Espacios métricos

1. Demuestra que todo espacio métrico es un espacio topológico Hausdorff.

2. Estudiar si $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dibujar la bola $B(x,r)$ siendo (i) $x = 0$ y radio $r = 1/2$, (ii) $x = 1/2$ y $r = 1$.

3. Demostrar que si d es una distancia entonces $d'(x,y) = \min(d(x,y), 1)$ también lo es.

4. Si (X,d) es un espacio métrico, $A \subset X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $B_\alpha(A) = \{x \in X : d(x,A) < \alpha\}$ siendo $d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$. Probar que $B_\alpha(B_\beta(A)) \subset B_{\alpha+\beta}(A)$ pero que no se tiene necesariamente la igualdad.

5. Comprobar que los siguientes espacios de sucesiones con las distancias asociadas son espacios métricos:

1. Por $\mathbb{R}^\omega$ denotamos el espacio de todas las sucesiones de números reales $x = (x_n)$. Definimos $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ como

   $$d(x,y) = \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} \qquad x \in \mathbb{R}^\omega,\ y \in \mathbb{R}^\omega$$

   ¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = (x_n) = ((1-2^{-n})^{-1})$ e $y = (y_n) = (1)$?.

2. Sean ℓ_∞ el espacio de todas las sucesiones acotadas y $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definida como

   $$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

3. Sean ℓ_2 el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$ y $d : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ definida como

   $$d(x,y) = \left(\sum_n |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$$

   Indicación: si $x = (x_n) \in \ell_2$, $y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y, además, $(\sum |x_n y_n|)^2 \leq (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

6. En $\mathbb{R}^n$ se define

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Demuestra que d_1 es una distancia en $\mathbb{R}^n$ y que induce la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Dibuja los elementos de la base para $n = 2$.

7. Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $\mathcal{T}_d$ la topología inducida por la métrica d. Considera en $X \times X$ la topología producto de $\mathcal{T}_d$ por $\mathcal{T}_d$. Demuestra que la función distancia $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ es continua.

8. Demuestra que $d(x,y) = \min(|x-y|, 1 - |x-y|)$ define una distancia en $[0,1)$. ¿Cuáles son las funciones $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ continuas en este espacio?

9. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico es un espacio metrizable. (Indicación: Estudia la función $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$d(<x_1, x_2>, <y_1, y_2>) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ max\{1, |x_2 - y_2|\} & \text{si } x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

y describe las ϵ-bolas con respecto a d, para $\epsilon \leq 1$.)

Axiomas de numerabilidad. Espacios separables.

10. Si un espacio es IAN con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina?.

11. Si un espacio es IIAN con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina?.

12. Se considera el espacio $(X, \mathcal{T}_{cofinita})$. ¿Es un espacio separable?

13. Sea X un espacio IAN. Sean $A \subset X$ y $x \in X$. Demuestra lo siguiente:
(i) $x \in Fr(A)$ si y solamente si existen $(x_n)_{n>0} \subset A$ y $(y_n)_{n>0} \subset X \setminus A$ ambas con límite x.
(ii) $x \in A'$ si y solamente si existe $(x_n)_{n>0} \subset A$ con $x_n \neq x$ para todo $n > 0$ y con límite x.

14. Probar que si un espacio topológico X es separable (es decir, existe $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$) entonces toda familia de abiertos disjuntos es numerable.

15. Probar que si un espacio topológico es IIAN entonces es separable. Encontrar un contraejemplo para demostrar que el recíproco es falso en general, pero es cierto en el caso particular de los espacios métricos.

16. Probar que si un espacio topológico es IIAN entonces cualquier unión de abiertos $U = \cup_{i\in I} U_i$ se pued expresar como una unión numerable, esto es, $U = \cup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n}$ con $i_n \in I$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (*la enterior propiedad se llama "de Lindelof"*). Usar esto para probar que si un espacio es IIAN entonces cualquier base contiene una base numerable. Esto último puede servir para probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)})$ no es IIAN.