Topología, curso 2019-20

Hoja 7

1. Sea $\mathbb{D} = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ el disco unidad abierto (en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual).

i) Prueba que $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D} \cup \{(1\,,0)\}$ no son homeomorfos.

ii) Consideremos $\overline{\mathbb{D}} = \{(x\,,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Demuestra que un homeomorfismo $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ envía la frontera de $\overline{\mathbb{D}}$ en la frontera y el interior de $\overline{\mathbb{D}}$ en el interior. Indicación: considera los grupos fundamentales de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{p\}$ y $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{f(p)\}$.

2. Halla el grupo fundamental de cada uno de los siguientes espacios:

i) $\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ y de $\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geq 4\}$,

ii) el toro sólido: $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$, donde $\mathbb{D} = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

3. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Si A y D son subespacios simplemente conexos con $\mathsf{A} \cap \mathsf{D} \neq \varnothing$, entonces $\mathsf{A} \cup \mathsf{D}$ también lo es.

ii) Si X es homeomorfo a la frontera de $[0\,,1] \times [0\,,1]$, el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

iii) Si el grupo fundamental de X es isomorfo a $\mathbb{Z}$ entonces X es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

iv) Si A y D son retractos de deformación fuerte de espacios homeomorfos, entonces A y D son homeomorfos.

4. Decide razonadamente si los siguientes espacios topológicos son homeomorfos:

i) $X_1 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

ii) $X_2 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$.

iii) $X_3 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

iv) $X_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 < y < 1\}$.