2 m entero positivo y $m = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_{10}$

a) Demuestra que:

i) m multiplo de 8 $\longleftrightarrow$ $(a_2 a_1 a_0)$ lo es

$$m = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$$(a_2 a_1 a_0) = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $m_1 = (a_2 a_1 a_0)$ múltiplo de 8

$$m = 10^3 \cdot (a_n \cdot 10^{n-3} + a_{n-1} \cdot 10^{-4} + \dots + a_3) + m_1 =$$

$$= (5 \cdot 2)^3 (a_n \cdot 10^{n-3} + a_{n-1} \cdot 10^{-4} + \dots + a_3) + m_1 =$$

$$= 5^3 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{múltiplo de 8}}}{8} (a_n \cdot 10^{n-3} + a_{n-1} \cdot 10^{-4} + \dots + a_3) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{múltiplo de 8}}}{m_1}$$

Suma de múltiplos de 8 es múltiplo de 8 ■

$\boxed{\Rightarrow}$ m múltiplo 8 $\to$ $m = 8 \cdot M$ con $M \in \mathbb{Z}^+$

$$m = 10^3 \cdot (a_n \cdot 10^{n-3} + a_3) + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = 8 \cdot M$$

$$m = 5^3 \cdot 8 \cdot (a_n \cdot 10^{n-3} + a_3) + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = 8M$$

$$m = 5^3 \cdot \underbrace{(a_n \cdot 10^{n-3} + a_3)}_{\in \mathbb{Z}^+} + \frac{a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0}{8} = M \in \mathbb{Z}^+$$

$a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ debe ser múltiplo de 8 para ser el cociente un entero.

ii) m múltiplo de 9 $\longleftrightarrow$ $\sum_{i=0}^{n} a_i$ lo es

$$m = a_n \cdot (9+1)^n + a_{n-1} \cdot (9+1)^{n-1} + \dots + a_2 \cdot (9+1)^2 + a_1 \cdot (9+1) + a_0$$

Para $n = 1$ $\to m = a_1 \cdot (9+1) + a_0 = a_1 \cdot 9 + a_1 + a_0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $a_1 \cdot 9 + a_1 + a_0 = 9 \cdot M \to (M - a_1) \cdot 9 = a_1 + a_0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $a_1 + a_0 = 9N \to m = a_1 \cdot 9 + 9N = 9(a_1 + N)$ múltiplo de 9 ■

Pruebo para n:

$$m = (9+1) \cdot (a_n \cdot (9+1)^{n-1} + a_{n-1}(9+1)^{n-2} + \dots + a_2(9+1) + a_1) + a_0 =$$

$$= \underbrace{9 \cdot a_n (9+1)^{n-1} + \dots + a_2(9+1) \cdot 9 + a_1 \cdot 9}_{\text{múltiplo de 9} \quad = P} + (a_n(9+1)^{n-1} + \dots a_2 \cdot (9+1) + a_1) + a_0$$

Mismo proceso

$$= P + (9+1) \cdot (a_n(9+1)^{n-2} + \dots + a_2) + a_1 + a_0 = [\dots] = \sum \text{múltiplos de 9} + \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$\Rightarrow$ $m = \sum \text{múltiplos de } 9 + \sum_{i=0}^{n} a_i = 9 \cdot M \rightarrow \sum a_i$ es múltiplo de 9

$\Leftarrow$ $m = \sum \text{múltiplos de } 9 + \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum \text{múltiplos de } 9 + 9 \cdot N \rightarrow$

$\rightarrow m$ múltiplo de 9 ■

iii) m múltiplo de 11 $\longleftrightarrow$ suma alternada lo es.

$$m = (11-1)^n \cdot a_n + a_{n-1} \cdot (11-1)^{n-1} + \dots + a_2 \cdot (11-1)^2 + a_1(11-1) + a_0$$

Para $n = 1$ $\quad m = a_1 \cdot 11 - a_1 + a_0 = a_1 \cdot 11 + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i}_{\text{suma alternada}}$

$\Rightarrow$ $m = 11 \cdot M = 11 \cdot a_i + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i}_{\text{múltiplo } 11}$

$\Leftarrow$ $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i = 11 \cdot N \rightarrow m$ múltiplo 11

Para n arbitrario

$$m = (11-1) \cdot (a_n \cdot (11-1)^{n-1} + \dots + a_2(11-1) + a_1) + a_0 =$$

$$= \underbrace{11 \cdot a_n \cdot (11-1)^{n-1} + \dots + 11 \cdot a_2 \cdot (11-1) + 11 a_1}_{\text{múltiplo de } 11 \;\; = P} - a_n(11-1)^{n-1} - \dots - a_1 + a_0 =$$

$$= P - (11-1) \cdot (a_n(11-1)^{n-2} + \dots + a_2) + a_1 + a_0$$

$$= P - \underbrace{11 a_n (11-1)^{n-2} - \dots - a_2 \cdot 11}_{\text{múltiplo de } 11 \;\; = Q} + a_n \cdot (11-1)^{n-2} + \dots + a_2 - a_1 + a_0 = [\dots] =$$

$$m \overset{*}{=} \sum \text{Múltiplos de } 11 + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot a_i = \text{múltiplo de } 11 + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$$

$\Rightarrow$ $m = 11 \cdot N \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$ múltiplo de 11

$\Leftarrow$ suma alternada $= 11 \cdot N \longrightarrow m$ múltiplo de 11

Por la definición de m en $*$

■

b) $m = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0)_{21}$

i) m múltiplo de 49 $\longleftrightarrow$ $(b_1 b_0)_{21}$ lo es.

$m = b_n \cdot 21^n + \dots + b_1 \cdot 21 + b_0$ $\qquad (b_1 b_0)_{21} = b_1 \cdot 21 + b_0$

$\Rightarrow$ $b_n \cdot 21^n + \dots + b_1 \cdot 21 + b_0 = 49 M = 7^2 \cdot M$ con $M \in \mathbb{Z}$

$$(7 \cdot 3)^2 \cdot (b_n 21^{n-2} + \dots + b_2) + b_1 \cdot 21 + b_0 = 7^2 M$$

$$\underbrace{9 \cdot (b_n \cdot 21^{n-2} + \dots + b_2)}_{\in \mathbb{Z}^+} + \frac{b_1 \cdot 21 + b_0}{49} = M \in \mathbb{Z}^+$$

$\Rightarrow b_1 \cdot 21 + b_0 = (b_1 b_0)_{21}$ múltiplo de 49 para ser entero.

$\Leftarrow$ | $b_1 \cdot 21 + b_0 = 49 \cdot N$; $m = 49 \cdot 9 \cdot (b_n \cdot 21^{n-2} + \dots + b_2) + b_1 \cdot 21 + b_0 =$

$= 49 \cdot 9 (b_n \cdot 21^{n-2} + \dots + b_2) + 49N \rightarrow m$ múltiplo de 49. ■

ii) m múltiplo de 20 $\longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} b_i$ múlt. de 20.

$m = a_n \cdot (20+1)^n + \dots + a_2 \cdot (20+1)^2 + a_1 \cdot (20+1) + a_0$

Mismo razonamiento que en a) ii)

$* \; m = \sum$ múltiplos de $20 + \sum_{i=0}^{n} b_i$

$\Rightarrow$ | $m = 20 \cdot M \rightarrow \sum b_i$ múlt. de 20 } por la definición

$\Leftarrow$ | $\sum_{i=1}^{n} b_i$ múlt de $20 \rightarrow m$ múlt. de 20 } de m en * ■

iii) m múltiplo de 22 $\longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot b_i$ lo es

$m = a_n \cdot (22-1)^n + \dots + a_1 \cdot (22-1) + a_0$

mismo razonamiento que en a) ii)

$*_1 \; m = \sum$ múltiplos de $22 + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i$

$\Rightarrow$ | $m = 22 \cdot M \rightarrow$ suma alternada múlt. de 22 } por la definición

$\Leftarrow$ | $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i = 22N \rightarrow m$ múlt. de 22 } de m en $*_1$

c) $m = (1222)_3$ expresión de m en base 9.

$(1222) = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3^3 = 53 = 45 + 8 = 9 \cdot 5 + 8$

$m = (1222)_3 = (58)_9$