PROBLEMAS. HOJA 3. Modelos unidimensionales.

1. Se considera el modelo logístico bajo una *intensidad de explotación* $h(t)$

$$\dot{N} = rN(1 - N/L) - h(t)$$

Estudiar el comportamiento en los casos:

i) $h(t) = c$

ii) $h(t) = cN(t)$, con c constante.

Sugerencia: *simplificar la ecuación mediante cambios de escala para estudiar la respuesta*.

Respuestas: Considerando la función u tal que $N = uL$ y nueva variable en tiempo $\tau = rt$ entonces $u(\tau)$ satisface

$$\text{i) } \dot{u} = u(1-u) - \lambda, \quad \text{con } \lambda = \frac{c}{rL},$$
$$\text{ii) } \dot{u} = u(1-u) - \lambda u, \quad \text{con } \lambda = \frac{c}{r}.$$

i) Igual que en las transparencias, harvesting.

ii) Igual que las transparencias, modelo Scheefer.

i) Aprovechamos el ejercicio para enfatizar que podemos hacer directamente el análisis cualitativo comparando $\dot{x} = f(x) - c$ donde $f(0) = 0 = f(L)$. 0 es repulsor y L es atractor. Como nos hablan de intensidad de explotación asumimos $c > 0$. La nueva función f_c tendrá dos ceros $0 < x_1, x_2 < L$, siendo el primero repulsor y el segundo atractor para $4c < rL$.

ii)

2. Se considera el modelo logístico bajo un efecto por depredadores

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{L}\right) - \frac{\alpha N^2}{\beta + N^2}$$

i) ¿Qué intenta reflejar el término nuevo?

ii) Reescala las variables convenientemente para que el término nuevo no dependa de los parámetros.

iii) Analiza la posible bifurcación en término de los parámetros al aumentarlos y disminuírlos.

Respuestas:

i) Es suficiente observar:

a $\lim_{N\to 0} P(N) = 0$. No hay predadores si la población es muy pequeña.

b $\lim_{N\to\infty} P(N) = B$. La predación tiene una cota superior.

c Cuando $N = A$ $P(N) = \frac{B}{2}$. Con lo que determinas para que valor de polillas quieres que la cantidad de predadores sea la mitad de su máximo. Coincide por un factor de $\sqrt{3}$ donde pasa de cóncava a convexa.

ii) Hecho en las transparencias. La ecuación final que obtenemos es

$$\frac{du}{d\tau} = u(r(1-\frac{u}{q}) - \frac{u}{1+u^2})$$

iii) La respuesta correcta es dar la gráfica de $(q, r) = (\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{2t^3}{(t^2+1)^2})$ como se ve en la penúltima transparencia del archivo "Polillas de los abetos".

3. **Crecimiento en pesquería con captura I**. La evolución de la población de peces con captura viene dada por la ecuación logística $\dot{x} = Rx(K - x)$. Si la población se ve sometida a una explotación pesquera que produce h toneladas por unidad de tiempo la ecuación se transforma en

$$\dot{x} = Rx(1 - \frac{x}{K}) - h(t).$$

Supongamos primero h constante.

a) Demuestra que si la captura es menor que una cierta cantidad h_{max} que debes determinar existe un único stock de equilibrio sostenible x_e. Interpreta que quiere decir sostenible y relacionalo con los posibles puntos de equilibrio y su estabilidad.

b) ¿Qué ocurré con x_e cuando h aumenta pero es menor que h_{max}? ¿Y si $h > h_{max}$?

c) ¿Teóricamente qué stock de equilibrio permite la captura máxima? ¿Qué riesgo tiene permitir una captura muy cercana a la máxima?

Respuestas:

a) Buscamos los stock de equilibrio igualando a cero la funcion

$$Rx(1 - \frac{x}{K}) - h(t) = 0.$$

La función logística tiene un máximo en $\frac{K}{2}$. Así, la máxima producción que se tiene manteniendo el equilibrio de la población es

$$h_{max} = R\frac{K}{4}.$$

Para $h < h_{max}$ tenemos dos puntos de equilibrio. Intersecar la gráfica de la logística con la recta $y = h$ y vemos que el primero es inestable y el segundo estable. El inestable no es sostenible porque conduce a la extinción. El otro es el stock de equilibrio.

b) Va disminuyendo hasta converger al stock de equilibrio $\frac{K}{2}$. Si $h > h_{max}$, entonces $x(t)$ es una función decreciente lo que hace que la población se extinga en tiempo finito.

c) Si h es cercano a h_{max}, ambos puntos de equilibrio x_1 x_2 están muy cerca por lo que la población puede tomar valores debajo de x_1 y luego desaparecer.

La región de atracción del punto de equilibrio sostenible es muy pequeña.

4. **Crecimiento en pesquería con captura II, modelo de Schaeffer**. Los modelos de explotación pesquera como el anterior ignoran el hecho de que la captura es una actividad humana cuyos resultados dependen de los factores productivos invertidos y de la cantidad de stock existente. Si E es la variable esfuerzo pesquero (número de barcos por día) entonces se supone que la captura es proporcional a dicho esfuerzo pesquero y al stock existente.

a) Escribe una ecuación diferencial autónoma para explicar la evolución del stock suponiendo el esfuerzo pesquero constante.

b) Representa en un diagrama la ley de crecimiento endógeno y la de captura. Demuestra que si el esfuerzo pesquero crece por encima de un cierto nivel E_{max} el stock se agotará independientemente de las condiciones iniciales.

c) Prueba qué el stock de equilibrio es una función decreciente del esfuerzo pesquero. ¿Cuál es el esfuerzo pesquero que garantiza una captura máxima de equilibrio?

d) Da una fórmula para describir la captura en equilibrio en términos del esfuerzo pesquero y discute como evoluciona en términos de E. El patrón de los barcos te dice que cuantos más barcos más capturas, intenta explicarle que esto solo es así a corto plazo con tus modelos y sugierele cúal es el esfuerzo pesquero que maximiza las capturas.[1]

Respuestas:

a) $x' = Rx(K - x) - qEx$

b) Simplemente dibujar la gráfica de la logística y la recta que describe la captura. Si E es mayor que un cierto valor no intersecan y x' es siempre decreciente.

c) Cuanto mayor sea la pendiente de la recta de capturas antes cortará la gráfica del esfuerzo.

   El esfuerzo que garantiza una captura máxima aquel en el que si L describe la ley endógena y R las capturas

$$L'(0) = R'(0)$$

   En nuestro caso

$$R(K - 2x(0)) = qE$$

$$E_{max} = \frac{RK}{q}$$

d) Hallamos

$$Rx(K - x) - qEx = 0 \iff x(R(K - x) - qE) = 0 \iff x_e = K - \frac{qE}{R}$$

   La captura en equilibrio

$$h_e = qEx_e = qE(K - \frac{qE}{R})$$

   La gráfica de h_e es una función cóncava con respecto a E que tomas su máximo en el punto que de $x_e = r/2$ (tiene que ser así pues es el máximo). El esfuerzo pesquero debe de ser la mitad de la tasa de reproducción.

5. Se ha observado que una población se duplicó al cabo de 8 horas.

   a) Si estuviera creciendo con tasa de crecimiento constante γ, ¿cuál sería γ?

   b) Si al cabo de 15 horas se ha triplicado (respecto de su valor inicial P), ¿podemos seguir creyendo que la tasa es constante?

   c) Si suponemos en cambio que el crecimiento es logístico, ¿cuál sería la población de equilibrio L en términos de P?

Respuestas:

a) $\gamma = \log(2)/8$.

b) No porque $\frac{\log(2)}{8} \neq \frac{\log(3)}{15}$

[1] Evidencia empírica: la gamba del mediterráneo

c) Con los datos anteriores se saca de la solución de la logística. Encontrar los dos parámetros de la función es resolver dos problemas no lineales y que dependerán de la población inicial P. Encontramos una aproximación por el apartado a) tomando $\gamma = \log(2)/8$ (notemos que inicialmente el crecimiento es exponencial en la logística) y del apartado b)

$$3P = \frac{LP}{P + (L-P)/b} \text{ con } b = 2^{-\frac{15}{8}} \iff \frac{L}{3}b = P + (L-P)b,$$
$$\iff (\frac{1}{3} - b)L = (1-b)P \iff L = \frac{1-b}{\frac{1}{3} - b}P$$

6. Se considera una reacción nuclear en cadena en la cual la tasa de cambio (x') del numero de moléculas es proporcional al número de encuentros entre ellas pero la tasa de mortalidad (pierden actividad) es constante $\alpha > 0$. Encuentra una ecuación diferencial que describa el comportamiento de las soluciones positivas.

   a) ¿A qué tendría sentido llamar valor crítico?
   b) ¿Están las soluciones definidas en todo tiempo?
   c) ¿Para un sistema autónomo general puedes dar condiciones que garanticen que se produce explosión (las soluciones no están definidas para todo tiempo)?

   Respuestas:

   a)
   $$kx^2 - \alpha = 0 \iff x = \sqrt{\frac{\alpha}{k}}$$

   b) No (ver siguiente)

   c) Supongamos que los ceros de f están acotados por una constante M y ea $x(0) = x_0 > M$. Consideremos t_{max} el tiempo de explosión, i.e., $x(t) \to \infty$ cuando $t \to t_{max}^-$. Entonces,

   $$x' = f(x) \iff \frac{x'}{f(x)} = 1 \iff \int_0^{t_{max}} \frac{x'(t)dt}{f(x(t))} = t_{max}$$

   Cambiando de variable $v = x(t)$
   $$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{f(v)} dv = t_{max},$$

   Por lo que t_{max} es finito si
   $$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{f(v)} dv < \infty.$$

   Apliquemos al b): Sea $x_0 > \sqrt{\frac{\alpha}{k}} = a > 0$
   $$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{kx^2 - \alpha} = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{-1}{2ka} \ln \left(\frac{x_0 - a}{x_0 + a} \right)$$

7. Un grupo de ecólogos te piden que estimes a nivel cualitativo la tasa de crecimiento

$$\frac{\dot{x}}{x} = r(x)$$

de diversas poblaciones a partir de ciertos datos empíricos que han observado (modelo continuo):

i) Observan dos equilibrios estables consecutivos $0 < x_0 < x_1$.

ii) Observan que las poblaciones tienden a extinguirse cuando la densidad es menor que x_0, la velocidad de reproducción máxima se alcanza cuando la población es x_1 y además a largo plazo si las poblaciones no se extinguen tienden a x_2.

iii) Observan que la población crece exponencialemente cerca de cero, se reproduce velozmente cerca de x_1 pero después inexplicablemente se reproduce de manera muy lenta. Cerca de un valor x_2 observan que a veces la población tienden a estabilizarse y otras crece rapidamente hacia un valor mayor x_3. Aunque comiencen con poblaciones muy altas, a la larga siempre observan valores que no exceden x_3.

Respuestas:

i) Imposible!

ii) Es decir tiene un punto inestable en x_0 (efecto umbral), un punto estable en x_2 y el máximo de $f(x)$ es en x_1. Por tanto $f(x) = xr(x)$ es negativa hasta x_0, positiva hasta x_2 y negativa después. Tiene un máximo en x_1.

iii) La función $f(x) = xr(x)$ es positiva entre 0 y x_2 tomando un máximo local en x_1, se hace 0 en x_2 pero sigue siendo positiva hasta que se vuelve hacer cero en x_3 a partir de donde es negativa.