HOJA 5

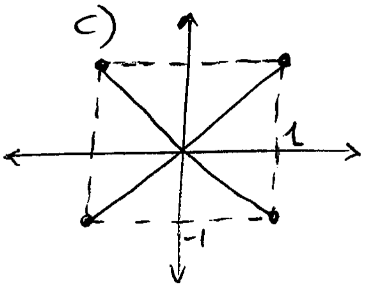
2.

a) S^2 es compacto y $\mathbb{R}^2$ no $\Rightarrow$ no son homeomorfos.

b) $\mathbb{R}^2 \simeq X_1$ ya que $\varphi(r) = \dfrac{r}{1-r}$ homeomorfismo

Después, X_2 es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ compacto y $\mathbb{R}^2$ no es compacto $\Rightarrow$ Como $X_1 \simeq \mathbb{R}^2 \Rightarrow X_1 \not\simeq X_2$.

c)



1º proyectamos sobre el eje X: $x \in [-1,1]$

- Expandimos $x \in [0,1)$ en $[0,\infty)$:

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{1-x}, \quad x \in [0,1)$$

- Expandimos $x \in (-1,0]$ en $(-\infty,0]$:

$$\varphi_2(x) = \frac{-x}{1+x}, \quad x \in (-1,0]$$

Entonces:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x \in [0,1) \\ \varphi_2(x) & x \in (-1,0] \end{cases}$$

sobreyectiva y continua en $(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$.

PERO, no se puede construir $\varphi([-1,1]) = \mathbb{R}$ continua y sobreyectiva

ya que la imagen de compactos (como $[-1,1]$) por apl. continuas es necesariamente compacta (no como $\mathbb{R}$, no compact

HOJA 6

$\boxed{1.}$ i) $f: X \longrightarrow Y$ cont., sobre., abierta $\Longrightarrow$ f apl. cociente

RECUERDO: $f: X \longrightarrow Y$ es apl. cociente si ($U \subset Y$ es abto. $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(U) \subset X$ es abierto).

$\boxed{\Rightarrow}$ Dado $U \subset Y$ abierto $\overset{f \text{ cont.}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(U) \subset X$ abierto

$\boxed{\Leftarrow}$ Dado $U \subset Y$ tal que $f^{-1}(U) \subset X$ abierto

Como f es abierta, $\underbrace{f(f^{-1}(U))}_{\substack{\parallel \\ U \text{ porque } f \text{ es sobre.}}} \subset Y$ es abierto. $\blacksquare$

ii) $f: X \longrightarrow Y$ cont., sobre., cerrada $\Rightarrow$ f es apl. cociente

$\boxed{\Rightarrow}$ Dado $U \subset Y$ abierto $\overset{f \text{ cont.}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(U) \subset X$ abierto.

$\boxed{\Leftarrow}$ Dado $U \subset Y$ tal que $f^{-1}(U) \subset X$ es abierto

$X \setminus f^{-1}(U)$ cerrado, $f(X \setminus f^{-1}(U))$ es cerrado por ser f cerrada.

$$f(X \setminus f^{-1}(U)) = f(X) \setminus f(f^{-1}(U)) \overset{f \text{ sobre}}{=} Y \setminus f(f^{-1}(U)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(U)) \underset{f \text{ sobre.}}{=} U \text{ abierto.}$$ $\blacksquare$

HOJA 4

4. a) Sea $z \in B_\alpha(B_\beta(A)) \Longrightarrow d(z, B_\beta(A)) < \alpha \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow d(z,A) = \inf\{d(z,a) : a \in B_\beta(A)\} < \alpha$$

$$¿\inf\{d(z,a) : a \in A\} < \alpha+\beta$$

$$d(z,a) \leq \underbrace{d(z,b)}_{<\alpha} + \underbrace{d(b,a)}_{<\beta}$$

Necesitamos probar que es estrictamente menor

Pero claro, si $d(z,b) < \alpha$ y $d(b,a) < \beta$, entonces

$$d(z,a) < \alpha + \beta \Longrightarrow \inf\{d(z,a) : a \in A\} < \alpha+\beta \quad \blacksquare$$

b) No siempre se da la igualdad:

$(\mathbb{R}, \bar{d})$, $\bar{d}(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$

$A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad$ $B_{1/2}(A) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$B_{3/4}(B_{1/2}(A)) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$B_{3/4+1/2}(A) = B_{5/4}(A) = \mathbb{R}$$

Hoja 6.

Nº 1

(a) Sean A y D dos subconjuntos cerrados no vacíos de un espacio topológico X. Demuestra que si $A\cup D$ y $A\cap D$ son conexos, entonces A y D también lo son. ¿Qué pasa si A ó D no son cerrados?.

Sol(a).

* Si A ó D no son cerrados. $A=[0,1)\cup\{2\}$, $D=[1,2]$
$A\cup D=[0,2]$, $A\cap D=\{2\}$, pero A no es conexo.

(·) Supongamos que A no es conexo. Sea C_1, D una separación de A, i.e. $A=C_1 \uplus \cancel{C_2}$, $C_1\cap \overline{\cancel{C_2}}=\phi$, $\overline{C_1}\cap \cancel{C_2}=\phi$. Entonces
$A\cap D=(C_1\uplus C_2)\cap D=(C_1\cap D)\uplus(C_2\cap D)$. Como $A\cap D$ es conexo, p.e. $A\cap D=C_1\cap D$, $C_2\cap D=\phi$ (o vicev.)
pues $(C_1\cap D)\cap\overline{(C_2\cap D)}=\phi$. En consecuencia
$A\cup D= C_2\cup(C_1\cup D)$ y además $C_2\cap(C_1\cup D)=C_2\cap D=\phi$

$$C_2\cap\overline{C_1\cup D}\overset{D \text{ cerrado}}{=}C_2\cap(\overline{C_1}\cup D)=(C_2\cap\overline{C_1})\cup C_2\cap D=\phi\cup\phi$$

Luego $\{C_2, C_1\cup D\}$ es una separación de $A\cup D$, lo que es abs.

Se procedería de forma análoga si $A\cap D=C_2\cap D$, $C_1\cap D=\phi$.

(··) Si suponemos que D no es conexo, se razonaría de forma análoga a (·)

(b) Sean $A_1, \dots, A_n$ subconjuntos conexos de un espacio topológico tales que $A_k \cap A_{k+1} \neq \phi$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$. Prueba que $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ es conexo. Trata de generalizar el resultado para una colección numerable de conexos.

<u>Sol (b)</u>.

Inducción en n.

Si $n=2$, resultado hecho en clase.

Si $n>2$ consideremos $A := \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $B = A_n$.

Como $A \cap B \supset A_{n-1} \cap A_n \neq \phi$ entonces $A \cup B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ es conexo, por hipótesis de inducción.

<u>Generalización</u> $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A_k \cap A_{k+1} \neq \phi$, $\forall k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ conexo

Sea $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$; B_n es conexo $\forall n$, por la primera parte del ejercicio. Además $A_1 \subset B_n$ $\forall n$. Luego $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \phi$. En consecuencia, por un Tma. visto en clase, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es conexo.

Hoja 6

Nº3.(2). Prueba que si $f: X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in X$, $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ y $Y \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ son también homeomorfos. Aplica lo anterior para demostrar que los subconjuntos de $\mathbb{R}$: $(1,2)$, $[1,2]$ y $[1,2)$ no son homeomorfos.

▷ Sol. Pongamos $X_n := X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y_n = Y \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ $f_n = f|_{X_n} : X_n \to Y_n$. Demostraremos el enunciado por inducción en n.

$n=1$. f_1 es continua y biyectiva. Para cada abierto Ω_1 de Y_1, $\Omega_1 = \Omega \cap Y_1$ con Ω abierto de Y. Entonces

$f_1^{-1}(\Omega_1) = f^{-1}(\Omega) \cap f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(\Omega) \cap X_1$, abierto en X_1.

Además, por hipótesis de inducción f_{n-1} es un homeomorfismo. Pero $f_n = f_{n-1}|_{X_{n-1} \setminus \{x_n\}}$ y por el caso para un punto, se tiene que f_n es un homeomorfismo.

▷ Si ponemos $A_1 = (1,2)$, $A_2 = [1,2]$, $A_3 = [1,2)$, se tiene que A_2 no es homeomorfo a A_1 ni a A_3 porque A_2 es compacto y los otros no. Además, si $f: A_3 \to A_1$ fuera un homeomorfismo entre A_3 y A_1, entonces $f_1: A_3 \setminus \{1\} \to A_1 \setminus \{f(1)\}$ sería un homeomorfismo. Pero $A_3 \setminus \{1\}$ es conexo y $A_1 \setminus \{f(1)\}$ no lo es. Luego un tal f no puede existir.

N°3. (3)

Probar que un espacio X es conexo si y sólo si no existe ninguna aplicación continua y sobreyectiva $f: X \longrightarrow Y$ donde $Y = \{0,1\}$ con la topología discreta.

Sol: Basta considerar $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$. Ambos son abiertos en X por ser f continua. Luego

X conexo $\Rightarrow$ $A = \phi$ ó $B = \phi$ $\Rightarrow$ f no es sobre. Luego una tal f no existe.

Si X no es conexo, $X = U \uplus V$ con U y V abtos en X.

Podemos definir $f: X \longrightarrow \{0,1\}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \in V \end{cases}$$

Entonces f es continua y sobre.

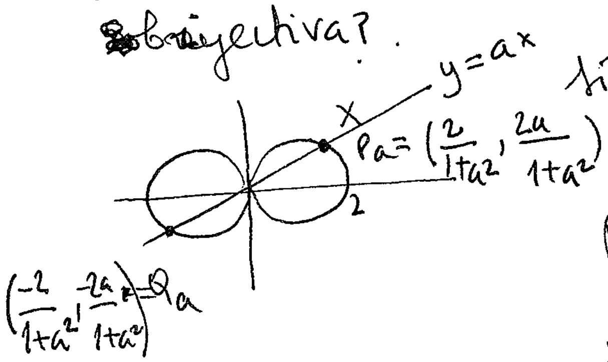
Hoja 6

Nº4. (2). Demuestra que $(\mathbb{R}\times 0)\cup(0\times\mathbb{R})$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$ ¿Son $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ homeomorfos?.

Sol. Si existe $f:(\mathbb{R}\times 0)\cup(0\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ un homeomorfismo entonces $f_1:[(\mathbb{R}\times 0)\cup(0\times\mathbb{R})]\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}\setminus\{f(0,0)\}$ es un homeomorfismo, pero el primer espacio tiene 4 componentes conexas y el segundo 2. Luego un tal homeomorfismo no puede existir.

Por otro lado $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos: caso contrario, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ restringiría a $f_1:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2\setminus$ con $P=f(0)$. Esto es imposible porque $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tiene 2 componentes conexas y $\mathbb{R}^2\setminus\{P\}$ es conexo.

Nº4. (3). Sean $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+1)^2+y^2=1\}$, e $Y=S^1$ ¿Existe alguna función continua y sobreyectiva de X en Y? y si pedimos además que sea biyectiva?



Sí existe $f: X \twoheadrightarrow Y$ (Ejercicio: buscar la fórmula)

Pero una biyectiva no existe pues $f_1: X\setminus\{(0,0)\}\to Y\setminus\{f(0,0)\}$ sería cont. y biyectiva y se tiene que $X\setminus\{(0,0)\}$ tiene 2 comp. conexas y $Y\setminus\{f(0,0)\}$ tiene

Hoja 5

Nº1. Estudia si son compactos

a) $E = \{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \} \subset \mathbb{R}$

b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

c) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología límite inferior ($\tau_{[)}$).

d) $[0,1] \times \{3\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico

Sol

a) y b) no son compactos por no ser cerrados en $\mathbb{R}$.

c) Considera el cubrimiento de $[0,1]$ dado por

$A_n = [0, 1-\frac{1}{n})$, $B_n = [1, 1+\frac{1}{n})$

$\mathcal{F} = \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{F}$ cubre $[0,1]$ pero no admite un subcubrimiento finito. Luego no es compacto

d) Considera $I_r = r \times (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$, $r \in [0,1]$.

$\mathcal{F} = \{ I_r : r \in [0,1] \}$ es un cubrimiento abierto de $[0,1] \times 3$ que no admite un subcubrimiento finito.

Nº6.- Demostrar que si $f: X \to Y$ es continua, Y es T_2 y X compacto entonces f es cerrada. Además si f es biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

Sol: Si K es cerrado de X, entonces es compacto. Entonces $f(K)$ es compacto en un T_2, luego cerrado.

Entonces, si f es biyectiva, f^{-1} es continua, de donde se deduce el enunciado.

N° 5.- Prueba que si X es un espacio compacto, $A \subset X$, entonces $\bar{A}$ es compacto. Demuestra también que $\mathcal{B} = \{\{0, n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{Z}$ en la que $A = \{0\}$ es compacto pero $\bar{A}$ no lo es ¿Contradice esto lo anterior?

Sol.

▷ $\bar{A} \subset X$ es un cerrado dentro de un compacto, luego compacto

▷▷ $\mathcal{B}$ es base para una topología sobre $\mathbb{Z}$.

- Se deduce fácilmente de los axiomas de base.
- $A = \{0\}$ es compacto. Además $\bar{A} = \mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z}$ no es compacto en esta topología.