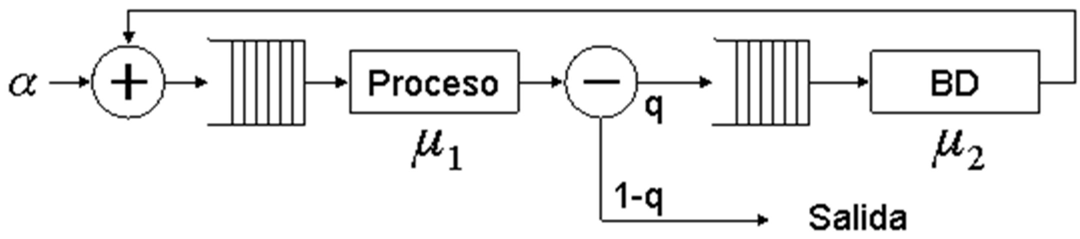
Ejercicio 15 Tema 2

Un servidor de transacciones recibe peticiones de acuerdo a un proceso de Poisson con una tasa de llegadas α. La estructura del servidor se muestra en la siguiente figura:



Las transacciones emplean un tiempo de proceso distribuido exponencialmente con media 1/ μ1 s. Tras este tiempo, la ejecución del programa se completa con una probabilidad 1-q, o requiere acceder a un servidor de base de datos y continuar su proceso. Suponer que la recuperación de la información de la base de datos requiere un tiempo distribuido exponencialmente con media 1/ μ2 s.

1. Justificar adecuadamente los modelos de colas que se deben emplear para modelizar el sistema.
2. Calcular el tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones de los clientes.

Solución a la pregunta número 1.

Denominamos con λ_1 a la tasa de llegadas al servidor de proceso, y con λ_2 a la tasa de llegadas al servidor de base de datos.

Si se cumple que 1-q > 0, $\lambda_1 < \mu_1$ y $\lambda_2 < \mu_2$ tenemos una red de colas abierta que recibe tráfico Poisson y cuyos sub-sistemas se encuentran en estado estacionario, tienen tiempo de servicio distribuido de forma exponencial, un solo servidor, y cola infinita. En estas condiciones, podemos aplicar el teorema de Jackson, que nos dice que la distribución de probabilidad del número de peticiones en la red factoriza, y cada factor viene determinado por las ecuaciones de la distribución estacionaria del modelo M/M/1 correspondiente. Es decir, cada sub-sistema (servidor de proceso y base de datos) se puede modelar mediante el modelo de colas M/M/1.

Solución a la pregunta número 2.

Primero calculamos las tasas de llegada a cada sistema. Para ello, usamos el hecho de que si los sistemas están en estado estacionario, tendrán la misma tasa de peticiones a la salida que a la llegada.

$$\lambda_2 = q\lambda_1$$

$$\lambda_1 = \alpha + \lambda_2 = \alpha + q\lambda_1$$

$$\lambda_1 - q\lambda_1 = \alpha - q\lambda_1$$

$$\lambda_1(1-q) = \alpha$$

$$\lambda_1 = \alpha/(1-q)$$

$$\lambda_2 = \alpha \cdot q/(1-q)$$

Ahora usamos las fórmulas del modelo M/M/1 para calcular el nº medio de peticiones en cada subsistema (servidor de proceso y base de datos)

$$\mathrm{L}_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{\alpha/(1-q)}{\mu_1 - \alpha/(1-q)}$$

$$\mathrm{L}_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{\alpha \cdot q/(1-q)}{\mu_2 - \alpha \cdot q/(1-q)}$$

El número medio de peticiones en la red de colas es la suma del número medio de peticiones en los 2 sub-sistemas.

$$\mathrm{L_T} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$$

Ahora utilizamos Little

$$W_T = \frac{\mathrm{L_T}}{\alpha}$$