Ecuaciones diferenciales

Lista 4 $\qquad$ 2^{o}M/3^{o}DG, Curso 2018-19

1.
a) Demostrar que las funciones vectoriales

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes sobre el eje real.

b) Calcular el determinante wronskiano $W(X_1, X_2)$ e interpretar el resultado de acuerdo con el apartado anterior.

2. (*)
a) Comprobar que $\mathcal{B} = \{\cos x - \operatorname{sen} x, 2 \operatorname{sen} x\}$ es una base del espacio de soluciones de $y'' + y = 0$.

b) ¿Cuáles son las coordenadas de la solución que cumple $y(0) = y'(0) = 1$ en dicha base?

3. (*) Hallar la solución del sistema

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} Y, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. (*) Para el siguiente sistema, hallar una matriz fundamental $\Phi = \Phi(t)$ que cumpla $\Phi(0) = \mathrm{Id}$

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X.$$

5. (*) Hallar la solución de

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} X, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. (*) Resolver el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} X, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. (*) Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X,$$

8. (*) Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X,$$

9. (*) Encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X\,,$$

10. (*) Hallar la solución general $Y = Y(x)$ de

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} x-1 \\ -5x-2 \end{pmatrix}.$$

Indicación: Es más breve buscar una solución particular de un tipo especial, que aplicar el método de variación de las constantes.

11. (*) Resolver

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \operatorname{cosec} t \\ \sec t \end{pmatrix}.$$

12. (*) Hallar la solución $Y = Y(x)$ del sistema

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & -1 \end{pmatrix} Y$$

y escribir la matriz fundamental Φ en la forma $\Phi(x) = B(x)e^{xL}$ donde $B(x)$ es una matriz cuyos elementos son funciones periódicas y L es una matriz constante.

13. (*) Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ soluciones de $X'' + pX' + qX = 0$ que verifican $X_1(0) = 1$, $X_2(0) = 0$, $X_1'(0) = 0$ y $X_2'(0) = 1$.

a) Demostrar que $X_1''(0) + q = 0$, $X_2''(0) + p = 0$, $X_1' = -qX_2$ y $X_2' = X_1 - pX_2$.

b)Sea A una matriz real 2×2 cualquiera cuyo polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$. Demostrar que $exp(tA) = X_1(t)I + X_2(t)A$.
(`Indicación` : Usar el teorema de Cayley-Hamilton)

14. (*) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función periódica de período $T > 0$ y A una matriz $n \times n$ real.

a) Demostrar que todo autovalor de e^A es de la forma e^λ, siendo λ un autovalor de A. (Observación: Usar la forma de Jordan).

b)Supongamos que ningún autovalor de A tiene parte real 0. Demostrar que la ecuación $X' = AX + f(t)$ tiene una única solución de período T, $X_p(t)$.

c) Supongamos que todos los autovalores de A tienen parte real negativa. Demostrar que toda solución de $X' = AX + f(t)$ verifica $\lim_{t\to\infty} |X(t) - X_p(t)| = 0$, siendo X_p la solución periódica.