ALEJANDRO SANTORUM VARELA 44090946-S

$\boxed{\text{P1.}}$ $y_{n+2} - y_{n+1} = h\left(\frac{5}{12} f(t_n+2h, y_{n+2}) + \frac{2}{3} f(t_n+h, y_{n+1}) - \frac{1}{12} f(t_n, y_n)\right)$

1)

$$\Rightarrow y_{n+2} - y_{n+1} = \underbrace{h\left(\frac{5}{12} f(t_n+2h, y_{n+1}+h\phi) + \frac{2}{3} f(t_n+h, y_{n+1}) - \frac{1}{12} f(t_n, y_n)\right)}_{F(\phi) = \phi_f}$$

Lo hemos escrito de la forma $\sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{n+j} = h\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h)$

La función ϕ_f es un punto fijo de F, y depende de t_n, y_n, y_{n+1}, h a través de la función f.

Para ver que ϕ_f está definida de forma única, usamos el Tma. del pto. fijo de Banach y entonces necesitamos ver que F es contractiva.

F será contractiva si $\|F(\phi) - F(\hat{\phi})\| \leq L \|\phi - \hat{\phi}\|$ para una cierta constante L:

$$\|F(\phi) - F(\hat{\phi})\| = \Big\| \frac{5}{12} f(t_n+2h, y_{n+1}+h\phi) + \cancel{\frac{2}{3} f(t_n+h, y_{n+1})} - \cancel{\frac{1}{12} f(t_n, y_n)} - \frac{5}{12} f(t_n+2h, y_{n+1}+h\hat{\phi}) - \cancel{\frac{2}{3} f(t_n+h, y_{n+1})} + \cancel{\frac{1}{12} f(t_n, y_n)} \Big\| =$$

$$= \frac{5}{12} \| f(t_n+2h, y_{n+1}+h\phi) - f(t_n+2h, y_{n+1}+h\hat{\phi}) \| \overset{\text{Lipschitz } (f)}{\leq}$$

$$\leq \frac{5}{12} L \| \cancel{y_{n+1}} + h\phi - \cancel{y_{n+1}} - h\hat{\phi} \| = \frac{5Lh}{12} \|\phi - \hat{\phi}\|$$

Entonces si $\frac{5Lh}{12} < 1 \Rightarrow \boxed{h < \frac{12}{5L}, \text{ F será contractiva}}$

2)

Recordemos que el valor de la función de incremento se puede conseguir mediante iteración del punto fijo:

$$\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \lim_{k\to\infty} \phi_f^{[k]}(t_n, y_n, y_{n+1}; h)$$

$$\phi_f^{[k]} = F(\phi_f^{[k-1]}(t_n, y_n, y_{n+1}; h))$$

, donde $[k]$ representa la k-ésima iteración de ϕ_f.

Como F es contractiva para $h < \frac{12}{5L}$, hay un único punto fijo y la iteración va a converger a él independientemente del iterante inicial (Tma. del pto. fijo de Banach). Por tanto, tomamos $\phi_f^{[0]} = 0$ por comodidad.

Observemos que f es una función continua y entonces, si $\phi_f^{[k-1]}$ es continua, también lo será $\phi_f^{[k]} = F(\phi_f^{[k-1]})$ al ser composición de funciones continuas. Aunque $\phi_f^{[k]}$ sea continua para todo k, no tiene por qué serlo en el límite, salvo que la convergencia sea uniforme.

Notemos que $\phi_f^{[k]} = \sum_{i=1}^{k} (\phi_f^{[i]} - \phi_f^{[i-1]})$, y si la serie converge uniformemente sobre compactos entonces la sucesión $\{\phi_f^{[k]}\}_{k=1}^{\infty}$ también convergerá y el límite será una función continua:

$$\|\phi_f^{[i]} - \phi_f^{[i-1]}\| = \|F(\phi_f^{[i-1]}) - F(\phi_f^{[i-2]})\| \leq \frac{5Lh}{12} \|\phi_f^{[i-1]} - \phi_f^{[i-2]}\|$$

Iterando llegamos a que: $\|\phi_f^{[i]} - \phi_f^{[i-1]}\| \leq \left(\frac{5Lh}{12}\right)^{i-1} \|\phi_f^{[1]}\|$

(recordemos que hemos escogido $\phi_f^{[0]} = 0$).

Recordemos que: $\phi_f^{[1]} = \frac{5}{12} f(t_n+2h, y_{n+2}) + \frac{2}{3} f(t_n+h, y_{n+1}) - \frac{1}{12} f(t_n, y_n)$

Ahora, f está acotada sobre compactos ya que es continua. Por tanto, para cada subconjunto compacto A de $[a,b]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times(0,\infty)$ existe una constante M_A tal que $\|\phi_f^{[1]}(t_n, y_n, y_{n+1}; h)\| \leq M_A$ si $(t_n, y_n, y_{n+1}; h) \in A$.

Finalmente, sobre cada compacto $\|\Phi_f^{[i]} - \Phi_f^{[i-1]}\| \leq M_A \left(\frac{5Lh}{12}\right)^{i-1}$.

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5Lh}{12}\right)^{i}$ es convergente (ya que $\left(\frac{5Lh}{12}\right) < 1$ y podemos hacerlo tan pequeño como queramos disminuyendo h) tenemos gracias al criterio de Weierstrass la convergencia uniforme sobre A.

Por tanto, Φ_f es continua sobre A, y debido a que A es arbitrario, Φ_f es una función continua si $h < \frac{12}{5L}$.

3) $\| \Phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) - \Phi_f(t_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h) \| =$

$$= \Big\| \frac{5}{12} f(t_n+2h, y_{n+1}+h\phi) + \frac{2}{3} f(t_n+h, y_{n+1}) - \frac{1}{12} f(t_n, y_n) -$$

notación

$$- \frac{5}{12} f(t_n+2h, \hat{y}_{n+1}+h\hat{\phi}) - \frac{2}{3} f(t_n+h, \hat{y}_{n+1}) + \frac{1}{12} f(t_n, \hat{y}_n) \Big\| \leq$$

des. Δ
f Lipschitz

$$\leq \frac{5L}{12} \| y_{n+1} + h\phi - \hat{y}_{n+1} - h\hat{\phi} \| + \frac{2L}{3} \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| + \frac{L}{12} \| y_n - \hat{y}_n \| \leq$$

des. Δ

$$\leq \frac{5L}{12} \| y_{n+1} - y_{n+1} \| + \frac{5Lh}{12} \| \phi - \hat{\phi} \| + \frac{2L}{3} \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| + \frac{L}{12} \| y_n - \hat{y}_n \|$$

$\frac{2}{3} > \frac{5}{12}$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{5Lh}{12}\right) \| \phi - \hat{\phi} \| \leq \frac{2 \cdot 2\, L}{3} \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| + \frac{L}{12} \| y_n - \hat{y}_n \| =$$

$$= \frac{4L}{3} \| y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \| + \frac{L}{12} \| y_n - \hat{y}_n \| \overset{\frac{4}{3}L > \frac{L}{12}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \| \phi - \hat{\phi} \| \leq \underbrace{\boxed{\frac{4L}{3\left(1 - \frac{5Lh}{12}\right)}}}_{= L_{H_{HN}}} \sum_{j=0}^{1} \| y_{n+j} - \hat{y}_{n+j} \| \quad \text{para } \boxed{h < h_0 = \frac{12}{5L}}$$

Escaneado con CamScanner

$\boxed{P2.}$ $y_{n+2} + (b-1)y_{n+1} - by_n = \frac{1}{4}h\left[(b+3)f_{n+2} + (3b+1)f_n\right]$

Suponemos $y_{n+1} = Y(t_{n+1})$, $y_n = Y(t_n)$

$$y_{n+2} = (1-b)Y(t_{n+1}) + bY(t_n) + \frac{1}{4}h\left[(b+3)f(t_n+2h, y_{n+2}) + (3b+1)f(t_n, Y(t_n))\right]$$
$$= (1-b)Y(t_{n+1}) + bY(t_n) + \frac{(b+3)h}{4}f(t_n+2h, y_{n+2}) + \frac{(3b+1)h}{4}f(t_n, Y(t_n))$$

Desarrollos de Taylor:

[1] $Y(t_{n+2}) = Y(t_n) + 2hY'(t_n) + 2Y''(s_1)h^2$

[2] $Y(t_{n+1}) = Y(t_n) + hY'(t_n) + \frac{1}{2}Y''(s_2)h^2$

[3] $f_{n+2} = Y'(t_{n+2}) = Y'(t_n+2h) = Y(t_n) + Y'(s_3)2h$

$$\Rightarrow \|Y(t_{n+2}) - y_{n+2}\| = \|Y(t_n) + 2hY'(t_n) + 2Y''(s_1)h^2 -$$
$$- (b-1)Y(t_{n+1}) - bY(t_n) - \frac{(b+3)h}{4}f(t_n+2h, y_{n+2}) + \frac{(3b+1)h}{4}f(t_n, Y(t_n))\|$$

$$= \|\cancel{Y(t_n)} + 2hY'(t_n) + 2Y''(s_1)h^2 - (b-1)\left[\cancel{Y(t_n)} + hY'(t_n) + \frac{1}{2}Y''(s_2)h^2\right]$$
$$- b\cancel{Y(t_n)} - \frac{(b+3)h}{4}\left[Y(t_n) + Y'(s_3)2h\right] + \frac{(3b+1)h}{4}Y'(t_n)\| =$$

Mínimo es de orden 1 (las h no se tendrían por qué cancelar) y habría que ver si es de orden 2.

P3

vector nodos Butcher $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = a_1 \\ c_3 = a_2 \end{cases}$

$\tilde{b}_1 = (1 - b_1 - b_2)$

$\tilde{b}_2 = b_1$

$\tilde{b}_3 = b_2$

$\tilde{b} \Rightarrow$ pesos butcher

$A_{11} = 0 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = 0$

$A_{21} = a_1 \quad A_{22} = 0 \quad A_{23} = 0$

$A_{31} = 0 \quad A_{32} = a_2 \quad A_{33} = 0$

Se cumple condición suma

a) c1: $\sum_{i=1}^{3} b_i = 1$ automático ✓ (siempre se cumple)

c2: $\sum_{i=1}^{3} b_i c_i = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tilde{b}_1 \cdot 0 + \tilde{b}_2 c_2 + \tilde{b}_3 c_3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{b_1 a_1 + b_2 a_2 = \frac{1}{2}}$

c3: $\sum_{i=1}^{3} b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{b_1 a_1^2 + b_2 a_2^2 = \frac{1}{3}}$

$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{3} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}}_{\text{NOTACIÓN DE CLASE}} \Leftrightarrow \tilde{b}_3 a_{32} \cdot c_2 = \boxed{b_2 \cdot a_2 \cdot a_1 = \frac{1}{6}}$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{1}{6a_2a_1} \Rightarrow \begin{cases} b_1 a_1 + \dfrac{1}{6a_1} = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \boxed{b_1 = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6a_1}\right)\cdot\dfrac{1}{a_1}} \\ b_1 a_1^2 + \dfrac{a_2}{6a_1} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6a_1}\right)\cdot\frac{1}{a_1}\cdot a_1^2 + \frac{a_2}{6a_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6a_1}\right)a_1 + \frac{a_2}{6a_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6a_1}\right)a_1 - \frac{1}{3} = \frac{a_2}{6a_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = 6a_1\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6a_1}\right)a_1 - \frac{1}{3}\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_2 = \frac{1}{36a_1^2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6a_1}\right)a_1 - \frac{1}{3}\right]}}$$

Conclusión: para que sea de orden 3

$$\boxed{b_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6a_1}\right)\cdot\frac{1}{a_1}}$$

$$\boxed{b_2 = \frac{1}{36a_1^2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6a_1}\right)a_1 - \frac{1}{3}\right]}}$$

$$\boxed{a_2 = 6a_1\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6a_1}\right)a_1 - \frac{1}{3}\right]}$$

b) Tal y como hemos visto en clase, sabemos que un método de RK explícito de s pasos (en nuestro caso $s=3$), no puede tener orden mayor que s $(s=3)$.

Como el del ejercicio

$c_1 = 0$ ✓

$A =$ matriz estricta inferior

$\boxed{P4}$

a) Es una recta: $x_1 = t_n + \frac{h}{4}$ $\quad y_1 = K_1$

$x_2 = t_n + h$ $\quad y_2 = K_2$

$$\frac{x - t_n - \frac{h}{4}}{\cancel{t_n} + h - \cancel{t_n} - \frac{h}{4}} = \frac{y - K_1}{K_2 - K_1} \Rightarrow \frac{x - t_n - \frac{h}{4}}{\frac{3h}{4}} = \frac{y - K_1}{K_2 - K_1}$$

reescribiendo

$$\Rightarrow q = \frac{(K_2 - K_1)(x - t_n - \frac{h}{4})}{\frac{3h}{4}} + K_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(x) = \frac{4h}{3}(K_2 - K_1) + (x - t_n - \frac{h}{4})$$

b) $$p(x) = \int \frac{4h}{3}(K_2 - K_1) + (x - t_n - \frac{h}{4})\, dx =$$

$$= \frac{4h}{3}(K_2 - K_1)\, x + \int (x - t_n - \frac{h}{4})\, dx =$$

$$= \frac{4h}{3}(K_2 - K_1)\, x + \frac{x^2}{2} - t_n x - \frac{h}{4} x + K$$

$$= \frac{x^2}{2} + \left(\frac{4h}{3}(K_2 - K_1) - t_n - \frac{h}{4}\right) x + K$$

$p(x_n) = y_n$

$$\Rightarrow p(x_n + \frac{h}{4}) = \frac{(x_n + \frac{h}{4})^2}{2} + \left(\frac{4h}{3}(K_2 - K_1) - t_n - \frac{h}{4}\right)(x_n + \frac{h}{4}) + K$$

$$p(x_n + h) = \frac{(x_n + h)^2}{2} + \left(\frac{4h}{3}(K_2 - K_1) - t_n - \frac{h}{4}\right)(x_n + h) + K$$

Despejaríamos de aquí a_1, a_2, b_1 y b_2. El resto sería trivial, simplemente comprobando las condiciones.