df(x): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\qquad \xi \longrightarrow \underbrace{Df(x).\,\xi}_{\in \mathbb{R}^n}$

$(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

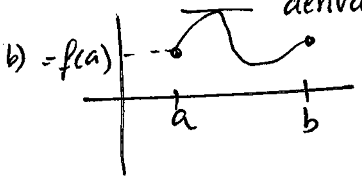
$\Rightarrow \xi^T \cdot Df(x) \cdot \xi = \langle \xi, Df(x).\,\xi \rangle$

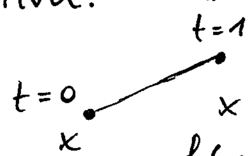
Demostración

Supongamos que no es inyectiva. $\Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}^n$ con

$f(x) = f(y) \in \mathbb{R}^n$

derivada $= 0$ (Rolle)





$x + t(y-x)$

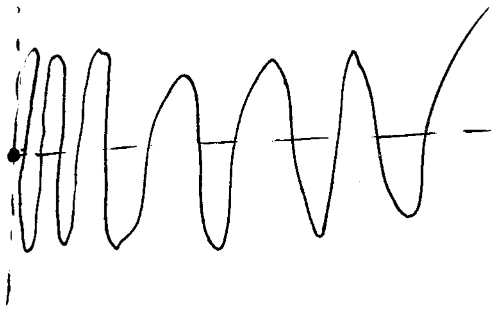
$f(x + t(y-x))$

$f:(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$S = f((0,1))$ $\qquad f(t) = \left(t, \operatorname{sen} \frac{1}{t}\right)$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua} \\ \text{y } (0,1) \text{ conexo} \end{array}\right\} \Longrightarrow S \text{ conexo}$

2. $S_0 = S \cup \{(0,0)\}$ conexo en $\mathbb{R}^2$



$n \in \mathbb{N} \quad X_n = \left(\frac{1}{n\pi}, 0\right)$

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1/n\pi}\right) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$

$X_n \to (0,0)$

$(0,0)$ es de acumulación de S

Como S conexo, S_0 es conexo.

3. **Teoría**

Si C_1, C_2 conexos y $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset \Longrightarrow C_1 \cup C_2$ conexo

$M = L \cup S$ es conexo en $\mathbb{R}^2$

$M = L \cup S \underbrace{\cup (0,0)}_{\substack{\text{se hace esto porque} \\ (0,0) \in L \text{ ya}}} = \underset{\text{conexo}}{L} \cup \underset{\text{conexo}}{S_0} \Longrightarrow M$ conexo

$L \cap S_0 = (0,0) \neq \emptyset$

4. **Teoría**

M es arco-conexo si $\forall p, q \in M$, $\exists \alpha: [0,1] \longrightarrow M$ continua con $\gamma(0) = p$, $\alpha(1) = q$

Supongamos que sí. Sea $p = (0,0)$ y $q = (1, \operatorname{sen} 1)$ y $\alpha: [0,1] \longrightarrow M$, $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$.

$0 \in \alpha^{-1}(p) \subseteq [0,1]$

Sea $t_{máx} = \sup \alpha^{-1}(p) = \sup\{t \in [0,1] / \alpha(t) = (0,0)\}$ $\qquad \forall t \geq t_{máx}$ $\alpha(t) \in S$

$\Longrightarrow \alpha([t_{máx}, 1]) \subseteq \{(0,0)\} \cup \{(x, \operatorname{sen} 1/x) \mid 0 < x \leq 1\}$

2. $M \subset \Omega \subset \bar{M}$ entonces Ω es conexo en (X,d).

Igual que la anterior.

Sol:

Supongamos $\Omega = A \cup B$, A, B abiertos en Ω $\quad A \cap B = \emptyset$

$A = \Omega \cap A_1$
$B = \Omega \cap B_1$ con A_1, B_1 abiertos en X.

$\Rightarrow M = \underbrace{(M \cap A_1) \cup (M \cap B_1)}_{\text{son abiertos en } M}$ disjuntos ya que $(M \cap A_1) \cap (M \cap B_1) \subseteq$

$\subseteq (\Omega \cap A_1) \cup (\Omega \cap B_1) = \emptyset$

Como M conexo, podemos suponer que $M \subseteq A_1$ y $M \cap B_1 = \emptyset$

Supongamos que $\Omega \cap B_1 = \emptyset$. Sea $p \in B = \Omega \cap B_1$

$p \in \Omega$ y por lo tanto $p \in \bar{M}$, $p \in B_1$, B_1 abierto, $p \in B_1 \Rightarrow B_1$ es un entorno abierto de p. $\Rightarrow B_1 \cap M = \emptyset$ contradicción $\Rightarrow \Omega \cap B_1 = \boxed{B = \emptyset}$

con la noción de adherencia

($p \in B_1$ entorno abierto y $p \in M \Rightarrow p \in \bar{M}$

No! la contradicción es que como B_1 entorno abierto de p y $p \in \bar{M}$: $\forall \delta > 0$ $B_\delta(p) \cap M \neq 0$ contradicción con $M \cap B_1 = \emptyset$

$\Rightarrow B_1 \cap M \neq \emptyset$ contrad.

$\Rightarrow \boxed{\Omega \text{ es conexo.}}$

(B) $L = \{(x,0) : -1 \leq x \leq 0\}$ $\qquad S = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\}$

Teoría:

Conexos en $\mathbb{R}$: los intervalos

Si $f: X \longrightarrow Y$ continua y X conexo entonces $f(X) \subseteq Y$.

1. Demostrar que L y S son conexos

L es conexo porque $\underset{\text{CONTINUA}}{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2}$, $x \longmapsto (x,0)$ $\qquad L = \underset{\text{continua}}{f}(\underbrace{[-1,0]}_{\text{conexo}})$

$\Rightarrow L$ conexo

[34.] M conexo en (X, d) métrico

Ⓐ 1) $M_0 = M \cup \{p\}$ es conexo si p es pto. de acumulación de M.

Supongamos que $M_0 = A \cup B$ con A, B abiertos en M_0 con $A \cap B = \emptyset$. Hay que ver que o bien A, o bien $B = \emptyset$.

$$\begin{array}{l} A = M_0 \cap A_1 \\ B = M_0 \cap B_1 \end{array} \quad \text{donde } A_1, B_1 \text{ abiertos en } X$$

Como M conexo y $M \subset M_0$

$$\begin{array}{l} A_2 = M \cap A_1 \\ B_2 = M \cap B_1 \end{array} , \quad A_2 \text{ y } B_2 \text{ son abiertos en } M \text{ disjuntos}$$

$$A_2 \cap B_2 = M \cap A_1 \cap B_1 \subseteq M_0 \cap A_1 \cap B_1 = (M_0 \cap A_1) \cap (M_0 \cap B_1) =$$

$$= A \cap B = \emptyset$$

Uso que M es conexo $\Rightarrow A_2 = \emptyset$ ó $B_2 = \emptyset$

Supongamos que $B_2 = \emptyset \Rightarrow M \cap B_1 = \emptyset$

$$B = (M \cup \{p\}) \cap B_1 = \{p\} \cap B_1$$

Si $p \notin B_1 \Rightarrow B = \emptyset$

Tenemos que ver qué pasa si $p \in B_1$

Pero B_1 es entorno abierto de p, afirmo $B_1 \cap M = \emptyset$ (que contradice que p sea de acumulación de M)

Como $B_2 = \emptyset \Rightarrow M \cap B_1 = \emptyset \Rightarrow$ contradicción con la definición de pto. de acumulación

$\Rightarrow p \notin B_1 \Rightarrow B = \emptyset$.

$$+ \underbrace{|\varphi(0)| \frac{|\operatorname{sen} h_1 - h_1|}{\|h\|}}_{\substack{\shortparallel \\ (2)}}$$

$$(1) := \lim_{h\to 0} \frac{|\operatorname{sen} h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{|\operatorname{sen} h_1|}{\sqrt{h_1^2}} = \left|\frac{\operatorname{sen} h_1}{h_1}\right|$$

Si $\|h\|$ pequeño $\Rightarrow$
$\Rightarrow |h_1|$ pequeño $\Rightarrow$
$\Rightarrow \left|\frac{\operatorname{sen} h_1}{\|h\|}\right| \leq 2$
ya que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} =$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|\operatorname{sen} h_1|}{\|h\|} |\varphi(h) - \varphi(0)| \leq$$

$$\leq 2 \lim_{h\to 0} |\varphi(h) - \varphi(0)| = 0$$

porque φ continua en 0.

$$(2) := \lim_{h\to 0} |\underset{\substack{\shortparallel \\ (0,0)}}{\varphi(0)}| \cdot \frac{|\operatorname{sen} h_1 - h_1|}{\|h\|} = |\varphi(0,0)| \cdot \lim_{h\to 0} \frac{|\operatorname{sen} h_1 - h_1|}{\|h\|} =$$

$$\approx |\varphi(0,0)| \cdot \lim_{h\to 0} \frac{|h_1 - h_1|}{\|h\|} = 0$$

$\boxed{31.}$ $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x) = \varphi(x) . \operatorname{sen} x$

donde $x = (x_1, x_2)$

① Ver que f es diferenciable en 0 incluso si φ no lo es.

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{\| f(0+h) - f(0) - df_0(h) \|}{\|h\|} = 0 \ ?$$

$df_0(h)$ si existe, es: $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(0)\right]\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t,0)\operatorname{sen} t - 0}{t} =$$

porque $f(0,0) = \varphi(0,0) . \operatorname{sen} 0$ continua

$$= \lim_{t\to 0} \varphi(t,0) . \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}}_{=1} = \varphi(0,0) \quad \text{porque } \varphi \text{ continua}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(0,t) \cdot \operatorname{sen}(0) - 0}{t} = 0$$

$$df_0 = \begin{pmatrix} \varphi(0,0) & 0 \end{pmatrix}$$

NUMERADOR: $f(0+h) - f(0) - df_0(h) = \varphi(h_1,h_2)\operatorname{sen} h_1 - 0 - \begin{pmatrix} \varphi(0,0) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$

$= \varphi(h_1,h_2) \operatorname{sen} h_1 - \varphi(0,0) . h_1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varphi(h)\operatorname{sen} h_1 - \varphi(0,0)h_1|}{\|h\|}$$

$\varphi(h)\operatorname{sen} h_1 - \varphi(0,0)h_1 = \varphi(h)\operatorname{sen} h_1 -$

$- \varphi(0,0)\operatorname{sen} h_1 + \varphi(0,0)\operatorname{sen} h_1 - \varphi(0,0)h_1 =$

$= \operatorname{sen} h_1 (\varphi(h) - \varphi(0,0)) + \varphi(0,0)(\operatorname{sen} h_1 - h_1)$

$\Downarrow$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\operatorname{sen} h_1(\varphi(h) - \varphi(0,0)) + \varphi(0,0)(\operatorname{sen} h_1 - h_1)|}{\|h\|} \le \lim_{h\to 0} \frac{|\operatorname{sen} h_1||\varphi(h) - \varphi(0,0)|}{\|h\|} +$$

2. Ver que f no es diferenciable en 0.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0) - Df_0(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1+h_2+\frac{h_1^3 h_2}{h_1^4+h_2^2} - (h_1+h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$(Df_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)\right) = (1,1)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h_1^3 h_2}{h_1^4+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{?}{=} 0$$ → Si es igual a cero sería diferenciable

→ Para ver que no es diferenciable hay que encontrar una forma de aproximarse que de $\neq 0$.

$h_1^2 = h_2 \quad (h_1, h_1^2) \longrightarrow \frac{h_1^3 h_1^2}{(h_1^4+h_1^4)\sqrt{h_1^2+h_1^4}} = \frac{h_1^5}{2h_1^4 |h_1| \sqrt{1+h_1^2}} \xrightarrow{h_1\to 0} \pm\frac{1}{2} \neq$

$\Longrightarrow$ No es diferenciable.

c) Dice el profesor que es una "fontería".

$\boxed{37.}$ A) Demostrar $\nexists f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\exists p \in \mathbb{R}^n$ tal que $D_u f(p) > 0$ $\forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq$

Supongamos que sí: $\quad u, -u \neq 0$

$D_u f(p) > 0$ pero $D_u f(p) = -D_u f(p)$ contradicción

$D_u f(p) < 0$

B) Dar un ejemplo de $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\exists u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$ tal que $D_u f(p) > 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$.

$f(x_1, \dots, x_n) = x_1$

$u = (1, 0, \dots, 0)$

$x \in \mathbb{R}$ [cut off at top]

$$f(x) = \begin{cases} x_1+x_2+\dfrac{x_1^3\cdot x_2}{x_1^4+x_2^2} & \text{si } x\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } x=(0,0) \end{cases}$$

A. Demostrar que f es continua en todo $x\in\mathbb{R}^2$.

1) f es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ porque ahí es suma y productos de funciones continuas que no se anulan.

2) Hay que ver que $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x) = f(0,0) = (0,0)$

$$\lim_{x\to(0,0)} x_1+x_2+\frac{x_1^3\cdot x_2}{x_1^4+x_2^2} \longrightarrow \lim_{x\to(0,0)} \frac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2} \xrightarrow{?} 0$$

Basta ver que $\left|\dfrac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2}\right| \xrightarrow{x\to(0,0)} 0$ $\quad\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$$\left|\frac{r^3\cos^3\theta\ r\,\text{sen}\,\theta}{r^4\cos^4\theta+r^2\text{sen}^2\theta}\right| = \left|\frac{r^4}{r^2}\cdot\frac{\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta}{r^2\cos^4\theta+\text{sen}^2\theta}\right| = \underset{\substack{\downarrow\\0}}{r^2}\cdot\underbrace{\overbrace{\left|\frac{\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta}{r^2\cos^4\theta+\text{sen}^2\theta}\right|}^{\text{Hay que ver que esto es acotado, pero lo dejó para otro día.}}}_{\text{acotado } <\infty} = 0$$

B) 1. Demostrar $\forall u\in\mathbb{R}^2$ $D_uf(0)$ existe y calcularla.

Ver que $u\to D_uf(0)$ es lineal

$$Df_u(0) = \lim_{t\to0}\frac{f(tu)-f(0)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{tu_1+tu_2+\dfrac{t^3u_1^3\cdot tu_2}{t^4u_1^4+t^2u_2^2}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to0}(u_1+u_2)+\frac{t^4u_1^3u_2}{t^5u_1^4+t^3u_2^2} \longrightarrow \lim_{t\to0}\frac{tu_1^3u_2}{t^2u_1^4+u_2^2}$$

CASO 1: Si $u_2\neq0$ $\lim\limits_{t\to0} 0\cdot\dfrac{u_1^3}{u_2}$ $\cancel{0}$ $=0$

CASO 2: Si $u_2=0$ también es cero porque el numerador es cero.

Por tanto, $Df_u(0) = u_1+u_2$ (claramente lineal)

28. $f: \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ es diferenciable $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

A) Calcular $(dg)_A$, $g(X) = Xf(X)$

$$(dg)_A(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(A+tB) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A+tB)\, f(A+tB) =$$

g es diferenciable porque en coordenadas está dado por sumas y productos de las coordenadas X_{ij} y de las $f_{ij}(x_{11} \dots x_{nn})$ que son dif. por hipótesis

$$= \left[\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A+tB)\, f(A) + A\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(A+tB)\right] =$$

$$= B f(A) + A\, df_A(B)$$

B) Usar inducción y el apartado anterior para calcular $(df)_A$ cuando $f(X) = X^n$ $n \in \mathbb{N}$.

$$(df)_A(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(A+tB) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A+tB)^n_X$$ (aquí no vale el binomio de Newton)

$n=1$ $\quad f(X) = X$

$\quad df_A(B) = B$

$n=2$ $\quad f(X) = X^2$

$$df_A(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A+tB)^2 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A^2 + tAB + tBA + t^2B^2) = AB+$$

$f_n(X) = X^n = XX^{n-1} = Xf_{n-1}(X)$ donde $f_k(X) = X^k$

$$(df_n)_A(B) = A(df_{n-1})_A(B) + Bf_{n-1}(A) = A(df_{n-1})(B) + BA^{n-1} =$$

$$= A\cdot\left(A(df_{n-2})_A(B) + Bf_{n-2}(A)\right) + BA^{n-1} = A^2((df_{n-2})_A(B)) +$$

$$+ ABA^{n-2} + BA^{n-1}$$ cada paso "pierde" una A a la derecha y la "gana" a la izquierda.

Parece que la fórmula es:

$$(df_n)_A = A^{n-1}B + A^{n-2}BA + \dots + ABA^{n-2} + BA^{n-1} =$$

$$= \sum_{K=1}^{N} A^{N-K} + BA^{K-1}$$ (la demostración por inducción no la va a hacer el prof.)

C) Calcular $(d\exp)_A(X)$.

¡Atención! no se pide el estudio de la convergencia de las series que intervienen en el cálculo.

$$(d\exp)_A(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+tX)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A+tX)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(df_n)_A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} A^{n-k} B A^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!} A^{n-k} B A^{k-1}$$

(jugar con ello un poco a ver si se puede simplificar)
(quizá cambiando sumatorios)

D) Comprobar: $XA = AX \Rightarrow e^{A+X} = e^A . e^X$

Igual que el 27.4 porque conmutan y podemos usar el Binomio de Newton.

Ver que $(d\exp)_A(X) = e^A X = X e^A$ (misma hipótesis)

ATAJO

$$f(A+X) = L_{e^A_{f(0)}} f(X)$$

$$(df)_A(X) \underset{\text{R.d.C.}}{=} dL_{e^A_{f(0)}} \cdot df_0(X)$$

$$(d\exp)_A(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(A+tB) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^A . e^{tB} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{\exp(A)} \circ \exp(tB) = \underbrace{\left(dL_{\exp(A)}\right)}_{\text{Lineal}} \underbrace{(d\exp)_0 (B)}_{Id_{\mathbb{R}^{k\times k}}} =$$

$$= \exp(A).B.$$

Faltaría ver que $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tB} e^A$ da lo mismo $(B\exp(A))$

5. Calcular $(d\exp)_0$ (con I parecido)

$\exp: \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$

$d\exp\ \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$

(Asumiendo que es diferenciable (se demuestra comprobando convergencia uniforme de la serie que define la exponencial en conjuntos compactos de $\mathbb{R}^{n\times n}$).

$$(d\exp)_0(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(0+tA) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tA) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(tA)^n \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(tA)^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} t^n A^n =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} n t^{n-1} A^n \Big|_{t=0} = \lim_{N\to\infty} A = A$$

solo queda el término $n=1$.

$$(d\exp)_0(A) = A \implies (d\exp_0) = Id_{\mathbb{R}^{n\times n}}$$

(*) Puedo intercambiar límite y derivada porque hay convergencia uniforme de S_N a $\exp(tA)$ y de la convergencia uniforme de $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}(tA)^n$ que son similares a las de los apartados anteriores (convergencia uniforme y derivadas) (Buscar ese teorema).

$$(d\exp_I)(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(I+tA) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp I \cdot \exp tA =$$

ATAJO

$$= (\exp(I)\cdot \exp(X) = f(x) = \underbrace{L_{\exp(I)}}_{\text{constante}} \exp(x) =$$

$$= (df)_0(A) = d_0(L_{\exp(I)} \cdot \exp)(A) \underset{\text{regla cadena}}{=} (dL_{\exp(I)})_{\exp(0)} \cdot \underbrace{(d\exp)_0(A)}_{\text{primer apartado}} =$$

$$= \exp(I). A$$

$$= \exp(I) \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tA) = \exp(I). A$$

2. Calcular $\exp(0)$ y $\exp(I)$

$$\exp(0) \Rightarrow \underbrace{S_N}_{\text{suc. constante } \equiv I} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} 0^n = I \quad \forall N$$

$$\exp(I) \Rightarrow S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} I^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} I = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right)}_{\xrightarrow{N\to\infty} e} . I = e . I$$

3. Demostrar que $\|\exp X\| \leq e^{\|X\|}$

$$\|\exp(X)\| = \|\lim_{N\to\infty} S_N\| = \lim_{N\to\infty} \|S_N\|$$

$$\|S_N\| = \left\|\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} X^n\right\| \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \|X\|^n}_{\text{suma parcial } N\text{-ésima de } e^{\|X\|}} \leq e^{\|X\|}$$

4. Demostar que $\exp(I+X) = \exp I . \exp X$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (I+X)^n$$

OJO: $A, B \in \mathbb{R}$
$(A+B)^m$ no tiene por qué seguir la norma del binomio (solo si A y B conmutan)
- En este caso sí conmutan así que da igual.

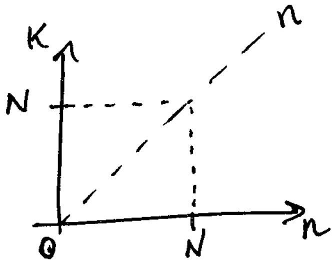
$$(I+X)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} I^{n-K} X^K$$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{(n-K)!\,K!} X^K = \sum_{n=0}^{N} \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{K!(n-K)!} X^K =$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{K=0}^{N} \sum_{n=K}^{N} \frac{1}{K!} \frac{1}{(n-K)!} X^K = \sum_{K=0}^{N} \frac{1}{K!} X^K \sum_{n=K}^{N} \frac{1}{(n-K)!} = \left(\sum_{K=0}^{N} \frac{1}{K!} X^K\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N-K} \frac{1}{\ell!} I^\ell\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \exp(X) . \exp(I)$$
(K es fijo y finito)

Más correcto: $\displaystyle\sum_{K=0}^{N} \frac{1}{K!} X^K \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\ell!} I^\ell$ la diferencia entre tiende a cero cuando $N \to \infty$

(*)


Nos falta ver que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ sea continua en $(0,0)$:

Si $\lim \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow \lim \frac{\partial f}{\partial x_1} - 2x_1 \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{\quad}} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \left(-2x_1 \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{\quad}}\right)$ existiría pero no existe porque si (límites iterados y/o radiales).

$(x_1,0) \rightsquigarrow \pm 1$ y $(0,x_2) \rightsquigarrow 0$

c)
1. Demostrar que f es diferenciable en 0.
2. Si $(a,b) \neq (0,0)$, f es diferenciable (en $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$, f es C^1)

En $(0,0)$:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h)|}{\|h\|} = 0 ?$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}(h_1^2+h_2^2) \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$ por el T^{ma} del Sandwich

$\boxed{27.}$ $X \in \mathbb{R}^{n\times n)}$ $\quad S_N = \sum_{(n=0}^{N} \frac{1}{n!} X^n$

no son las mismas

1. Demostrar que $\{S_N\}_N$ es de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ tal que $\forall m_1, m_2 > N$ se tiene que

$\|S_{m_1} - S_{m_2}\| < \varepsilon$ (quiero ver esto)

$S_{m_1} = \sum_{n=0}^{m_1} \frac{1}{n!} X^n \quad ; \quad S_{m_2} = \sum_{n=0}^{m_2} \frac{1}{n!} X^n$

Sin perder generalidad, $m_1 \geq m_2$

$$\|S_{m_1} - S_{m_2}\| = \left\|\sum_{m_2+1}^{m_1} \frac{1}{n!} X^n\right\| \leq \sum_{m_2+1}^{m_1} \frac{1}{n!}\|X\|^n$$

Sabemos que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$\underbrace{\left\{\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!} x^n\right\}}_{\text{son de Cauchy porque converg.}} \longrightarrow e^x \quad \equiv \quad \left\{\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!}\|x\|^n\right\} \longrightarrow e^{\|x\|}$

$\to S_N'$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ tal que $\forall m_1, m_2 > N$

$|S_{m_1}' - S_{m_2}'| < \varepsilon$

$$\sum_{m_2+1}^{m_1} \frac{1}{n!}\|x\|^n < \varepsilon$$

30.

$$f(x) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) & x \neq (0,0) \\ 0 & x = (0,0) \end{cases}$$

A) Ver que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Si $(a,b) \neq (0,0)$, f es continua en (a,b) porque en el abierto $\mathbb{R}\setminus\{0,0\}$ f coincide en $(x_1^2 + x_2)\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\ }}\right)$ que es una composición y producto de funciones continuas.

El punto delicado es el $(0,0)$. Hay que ver que $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2) = f(0) = 0$

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} (x_1^2+x_2^2)\cdot \text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{\ }}$$

$$0 \leq \left|(x_1^2+x_2^2)\cdot \text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{\ }}\right| \leq |x_1^2 + x_2^2|$$

cuando $(x_1, x_2) \longrightarrow (0,0)$, $\lim |x_1^2 + x_2^2| = 0$

$$\Rightarrow \lim \left|(x_1^2+x_2^2)\cdot \text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{\ }}\right| = 0 \Rightarrow \lim (x_1^2+x_2^2)\cdot \frac{1}{\sqrt{\ }} = 0$$

B) Demostrar $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existen $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ existen si $(a,b) \neq (0,0)$ por ser composición de funciones diferenciables.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h^2\cdot \text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right) = \lim_{h\to 0} h\,\text{sen}\,\frac{1}{|h|} = 0$$

$$0 \leq \left|h\,\text{sen}\,\frac{1}{|h|}\right| \leq |h|$$

$\to 0 \quad 0 \quad 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$ igual

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \begin{cases} 2x_1\cdot \text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{\ }} - (x_1^2+x_2^2)\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{\ }}\right)\cdot x_1\cdot(x_1^2+x_2^2)^{-3/2} = \\ = 2x_1\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{\ }} - x_1\cos\dfrac{1}{\sqrt{\ }}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\ }} & \text{con } (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0 \quad \text{si } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Observo que $g(1) = f(x) - 1^p f(x) = 0$ necesimos aquí lo mismo que aquí

$$g'(\lambda) = df_{\lambda x}(x) - p\lambda^{p-1} f(x) = \langle \nabla f(\lambda x), x \rangle - p\lambda^{p-1} f(x)$$

$$\lambda g'(\lambda) = \langle \nabla f(\lambda x), \lambda x \rangle - p\lambda^p f(x) = p f(\lambda x) - p\lambda^p f(x) =$$

$$= p\left(f(\lambda x) - \lambda^p f(x)\right) = p\, g(\lambda)$$

$\left.\begin{array}{l} \lambda g'(\lambda) = p g(\lambda) \\ (1)\ g(1) = 0 \end{array}\right\}$ ¿se sigue que $g \equiv 0$?

Supongamos $g \neq 0$ en un intervalo, $\lambda \neq 0$

$$\lambda g'(\lambda) = p g(\lambda) \Rightarrow \frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{p}{\lambda} \Rightarrow \int \frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)} = \int \frac{p}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(g(\lambda)) = p \log(\lambda) + \underbrace{\text{costante}}_{\text{la escribimos como } \log(\text{Const}_2)} =$$

$$= \log(\lambda^p \cdot \text{const}_2) \Rightarrow g(\lambda) = C\lambda^p \quad (*)$$

para $\lambda = 1$ $\quad g(1) = \text{Const}_2$ pero también $g(1) \overset{(1)}{=} 0 \Rightarrow \text{const}_2 = 0$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} g(\lambda) = 0$$

3. Usando lo anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x \operatorname{sen} y) \cdot \operatorname{sen} y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g(x \operatorname{sen} y) \cdot x \cos y$$

$\boxed{33.}$ T^{ma} de Euler para funciones homogéneas. Sea f función definida en Ω abierto $\subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que f es homogénea de grado p en Ω cuando $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \Omega$ tales que $\lambda x \in \Omega$.

1. Demostrar que si f es homogénea de grado p en Ω y es diferenciable en x entonces: $\langle x, \nabla f(x) \rangle = p f(x)$

Sabemos que $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ y f diferenciable.

Fijo x. $g(\lambda) = f(\lambda x)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda x & \longmapsto & f(\lambda x) \end{array}$$

g es diferenciable por ser composición de diferenciables

$$g'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda x) = df_{\lambda x}(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x) \right) (x_1, \dots, x_n)^T =$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x) \right), (x_1, \dots, x_n) \right\rangle \quad (1)$$

Como $g(\lambda) = \lambda^p f(x) \longrightarrow g'(\lambda) = p \lambda^{p-1} \cdot f(x)$

$$(1) = \langle \nabla f(\lambda x), x \rangle = p \lambda^{p-1} \cdot f(x)$$

Para $\lambda = 1 \Rightarrow \langle \nabla f(x), x \rangle = p f(x)$.

2. Demostrar que si f es diferenciable en Ω y satisface $\langle x, \nabla f(x) \rangle = p f(x)$ $\forall x \in \Omega \Rightarrow f$ es homogénea de grado p en Ω.

Quiero $f(\lambda x) = \lambda^p f(x) \Rightarrow$ quiero $f(\lambda x) - \lambda^p f(x) = 0$

Sea $g(\lambda) = f(\lambda x) - \lambda^p f(x)$ y quiero $g(\lambda) \equiv 0$ $\forall \lambda$

diferenciable (comp. dif.)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cancel{\int_0^x g(x,0)\,dx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^y h(x,t)dt\right)$$

porque es
constante en Y

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^y h(x,t)dt\right)$ Para x fija, es de la forma $\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \hat{h}(t)\,dt$ donde $\hat{h}(y) = h(x,y)$. Puedo usar el T^{ma} FC porque $\hat{h}$ es continua, $\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \hat{h}(x)dt = \hat{h}(y) = h(x,y)$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + h(x,y)$ que es continua.

$$df_{(x,y)} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] = \left[g(x,0) + \int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt \qquad h(x,y)\right]$$

$$df_{(x,y)}(a,b) = a\left(g(x,0) + \int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt\right) + b\,h(x,y)$$

2. $a \in \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $f(x,y) = \int_a^{x+y} g(t)\,dt$

NOTA: $F(x) = \int_{b(x)}^{a(x)} f(t)\,dt = \left[\begin{array}{c} G(a(x)) - G(b(x)) \\ \text{donde } G'(t) = f(t)\end{array}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(x) = G'(a(x))\,a'(x) - G'(b(x)).\,b'(x) =$

$= f(a(x)).\,a'(x) - f(b(x)).\,b'(x)$

cuando f es continua

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x+y).\,\cancel{\frac{\partial(x+y)}{\partial x}}^{1} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g(x,y).\,\cancel{\frac{\partial(x+y)}{\partial y}}^{1}$$

HOJA 5: Ej. 27-33 y HOJA 6: Ej. 34-40

$\boxed{32.}$ Demostrar en cada caso que f es C^1 y calcular su diferencial en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua $\qquad h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de C^1

$$f(x,y) = \int_0^x g(t,0)\,dt + \int_0^y h(x,t)\,dt$$

$$\int_0^x \underbrace{g(t,0)}_{\hat{g}(t)\text{ es continua en } \mathbb{R}}\,dt \qquad \text{TFC} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\int_0^x g(t,0)\,dt\right] = g(x,0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x g(t,0)\,dt\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^y h(x,t)\,dt\right)$$

NOTA: Regla de Leibnitz:

Si tengo $\phi(x) = \int_c^d f(x,t)\,dt$ $\quad a \leq x \leq b$ y si $f, \frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en $[a,b]\times[c,d]$, entonces ϕ es derivable:

$$\phi'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^y h(x,t)\,dt\right) = \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} h(x,t)\,dt$$

uso que como h es C^1, h es continua y $\frac{\partial h}{\partial x}$ también...
Aplicamos la regla de Leibniz

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,0) + \int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt$$

que es continua porque $(x,y) \to (x,0) \xrightarrow{g} g(x,0)$ es continua, y $\int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ es continua porque $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ es continua.

$\forall i,\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ es el mismo # $\forall i \qquad (= \lambda^2)$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a_{kj} = 0 \qquad i \neq k.$$

$$g_{ij}(y) = f_{ij}(A\cancel{y})$$

$\downarrow$

armónica

$$\tilde{g}_{ij}(y) = \tilde{f}_{ij}(Ay) \qquad (Ay)_1 = \sum a_{1k}\, y_k$$

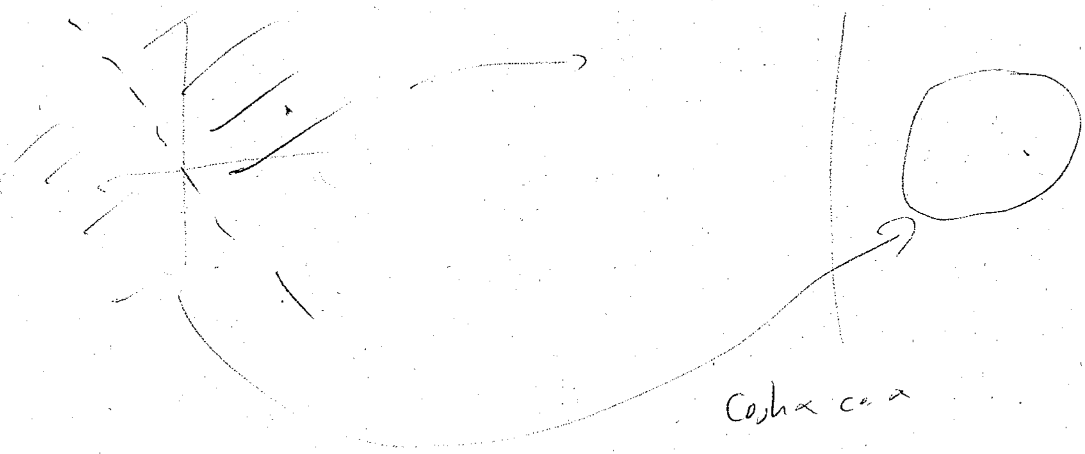
$$g_{ij}(y_1, \ldots, y_n) = f_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k, \sum_{k=1}^{n} a_{2k} y_k, \ldots\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y_k \cdot \sum_{l=1}^{n} a_{jl}\, y_l =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} a_{ik}\, a_{jl}\, y_k\, y_l =$$

g_{ij} armónica,

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y_n^2} = 0 \qquad 2(\underbrace{a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn}}_{\text{Columna } i\text{-ésima, columna } j\text{-ésima } \perp}) = 0$$



Cosha ca a

$$f(\Omega) = \{(u,v) \mid \exists (x,y) \in \Omega \text{ t.q. } f(x,y) = (u,v)\}$$

$$= \underline{\mathbb{R}^3 \setminus \{y_1 + y_2 + y_3 = -1\}}$$

$$(y_1, y_2, y_3)$$

¿$\exists (x_1, x_2, x_3)$ t.q. $f(x_1 \dots x_3) = (y_1 \dots y_3)$?

$$f = L_{\exp(I)} \circ \exp$$

$$f(X) = \exp(I) \cdot \exp(X) = L_{\exp(I)} \circ \exp(X)$$

$$df_0(A) = d(L_{\exp(I)} \circ \exp)_0 (A)$$

$$= (dL_{\exp(I)})_{\exp(0)} (\underbrace{d\exp_0(A)}_{A})$$

$$= (dL_{\exp(I)})_{\exp(0)} (A)$$

$L_{\exp(I)} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ e lin

$$L_{\exp(I)}(\lambda A + \mu B) = \exp(I)(\lambda A + \mu B) =$$

$$= \lambda \exp(I) A + \mu \exp(I) B =$$

$$= \cancel{\lambda L_{\exp(I)} A}$$

$$= \lambda L_{\exp(I)} A + \mu L_{\exp(I)} B$$

$$\Rightarrow dL_{\exp(I)} = L_{\exp(I)}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \cancel{\tfrac{d}{d}} [L_{\exp I} \circ \exp](tA) =$$

$$d(L_{\exp I} \circ \exp)_0 (A)$$

$$(A+tX)^2 = (A+tX)(A+tX) = A^2 + tAX + tXA + t^2X$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \qquad = A.X + XA$$

$$2\cancel{A}(A+tX)\cdot X \qquad\qquad (a+tx)^n$$

$$2AX$$

$$f_n(C) = C^n$$

$$(df_n)_A(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A+tX)^n$$

---

(44) $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, x_i$ $\qquad g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$

g_i C^∞ en un ent de 0

i $\exists\, g_{ij}$: $\quad g_i(x) - g_i(0) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)\, x_j$

A t.q. $\forall$ func. armónica, $g(y)$ armónica

$\Rightarrow A = \lambda B$, $\lambda \neq 0$, B ortogonal

(i.e., $\frac{1}{\lambda}A = \underbrace{\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}}_{\text{ortogonal}} = B$

B ortogonal $\Leftrightarrow$ filas ~~...~~ forman base ortogonales,

$\sum_{j=1}^{n}(b_{ij})^2 = 1 \ \forall i$, $\quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, b_{kj} = \delta_{i}$