ANÁLISIS MATEMÁTICO. CAPÍTULO 0. LOS CIMIENTOS: NOCIONES BÁSICAS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO GRADO DE MATEMÁTICAS. CURSO 2015-2016

José García-Cuerva

Universidad Autónoma de Madrid

22 de septiembre de 2015

Definición.

Sean U, V, W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que la aplicación $g : U \times V \longrightarrow W$ es BILINEAL si

- $\forall v \in V$, la aplicación $u \longmapsto g(u, v)$ es una aplicación lineal de U en W y
- $\forall u \in U$, la aplicación $v \longmapsto g(u, v)$ es una aplicación lineal de V en W.

En particular, a las aplicaciones bilineales $g : U \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ les llamaremos formas bilineales.

Definición.

Sea V un espacio vectorial real. Un producto interior o producto escalar sobre V es una forma bilineal $g : V \times V \to \mathbb{R}$, a la que le pedimos que cumpla estas dos propiedades:

- Que sea simétrica, lo cual quiere decir que $g(u, v) = g(v, u) \; \forall u, v \in V$.
- Y que sea definida positiva, lo cual quiere decir que $g(v, v) > 0 \; \forall v \neq 0$.

A g la representaremos, habitualmente, como $g(u, v) = \langle u, v \rangle$ o $g(u, v) = u \cdot v$.

Diremos que el par (V, g) es un espacio prehilbertiano real o, simplemente, un espacio vectorial real con un producto interior.

Entre estos espacios, el protagonismo principal lo acabarán teniendo los de dimensión finita, a los que llamaremos, simplemente, espacios vectoriales euclídeos.

Finalmente, llamaremos, sencillamente, espacio euclídeo a un espacio afín (A, V) donde V es un espacio vectorial euclídeo.

Ejercicio 1): Demostrar que, para $V = \mathbb{R}^n$, la aplicación $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(u, v) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$ es una forma bilineal simétrica definida positiva, o sea, un producto escalar. Le llamaremos producto escalar "usual" o "habitual" de $\mathbb{R}^n$.

Aunque pocas veces tendremos que tratar con espacios vectoriales sobre el cuerpo complejo $\mathbb{C}$, merece la pena recoger aquí cómo se extiende la noción de producto escalar a estos espacios.

DEFINICIÓN.

Un producto escalar sobre un espacio vectorial complejo V es una forma sesquilineal, hermitiana, definida positiva $g : V \times V \to \mathbb{C}$.

Que g sea sesquilineal quiere decir que

- Para cada $v \in V$, la aplicación $u \mapsto g(u, v)$ es lineal y
- Para cada $u \in V$, la aplicación $v \mapsto g(u, v)$ es antilineal, o sea, es aditiva ($g(u, v_1 + v_2) = g(u, v_1) + g(u, v_2)$); pero para la multiplicación por escalares $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple $g(u, \lambda v) = \overline{\lambda} g(u, v)$.

Y que sea hermitiana (del matemático francés Charles Hermite(1822-1901)) es que se cumpla

$$g(u, v) = \overline{g(v, u)} \ \forall u, v \in V. \tag{1}$$

Estas propiedades garantizan que

$$\forall u \in V, g(u, u) \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, que g es definida positiva significa, como en el caso real, que $g(u, u) > 0 \ \forall u \in V \setminus \{0\}$.

Está claro que, para probar que cierta forma $g : V \times V \to \mathbb{C}$ es un producto interior sobre el espacio vectorial complejo V, basta ver que es lineal en la primera variable, que cumple la condición (1) y que es definida positiva.

Ejercicio 2): Demostrar que, para $V = \mathbb{C}^n$, la aplicación $g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(u, v) = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j}$ es una forma sesquilineal hermitiana definida positiva, o sea, un producto escalar. Le llamaremos producto escalar "usual" o "habitual" de $\mathbb{C}^n$.

Siempre que tengamos un producto escalar g en un espacio vectorial complejo V, diremos que el par (V, g) es un espacio prehilbertiano complejo o, simplemente, un espacio vectorial complejo con un producto interior.
A los espacios prehilbertianos complejos con dimensión finita se les suele llamar espacios unitarios.

DEFINICIÓN.

Sea (V, g) un espacio vectorial con producto interior. Llamaremos longitud o NORMA del vector $v \in V$ al número real que denotaremos $\|v\|$ (o $\|v\|_g$ si queremos poner de manifiesto su dependencia del producto escalar g) y que se define así:

$$\|v\| = \|v\|_g = \sqrt{g(v, v)}. \tag{2}$$

PROPOSICIÓN.

En (V, g) espacio vectorial con producto interior, se cumple la siguiente desigualdad de Cauchy-Schwarz:

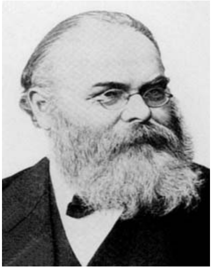
$$|< u, v >| \leq \|u\| \, \|v\|. \tag{3}$$

Además la igualdad en (3) se verifica si y sólo si u y v son linealmente dependientes.

La demostración la daremos para el caso real y formularemos como ejercicio la extensión al caso complejo.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz se llama así en honor del matemático francés Augustin Louis Cauchy(1789-1857) y del matemático alemán Hermann Amandus Schwarz(1843-1921).

Cauchy



Schwarz

Cauchy-Schwarz

DEMOSTRACIÓN.

Podemos suponer que $v \neq 0$, ya que, si $v = 0$, todo lo que afirma la proposición se verifica trivialmente.
Observamos que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \|u + tv\|^2 = g(u + tv, u + tv) = \|u\|^2 + 2tg(u, v) + t^2\|v\|^2.$$

Así pues, la ecuación cuadrática $\|v\|^2 t^2 + 2g(u, v)t + \|u\|^2 = 0$ tiene, a lo más, una raíz real t. Entonces, su discriminante, tendrá que ser ≤ 0, es decir, se tendrá que cumplir

$$g(u, v)^2 - \|v\|^2\|u\|^2 \leq 0,$$

que nos conduce inmediatamente a (3). Por otro lado, si en (3) se da la igualdad, sabemos que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $g(u + tv, u + tv) = 0$, lo cual implica que $u + tv = 0$, de forma que u, v son linealmente dependientes. Recíprocamente, si u y v son linealmente dependientes, como $v \neq 0$, se sigue que, $u + \lambda v = 0$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, lo cual nos lleva a la igualdad en (3).

Ejercicio 3): Extender la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz al caso de un espacio vectorial complejo dotado de un producto escalar.

Proposición.

La norma asociada a un producto escalar g mediante la fórmula (2) verifica las propiedades siguientes:

- $\|u\| \geq 0 \ \forall u \in V$ y $\|u\| = 0 \iff u = 0$.
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\| \ \forall u \in V$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \ \forall u, v \in V$.

Demostración.

Las dos primeras propiedades son inmediatas. Veamos la tercera. Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obteniendo:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \Longrightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.\end{aligned}$$

Observación: Siempre que se tiene una aplicación de un espacio vectorial V (real o complejo) en $\mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$ que cumple las tres propiedades de la proposición última, se dice que es una norma y que el par $(V, \| \ \|)$ es un espacio normado. No todas las normas provienen de un producto escalar. Por ejemplo, dado p, tal que $1 \leq p < \infty$, se puede dar en $\mathbb{R}^n$ (y en $\mathbb{C}^n$) la norma $\|v\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^p \right)^{1/p}$. Sólo $\|v\|_2$ proviene de un producto escalar, como veremos más adelante.

PROPOSICIÓN.

Si para cada p tal que $1 \leq p \leq \infty$ definimos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n(\text{o } \mathbb{C}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v = (v_j)_{j=1}^n & \longmapsto & \|v\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq j \leq n} |v_j| \text{ si } p = \infty \end{cases} \end{array},$$

entonces, todas las aplicaciones $v \mapsto \|v\|_p$ son normas en $\mathbb{R}^n(\text{o } \mathbb{C}^n)$.

La única propiedad que no es inmediata es la tercera, la desigualdad triangular que, para las funciones que estamos considerando, se conoce como desigualdad de Minkowski, en honor del matemático alemán Hermann Minkowski(1864-1909)
Los casos $p = \infty$ y $p = 1$ son muy sencillos. En efecto, si consideramos $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\forall j = 1, \cdots, n, \ |u_j + v_j| \leq |u_j| + |v_j| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \implies \|u + v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Y también

$$\forall j = 1, \cdots, n, \ |u_j + v_j| \leq |u_j| + |v_j| \implies \|u + v\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |u_j + v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |u_j| + \sum_{j=1}^{n} |v_j| = \|u\|_1 + \|v\|_1.$$

Los casos $1 < p < \infty$ se siguen fácilmente de la llamada desigualdad de Hölder, que establece que si p' denota el exponente conjugado de p, que es, por definición aquel que satisface

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \text{ o, lo que es equivalente, } p' = \frac{p}{p-1},$$

entonces

$$\left| \sum_{j=1}^{n} u_j v_j \right| \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \tag{4}$$

La desigualdad (4) fue descubierta por el matemático alemán Otto Hölder(1859-1937).
Dejamos para más adelante la demostración de (4) y vemos, en primer lugar, cómo, usando (4) podemos obtener la desigualdad de Minkowski para un $p,\ 1 < p < \infty$. Tenemos

$$\|u+v\|_p^p = \sum_{j=1}^{n} |u_j + v_j|^p = \sum_{j=1}^{n} |u_j + v_j||u_j + v_j|^{p-1}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left(|u_j| + |v_j|\right) |u_j + v_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^{n} |u_j||u_j + v_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |v_j||u_j + v_j|^{p-1}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right) \|u+v\|_p^{p-1}$$

A partir de aquí obtenemos la desigualdad de Minkowski para p :

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Ahora sólo nos queda probar (4).

Observamos que, en realidad, (4) es una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En efecto, el primer miembro de (4) no es otra cosa que el valor absoluto del producto escalar usual de u y v y, dado que $p = 2 \Rightarrow p' = 2$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz es, justamente, la desigualdad de Hölder para $p = 2$. Podemos escribir (4) como

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \tag{5}$$

Ante todo, vemos que para probar (5) basta ver que si $\|u\|_p = \|v\|_{p'} = 1$, entonces $|\langle u, v\rangle| \leq 1$. Y esto es una consecuencia inmediata de la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética.

Dados dos números positivos, a y b, su media geométrica para los exponentes $1/p$ y $1/p'$, que suman 1, es

$$a^{1/p}b^{1/p'}$$

y su media aritmética es

$$\frac{1}{p}a + \frac{1}{p'}b.$$

Es un hecho clásico que la media geométrica es siempre menor o igual que la media aritmética.

$$a^{1/p}b^{1/p'} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{p'}b. \tag{6}$$

Este hecho es suficiente para demostrar (5) ya que, para $\|u\|_p = \|v\|_{p'} = 1$, resulta

$$|\langle u, v\rangle| \leq \sum_{j=1}^{n}(|u_j|^p)^{1/p}(|v_j|^{p'})^{1/p'} \leq \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{p}|u_j|^p + \frac{1}{p'}|v_j|^{p'}\right\} = \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1.$$

Finalmente, la demostración de (6) es un ejercicio sencillo de cálculo de una variable. Siempre puede suponerse que $a > b$. Claramente, (6) equivale a lo que resulta de dividir sus dos miembros por b, o sea

$$(a/b)^{1/p} \leq 1 + (1/p)(a/b - 1),$$

o sea

$$x^{1/p} \leq 1 + (1/p)(x - 1), \text{ para } x \geq 1.$$

Y esto es trivial

$$x^{1/p} - 1 = \int_1^x \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} dt \leq \frac{1}{p}(x - 1).$$

También se puede obtener (6) a partir de la desigualdad de Young, nombrada en honor del matemático inglés William Henry Young(1863-1942).

La desigualdad de Young se suele enunciar como

$$(7) \qquad xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'} \ \forall x, y > 0 \text{ si } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \ 1 < p, p' < \infty.$$

Desde luego, (7) es equivalenta a (6), de la que se obtiene poniendo $x = a^{1/p}, \ y = b^{1/p'}$. En realidad, lo que demostró Young es una desigualdad general de la que se sigue (7).

Ejercicio 4): Para una sucesión infinita $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ de números reales o complejos (digamos $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) y, para $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{j\in\mathbb{N}} |v_j| & \text{si } p = \infty \end{cases} .$$

Consideramos

$$\ell_{\mathbb{R}}^p = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ \|x\|_p < \infty\right\} \text{ y } \ell_{\mathbb{C}}^p = \left\{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \ \|x\|_p < \infty\right\}.$$

Demostrar que $\ell_{\mathbb{R}}^p$ y $\ell_{\mathbb{C}}^p$ son espacios normados. Cuando el cuerpo de escalares no juegue ningún papel, pondremos, simplemente ℓ^p.

Ejercicio 5): ¿Cómo se puede definir un producto escalar en ℓ^2, cuya norma correspondiente sea $\| \ \|_2$?

Ejercicio 6): Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ continua. Demostrar que

$$\left\| \int_0^1 f(t)dt \right\| \leq \int_0^1 \|f(t)\| dt.$$

En principio la desigualdad se pide para la norma euclídea $\| \ \|_2$; pero, de hecho, es cierta para cualquier norma. Investigar cómo probarla para $\| \ \|_p$ y para una norma arbitraria.
Sugerencia: Recordar, antes que nada, cómo se define la integral de una función con valores vectoriales.

PROPOSICIÓN.

La norma $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ asociada al producto escalar $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$ satisface la siguiente identidad del paralelogramo:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right). \tag{8}$$

Es más, dada una norma cualquiera $\|\ \|$ en V, dicha norma proviene de un producto escalar si y sólo si satisface la identidad del paralelogramo.

La proposición es cierta tanto para espacios reales como complejos; sin embargo, hemos escrito la prueba para el caso real, dejando la extensión al caso complejo como ejercicio.

Demostración.

Que la norma $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ satisface la identidad del paralelogramo, es inmediato:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$$
$$= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Que, recíprocamente, si suponemos que $\| \ \|$ es una norma en V que satisface la identidad del paralelogramo:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \tag{9}$$

entonces, existe un producto escalar tal que $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, es un resultado mucho más profundo, debido a Pascual Jordan(1902-1980) y John von Neumann(1903-1957).
Desde luego, si el producto escalar existe, tiene que ser

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2), \ \forall u, v \in V. \tag{10}$$

Entonces, la prueba consiste en definir $\langle u, v\rangle$ mediante (10) y comprobar que es un producto escalar. Una vez hecho esto, queda claro que $\langle v, v\rangle = \frac{1}{4}\|2v\|^2 = \|v\|^2$ y termina la prueba. Comprobemos entonces que, suponiendo la identidad del paralelogramo (9), la aplicación $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$ de $V \times V$ en $\mathbb{R}$ definida por (10) es, realmente, un producto escalar. Lo único que hay que demostrar es que es una aplicación bilineal; porque la simetría resulta evidente y, luego, que es definida positiva es inmediato por su relación con la norma. Veamos, pues, que es bilineal

$$\langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \|u+w\|^2 - \|u-w\|^2)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left\|\left(u+\frac{v+w}{2}\right)+\frac{v-w}{2}\right\|^2 + \left\|\left(u+\frac{v+w}{2}\right)-\frac{v-w}{2}\right\|^2\right.$$

$$\left.-\left\|\left(u-\frac{v+w}{2}\right)+\frac{v-w}{2}\right\|^2 - \left\|\left(u-\frac{v+w}{2}\right)-\frac{v-w}{2}\right\|^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\|u+\frac{v+w}{2}\right\|^2 - \left\|u-\frac{v+w}{2}\right\|^2\right) = 2\left\langle u, \frac{v+w}{2}\right\rangle$$

¡Esto no es exactamente lo que buscábamos! Pero tiene arreglo.
Lo que hemos visto es que

$$(11) \qquad \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle = 2\left\langle u, \frac{v+w}{2}\right\rangle.$$

Pero, si ahora vamos a (10) y tomamos $v = 0$, vemos que $\langle u, v\rangle = 0$.
En particular, haciendo $w = 0$ en (11), llegamos a que

$$(12) \qquad \langle u, v\rangle = 2\left\langle u, \frac{v}{2}\right\rangle,$$

que, llevado de nuevo a (11) nos da, finalmente, la aditividad

$$(13) \qquad \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle = \langle u, v+w\rangle.$$

Ahora, combinando, (13) con (12) resulta que

$$(14) \qquad \langle u, 2^{-n}mv\rangle = 2^{-n}m\langle u, v\rangle, \ \forall u, v \in V \ \forall n, m \in \mathbb{Z}, \ n, m \geq 0.$$

Acabamos gracias al ejercicio siguiente

Ejercicio 7): Demostrar que la aplicación $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$ definida por (10) tiene la propiedad de que, para cada par de vectores $u, v \in V$, la función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \langle u, tv\rangle \end{array}$$

es continua y que esto es suficiente para garantizar que, a partir de (14), se deduce que

$$\langle u, tv\rangle = t\langle u, v\rangle \ \forall u, v \in V, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 8): Adaptar la prueba de la última proposición al caso de un espacio vectorial complejo.

Ejercicio 9): Demostrar que, entre todas las normas $\| \ \|_p$ definidas en $\mathbb{R}^n$, la única que cumple la ley del paralelogramo es la norma euclídea, es decir $\| \ \|_2$.

Teorema de Pitágoras.

Si $u, v \in V$, donde tenemos un producto escalar g, entonces

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u \cdot v = 0. \tag{15}$$

Demostración.

Como vimos en la demostración de la desigualdad triangular de la norma $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2$, que podemos poner como

$$< u, v >= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right). \tag{16}$$

A partir de (16), se sigue inmediatamente (15).

Cuando se introducen los ángulos y la perpendicularidad u ortogonalidad, se recupera la versión clásica del Teorema de Pitágoras. En realidad, se puede decir que con la introducción del producto escalar, el Teorema de Pitágoras, se convierte, prácticamente, en una definición.

Ejercicio 10): Demostrar que si tenemos vectores $v_1, \cdots, v_r \in V$ tales que $v_i \cdot v_j = 0$ para todo $i \neq j$, entonces

$$\|v_1 + \cdots + v_r\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_r\|^2.$$

DEFINICIÓN.

Dados dos puntos $a, b \in A$, donde A es un espacio euclídeo, se define la distancia entre ellos como el número

$$d(a,b) = \|b - a\| = \|ab\|.$$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ con su producto escalar usual, si $a = (a_j)_{j=1}^n$ y $b = (b_j)_{j=1}^n$,

$$d(a,b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

Proposición: Desigualdad triangular de la distancia

Para cualesquiera puntos a, b, c del espacio euclídeo A, se tiene que

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b). \tag{17}$$

Demostración.

Es consecuencia inmediata de la desigualdad triangular para la norma

$$\begin{aligned} d(a,b) = \|b-a\| &= \|(c-a)+(b-c)\| \\ &\leq \|c-a\| + \|b-c\| = d(a,c) + d(c,b). \end{aligned}$$

En general, se llama distancia en un conjunto X a cualquier aplicación $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las tres propiedades siguientes:

- $\rho(x,y) \geq 0\ \forall x,y \in X$ y $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$.
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)\ \forall x,y \in X$ y
- $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)\ \forall x,y,z \in X$.

Ejercicio 11): Demostrar que si tenemos un espacio afín $(A; V)$ y $\| \ \|$ es una norma en V, entonces, la aplicación $\rho : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $\rho(a, b) = \|b - a\|$ es una distancia en A.

Ejercicio 12): Demostrar que en la desigualdad triangular de la distancia euclídea (17), vale la igualdad si y sólo si $c \in [a, b]$. ¿Es ésto verdad para otras normas?

DEFINICIÓN.

Llamaremos espacio métrico al par (X, d) formado por un conjunto X y una distancia d definida en X.

En todo espacio normado $(V, \| \ \|)$ podemos definir una distancia d mediante la fórmula

$$d(u, v) = \|u - v\| \ \forall u, v \in V.$$

Esta distancia asociada a la norma tiene una propiedad adicional importante: es invariante por traslación; es decir

$$\forall u, v, w \in V, \ d(u + w, v + w) = d(u, v).$$

Distinguiremos dos nociones de límite; que luego veremos que son casos particulares de una noción única.
La primera es la noción de convergencia de una sucesión de puntos de un espacio métrico.

DEFINICIÓN.

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X. Diremos que la sucesión x_n converge al punto $a \in X$, y escribiremos $x_n \to a$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall n \geq n_0, \; d(x_n, a) < \varepsilon.$$

PROPOSICIÓN.

$$(x_n \to a) \wedge (x_n \to b) \implies a = b.$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Existirán $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$(\forall n \geq n_0,\ d(x_n, a) < \varepsilon) \wedge (\forall n \geq n_1,\ d(x_n, b) < \varepsilon)\,.$$

Tomando cualquier $n \geq \max(n_0, n_1)$, tenemos

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon.$$

Se sigue que $d(a, b) = 0$, y de ahí, que $a = b$.

Lo que nos dice la última proposición es que una sucesión no puede converger a dos puntos distintos. Por eso tiene sentido llamar límite de una sucesión al punto al que converge. Este límite puede no existir; pero, si existe, forzosamente es único. Puede decirse que la proposición última establece la "unicidad del límite".

Ejercicio 13): Sea $a = (a(i))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ y, para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $x_j = (x_j(i))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$.
Para $1 \leq p \leq \infty$ consideramos el espacio métrico $\mathbb{R}_p^n = (\mathbb{R}^n, d_p)$ en el que la distancia d_p es la que está asociada a la norma $\| \, \|_p$ mediante la definición

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demostrar que

$$x_j \to a \text{ en } \mathbb{R}_p^n \iff \forall i = 1, 2, \cdots, n, \; x_j(i) \to a(i) \text{ en } \mathbb{R}. \tag{18}$$

DEFINICIÓN.

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Sea $A \subset X$ y sea $x_0 \in X$ un punto para el que existe alguna sucesión $a_n \in A,\ n \in \mathbb{N}$, tal que $a_n \to x_0$. Diremos que la función f converge al punto $y_0 \in Y$ cuando x tiende a x_0 dentro de A, y escribiremos

$$f(x) \underset{x \to x_0,\ x \in A}{\longrightarrow} y_0$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \ni\ (x \in A) \wedge (d_X(x, x_0) < \delta) \Longrightarrow (d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

También en este caso, el límite, si existe, es único. La demostración es una variante sencilla de la que utilizamos para ver la unicidad del límite de sucesiones.

DEFINICIÓN.

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Sea $f : X \to Y$ una aplicación y sea $x_0 \in X$. Diremos que la aplicación f es continua en el punto x_0 si

$$(19) \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \ni d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Diremos, sencillamente, que f es continua, si es continua en cada punto $x_0 \in X$.

A continuación analizamos las relaciones que hay entre continuidad y límites en este contexto de los espacio métricos. En primer lugar vemos cómo la continuidad se puede expresar mediante límites de sucesiones

Proposición.

Para una aplicación f del espacio métrico (X, d_X) en el espacio métrico (Y, d_Y) son equivalentes las dos propiedades siguientes

(a) f es continua en el punto $x_0 \in X$.

(b) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X que converja a x_0, se tiene que la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ de puntos de Y, converge a $f(x_0)$.

Demostración. Para ver que $(a) \Longrightarrow (b)$, suponemos que f es continua en x_0. Entonces, dado ε, tenemos el correspondiente δ de la definición de continuidad. Ahora suponemos que la sucesión x_n converge a x_0 en X y queremos ver que $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$ en Y. Para ello tomamos ε; por ser f continua en x_0, la definición nos da el correspondiente δ y ahora, usando este δ, por ser $x_n \to x_0$, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $d_X(x_n, x_0) < \delta$ y, por consiguiente, $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Con eso queda probado lo que queríamos.

Ver que $(b) \Longrightarrow (a)$ es lo mismo que ver que la negación de (a) implica la negación de (b). Así pues, suponemos que f no es continua en x_0 y buscamos una sucesión que converja a x_0 sin que su imagen converja a $f(x_0)$.

Por no ser f continua en x_0, sabemos que existe $\varepsilon > 0$, y, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$, tal que $d_X(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$ y, sin embargo, $d_Y(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$. Esta sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es, justo, lo que necesitábamos.

PROPOSICIÓN.

Sea f una aplicación del espacio métrico (X, d_X) en el espacio métrico (Y, d_Y) y sea $x_0 \in X$ un punto para el que existe alguna sucesión de puntos $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ tal que $x_n \to x_0$. Entonces, las dos propiedades siguientes son equivalentes

(a) f es continua en el punto x_0.

(b) $f(x) \underset{x \to x_0,\, x \in X \setminus \{x_0\}}{\longrightarrow} f(x_0)$.

DEFINICIÓN.

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos.
Diremos que la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \ni d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon. \tag{20}$$

Ejercicio 14): Decidir, razonadamente, cuáles de las aplicaciones siguientes son uniformemente continuas y cuáles no lo son. La métrica considerada en $\mathbb{R}$ y en sus subconjuntos es siempre la dada por el valor absoluto (que, desde luego, es una norma en $\mathbb{R}$).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}]1,2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}, \quad \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log x \end{array}, \quad \begin{array}{ccc}]1,\to[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log x \end{array}$$

Proposición.

Sean $(\mathbb{X}, \| \|_{\mathbb{X}})$ e $(\mathbb{Y}, \| \|_{\mathbb{Y}})$ espacios normados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ lineal. Entonces, son equivalentes las propiedades siguientes:

(*a*) T es continua,

(*b*) T es continua en 0,

(*c*) $\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq M\|x\|_{\mathbb{X}}$ $\forall x \in \mathbb{X}$ y

(*d*) T es uniformemente continua.

Demostración.

- $(a) \Rightarrow (b)$ es obvio.
- $(b) \Rightarrow (c)$. $T(0) = 0$ y, sabemos que, dado $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, tal que $\|x\|_{\mathbb{X}} < \delta \Rightarrow \|T(x)\|_{\mathbb{Y}} < 1$. Entonces, dado $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, si tomamos $x' = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{X}}}$, tenemos $\|x'\|_{\mathbb{X}} < \delta$, por lo que $\frac{\delta}{2} \frac{\|T(x)\|_{\mathbb{Y}}}{\|x\|_{\mathbb{X}}} = \|T(x')\|_{\mathbb{Y}} < 1$, de donde, $\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_{\mathbb{X}}$.
- $(c) \Rightarrow (d)$ es inmediato y $(d) \Rightarrow (a)$ es obvio.

Ejercicio 15): Dados dos espacios normados $(\mathbb{X}, \| \ \|_{\mathbb{X}})$ e $(\mathbb{Y}, \| \ \|_{\mathbb{Y}})$, sea

$$\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y} : \ T \text{ es lineal y continua}\}.$$

Demostrar que

(*1*) $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares definidos de la manera natural, es decir

$$\forall T, S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall x \in \mathbb{X}, \ (\alpha T + \beta S)(x) = \alpha T(x) + \beta S(x).$$

(*2*) Ver que si, para $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ definimos $\|T\|$ como el mínimo M para el que se cumple la desigualdad de la propiedad (c) de la proposición, entonces

$$\begin{aligned} (21) \quad \|T\| &= \sup\{\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} : \ x \in \mathbb{X} \ \ni \|x\|_{\mathbb{X}} \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} : \ x \in \mathbb{X} \ \ni \|x\|_{\mathbb{X}} = 1\} \end{aligned}$$

y $\| \ \|$ es un norma en $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Ejercicio 16): Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Sea $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ la matriz $m \times n$ de T respecto a las bases canónicas. Para cada p tal que $1 \le p \le \infty$, llamemos $\mathbb{R}^n_p$ (respectivamente $\mathbb{R}^m_p$) al espacio normado obtenido considerando en $\mathbb{R}^n$ (respectivamente en $\mathbb{R}^m$) la norma $\| \; \|_p$. Se pide

(*1*) Demostrar que $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_1, \mathbb{R}^m_1)$ con norma

$$\|T\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \tag{22}$$

(*2*) Demostrar que $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_\infty, \mathbb{R}^m_\infty)$ con norma

$$\|T\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{23}$$

(*3*) Demostrar que $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_2, \mathbb{R}^m_2)$ con norma

$$\|T\|_2 = \left(\max_{1\le j\le n} |\lambda_j|\right)^{1/2}, \; (\lambda_j)_{j=1}^n \text{ los autovalores de } T^\star \circ T. \tag{24}$$

Solución:

Si $(e_j)_{j=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $(e_i)_{i=1}^m$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$ y si aplicamos T a un vector $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \mathbb{R}^n$, tendremos

$$T(x) = \sum_{j=1}^n x_j T(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \right) e_i.$$

Entonces:

$$(1) : \|T(x)\|_1 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) |x_j| \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) \|x\|_1.$$

Se sigue que

$$\|T\|_1 \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \max_{1\leq j\leq n} \|T(e_j)\|_1 \leq \|T\|_1.$$

(2) : $\|T(x)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| \leq \left(\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\|x\|_\infty$

Se sigue que $\|T\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$. Y observamos, por otro lado, que

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{sgn}(a_{ij}) \tag{25}$$

es la $i-$ésima componente del vector $T(y)$, donde $y = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{sgn}(a_{ij})e_j$.

Como $\|y\|_\infty \leq 1$, resulta que la suma (25) está mayorada por $\|T(y)\|_\infty \leq \|T\|_\infty$. Así

$$\|T\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \leq \|T\|_\infty.$$

Para probar (*3*) usamos una base ortonormal $(u_j)_{j=1}^n$ de autovectores del operador autoadjunto $T^\star T$, correspondientes a los autovalores $(\lambda_j)_{j=1}^n$. Si tomamos el vector $x = \sum_{j=1}^n x_j u_j$, tenemos

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_2^2 &= \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^\star T(x)\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n x_j u_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j u_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j}|x_j|^2 \le \left(\max_{1\le j\le n} |\lambda_j|\right) \|x\|_2^2.\end{aligned}$$

Así pues $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_2^n, \mathbb{R}_2^m)$ con $\|T\|_2 \le \left(\max_{1\le j\le n} |\lambda_j|\right)^{1/2}$.

Por otro lado, para cada $j = 1, \cdots, n$,

$$\|T\|_2^2 \ge |\langle u_j, T^\star T(u_j)\rangle| = |\lambda_j|.$$

Así llegamos a que

$$\|T\|_2 = \left(\max_{1\le j\le n} |\lambda_j|\right)^{1/2}.$$

Ejercicio 17): Sean $(\mathbb{U}, \| \|_{\mathbb{U}})$, $(\mathbb{V}, \| \|_{\mathbb{V}})$ y $(\mathbb{W}, \| \|_{\mathbb{W}})$ tres espacios normados. Sean $T \in \mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ y $S \in \mathcal{B}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Demostrar que la composición $S \circ T$ pertenece a $\mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{W})$ y se cumple que

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|. \tag{26}$$

Ejercicio 18): Para un espacio normado $(\mathbb{X}, \| \|_{\mathbb{X}})$, demostrar que el espacio normado $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$, al que denotaremos, simplemente por $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, es, cuando se añade la composición como producto, un álgebra. La propiedad (26) se expresa diciendo que se trata de un álgebra normada.

En toda esta sección suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

DEFINICIÓN.

Dado un punto $x \in X$ y un número real $r > 0$, llamaremos bola abierta de centro x y radio r al subconjunto de X que denotaremos por $\mathbf{B}(x, r)$ y que consiste en

$$\mathbf{B}(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) < r\}.$$

Y llamaremos bola cerrada de centro x y radio r al subconjunto de X que denotaremos por $\overline{\mathbf{B}}(x, r)$ y que consiste en

$$\overline{\mathbf{B}}(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) \leq r\}.$$

Diremos que un subconjunto V de X es un entorno de x si, para algún $r > 0, \ \mathbf{B}(x, r) \subset V$.

DEFINICIÓN.

Diremos que un subconjunto $U \subset X$ es abierto si U es entorno de cada uno de sus puntos, es decir, si

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0 \ \ni \ \mathbf{B}(x,r) \subset U.$$

Diremos que un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si su conjunto complementario $\complement F = X \setminus F$ es abierto.

PROPOSICIÓN.

La colección $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ formada por todos los conjuntos abiertos de X satisface las tres propiedades siguientes

(27) (i) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$

(ii) Si $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ es una familia de abiertos, entonces $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{U}$

(iii) $U_1, U_2 \in \mathcal{U} \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

Proposición.

Las bolas abiertas son abiertos; es decir

$$\forall x \in X \text{ y } \forall r > 0,\ \mathbf{B}(x, r) \in \mathcal{U}.$$

Demostración.

Sea $y \in \mathbf{B}(x, r)$. Entonces $s = r - d(y, x) > 0$. Vamos a ver que $\mathbf{B}(y, s) \subset \mathbf{B}(x, r)$. En efecto

$$\begin{aligned} z \in \mathbf{B}(y, s) \Longrightarrow d(z, y) < s \Longrightarrow d(z, x) &\leq d(z, y) + d(y, x) \\ &< s + d(y, x) = r. \end{aligned}$$

Corolario.

Un conjunto es abierto si y sólo si es unión de una familia de bolas abiertas.

PROPOSICIÓN.

Las bolas cerradas son conjuntos cerrados

DEMOSTRACIÓN.

Hemos de ver que, dados $x \in X$ y $r > 0$, el conjunto $\complement\overline{\mathbf{B}}(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) > r\}$ es abierto.
Si $d(x, y) > r$, entonces $s = d(x, y) - r > 0$. Vamos a ver que $\mathbf{B}(y, s) \subset \complement\overline{\mathbf{B}}(x, r)$. En efecto, si $d(z, y) < s, \ d(z, x) \geq d(x, y) - d(z, y) > d(x, y) - s = r$.

Proposición.

La colección $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ formada por todos los conjuntos cerrados de X satisface las tres propiedades siguientes

$$(i)\ \emptyset, X \in \mathcal{F} \tag{28}$$

(ii) Si $(F_\alpha)_{\alpha \in J}$ es una familia de cerrados, entonces $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha \in \mathcal{F}$

(iii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

Seguimos estando en un espacio métrico (X, d).

DEFINICIÓN.

Dado un conjunto $E \subset X$ y dado un punto $x \in X$, se da una y sólo una de estas tres situaciones:

(*a*) Existe algún entorno V de x tal que $V \subset E$.

(*b*) Existe algún entorno V de x tal que $V \subset \complement E$.

(*a*) Todo entorno V de x cumple que $V \cap E \neq \emptyset$ y $V \cap \complement E \neq \emptyset$

Los puntos que cumplen (*a*) se dice que son interiores a E y todos ellos forman un subconjunto de E al que llamaremos interior de E y al que denotaremos como $\mathrm{int}(E)$ o $\overset{\circ}{E}$.
Los puntos que cumplen (*b*) se dice que son exteriores a E y todos ellos forman un subconjunto de X al que llamaremos exterior de E y al que denotaremos como $\mathrm{ext}(E)$. Observemos que $\mathrm{ext}(E) = \overset{\circ}{\overbrace{\complement E}}$.
Los puntos que cumplen (*c*) se dice que son puntos frontera de E y todos ellos forman un subconjunto de X al que llamaremos frontera de E y al que denotaremos como $\mathrm{Fr}(E)$.

PROPOSICIÓN.

$\mathring{E}$ es el máximo abierto contenido en E.

DEMOSTRACIÓN.

Si U es abierto y $U \subset E$, todos los puntos de U son interiores a E, de modo que $U \subset \mathring{E}$. Además, esta misma observación demuestra que el propio $\mathring{E}$ es un abierto.

DEFINICIÓN.

Diremos que el punto $x \in X$ es adherente al conjunto $E \subset X$ si todo entorno V de x corta a E; es decir, cumple que $V \cap E \neq \emptyset$.
Al conjunto de todos los puntos adherentes al conjunto E le llamaremos adherencia de E y lo denotaremos por $\overline{E}$.

PROPOSICIÓN.

$\overline{E}$ es el mínimo cerrado que contiene a E. Por eso también es común llamar a $\overline{E}$ el cierre de E.

DEMOSTRACIÓN.

Se sigue de la definición que

$$\overline{E} = \mathrm{Fr}(E) \cup \overset{\circ}{E} = \mathrm{Fr}(E) \cup E = \complement \mathrm{ext}(E) = \complement \overbrace{\complement E}^{\circ}.$$

Por lo tanto, $\overline{E}$ es cerrado. Además, si F es cualquier cerrado tal que $F \supset E$, entonces $\complement F \subset \complement E$ y, como $\complement F$ es abierto, será

$$\complement F \subset \overbrace{\complement E}^{\circ} \Longrightarrow F \supset \overline{E}.$$

DEFINICIÓN.

Dados $E \subset X$ y $a \in X$, diremos que a es un punto de acumulación de E si todo entorno de a contiene algún punto de E distinto de a.
Llamaremos E' al conjunto de todos los puntos de acumulación de E.
Vemos que

$$\overline{E} = E \cup E'.$$

PROPOSICIÓN.

E es cerrado si y sólo si $E' \subset E$.

Comenzamos observando que las nociones de límite de una sucesión o de una función que hemos dado en el contexto de los espacios métricos, se pueden caracterizar usando entornos (o bolas, o abiertos), sin que sea necesario que aparezca explícitamente la distancia.

PROPOSICIÓN.

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos del espacio métrico (X, d). Entonces

$$x_n \to a \in X \iff \forall V \text{ entorno de } a,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni x_n \in V\ \forall n \geq n_0. \tag{29}$$

PROPOSICIÓN.

Sea f una aplicación del espacio métrico (X, d_X) en el espacio métrico (Y, d_Y) y sean $A \subset X$ y $x_0 \in \overline{A}$. Entonces

$$f(x) \underset{x \to x_0,\ x \in A}{\longrightarrow} y_0 \iff \forall V \text{ entorno de } f(x_0)$$
$$\exists U \text{ entorno de } x_0 \ni \forall x \in U \cap A,\ f(x) \in V. \tag{30}$$

Tampoco hace faltar usar explícitamenta las distancias para caracterizar la continuidad de una aplicación entre espacios métricos.

PROPOSICIÓN.

Sea f una aplicación del espacio métrico (X, d_X) en el espacio métrico (Y, d_y). Entonces

- f es continua en un punto $x_0 \in X$ si y sólo si

$$\forall V \text{ entorno de } f(x_0)\ \exists U \text{ entorno de } x_0 \ \ni f(U) \subset V. \tag{31}$$

- f es continua si y sólo si

$$\forall V \text{ abierto de } Y,\ f^{-1}(V) \text{ es un abierto de } X. \tag{32}$$

En contraste con la noción de continuidad, la de continuidad uniforme no se puede expresar únicamente en términos de entornos o de abiertos. Es una propiedad métrica; mientras que la continuidad es una propiedad topológica. Vamos a explicar con calma el significado de este adjetivo y del sustantivo del que deriva: “Topología”, que es el nombre de una rama de las Matemáticas y de una asignatura de tercero del plan de estudios del Grado de Matemáticas en nuestra Universidad.

DEFINICIÓN.

Llamaremos espacio topológico a cualquier par $(X,\mathcal{U})$ formado por un conjunto X y una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X que cumple las tres propiedades descritas en (27). Diremos que $\mathcal{U}$ es una topología en X y que los conjuntos de $\mathcal{U}$ son los abiertos de la topología.
Dado un espacio topológico $(X,\mathcal{U})$ y dado $a \in X$, llamaremos entorno de a a todo subconjunto V de X que contenga a algún abierto U tal que $U \ni a$.

Ejercicio 19): Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio topológico y sea $Y \subset X$. Demostrar que la colección

$$\mathcal{U}_Y = \{U \cap Y : \ U \in \mathcal{U}\}$$

es una topología en Y. A $\mathcal{U}_Y$ se le suele llamar topología relativa, inducida o heredada.

¿Sabrías describir los cerrados correspondientes a la topología inducida en Y por la de X de forma similar a la que hemos usado para los abiertos?

¿Y los entornos de un punto $y \in Y$?

En un espacio topológico cobran sentido todas las nociones que hemos formulado para espacios métricos con abiertos o entornos en las dos últimas secciones.

Por ejemplo

- Un conjunto $F \subset X$ es cerrado si su complemento $\complement F$ es abierto. La colección $\mathcal{F}$ de todos los cerrados del espacio topológico $(X, \mathcal{U})$ satisface las tres propiedades de (28).
- El interior $\overset{\circ}{E}$ de un conjunto $E \subset X$ es el máximo abierto contenido en E. Y $x \in \overset{\circ}{E} \Longleftrightarrow E$ es entorno de x.
- El cierre $\overline{E}$ de un conjunto $E \subset X$ es el mínimo cerrado que contiene a E. Y $x \in \overline{E} \Longleftrightarrow \forall V$ entorno de x, $V \cap E \neq \emptyset$.
- $x \in E' \Longleftrightarrow \forall V$ entorno de x, $V \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.
- E es cerrado $\Longleftrightarrow E = \overline{E} \Longleftrightarrow E' \subset E$.
- También podemos definir las nociones de límite y continuidad usando sólo entornos o abiertos. Basta transformar las tres últimas proposiciones en definiciones sustituyendo los espacios métricos por espacios topológicos.

¿Hay espacios topológicos que no son espacios métricos?

Consideremos, en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, la familia de conjuntos

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{Z} : \; U = \emptyset \text{ o } \complement U \text{ es finito}\}.$$

Es muy fácil ver que $\mathcal{U}$ es una topología.
Para saber que esta topología, llamada cofinita, no proviene de ninguna métrica observamos lo siguiente:
Sean U_0 y U_1 abiertos tales que $0 \in U_0, \; 1 \in U_1$. Entonces

$$\complement(U_0 \cap U_1) = \complement U_0 \cup \complement U_1 \subsetneqq \mathbb{Z},$$

ya que $\complement U_0 \cup \complement U_1$ es un conjunto finito.
Esto es una sorpresa y no puede pasar nunca en un espacio métrico.
La razón de que una sucesión de puntos de un espacio métrico no pueda converger a dos puntos distintos, es que los dos puntos tienen sendos entornos disjuntos.

En el espacio de los enteros con la topología cofinita que acabamos de introducir, no podemos asegurar que el límite sea único.
A un espacio topológico tal que para cada par de puntos distintos x e y existan sendos entornos de x y de y que sean disjuntos, se la llama separado o de Hausdorff, en honor del matemático alemán Félix Hausdorff(1868-1942), que puede ser considerado uno de los padres fundadores de la Topología, por su obra maestra “Grundzüge der Mengenlehre”(1914).

Tenemos una categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyas flechas son las aplicaciones continuas.

Definición.

Sean $(X_1, \mathcal{U}_1)$ y $(X_2, \mathcal{U}_2)$ dos espacios topológicos y sea $f : X_1 \longrightarrow X_2$ una aplicación

- Diremos que f es continua si

$$\forall U \in \mathcal{U}_2, \; f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_1. \tag{33}$$

- Diremos que f es un homeomorfismo si f es continua, biyectiva y, además, su inversa f^{-1} es también continua.
- Diremos que los espacios topológicos $(X_1, \mathcal{U}_1)$ y $(X_2, \mathcal{U}_2)$ son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ambos. De acuerdo con la definicion, las familias de abiertos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ están en correspondencia biunívoca mediante el homeomorfismo.

Definición.

Supongamos que tenemos dos distancias d y d' sobre el mismo conjunto X. Diremos que la distancias d y d' son equivalentes si ambas dan lugar a la misma topología, o sea, si los abiertos determinados por d y d' son los mismos. Eso equivale a decir que la aplicación identidad

$$\begin{array}{ccc} (X, d) & \longrightarrow & (X, d') \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

es un homeomorfismo.

En particular esto se aplica cuando tenemos dos normas $\| \ \|$ y $\| \ \|'$ sobre el mismo espacio vectorial. $\mathbb{X}$. Se dice que las normas son equivalentes si las distancias que inducen, d y d' son equivalentes, o sea, si definen la misma las topología.

Como la identidad es una aplicación lineal, el criterio que vimos para que sea continua da lugar a la siguiente

PROPOSICIÓN.

Las normas $\| \ \|$ y $\| \ \|'$ son equivalentes si existen dos constantes positivas k y K tales que

$$\forall x \in \mathbb{X}, k\|x\| \leq \|x\|' \leq K\|x\|. \tag{34}$$

La equivalencia de normas (34) da lugar a una equivalencia de las correspondientes distancias que es más fuerte que la equivalencia general de distancias; es lo que llamaríamos equivalencia de Lipschitz, o sea, el hecho de que la identidad es una aplicación biLipschitz, es decir

$$kd(x,y) \leq d'(x,y) \leq Kd(x,y) \ \forall x,y \in \mathbb{X}.$$

El ejemplo más importante es que todas las normas que hemos definido en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes. En concreto se tiene que

Proposición.

Para todo $x \in \mathbb{C}^n$, si $1 \le p \le q \le \infty$,

(35) $$\|x\|_\infty \le \|x\|_q \le \|x\|_p \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty.$$

En particular

(36) $$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty.$$

Demostración.

Lo único que hay que ver es que

$$\|x\|_q^p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^q\right)^{p/q} \le \sum_{j=1}^n |x_j|^p = \|x\|_p^p,\ p < q.$$

Pero esto se sigue de la desigualdad elemental, que probamos aparte:

$$(a+b)^\alpha \le a^\alpha + b^\alpha,\ a, b > 0,\ 0 < \alpha < 1.$$

LEMA.

$$(a+b)^\alpha \le a^\alpha + b^\alpha,\ a,b>0,\ 0<\alpha<1.$$

DEMOSTRACIÓN.

Dividiendo por la potencia α del mayor de a y b, digamos b, lo que hay que probar es

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^\alpha \le \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + 1,$$

es decir

$$(1+x)^\alpha \le 1+x^\alpha,\ 0<x\le 1.$$

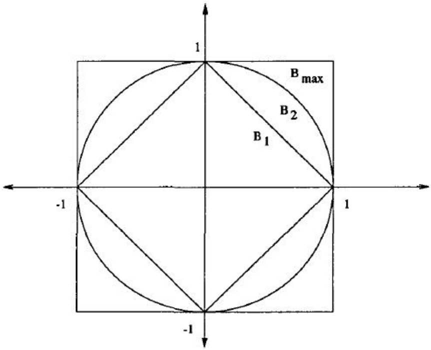
Pero

$$(1+x)^\alpha - 1 = \int_1^{1+x} \alpha t^{\alpha-1} dt \le \alpha x \le x^\alpha.$$

Si llamamos $\mathbf{B}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_p < 1\}$, (35) implica que

$$\mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_p \subset \mathbf{B}_q \subset \mathbf{B}_\infty \subset n\mathbf{B}_1.$$

La figura de abajo ilustra el caso $n = 2$.



$$\mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}_2 \subset \mathbf{B}_\infty$$

La completitud es una propiedad que un espacio métrico puede tener o no. Esta propiedad juega un papel tan básico en el Análisis Matemático, que merece la pena que nos remontemos a su origen para entender bien su significado.
Podemos comenzar la discusión pensando en una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales y preguntando:

¿Cómo podemos saber si esta sucesión converge?

Esta pregunta es más delicada que la de cómo saber si la sucesión converge a un determinado punto $a \in \mathbb{R}$ fijado de antemano. Para responder a esta segunda pregunta, sólo tenemos que ver si los distintos valores de la sucesión están tan cerca de a como queramos o no.
Pero, para saber si converge la sucesión, sin tener a priori un candidato para el límite, tendríamos que ir mirando a todos los infinitos límites a posibles, es decir, a todos los números reales.

El criterio que permite decidir si una sucesión converge o no sin saber nada de su posible límite, se llama, hoy en día, criterio de Cauchy, en honor al mismo matemático francés que ya hemos encontrado al comienzo del capítulo; aunque, en realidad, fue descubierto primero por el matemático checo Bernhard Bolzano(1781-1848).
Para formulando empezamos con una

Definición.

En un espacio métrico (X, d) se dice que la sucesión de puntos $x_n \in X$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ni \forall n, m \geq n_0,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{37}$$

El criterio buscado se formula, entonces, de este modo

Teorema (Criterio de Cauchy).

Para una sucesión $s = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales, son equivalentes las dos propiedades siguientes:

(*i*) s es convergente.

(*ii*) s es una sucesión de Cauchy.

La implicación (i)$\Longrightarrow$(ii) es verdad en cualquier espacio métrico. Si sabemos que la sucesión $x_n \in X$ converge al punto $a \in X$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$, $d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Pero, entonces, si tenemos $n, m \geq n_0$, resulta que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Para ver la otra implicación para una sucesión de números reales, comenzamos con una observación elemental

LEMA.

Toda sucesión de números reales tiene alguna subsucesión monótona. Esto quiere decir que, si tenemos una sucesión s de números $x_n \in \mathbb{R}$, entonces, podemos encontrar una sucesión creciente de índices naturales n_k tales que la sucesión $s' = (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, que es una subsucesión de s, es monótona, lo cual quiere decir que, o bien es creciente (o sea, cumple que $k < k' \Rightarrow x_{n_k} \leq x_{n_{k'}}$) o bien es decreciente (o sea, cumple que $k < k' \Rightarrow x_{n_k} \geq x_{n_{k'}}$).

DEMOSTRACIÓN. DEL LEMA.

Diremos que la sucesión “toca fondo” en un índice $j \in \mathbb{N}$ si para todo $n > j,\ x_n \geq x_j$. Entonces sólo hay dos casos posibles: O bien la sucesión toca fondo en una cantidad infinita de índices, o bien lo hace sólo en una cantidad finita de índices. En el primer caso, si los índices en que la sucesión toca fondo son $j_1 < j_2 < \cdots < j_k < \cdots$, la subsucesión $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ es creciente.
En el segundo caso, si la sucesión sólo toca fondo en $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$; se tendrá que, para cada $j > j_r$, existe $j' > j$ tal que $x_{j'} < x_j$. Así podemos encontrar una subsucesión de s que sea decreciente.

Como consecuencia de este lema se obtiene el siguiente resultado, que jugó un papel básico el la fundamentación del Análisis Matemático durante el siglo XIX.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS.

Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna subsucesión convergente.

DEMOSTRACIÓN.

Usando el lema, obtenemos una subsucesión creciente o decreciente y luego, observamos que toda sucesión monótona acotada, forzosamente tiene límite.
En efecto, supongamos que es creciente. Al ser acotada, existirá el supremo y, al ser creciente, el supremo es, ciertamente, el límite.

Este resultado lo descubrió el matemático checo, mencionado antes, Bernhard Bolzano en 1817 y lo demostró con rigor el matemático alemán Karl Weierstrass(1815-1897) en un curso del año 1877. Los sesenta años que separan las dos pruebas permitieron, entre otras cosas, una mejor fundamentación de los números reales.
Ahora podemos retomar la demostración del criterio de Cauchy:

DEMOSTRACIÓN. DE QUE (*ii*)$\Longrightarrow$(*i*)

Basta darse cuenta de dos cosas

(1) Toda sucesión de Cauchy está acotada y

(2) Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, entonces, la sucesión original, es convergente.

Ejercicio 20): Demostrar que (1) y (2) del párrafo anterior son ciertas para toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico cualquiera.

Ya estamos preparados para entender y apreciar bien la idea de completitud.

DEFINICIÓN.

Diremos que el espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy de puntos de X, converge.

Podemos resumir lo que hemos probado más arriba diciendo, simplemente, que $\mathbb{R}$, con su distancia natural, es un espacio métrico completo.

Definición.

Diremos que el espacio normado $(\mathbb{X}, \| \ \|)$ es completo, o que es un espacio de Banach si el correspondiente espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ (el que se obtiene definiendo la distancia d mediante $d(x, y) = \|x - y\| \ \forall x, y \in \mathbb{X}$) es completo.
Para un espacio con producto interior, si es de Banach, o sea, si es completo, diremos que se trata de un espacio de Hilbert.

Proposición.

Si $\| \ \|$ y $\| \ \|'$ son dos normas equivalentes definidas en el espacio vectorial $\mathbb{X}$, se tiene que

$$(\mathbb{X}, \| \ \|) \text{ es completo } \iff (\mathbb{X}, \| \ \|') \text{ es completo.}$$

Demostración.

Las sucesiones de Cauchy son las mismas y las sucesiones convergentes también.

Proposición

Sea $(\mathbb{X}, \| \, \|)$ un espacio normado. Entonces $(\mathbb{X}, \| \, \|)$ es un espacio de Banach si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} x_j \text{ converge en } \mathbb{X}. \tag{38}$$

Demostración. I.- Si $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach y tenemos $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$, observamos que la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$, o sea $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$, es una sucesión de Cauchy. En efecto, si $n > m$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \|x_j\| < \varepsilon$$

si m es suficientemente grande. Así pues, existe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x$ y la serie es

convergente en $(\mathbb{X}, \| \ \|)$.
II.- Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición (38). Vamos a ver que, entonces, $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach. Sea $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{X}, \| \ \|)$. Podemos elegir una subsucesión $(y_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ que cumpla $\|y_{j_k} - y_{j_{k+1}}\| < 2^{-k}$. Tendremos

$$y_{j_k} = y_{j_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (y_{j_{i+1}} - y_{j_i}).$$

Ahora bien, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (y_{j_{i+1}} - y_{j_i})$ converge en $\mathbb{X}$, por la propiedad (38), ya que $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_{j_{i+1}} - y_{j_i}\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1 < \infty$. Entonces, existirá

$$\lim_{k \to \infty} y_{j_k} = y_{i_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (y_{j_{i+1}} - y_{j_i}).$$

Pero, para una sucesión de Cauchy, si alguna subsucesión converge, también lo hace la sucesión original. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall j, j' \geq j_0,\ \|y_j - y_{j'}\| \leq \varepsilon$. Si $y = \lim_{k\to\infty} y_{k_j}$, tendremos

$$\|y_j - y\| \leq \|y_j - y_{j_k}\| + \|y_{j_k} - y\| \leq 2\varepsilon,$$

tomando j y j_k suficientemente grandes. Y así termina esta demostración.

PROPOSICIÓN.

$\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con cualquiera de las normas $\|\ \|_p,\ 1 \leq p \leq \infty$ que hemos introducido (todas ellas equivalentes, como hemos visto), es un espacio de Banach; es decir, es completo.

Para concretar, escribimos la demostración para $\mathbb{R}^n$. El caso complejo es, esencialmente igual.

Sólo hay que comprobar que se cumple (38). Podemos usar cualquier norma $\| \ \|_p$ porque todas son equivalentes. Usamos $\| \ \|_1$.

Sean, para cada $j \in \mathbb{N}$, $x_j = (x_j(i))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_1 < \infty$.

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j(i)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_1 < \infty$. Como $\mathbb{R}$ es completo, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j(i)$ converge. Si llamamos a su suma $x(i)$, estamos definiendo un vector $x = (x(i))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Ahora vamos a ver que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x$ en el espacio normado $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$. En efecto

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - x \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{N} x_j(i) - x(i) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} x_j(i) \right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \|x_j\|_1 \to 0$$

para $N \to \infty$.

Ejercicio 21). Hacer la demostración para $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ con la norma $\| \ \|_p$ y ver que se puede extender para ver que el espacio normado ℓ^p es completo; es decir, es un espacio de Banach. En particular, se obtiene que ℓ^2 es un espacio de Hilbert.

TEOREMA.

Para $E \subset \mathbb{R}^n$, las tres propiedades siguientes son equivalentes:

(a) Toda sucesión $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ de puntos de E tiene una subsucesión que converge a algún punto de E; es decir, existe una sucesión creciente de números naturales $(j_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que la sucesión $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ converge hacia algún punto de E.

(b) E es cerrado y acotado. (Que E es acotado significa, simplemente, que existe alguna bola que lo contiene).

(c) Todo recubrimiento abierto de E tiene un subrecubrimiento finito. (Un recubrimiento abierto es una familia $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ de abiertos de $\mathbb{R}^n$ que recubre a E, es decir, que cumple que $E \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Decir que el recubrimiento abierto $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ tiene un subrecubrimiento finito quiere decir que existe un subconjunto finito de índices $F = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} \subset J$, tal que $E \subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_r}$).

Veamos, primero, que E es cerrado. Si no lo fuera, existiría $a \in E' \setminus E$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea

$$U_j = \complement\overline{\mathbf{B}}\,(a, 1/j) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - a\| > 1/j\}\,.$$

Está claro que $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ es un recubrimiento abierto de E y, sin embargo, no tiene ningún subrecubrimiento finito.
En efecto

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \supset E$$

y, para cualquier subfamilia finita $(U_{j_k})_{k=1}^{r}$, tenemos

$$\bigcup_{k=1}^{r} U_{j_k} = \bigcup_{k=1}^{r} \complement\overline{\mathbf{B}}\,(a, 1/j_k) = \complement \bigcap_{k=1}^{r} \overline{\mathbf{B}}\,(a, 1/j_k) = \complement\overline{\mathbf{B}} \left(a, \min_{1 \le k \le r} 1/j_k \right) \not\supset E.$$

En segundo lugar, veamos que E es acotado. Si no lo fuera, $(\mathbf{B}(0, j))_{j=1}^{\infty}$ sería un recubrimiento abierto de E sin ningún subrecubrimiento finito.

Puesto que E es acotado, existirá algún intervalo $n-$dimensional

$$P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \ \ni E \subset P.$$

Dividiendo por la mitad cada uno de los intervalos $[a_i, b_i]$, podemos escribir P como unión de 2^n subintervalos $n-$dimensionales

$$P = \bigcup_{r=1}^{2^n} P_r^1.$$

Está claro que nuestra sucesión $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ entrará infinitas veces en alguno de los subintervalos, digamos en el $P_{r_1}^1$. Repitiendo este proceso de subdivisión encontramos una sucesión de intervalos $n-$dimensionales encajados

$$P_{r_1}^1 \supset P_{r_2}^2 \supset \cdots \supset P_{r_k}^k \supset \cdots$$

cada uno con diámetro la mitad del diámetro del anterior y una familia de sucesiones $s^j = (x_k^j)_{k=1}^{\infty}$, todas ellas subsucesiones de nuestra sucesión original, siendo cada s^{j+1} subsucesión de s^j y estando cada s^j contenida en P^j.

Si ahora consideramos la sucesión "diagonal" $s = (x_k^k)_{k=1}^{\infty}$, tenemos una subsucesión de la sucesión original que tiene la particularidad de que, a partir del índice j, sus términos están en P^j. Como el diámetro de P^j tiende a cero para $j \to \infty$, la sucesión s es de Cauchy y, por ser $\mathbb{R}^n$ un espacio métrico completo la sucesión s tendrá límite. Desde luego, como s es subsucesión de la sucesión original, que estaba formada por puntos de E y como E es cerrado, el límite de s será un punto de E. Además, como $\bigcap_{j=1}^{\infty} P_{r_j}^j = \{a\}$, necesariamente $\lim s = a \in E$.

Para completar la demostración del teorema, sólo nos queda probar que $(a) \Longrightarrow (c)$. Y esto es lo que vamos a hacer a continuación.

Supongamos que $(U_\alpha)_{\alpha\in J}$ es un recubrimiento abierto de E. Lo primero que observamos es que podemos encontrar un subrecubrimiento numerable $(U_{\alpha_j})_{j=1}^\infty$. Para ello vemos que cada $x \in E$ pertenece a alguna bola cuyo centro es un punto de coordenadas racionales, cuyo radio es racional y que, además está contenida en algún U_α. La familia de todas estas bolas es numerable y cada una de ellas determina un U_α. Quedándonos sólo con estos U_α, obtenemos el subrecubrimiento numerable $(U_{\alpha_j})_{j=1}^\infty$ que buscábamos.
Ahora vamos a ver que el recubrimiento $(U_{\alpha_j})_{j=1}^\infty$ tiene un subrecubrimiento finito. En efecto, si esto no fuera cierto, para cada $N \in \mathbb{N}$ podríamos encontrar $x_N \in E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} U_{\alpha_j}$. La sucesión $(X_N)_{N=1}^\infty$ tiene sólo un número finito de puntos en cada U_{α_j}.
Pero, como estamos suponiendo que se cumple (a), sabemos que existe una subsucesión $(x_{N_k})_{k=1}^\infty$ tal que $x_{N_k} \to a \in E$. Se sigue que $a \in U_{\alpha_j}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Y esto implica que hay infinitos puntos x_{N_k} que pertenecen a U_{α_j}, lo cual es una contradicción.

DEFINICIÓN.

A los conjuntos que cumplen una y, por tanto, las tres propiedades (*a*), (*b*) y (*c*) del teorema anterior, se les llama compactos. El término fue empleado por primera vez, en 1906, por el matemático francés René Maurice Fréchet(1878-1973). Para Fréchet la definición venía dada por la propiedad (*a*) del teorema; que proviene del teorema de Bolzano-Weierstrass, que ya hemos visto y que establece que toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.

La propiedad (*c*) proviene del teorema de Heine-Borel, que establece la equivalencia de (*c*) y (*b*) para subconjuntos de la recta real. Este resultado lo obtuvieron, en realidad, Heinrich Heine(1821-1881), Emile Borel(1871-1956) y, también, Henri Lebesgue(1875-1941).

PROPOSICIÓN.

Todo conjunto compacto no vacío de números reales, tiene máximo y tiene mínimo; es decir: Si $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ y E es compacto, entonces $\exists m, M \in E \ni \forall x \in E,\ m \leq x \leq M$.

Demostración. Para ver ésto hay que partir de la construcción de los números reales. Si se usa el método de Dedekind, se sigue que, por ser E acotado, tiene supremo e ínfimo y, por ser E cerrado, el supremo y el ínfimo han de pertenecer a E.

Si el método empleado en la construcción es el de los desarrollos decimales; se empieza por suponer, usando una traslación, que E tiene algún número positivo. Como E es acotado, hay una parte entera máxima para todos los números de E, digamos d_0. Luego, entre todos los números de E cuya parte entera es d_0, hay un máximo para la primera cifra después de la coma decimal, etc. Así construimos un número $M = d_0, d_1 d_2 \cdots$, que está en el cierre de E. Como E es cerrado, $M \in E$ y, por construcción, $\forall x \in E,\ x \leq M$. El mínimo es, sencillamente $\min(E) = -\max(-E)$.

PROPOSICIÓN.

La imagen continua de un compacto es compacto; es decir: Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua y $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto

DEMOSTRACIÓN.

Damos dos demostraciones

(*1*) Usando la propiedad de Bolzano-Weierstrass: Sea b_j una sucesión de puntos de $f(K)$. Sea, para cada $j,\ a_j \in K$ tal que $f(a_j) = b_j$. Como K es compacto, existe una subsucesión (a_{j_k}) tal que $a_{j_k} \to a \in K$. Pero, como f es continua, $b_{j_k} = f(a_{j_k}) \to f(a) \in f(K)$.

(*2*) Usando la propiedad de Heine-Borel: Sea $(V_\alpha)_{\alpha \in J}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$. Como f es continua, para cada $\alpha \in J,\ U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ es un recubrimiento abierto de K. Como K es compacto, tendrá un subrecubrimiento finito; es decir, $K \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_r}$. Entonces $f(K) \subset f(U_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f(U_{\alpha_r}) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_r}$.

COROLARIO.

- Una aplicación continua $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida en un compacto K de $\mathbb{R}^n$, está siempre acotada, es decir

$$\sup_{x \in K} \|f(x)\| < \infty$$

- Una función $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en un compacto K de $\mathbb{R}$, alcanza en K su máximo y su mínimo; es decir, existen $x_0, x_1 \in K$ tales que

$$\forall x \in K,\ \ f(x_0) \le f(x) \le f(x_1).$$

Ejercicio 22): Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto. Consideramos los conjuntos

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua}\}$$

y

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K) = \{f : K \to \mathbb{C} : \ f \text{ es continua}\}\,.$$

Para $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ o $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ definimos

$$\|f\|_u = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

- Demostrar que $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ y $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ son espacios normados con la norma dada por $\| \ \|_u$.
- Ver que, además, son espacios de Banach; es decir, son completos.

En toda esta subsección vamos a suponer que estamos en un espacio métrico (X, d). Las tres caracterizaciones de los compactos de $\mathbb{R}^n$ que dimos al comienzo de la sección, tienen sentido en (X, d) : la (a) de Bolzano-Weierstrass mediante sucesiones, la (b) que sólo requiere que comprobemos si nuestro conjunto es cerrado y acotado y la (c) de Heine-Borel que usa recubrimientos abiertos. La pregunta que queremos contestar ahora es esta:
¿Seguirán siendo equivalentes estas tres propiedades para un subconjunto E del espacio métrico (X, d)?
Mirando las demostraciones, vemos, en primer lugar, que sigue siendo cierto que $(c) \Longrightarrow (b)$; ya que la demostración que dimos no utiliza nada específico de $\mathbb{R}^n$ que no valga en un espacio métrico general.
Sin embargo, las demostraciones que dimos de que $(b) \Longrightarrow (a)$ y de que $(a) \Longrightarrow (c)$ si que usan propiedades específicas de $\mathbb{R}^n$, que no podemos usar cuando trabajamos en un espacio métrico arbitrario.

Así que, para ver si alguna de las implicaciones es cierta o no; no queda otro remedio que buscar una prueba diferente para ver que es cierta o encontrar un contraejemplo para ver que es falsa.
Comenzamos viendo que la implicación $(b) \Longrightarrow (a)$ no es cierta en un espacio métrico general. Vamos a dar dos ejemplos de sucesiones acotadas en espacios métricos, que no tienen ninguna subsucesión convergente:
Ejemplo 1: Sea $\mathbb{X}$ el espacio de Hilbert ℓ^2. Y sea

$$E = \overline{\mathbf{B}}(0,1) = \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{\infty} : \ \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2} \leq 1 \right\}.$$

Desde luego E es cerrado y acotado; pero la sucesión formada por los vectores

$$e_n = (x_j)_{j=1}^{\infty} \ \ni x_j = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq n \\ 1 \text{ si } j = n \end{cases},$$

está contenida en E y no tiene ninguna subsucesión convergente, ya que para todo $n \neq m$, $d(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$.

Ejemplo 2: Sea, ahora, $\mathbb{X}$ el espacio de Banach $\mathcal{C}[0,1]$. Y sea

$$E = \overline{\mathbf{B}}(0,1) = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \; \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq 1 \right\}.$$

Desde luego, E es cerrado y acotado; pero la sucesión formada por las funciones $f_n(x) = x^n$, está contenida en E y no tiene ninguna subsucesión que converja en E. En efecto; la convergencia en el espacio X es, ahora, la convergencia uniforme, que, implica, en particular, la convergencia puntual. El límite puntual de la sucesión de funciones f_n es la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

Si la sucesión f_n convergiera uniformemente, tendría que hacerlo a la función f; pero esto no puede ser porque la función f no es uniformemente continua y sabemos que todo límite uniforme de funciones continuas, es continua.

Lo que queda del teorema de caracterización de los compactos de $\mathbb{R}^n$ cuando pasamos a espacios métricos generales, se puede resumir en el enunciado siguiente:

TEOREMA.

Para un conjunto E del espacio métrico (X, d) las condiciones (a) (criterio de Bolzano-Weierstrass) y (c) (criterio de Heine-Borel) son equivalentes y, cualquiera de ellas es suficiente, aunque no necesaria, para que E sea cerrado y acotado.

Demostración. $(c)\Longrightarrow(a)$. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de E no tiene ninguna subsucesión que converja a un punto de E. Entonces, para cada $x \in E$, existe alguna bola abierta centrada en x, $\mathbf{B}_x$, que solo contiene un conjunto finito de puntos de la sucesión. Por la hipótesis (c), se puede cubrir todo E con un número finito de la bolas $\mathbf{B}_x$. Por consiguiente, el conjunto de puntos de la sucesión es finito y esto es una contradicción, ya que un punto se repetiría infinitas veces y así tendríamos una subsucesión convergente.

$(a) \Longrightarrow (c)$. Sea $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ un recubrimiento abierto de E. Vamos a ver que existe $\varepsilon > 0$, tal que para cada $x \in E$, $\mathbf{B}(x, \varepsilon) \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in J$. En efecto, si esto no fuera cierto, tendríamos una sucesión de puntos $x_n \in E$ tales que $\mathbf{B}(x_n, 1/n)$ no está contenida en ningún U_α. Por la hipótesis (a), existiría una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ tal que $x_{n_k} \to a \in E$. Desde luego, para algún $r > 0$ y algún $\alpha \in J$, tenemos $\mathbf{B}(a, r) \subset U_\alpha$. Y, entonces, para k suficientemente grande $\mathbf{B}(x_{n_k}, 1/n_k) \subset \mathbf{B}(a, r) \subset U_\alpha$, lo cual es una contradicción.
Ahora vamos a ir eligiendo puntos $y_n \in E$ de modo que las bolas $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon/3)$ sean disjuntas. Sólo podremos encontrar un número finito de puntos y_n, pues, en caso contrario, la sucesión de los y_n no tendría ninguna subsucesión convergente (ninguna subsucesión sería de Cauchy). Una vez elegida la familia finita de los y_n, vemos que, para cada $x \in E$, $\mathbf{B}(x, \varepsilon/3)$ corta a alguna de las bolas $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon/3)$ y, por lo tanto, se tiene que $\mathbf{B}(x, \varepsilon/3) \subset \mathbf{B}(y_n, \varepsilon)$. Queda visto, entonces, que la colección finita de las bolas $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon)$ es un recubrimiento de E. Si después elegimos, para cada una de estas bolas $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon)$ un $\alpha_n \in J$ tal que $\mathbf{B}(y_n, \varepsilon) \subset U_{\alpha_n}$, habremos obtenido un subrecubrimiento finito de $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$.

Definición.

Diremos que $E \subset X$ es compacto si cumple (a) y, por lo tanto, también (c).

En otras palabras, el espacio métrico (X, d) es compacto si toda sucesión de puntos de X tiene una subsucesión convergente. Y eso equivale a decir que todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento finito.

Proposición.

Sea f un aplicación continua del espacio métrico (X, d_X) en el espacio métrico (Y, d_Y) y sea $K \subset X$ un compacto. Entonces

(*1*) $f(K)$ es compacto.

(*2*) La restricción de f a K, $f|_K : K \to Y$ es uniformemente continua.

Corolario.

Toda aplicación real continua en un espacio métrico compacto K alcanza sus valores máximo y mínimo en sendos puntos de K.

DEMOSTRACIÓN. DE LA PROPOSICIÓN.

(1) Las dos pruebas que dimos para una f entre espacios euclídeos siguen funcionando para una f entre espacios métricos.

(2) Dado $\varepsilon > 0$ y dado $x \in K$, existe una bola abierta centrada en x, $\mathbf{B}(x, \delta_x)$ tal que para cada $y \in \mathbf{B}(x, \delta_x)$, $d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$. Puesto que los $U_x = \mathbf{B}(x, \delta_x/2)$, $x \in K$ forman un recubrimiento abierto de K, existirá un subrecubrimiento finito $U_{x_1}, \cdots, U_{x_m}$.

Si $\delta < \min(\delta_{x_1}/2, \cdots, \delta_{x_m}/2)$ y tenemos dos puntos x, y tales que $d(x, y) < \delta$; será $x \in U_{x_j}$ para algún $j = 1, \cdots, m$.

Entonces $d_X(x, x_j) < \delta_{x_j}/2$ y
$d_X(y, x_j) \leq d_X(y, x) + d_X(x, x_j) < \delta + \delta_{x_j}/2 < \delta_{x_j}$.
Tenemos, por tanto:

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f(x_j)) + d_Y(f(x_j), f(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Proposición.

Dos normas cualesquiera en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

Demostración. Sea $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una norma. Si llamamos $e_1, e_2, \cdots, e_n$ a los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tenemos, para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \mathcal{N}(e_j) \leq \left\{\max_{1 \leq j \leq n} \mathcal{N}(e_j)\right\} \|x\|_1 = K\|x\|_1.$$

Esta desigualdad implica, en particular, que $\mathcal{N}$ es una aplicación continua en $\mathbb{R}^n$ (con su topología usual). De hecho, es Lipschitz (y, por tanto, uniformemente continua) en el espacio métrico $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$.
En efecto:

$$|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x-y) \leq K\|x-y\|_1.$$

En particular, $\mathcal{N}$ alcanzará un mínimo sobre la esfera unidad S_1 de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$, ya que $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_1 = 1\}$ es cerrado y acotado; y, por tanto, compacto.

Por consiguiente, existirá $x_0 \in S_1$ tal que

$$\mathcal{N}(x) \geq \mathcal{N}(x_0) = k > 0, \ \forall x \in S_1.$$

A partir de aquí, vemos que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \mathcal{N}(x) \geq k\|x\|_1.$$

Hemos llegado, finalmente a que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ k\|x\|_1 \leq \mathcal{N}(x) \leq K\|x\|_1,$$

de forma que queda probado que $\mathcal{N}$ es equivalente a $\| \ \|_1$. Ahora basta invocar la transitividad de la equivalencia de normas para terminar.

COROLARIO.

En un espacio vectorial de dimensión finita, dos normas cualesquiera son equivalentes.

Ejercicio 23): Demostrar que una aplicación lineal entre espacios normados de dimensión finita, es siempre continua.

Hemos visto que todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado; pero que, a diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}^n$, cuando estamos es un espacio métrico arbitrario, estas dos condiciones, no garantizan que el conjunto sea compacto.
Sin embargo, se puede reforzar la condición de ser acotado para garantizar, junto con la completitud, que el conjunto es compacto. La propiedad relevante, que es más fuerte que la acotación, es la siguiente.

Definición.

Diremos que el conjunto $E \subset X$ es un subconjunto totalmente acotado del espacio métrico (X, d) si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número finito de bolas abiertas de radio ε, $\mathbf{B}(x_j, \varepsilon)$, $j = 1, \cdots, m$, tales que $E \subset \bigcup_{j=1}^{m} \mathbf{B}(x_j, \varepsilon)$.

Teorema.

Si K es un cerrado de un espacio métrico completo (X, d), las tres propiedades siguientes son equivalentes

(i) K es compacto.

(ii) Todo subconjunto infinito $S \subset K$ tiene un punto de acumulación en K.

(iii) K es totalmente acotado.

Demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Usando (a) (sucesiones): Por ser S infinito, podemos considerar una sucesión de puntos de S todos distintos. Esta sucesión tendrá una subsucesión convergente a un punto $a \in K$ y a será un punto de acumulación de S.

Usando (c) (recubrimientos): Si ningún punto de K fuera punto de acumulación de S, habría un recubrimiento abierto $\{V_\alpha\}$ de K, tal que cada V_α contiene, a lo sumo, un punto de S. Pero entonces $\{V_\alpha\}$ no puede tener un subrecubrimiento finito, lo cual contradice el hecho de que K es compacto.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Suponiendo que ya hemos elegido $x_1, \cdots, x_n$ puntos de K con $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ si $i \neq j$, elegiríamos $x_{n+1} \in K$ tal que $d(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon \ \forall i = 1, \cdots, n$. Este proceso debe acabar en un número finito de pasos por la hipótesis (*ii*). Las bolas abiertas de radio ε centradas en los puntos $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ de la colección encontrada, cubren K.
$(iii) \Longrightarrow (i)$. Suponemos (*iii*) y probamos (*i*) por reducción al absurdo. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de K que no tiene ningún subrecubrimiento finito. Por (*iii*), K es unión de un número finito de cerrados de diámetro ≤ 1. Uno de estos, digamos K_1 no puede ser cubierto por un número finito de conjuntos de $\mathcal{U}$. Luego ponemos K_1 como unión de un número finito de cerrados de diámetro $\leq 1/2$ y observamos que habrá alguno, digamos K_2, que no puede ser cubierto por un número finito de conjuntos de $\mathcal{U}$. Continuando el proceso obtenemos una sucesión de cerrados $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$, tales que $\mathrm{diam} K_n \leq 1/n$ y ninguno de ellos puede ser cubierto por un número finito de miembros de $\mathcal{U}$.

Si elegimos $x_n \in K_n$, vemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como E es completo, será $x_n \to x \in \bigcap_n K_n$. Por tanto, $x \in V$ para algún $V \in \mathcal{U}$. Pero, entonces, $K_n \subset V$ si n es suficientemente grande, lo cual es una contradicción.

Ejercicio 24). Demostrar la última implicación del teorema anterior usando sucesiones en lugar de recubrimientos.

Ejercicio 25). Dar un ejemplo de conjunto acotado que no sea totalmente acotado.

PROPOSICIÓN.

Para un espacio métrico (X, d), se cumple que

$$X \text{ es compacto} \iff X \text{ es completo y totalmente acotado.}$$

DEMOSTRACIÓN.

Si X es compacto y tenemos en X una sucesión de Cauchy, tendrá una subsucesión convergente y ya vimos que, para una sucesión de Cauchy, si hay una subsucesión convergente, es que la sucesión original converge. Luego después, aplicando el teorema, resulta que X es totalmente acotado.

Recíprocamente, si X es completo y totalmente acotado, el teorema nos dice que X es compacto.

Definición.

Diremos que un espacio topológico $(X,\mathcal{U})$ es compacto si todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento finito.
Un subconjunto $E \subset X$ se dirá que es compacto si el espacio topológico determinado sobre E por los abiertos relativos $U \cap E,\ U \in \mathcal{U}$ es un espacio compacto.

Proposición.

- Todo subconjunto compacto de un espacio separado es cerrado y
- Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto.

Ejercicio 26): Demostrar la última proposición.

Definición.

Se dice que el espacio topológico X es conexo si y sólo si no es posible expresarlo como unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos. Se dice que el subconjunto A del espacio topológico X es conexo si A, con la topología relativa heredada de X, es conexo.

PROPOSICIÓN.

Sea X un espacio topológico. Entonces

(*a*) X es conexo si y sólo si X no es unión de dos cerrados no vacíos disjuntos.

(*b*) X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de X que son, a la vez, abiertos y cerrados, son $\emptyset$ y X.

(*c*) $A \subset X$ es conexo si y sólo si para cada par de abiertos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U \cup V$ y $U \cap V \cap A = \emptyset$, se tiene que, o bien $A \subset U$ (y $A \cap V = \emptyset$) o bien $A \subset V$ (y $A \cap U = \emptyset$).

(*d*) $A \subset X$ es conexo si y sólo si para cada par de cerrados $F, G \subset X$ tales que $A \subset F \cup G$ y $F \cap G \cap A = \emptyset$, se tiene que, o bien $A \subset F$ (y $A \cap G = \emptyset$) o bien $A \subset G$ (y $A \cap F = \emptyset$).

Ejercicio 27). Ver que $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si A es un intervalo.
Ejercicio 28). Ver que la imagen de un intervalo por una aplicación continua es, también, un intervalo. ¿Qué teorema de Cálculo I se esconde detrás de la afirmación que acabamos de hacer?

TEOREMA.

Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Demostrar que, si X es conexo, entonces $f(X)$ también es conexo.

DEMOSTRACIÓN.

Sean U, V abiertos de Y, tales que $f(X) \subset U \cup V$, $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$. Entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos, $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$ y $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Como X es conexo, o bien es $f^{-1}(U) = \emptyset$, o bien es $f^{-1}(V) = \emptyset$. En el primer caso se tiene $f(X) \subset V$ y $f(X) \cap U = \emptyset$ y, en el segundo, $f(X) \subset U$ y $f(X) \cap V = \emptyset$.
Queda probado que $f(X)$ es conexo.

Proposición.

Sea X un espacio topológico y sea $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ una familia de conexos tales que $\cap_{\alpha\in J} A_\alpha \neq \emptyset$. Entonces $\cup_{\alpha\in J} A_\alpha$ es conexo.

Demostración

Sea $A = \cup_{\alpha\in J} A_\alpha \subset U \cup V$, siendo U y V abiertos tales que $U \cap V \cap A = \emptyset$. Sabemos que $\exists c \in \cap_{\alpha\in J} A_\alpha \subset U \cup V$. Supongamos que $c \in U$. Entonces, para cada $\alpha \in J$, como A_α es conexo, se tendrá que $A_\alpha \in U$ y, en definitiva, $A \subset U$.

Proposición.

Si E es un subconjunto conexo de X, entonces $\overline{E}$ también es conexo.

Demostración.

Si $\overline{E} = F \cup G$ con $F \cap G = \emptyset$, siendo F y G cerrados de $\overline{E}$, como $\overline{E}$ es cerrado, F y G son, también, cerrados en X.
Entonces $E \subset F \cup G$ y $E \cap F \cap G = \emptyset$. Como E es conexo, será $E \subset F$ y $E \cap G = \emptyset$ o $E \subset G$ y $E \cap F = \emptyset$. En el primer caso $\overline{E} \subset F$ y $\overline{E} \cap G = \emptyset$ y en el segundo $\overline{E} \subset G$ y $\overline{E} \cap F = \emptyset$. Así pues, $\overline{E}$ es conexo.

Sea X un espacio topológico. Definimos una relación entre los puntos de X del modo siguiente:

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow \exists A \text{ conexo } \ni x, y \in A \subset X.$$

Ejercicio 27). Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Las clases de equivalencia determinadas en X por la relación $\mathcal{R}$ se llaman componentes conexas. Para cada $x \in X$, la componente conexa $C_x = \mathcal{R}(x)$ que contiene a x, es el máximo conexo que contiene a x. Todo el espacio X se puede poner como una unión disjunta de las diferentes componentes conexas.

Ejercicio 28). Demostrar que las componentes conexas son siempre conjuntos cerrados. ¿Son siempre abiertos? Poner ejemplos.

Definición.

- Se dice que los puntos x e y de un espacio topológico X se pueden unir por un arco o por un camino si existe una aplicación continua $f : [0,1] \to X$, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.
- Se dice que X es conexo por arcos o conexo por caminos si dos puntos cualesquiera de X se pueden unir por un arco o camino.

Proposición.

- Todo espacio topológico conexo por arcos, es conexo.
- Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, entonces A es conexo por arcos $\Longleftrightarrow$ A es conexo.

Demostración. Supongamos que X es conexo por arcos y sea $x_0 \in X$. Para cada $x \in X$, sea $f_x : [0,1] \to X$ continua tal que $f_x(0) = x_0$ y $f_x(1) = x$. Entonces $X = \bigcup_{x \in X} f_x([0,1])$, que es una unión de espacios conexos con un punto común. Ya sabemos, entonces, que X es conexo.

Por otro lado, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto conexo, fijemos $x_0 \in A$ y consideremos el conjunto $E \subset A$ de todos los puntos $x \in A$ tales que x se puede unir con x_0 por un arco contenido en A. Dado $x \in E$, si tomamos una bola abierta $\mathbf{B}(x, r) \subset A$, podemos unir x_0 con x por un arco cuya imagen está contenida en A y luego unir x por medio de un segmento con cualquier punto de la bola abierta. Uniendo los dos arcos tenemos unido con x_0 cualquier punto de la bola. Esto demuestra que E es abierto en A. De forma análoga se ve que E es cerrado en A y, así, por ser A conexo, llegamos a que $E = A$.

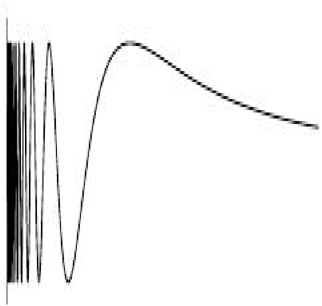
Ejercicio 29). Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es poligonalmente conexo si cada par de puntos de A se pueden unir por una línea poligonal (es decir, una unión finita de segmentos) totalmente contenida en A.
Demostrar que, para un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$A \text{ es conexo} \iff A \text{ es poligonalmente conexo.}$$

Ejercicio 30). Se considera la función

$$\begin{array}{ccc}]0,1] & \stackrel{f}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen} \frac{1}{x} \end{array}$$

y su gráfico $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in]0,1] \ \wedge \ y = f(x)\}$.
Describir simbólicamente el cierre $\overline{E}$ de E y ver que $\overline{E}$ es un compacto conexo que, sin embargo, no es conexo por arcos. Se le suele llamar "la curva seno del topólogo". Tiene este aspecto:



La curva seno del topólogo

- $\overline{E} = E \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.
- $(]0, 1]$ conexo$) \wedge (f$ continua$) \wedge (E = f(]0, 1])) \Longrightarrow E$ conexo $\Longrightarrow$ $\overline{E}$ conexo.
- $\overline{E}$ es compacto por ser un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$.
- $\overline{E}$ NO es conexo por arcos. En efecto:
  Supongamos que existiera un camino $\varphi : [a, c] \to \overline{E}$ tal que $\varphi(a) = 0$ y $\varphi(c) \in E$. El conjunto $\{t \in [a, c] :\ \varphi(t) \in \{0\} \times [-1, 1]\} = \varphi^{-1}(\{0\} \times [-1, 1])$ es un cerrado de $[a, c]$, y por tanto, un compacto, ya que $\{0\} \times [-1, 1]$ un cerrado del plano (y, por tanto, de $\overline{E}$) y φ una aplicación continua. Se sigue que hay un máximo, llamémosle b, tal que $\varphi(b) \in \{0\} \times [-1, 1]$. Entonces la restricción de φ a $[b, c]$ es una aplicación $\psi : [b, c] \to \overline{E}$ que lleva b a algún punto del segmento vertical $\{0\} \times [-1, 1]$ y los demás putos del intervalo, los lleva a E. Reemplacemos $[b, c]$ por $[0, 1]$ por pura conveniencia y pongamos $\psi(t) = (x(t), y(t))$.

Entonces $x(0) = 0,\ x(t) > 0$ e $y(t) = \operatorname{sen}(1/x(t))$ si $t > 0$.
Vamos a demostrar que existe una sucesión $t_n \to 0$, tal que $y(t_n) = (-1)^n$. Una vez visto esto, tendremos una contradicción, ya que $y(t_n)$ no converge y, por ser ψ continua, su segunda componente también lo es y debería cumplirse $y(t_n) \to y(0)$.
Para encontrar los t_n procedemos como sigue: Dado n elegimos u, con $0 < u < x(1/n)$ tal que $\operatorname{sen}(1/u) = (-1)^n$. Después usamos el teorema del valor intermedio para encontrar t_n con $0 < t_n < 1/n$ tal que $x(t_n) = u$.

A lo largo del curso, trabajaremos, principalmente, con funciones definidas en dominios de $\mathbb{R}^n$. Para nosotros un dominio de $\mathbb{R}^n$ será siempre un abierto conexo $A \subset \mathbb{R}^n$. A veces añadiremos la frontera, con lo cual tendremos un cerrado $\overline{A}$, las más de las veces compacto, cuyo interior es un dominio. Desde luego, $\overline{A}$ también será conexo. También usaremos dominios de variedades, que serán imágenes homeomorfas (de hecho, difeomorfas) de dominios de $\mathbb{R}^k$.

En ocasiones usaremos una propiedad que no es topológica, sino afín y que se llama convexidad.

DEFINICIÓN.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es convexo si y sólo si

$$\forall x, y \in A \text{ y } \forall t \in [0,1],\ (1-t)x + ty \in A.$$

Lo que significa esta condición es que, todo el segmento que une a x con y quede dentro de A.

Un convexo es un caso particular de conexo por arcos, en el que el arco que une cualquier par de puntos, se puede tomar de un tipo muy especial: un segmento.

La noción de convexo tiene sentido en cualquier espacio afín, no sólo en $\mathbb{R}^n$.