Topología. Capítulo 3. Homotopía Grado de Matemáticas. Curso 2015-2016

José García-Cuerva

Universidad Autónoma de Madrid

13 de diciembre de 2015

1. APLICACIONES.
    - El teorema del punto fijo de Brouwer.
    - El teorema de Borsuk-Ulam.

Lema

Para una aplicación continua $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$, las siguientes propiedades son equivalentes

(1) h es nulhomotópica, es decir, h es homotópica a una aplicación constante,

(2) h se extiende a una aplicación continua $k : \mathbb{B}^2 \longrightarrow X$, y

(3) $h_\star : \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(X)$ es el morfismo trivial.

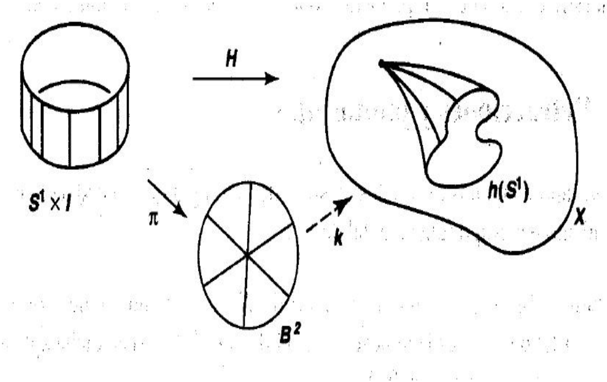
Demostración.

- (1) $\Longrightarrow$ (2). Sea $H : \mathbb{S}^1 \times I \longrightarrow X$ una homotopía entre h y una aplicación constante. Definimos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times I & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{B}^2 \\ (x, t) & \longmapsto & (1-t)x. \end{array}$$

  π es continua, cerrada y sobreyectiva; así que es una aplicación cociente. Lleva todo el conjunto $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ al punto 0 de $\mathbb{B}^2$ y, en el resto de $\mathbb{S}^1 \times I$ es inyectiva.

Como H es constante en $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$, se puede pasar al cociente por π y se obtiene k, que es la extensión buscada de h a $\mathbb{B}^2$.
El proceso se representa muy bien con esta figura del Munkres:



La extensión de h

- (2) $\Longrightarrow$ (3). Sabemos que, si llamamos j a la incusión $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{B}^2$, entonces $k \circ j = h$. Tenemos h representada así:

$$\mathbb{S}^1 \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{B}^2 \overset{k}{\to} X.$$

Si a este diagrama le aplicamos el "funtor" grupo fundamental, resulta

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \xrightarrow{j_\star} \underbrace{\pi_1(\mathbb{B}^2, b_0)}_{=0} \xrightarrow{k_\star} \pi_1(X, x_0).$$

Por ser $\pi_1(\mathbb{B}^2, b_0) = 0$, se tiene que $j_\star = 0$ y, por lo tanto $h_\star = k_\star \circ j_\star = 0$.

- (3) $\Longrightarrow$ (1). Sea

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \\ s & \longmapsto & p(s) = e^{2\pi i s} \end{array}$$

la aplicación recubridora estándar de la esfera $\mathbb{S}^1$. El lazo $p_0 = p|_I : I \to \mathbb{S}^1$ nos da una clase de homotopía $[p_0]$ que genera el grupo cíclico $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$. Sea $x_0 = h(b_0)$. Como $h_\star$ es trivial, el lazo $f = h \circ p_0$ representa el elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$.

Eso quiere decir que hay una homotopía de caminos en X, F entre f y la constante x_0. la aplicación $p_0 \times \mathrm{id} : I \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times I$ es una aplicación cociente por ser continua, cerrada y sobreyectiva. Esta aplicación manda, para cada $t \in I$, los puntos $(0, t)$ y $(1, t)$ al mismo punto (b_0, t). Aparte de esos puntos, en el resto de $I \times I$ es inyectiva. Como la homotopía F satiface $F(0, t) = x_0 = F(1, t)\ \forall t \in I$, podemos pasarla al cociente obteniendo $H : \mathbb{S}^1 \times I \to X$ tal que $H \circ (p_0 \times \mathrm{id}) = F$. Vemos que H es una homotopía entre h y una constante. En efecto

$$H(p_0(s), 0) = F(s, 0) = h(p_0(s))\ \forall s \in I \Longrightarrow H(x, 0) = h(x)\ \forall x \in \mathbb{S}^1.$$

$$H(p_0(s), 1) = F(s, 1) = x_0\ \forall s \in I \Longrightarrow H(x, 1) = x_0\ \forall x \in \mathbb{S}^1.$$

COROLARIO.

- La inclusión $j : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no es nulhomotópica.
- La identidad $\mathrm{id} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ no es nulhomotópica.

Demostración.

- Sabemos que $\mathbb{S}^1$ es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, lo cual quiere decir que existe una retracción
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{r} & \mathbb{S}^1 \\ x & \longmapsto & r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}, \end{array}$$
que cumple que $r \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$. Entonces el morfismo de grupos $j_\star : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ cumplirá $r_\star \circ j_\star = \mathrm{id}_\star = \mathrm{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1)}$. En particular, $j_\star$ es inyectiva, y, por consiguiente, es no trivial. Se sigue del lema que j no es nulhomotópica.
- $\mathrm{id}_\star = \mathrm{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1)}$. Se sigue que $\mathrm{id}_\star$ es no trivial y, por el lema, la identidad $\mathrm{id} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ no es nulhomotópica.

Teorema.

Sea $v : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo de vectores continuo que nunca se anula; es decir, tal que $\forall x \in \mathbb{B}^2,\ v(x) \neq 0$. Entonces existe algún punto $x \in \mathbb{S}^1$ en el que el campo apunta en la dirección de la normal interior, es decir, $v(x) = ax,\ a < 0$ y también existe algún punto $y \in \mathbb{S}^1$ en el que el campo apunta en la dirección de la normal exterior; es decir, $v(y) = by,\ b > 0$.

Demostración. Empezamos probando que existe algún $x \in \mathbb{S}^1$ para el que $v(x) = ax$ con $a < 0$. Lo hacemos por reducción al absurdo. Suponemos que no es cierto y consideramos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{w} & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ x & \longmapsto & w(x) = v(x) \end{array},$$

es decir $w = v|_{\mathbb{S}^1}$. Puesto que w se extiende a $\mathbb{B}^2$, sabemos, por el lema, que es nulhomotópica. Pero vamos a ver a continuación que $w \simeq j : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Y esta será la contradicción buscada, ya que sabemos que j no es nulhomotópica.

Buscamos una homotopía $F : \mathbb{S}^1 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, que podría venir dada por

$$F(x,t) = tx + (1-t)w(x).$$

Desde luego cumple que $F(x,0) = w(x)\ \forall x \in \mathbb{S}^1$ y $F(x,1) = x = j(x)\ \forall x \in \mathbb{S}^1$. Sería perfecta si, además se cumpliera que $F(x,t) \neq 0\ \forall (x,t) \in \mathbb{S}^1 \times I$. Y vamos a ver por qué se cumple esto. Si para algún $(x,t) \in \mathbb{S}^1 \times I$ fuera $0 = F(x,t) = tx + (1-t)w(x)$, tendríamos $w(x) = -\dfrac{t}{1-t}x$, que es precisamente lo que hemos excluido al comienzo.

Esto termina la demostración de que existe un punto de la esfera en el que el campo de vectores apunta en la dirección de la normal interior. Para ver que existe algún punto de la esfera en el que el campo de vectores apunta en la dirección de la normal exterior, basta considerar el campo $-v$.

COROLARIO: TEOREMA DE BROUWER EN DIMENSIÓN 2.

Toda $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ continua tiene algún punto fijo.

Demostración.

Si $f(x) \neq x \ \forall x \in \mathbb{B}^2$, definimos $v(x) = f(x) - x$ y tenemos un campo de vectores que no se anula. De acuerdo con el teorema, existirá algún $x \in \mathbb{S}^1$ para el que $v(x) = f(x) - x = bx$ con $b > 0$. Pero entonces $f(x) = (1 + b)x$ y $\|f(x)\| = (1 + b)\|x\| = 1 + b > 1$, lo cual es imposible porque hemos supuesto que $f(x) \in \mathbb{B}^2$.

DEFINICIÓN.

Si $x \in \mathbb{S}^n$, su antípoda o punto antipodal es $-x$.
Se dice que $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ conserva antípodas si $\forall x \in \mathbb{S}^n,\ h(-x) = -h(x)$. En otras palabras, h lleva puntos antipodales a puntos antipodales.

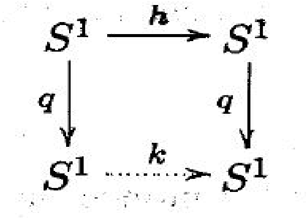
TEOREMA.

Si una aplicación continua $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ conserva antípodas, entonces h no es nulhomotópica.

Demostración. Sea $b_0 = (0, 1)$. Sea $\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una rotación de $\mathbb{S}^1$ tal que $\rho(h(b_0)) = b_0$. Como ρ conserva antípodas, también $\rho \circ h$ conserva antípodas. Si h fuera nulhomotópica y h fuera una homotopía entre h y una función constante, $\rho \circ H$ sería una homotopía entre $\rho \circ h$ y una función constante. Así es que basta demostrar el teorema suponiendo que $h(b_0) = b_0$.
Sea $q : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $q(z) = z^2$ usando el producto de números complejos o, en otras palabras $q(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\cos(2\theta), \operatorname{sen}(2\theta))$.

Resulta que q es una aplicación cociente por ser continua, cerrada y sobreyectiva. Para cada $z \in \mathbb{S}^1$, $q^{-1}(z)$ consiste en un par de puntos antipodales w y $-w$ de $\mathbb{S}^1$. Como $\forall z \in \mathbb{S}^1$, $h(-z) = -h(z)$, se sigue que $\forall z \in \mathbb{S}^1$, $q(h(-z)) = q(h(z))$. Por lo tanto, dado que q es una aplicación cociente, $q \circ h$ puede pasar al cociente y así induce una aplicación continua $k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $k \circ q = q \circ h$.

$$k(b_0) = k(q(b_0)) = q(h(b_0)) = q(b_0) = b_0.$$



paso al cociente de $q \circ h$

Es fácil ver que q es una aplicación recubridora (**ejercicio**). Si $\widetilde{f}$ es cualquier camino en $\mathbb{S}^1$ que va de b_0 a $-b_0$, el lazo $f = q \circ \widetilde{f}$ representa un elemento no trivial de $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$. La razón es que $\widetilde{f}$ es un levantamiento de f a $\mathbb{S}^1$ que comienza en b_0 y no acaba en b_0.
$k_\star[f]$ es no trivial ya que

$$k_\star[f] = [k \circ (q \circ \widetilde{f})] = [q \circ (h \circ \widetilde{f})]$$

y $h \circ \widetilde{f}$ es un camino en $\mathbb{S}^1$ que va de b_0 a $-b_0$.
El morfismo $k_\star$ es inyectivo por ser un morfismo no trivial de un grupo cíclico infinito en si mismo. El morfismo $q_\star$ corresponde también es inyectivo, ya que corresponde a la multiplicación por 2 en el grupo $\mathbb{Z}$.
Se sigue que $k_\star \circ q_\star$ es inyectivo. Dado que $q_\star \circ h_\star = k_\star \circ q_\star$, resulta inmediatamente que $h_\star$ es inyectivo y, por consiguiente, h no es nulhomotópica.

Teorema.

No existe ninguna $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ que conserve antípodas.

Demostración.

Supongamos que $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ conserva antípodas. Sea $\mathbb{S}^1$ el ecuador de $\mathbb{S}^2$. Entonces la restricción $g|_{\mathbb{S}^1}$ es una aplicación continua $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ que conserva antípodas. Por un lado tenemos que, aplicando el lema, h no es nulhomotópica. Pero, por otro lado, h admite una extensión al hemisferio superior de $\mathbb{S}^2$, que es homeomorfo a $\mathbb{B}^2$, así que, es nulhomotópica. ¡Contradicción!

teorema de Borsuk-Ulam.

Dada $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua, existe $x \in \mathbb{S}^2$ para el que $f(x) = f(-x)$.

Demostración.

Si se supone que $f(x) \neq f(-x)\ \forall x \in \mathbb{S}^2$, entonces

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

es una aplicación continua $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1 \ni g(-x) = -g(x)$ y sabemos que tal g no existe.