

Sección 1.1

1. La restricción a ecuaciones de primer orden no supone pérdida de generalidad, pues siempre es posible transformar un problema de mayor orden en uno de primer orden a costa de aumentar la dimensión del sistema. Para ello simplemente hay que añadir como nuevas variables dependientes a cada una de las derivadas de las variables dependientes originales de orden estrictamente menor que las de mayor orden que aparecieran en las ecuaciones de partida.

(a) Escribir la ecuación lineal $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ en la forma $Y' = AY$ con $Y = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^T$ y A una matriz $n \times n$.

(b) Reducir el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u''' &= u'' + v', & v'' &= u^2 + e^x u' v' + \sin v, \\ u(0) &= u'(0) = u''(0) = v'(0) = 0, & v(0) &= 1, \end{aligned}$$

a un problema de valor inicial para una EDO de primer orden escrita en la forma estándar.

Solución. (a) Para $k = 1, \dots, n-1$, se tiene que

$$(Y^k)' = (y^{(k-1)})' = y^{(k)} = Y^{(k+1)}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (Y^n)' = y^{(n)} &= -a_0y - a_1y' - \dots - a_{n-1}y^{(n-1)} \\ &= -a_0Y^1 - a_1Y^2 - \dots - a_{n-1}Y^n. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(b) Definimos una función vectorial $y = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5)^T$ cuyas componentes vienen dadas por

$$y^1 = u, \quad y^2 = u', \quad y^3 = u'', \quad y^4 = v, \quad y^5 = v'.$$

A continuación obtenemos la ecuación diferencial satisfecha por la derivada de cada una de las componentes. Usando las definiciones de las mismas, así como las EDO de partida, se tiene

$$\begin{aligned} (y^1)'(x) &= u'(x) = y^2(x); \\ (y^2)'(x) &= u''(x) = y^3(x); \\ (y^3)'(x) &= u'''(x) = u''(x) + v'(x) = y^3(x) + y^5(x); \\ (y^4)'(x) &= v'(x) = y^5(x); \\ (y^5)'(x) &= v''(x) = (u(x))^2 + e^x u'(x) v'(x) + \sin(v(x)) \\ &= (y^1(x))^2 + e^x y^2(x) y^5(x) + \sin(y^4(x)). \end{aligned}$$

En notación vectorial, $y'(x) = f(x, y(x))$, con $f = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5)^T$ y

$$\begin{aligned} f^1(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) &= y^2; \\ f^2(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) &= y^3; \\ f^3(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) &= y^3 + y^5; \\ f^4(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) &= y^5; \\ f^5(x, y^1, y^2, y^3, y^4, y^5) &= (y^1)^2 + e^x y^2 y^5 + \sin(y^4). \end{aligned}$$

Sólo nos queda transformar las condiciones iniciales. Usando la definición de las componentes de y se tiene que

$$\begin{aligned} y^1(0) &= u(0) = 0; \\ y^2(0) &= u'(0) = 0; \\ y^3(0) &= u''(0) = 0; \\ y^4(0) &= v(0) = 1; \\ y^5(0) &= v'(0) = 0. \end{aligned}$$

En notación vectorial, $y(0) = (0, 0, 0, 1, 0)^T$.

2. Una EDO de primer orden escrita en la forma estándar se dice *autónoma* si la función f del lado derecho no depende explícitamente de la variable independiente x . Cualquier EDO se puede transformar en autónoma introduciendo una nueva variable dependiente dada precisamente por x .

Transformar el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}u' &= xu + x^2v, & u(0) &= 3, \\v' &= u - v + 2xw, & v(0) &= 2, \\w' &= u + \frac{v}{1+x}, & w(0) &= 5,\end{aligned}$$

en un problema de valor inicial para una EDO autónoma.

Solución. Definimos $y = (u, v, w, x)^T$. Se tiene que

$$\begin{aligned}(y^1)' &= u' = xu + x^2v = y^4y^1 + (y^4)^2y^2, \\(y^2)' &= v' = u - v + 2xw = y^1 - y^2 + 2y^4y^3, \\(y^3)' &= w' = u + \frac{v}{1+x} = y^1 + \frac{y^2}{1+y^4}, \\(y^4)' &= 1.\end{aligned}$$

Así pues, el sistema se puede escribir $y' = f(y)$, con

$$f(y) = f(y^1, y^2, y^3, y^4) = \begin{pmatrix} y^4y^1 + (y^4)^2y^2 \\ y^1 - y^2 + 2y^4y^3 \\ y^1 + \frac{y^2}{1+y^4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En cuanto a los datos iniciales, se tiene que

$$y(0) = (y^1(0), y^2(0), y^3(0), y^4(0))^T = (3, 2, 5, 0)^T.$$

-
3. Al restringirnos a ecuaciones que se puedan escribir en forma estándar, sí dejamos fuera algunos problemas: la EDO de primer orden más general, $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, donde y , y' y F tienen d componentes cada una, no siempre equivale a una única EDO escrita en forma estándar.

Encontrar todas las soluciones de la EDO de primer orden en forma no estándar $(y')^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0$.

Solución. La EDO se puede factorizar como $(y' - 2x)(y' - y) = 0$. Así pues las soluciones tendrán que satisfacer o bien $y' = 2x$ o bien $y' = y$. Nótese que una solución puede satisfacer una de estas ecuaciones para algunos valores de x y la otra para otros valores de x distintos. Eso sí, la transición entre las dos ecuaciones tiene que producirse de forma que la solución sea C^1 . Por consiguiente en los puntos de cambio se tiene que satisfacer en particular que $y(x) = 2x$.

Vamos a clasificar las soluciones en función de su estructura, de cuántos “trozos” tienen.

Soluciones “simples”. Hay de dos tipos: las soluciones de $y' = 2x$, que son las parábolas

$$y_c(x) = x^2 + c,$$

y las soluciones de $y' = y$, que son las exponenciales

$$y_d(x) = de^x.$$

Soluciones con dos “trozos”. Se obtienen pegando dos soluciones simples, en cualquiera de los dos órdenes posibles. En el punto de transición, \bar{x} , se tiene que cumplir que

$$\bar{x}^2 + c = de^{\bar{x}}, \quad 2\bar{x} = de^{\bar{x}},$$

de donde se deduce que

$$c = 2\bar{x} - \bar{x}^2, \quad d = 2\bar{x}e^{-\bar{x}}.$$

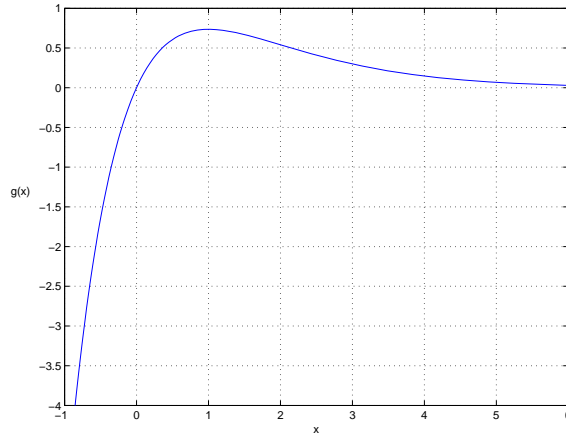
El punto de transición \bar{x} se puede elegir arbitrariamente. Hay así dos tipos de soluciones:

$$y_{\bar{x}}(x) = \begin{cases} x^2 + 2\bar{x} - \bar{x}^2, & x \leq \bar{x}, \\ 2\bar{x}e^{x-\bar{x}}, & x \geq \bar{x}, \end{cases} \quad \hat{y}_{\bar{x}}(x) = \begin{cases} 2\bar{x}e^{x-\bar{x}}, & x \leq \bar{x}, \\ x^2 + 2\bar{x} - \bar{x}^2, & x \geq \bar{x}. \end{cases}$$

Soluciones con tres “trozos”. Alternan parábolas y exponenciales. Sean $x_1 < x_2$ los puntos de transición. Como las soluciones son C^1 , las soluciones del tipo parábola/exponencial/parábola tienen que ser de la forma

$$y_{x_1, x_2}(x) = \begin{cases} x^2 + 2x_1 - x_1^2, & x \leq x_1, \\ 2x_1 e^{x-x_1}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ x^2 + 2x_2 - x_2^2, & x \geq x_2, \end{cases}$$

con $x_1 < x_2$ satisfaciendo $2x_1 e^{x_2-x_1} = 2x_2$. Es decir, x_1 y x_2 tienen que pertenecer al mismo conjunto de nivel de la función $g(x) = 2xe^{-x}$. Como se puede ver en la figura, esto sólo es posible si $0 < x_1 < 1$.

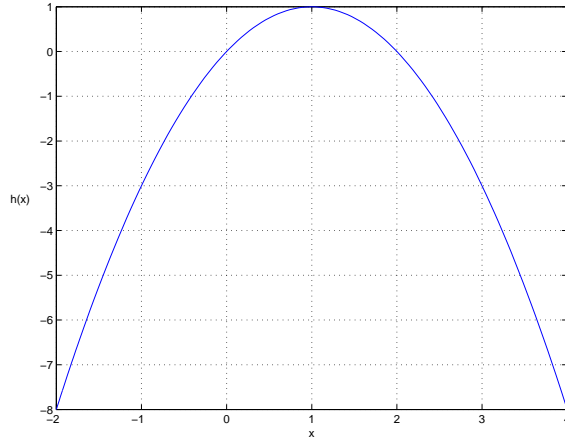


Una vez fijado cualquier x_1 con esa condición, x_2 queda totalmente determinado, y es mayor que 1.

De manera análoga se tiene que las soluciones del tipo exponencial/parábola/exponencial tienen que ser de la forma

$$y_{x_1, x_2}(x) = \begin{cases} 2x_1 e^{x-x_1}, & x \leq x_1, \\ x^2 + 2x_1 - x_1^2, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 2x_2 e^{x-x_2}, & x \geq x_2, \end{cases}$$

con $x_1 < x_2$ satisfaciendo $2x_2 = x_2^2 + 2x_1 - x_1^2$. Es decir, x_1 y x_2 tienen que pertenecer al mismo conjunto de nivel de la función $h(x) = 2x - x^2$. Como se puede ver en la figura, esto sólo es posible si $x_1 < 1$. Una vez



fijado cualquier x_1 con esa condición, x_2 queda totalmente determinado, y es mayor que 1.

Ya no hay más posibilidades. En efecto, si hubiera otra transición parábola/exponencial, en un punto $x_3 > x_2 > 1$, la regularidad C^1 exigiría $h(x_2) = h(x_3)$, lo que es claramente imposible. De la misma forma, otra transición exponencial/parábola en un punto $x_3 > x_2 > 1$ exigiría $g(x_2) = g(x_3)$, lo que también es claramente imposible.

Sección 1.2

1. Comprobar que las siguientes funciones satisfacen una condición de Lipschitz con respecto a su segunda variable para $x \in [1, \infty)$:

$$(a) \quad f(x, y) = 2yx^{-4}, \quad (b) \quad f(x, y) = e^{-x^2} \arctan y.$$

Solución. (a) $|f(x, y) - f(x, \hat{y})| = 2|x|^{-4}|y - \hat{y}|$. Dado que $|x|^{-4} \leq 1$ si $x \in [1, \infty)$, concluimos que $|f(x, y) - f(x, \hat{y})| \leq 2|y - \hat{y}|$.

(b) $|f(x, y) - f(x, \hat{y})| = e^{-x^2} |\arctan y - \arctan \hat{y}|$. Por el Teorema del Valor Medio, $|\arctan y - \arctan \hat{y}| = \frac{1}{1+\xi^2} |y - \hat{y}|$, donde ξ es un punto intermedio entre y e \hat{y} . Como $e^{-x^2} \leq 1$ y $\frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$, concluimos que $|f(x, y) - f(x, \hat{y})| \leq |y - \hat{y}|$.

2. Consideramos el problema de valor inicial

$$y'(x) = Ay(x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = \eta,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & \sqrt{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Encontrar la mejor constante de Lipschitz para la función del lado derecho usando las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ ¹.
-

¹Recordemos que, para $x \in \mathbb{C}^d$ se define $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\right)^{1/p}$ si $p \in [1, \infty)$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|$. Por otra parte, dada una matriz A de entradas $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i, j \leq d$, se define $\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$, $1 \leq p \leq \infty$, y se demuestra que

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq d} \sum_{i=1}^d |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^*A)}, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}|,$$

donde $r_\sigma(B)$ denota el *radio espectral* de B , $r_\sigma(B) = \max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|$, siendo $\sigma(B)$ el *espectro* de B , es decir, el conjunto de todos sus autovalores.

- (b) Sean y e \hat{y} las soluciones del problema correspondientes a datos iniciales $(0, 1)^T$ y $(1, 0)^T$ respectivamente. Acotar $\max_{x \in [0, 2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|$ para cada una de las normas del apartado anterior.

Solución. (a) Dado que $f(x, y) - f(x, \hat{y}) = A(y - \hat{y})$, la mejor constante de Lipschitz vendrá dada por $\sup_{z \neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$, es decir, por $\|A\|$. Para las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ se tiene

$$\|A\|_1 = \max\{\sqrt{7} + 0, \sqrt{2} + 2\} = \sqrt{2} + 2,$$

$$\|A\|_\infty = \max\{\sqrt{7} + \sqrt{2}, 0 + 2\} = \sqrt{7} + \sqrt{2}.$$

Para obtener la norma 2, comenzamos calculando

$$A^*A = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & 0 \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & \sqrt{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{14} \\ -\sqrt{14} & 6 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz son -1 y 14 , de donde deducimos que $\|A\|_2 = \sqrt{14}$.

(b) Según hemos visto en la teoría,

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \|y(0) - \hat{y}(0)\| \exp(Lx),$$

de donde deducimos que

$$\max_{x \in [0, 2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \|(-1, 1)^T\| \exp(2L).$$

Dado que $\|(-1, 1)^T\|_1 = 2$, $\|(-1, 1)^T\|_2 = \sqrt{2}$ y $\|(-1, 1)^T\|_\infty = 1$, concluimos que

$$\max_{x \in [0, 2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|_1 \leq 2 \exp(2(\sqrt{2} + 2)),$$

$$\max_{x \in [0, 2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|_2 \leq \sqrt{2} \exp(2\sqrt{14}),$$

$$\max_{x \in [0, 2]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|_\infty \leq \exp(2(\sqrt{7} + \sqrt{2})).$$

3. Consideramos la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x + \sin y^2, \frac{x^2}{2} + \cos y^1)^T.$$

- (a) Encontrar, usando las normas² $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$, una constante de Lipschitz para f con respecto a $y = (y^1, y^2)^T$.
 - (b) Sean y e \hat{y} las soluciones de $y'(x) = f(x, y(x))$ en el intervalo $[0, 1]$ con datos iniciales $y(0) = (0, 1)^T$ e $\hat{y}(0) = (1, 0)^T$ respectivamente. Acotar $\max_{x \in [0, 1]} \|y(x) - \hat{y}(x)\|$ para cada una de las normas del apartado anterior.
-

Solución. Se tiene que

$$f(x, y) - f(x, \hat{y}) = (\sin y^2 - \sin \hat{y}^2, \cos y^1 - \cos \hat{y}^1)^T.$$

Empezamos por la norma $\|\cdot\|_1$. Usando el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x, \hat{y})\|_1 &= |\sin y^2 - \sin \hat{y}^2| + |\cos y^1 - \cos \hat{y}^1| \\ &= |\cos \xi| |y^2 - \hat{y}^2| + |\sin \eta| |y^1 - \hat{y}^1| \\ &\leq |y^1 - \hat{y}^1| + |y^2 - \hat{y}^2| = \|y - \hat{y}\|_1. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos tomar $L = 1$.

En cuanto a la norma $\|\cdot\|_2$, usando de nuevo el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x, \hat{y})\|_2 &= \sqrt{|\sin y^2 - \sin \hat{y}^2|^2 + |\cos y^1 - \cos \hat{y}^1|^2} \\ &= \sqrt{|\cos \xi|^2 |y^2 - \hat{y}^2|^2 + |\sin \eta|^2 |y^1 - \hat{y}^1|^2} \\ &\leq \sqrt{|y^1 - \hat{y}^1|^2 + |y^2 - \hat{y}^2|^2} = \|y - \hat{y}\|_2, \end{aligned}$$

²Si nos basta con obtener una constante de Lipschitz cualquiera, sin buscar la óptima, puede ser útil recordar que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty$, $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{d}\|x\|_2$.

y también podemos tomar en este caso $L = 1$.

Finalmente, consideramos $\|\cdot\|_\infty$. Una vez más usamos el Teorema del Valor Medio, y obtenemos

$$\begin{aligned}\|f(x, y) - f(x, \hat{y})\|_2 &= \max\{|\sin y^2 - \sin \hat{y}^2|, |\cos y^1 - \cos \hat{y}^1|\} \\ &= \max\{|\cos \xi||y^2 - \hat{y}^2|, |\sin \eta||y^1 - \hat{y}^1|\} \\ &\leq \max\{|y^1 - \hat{y}^1|, |y^2 - \hat{y}^2|\} = \|y - \hat{y}\|_\infty\end{aligned}$$

Por consiguiente, también ahora podemos tomar $L = 1$.

4. Demostrar que cualquier problema de valor inicial para las ecuaciones diferenciales

$$(a) \ y'(x) = 2y(1 + y^2)^{-1}(1 + e^{-|x|}), \quad (b) \ y'(x) = 3|y(x) + 1| + \cos x,$$

tiene a lo sumo una solución.

Solución. Se trata de ver en cada caso que la función f del lado derecho es Lipschitz respecto de su segunda variable.

(a) En este caso $|f(x, y) - f(x, \hat{y})| = 2(1 + e^{-|x|}) \left| \frac{y}{1+y^2} - \frac{\hat{y}}{1+\hat{y}^2} \right|$. Ahora bien, por el Teorema del Valor Medio, se tiene que

$$\begin{aligned}\left| \frac{y}{1+y^2} - \frac{\hat{y}}{1+\hat{y}^2} \right| &= \left| \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2} \right| |y - \hat{y}| \leq \frac{1 + \xi^2}{(1 + \xi^2)^2} |y - \hat{y}| \\ &\leq \frac{1}{1 + \xi^2} |y - \hat{y}| \leq |y - \hat{y}|.\end{aligned}$$

Por otra parte, $1 + e^{-|x|} \leq 2$. En conclusión, $|f(x, y) - f(x, \hat{y})| \leq 4|y - \hat{y}|$, y podemos tomar $L = 4$.

(b) En este caso usaremos la desigualdad³ $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Gracias a ella se tiene que

$$|f(x, y) - f(x, \hat{y})| = 3||y + 1| - |\hat{y} + 1|| \leq 3|y - \hat{y}|,$$

y podemos tomar $L = 3$.

³Se demuestra fácilmente a partir de la desigualdad triangular

-
5. Consideramos la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(y) = |y|^\alpha$, $\alpha > 0$.
- (a) Si $\alpha \in (0, 1)$, demostrar que f no es Lipschitz en ningún intervalo que contenga el origen.
 - (b) Si $\alpha > 1$, demostrar que f es Lipschitz en cualquier intervalo de la forma $[-K, K]$, pero no en todo \mathbb{R} .
-

Solución. (a) En caso contrario, existirían un intervalo $[a, b]$ conteniendo el origen y una constante $L > 0$ tales que $|f(y) - f(\hat{y})| \leq L|y - \hat{y}|$ para todo $y, \hat{y} \in [a, b]$. Tomando en particular $\hat{y} = 0$, se tendría que $|y|^{\alpha-1} \leq L$ para todo $y \in [a, b]$, $y \neq 0$, lo que es evidentemente falso (tomar $y \approx 0$).

(b) La función f es de clase C^1 , con derivada dada por

$$f'(y) = \begin{cases} -\alpha|y|^{\alpha-1}, & y \leq 0, \\ \alpha|y|^{\alpha-1}, & y \geq 0. \end{cases}$$

Por consiguiente, por el Teorema del Valor Medio se tiene que

$$|f(y) - f(\hat{y})| = \alpha|\xi|^{\alpha-1}|y - \hat{y}| \leq \alpha K^{\alpha-1}|y - \hat{y}|$$

si $y \in [-K, K]$; es decir, f es Lipschitz en $[-K, K]$ con constante $L = \alpha K^{\alpha-1}$. Este argumento obviamente no es válido en todo \mathbb{R} . De hecho, no puede existir ninguna constante L tal que $|f(y) - f(\hat{y})| \leq L|y - \hat{y}|$ para todo $y, \hat{y} \in \mathbb{R}$. En efecto, tomando $\hat{y} = 0$, esto implicaría que $|y|^{\alpha-1} \leq L$ para todo $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, lo que es evidentemente falso (tomar $|y| \rightarrow \infty$).

6. La función f satisface una *condición de Lipschitz unilateral* en $D = [a, b] \times \mathbb{R}^d$ con *constante de Lipschitz unilateral* l si

$$\langle f(x, y) - f(x, \hat{y}), y - \hat{y} \rangle \leq l \|y - \hat{y}\|_2^2 \quad \forall (x, y), (x, \hat{y}) \in D.$$

- (a) Si $l < 0$ se dice que el problema de valor inicial PVI es *disipativo*. Demostrar que el problema de valor inicial del problema 2 es disipativo.
- (b) Demostrar que si f satisface una condición de Lipschitz unilateral con constante l y las funciones y e \hat{y} son soluciones de $y'(x) = f(x, y(x))$ en $[a, b]$, entonces

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\|_2 \leq \exp(l(x - a))\|y(a) - \hat{y}(a)\|_2 \quad \text{si } a \leq x \leq b.$$

- (c) Dar una cota para la norma euclídea, $\|y(x)\|_2$, de la solución del problema 2 con dato inicial $y(0) = (0, 1)^T$.

Solución. (a) Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} & \langle f(x, y) - f(x, \hat{y}), y - \hat{y} \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{7}(y^1 - \hat{y}^1) + \sqrt{2}(y^2 - \hat{y}^2) \\ -2(y^2 - \hat{y}^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^1 - \hat{y}^1 \\ y^2 - \hat{y}^2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\sqrt{7}(y^1 - \hat{y}^1)^2 + \sqrt{2}(y^1 - \hat{y}^1)(y^2 - \hat{y}^2) - 2(y^2 - \hat{y}^2)^2. \end{aligned}$$

Si ahora usamos la desigualdad de Young, $ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}$, válida para todo $\epsilon > 0$, llegamos a

$$\begin{aligned} & \langle f(x, y) - f(x, \hat{y}), y - \hat{y} \rangle \\ & \leq \left(-\sqrt{7} + \frac{1}{\epsilon\sqrt{2}} \right) (y^1 - \hat{y}^1)^2 + \left(-2 + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \right) (y^2 - \hat{y}^2)^2. \end{aligned}$$

Se trata ahora de elegir un $\epsilon > 0$ de tal forma que los dos coeficientes sean negativos⁴, por ejemplo $\epsilon = \sqrt{2}$. Con esta elección se llega a

$$\begin{aligned} \langle f(x, y) - f(x, \hat{y}), y - \hat{y} \rangle & \leq -\left(-\sqrt{7} + \frac{1}{2}\right) (y^1 - \hat{y}^1)^2 - (y^2 - \hat{y}^2)^2 \\ & \leq -(y^1 - \hat{y}^1)^2 - (y^2 - \hat{y}^2)^2 = \|y - \hat{y}\|_2^2. \end{aligned}$$

⁴La elección óptima es aquella que hace que los dos coeficientes coincidan.

(b) Un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\|y(x) - \hat{y}(x)\|_2^2 &= \frac{d}{dx}\langle y - \hat{y}, y - \hat{y} \rangle = 2\langle y' - \hat{y}', y - \hat{y} \rangle \\ &= 2\langle f(x, y) - f(x, \hat{y}), y - \hat{y} \rangle \leq 2l\|y - \hat{y}\|_2^2.\end{aligned}$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-2l(x-a)}$ llegamos a

$$\frac{d}{dx} (e^{-2l(x-a)}\|y(x) - \hat{y}(x)\|_2^2) \leq 0,$$

desigualdad que integrada en (a, x) produce

$$e^{-2l(x-a)}\|y(x) - \hat{y}(x)\|_2^2 \leq \|y(a) - \hat{y}(a)\|_2^2,$$

de donde se sigue inmediatamente el resultado.

(c) La solución con dato inicial $\hat{y}(0) = (0, 0)^T$ es evidentemente la solución trivial $\hat{y}(x) = (0, 0)^T$ para todo $x \in [0, 2]$. Usando los dos apartados anteriores, concluimos que

$$\|y(x)\|_2 \leq e^{-x}\|(0, 1)^T\|_2 = e^{-x}.$$

7. Sea y solución de (1.1) e \hat{y} solución de la ecuación perturbada

$$\hat{y}'(x) = f(x, \hat{y}(x)) + r(x, \hat{y}(x)), \quad x \in [a, b],$$

con f continua y Lipschitz (con constante L) con respecto a su segunda variable en $D = [a, b] \times \mathbb{R}$ y r acotada en D , $\|r\| \leq M$. Demostrar que

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq e^{L(x-a)}\|y(a) - \hat{y}(a)\| + \frac{M}{L}(e^{L(x-a)} - 1), \quad x \in [a, b].$$

Solución. Integrando las ecuaciones satisfechas por y e \hat{y} en (a, x) , se obtiene que

$$y(x) = y(a) + \int_a^x f(s, y(s)) ds,$$

$$\hat{y}(x) = \hat{y}(a) + \int_a^x f(s, \hat{y}(s)) ds + \int_a^x r(s, \hat{y}(s)) ds.$$

Restando, tomando normas y usando la desigualdad triangular, junto con la condición de Lipschitz sobre f y la condición de tamaño sobre r , se llega a

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \underbrace{\|y(a) - \hat{y}(a)\| + L \int_a^x \|y(s) - \hat{y}(s)\| ds + M(x - a)}_{g(x)}.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $g'(x) = L\|y(x) - \hat{y}(x)\| + M \leq Lg(x) + M$, de donde

$$\frac{d}{dx} (e^{-L(x-a)} g(x)) \leq M e^{-L(x-a)}.$$

Integrando en (a, x) llegamos a

$$e^{-L(x-a)} g(x) - g(a) \leq -\frac{M}{L} (e^{-L(x-a)} - 1).$$

Finalmente obtenemos que

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq g(x) \leq e^{L(x-a)} g(a) + \frac{M}{L} (e^{L(x-a)} - 1),$$

de donde se concluye el resultado simplemente observando que $g(a) = \|y(a) - \hat{y}(a)\|$.

Sección 1.3

1. Consideramos la ecuación integral

$$y(x) = 10 + \int_1^x y(s) ds, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

- (a) Demostrar que tiene una única solución continua.
(b) Calcularla.
-

Solución. El punto clave es que las soluciones continuas de la ecuación integral son funciones $C^1([1, 2])$ que son solución del PVI

$$y'(x) = y(x), \quad x \in [1, 2], \quad y(1) = 10,$$

y recíprocamente.

- (a) Basta con ver que el PVI equivalente tiene solución única. Pero esto es inmediato, ya que la función del lado derecho, $f(x, y) = y$, es obviamente continua y además Lipschitz con respecto a su segunda variable.
(b) Es inmediato ver que la solución del PVI (y por tanto de la ecuación integral) es $y(x) = 10e^{x-1}$.
-

2. Demostrar que existe un único par de funciones $u, v \in C([0, 10])$ que resuelve el sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{cases} u(x) = 1 + \int_0^x \left(u(s) + 2v(s) + s + \int_0^{v(s)} e^{-t^2} dt \right) ds, \\ v(x) = 1 + \int_0^x \left(-u(s) + 3v(s) + \frac{s^2}{2} + \arctan(\exp(u(s))) \right) ds, \end{cases}$$

para todo $x \in [0, 10]$.

Solución. Si denotamos $y = (u, v)^T$, el sistema es equivalente al PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \begin{pmatrix} u(x) + 2v(x) + x + \int_0^{v(x)} e^{-t^2} dt \\ -u(x) + 3v(x) + \frac{x^2}{2} + \arctan(\exp(u(x))) \end{pmatrix}, & 0 \leq x \leq 10, \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

$f(x, y(x))$

Para ver que este PVI (y por tanto el sistema original) tiene solución única basta con comprobar que la función $f(x, y)$, que es obviamente continua en sus dos variables, es también Lipschitz respecto de y . Esto se puede hacer con cualquier norma, ya que en un espacio de dimensión finita todas las normas son equivalentes. Haremos el cálculo con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Se tiene que

$$\|f(x, y) - f(x, \hat{y})\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} u - \hat{u} + 2(v - \hat{v}) + \int_0^v e^{-t^2} dt - \int_0^{\hat{v}} e^{-t^2} dt \\ -(u - \hat{u}) + 3(v - \hat{v}) + \arctan(\exp u) - \arctan(\exp \hat{u}) \end{pmatrix} \right\|_\infty.$$

Por el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} \int_0^v e^{-t^2} dt - \int_0^{\hat{v}} e^{-t^2} dt &= e^{-\xi^2}(v - \hat{v}), \\ \arctan(\exp u) - \arctan(\exp \hat{u}) &= \frac{\exp \eta}{1 + \exp(2\eta)}(u - \hat{u}), \end{aligned}$$

para ciertos puntos intermedios ξ, η . Ahora bien, dado que $e^{-\xi^2} \leq 1$, $\exp(\eta)/(1 + \exp(2\eta)) \leq 1/2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x, \hat{y})\|_\infty &\leq \max \left\{ |u - \hat{u}| + 2|v - \hat{v}| + |v - \hat{v}|, |u - \hat{u}| + 3|v - \hat{v}| + \frac{1}{2}|u - \hat{u}| \right\} \\ &\leq \frac{9}{2} \max\{|u - \hat{u}|, |v - \hat{v}|\} = \frac{9}{2} \|y - \hat{y}\|_\infty. \end{aligned}$$

Es decir, f es Lipschitz con respecto a su segunda variable en la norma infinito con constante $L = 9/2$.

3. Sean c y d funciones continuas en $[a, b]$. Consideramos el problema de valor inicial PVI con $f : [a, b] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = c(x)y + d(x)$.

(a) Demostrar que el problema tiene solución única.

(b) Si además $c, d \in C^\infty([a, b])$, demostrar que $y \in C^\infty([a, b])$.

Sugerencia. Usar la fórmula de Leibniz para la derivada k -ésima de un producto,

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}.$$

(c) Si $b = a + 3$ y $c(x) = \sin(\exp(\arctan x))$, determinar un valor de δ que garantice que dos soluciones que inicialmente distan menos que δ no se separan más de 10^{-1} en todo el intervalo $[a, b]$.

Solución. (a) Es inmediato ver que f es una función continua. Comprobemos que satisface una condición de Lipschitz con respecto a su segunda variable. En efecto,

$$|f(x, y) - f(x, \hat{y})| = |c(x)||y - \hat{y}| \leq \max_{x \in [a, b]} |c(x)||y - \hat{y}|.$$

Podemos tomar, por tanto, $L = \max_{x \in [a, b]} |c(x)|$ (que es, por cierto, la mejor constante posible). La existencia de una única solución se sigue ahora inmediatamente del Teorema de Picard.

(b) Tenemos que probar que $y^{(k)} \in C([a, b])$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Lo haremos por inducción.

La solución del PVI verifica (por el hecho de ser solución) que $y \in C^1([a, b])$, luego el resultado es cierto para $k = 0, 1$.

Supongamos que el resultado es cierto para $j = 0, \dots, k$. Veamos que también es cierto para $k + 1$. Si derivamos la EDO k veces, usando la fórmula de Leibniz para la derivada k -ésima de un producto obtenemos

$$y^{(k+1)} = \sum_{j=0}^k c^{(j)} y^{(k-j)} + d^{(k)}.$$

De aquí se concluye inmediatamente, usando la hipótesis de inducción (completa) y la regularidad de c y d , que $y^{(k+1)} \in C([a, b])$.

(c) Se tiene que $L = \max_{x \in [a, b]} |c(x)| = \max_{x \in [a, b]} |\sin(\exp(\arctan x))| \leq 1$. Por consiguiente,

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \|y(a) - \hat{y}(a)\| e^{L(x-a)} \leq \delta e^{L(b-a)} = \delta e^3.$$

Así pues, si $\delta e^3 \leq 10^{-1}$, se tiene que $\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq 10^{-1}$ para todo $x \in [a, b]$, el resultado deseado. Basta por tanto con tomar $\delta = 10^{-1} e^{-3}$.

4. Sea f continua en $D = [a, b] \times \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - \eta\| \leq C\}$ y Lipschitz en D , con constante L , con respecto a su segunda variable. Sea $K > 0$ una constante tal que $\max_{(x, y) \in D} \|f(x, y)\| \leq K$. Si

$$C \geq \frac{K}{L} (e^{L(b-a)} - 1), \quad (\text{CEL})$$

probar que existe una única solución del problema de valor inicial PVI en $[a, b]$ tal que $\|y(x) - \eta\| \leq C$ en $[a, b]$.

Solución. La clave está en demostrar que $(x, y_k(x)) \in D$ para todo $x \in [a, b]$ y $k \in \mathbb{N}$. Este resultado es trivialmente cierto para $k = 0$. Supongámoslo cierto para $k - 1$. Entonces,

$$\|y_k(x) - \eta\| \leq \int_a^x \|f(s, y_{k-1}(s))\| ds \leq K(b-a).$$

Ahora bien, puesto que $e^x \geq 1 + x$, se tiene que

$$\frac{K}{L} (e^{L(b-a)} - 1) \geq K(b-a),$$

por lo que, usando la hipótesis sobre los parámetros involucrados en el problema, concluimos que

$$\|y_k(x) - \eta\| \leq C.$$

A partir de aquí sólo hay que repetir lo que ya se hizo en la teoría.

5. Consideramos el problema

$$y'(x) = y^2(x) \arctan y(x), \quad x \in [0, b], \quad y(0) = 1. \quad (1.6)$$

- (a) Aplicar el resultado del problema anterior para encontrar un valor $b > 0$ tal que el problema (1.6) tenga solución.
- (b) Sea $T = \sup\{b : (1.6) \text{ tiene solución}\}$. Probar que $\lim_{x \rightarrow T^-} y(x) = \infty$.
- (c) Demostrar que $T < \infty$. Este fenómeno se denomina *explosión*.

Solución. (a) Tomo $C = 1$. En este caso, usando que $||y| - 1| \leq |y - 1| \leq 1$ en D , y por tanto que $|y| \leq 2$ en esa región, tenemos que

$$K = \max_D |f| = \max_{(x,y) \in D} |y^2 \arctan y| \leq 2\pi.$$

En cuanto a la constante de Lipschitz L para la función del lado derecho, $f(y) = y^2 \arctan y$, observamos que $f'(y) = 2y \arctan y + \frac{y^2}{1+y^2}$. Por consiguiente, $|f'(y)| \leq \pi|y| + 1 \leq 2\pi + 1$. Así pues, podemos tomar $L = 2\pi + 1$, y tenemos que

$$\frac{K}{L} (e^{L(b-a)} - 1) \leq \frac{2\pi}{2\pi + 1} (e^{(2\pi+1)b} - 1).$$

El lado derecho es obviamente menor que $C=1$ para b pequeño, por ejemplo para $b = 0, 1$.

(b) Nótese en primer lugar que $y(x) \geq 1$ mientras existe. En efecto, inicialmente $y'(0) = \pi/4 > 0$, luego la solución está por encima de 1 en un pequeño intervalo a la derecha de $x = 0$. En el primer punto \bar{x} en

el que vuelva a tocar al 1 se debería tener $y'(\bar{x}) \leq 0$. Pero la ecuación dicta que $y'(\bar{x}) = \pi/4$ una contradicción.

Como corolario de lo anterior tenemos que $y'(x) \geq \pi/4$ mientras la solución existe. Por consiguiente, si la solución existe para todo $x \geq 0$, es decir, si $T = \infty$, entonces obviamente $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$.

Supongamos entonces que $T < \infty$ (por el apartado (a) sabemos que $T > 0$) y que $\lim_{x \rightarrow T^-} y(x) = M < \infty$. Como y es monótona, sabemos que, fijado $\varepsilon > 0$, $y(T - \varepsilon) = y_\varepsilon \in (1, M)$. Sea

$$D_{\varepsilon, M} = [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \times \{y \in \mathbb{R} : |y - y_\varepsilon| < M\}.$$

Es decir, estamos tomando $C = M$ en la condición (CEL) del problema anterior. Por otra parte,

$$K_{\varepsilon, M} = \max_{D_{\varepsilon, M}} |f| \leq 2\pi M^2,$$

puesto que $|y| < 2M$ en $D_{\varepsilon, M}$. Finalmente, de forma análoga a la del apartado anterior, obtenemos que podemos tomar $L = \pi 2M + 1$.

El resultado del problema anterior garantiza la existencia de una solución en $[T - \varepsilon, T + \varepsilon]$ con dato $y(T - \varepsilon) = y_\varepsilon$ si se cumple la condición (CEL), que en este caso es

$$M \geq \frac{2\pi M^2}{2\pi M + 1} (e^{(2\pi+1)2\varepsilon} - 1),$$

desigualdad que es obviamente cierta para todo ε suficientemente pequeño. Esto nos dice que podríamos haber prolongado la solución hasta $T + \varepsilon$, contradiciendo la definición de T .

(c) La ecuación es de variables separadas. Tenemos que

$$\int_1^{y(t)} \frac{dy}{y^2 \arctan y} = t.$$

Pasando al límite $t \rightarrow T^-$ se tiene

$$T = \int_1^\infty \frac{dy}{y^2 \arctan y} \leq \frac{4}{\pi} \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} = \frac{4}{\pi}.$$

6. Se considera el PVI

$$y'(x) = -y^2(x) + y(x) + 2y(x)x^2 - x^2 - x^4, \quad y(0) = 1/2.$$

(a) Demostrar que mientras la solución existe se verifica que

$$x^2 < y(x) < x^2 + 1.$$

(b) Utilizar el apartado anterior para demostrar que la solución existe para todo $x \geq 0$.

Solución. (a) Nuestro primer objetivo es ver que dos soluciones con valores iniciales distintos no se pueden tocar.

Veamos en primer lugar que la función del lado derecho satisface una condición de Lipschitz en el conjunto $[0, b] \times [-M, M]$. En efecto, en dicho conjunto

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, \hat{y})| &= |-(y + \hat{y})(y - \hat{y}) + (y - \hat{y}) + 2x^2(y - \hat{y})| \\ &\leq (2M + 1 + 2b^2)|y - \hat{y}|, \end{aligned}$$

y se tiene una constante de Lipschitz $L = (2M + 1 + 2b^2)$.

Sean ahora y e \hat{y} dos soluciones de la EDO en $[0, b]$. Nótese que están acotadas, $|y(x)|, |\hat{y}(x)| \leq M$, $x \in [0, b]$. Integrando la EDO en (x, b) , tenemos que

$$\begin{aligned} y(x) &= y(b) - \int_x^b f(s, y(s)) ds, \\ \hat{y}(x) &= \hat{y}(b) - \int_x^b f(s, \hat{y}(s)) ds. \end{aligned}$$

Restando y tomando normas, y usando que f es Lipschitz en su segunda variable (en el rango de valores de la variable y considerado), se tiene

que

$$\begin{aligned}
\|y(x) - \hat{y}(x)\| &\leq \|y(b) - \hat{y}(b)\| + L \int_x^b \|f(s, y(s)) - f(s, \hat{y}(s))\| ds \\
&\leq \underbrace{\|y(b) - \hat{y}(b)\| + L \int_x^b \|y(s) - \hat{y}(s)\| ds}_{g(x)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Dado que $g'(x) = -L\|y(x) - \hat{y}(x)\|$, llegamos a $g'(x) \geq -Lg(x)$. Multiplicando esta desigualdad por el factor integrante $\exp(Lx)$ se tiene que

$$\frac{d}{dx}(g(x) \exp(Lx)) \geq 0,$$

de donde $g(x) \leq g(b) \exp(L(b-x))$. Esto, combinado con (1), produce que

$$\|y(x) - \hat{y}(x)\| \leq \|y(b) - \hat{y}(b)\| e^{L(b-x)}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

De aquí se deduce inmediatamente el resultado deseado: si dos soluciones se tocan en algún momento, es que eran la misma desde el principio.

Con ayuda de este resultado es fácil probar las cotas a priori indicadas. Basta con comprobar que $\underline{y}(x) = x^2$ e $\bar{y}(x) = 1 + x^2$ son solución y que $\underline{y}(0) = 0 < 1/2 = \bar{y}(0) < 1 = \bar{y}(0)$.

(b) El primer paso es probar que existe un $b > 0$ tal que el PVI tiene solución en $[0, b]$. Esto se hace usando el problema 4, con argumentos similares a los que se usaron en el apartado (a) del problema 5.

A continuación definimos $T = \sup\{b : \text{el PVI tiene solución en } [0, b]\}$. Es fácil probar, con argumentos análogos a los del apartado (b) del problema 5, que si $T < \infty$ entonces $\limsup_{x \rightarrow T^-} |y(x)| = \infty$. Pero las cotas a priori que hemos obtenido en el apartado (a) garantizan que $y(x)$ es acotada en acotados. Por consiguiente T no puede ser finito.

7. El Teorema de Picard, además de la continuidad Lipschitz de $f = f(x, y)$ con respecto a y , tiene también como hipótesis la continuidad

de f con respecto a sus dos variables. Demuéstrese mediante un contraejemplo que no se puede eliminar esta segunda hipótesis.

Solución. Consideramos el problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y(x))$, $x \in [0, 2]$, con lado derecho

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

y valor inicial $y(0) = 0$. La ecuación impone que $y(x) = c$ para $x \in [0, 1]$, $y(x) = x + d$ para $x \in [1, 2]$. La condición inicial dicta que $c = 0$, y la continuidad de y que $d = -1$. La función resultante,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

no es, desafortunadamente, solución del PVI, ya que ni siquiera es derivable en $x = 1$.

Sección 2.1

1. Utilizar los iterantes de Picard para construir una aproximación numérica de la solución del problema de valor inicial

$$y'' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (2.2)$$

Solución. Lo primero que hacemos es escribir el problema como un PVI para una EDO de primer orden en forma estándar. Para ello definimos $y^1 = y$, $y^2 = y'$, y se tiene que

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}' = f(x, y^1, y^2) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -y^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}(0) = \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al aplicar el método de Euler a este problema obtenemos

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ y_1(x) &= \eta + \int_0^x f(s, y_0^1(s), y_0^2(s)) ds = \eta + \int_0^x \begin{pmatrix} y_0^2(s) \\ -y_0^1(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \\ y_2(x) &= \eta + \int_0^x f(s, y_1^1(s), y_1^2(s)) ds = \eta + \int_0^x \begin{pmatrix} y_1^2(s) \\ -y_1^1(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Iterando el argumento llegamos a

$$y_{2n}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}, \quad y_{2n+1}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}.$$

Pasando al límite (que es uniforme sobre compactos) obtenemos que

$$y(x) = y^1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x,$$

$$y'(x) = y^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x,$$

que es, efectivamente, la solución de nuestro problema.

2. Si $f \in C^p([a, b] \times \mathbb{R}^d)$, podemos encontrar una solución aproximada del problema de valor inicial (PVI) utilizando la fórmula de Taylor de orden p alrededor de $x = a$, $y(x) \approx \sum_{j=0}^p y^{(j)}(a) \frac{(x-a)^j}{j!}$. Los valores de las derivadas $y^{(j)}(a)$ se pueden calcular derivando la EDO y usando la condición inicial. Utilizar este procedimiento para aproximar la solución del problema

$$y'(x) = -y^2(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad y(0) = 1,$$

por un polinomio de orden p y estimar el error cometido.

Solución. Usando la EDO y la condición inicial obtenemos

$$\begin{aligned} y'(x) &= -y^2(x), & y'(0) &= -1!, \\ y''(x) &= -2y(x)y'(x), & y''(0) &= 2!, \\ y'''(x) &= -2y(x)y''(x) - 2(y'(x))^2, & y'''(0) &= -3!, \\ y^{(4)}(x) &= -2y(x)y'''(x) - 6y'(x)y''(x), & y^{(4)}(0) &= 4!, \\ y^{(5)}(x) &= -2y(x)y^{(4)}(x) - 8y'(x)y'''(x) - 6(y''(x))^2, & y^{(5)}(0) &= -5!. \end{aligned}$$

Si continuamos derivando, observaremos que $y^{(k)}(0) = (-1)^k k!$ ¹. Por consiguiente, este método dice, acertadamente, que la solución viene

¹Ejercicio: demostrarlo por inducción. *Sugerencia.* Usar la fórmula de Leibniz para la derivación de un producto.

dada por

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}.$$

El error cometido al aproximar por $y_p(x) = \sum_{k=0}^p (-x)^k$ es

$$\text{error} = \left| \frac{1}{1+x} - y_p(x) \right| = \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} (-x)^k \right| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |x|^k \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p}.$$

3. *Método de las series de potencias*². Si la solución y de una EDO se puede escribir como una serie de potencias, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se puede intentar usar la ecuación para obtener cada valor a_n a partir de los anteriores, a_0, \dots, a_{n-1} . Los primeros valores, necesarios para arrancar el procedimiento, se extraen de las condiciones iniciales. Usar este método para resolver el problema (2.2).

Solución. Supongamos que la solución se puede escribir como $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Si se pudiera derivar término a término dos veces, entonces

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n.$$

Usando la ecuación tenemos que

$$0 = y''(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n) x^n,$$

de donde se obtiene la recurrencia

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0.$$

²Este método, introducido por Newton en su “Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum” (1671), es el primero que se usó para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ahora es fácil ver que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!}, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!}.$$

De aquí deducimos que

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= a_0 \cos x + a_1 \sin x. \end{aligned}$$

Si ahora imponemos las condiciones iniciales obtenemos

$$0 = y(0) = a_0, \quad 1 = y'(0) = a_1.$$

Concluimos por tanto que la solución es $y(x) = \sin x$.

4. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia³, definidas todas ellas para $n \geq 0$:

- (a) $y_{n+1} - y_n = 2n + 3$, $y_0 = 1$;
- (b) $y_{n+1} - y_n = 3n^2 - n$, $y_0 = 3$;
- (c) $y_{n+1} - 2y_n = 5$, $y_0 = 1$;
- (d) $y_{n+1} - 2y_n = 2^n$, $y_0 = 1$;
- (e) $y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 3^n$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$;
- (f) $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = 7$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$;
- (g) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

³Para repasar todo lo que tiene que ver con este tema recomiendo leer el capítulo 8 del libro “Diez lecciones de cálculo numérico”, J. M. Sanz-Serna, Universidad de Valladolid. Secretariado de publicaciones e intercambio científico, 2010 (segunda edición).

Solución. En todos los casos se trata de una recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes. La solución general vendrá dada como la solución general de la recurrencia homogénea asociada, más una solución particular de la recurrencia completa.

(a) La recurrencia homogénea asociada, $y_{n+1} - y_n = 0$, tiene como polinomio característico $\lambda - 1$, cuya raíz es $\lambda = 1$. Las soluciones de la homogénea son por lo tanto las constantes. En cuanto a la solución particular de la recurrencia completa, intentamos una solución de la forma $y_n^p = n^2 + bn$ (no tiene sentido añadir un término de orden 0, ya que las constantes son soluciones de la ecuación homogénea). Imponiendo que sea solución obtenemos que

$$2n + 3 = y_{n+1}^p - y_n^p = (n+1)^2 + b(n+1) - (n^2 + bn) = 2n + (1+b),$$

y por tanto $b = 2$. Así pues, la solución general de la recurrencia completa es

$$y_n = c + n^2 + 2n.$$

La constante c se determina ahora usando el valor de arranque, $1 = y_0 = c$. En resumen, la solución pedida es

$$y_n = 1 + n^2 + 2n = (n+1)^2.$$

(b) La recurrencia homogénea asociada es la misma que la del apartado (a), y sus soluciones son las constantes. Para la solución particular de la recurrencia completa ensayamos $y_n^p = n^3 + an^2 + bn$. Si es solución,

$$\begin{aligned} 3n^2 - n &= y_{n+1}^p - y_n^p \\ &= (n+1)^3 + a(n+1)^2 + b(n+1) - (n^3 + an^2 + bn) \\ &= 3n^2 + (3+2a)n + (1+a+b), \end{aligned}$$

y por tanto $3+2a = 1$ y $1+a+b = 0$. Por consiguiente, $a = -1$ y $b = 0$, y la solución general de la recurrencia completa es

$$y_n = c + n^3 - n^2.$$

Para determinar la constante c usamos el valor de arranque, $3 = y_0 = c$. En resumen, la solución pedida es

$$y_n = 3 + n^3 - n^2.$$

(c) En este caso el polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada, $\lambda - 2$, tiene raíz $\lambda = 2$. La solución general de la homogénea es por tanto $c \cdot 2^n$. En cuanto a la solución particular de la recurrencia completa, intentamos $y_n^p = C$. Se tiene que

$$5 = y_{n+1}^p - 2y_n^p = C - 2C = -C.$$

Concluimos que la solución general de la recurrencia completa es $y_n = c \cdot 2^n - 5$. Usando ahora el valor de arranque, $1 = y_0 = c - 5$, llegamos finalmente a la solución pedida,

$$y_n = 6 \cdot 2^n - 5.$$

(d) La recurrencia homogénea asociada es la misma que la del apartado (c). En cuanto a la solución particular de la recurrencia completa, ensayamos $y_n^p = Cn2^n$ (nótese que 2^n es solución de la ecuación homogénea). Se tiene que

$$2^n = y_{n+1}^p - 2y_n^p = C(n+1)2^{n+1} - 2Cn2^n = 2C2^n,$$

de donde $C = 1/2$. La solución general de la recurrencia completa es entonces $y_n = c \cdot 2^n + n2^{n-1}$. Usando el dato inicial, $1 = y_0 = c$, obtenemos finalmente que la solución pedida es

$$y_n = 2^n + n2^{n-1}.$$

(e) El polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada es $\lambda^2 + 3\lambda + 2$, cuyas raíces son -1 y -2 . La solución general de la homogénea es por tanto $a(-1)^n + b(-2)^n$. En cuanto a una solución particular de la completa, ensayamos $y_n^p = C3^n$. Imponiendo que sea solución,

$$3^n = y_{n+2}^p + 3y_{n+1}^p + 2y_n^p = C3^n(9 + 9 + 2),$$

de donde $C = 1/20$. La solución general de la recurrencia completa es entonces

$$y_n = a(-1)^n + b(-2)^n + \frac{3^n}{20}.$$

Usando los valores de arranque,

$$0 = y_0 = a + b + \frac{1}{20}, \quad 1 = y_1 = -a - 2b + \frac{3}{20},$$

concluimos que $a = 3/4$, $b = -4/5$.

(f) El polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada es $\lambda^2 + 4\lambda + 4$, cuya única raíz (doble) es -4 . La solución general de la homogénea es por tanto $(-4)^n(a + bn)$. Como solución particular de la completa ensayamos $y_n^p = C$. Imponiendo que sea solución,

$$7 = y_{n+2}^p + 4y_{n+1}^p + 4y_n^p = 9C,$$

y por tanto $C = 7/9$. La solución general de la recurrencia completa es entonces

$$y_n = (-4)^n(a + bn) + \frac{7}{9}.$$

Usando los valores de arranque,

$$1 = y_0 = a + \frac{7}{9}, \quad 2 = y_1 = -4(a + b) + \frac{7}{9},$$

concluimos que $a = 2/9$, $b = -13/18$.

(g) El polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada es $\lambda^2 - 6\lambda + 9$, cuya única raíz (doble) es 3 . La solución general de la homogénea es por tanto $3^n(a + bn)$. Como solución particular de la completa ensayamos $y_n^p = c2^n + dn^23^n$ (nótese que 3^n y $n3^n$ son soluciones de la recurrencia homogénea asociada). Imponiendo que sea solución,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n &= y_{n+2}^p - 6y_{n+1}^p + 9y_n^p \\ &= c2^{n+2} - 6c2^{n+1} + 9c2^n + d3^{n+2} - 6d3^{n+1} + 9d3^n \\ &= c2^n(4 - 12 + 9) + d3^n(9(n+2)^2 - 18(n+1)^2 + 9n^2) \\ &= c2^n + 18d3^n, \end{aligned}$$

de donde $c = 3$, $d = 7/18$. La solución general de la recurrencia completa es entonces

$$y_n = 3^n(a + bn + \frac{7}{18}n^2) + 3 \cdot 2^n.$$

Usando los valores de arranque,

$$1 = y_0 = a + 3, \quad 4 = y_1 = 3\left(a + b + \frac{7}{18}\right) + 6,$$

concluimos que $a = -2$, $b = 17/18$.

5. El número a_n de euros de activo de una compañía se incrementa cada año cinco veces lo que se incrementó el año anterior. Si $a_0 = 3$ y $a_1 = 7$, calcular a_n .
-

Solución. De acuerdo con el enunciado, se tiene que

$$a_{n+1} - a_n = 5(a_n - a_{n-1}),$$

es decir, a_n es solución de la recurrencia lineal, homogénea, con coeficientes constantes

$$a_{n+1} - 6a_n + 5a_{n-1} = 0.$$

El polinomio característico de la recurrencia es $\lambda^2 - 6\lambda + 5$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Por consiguiente, la solución general de la recurrencia es $a_n = a \cdot 5^n + b$. Para determinar las constantes usamos los valores de arranque que nos han proporcionado, gracias a los cuales obtenemos que

$$3 = a_0 = a + b, \quad 7 = a_1 = 5a + b.$$

Por lo tanto, $a = 1$ y $b = 2$, y llegamos finalmente a la fórmula

$$a_n = 5^n + 2.$$

Sección 2.2

-
1. Aplicamos el método de Euler con paso fijo $h = 1/N$ al PVI $y' = y$ en $[0, 1]$, $y(0) = 1$. Como valor de arranque tomamos $y_0 = 1$. Calcular la solución numérica, $\{y_n\}_{n=0}^N$ y demostrar que existe una constante C tal que $|y(x_n) - y_n| \leq Ch$.
-

Solución. La solución del problema es $y(x) = e^x$, y la solución numérica $y_n = (1 + h)^n$. Para estimar la diferencia en los puntos de la malla usaremos los desarrollos de Taylor

$$\begin{aligned}\log(1 + h) &= h - \frac{h^2}{2(1 + \xi)^2}, & 0 < \xi < h \leq 1, \\ e^{-x} &= 1 - e^{-\eta}x, & 0 < \eta < x.\end{aligned}$$

Se tiene que

$$|y(x_n) - y_n| = |e^{nh} - e^{n \log(1+h)}| = e^{nh} \left| 1 - e^{-\frac{nh^2}{2(1+\xi)^2}} \right| = e^{nh} e^{-\eta} \frac{nh^2}{2(1+\xi)^2}.$$

Dado que $nh \leq Nh = 1$, concluimos que $|y(x_n) - y_n| \leq eh/2$.

2. Consideramos el PVI $y'' + y = 0$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Escribirlo como un problema de primer orden, y aplicarle entonces el método de Euler con paso fijo $h = 1/N$, suponiendo que no se comete ningún error en los valores de arranque. Demostrar que el máximo error cometido, $\max_{n=0, \dots, N} |y(x_n) - y_n|$, es menor o igual que Ch para alguna constante C .
-

Solución. Sea $u = (u^1, u^2)^T$, con $u^1 = y$, $u^2 = y'$. Se tiene que u es solución del PVI

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_A u, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución por el método de Euler satisface la recurrencia $u_{n+1} = (I+hA)u_n$, cuya solución es $u_n = (I+hA)^n u_0$. Para calcular la potencia n -ésima de $I+hA$ conviene diagonalizar esta matriz. Un sencillo cálculo muestra que los autovalores son $\lambda_{\pm} = 1 \pm ih$, con autovectores asociados $v_{\pm} = (1, \pm i)^T$. Por consiguiente,

$$I + hA = P \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Así pues,

$$u_n = P \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} P^{-1} u_0.$$

Tomando valores de arranque exactos, $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} u_n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+ih)^n & 0 \\ 0 & (1-ih)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(1+ih)^n + (1-ih)^n}{2} \\ i \frac{(1+ih)^n - (1-ih)^n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así,

$$y_n = u_n^1 = \frac{(1+ih)^n + (1-ih)^n}{2}.$$

En cuanto a la solución teórica, es fácil ver que $y(x) = \cos(x)$, y por tanto que $y(x_n) = \cos(nh) = (e^{inh} + e^{-inh})/2$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |y(x_n) - y_n| &= \left| \frac{e^{inh} + e^{-inh}}{2} - \frac{(1+ih)^n + (1-ih)^n}{2} \right| \\ &\leq \left| \frac{e^{inh} - e^{n \log(1+ih)}}{2} \right| + \left| \frac{e^{-inh} - e^{n \log(1-ih)}}{2} \right|. \end{aligned}$$

Llegados a este punto, usamos que

$$\log(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} z^j}{j} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1.$$

Así pues,

$$\log(1 \pm ih) = \pm ih + g_{\pm}(h), \quad g_{\pm}(h) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}(\pm ih)^j}{j} \text{ si } h < 1.$$

Nótese que

$$|g_{\pm}(h)| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{h^j}{j} \leq h^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_0^j}{j+2} = Ch^2 \text{ para todo } h \leq h_0 < 1.$$

Se tiene así que

$$\begin{aligned} |y(x_n) - y_n| &= \frac{|e^{inh}|}{2} |1 - e^{ng_+(h)}| + \frac{|e^{-inh}|}{2} |1 - e^{ng_-(h)}| \\ &= |1 - e^{ng_+(h)}| + |1 - e^{ng_-(h)}|. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta ahora que

$$e^z - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C},$$

tenemos que, para todo $h \leq h_0 < 1$,

$$\begin{aligned} |1 - e^{ng_{\pm}(h)}| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|ng_{\pm}(h)|^j}{j!} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|nCh^2|^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\hat{C}h|^j}{j!} \\ &\leq \hat{C}h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\hat{C}h_0|^j}{(j+1)!} = \tilde{C}h, \end{aligned}$$

llegando finalmente al resultado deseado,

$$|y(x_n) - y_n| \leq Ch \text{ para todo } h \leq h_0 < 1.$$

3. Consideramos el problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y(x))$, $x \in [a, b]$, $y(a) = \eta$.

- (a) Supongamos que existe un vector columna c tal que $c^T f(x, y) = 0$. Demostrar que la solución del problema satisface la *ley de conservación lineal* $c^T y(x) = c^T \eta$ para todo $x \in [a, b]$.

- (b) Demostrar que las soluciones obtenidas al aplicar el método de Euler a este PVI también satisfacen la misma ley de conservación lineal, $c^T y_n = c^T y_0$, $n = 0, \dots, N$.
-

Solución. (a) Usando la EDO se tiene que

$$\frac{d}{dx}(c^T y)(x) = c^T y'(x) = c^T f(x, y(x)) = 0.$$

Así pues, $c^T y(x) = c^T y(a) = c^T \eta$ para todo $x \in [a, b]$.

(b) Usando la recurrencia de Euler obtenemos que

$$c^T y_{n+1} = c^T y_n + hc^T f(x_n, y_n) = c^T y_n, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado.

Sección 2.3

1. Sea y la solución del problema (PVI) y sea y^I la función continua lineal a trozos que pasa por los puntos (x_n, y_n) , $n = 0, \dots, N$, donde $\{y_n\}$ es una solución numérica del problema. Una medida alternativa del error cometido viene dada por $\max_{a \leq x \leq b} \|y(x) - y^I(x)\|_\infty$. Hallar una cota para esta cantidad en términos de $\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\|$ y de h , suponiendo que $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^d)$.

Solución. Antes de empezar, conviene que repasemos la fórmula para el error de interpolación lineal con datos aproximados.

Supongamos que no conocemos $f(x_0)$ y $f(x_1)$ exactamente, sino sólo de forma aproximada, $f(x_0) = f_0 + \varepsilon_0$, $f(x_1) = f_1 + \varepsilon_1$. El error que se comete al aproximar $f(x)$ por la recta que interpola los datos aproximados f_0, f_1 , es

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= f(x) - \frac{(x_1 - x)f_0 + (x - x_0)f_1}{x_1 - x_0} \\ &= \underbrace{f(x) - \frac{(x_1 - x)f(x_0) + (x - x_0)f(x_1)}{x_1 - x_0}}_{E(x)} + \underbrace{\frac{(x_1 - x)\varepsilon_0 + (x - x_0)\varepsilon_1}{x_1 - x_0}}_{R(x)}. \end{aligned}$$

Si $x \in [x_0, x_1]$, el error de interpolación con datos exactos viene dado por

$$E(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_1].$$

En cuanto al “error de redondeo”,

$$R(x) = \frac{(x_1 - x)\varepsilon_0 + (x - x_0)\varepsilon_1}{x_1 - x_0},$$

se trata de una función lineal, que alcanza su máximo en $[x_0, x_1]$ en uno de los extremos. Por consiguiente,

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |R(x)| = \max\{|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|\}.$$

Utilizamos esto ahora para estimar el error en la resolución del PVI. Se tiene que

$$\begin{aligned} \max_{x \in [x_n, x_{n+1}]} \|y(x) - y^I(x)\|_\infty &\leq \max_{x \in [x_n, x_{n+1}]} |E(x)| + \max_{x \in [x_n, x_{n+1}]} |R(x)| = \\ &\leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [x_n, x_{n+1}]} \|y''(x)\| + \max\{\|y(x_n) - y_n\|, \|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\|\}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\max_{a \leq x \leq b} \|y(x) - y^I(x)\|_\infty \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a, b]} \|y''(x)\| + \max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\|.$$

2. Demostrar la fórmula (2.8).

Solución. La demostramos por inducción.

Para $n = 0$ la fórmula dice simplemente que $\|y(x_0) - y_0\| \leq \|y(x_0) - y_0\|$, lo que es trivialmente cierto.

Supongamos que la fórmula es cierta para n . Queremos ver que entonces también es cierta para $n + 1$. Para comprobarlo, partimos de la desigualdad ya demostrada

$$\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq (1 + Lh)\|y(x_n) - y_n\| + \max_{0 \leq n \leq N-1} \|R_n\|.$$

Dado que $1 + Lh \leq e^{Lh}$ y que $1 \leq e^{L(x_{n+1} - x_0)}$, se tiene entonces que

$$\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq e^{Lh}\|y(x_n) - y_n\| + e^{L(x_{n+1} - x_0)}h \max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{\|R_n\|}{h}.$$

Usando la hipótesis de inducción se tiene entonces que

$$\begin{aligned} &\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \\ &\leq e^{Lh + L(x_n - x_0)}\|y(x_0) - y_0\| + e^{L(x_{n+1} - x_0)}(h + x_n - x_0) \max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{\|R_n\|}{h} \\ &= e^{L(x_{n+1} - x_0)}\|y(x_0) - y_0\| + e^{L(x_{n+1} - x_0)}(x_{n+1} - x_0) \max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{\|R_n\|}{h}, \end{aligned}$$

es decir, se tiene la estimación para $n + 1$.

3. Demostrar que la convergencia del método de Euler, aplicado a un problema “de cuadratura”, $y'(x) = f(x)$, implica la convergencia de las sumas de Riemann $\sum_{n=0}^{N-1} hf(a + nh)$ cuando h tiende a cero al valor de la integral $\int_a^b f(x) dx$.
-

Solución. La función $A(x) = \int_a^x f(s) ds$ es solución del PVI de cuadratura $A'(x) = f(x)$, $A(a) = 0$. El método de Euler aplicado a este problema con malla $x_n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$, $h = (b - a)/N$, produce la recurrencia

$$A_{n+1} = A_n + hf(x_n), \quad n = 0, \dots, N, \quad A_0 = 0,$$

cuya solución es $A_n = h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$. Usando ahora la convergencia del método de Euler concluimos que la cantidad

$$\left| \int_a^b f(s) ds - h \sum_{j=0}^{N-1} f(a + jh) \right| = |A(x_N) - A_N|$$

tiende a 0 cuando h tiende a cero.

Sección 2.4

1. Consideramos la ecuación escalar $y' = \arctan y$. Encontrar una cota para y'' e y''' en el intervalo $[0, 1]$ sin hallar y explícitamente.
-

Solución. Derivando la ecuación obtenemos que $y'' = \frac{y'}{1+y^2}$. Así pues, $|y''| \leq |y'| \leq |\arctan y| \leq \pi/2$.

Para estimar y''' , derivamos nuevamente la ecuación. Se obtiene que

$$y''' = -\frac{2y(y')^2}{(1+y^2)^2} + \frac{y''}{1+y^2}.$$

Usamos ahora que $2|y| \leq 1 + y^2$ para llegar a

$$|y'''| = \frac{2|y|(y')^2}{(1+y^2)^2} + \frac{|y''|}{1+y^2} \leq \frac{(y')^2 + |y''|}{1+y^2} \leq (y')^2 + |y''| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}.$$

2. Demostrar las siguientes identidades:

- (a) $C \cdot O(h^k) = O(h^k)$ para cualquier constante C ;
 - (b) $O(h^k) \pm O(h^k) = O(h^k)$;
 - (c) $O(h^k) + O(h^m) = O(h^{\min(k,m)})$;
 - (d) $O(h^k) \cdot O(h^m) = O(h^{k+m})$;
 - (e) $\int_0^h O(t^k) dt = O(h^{k+1})$;
 - (f) $\frac{1}{1 + O(h^k)} = 1 + O(h^k)$.
-

Solución. (a) Se trata de ver que si $f(h) = O(h^k)$, entonces $Cf(h) = O(h^k)$. En efecto, por ser $f(h) = O(h^k)$, se tiene que existen constantes K y h_0 tales que $|f(h)| \leq Kh^k$ para todo $h < h_0$. Por consiguiente, $|Cf(h)| \leq CKh^k = \tilde{K}h^k$ para todo $h < h_0$, y por tanto $Cf(h) = O(h^k)$.

(b) Queremos ver que si $|f_1(h)| \leq C_1 h^k$ para todo $h < h_1$ y $|f_2(h)| \leq C_2 h^k$ para todo $h < h_2$, entonces existen constantes C y h_0 tales que $|(f_1 \pm f_2)(h)| \leq C h^k$ para todo $h < h_0$. Esto se demuestra trivialmente usando la desigualdad triangular y tomando $C = C_1 + C_2$ y $h_0 = \min\{h_1, h_2\}$.

(c) Podemos suponer que $h < 1$, lo que implica que $h^k, h^m \leq h^{\min(k,m)}$. Por consiguiente, si $|f_1(h)| \leq C_1 h^k$ para todo $h < h_1$ y $|f_2(h)| \leq C_2 h^m$ para todo $h < h_2$, se tiene que para todo $h < \min\{h_1, h_2, 1\}$ se verifica que

$$|(f_1 + f_2)(h)| \leq |f_1(h)| + |f_2(h)| \leq (C_1 + C_2) h^{\min(k,m)}.$$

(d) Nuevamente suponemos que $|f_1(h)| \leq C_1 h^k$ para todo $h < h_1$ y $|f_2(h)| \leq C_2 h^m$ para todo $h < h_2$. Se tiene entonces que

$$|(f_1 f_2)(h)| = |f_1(h)| \cdot |f_2(h)| \leq C_1 C_2 h^{k+m} \quad \text{para todo } h < \min\{h_1, h_2\}.$$

(e) Suponemos que $|f(h)| \leq C h^k$ para todo $h < h_0$. Por lo tanto

$$\left| \int_0^h f(t) dt \right| \leq \int_0^h |f(t)| dt \leq C \int_0^h t^k dt = C \frac{h^{k+1}}{k+1}.$$

(f) Suponemos una vez más que $|f(h)| \leq C h^k$ para todo $h < h_0$. Podemos suponer también que h_0 es tal que $C h_0^k \leq 1/2$, de tal forma que $|f(h)| \leq 1/2$ y $|1 + f(h)| \geq |1 - |f(h)|| \geq 1/2$. Ahora bien,

$$\frac{1}{1 + f(h)} = \frac{1 + f(h)}{1 + f(h)} - \frac{f(h)}{1 + f(h)},$$

y por otra parte

$$\left| \frac{f(h)}{1 + f(h)} \right| = \frac{|f(h)|}{|1 + f(h)|} \leq 2C h^k,$$

con lo que se tiene el resultado deseado.

3. Sean $g_1(h) = 1 - h^2 + O(h^4)$ y $g_2(h) = 3 + h + O(h^2)$. Encontrar el mayor entero k tal que $g_1(h)g_2(h) = 3 + O(h^k)$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} g_1(h)g_2(h) &= (1 - h^2)(3 + h) + (1 - h^2)O(h^2) + O(h^4)(3 + h) + O(h^4)O(h^2) \\ &= 3 + h - 3h^2 - h^3 + O(h^2) = 3 + h + O(h^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_1(h)g_2(h) - 3 = O(h)$, pero no es cierto que $g_1(h) \cdot g_2(h) - 3 = O(h^k)$ para ningún k entero mayor que 1.

4. Calcular la solución teórica del problema de valor inicial

$$y'(x) = \min(y(x), 2), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = 1,$$

y aproximarla mediante el método de Euler. Comprobar que la solución numérica converge a la teórica. ¿Es la convergencia de orden 1?

Solución. Se ve fácilmente que la solución teórica es

$$y(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq \log 2, \\ 2(x - \log 2) + 2, & \log 2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

En cuanto a la solución numérica, está dada por

$$y_n = \begin{cases} (1 + h)^n, & 0 \leq n \leq \bar{n}, \\ (1 + h)^{\bar{n}} + (n - \bar{n})2h, & \bar{n} \leq n \leq N, \end{cases}$$

siendo \bar{n} el primer valor de n para el cual $(1 + h)^n \geq 2$, es decir

$$\bar{n} = \left\lceil \frac{\log 2}{\log(1 + h)} \right\rceil.$$

A continuación se muestra un diagrama de eficiencia para las soluciones
n

El lado derecho de la ecuación, $f(x, y) = \max\{y, 2\}$, es continuo y Lipschitz con respecto a y . Por tanto sabemos que las soluciones numéricas convergen a la teórica. Sin embargo, f no es C^1 , por lo que no tenemos garantizado que la convergencia sea de orden 1. Sin embargo, veremos que sí tiene este orden.

Si $n < \bar{n}$ y $x_n \leq \log 2$, la acotación deseada es consecuencia de la convergencia de orden 1 del método de Euler para el problema $y' = y$, $y(0) = 1$.

Para tratar los casos restantes observamos en primer lugar que

$$\begin{aligned}\bar{n}h &= \log 2 \frac{h}{\log(1+h)} + h \left(\left\lceil \frac{\log 2}{\log(1+h)} \right\rceil - \frac{\log 2}{\log(1+h)} \right) \\ &= \log 2 + g(h),\end{aligned}$$

con $0 < g(h) \leq Ch$ para una cierta constante $C > 0$. Esto es consecuencia directa de los desarrollos de Taylor de $\log(1+h)$ hasta segundo orden y de $1/(1-x)$ hasta primer orden.

Para $n \geq \bar{n}$, se tiene que $x_n = nh \geq \bar{n}h > \log 2$, y por tanto

$$\begin{aligned}y(x_n) - y_n &= 2(x_n - \log 2) + 2 - (1+h)^{\bar{n}} - (n - \bar{n})2h \\ &= -2\log 2 + 2 - (1+h)^{\bar{n}} + \bar{n}2h.\end{aligned}$$

Usando ahora que $\bar{n}h = \log 2 + O(h)$, y el desarrollo de $\log(1+h)$, se tiene que

$$\begin{aligned}(1+h)^{\bar{n}} &= e^{\bar{n}\log(1+h)} = e^{\bar{n}h + \bar{n}O(h^2)} = e^{\log 2 + O(h)} \\ &= 2e^{O(h)} = 2(1 + O(h)) = 2 + O(h).\end{aligned}$$

Concluimos que $y(x_n) - y_n = O(h)$ también en este caso.

Nos queda comprobar aquellos casos en que $n < \bar{n}$ y $x_n > \log 2$. En esta situación,

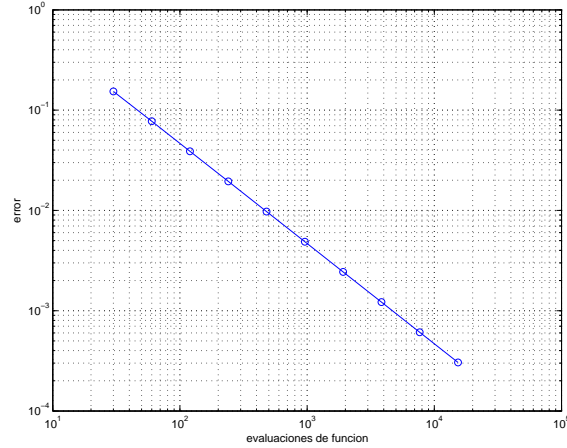
$$y(x_n) - y_n = 2(x_n - \log 2) + 2 - (1+h)^n.$$

Por otra parte,

$$\log 2 < x_n = nh < \bar{n}h = \log 2 + O(h),$$

lo que demuestra que $x_n = \log 2 + O(h)$. Razonando como en el caso anterior, se tiene que $(1+h)^n = 2 + O(h)$, y obtenemos finalmente que también en este caso $y(x_n) - y_n = O(h)$.

Podemos ilustrar este resultado con el siguiente diagrama de eficiencia para el método de Euler aplicado a este problema.



Se ve claramente que el orden empírico es, como debe, 1.

-
5. Consideramos el problema de valor inicial $y'(x) = x(\sin y(x))^2$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 1$. Si se resuelve por el método de Euler con $y_0 = 1$, ¿qué valor de h habrá que tomar para garantizar un error menor que 10^{-3} ?
-

Solución. La fórmula para el error en el método de Euler (2.9) nos dice en este caso que

$$|y(x_n) - y_n| \leq e^L C h, \quad C = \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} |y''(x)|,$$

siendo L una constante de Lipschitz para $f(x, y) = x(\sin y)^2$ respecto de la variable y .

Comenzamos obteniendo una cota para la constante C . Por un lado tenemos que $|y'(x)| \leq |x| \leq 1$ para $x \in [0, 1]$. Por otra parte, derivando la ecuación obtenemos que

$$y''(x) = (\sin y(x))^2 + 2x \sin y(x) \cos y(x) y'(x).$$

Por consiguiente, $|y''(x)| \leq 1 + 2|x| |y'(x)| \leq 3$ para $x \in [0, 1]$.

Pasamos ahora al cálculo de L . Por el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, \hat{y})| &= |x| |(\sin y)^2 - (\sin \hat{y})^2| \\ &= 2|x| |\sin \xi| |\cos \xi| |y - \hat{y}| \leq 2|y - \hat{y}|. \end{aligned}$$

Podemos tomar por tanto $L = 2$.

Juntando todo tenemos que

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{e^2 3}{2} h.$$

Para garantizar un error menor que 10^{-3} basta por tanto con tomar

$$h \leq \frac{2 \cdot 10^{-3}}{3e^2}.$$

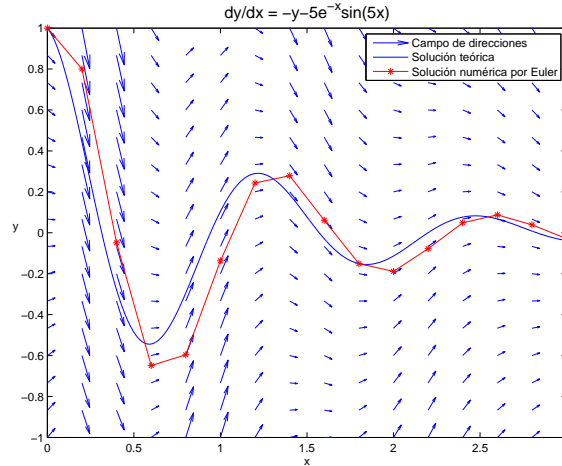
Sección 2.5

1. La ecuación de (2.8) da para cada punto (x, y) la derivada de la solución que pasa por ese punto. Define de esta forma un *campo de pendientes*. Las soluciones tienen que ser tangentes en cada punto a este campo. Podemos representar el campo de pendientes dibujando en cada punto (x, y) una flecha cuya pendiente sea $f(x, y)$.
 - (a) Usar la función **quiver** de Matlab para dibujar el campo de pendientes de la ecuación que aparece en (2.8).
 - (b) Superponer en el dibujo anterior la verdadera solución.
 - (c) Superponer también la solución numérica obtenida con el método de Euler y longitud de paso $h = 0,5$, uniendo los puntos obtenidos por medio de líneas rectas.

Solución. El siguiente programa hace las tres cosas solicitadas.

```
1  function problema2_5_1
2
3  n = 16;
4  xpts = linspace(0,3,n); ypts = linspace(-1,1,n);
5  [x,y] = meshgrid(xpts,ypts);
6  px = ones(size(y)); py = -y - 5*exp(-x).*sin(5*x);
7  quiver(x,y,px,py);
8  title('dy/dx = -y-5e^{-x}sin(5x)', 'FontSize', 14)
9  xlabel('x'), ylabel('y', 'Rotation', 0)
10 xlim([0 3]), ylim([-1 1]) % Ajuste de los limites de los ejes
11
12 hold on
13
14 x=linspace(0,3,3001);
15 plot(x,solee(x), 'b')
16
17 x=linspace(0,3,16);
18 y=euler(@ejescalar,x,1);
19 plot(x,y, 'r*-')
20
21 legend('Campo de direcciones','Solucion teorica','Solucion numerica por
      Euler')
22
23 hold off
24
25 function sol = solee(x)
26
27 sol = exp(-x).*cos(5*x);
```

El resultado de su ejecución se muestra en la siguiente figura.



2. La ecuación del péndulo simple, $\theta'' + \sin \theta = 0$, se puede escribir como un sistema de primer orden,

$$(y^1)' = y^2, \quad (y^2)' = -\sin(y^1),$$

para las variables $y^1 = \theta$, $y^2 = \theta'$.

- Utilizar el método de Euler con longitud de paso $h = 0,005$ para aproximar numéricamente en el intervalo $[0, 10]$ a las soluciones con datos iniciales $(1, 1)^T$, $(-5, 2)^T$ y $(5, -2)^T$.
- Dibujar en el plano y^1 - y^2 las curvas correspondientes a las soluciones calculadas en el apartado anterior, y superponer el campo de vectores asociado a la EDO. Obtendremos de esta forma un esbozo del *plano de fases* asociado a la EDO.
- Demostrar que las soluciones de la ecuación del péndulo conservan la energía: la cantidad $E(t) = \frac{1}{2} (y^2(t))^2 - \cos y^1(t)$ es constante para todo t .
- Comprobar que la energía sólo se conserva de forma aproximada para las soluciones numéricas obtenidas por medio del método de Euler.

Solución. (c) Si calculamos la derivada de la energía obtenemos

$$\frac{dE}{dt}(t) = y^2(t)(y^2)'(t) + \sin(y^1(t))(y^1)'(t).$$

Usando la EDO tenemos entonces que

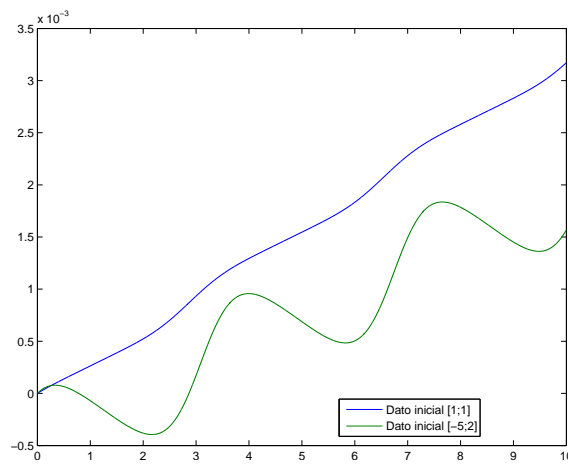
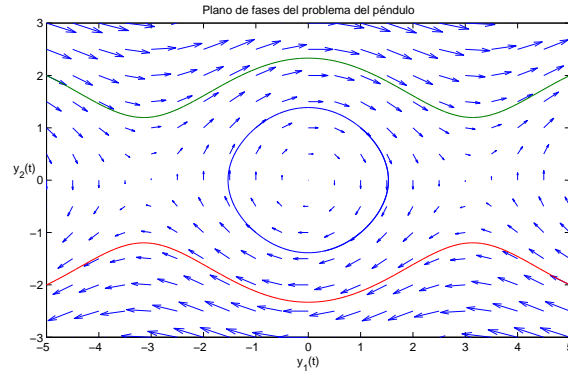
$$\frac{dE}{dt}(t) = -y^2(t) \sin(y^1(t)) + \sin(y^1(t))y^2(t) = 0,$$

es decir, la energía se conserva.

El siguiente programa hace las cosas solicitadas en los apartados (a), (b) y (d). En particular se calcula la diferencia de la energía con la energía inicial en los tiempos de la malla numérica. Sólo se hace el cálculo para las curvas solución correspondientes a los datos iniciales $(1, 1)^T$ y $(-5, 2)^T$. La solución yc con dato $(5, -2)$ es simplemente $-yb$, donde yb es la solución con dato inicial $(-5, 2)^T$, y tiene por tanto la misma energía para cada tiempo que yb .

```
1  function problema2_5_2
2
3  figure(1)
4
5  [y1,y2] = meshgrid(-5:.5:5,-3:.5:3);
6  Dy1Dt = y2; Dy2Dt = -sin(y1);
7  quiver(y1,y2,Dy1Dt,Dy2Dt), hold on
8
9  t = 0:.0005:10;
10 ya0 = [1; 1]; yb0 = [-5; 2]; yc0 = [5; -2];
11 ya = euler(@pend,t,ya0);
12 yb = euler(@pend,t,yb0);
13 yc = euler(@pend,t,yc0);
14 plot(ya(1,:),ya(2,:),yb(1,:),yb(2,:),yc(1,:),yc(2,:))
15 axis equal, axis([-5 5 -3 3])
16 title('Plano de fases del problema del pendulo')
17 xlabel y_1(t), ylabel('y_2(t)', 'Rotation',0), hold off
18
19 figure(2)
20 title('Evolucion de la energia')
21 Ea=ya(2,:).^2/2-cos(ya(1,:));
22 Eb=yb(2,:).^2/2-cos(yb(1,:));
23 plot(t,Ea-Ea(1),t,Eb-Eb(1))
24 legend('Dato inicial [1;1]', 'Dato inicial [-5;2]', 'Location', 'Best')
25 hold off
26
27 function yprima = pend(t,y)
28 %PEND Pendulo simple
29
30 yprima = [y(2); -sin(y(1))];
```

El resultado de su ejecución se muestra en la siguientes figuras.



-
3. La función error, $\text{erf}(x)$, se define usualmente por medio de una integral,

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx,$$

pero también se puede definir como la solución de la ecuación diferencial

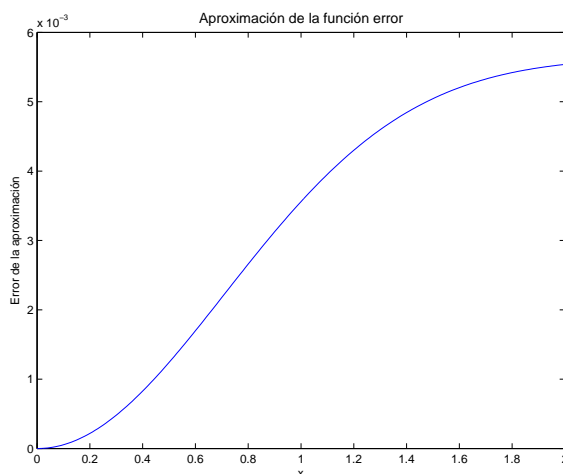
$$y'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad y(0) = 0.$$

Usar el método de Euler con longitud de paso $h = 0,01$ para resolver esta ecuación diferencial en el intervalo $[0, 2]$. Comparar los resultados con los valores proporcionados por la función de Matlab **erf**.

Solución. La diferencia entre la el valor de la función error calculado mediante el método de Euler y el valor proporcionado por Matlab para cada uno de los nodos de la malla se calcula por medio del siguiente programa.

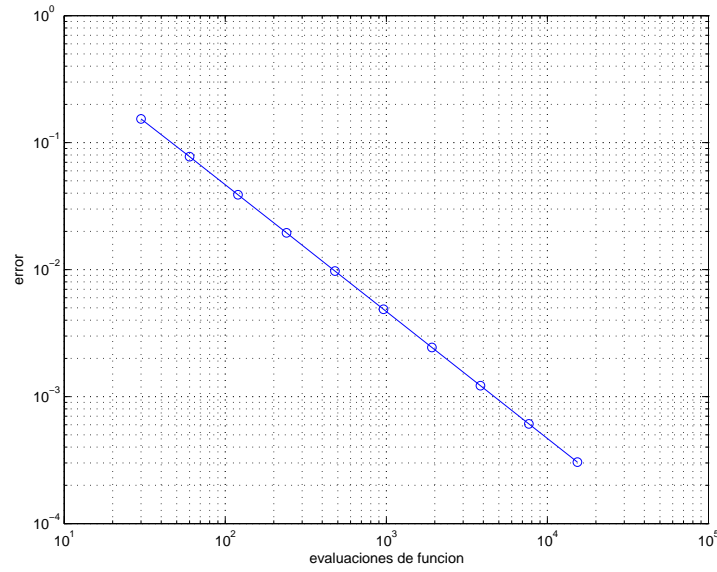
```
1  function problema2_5_3
2
3  x=linspace(0,2,201);
4  y=euler(@funcionerror,x,0);
5  plot(x,y-erf(x))
6  title('Aproximacion de la funcion error','FontSize',12)
7  xlabel('x'), ylabel('Error de la aproximacion')
8
9  function yprima=funcionerror(x,y)
10
11  yprima=2*exp(-x^2)/sqrt(pi);
```

El resultado de su ejecución se muestra en la siguiente figura.



4. Estimar, a partir del diagrama de eficiencia de la figura 2.2, qué longitud de paso hay que tomar para conseguir que el máximo error cometido al aplicar el método de Euler al problema (2.8) sea 0,002. Comprobar que la cota (2.7) sobreestima el error para esta longitud de paso en varios órdenes de magnitud.

Solución. Mirando el diagrama de eficiencia vemos que el error 0,002 corresponde a unas 2400 evaluaciones de función. Por tanto, $h \approx 0,00125$.



El problema tiene constante de Lipschitz $L = 1$ (óptima) con respecto a y . En cuanto a la constante C , podemos calcularla exactamente, dado que conocemos $y(x) = e^{-x} \cos 5x$. En efecto, $y''(x) = e^{-x}(10 \sin 5x - 24 \cos 5x)$. Un sencillo cálculo muestra que y'' tiene un único punto crítico en $x = -\frac{1}{5} \arctan(37/70) < 0$, que está fuera del intervalo $[0, 3]$. Por consiguiente, $|y''(x)|$ alcanza su máximo en uno de los extremos del intervalo, y se obtiene inmediatamente que $\max_{x \in [0, 3]} |y''(x)| = |y''(0)| = 24$. Así, $C = 12$, y la cota (2.9) dice que

$$|y(x_n) - y_n| \leq e^3 3 \cdot 12 \cdot 0,00125 \approx 0,9,$$

una sobreestimación del error en un factor aproximadamente 450.

-
5. Consideramos un método de orden p que, para funciones f suficientemente regulares, admite un desarrollo asintótico para el error global,

$$y(x_n) - y_n = d(x_n)h^p + O(h^{p+1}), \quad d \in C^2([a, b]).$$

Lo aplicamos a un problema con dos longitudes de paso distintas, h y h' . Demostrar que

$$p \approx \frac{\log(\text{error}(h)) - \log(\text{error}(h'))}{\log h - \log h'}.$$

Esto da una forma de determinar empíricamente el orden de un método. Como aplicación, determinar el orden empírico de un método que aplicado con longitudes de paso $h = 0,001$ y $h = 0,003$ produce errores $1,011 \cdot 10^{-8}$ y $2,699 \cdot 10^{-7}$ respectivamente.

Solución. Si $h \approx 0$, se tiene que

$$\text{error}(h) = \max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\| \approx \max_{0 \leq n \leq N} \|d(x_n)\| h^p \approx \max_{x \in [a, b]} \|d(x)\| h^p.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\text{error}(h)}{\text{error}(h')} \approx \frac{h^p}{(h')^p}.$$

Tomando logaritmos,

$$\log(\text{error}(h)) - \log(\text{error}(h')) \approx p(\log h - \log h'),$$

de donde se deduce inmediatamente la fórmula para el orden empírico.

Para el ejemplo que se nos da,

$$p \approx \frac{\log(1,011 \cdot 10^{-8}) - \log(2,699 \cdot 10^{-7})}{\log 0,001 - \log 0,003} \approx 3.$$

6. Elaborar un diagrama de eficiencia para el método de Euler aplicado al PVI

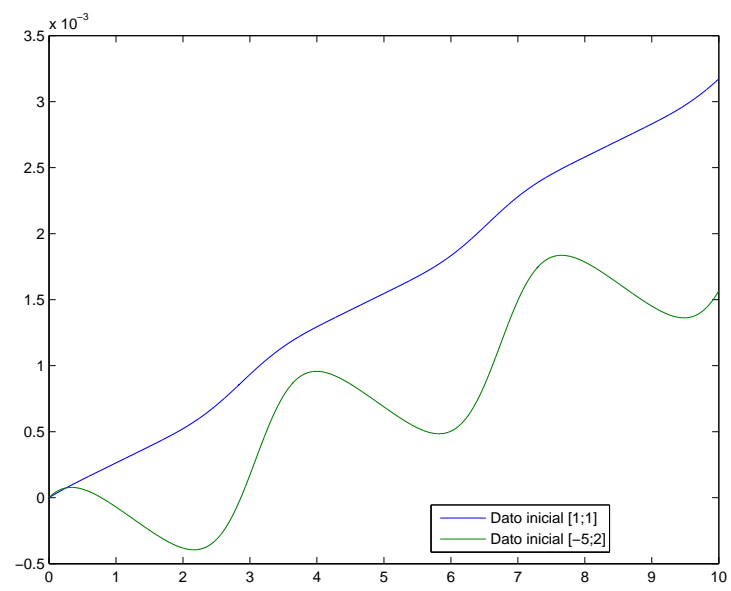
$$y'(x) = -\frac{xy(x)}{1-x^2}, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1,$$

cuya solución exacta es $y(x) = \sqrt{1-x^2}$. ¿Qué orden empírico se observa?

Solución. El diagrama de eficiencia se puede elaborar por medio del siguiente programa de Matlab.

```
1  function problema2.5.6
2
3  % Diagramas de eficiencia para Euler aplicado al ejemplo escalar
4
5  eeuler=[];
6  feuler=[];
7
8  N=20;
9  for i=1:12
10     x=linspace(0,1,N+1);
11     y=euler(@ldproblema2.5.6,x,1);
12     eeuler=[eeuler,max(abs(solproblema2.5.6(x)-y))];
13     feuler=[feuler,N];
14     N=2*N;
15 end
16 figure(1)
17 loglog(feuler,eeuler,'-o')
18 grid
19 xlabel('evaluaciones de funcion'), ylabel('error')
20
21 function yprima=ldproblema2.5.6(x,y)
22
23 yprima=-x*y/(1-x^2);
24
25 function sol = solproblema2.5.6(x)
26
27 sol=sqrt(1-x.^2);
```

El resultado de la ejecución del programa se representa a continuación. Se observa un orden empírico $1/2$. No hay contradicción con la teoría, pues el lado derecho no es $C^1([0, 1])$. ¡Incluso es singular!



Sección 3.1

1. Construir el método de Taylor de orden 3 para $d = 1$ y comprobar que al aplicarlo al problema $y' = 2xy$, $y(0) = 1$, lleva a la iteración

$$y_{n+1} = y_n + h(2x_n y_n + y_n(1 + 2x_n^2)h + 2x_n y_n(3 + 2x_n^2)\frac{h^2}{3}).$$

Solución. El desarrollo de Taylor produce

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_n).$$

Para calcular $y'(x_n)$, $y''(x_n)$ e $y'''(x_n)$ usamos la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y''(x) &= f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) \\ &= f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))f(x, y(x)), \\ y'''(x) &= f_{xx}(x, y(x)) + 2f_{xy}(x, y(x))y'(x) + f_{yy}(x, y(x))(y'(x))^2 \\ &\quad + f_y(x, y(x))y''(x) \\ &= f_{xx}(x, y(x)) + 2f_{xy}(x, y(x))f(x, y(x)) \\ &\quad + f_{yy}(x, y(x))(f(x, y(x)))^2 \\ &\quad + f_y(x, y(x))(f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))f(x, y(x))). \end{aligned}$$

Si despreciamos el residuo, $R_n = \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_n)$, obtenemos el método

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!}(f_{xx}(x_n, y_n) + 2f_{xy}(x_n, y_n)f(x_n, y_n) \\ &\quad + f_{yy}(x_n, y_n)(f(x_n, y_n))^2 \\ &\quad + f_y(x_n, y_n)(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n))). \end{aligned}$$

Para el problema mencionado se tiene que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2xy, & f_x(x, y) &= 2y, & f_y(x, y) &= 2x, \\ f_{xx}(x, y) &= 0, & f_{x,y}(x, y) &= 2, & f_{yy}(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

lo que introducido en la fórmula del método produce el resultado.

2. Construir el método de Taylor de orden 2 para problemas de dimensión d arbitraria y elaborar un programa de Matlab que resuelva el problema (PVI) por medio de dicho método.

Sintaxis: `y=taylororden2(ld,dxld,jyld,x,y0)`, siendo `dxld` el nombre del fichero que contiene la derivada con respecto a x de la función del lado derecho de la EDO en el punto (x, y) y `jyld` el nombre del fichero que contiene el jacobiano con respecto a y de la función del lado derecho de la EDO en el punto (x, y) .

Solución. El desarrollo de Taylor produce

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_n).$$

Para calcular $y'(x_n)$ e $y''(x_n)$ usamos la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x, y(x)), \\y''(x) &= f_x(x, y(x)) + f_{y^1}(x, y(x))(y^1)'(x) + f_{y^2}(x, y(x))(y^2)'(x) \\&= f_x(x, y(x)) + f_{y^1}(x, y(x))f^1(x, y(x)) \\&\quad + f_{y^2}(x, y(x))f^2(x, y(x)).\end{aligned}$$

Si despreciamos el residuo, $R_n = \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_n)$, obtenemos el método

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(f_x(x_n, y_n) + f_{y^1}(x_n, y_n)f^1(x_n, y_n) \\&\quad + f_{y^2}(x_n, y_n)f^2(x_n, y_n)).\end{aligned}$$

En cuanto al programa, podría ser por ejemplo este.

```

1  % Programa que resuelve EDO por el método de Taylor de orden 2
2  %
3  % Variables de entrada:
4  %
5  % ld: Nombre del fichero que contiene la función que calcula el lado
6  % derecho de la EDO. Tendrá siempre dos argumentos de entrada, x
7  % (escalar) e y (vector columna). La salida será un vector columna.
8  % dxld: Nombre del fichero que contiene la función que calcula
9  % la derivada con respecto a x del lado derecho de la EDO. Misma
10 % estructura que ld.
11 % jyld: Nombre del fichero que contiene el jacobiano con respecto a y del
12 % lado derecho de la EDO. Tendrá siempre dos argumentos de entrada, x
13 % (escalar) e y (vector columna). La salida será una matriz de
14 % dimensión d x d.
15 % x: Malla (vector fila de longitud N).
16 % y0: Dato inicial (vector columna de tamaño d, la dimensión del sistema
17 % de edos).
18 %
19 % Variables de salida
20 %
21 % y: Solución numérica en los puntos de la malla (matriz de tamaño
22 % d x N).
23
24
25 function y=taylororden2(ld,dxld,jyld,x,y0)
26
27 N=length(x)-1;
28 y(:,1)=y0;
29 for n=1:N,
30     h=x(n+1)-x(n);
31     f=feval(ld,x(n),y(:,n));
32     fx=feval(dxld,x(n),y(:,n));
33     fy=feval(jyld,x(n),y(:,n));
34     y(:,n+1)=y(:,n)+h*f+h^2*(fx+fy*f)/2;
35 end

```

Sección 3.2

1. Escribir el par predictor-corrector Euler/Trapezio, (3.3)–(3.4), como un método de Runge-Kutta. Visto de esta forma se le conoce como método de Euler mejorado.
-

Solución. El método tiene dos evaluaciones de función,

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1),$$

a partir de las cuales se calcula y_{n+1} por medio de la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$

Así pues, estamos ante un método de Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2. \end{array}$$

2. Consideramos el problema (PVI) con una f tal que $c^T f(x, y) = 0$ para un cierto vector columna c . Según vimos en un problema del capítulo anterior, en estas condiciones la solución del problema satisface la ley de conservación lineal $c^T y(x) = c^T \eta$ para todo $x \in [a, b]$. Estudiar si las soluciones obtenidas al aplicar al problema un método de Runge-Kutta satisfacen la misma ley de conservación lineal, $c^T y_n = c^T y_0$, $n = 0, \dots, N$.
-

Solución. Basta con observar que

$$c^T k_i = c^T f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) = 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Por consiguiente,

$$c^T y_{n+1} = c^T y_n + h \sum_{i=1}^s b_i c^T k_i = c^T y_n,$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado.

3. Si integramos la EDO en (x_n, x_{n+1}) y aplicamos la regla de Simpson, obtenemos que

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \frac{h}{6} (f(x_n, y(x_n)) + 4f(x_{n+\frac{1}{2}}, y(x_{n+\frac{1}{2}})) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))),$$

donde $x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2}$. Como no conocemos el valor de $y(x_{n+\frac{1}{2}})$, aproximamos esta cantidad por Euler, $y(x_{n+\frac{1}{2}}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2} f(x_n, y(x_n))$. Tampoco conocemos el valor de $y(x_{n+1})$. Para estimarlo podemos avanzar a partir de x_n utilizando una media ponderada de las dos pendientes calculadas hasta ahora, $k_1 = f(x_n, y(x_n))$, $k_2 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y(x_n) + \frac{h}{2} k_1)$; es decir, tomamos $y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h(\alpha k_1 + \beta k_2)$. Llegamos así al método

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1), \\ k_3 = f(x_n + h, y_n + h(\alpha k_1 + \beta k_2)) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3). \end{cases}$$

Determinar α y β para que $\|R_n\| \leq Ch^4$ para alguna constante C .

Solución. El residuo viene dado por

$$R_n = F(h) - G(h)$$

con

$$F(h) = y(x_n + h)$$

$$G(h) = y(x_n) + \frac{h}{6} (k_1(x_n, y(x_n); h) + 4k_2(x_n, y(x_n); h) + k_3(x_n, y(x_n); h)).$$

Si desarrollamos $F(h)$ en potencias de h , se tiene que

$$F(h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4).$$

Usando la EDO,

$$\begin{aligned} F(h) &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}f_x(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} f_{xx}(x_n, y(x_n)) + \frac{h^3}{3} \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_x^J(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \sum_{J,L=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_{y^L}^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + O(h^4) \end{aligned}$$

Para obtener el desarrollo de $G(h)$ desarrollamos las etapas. El desarrollo de la primera es trivial,

$$k_1(x_n, y(x_n); h) = f(x_n, y(x_n)).$$

En cuanto a la segunda, tenemos que

$$\begin{aligned} k_2(x_n, y(x_n); h) &= f(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y(x_n))), \\ \frac{dk_2}{dh}(x_n, y(x_n); h) &= \frac{1}{2}f_x(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y(x_n))) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y(x_n))) f^J(x_n, y(x_n)), \\ \frac{d^2k_2}{dh^2}(x_n, y(x_n); h) &= \frac{1}{4}f_{xx}(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y(x_n))) \\ &\quad + \frac{2}{4} \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y(x_n))) f^J(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y(x_n))) f^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$k_2(x_n, y(x_n); 0) = f(x_n, y(x_n)),$$

$$\frac{dk_2}{dh}(x_n, y(x_n); 0) = \frac{1}{2}f_x(x_n, y(x_n)) + \frac{1}{2} \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n))f^J(x_n, y(x_n)),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2k_2}{dh^2}(x_n, y(x_n); 0) &= \frac{1}{4}f_{xx}(x_n, y(x_n)) + \frac{1}{2} \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n, y(x_n))f^J(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{J,L=1}^d f_{y^Jy^L}(x_n, y(x_n))f^J(x_n, y(x_n))f^L(x_n, y(x_n)). \end{aligned}$$

A partir de esto es fácil obtener el desarrollo requerido de k_2 .

En cuanto a la tercera etapa, la escribimos en la forma

$$k_3(x_n, y(x_n); h) = f(x_n + h, a(h)),$$

donde

$$a(h) = y(x_n) + h(\alpha f(x_n, y(x_n)) + \beta k_2(x_n, y(x_n); h)).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dk_3}{dh}(x_n, y(x_n); h) &= f_x(x_n + h, a(h)) + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n + h, a(h))(a^J)'(h) \\ \frac{d^2k_3}{dh^2}(x_n, y(x_n); h) &= f_{xx}(x_n + h, a(h)) + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n + h, a(h))(a^J)'(h) \\ &\quad + \sum_{J,L=1}^d f_{y^Jy^L}(x_n + h, a(h))(a^J)'(h)(a^L)'(h) \\ &\quad + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n + h, a(h))(a^J)''(h). \end{aligned}$$

Nótese que

$$a'(h) = \alpha f(x_n, y(x_n)) + \beta k_2(x_n, y(x_n); h) + h\beta \frac{dk_2}{dh}(x_n, y(x_n); h),$$

$$a''(h) = 2\beta \frac{dk_2}{dh}(x_n, y(x_n); h) + h\beta \frac{d^2k_2}{dh^2}(x_n, y(x_n); h),$$

y por tanto que

$$a'(0) = \alpha f(x_n, y(x_n)) + \beta k_2(x_n, y(x_n); 0) = (\alpha + \beta)f(x_n, y(x_n)),$$

$$a''(0) = \beta f_x(x_n, y(x_n)) + \beta \sum_{L=1}^d f_{y^L}(x_n, y(x_n))f^L(x_n, y(x_n)).$$

Llegamos así a

$$k_3(x_n, y(x_n); 0) = f(x_n, y(x_n))$$

$$\frac{dk_3}{dh}(x_n, y(x_n); 0) = f_x(x_n, y(x_n)) + (\alpha + \beta) \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n))$$

$$\frac{d^2 k_3}{dh^2}(x_n, y(x_n); 0) = f_{xx}(x_n, y(x_n)) + 2(\alpha + \beta) \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n))$$

$$+ (\alpha + \beta)^2 \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n))$$

$$+ \beta \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_x^J(x_n, y(x_n))$$

$$+ \beta \sum_{J,L=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_{y^L}^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)),$$

a partir de lo cual es inmediato obtener el desarrollo de k_3 .

Juntando todo lo anterior, obtenemos el siguiente desarrollo para $G(h)$,

$$\begin{aligned} G(h) &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2} f_x(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{(2+\alpha+\beta)h^2}{6} \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} f_{xx}(x_n, y(x_n)) + \frac{(1+\alpha+\beta)h^3}{6} \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{(1+(\alpha+\beta)^2)h^3}{12} \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{\beta h^3}{2} \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_x^J(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{\beta h^3}{2} \sum_{J,L=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_{y^L}^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + O(h^4) \end{aligned}$$

Por consiguiente, los desarrollos de F y G coinciden hasta orden 3, y por tanto $R_n = O(h^4)$, si y sólo si $\alpha + \beta = 1$ y $\beta = 1/3$, es decir, si

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}.$$

4. Consideramos la igualdad

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-1}) = \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} f(t, y(t)) dt. \quad (1)$$

Si aproximamos la integral sustituyendo el integrando por el polinomio $p_{n,k}(t)$ de grado menor o igual que $k-1$ que interpola a $f(t, y(t))$ en los nodos x_n, \dots, x_{n+k-1} , y pedimos que la aproximación y_n satisfaga la relación resultante exactamente, se obtiene el método de Adams-Bashforth de k pasos.

- (a) Demostrar que el método de Adams-Bashforth de k pasos para mallas equiespaciadas viene dado por la recurrencia

$$y_{n+k} - y_{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{kj} f(x_{n+j}, y_{n+j}),$$

donde los coeficiente β_{kj} satisfacen

$$\beta_{kj} = \int_{k-1}^k \prod_{l=0, l \neq j}^{k-1} \frac{s-l}{j-l} ds.$$

- (b) Usando la fórmula para el error de interpolación, obtener una expresión para el residuo del método,

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-1}) - \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} p_{n,k}(t) dt \\ &= \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} (y'(t) - p_{n,k}(t)) dt, \end{aligned}$$

que demuestre que $\|R_n\| \leq Ch^{k+1}$.

- (c) Obtener el método de Adams-Bashforth de 2 pasos para mallas generales, no necesariamente equiespaciadas, y una expresión para su residuo.

Solución. (a) Estamos haciendo la aproximación

$$f(t, y(t)) \approx \sum_{j=0}^{k-1} f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) L_j(t), \quad L_j(t) = \prod_{l=0, l \neq j}^{k-1} \frac{t - x_{n+l}}{x_{n+j} - x_{n+l}}.$$

La integral de los polinomios de Lagrange $L_j(t)$ se calcula haciendo el cambio de variables $t = x_n + sh$; llegamos así a

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-1}) \approx h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{kj} f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) dt, \quad (2)$$

donde

$$\beta_{kj} = \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} \prod_{l=0, l \neq j}^{k-1} \frac{s-l}{j-l} ds.$$

El método de Adams explícito de k pasos se obtiene pidiendo que las aproximaciones $y_j \approx y(x_j)$ satisfagan la relación (2) exactamente, es decir,

$$y_{n+k} - y_{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{kj} f_{n+j}.$$

(b) Usando la fórmula del error de interpolación obtenemos

$$y'(t) - p_{n,k}(t) = \frac{y^{(k+1)}(\bar{\xi})}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (t - x_{n+l}),$$

donde $\bar{\xi} \in (x_n, t)$ puede variar de componente a componente.

Por otra parte, $\prod_{l=0}^{k-1} (t - x_{n+l})$ no cambia de signo en el intervalo de integración (x_{n+k-1}, x_{n+k}) ; podemos aplicar el Teorema del Valor Medio para integrales, y llegamos a

$$\begin{aligned} R_n &= \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} \frac{y^{(k+1)}(\bar{\xi}(t))}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (t - x_{n+l}) dt \\ &= \frac{y^{(k+1)}(\bar{\theta})}{k!} \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} \prod_{l=0}^{k-1} (t - x_{n+l}) dt. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $t = x_n + sh$ concluimos que

$$R_n = \frac{y^{(k+1)}(\bar{\theta})}{k!} h^{k+1} \int_{k-1}^k \prod_{l=0}^{k-1} (s-l) ds = C(k) y^{(k+1)}(\bar{\theta}) h^{k+1},$$

y el método es consistente de orden $p = k$.

Los cuatro primeros métodos de Adams-Bashforth son

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= hf_n, \\ y_{n+2} - y_{n+1} &= \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n), \\ y_{n+3} - y_{n+2} &= \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n), \\ y_{n+4} - y_{n+3} &= \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n). \end{aligned}$$

Como vemos, con $k = 1$ se tiene el método de Euler.

(c) En este caso hacemos la aproximación $f(t, y(t)) \approx p(t)$, donde

$$p(t) = f(x_n, y(x_n)) \frac{t - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} + f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \frac{t - x_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

Así,

$$\begin{aligned} y(x_{n+2}) - y(x_{n+1}) &\approx \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} p(t) dt \\ &= -\frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{2(x_{n+1} - x_n)} f(x_n, y(x_n)) + \frac{(x_{n+2} - x_n)^2 - (x_{n+1} - x_n)^2}{2(x_{n+1} - x_n)} f(x_{n+1}, y(x_{n+1})). \end{aligned}$$

El método pedido es por tanto

$$y_{n+2} - y_{n+1} = -\frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{2(x_{n+1} - x_n)} f_n + \frac{(x_{n+2} - x_n)^2 - (x_{n+1} - x_n)^2}{2(x_{n+1} - x_n)} f_{n+1}.$$

Usando la fórmula del error de interpolación obtenemos

$$y'(t) - p(t) = \frac{y^{(3)}(\bar{\xi})}{2} (t - x_n)(t - x_{n+1}),$$

donde $\bar{\xi} \in (x_n, t)$ puede variar de componente a componente. Como $(t - x_n)(t - x_{n+1}) > 0$ en el intervalo de integración (x_{n+1}, x_{n+2}) ; podemos aplicar el Teorema del Valor Medio para integrales, y llegamos a

$$\begin{aligned} R_n &= \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} \frac{y^{(3)}(\bar{\xi}(t))}{2} (t - x_n)(t - x_{n+1}) dt \\ &= \frac{y^{(3)}(\bar{\theta})}{2} \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (t - x_n)(t - x_{n+1}) dt \\ &= \frac{y^{(3)}(\bar{\theta})}{2} (x_{n+2} - x_{n+1})^2 \left(\frac{x_{n+2} - x_n}{2} - \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{3!} \right). \end{aligned}$$

Comprobamos así que $R_n = O(h^3)$, con $h = \max_n h_n$.

5. Si aproximamos la integral de la igualdad (1) sustituyendo el integrando por el polinomio $\hat{p}_{n,k}(t)$ de grado menor o igual que k que interpola a $f(t, y(t))$ en los nodos x_n, \dots, x_{n+k} , y pedimos que la aproximación y_n satisfaga la relación resultante exactamente, se obtiene el método de Adams-Moulton de k pasos.

(a) Demostrar que el método de Adams-Moulton de k pasos para mallas equiespaciadas viene dado por la recurrencia

$$y_{n+k} - y_{n+k-1} = h \sum_{j=0}^k \beta_{kj}^* f(x_{n+j}, y_{n+j}), \quad (3)$$

donde los coeficiente β_{kj} satisfacen

$$\beta_{kj}^* = \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} \prod_{l=0, l \neq j}^k \frac{s - l}{j - l} ds.$$

(b) Usando la fórmula para el error de interpolación, obtener una expresión para el residuo del método,

$$R_n = \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} (y'(t) - \hat{p}_{n,k}(t)) dt,$$

que demuestre que $\|R_n\| \leq Ch^{k+2}$.

(c) Dar una condición sobre h que garantice que el sistema (3) tiene una única solución y_{n+k} .

Solución. (a) Estamos haciendo la aproximación

$$f(t, y(t)) \approx \sum_{j=0}^k f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) L_j(t), \quad L_j(t) = \prod_{l=0, l \neq j}^k \frac{t - x_{n+l}}{x_{n+j} - x_{n+l}}.$$

La integral de los polinomios de Lagrange $L_j(t)$ se calcula haciendo el cambio de variables $t = x_n + sh$; llegamos así a

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-1}) \approx h \sum_{j=0}^k \beta_{kj}^* f(x_{n+j}, y(x_{n+j})),$$

con

$$\beta_{kj}^* = \int_{k-1}^k \prod_{l=0, l \neq j}^k \frac{s-l}{j-l} ds.$$

El método de Adams implícito de k pasos es entonces

$$y_{n+k} - y_{n+k-1} = h \sum_{j=0}^k \beta_{kj}^* f_{n+j}.$$

(b) Razonando como en el caso de los métodos explícitos obtenemos que el error de truncación viene dado por

$$\begin{aligned} R_n &= \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} (y'(t) - \hat{p}_{n,k}(t)) dt = \frac{y^{(k+2)}(\bar{\theta})}{(k+1)!} \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} \prod_{l=0}^k (t - x_{n+l}) dt \\ &= C(k) y^{(k+2)}(\bar{\theta}) h^{k+2}. \end{aligned}$$

(c) El valor de y_{n+k} es un punto fijo de la aplicación

$$F(y) = y_{n+k-1} + h\beta_{kk}^* f(x_{n+k}, y) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{kj}^* f(x_{n+j}, y_{n+j}).$$

Queremos ver que F es contractiva, y que por tanto tiene un único punto fijo, si h es suficientemente pequeño. En efecto,

$$\|F(y) - F(\hat{y})\| = h\beta_{kk}^* \|f(x_{n+k}, y) - f(x_{n+k}, \hat{y})\| \leq Lh\beta_{kk}^* \|y - \hat{y}\|,$$

y por tanto F es contractiva si $Lh\beta_{kk}^* < 1$.

6. Consideramos la igualdad

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-2}) = \int_{x_{n+k-2}}^{x_{n+k}} f(t, y(t)) dt.$$

Si aproximamos la integral sustituyendo el integrando por el polinomio de grado menor o igual que $k-1$ que interpola a $f(t, y(t))$ en los nodos x_n, \dots, x_{n+k-1} , y pedimos que la aproximación y_n satisfaga la relación resultante exactamente, se obtiene el método de Nyström¹ de k pasos.

¹Evert Johannes Nyström (1895–1960), matemático finés conocido por sus métodos numéricos para ecuaciones integrales y para problemas de valor inicial para ecuaciones de segundo orden.

- (a) Obtener una fórmula para el método de Nyström de k pasos.
- (b) Usar la fórmula para el error de interpolación para demostrar que existe una constante C tal que el residuo del método de Nyström de k pasos satisface $\|R_n\| \leq Ch^{k+1}$.

Solución. (a) Estamos haciendo la aproximación

$$f(t, y(t)) \approx \sum_{j=0}^{k-1} f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) L_j(t), \quad L_j(t) = \prod_{l=0, l \neq j}^{k-1} \frac{t - x_{n+l}}{x_{n+j} - x_{n+l}}.$$

La integral de los polinomios de Lagrange $L_j(t)$ se calcula haciendo el cambio de variables $t = x_n + sh$; llegamos así a

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-2}) \approx h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_{kj} f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) dt,$$

donde

$$\gamma_{kj} = \int_{k-2}^k \prod_{l=0, l \neq j}^{k-1} \frac{s - l}{j - l} ds.$$

El método de Nyström de k pasos es entonces

$$y_{n+k} - y_{n+k-2} = h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_{kj} f_{n+j}.$$

(b) Usando la fórmula del error de interpolación obtenemos

$$y'(t) - p_{n,k}(t) = \frac{y^{(k+1)}(\bar{\xi})}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (t - x_{n+l}),$$

donde $\bar{\xi} \in (x_n, t)$ puede variar de componente a componente.

Desgraciadamente, $\prod_{l=0}^{k-1} (t - x_{n+l})$ cambia de signo en el intervalo de integración (x_{n+k-1}, x_{n+k}) . Así que no podemos utilizar el Teorema del

Valor Medio para Integrales. En cualquier caso, una estimación cruda produce

$$\|R_n\| \leq 2h^{k+1} \max_{x \in [a,b]} \|y'''(x)\|.$$

7. Programar funciones de Matlab que calculen aproximaciones numéricas para el problema (PVI) por medio de los siguientes métodos:

- (a) El método de Euler mejorado.
- (b) El método de Euler modificado.
- (c) El método de Adams-Bashforth de 2 pasos (para mallas uniformes). Hay que programar el método de manera que en cada paso (salvo el primero) sólo se haga una evaluación de función. El segundo valor de arranque, y_1 , se calculará mediante el método de Euler.

La estructura de las variables de entrada y salida será la misma que la del programa `euler` presentado en el capítulo 2.

Solución. (a)

```
1  function y=eulermejorado(ld,x,y0)
2
3  N=length(x)-1;
4  y(:,1)=y0;
5  for n=1:N,
6      hn=(x(n+1)-x(n));
7      k1=feval(ld,x(n),y(:,n));
8      k2=feval(ld,x(n+1),y(:,n)+hn*k1);
9      y(:,n+1)=y(:,n)+hn*(k1+k2)/2;
10 end
```

(b)

```

1  function y=eulermodificado(ld,x,y0)
2
3  N=length(x)-1;
4  y(:,1)=y0;
5  for n=1:N,
6      hn=(x(n+1)-x(n));
7      k1=feval(ld,x(n),y(:,n));
8      k2=feval(ld,x(n)+hn/2,y(:,n)+hn*k1/2);
9      y(:,n+1)=y(:,n)+hn*k2;
10 end

```

(c)

```

1  function y=ab2(ld,x,y0)
2
3  y(:,1)=y0;
4  N=length(x)-1;
5  h=x(2)-x(1);
6
7  %Calculo de y2 por el metodo de Euler
8  fn=feval(ld,x(1),y(:,1));
9  y(:,2)=y(:,1)+h*fn;
10
11 for n=1:N-1
12     fn1=feval(ld,x(n+1),y(:,n+1));
13     y(:,n+2)=y(:,n+1)+h/2*(3*fn1-fn);
14     fn=fn1;
15 end

```

Sección 3.3

1. Obtener, por medio del desarrollo de Taylor, una aproximación de orden 2 de la derivada $y'(x)$ mediante una combinación lineal de $y(x-2h)$, $y(x-h)$ e $y(x)$ (fórmula de diferenciación regresiva de tres puntos). Utilizarla para construir un método de dos pasos para resolver el PVI. Obtener una expresión para el residuo. El método construido se conoce como fórmula BDF (“backward differentiation formulae”) de dos pasos.

Solución. Queremos que la combinación lineal

$$\frac{\alpha y(x) + \beta y(x-h) + \gamma y(x-2h)}{h}$$

sea igual a $y'(x) + O(h^2)$. Usando los desarrollos de Taylor

$$y(x-h) = \sum_{k=0}^2 y^{(k)}(x) \frac{(-h)^k}{k!} - \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\xi), \quad \xi \in (x-h, x),$$

$$y(x-2h) = \sum_{k=0}^2 y^{(k)}(x) \frac{(-2h)^k}{k!} - \frac{(2h)^3}{3!} y^{(3)}(\eta), \quad \eta \in (x-2h, x),$$

vemos que lo que se necesita es

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad -\beta - 2\gamma = 1, \quad \frac{\beta}{2} + 2\gamma = 0.$$

La solución de este sistema lineal resulta ser

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -2, \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Llegamos por tanto a la fórmula

$$y'(x) = \frac{3y(x) - 4y(x-h) + y(x-2h)}{2h} - \frac{h^2}{3} y'''(\xi) + \frac{2h^2}{3} y'''(\eta).$$

Tomando ahora $x = x_n + 2h$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_{n+2}, y(x_{n+2})) = y'(x_{n+2}) &= \frac{3y(x_{n+2}) - 4y(x_{n+1}) + y(x_n)}{2h} \\ &\quad - \frac{h^2}{3} y'''(\bar{\xi}_n) + \frac{2h^2}{3} y'''(\bar{\eta}_n), \end{aligned}$$

con $\bar{\xi}_n \in (x_n, x_{n+2})$, $\bar{\eta}_n \in (x_{n+1}, x_{n+2})$. Despreciando el término de orden 2 y pidiendo que la relación se satisfaga exactamente llegamos al método

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2h}{3}f(x_{n+2}, y_{n+2}),$$

siendo el residuo

$$R_n = \frac{2h^3}{9}y'''(\bar{\xi}_n) - \frac{4h^3}{9}y'''(\bar{\eta}_n).$$

2. Obtener una aproximación de orden 4 de la derivada $y'(x)$ a partir de los valores $y(x+2h)$, $y(x+h)$, $y(x)$, $y(x-h)$ e $y(x-2h)$ (fórmula de diferenciación centrada de cinco puntos). Utilizarla para construir un método de cuatro pasos para resolver problemas de valor inicial para EDOs. Obtener una expresión para el residuo.

Solución. Queremos que la combinación lineal

$$\frac{ay(x+2h) + by(x+h) + cy(x) + dy(x-h) + ey(x-2h)}{h}$$

sea igual a $y'(x) + O(h^4)$. Usando los desarrollos de Taylor

$$y(x+2h) = \sum_{k=0}^4 y^{(k)}(x) \frac{(2h)^k}{k!} + \frac{(2h)^5}{5!} y^{(5)}(\theta_1), \quad \theta_1 \in (x, x+2h),$$

$$y(x+h) = \sum_{k=0}^4 y^{(k)}(x) \frac{h^k}{k!} + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\theta_2), \quad \theta_2 \in (x, x+h),$$

$$y(x-h) = \sum_{k=0}^4 y^{(k)}(x) \frac{(-h)^k}{k!} - \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\theta_3), \quad \theta_3 \in (x-h, x),$$

$$y(x-2h) = \sum_{k=0}^4 y^{(k)}(x) \frac{(-2h)^k}{k!} - \frac{(2h)^5}{5!} y^{(5)}(\theta_4), \quad \theta_4 \in (x-2h, x),$$

vemos que lo que se necesita es

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 0, \\ 2a + b - d - 2e &= 1, \\ 4a + b + d + 4e &= 0, \\ 8a + b - d - 8e &= 0, \\ 16a + b + d + 16e &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema lineal resulta ser

$$a = -\frac{1}{12}, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = 0 \quad d = -\frac{2}{3}, \quad e = \frac{1}{12}.$$

Así, llegamos a la fórmula

$$y'(x) = \frac{-y(x+2h) + 8y(x+h) - 8y(x-h) + y(x-2h)}{12h} \\ -\frac{h^4}{45}y^{(5)}(\theta_1) + \frac{h^4}{180}y^{(5)}(\theta_2) + \frac{h^4}{180}y^{(5)}(\theta_3) - \frac{h^4}{45}y^{(5)}(\theta_4).$$

Tomando $x = x_n + 2h$ obtenemos

$$f(x_{n+2}, y(x_{n+2})) = y'(x_{n+2}) = \frac{-y(x_{n+4}) + 8y(x_{n+3}) - 8y(x_{n+1}) + y(x_n)}{12h} \\ -\frac{h^4}{45}y^{(5)}(\bar{\theta}_{1n}) + \frac{h^4}{180}y^{(5)}(\bar{\theta}_{2n}) + \frac{h^4}{180}y^{(5)}(\bar{\theta}_{3n}) - \frac{h^4}{45}y^{(5)}(\bar{\theta}_{4n}),$$

con $\bar{\theta}_{1n} \in (x_{n+2}, x_{n+4})$, $\bar{\theta}_{2n} \in (x_{n+2}, x_{n+3})$, $\bar{\theta}_{3n} \in (x_{n+1}, x_{n+2})$ y $\bar{\theta}_{4n} \in (x_n, x_{n+2})$. Llegamos así al método

$$y_{n+4} - 8y_{n+3} + 8y_{n+1} - y_n = -12hf(x_{n+2}, y_{n+2}),$$

con un residuo dado por

$$R_n = -\frac{4h^5}{15}y^{(5)}(\bar{\theta}_{1n}) + \frac{h^5}{15}y^{(5)}(\bar{\theta}_{2n}) + \frac{h^5}{15}y^{(5)}(\bar{\theta}_{3n}) - \frac{4h^5}{15}y^{(5)}(\bar{\theta}_{4n}).$$

3. Consideramos el polinomio $p_1(x)$ de grado menor o igual que uno que pasa por los puntos $(x_n, y(x_n))$, $(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$. Se sabe que

$$y'(x) = p'_1(x) + O(h), \quad x \in [x_n, x_{n+1}].$$

Utilizar esta idea para construir un método numérico de un paso para resolver el PVI.

Solución. Puesto que p_1 es un polinomio de grado menor o igual que 1, su derivada es constante,

$$p_1'(x) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n}.$$

Se tiene entonces

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f(x, y(x)) + O(h)$$

si $x \in [x_n, x_{n+1}]$. Tomando $x = x_n$ llegamos al método de Euler, y tomando $x = x_{n+1}$ al método de Euler implícito. En ambos casos obtenemos que el residuo es una $O(h^2)$.

Sección 3.4

1. Dados ν parámetros de colocación c_1, \dots, c_ν (preferiblemente en $[0, 1]$, aunque no es imprescindible), busquemos un polinomio u de grado ν (con coeficientes vectoriales) tal que

$$u(x_n) = y_n, \quad u'(x_n + c_j h) = f(x_n + c_j h, u(x_n + c_j h)), \quad j = 1, \dots, \nu.$$

Al calcular u y tomar $y_{n+1} = u(x_{n+1})$ se obtiene un método de colocación que pertenece a la familia de los métodos de Runge-Kutta.

Obtener el método de Runge-Kutta de colocación que corresponde a los parámetros de colocación $c_1 = 1/3$, $c_2 = 1$ (este método se conoce como método de Radau IIA de orden 3).

Solución. El polinomio u tiene grado menor o igual que 2. Por lo tanto, u' es un polinomio de grado menor o igual que 1, que pasa por los puntos

$$(x_n + \frac{h}{3}, f(x_n + \frac{h}{3}, u(x_n + \frac{h}{3}))), \quad (x_n + h, f(x_n + h, u(x_n + h))).$$

Si definimos $k_1 = f(x_n + \frac{h}{3}, u(x_n + \frac{h}{3}))$, $k_2 = f(x_n + h, u(x_n + h))$, es fácil ver entonces que

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{x - (x_n + h)}{(x_n + \frac{h}{3} - (x_n + h))} k_1 + \frac{x - (x_n + \frac{h}{3})}{(x_n + h - (x_n + \frac{h}{3}))} k_2 \\ &= -\frac{3}{2h} (x - (x_n + h)) k_1 + \frac{3}{2h} (x - (x_n + \frac{h}{3})) k_2. \end{aligned}$$

Integrando en (x_n, x) e imponiendo que $u(x_n) = y_n$, tenemos que

$$u(x) = y_n - \frac{3}{2h} \frac{(x - (x_n + h))^2}{2} \Big|_{x=x_n}^x k_1 + \frac{3}{2h} \frac{(x - (x_n + \frac{h}{3}))^2}{2} \Big|_{x=x_n}^x k_2.$$

De aquí deducimos que

$$y_{n+1} = u(x_{n+1}) = y_n + h \left(\frac{3k_1}{4} + \frac{k_2}{4} \right),$$

y que

$$u\left(x_n + \frac{h}{3}\right) = y_n + h\left(\frac{5k_1}{12} - \frac{k_2}{12}\right).$$

En resumen,

$$\begin{cases} k_1 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + h\left(\frac{5k_1}{12} - \frac{k_2}{12}\right)\right), \\ k_2 = f\left(x_n + h, y_n + h\left(\frac{3k_1}{4} + \frac{k_2}{4}\right)\right), \\ y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3k_1}{4} + \frac{k_2}{4}\right). \end{cases}$$

Se trata por tanto de un método de Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4. \end{array}$$

2. Comprobar que la condición (3.13) conduce a la recurrencia (3.14).

Solución. Un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned} Q'_{n,2}(x) &= \frac{y_n}{2h^2}((x - x_{n+2}) + (x - x_{n+1})) \\ &\quad - \frac{y_{n+1}}{h^2}((x - x_{n+2}) + (x - x_n)) + \frac{y_{n+2}}{2h^2}((x - x_{n+1}) + (x - x_n)). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$Q'_{n,2}(x_{n+2}) = \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2}y_{n+2} - 2y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n \right),$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado.

3. Dadas las aproximaciones y_n, \dots, y_{n+k-1} , consideramos el polinomio $Q_{n,k}$ de grado menor o igual que k que interpola a $(x_n, y_n), \dots, (x_{n+k}, y_{n+k})$.

Obviamente este polinomio no se puede construir, porque desconocemos y_{n+k} . Se impone ahora que $Q_{n,k}$ satisfaga la ecuación diferencial en x_{n+k} , esto es

$$Q'_{n,k}(x_{n+k}) = f(x_{n+k}, Q_{n,k}(x_{n+k})) = f(x_{n+k}, y_{n+k}).$$

El método resultante se conoce como *fórmula BDF de k pasos* (del inglés “backward differentiation formulae”).

- (a) Obtener la recurrencia para la fórmula BDF de k pasos.
- (b) Obtener, usando la fórmula para el error de interpolación, una fórmula para el residuo de la fórmula BDF de k pasos que demuestre que $\|R_n\| \leq Ch^{k+1}$.

Solución. (a) El polinomio $Q_{n,k}$ de grado menor o igual que k que interpola a $(x_n, y_n), \dots, (x_{n+k}, y_{n+k})$ está dado por

$$Q_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^k y_{n+j} L_j(x), \quad L_j(x) = \prod_{l=0, l \neq j}^k \frac{x - x_{n+l}}{x_{n+j} - x_{n+l}}.$$

Definiendo

$$L_j^*(s) = \prod_{l=0, l \neq j}^k \frac{s - l}{j - l},$$

se tiene que $L_j(x) = L_j^*\left(\frac{x-x_n}{h}\right)$, y de aquí que

$$Q'_{n,k}(x_{n+k}) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^k y_{n+j} (L_j^*)'(k).$$

Usando que $Q'_{n,k}(x_{n+k}) = f(x_{n+k}, y_{n+k})$, se llega a

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h f(x_{n+k}, y_{n+k}), \quad \alpha_j = (L_j^*)'(k),$$

que una vez normalizada (dividiendo por α_k) es la *fórmula BDF de k pasos*. Es fácil ver que $\alpha_0 \neq 0$; por tanto se tiene un método de k pasos “genuino”.

(b) Sea $q_{n,k}(x)$ el polinomio de grado menor o igual que k que interpola los $k + 1$ valores exactos

$$(x_n, y(x_n)), \dots, (x_{n+k}, y(x_{n+k})).$$

Entonces

$$R_n = h q'_{n,k}(x_{n+k}) - h f(x_{n+k}, y(x_{n+k})) = h(q'_{n,k}(x_{n+k}) - y'(x_{n+k})).$$

Sea $g(x) = q_{n,k}(x) - y(x)$. Esta función se anula en los $k + 1$ puntos x_n, \dots, x_{n+k} . Por el Teorema de Rolle, $g'(x)$ se anula (componente a componente) en k puntos intermedios a los anteriores. Así $q'_{n,k}(x)$ interpola (componente a componente) a $y'(x)$ en k puntos $\bar{\eta}_l$, $l = 0, \dots, k-1$. La fórmula para el error de interpolación produce

$$q'_{n,k}(x) - y'(x) = -\frac{y^{(k+1)}(\bar{\xi}(x))}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (x - \bar{\eta}_l).$$

Por tanto

$$\|R_n\| \leq \frac{h \max_{x \in [a,b]} \|y^{(k+1)}(x)\|}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} |x_{n+k} - \bar{\eta}_l| \leq h^{k+1} \max_{x \in [a,b]} \|y^{(k+1)}(x)\|,$$

y concluimos que el método es consistente de orden $p = k$.

Sección 3.5

1. El uso del método de Newton en la Regla del Trapecio requiere evaluar la matriz jacobiana $D_y f$. Esta función debe ser suministrada al integrador. Sin embargo, en las aplicaciones prácticas especificar estas derivadas parciales analíticamente es con frecuencia una tarea difícil o engorrosa. Una alternativa es usar diferencias aproximadas: en $y = y_n^{[k]}$ se evalúan $\hat{f} = f(x_n, \hat{y})$ y $\tilde{f} = f(x_n, \tilde{y})$, donde \hat{y} y \tilde{y} son perturbaciones de y en una coordenada, $\hat{y}_j = y_j + \epsilon$, $\tilde{y}_j = y_j - \epsilon$, $\hat{y}_l = \tilde{y}_l = y_l$, $l \neq j$. Entonces, la j -ésima columna de $D_y f$ se puede aproximar por

$$D_y f \approx \frac{1}{2\epsilon}(\hat{f} - \tilde{f}),$$

siendo ϵ un parámetro positivo pequeño.

Este truco, fácil de programar, suele funcionar bien con la elección $\epsilon = 10^{-\gamma}$, si se trabaja con aritmética de coma flotante con aproximadamente 2γ dígitos significativos (en el caso de Matlab, $\gamma = 7$).

Observación. Esta aproximación de la matriz jacobiana puede resultar costosa en algunos casos y no siempre funciona bien.

- (a) Modificar el programa `trapecionw` que se os ha proporcionado de forma que use una aproximación del jacobiano en lugar de la función jacobiana suministrada por el usuario.
- (b) Otra alternativa para aproximar el jacobiano numéricamente es usar la función de Matlab `numjac`. Modificar el programa `trapecionw` de manera que aproxime el jacobiano por medio de esta función.

Solución. (a)

```

1  function [y,evfun]=problema3_5_1a(ld,x,y0,itmax,tol)
2
3  N=length(x)-1;
4  evfun=0;
5  d=length(y0); % dimension del sistema
6  I=eye(d);
7  y(:,1)=y0;
8  yk=y(:,1);
9  for n=1:N, % Bucle para recorrer toda la discretizacion
10     numit=0;
11     errornewton=tol+1;
12     hn=x(n+1)-x(n);
13     fn=feval(ld,x(n),y(:,n));
14     evfun=evfun+1;
15     while (numit<itmax && errornewton>tol)
16         numit=numit+1;
17         g=yk-y(:,n)-.5*hn*(fn+feval(ld,x(n+1),yk));
18         evfun=evfun+1;
19         % calculo aproximado del jacobiano del lado derecho
20         jyld=[];
21         for j=1:d
22             haty=yk;
23             haty(j)=haty(j)+1e-7;
24             tildey=yk;
25             tildey(j)=tildey(j)-1e-7;
26             jyld=[jyld,(feval(ld,x(n+1),haty)-feval(ld,x(n+1),tildey))*5e7];
27             evfun=evfun+2;
28         end
29         jacg=I-.5*hn*jyld;
30         correccion=-jacg\g;
31         errornewton=norm(correccion,inf);
32         yk=yk+correccion;
33     end
34     if errornewton<=tol
35         y(:,n+1)=yk; %incluyo la ultima correccion
36     else
37         error('newton no converge')
38     end
39 end

```

(b)

```

1  function [y,evfun]=problema3_5_1b(ld,x,y0,itmax,tol)
2
3  N=length(x)-1;
4  evfun=0;
5  fac=[];
6  d=length(y0); % dimension del sistema
7  I=eye(d);
8  y(:,1)=y0;
9  yk=y(:,1);
10 for n=1:N, % Bucle para recorrer toda la discretizacion
11     numit=0;
12     errornewton=tol+1;
13     hn=x(n+1)-x(n);
14     fn=feval(ld,x(n),y(:,n));
15     evfun=evfun+1;
16     while (numit<itmax && errornewton>tol)
17         numit=numit+1;
18         fk=feval(ld,x(n+1),yk);
19         evfun=evfun+1;
20         g=yk-y(:,n)-.5*hn*(fn+fk);
21         [dfd,y,fac] = numjac(ld,x(n+1),yk,fk,tol*ones(d,1),fac,0);
22         evfun=evfun+2*d;
23         % suponemos el mismo coste que en nuestra aproximación
24         % numérica del jacobiano
25         jacg=I-.5*hn*dfd;
26         correccion=-jacg\g;
27         errornewton=norm(correccion,inf);
28         yk=yk+correccion;
29     end
30     if errornewton<=tol
31         y(:,n+1)=yk; %incluyo la ultima correccion
32     else
33         error('newton no converge')
34     end
35 end

```

2. El programa `trapeciopf` que se os ha suministrado estima el error en la iteración de punto fijo como la diferencia entre las dos últimas iteraciones. Esta estimación con frecuencia sobreestima o subestima el error. Un criterio mejor es tomar

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} \|y_n^{[k+1]} - y_n^{[k]}\| \leq \text{TOL},$$

donde TOL es la tolerancia para la iteración de punto fijo proporcionada por el usuario y λ es una medida de la velocidad de convergencia de la

iteración, que se puede estimar por

$$\lambda = \left(\frac{\|y_n^{[k+1]} - y_n^{[k]}\|}{\|y_n^{[1]} - y_n^{[0]}\|} \right)^{1/k}.$$

- (a) Modificar el programa `trapeciopf` de manera que use esta estimación mejorada del error de punto fijo.
- (b) Elaborar un diagrama que mida la eficiencia de ambos métodos (el original y el modificado) al aplicarlos al problema del péndulo.

Solución. (a)

```

1  function [y,evfun]=problema3_5_2a(ld,x,y0,itmax,tol)
2
3  N=length(x)-1;
4  evfun=0;
5  y(:,1)=y0;
6  for n=1:N, % Bucle para recorrer toda la discretizacion
7      numit=0;
8      errorpf=tol+1;
9      hn=(x(n+1)-x(n));
10     fn=feval(ld,x(n),y(:,n));
11     evfun=evfun+1;
12     yk=y(:,n)+hn*fn;
13     y1menosy0=.5*hn*(-fn+feval(ld,x(n+1),yk));
14     numit=numit+1;
15     yk=yk+y1menosy0;
16     y1menosy0=norm(y1menosy0,inf);
17     while (numit<itmax && errorpf>tol)
18         numit=numit+1;
19         ykmas1=y(:,n)+.5*hn*(fn+feval(ld,x(n+1),yk));
20         evfun=evfun+1;
21         lambda=(norm(ykmas1-yk,inf)/(y1menosy0))^(1/(numit-1));
22         errorpf=norm(lambda*(ykmas1-yk)/(1-lambda),inf);
23         yk=ykmas1;
24     end
25     if errorpf<=tol
26         y(:,n+1)=yk; %incluyo la ultima trapeciopfej35.mcorreccion
27     else
28         error('la iteracion de punto fijo no converge')
29     end
30 end

```

- (b) Para elaborar el diagrama pedido usamos el siguiente programa:

```

1  function problema3_5_2b
2
3  close all, clear all
4
5  % Calculo de la solucion .exacta
6  opciones=odeset('AbsTol',1e-20,'RelTol',2.22045e-014);
7  solpend=ode45(@pend,[0,1],[1;1],opciones);
8
9  pd=12; % Numero de puntos en el diagrama
10 emetodo=zeros(1,pd); fmetodo=zeros(1,pd);
11
12 % Regla del trapecio con una estimacion burda del error
13 N=10;
14 for i=1:pd
15     N=2*N;
16     x=linspace(0,1,N+1);
17     [y,f]=trapecio_pf(@pend,x,[1;1],15,1e-14);
18     solexacta=deval(solpend,x);
19     emetodo(i)=max(max(abs(solexacta-y)));
20     fmetodo(i)=f;
21 end
22 loglog(fmetodo,emetodo,'r-*)
23 hold
24
25 % Regla del trapecio con una estimacion mejor del error
26 N=10;
27 for i=1:pd
28     N=2*N;
29     x=linspace(0,1,N+1);
30     [y,f]=problema3_5_2a(@pend,x,[1;1],15,1e-14);
31     solexacta=deval(solpend,x);
32     emetodo(i)=max(max(abs(solexacta-y)));
33     fmetodo(i)=f;
34 end
35 loglog(fmetodo,emetodo,'b-o')
36 xlabel('evaluaciones de funcion'), label('error')
37 legend('Estimaci\''{o}n burda','Estimaci\''{o}n fina')
38
39 function yprima = pend(t,y)
40 %PEND Pendulo simple
41
42 yprima = [y(2); -sin(y(1))];

```

El resultado es el diagrama que se muestra en la Figura 1. Se observa que hacer las cosas bien vale la pena: hay un cierto ahorro.

-
- Las evaluaciones del jacobiano en el método de Newton pueden ser costosas, y también lo es la resolución de los sistemas lineales resultantes. Por ello, se suele usar un método de Newton modificado, que mantiene fijo el jacobiano, $D_y f \approx D_y f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[0]})$. De esta manera sólo se evalúa

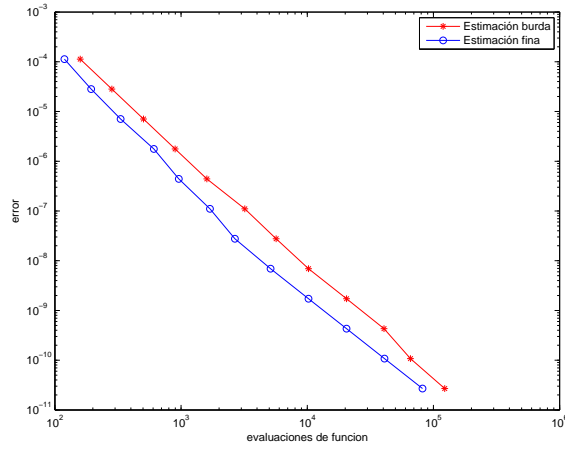


Figura 1: Eficiencia regla del trapecio con dos estimaciones diferentes del error en la iteración de punto fijo.

el jacobiano una vez. Y lo que es aún mejor, se hace una (única) descomposición LU (lo que conlleva $\frac{d^3}{3} + O(d^2)$ operaciones), que se emplea en todos los pasos de la iteración para resolver los sistemas lineales (el coste es $O(d^2)$).

- (a) Modificar el programa `trapecionw` de forma que recoja las ideas que acabamos de explicar.
- (b) Elaborar un diagrama que mida la eficiencia de ambos métodos (el original y el modificado) al aplicarlos al problema del péndulo.

Solución. (a)

```

1  function [y,evf,evj]=problema3.5.3a(ld,jyld,x,y0,itm,tol)
2  N=length(x)-1; evf=0; evj=0; I=eye(length(y0));
3  y(:,1)=y0;
4  for n=1:N, % Bucle para recorrer la discretizacion
5      numit=0;
6      enewton=tol+1;
7      hn=x(n+1)-x(n);
8      fn=feval(ld,x(n),y(:,n));
9      evf=evf+1;
10     yk=y(:,n)+hn*fn;
11     jacg=I-.5*hn*feval(jyld,x(n+1),yk);
12     evj=evj+1;
13     [L,U,P]=lu(jacg); % PA=LU, P mat. permut., L trian. inf., U trian. sup.
14     while (numit<itm && enewton>tol) % Bucle del Newton
15         numit=numit+1;
16         % g es la funcion de la que hay que encontrar el cero
17         g=yk-y(:,n)-.5*hn*(fn+feval(ld,x(n+1),yk));
18         evf=evf+1;
19         b=-P*g;
20         Uc=L\b;
21         correccion=U\b;
22         enewton=norm(correccion,inf);
23         yk=yk+correccion;
24     end
25     if enewton<=tol
26         y(:,n+1)=yk; %incluyo la ultima correccion
27     else
28         error('newton no converge')
29     end
30 end

```

(b) El programa para realizar el diagrama de eficiencia pedido es muy similar al del problema 3.5.2(b). El diagrama se muestra en la Figura 2. Se observa que congelar el jacobiano supone un cierto ahorro.

-
4. Si integramos la EDO $y'(x) = f(x, y(x))$ en el intervalo (x_n, x_{n+1}) se tiene que $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds$. Si aproximamos el integrando por medio de la regla rectangular derecha, llegamos al llamado *método de Euler implícito*,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Programar una función de Matlab que calcule soluciones numéricas para sistemas por este método. Los sistemas no lineales resultantes se resolverán:

- (a) por iteración de punto fijo;

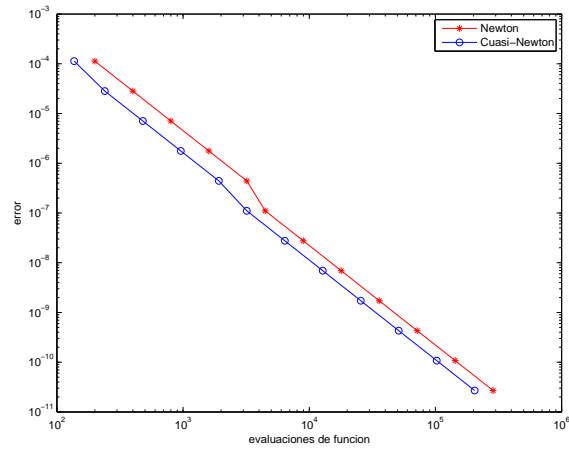


Figura 2: Eficiencia regla del trapecio con Newton y con cuasi-Newton.

(b) por el método de Newton.

La estructura de las variables de entrada y salida será la misma que la de las funciones `trapeciop_f` y `trapecio_new` que se os han suministrado.

Solución. (a)

```

1  function [y,evfun]=problema3_5_4a(ld,x,y0,itmax,tol)
2
3  N=length(x)-1;
4  evfun=0;
5  y(:,1)=y0;
6  for n=1:N, % Bucle para recorrer toda la discretizacion
7      numit=0;
8      errorpf=tol+1;
9      hn=(x(n+1)-x(n));
10     yk=y(:,n);
11     while (numit<itmax && errorpf>tol)
12         numit=numit+1;
13         ykmas1=y(:,n)+hn*feval(ld,x(n+1),yk);
14         evfun=evfun+1;
15         errorpf=norm(ykmas1-yk,inf);
16         yk=ykmas1;
17     end
18     if errorpf<=tol
19         y(:,n+1)=yk; %incluyo la ultima correccion
20     else
21         error('la iteracion de punto fijo no converge')
22     end
23 end

```

(b)

```

1  function [y,evfun,evjac]=problema3_5_4b(ld,jyld,x,y0,itmax,tol)
2
3  N=length(x)-1;
4  evfun=0; evjac=0;
5  d=length(y0); % dimension del sistema
6  I=eye(d);
7  y(:,1)=y0;
8  yk=y(:,1);
9  for n=1:N, % Bucle para recorrer toda la discretizacion
10     numit=0;
11     errornewton=tol+1;
12     hn=x(n+1)-x(n);
13     while (numit<itmax && errornewton>tol)
14         numit=numit+1;
15         g=yk-y(:,n)-hn*feval(ld,x(n+1),yk);
16         evfun=evfun+1;
17         jacg=I-hn*feval(jyld,x(n+1),yk);
18         evjac=evjac+1;
19         correccion=-jacg\g;
20         errornewton=norm(correccion,inf);
21         yk=yk+correccion;
22     end
23     if errornewton<=tol
24         y(:,n+1)=yk; %incluyo la ultima correccion
25     else
26         error('newton no converge')
27     end
28 end

```

-
5. Repetir el ejercicio anterior para el método de Runge-Kutta implícito de tablero

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1. \end{array}$$

Los nombres de los programas serán `rkipf` y `rkinw`.

Solución. (a)

```
1  function [y,evfun]=problema3_5_5a(ld,x,y0,itmax,tol)
2
3  N=length(x)-1;
4  evfun=0;
5  y(:,1)=y0;
6  for n=1:N, % Bucle para recorrer toda la discretizacion
7      numit=0;
8      errorpf=tol+1;
9      h=(x(n+1)-x(n));
10     k1=feval(ld,x(n),y(:,n));
11     evfun=evfun+1;
12     while (numit<itmax & errorpf>tol)
13         numit=numit+1;
14         nuevok1=feval(ld,x(n)+h/2,y(:,n)+h*k1/2);
15         evfun=evfun+1;
16         errorpf=norm(nuevok1-k1,inf);
17         k1=nuevok1;
18     end
19     if errorpf<=tol
20         y(:,n+1)=y(:,n)+h*k1;
21     else
22         error('la iteracion de punto fijo no converge')
23     end
24 end
```

(b)

```

1  function [y,evfun,evjac]=problema3_5_5b(ld,jyld,x,y0,itmax,tol)
2
3  N=length(x)-1;
4  evfun=0;
5  evjac=0;
6  d=length(y0); % dimension del sistema
7  I=eye(d);
8  y(:,1)=y0;
9  for n=1:N, % Bucle para recorrer toda la discretizacion
10     numit=0;
11     errornewton=tol+1;
12     h=x(n+1)-x(n);
13     k1=feval(ld,x(n),y(:,n));
14     evfun=evfun+1;
15     while (numit<itmax && errornewton>tol)
16         numit=numit+1;
17         g=k1-feval(ld,x(n)+h/2,y(:,n)+h*k1/2);
18         evfun=evfun+1;
19         jacg=I-.5*h*feval(jyld,x(n)+h/2,y(:,n)+h*k1/2);
20         evjac=evjac+1;
21         correccion=-jacg\g;
22         errornewton=norm(correccion,inf);
23         k1=k1+correccion;
24     end
25     if errornewton<=tol
26         y(:,n+1)=y(:,n)+h*k1; %incluyo la ultima correccion
27     else
28         error('newton no converge')
29     end
30 end

```

-
6. Para dibujar un círculo de radio r en una pantalla gráfica, uno puede evaluar pares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ para una sucesión de valores de θ . Pero esto es costoso. Un método alternativo más barato consiste en considerar el PVI

$$x'(\theta) = -y(\theta), \quad y'(\theta) = x(\theta), \quad x(0) = r, \quad y(0) = 0,$$

y aproximararlo utilizando algún método numérico. Sin embargo, hay que asegurarse de que la solución obtenida tiene el aspecto deseado.

Aplicar el método de Euler, el método de Euler implícito y la Regla del trapecio al problema, con paso $h = 0,02$, para $0 \leq \theta \leq 120$. Determinar si la solución forma una espiral hacia fuera, una espiral hacia dentro o, como se desea, un círculo aproximado. Explicar los resultados observados.

Sugerencia. Esto tiene que ver con una cierta función invariante de x e y , más que con el orden de los métodos.

Solución. Las aproximaciones de la curva solución que comienza en $(1, 0)^T$ por medio del método de Euler, del método de Euler implícito y de la regla del trapecio se dan, respectivamente, en las figuras 3, 4 y 5.

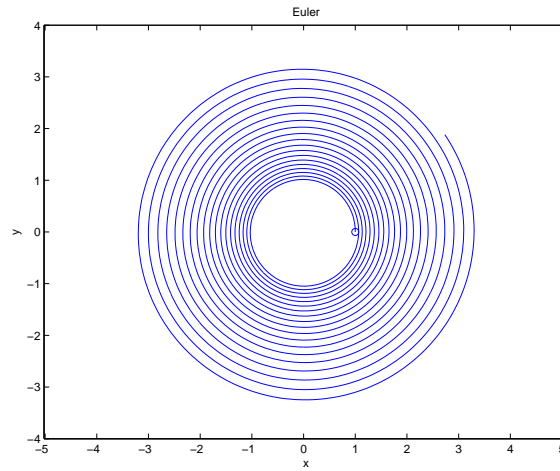


Figura 3: Aproximación por Euler de la solución que empieza en $(1, 0)^T$. La aproximación describe una espiral que se abre.

Explicación. La función cuadrática

$$f(\theta) = x^2(\theta) + y^2(\theta)$$

es constante en θ . En efecto, usando el sistema de EDOs satisfechas por x e y se obtiene fácilmente que

$$f'(\theta) = 2x(\theta)x'(\theta) + 2y(\theta)y'(\theta) = -2x(\theta)y(\theta) + 2y(\theta)x(\theta) = 0.$$

Veamos si los métodos que hemos usando preservan este invariante. Usamos una malla $\{\theta_n\}_{n=0}^N$.

La solución numérica producida por el método de Euler viene dada por la recurrencia

$$x_{n+1} = x_n - hy_n, \quad y_{n+1} = y_n + hx_n.$$

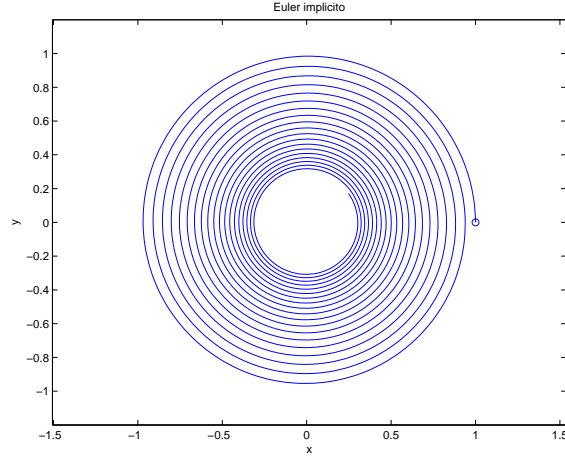


Figura 4: Aproximación por Euler implícito de la solución que empieza en $(1, 0)^T$. La aproximación describe una espiral que se cierra.

Así pues,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 &= x_n^2 - 2hx_ny_n + h^2y_n^2 + y_n^2 + 2hx_ny_n + h^2x_n^2 \\ &= (1 + h^2)(x_n^2 + y_n^2). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x_n^2 + y_n^2 = (1 + h^2)^n(x_0^2 + y_0^2),$$

y las soluciones numéricas obtenidas por este método describen, tal y como se observa en el experimento, una espiral que se abre. En la Figura 6 se representa $\log(x_n^2 + y_n^2)$ frente a n . Se comprueba que, como era de esperar se obtiene una recta con pendiente $\log(1 + 0,02^2)$.

La solución numérica producida por el método de Euler implícito viene dada por la recurrencia

$$x_{n+1} = x_n - hy_{n+1}, \quad y_{n+1} = y_n + hx_{n+1}.$$

Así pues,

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 - 2hx_ny_{n+1} + h^2y_{n+1}^2 + y_n^2 + 2hx_{n+1}y_n + h^2x_{n+1}^2.$$

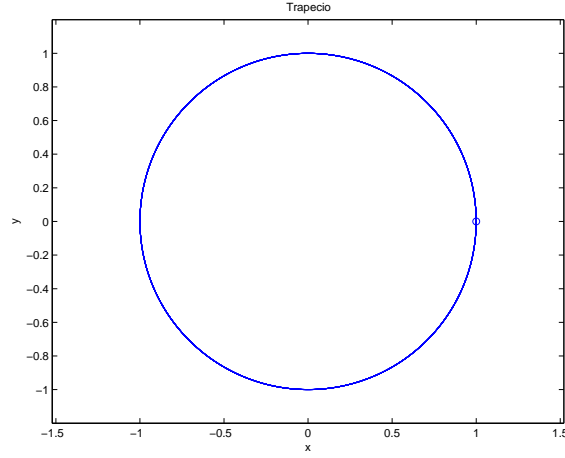


Figura 5: Aproximación por la regla del trapecio de la solución que empieza en $(1, 0)^T$. La aproximación está, como la propia solución, en la circunferencia de radio 1.

Para eliminar x_n e y_n en esta expresión usamos la recurrencia del método,

$$x_n = x_{n+1} + hy_{n+1}, \quad y_n = y_{n+1} - hx_{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 &= x_n^2 + y_n^2 + h^2(x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) \\ &\quad - 2h(x_{n+1} + hy_{n+1})y_{n+1} + 2h(y_{n+1} - hx_{n+1})x_{n+1} \\ &= x_n^2 + y_n^2 - h^2(x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \frac{1}{1 + h^2}(x_n^2 + y_n^2),$$

y por tanto que

$$x_n^2 + y_n^2 = \left(\frac{1}{1 + h^2} \right)^n (x_0^2 + y_0^2)$$

y las soluciones numéricas obtenidas por este método describen, tal y como se observa en el experimento, una espiral que se cierra. En

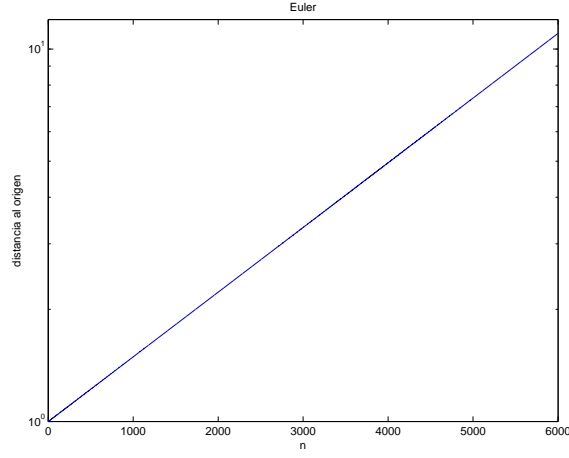


Figura 6: Tasa de crecimiento del radio en la aproximación por el método de Euler.

la Figura 6 se representa $\log(x_n^2 + y_n^2)$ frente a n . Se comprueba que, de acuerdo con lo que acabamos de explicar, se obtiene una recta con pendiente $-\log(1 + 0,02^2)$.

La solución numérica producida por la regla del trapecio viene dada por la recurrencia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1}), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(x_n + x_{n+1}).$$

Así pues,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 &= x_n^2 + \frac{h^2}{4}y_n^2 + \frac{h^2}{4}y_{n+1}^2 - hx_ny_n - hx_ny_{n+1} + \frac{h^2}{2}y_ny_{n+1} \\ &\quad + y_n^2 + \frac{h^2}{4}x_n^2 + \frac{h^2}{4}x_{n+1}^2 + hx_ny_n + hx_ny_{n+1} + \frac{h^2}{2}x_nx_{n+1} \\ &= (x_n^2 + y_n^2) \left(1 + \frac{h^2}{4}\right) + \frac{h^2}{4}(x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) \\ &\quad - h(x_{n+1} + \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1}))y_{n+1} + \frac{h^2}{2}y_ny_{n+1} \\ &\quad + h(y_{n+1} - \frac{h}{2}(x_n + x_{n+1}))x_{n+1} + \frac{h^2}{2}x_nx_{n+1} \\ &= (x_n^2 + y_n^2) \left(1 + \frac{h^2}{4}\right) - \frac{h^2}{4}(x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2). \end{aligned}$$

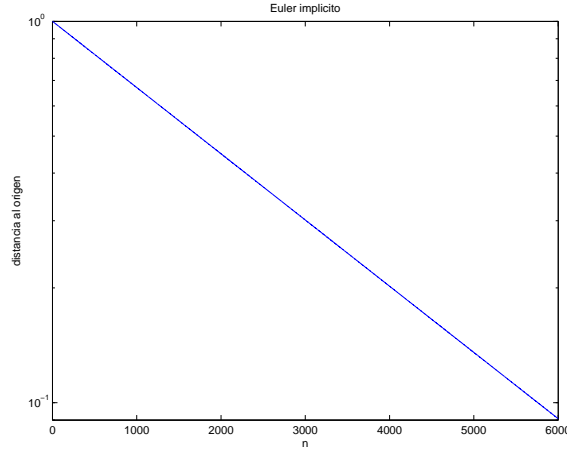


Figura 7: Tasa de decrecimiento del radio en la aproximación por el método de Euler implícito.

Concluimos que

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 + y_n^2.$$

Así pues, la regla del trapecio respeta el invariante del movimiento, y las soluciones numéricas obtenidas por este método están, tal y como se observa en el experimento, sobre una circunferencia.

7. El sistema de EDOs

$$(y^1)' = \alpha - y^1 - \frac{4y^1 y^2}{1 + (y^1)^2}, \quad (y^2)' = \beta y^1 \left(1 - \frac{y^2}{1 + (y^1)^2} \right),$$

donde α y β son parámetros, representa de forma simplificada a cierta reacción química. Para cada valor del parámetro α hay un valor crítico del parámetro β , $\beta_c = \frac{3\alpha}{5} - \frac{25}{\alpha}$, tal que para $\beta > \beta_c$ las trayectorias de las soluciones decaen en amplitud y se acercan en el plano de fases en forma espiral a un punto fijo estable, mientras que para $\beta < \beta_c$ las trayectorias oscilan sin amortiguarse y se ven atraídas por un ciclo límite estable (esto es lo que se conoce como una bifurcación de Hopf).

- (a) Fijamos $\alpha = 10$. Usar cualquiera de los métodos que se han programado hasta el momento con longitud de paso fija $h = 0,01$ para

aproximar la solución del problema que empieza en $y^1(0) = 0$, $y^2(0) = 2$, para $t \in [0, 20]$, con $\beta = 2$ y $\beta = 4$. En cada caso dibujar y^1 e y^2 frente a t . Describir lo observado.

- (b) Investigar cuál es la situación cerca del valor crítico $\beta_c = 3,5$ (quizá convenga incrementar la longitud del intervalo de integración para ver mejor lo que sucede).

Solución. (a) Hemos realizado los cálculos con la regla del trapecio (punto fijo). Los resultados se muestran en las figuras 8 y 9. Se observa que con $\beta = 2$ la curva solución se aproxima muy rápidamente a un ciclo límite (que corresponde a una solución periódica, mientras que con $\beta = 4$ converge velozmente a un punto crítico (una solución estacionaria).

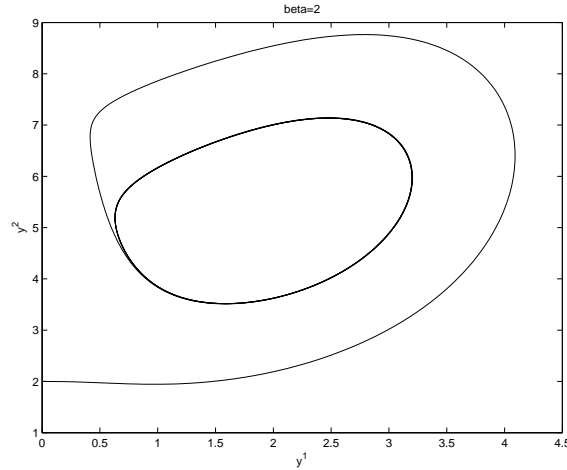


Figura 8: $\beta = 2$: convergencia rápida a un ciclo límite.

- (b) Hemos ampliado el tiempo de integración para cubrir el intervalo $[0, 50]$, y hemos considerado los valores $\beta = 3,4$ y $\beta = 3,6$. En el primer caso, Figura 10, se tiene convergencia a un ciclo límite, pero muchísimo más lenta que con $\beta = 2$. En el segundo, Figura 11, se converge a un punto crítico, pero también de forma mucho más lenta. El valor crítico $\beta = 3,5$, marca la desaparición del ciclo límite.
-

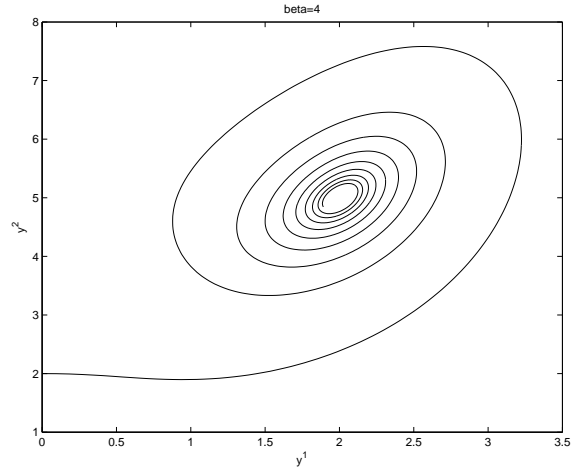


Figura 9: $\beta = 4$: convergencia rápida a un punto crítico.

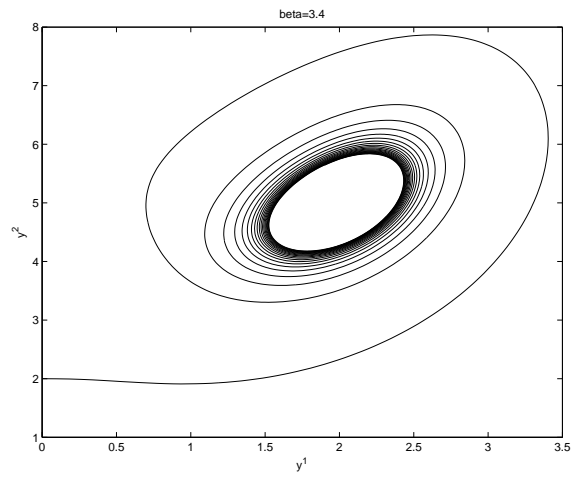


Figura 10: $\beta = 3,4$: convergencia lenta a un ciclo límite.

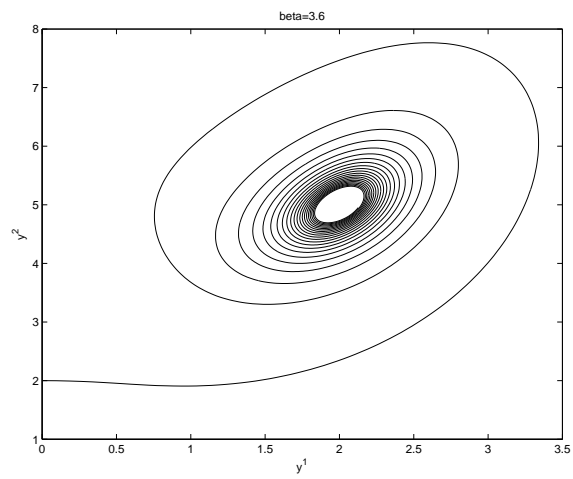


Figura 11: $\beta = 3,6$: convergencia lenta a un punto crítico.

Sección 4.1

1. Para cada uno de los métodos explícitos siguientes, demostrar que si f satisface las hipótesis H_f , entonces la correspondiente función de incremento satisface las hipótesis (H_{MN}) .
 - (a) Predictor-corrector Euler/Trapezio, (3.3)–(3.4).
 - (b) Euler modificado, (3.5).
 - (c) Regla del punto medio, (3.7).
-

Solución. (a) La función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \frac{1}{2} \left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \right).$$

Al tratarse de una composición de funciones continuas, es obviamente continua. También es inmediato ver que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$. Así que sólo queda comprobar que ϕ_f es Lipschitz con respecto a la variable y_n .

Se tiene que

$$\begin{aligned} \|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| &\leq \frac{1}{2} \|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\ &\quad + \frac{1}{2} \|f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) - f(x_n + h, \hat{y}_n + hf(x_n, \hat{y}_n))\| \\ &\leq \frac{L}{2} \|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{L}{2} \|y_n + hf(x_n, y_n) - (\hat{y}_n + hf(x_n, \hat{y}_n))\| \\ &\leq \frac{L}{2} \|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{L}{2} \|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{Lh}{2} \|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\ &\leq \left(L + \frac{L^2 h}{2} \right) \|y_n - \hat{y}_n\| \leq \left(L + \frac{L^2 h_0}{2} \right) \|y_n - \hat{y}_n\| \end{aligned}$$

para todo $h \in (0, h_0)$. Por tanto, podemos tomar $L_{\phi_f} = L + \frac{L^2 h_0}{2}$.

- (b) La función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = f \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right).$$

Sección 4.1

1. Para cada uno de los métodos explícitos siguientes, demostrar que si f satisface las hipótesis H_f , entonces la correspondiente función de incremento satisface las hipótesis (H_{MN}) .
 - (a) Predictor-corrector Euler/Trapezio, (3.3)–(3.4).
 - (b) Euler modificado, (3.5).
 - (c) Regla del punto medio, (3.7).
-

Solución. (a) La función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \frac{1}{2} \left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \right).$$

Al tratarse de una composición de funciones continuas, es obviamente continua. También es inmediato ver que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$. Así que sólo queda comprobar que ϕ_f es Lipschitz con respecto a la variable y_n .

Se tiene que

$$\begin{aligned} \|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| &\leq \frac{1}{2} \|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\ &\quad + \frac{1}{2} \|f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) - f(x_n + h, \hat{y}_n + hf(x_n, \hat{y}_n))\| \\ &\leq \frac{L}{2} \|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{L}{2} \|y_n + hf(x_n, y_n) - (\hat{y}_n + hf(x_n, \hat{y}_n))\| \\ &\leq \frac{L}{2} \|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{L}{2} \|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{Lh}{2} \|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\ &\leq \left(L + \frac{L^2 h}{2} \right) \|y_n - \hat{y}_n\| \leq \left(L + \frac{L^2 h_0}{2} \right) \|y_n - \hat{y}_n\| \end{aligned}$$

para todo $h \in (0, h_0)$. Por tanto, podemos tomar $L_{\phi_f} = L + \frac{L^2 h_0}{2}$.

- (b) La función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = f \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right).$$

Al tratarse de una composición de funciones continuas, es obviamente continua. También es inmediato ver que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$. Así que sólo queda comprobar que ϕ_f es Lipschitz con respecto a la variable y_n .

Se tiene que

$$\begin{aligned}
& \|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \\
& \leq \|f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)) - f(x_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n + \frac{h}{2}f(x_n, \hat{y}_n))\| \\
& \leq L\|y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) - (\hat{y}_n + \frac{h}{2}f(x_n, \hat{y}_n))\| \\
& \leq L\|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{Lh}{2}\|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\
& \leq \left(L + \frac{L^2h}{2}\right)\|y_n - \hat{y}_n\| \leq \left(L + \frac{L^2h_0}{2}\right)\|y_n - \hat{y}_n\|
\end{aligned}$$

para todo $h \in (0, h_0)$. Por tanto, podemos tomar $L_{\phi_f} = L + \frac{L^2h_0}{2}$.

(c) La función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) = 2f(x_n + h, y_{n+1}).$$

Al tratarse de una composición de funciones continuas, es obviamente continua. También es inmediato ver que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$. Así que sólo queda comprobar que ϕ_f es Lipschitz con respecto a la variable y_n .

Se tiene que

$$\begin{aligned}
& \|\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}; h)\| \\
& \leq 2\|f(x_n + h, y_{n+1}) - f(x_n + h, \hat{y}_{n+1})\| \leq 2L\|y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos tomar $L_{\phi_f} = 2L$.

2. Para cada uno de los métodos implícitos siguientes, demostrar que si f satisface las hipótesis H_f , entonces la correspondiente función de incremento está bien definida para h pequeño y satisface las hipótesis (H_{MN}) .

(a) Método de Euler implícito, (3.12).

(b) Método RK de colocación de parámetro $c_1 = 1/2$, (3.13).

Solución. Empezamos probando un resultado general que puede ser útil al estudiar métodos implícitos.

Dada $\phi_0 \in C([a, b] \times \mathbb{R}^{kd} \times [0, \infty))$, definimos una sucesión $\{\phi_n\}$ mediante

$$\phi_{n+1} = G(\phi_n),$$

para una cierta función de iteración G . Si G es continua y contractiva en $L^\infty(K)$ para un cierto $K \subset [a, b] \times \mathbb{R}^{kd} \times [0, \infty)$, entonces existe un único punto fijo de G , y este punto fijo, que se puede obtener como límite $\phi = \lim \phi_n$, es una función continua en K . En efecto, si

$$\|G(\phi) - G(\hat{\phi})\|_{L^\infty(K)} \leq L\|\phi - \hat{\phi}\|_{L^\infty(K)}$$

para algún $L < 1$, entonces, para todo $m \geq n$,

$$\|\phi_m - \phi_n\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{L^n}{1 - L} \|\phi_1 - \phi_0\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{L^n}{1 - L} C_K.$$

Así, la sucesión es uniformemente de Cauchy en la norma de la convergencia uniforme. Por tanto existe el límite y es continuo. La unicidad es consecuencia inmediata de la contractividad.

Lo interesante del resultado es que la misma cuenta que sirve para probar que la función de incremento ϕ_f está bien definida para $h \leq h_0$ demuestra que la ϕ_f es continua en ese rango de valores de h .

(a) Para el método de Euler implícito la función de incremento es un punto fijo de la aplicación

$$G(\phi) = f(x_n + h, y_n + h\phi).$$

Por consiguiente,

$$\|G(\phi) - G(\hat{\phi})\| \leq L_f h \|\phi - \hat{\phi}\|.$$

Así pues, si $h \leq h_0 \leq 1/L_f$, siendo L_f una constante de Lipschitz para f con respecto a y en norma infinito, entonces la función G es contractiva en norma infinito en cualquier subconjunto compacto K de

$[a, b] \times \mathbb{R}^d \times [0, h_0]$. Por consiguiente G tiene un único punto fijo que es continuo en $[a, b] \times \mathbb{R}^d \times [0, h_0]$.

En cuanto a la contractividad, tenemos que

$$\begin{aligned} & \|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \\ & \leq \|f(x_n + h, y_n + h\phi_f(x_n, y_n; h)) - f(x_n + h, \hat{y}_n + h\phi_f(x_n, \hat{y}_n; h))\| \\ & \leq L_f \|y_n - \hat{y}_n\| + L_f h \|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $h \leq h_0 < 1/L_f$, tenemos que

$$\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \leq \frac{1}{1 - L_f h_0} \|y_n - \hat{y}_n\|,$$

y la función de incremento satisface la condición de Lischitz deseada con $L_{\phi_f} = \frac{1}{1 - L_f h_0}$.

Finalmente, es trivial comprobar que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$.

(b) Este método no es ni más ni menos que la regla implícita del punto medio. Su función de incremento es un punto fijo de la aplicación

$$G(\phi) = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\phi).$$

Por consiguiente,

$$\|G(\phi) - G(\hat{\phi})\| \leq \frac{L_f h}{2} \|\phi - \hat{\phi}\|.$$

Así pues, si $h \leq h_0 \leq 2/L_f$, siendo L_f una constante de Lipschitz para f con respecto a y en norma infinito, entonces la función G es contractiva en norma infinito en cualquier subconjunto compacto K de $[a, b] \times \mathbb{R}^d \times [0, h_0]$. Por consiguiente G tiene un único punto fijo que es continuo en $[a, b] \times \mathbb{R}^d \times [0, h_0]$.

En cuanto a la contractividad, tenemos que

$$\begin{aligned} & \|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \\ & \leq \|f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\phi_f(x_n, y_n; h)) - f(x_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n + \frac{h}{2}\phi_f(x_n, \hat{y}_n; h))\| \\ & \leq L_f \|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{L_f h}{2} \|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $h \leq h_0 < 2/L_f$, tenemos que

$$\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \leq \frac{1}{1 - \frac{L_f h_0}{2}} \|y_n - \hat{y}_n\|,$$

y la función de incremento satisface la condición de Lischitz deseada con $L_{\phi_f} = \frac{1}{1 - \frac{L_f h_0}{2}}$.

Finalmente, es trivial comprobar que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$.

Sección 4.2

1. Consideramos un método de un sólo paso con $|\alpha_0| > 1$. Demostrar que no es 0-estable. *Indicación:* Aplicárselo a un problema con $f = 0$ y valores de arranque $y_0 = 0$ e $\hat{y}_0 = h$.
-

Solución. Estamos ante un método de la forma

$$y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\phi_f(x_n, y_n; h).$$

Si $f = 0$, entonces $\phi_f = 0$, y el método se reduce a la recurrencia $y_{n+1} = -\alpha_0 y_n$, cuya solución general es $y_n = (-\alpha_0)^n y_0$. Consideramos dos soluciones distintas de esta recurrencia (en ambos casos sin ningún tipo de perturbación), $y_n = 0$, $\hat{y}_n = h(-\alpha_0)^n$. Se tiene que $|y_0 - \hat{y}_0| = h$, y que $\max_{1 \leq n \leq N} |y_n - \hat{y}_n| = h|\alpha_0|^N$. Si el método fuera 0-estable se tendría entonces que existe una constante C tal que $h|\alpha_0|^N \leq Ch$, lo que es obviamente falso si $|\alpha_0| > 1$.

2. Probar que la regla del trapecio no es convergente de orden 3.
-

Solución. Consideramos el problema

$$y'(x) = \frac{x^2}{2}, \quad y(0) = 0,$$

cuya solución es $y(x) = x^3/3!$. La solución numérica producida por la regla del trapecio satisface la recurrencia

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(\frac{x_n^2}{2} + \frac{x_{n+1}^2}{2} \right),$$

es decir

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h^3}{4}(2n^2 + 2n + 1).$$

Es fácil comprobar que la solución general de esta recurrencia viene dada por

$$y_n = K + \frac{n^3 h^3}{3!} - \frac{nh^3}{12},$$

siendo K una constante arbitraria. Si tomamos como valor de arranque $y_0 = 0$, lo que supone que $|y(x_0) - y_0| = 0$, entonces $K = 0$, y se tiene que

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n| = \frac{bh^2}{12} \neq O(h^3).$$

Por consiguiente, el método no es de orden 3.

3. Consideramos el problema de valor inicial $y'(x) = \int_0^{y(x)} e^{-s^2} ds$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 1$. Suponiendo que no se comete ningún error en el valor de arranque, $y_0 = y(x_0)$, determinar un valor h_0 que garantice un error menor que 10^{-3} al resolver el problema con $0 < h \leq h_0$ por medio de:

- (a) el método de Euler implícito;
- (b) la regla del trapecio.

Solución. Tanto el método de Euler implícito como la regla del trapecio son métodos de un paso. Por consiguiente, en ambos casos

$$|y(x_n) - y_n| \leq e^{L(x_n - x_0)} \left(|y(x_0) - y_0| + (x_n - x_0) \max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{|R_n|}{h} \right).$$

Como estamos suponiendo que no se comete ningún error en el valor de arranque, y teniendo en cuenta que $x_n - x_0 \leq b - a = 1$, se tiene que

$$|y(x_n) - y_n| \leq e^L \max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{|R_n|}{h}.$$

Para estimar la constante de Lipschitz con respecto a y de la función del lado derecho usamos el Teorema del Valor Medio. Se tiene que

$$|f(x, y) - f(x, \hat{y})| = \left| \int_0^y e^{-s^2} ds - \int_0^{\hat{y}} e^{-s^2} ds \right| = e^{-\xi^2} |y - \hat{y}| \leq |y - \hat{y}|$$

para algún valor ξ intermedio entre y e \hat{y} . Por consiguiente, podemos tomar $L = 1$.

Queda por tanto tan sólo estimar el residuo. Esta es la parte en la que hay diferencia entre los dos métodos.

(a) Usando desarrollos de Taylor se obtiene fácilmente que el residuo del método de Euler implícito satisface

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \\ &= y(x_n + h) - y(x_n) - hy'(x_n + h) \\ &= \left(\frac{1}{2}y''(\bar{\xi}_n) - y''(\bar{\eta}_n)\right) h^2, \end{aligned}$$

donde $\bar{\xi}_n$ y $\bar{\eta}_n$ son puntos intermedios, $\bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n \in [x_n, x_{n+1}]$. Por consiguiente,

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{|R_n|}{h} \leq Ch, \quad C = \frac{3}{2} \max_{x \in [a, b]} |y''(x)|.$$

Toca entonces estimar la derivada segunda. Para ello derivamos la ecuación, y obtenemos que

$$y''(x) = e^{-y^2(x)} y'(x).$$

Nótese que $y'(x) > 0$ para todo $x > 0$. En efecto, $y'(0) = \int_0^1 e^{-s^2} ds > 0$. Sea \bar{x} el primer punto a la derecha de 0 en el que se anula y' . En ese punto, $y(\bar{x}) > y(0) = 1$, y por consiguiente $0 = y'(\bar{x}) = \int_0^{y(\bar{x})} e^{-s^2} ds > 0$, una contradicción. Como consecuencia se tiene que $y'' > 0$ y que

$$\int_0^1 e^{-s^2} ds = y'(0) \leq y'(x) \leq \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}/2.$$

Esta estimación de y' permite a su vez estimar y . En efecto, si la integramos en $(0, x)$ se obtiene que

$$y'(0) x < y(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} x.$$

Por lo tanto, si $x \in [0, 1]$, se tiene que $1 \leq y(x) \leq 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En cuanto a la derivada segunda, usando que $y' > 0$ se tiene que

$$0 < y''(x) \leq e^{-y(0)^2} y'(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2e}.$$

Poniendo todo junto, obtenemos que:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{3\sqrt{\pi}}{4e} h_0$$

para todo $h \leq h_0$. Para que el error esté con seguridad dentro del margen estipulado basta con que

$$h_0 \leq \frac{4e \cdot 10^{-3}}{3\sqrt{\pi}}.$$

(b) Sabemos que el residuo de la regla del trapecio verifica que

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{|R_n|}{h} \leq Ch^2, \quad C = \frac{5}{12} \max_{x \in [a,b]} |y'''(x)|.$$

Toca entonces estimar la derivada tercera. Derivando la EDO una vez más se tiene que,

$$y'''(x) = -e^{-y^2(x)} 2y(x)(y'(x))^2 + e^{-y^2(x)} y''(x).$$

Usando las estimaciones ya obtenidas tenemos que

$$-2 \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \frac{\pi}{4} \leq -2y(x)(y'(x))^2 + y''(x) \leq -2(y'(0))^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2e}.$$

Por consiguiente, $|-2y(x)(y'(x))^2 + y''(x)| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \frac{\pi}{2}$. Como por otra parte $e^{-y^2(x)} \leq e^{-y^2(0)} = 1/e$, se obtiene finalmente que

$$|y'''(x)| \leq \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \frac{\pi}{2e}.$$

Llegamos así a

$$|y(x_n) - y_n| \leq e \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \frac{\pi}{2e} \frac{5}{12} h_0^2$$

para todo $h \leq h_0$. Para que el error esté con seguridad dentro del margen estipulado basta con que

$$h_0 \leq \left(\frac{48 \cdot 10^{-3}}{5\pi (2 + \sqrt{\pi})} \right)^{1/2}.$$

4. Consideramos un método de un paso con $\alpha_0 = -1$. Sean $\{u_n\}_{n=0}^N$ y $\{v_n\}_{n=0}^N$ satisfaciendo (4.5), con ϕ_f verificando las hipótesis (H_{MN}) . Demostrar que existe una constante $K > 0$ tal que

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - v_n\| \geq K \max_{0 \leq n \leq N} \left\| u_0 - v_0 + h \sum_{j=0}^{n-1} (\delta_j - \gamma_j) \right\|.$$

Concluir de lo anterior que si existe un problema de valor inicial tal que $R_n = Ch^{p+1}$, con una constante C independiente de n , entonces el método no puede tener orden de convergencia mayor que p . Como aplicación, demostrar que el método de Euler modificado no es convergente de orden 3.

Solución. Restando las ecuaciones para u_n y v_n tenemos que

$$u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n + h(\phi_f(x_n, u_n; h) - \phi_f(x_n, v_n; h)) + h(\delta_n - \gamma_n).$$

Iterando esta recurrencia se llega a

$$u_n - v_n = u_0 - v_0 + h \sum_{j=0}^{n-1} (\phi_f(x_j, u_j; h) - \phi_f(x_j, v_j; h)) + h \sum_{j=0}^{n-1} (\delta_j - \gamma_j).$$

Usando ahora que $\|a + b\| \geq \|a\| - \|b\|$, y que

$$\begin{aligned} h \left\| \sum_{j=0}^{n-1} (\phi_f(x_j, u_j; h) - \phi_f(x_j, v_j; h)) \right\| &\leq Lh \sum_{j=0}^{n-1} \|u_j - v_j\| \\ &\leq LhN \max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - v_n\| \leq L(b-a) \max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - v_n\|, \end{aligned}$$

llegamos a

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - v_n\| &\geq \max_{0 \leq n \leq N} \left\| u_0 - v_0 + h \sum_{j=0}^{n-1} (\delta_j - \gamma_j) \right\| \\ &\quad - L(b-a) \max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - v_n\|, \end{aligned}$$

y de ahí inmediatamente al resultado deseado, con $K = 1/(1+L(b-a))$.

Tomando $u_n = y(x_n)$, $\delta_n = R_n/h$, $v_n = y_n$, $\gamma_n = 0$, se obtiene que

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\| \geq K \max_{0 \leq n \leq N} \left\| y(x_0) - y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} R_n \right\|.$$

Si existe un PVI tal que $R_n = Ch^{p+1}$, tomando $y_0 = y(x_0)$ para ese problema se tiene que

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\| \geq KCNh^{p+1} = KC(b-a)h^p \neq O(h^{p+1}),$$

y el método es a lo sumo convergente de orden p .

Ahora aplicamos el resultado al método de Euler modificado. Para este método se tiene un residuo

$$R_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf \left(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y(x_n)) \right).$$

Veamos cuál es el desarrollo (hasta orden 2) del término “difícil”,

$$\begin{aligned} f \left(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}y'(x_n) \right) &= \underbrace{f(x_n, y(x_n))}_{y'(x_n)} \\ &+ \frac{h}{2} \underbrace{\left(f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n))(y^J)'(x_n) \right)}_{y''(x_n)} \\ &+ \frac{h^2}{8} \left(f_{xx} + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(y^J)'(x_n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(y^J)'(x_n)(y^L)'(x_n) \right) \left(x_n + \frac{\xi}{2}, y(x_n) + \frac{\xi}{2}y'(x_n) \right). \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} R_n &= y'''(\bar{\eta}_n) \frac{h^3}{3!} - \frac{h^3}{8} \left(f_{xx} + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(y^J)'(x_n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(y^J)'(x_n)(y^L)'(x_n) \right) \left(x_n + \frac{\xi}{2}, y(x_n) + \frac{\xi}{2}y'(x_n) \right). \end{aligned}$$

Esto demuestra por una parte que $\max_{0 \leq n \leq N-1} \|R_n\|/h = O(h^2)$, y el método es por tanto convergente con orden al menos 3 (recordemos

que es 0-estable, pues es un método de un paso con $\alpha_0 = -1$). Por otra parte, si consideramos el problema

$$y'(x) = \frac{x^2}{2}, \quad y(0) = 0,$$

se tiene que $R_n = h^3(\frac{1}{3!} - \frac{1}{8}) = \frac{h^3}{24}$, por lo que podemos asegurar, empleando el resultado probado unos párrafos más arriba, que el método no tiene orden de convergencia superior a 2.

5. Intentar obtener un resultado análogo al del problema anterior para métodos de más de una paso.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k \alpha_j (u_{n+j} - v_{n+j}) \\ &= h(\phi_f(x_n, u_n, \dots, u_{n+k-1}; h) - \phi_f(x_n, v_n, \dots, v_{n+k-1}; h)) \\ &+ h(\delta_n - \gamma_n). \end{aligned}$$

Por una parte,

$$\left\| \sum_{j=0}^k \alpha_j (u_{n+j} - v_{n+j}) \right\| \leq \sum_{j=0}^k |\alpha_j| \max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - v_n\|.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} & \|h(\phi_f(x_n, u_n, \dots, u_{n+k-1}; h) - \phi_f(x_n, v_n, \dots, v_{n+k-1}; h)) + h(\delta_n - \gamma_n)\| \\ & \geq \|h(\delta_n - \gamma_n)\| - hL_\phi \sum_{j=0}^{k-1} \|u_{n+j} - v_{n+j}\| \end{aligned}$$

Así pues,

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|u_n - v_n\| \geq \frac{h}{\sum_{j=0}^k |\alpha_j| + h_0 L_\phi} \max_{0 \leq n \leq N-k} \|\delta_n - \gamma_n\|.$$

Si $R_n = Ch^{p+1}$, $C \neq 0$, esto dice que

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\| \geq Ch^{p+1}.$$

El método no puede tener por tanto orden mayor que $p + 1$.

Este resultado no es óptimo, pero no hemos conseguido nada mejor (de momento).

Sección 4.3

1. Decidir si los siguientes métodos son consistentes y en caso afirmativo determinar el orden de consistencia.

(a) Predictor-corrector Euler/Trapecio, (3.3)–(3.4).

(b) Regla de Simpson,

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_{n+2}, y_{n+2})). \quad (4.11)$$

(c) Fórmula BDF de dos pasos,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(x_{n+2}, y_{n+2}). \quad (4.12)$$

(d) Método de colocación de parámetro $c_1 = 1/2$, (3.13).

Solución. (a) Por un lado tenemos que $\sum_{j=0}^1 \alpha_j = 0$ y que $\sum_{j=0}^1 j\alpha_j = 1$. Por otro lado, la función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \frac{1}{2} \left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \right).$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \phi_f(x, y(x); 0) &= \frac{1}{2} \left(f(x, y(x)) + f(x, y(x)) \right) \\ &= f(x, y(x)) = \sum_{j=0}^1 j\alpha_j f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Por tanto, el método es consistente.

Para estudiar el orden de consistencia tenemos que considerar el residuo,

$$\begin{aligned} R_n &= \underbrace{y(x_n + h)}_{F(h)} \\ &\quad - \left(\underbrace{y(x_n) + \frac{h}{2} \left(f(x_n, y(x_n)) + f(x_n + h, y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))) \right)}_{G(h)} \right). \end{aligned}$$

Supongamos que $f \in C^1$ (y por tanto que $y \in C^2$). Entonces, por un lado

$$F(h) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(\bar{\xi}_n)}{2}h^2.$$

Por otro,

$$\begin{aligned} G(h) &= y(x_n) + \frac{h}{2} \left(f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) + O(h) \right) \\ &= y(x_n) + y'(x_n)h + O(h^2) \end{aligned}$$

Por consiguiente, $R_n = O(h^2)$, y el método es consistente de orden al menos 1.

Supongamos ahora que $f \in C^2$ (y por tanto que $y \in C^3$). Entonces, por un lado

$$F(h) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(\bar{\xi}_n)}{3!}h^3.$$

Por otro,

$$G(h) = y(x_n) + \frac{h}{2} \left(\underbrace{y'(x_n) + f(x_n + h, y(x_n) + hy'(x_n))}_{g(h)} \right).$$

Puesto que

$$\begin{aligned} g(0) &= 2y'(x_n), \\ g'(0) &= f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n))(y^J)'(x_n) = y''(x_n), \\ g''(h) &= f_{xx}(x_n + h, y(x_n) + hy'(x_n)) \\ &\quad + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n + h, y(x_n) + hy'(x_n))(y^J)'(x_n) \\ &\quad + \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x_n, y(x_n))(y^J)'(x_n)(y^L)'(x_n), \end{aligned}$$

se concluye que

$$R_n = h^3 \left(\frac{y'''(\bar{\xi}_n)}{3!} - \frac{g''(\bar{\theta})}{4} \right),$$

donde $\bar{\theta} \in [0, h]$. Concluimos que $R_n = O(h^3)$, y el método es consistente de orden al menos 2.

Para ver que el método no es consistente de orden 3, se lo aplicamos al PVI

$$y'(x) = x^2/2, \quad x \in [0, b], \quad y(0) = 1.$$

Es inmediato comprobar que $f_{xx} = 1$, $f_{xy^J} = 0$, $f_{y^J y^L} = 0$, y por consiguiente que $g''(h) = 1$. Como por otra parte $y'''(x) = 1$, concluimos que

$$R_n = h^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4} \right) \neq O(h^4),$$

y por tanto el método no es consistente de orden 3.

(b) Por un lado tenemos que $\sum_{j=0}^2 \alpha_j = 0$ y que $\sum_{j=0}^2 j\alpha_j = 2$. Por otro lado, la función de incremento del método está dada por

$$\begin{aligned} \phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) = \\ \frac{1}{3}(f(x_n, y_n) + 4f(x_n + h, y_{n+1}) + f(x_n + 2h, y_n + h\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h))). \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \phi_f(x, y(x), y(x); 0) &= \frac{1}{3}(f(x, y(x)) + 4f(x, y(x)) + f(x, y(x))) \\ &= 2f(x, y(x)) = \sum_{j=0}^1 j\alpha_j f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Por tanto, el método es consistente.

Para ver el orden de consistencia del método estudiamos su residuo,

$$R_n = y(x_{n+2}) - y(x_n) - \frac{h}{3}(y'(x_n) + 4y'(x_{n+1}) + y'(x_{n+2})).$$

Si $f \in C^1$, entonces

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(\bar{\xi}_n)}{2}h^2 - y(x_n) \\ &\quad - \frac{h}{3}(y'(x_n) + 4y'(x_n) + 4y''(\bar{\eta}_n)h + y'(x_n) + 2hy''(\bar{\zeta}_n)) \\ &= O(h^2), \end{aligned}$$

y el método es al menos de orden 1.

Si $f \in C^2$, entonces

$$\begin{aligned}
R_n &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(\bar{\xi}_n)}{3!}h^3 - y(x_n) \\
&\quad - \frac{h}{3} \left(y'(x_n) + 4y'(x_n) + 4y''(x_n)h + 4\frac{y'''(\bar{\eta}_n)}{2}h^2 \right. \\
&\quad \left. + y'(x_n) + y''(x_n)2h + \frac{y'''(\zeta_n)}{2}4h^2 \right) \\
&= O(h^3),
\end{aligned}$$

y el método es al menos de orden 2.

Para ver que el método no es consistente de orden 3, se lo aplicamos al PVI

$$y'(x) = x^2/2, \quad x \in [0, b], \quad y(0) = 1,$$

cuya solución verifica que $y'''(x) = 1$. Sustituyendo en el desarrollo que acabamos de obtener para el residuo, se llega a

$$R_n = h^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{7}{3!}h^3 \neq O(h^4),$$

y el método no tiene orden de consistencia 3.

(c) Por un lado tenemos que $\sum_{j=0}^2 \alpha_j = 0$ y que $\sum_{j=0}^2 j\alpha_j = 2/3$. Por otro lado, la función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) = \frac{2}{3}f(x_n + 2h, \frac{4}{3}y_{n+1} - \frac{1}{3}y_n + h\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h)).$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
\phi_f(x, y(x), y(x); 0) &= \frac{2}{3}f(x, \frac{4}{3}y(x) - \frac{1}{3}y(x)) \\
&= \frac{2}{3}f(x, y(x)) = \sum_{j=0}^1 j\alpha_j f(x, y(x)).
\end{aligned}$$

Por tanto, el método es consistente.

Para ver el orden de consistencia del método estudiamos su residuo,

$$R_n = y(x_{n+2}) - \frac{4}{3}y(x_{n+1}) + \frac{1}{3}y(x_n) - \frac{2}{3}hy'(x_{n+2}).$$

Si $f \in C^1$, entonces

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n) + y'(x_n)2h + \frac{y''(\bar{\xi}_n)}{2}(2h)^2 \\ &\quad - \frac{4}{3} \left(y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(\bar{\eta}_n)}{2}h^2 \right) + \frac{1}{3}y(x_n) \\ &\quad - \frac{2h}{3}(y'(x_n) + y''(\bar{\zeta}_n)2h) = O(h^2), \end{aligned}$$

y el método es al menos de orden 1.

Si $f \in C^2$, entonces

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n) + y'(x_n)2h + \frac{y''(x_n)}{2}(2h)^2 + \frac{y'''(\bar{\xi}_n)}{3!}(2h)^3 \\ &\quad - \frac{4}{3} \left(y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(\bar{\eta}_n)}{3!}h^3 \right) + \frac{1}{3}y(x_n) \\ &\quad - \frac{2h}{3}(y'(x_n) + y''(x_n)2h + \frac{y'''(\bar{\zeta}_n)}{2}(2h)^2) = O(h^3), \end{aligned}$$

y el método es al menos de orden 2.

Para ver que el método no es consistente de orden 3, se lo aplicamos al PVI

$$y'(x) = x^2/2, \quad x \in [0, b], \quad y(0) = 1,$$

cuya solución verifica que $y'''(x) = 1$. Sustituyendo en el desarrollo que acabamos de obtener para el residuo, se llega a

$$R_n = h^3 \left(\frac{8}{3!} - \frac{4}{3 \cdot 3!} - \frac{4}{3} \right) = -\frac{2}{9}h^3 \neq O(h^4),$$

y el método no tiene orden de consistencia 3.

(d) Por un lado tenemos que $\sum_{j=0}^1 \alpha_j = 0$ y que $\sum_{j=0}^1 j\alpha_j = 1$. Por otro lado, la función de incremento del método está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\phi_f(x_n, y_n; h)\right).$$

Así pues,

$$\phi_f(x, y(x); 0) = f(x, y(x)) = \sum_{j=0}^1 j\alpha_j f(x, y(x)).$$

Por tanto, el método es consistente.

En cuanto al orden de consistencia, es fácil darse cuenta de que este método es en realidad la regla del punto medio implícita,

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right).$$

Este método se estudia como miembro de una cierta familia (los llamados θ -métodos) en el problema 4 de esta misma sección, y se demuestra que tiene orden de consistencia 2.

2. Determinar qué condiciones deben cumplir las constantes α y β para que el método

$$y_{n+1} = y_n + \alpha hf(x_n, y_n) + \beta hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

sea: (i) consistente; (ii) consistente de orden al menos uno; y (iii) consistente de orden al menos dos. ¿Es consistente de orden 3 para alguna elección de α y β ?

Solución. (i) La primera de las condiciones de consistencia se satisface para cualquier valor de los parámetros, $\sum_{j=0}^1 \alpha_j = 1 - 1 = 0$. En cuanto a la segunda, dado que

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \alpha f(x_n, y_n) + \beta f(x_n + h, y_n + h\phi_f(x_n, y_n; h)),$$

se tiene que

$$\phi_f(x, y(x); 0) = (\alpha + \beta)f(x, y(x)),$$

y la segunda condición de consistencia se cumplirá, y por tanto el método será consistente, si y sólo si $\alpha + \beta = 1$ (nótese que $\sum_{j=0}^1 j\alpha_j = 1$).

(ii) Supongamos que $f \in C^1$ (lo que implica que $y \in C^2$). Entonces, si

$$\alpha + \beta = 1,$$

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n + h) - y(x_n) - h(\alpha y'(x_n) + \beta y'(x_n + h)) \\ &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(\bar{\xi}_n)}{2}h^2 \\ &\quad - y(x_n) - h\left(\alpha y'(x_n) + \beta(y'(x_n) + hy''(\bar{\eta}_n))\right) \\ &= \left(\frac{y''(\bar{\xi}_n)}{2} - \beta y''(\bar{\eta}_n)\right)h^2 = O(h^2). \end{aligned}$$

Así pues, si $\alpha + \beta = 1$, el método no es sólo consistente, sino que también es consistente de orden 1.

(iii) Supongamos ahora que $f \in C^2$ (lo que implica que $y \in C^3$). Entonces, si $\alpha + \beta = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(\xi_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi_n)}{3!}h^3 \\ &\quad - y(x_n) - h\left(\alpha y'(x_n) + \beta(y'(x_n) + hy''(x_n) + h^2 \frac{y'''(\bar{\eta}_n)}{2})\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)y''(\xi_n)h^2 + \left(\frac{y'''(\xi_n)}{3!} - \beta \frac{y'''(\bar{\eta}_n)}{2}\right)h^3, \end{aligned}$$

y R_n no es una $O(h^3)$ para todo PVI a menos que $\beta = 1/2$ (para comprobarlo basta tomar un PVI tal que $y''(x) = 1$). Así que el método es consistente de orden 2 si y sólo si $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$.

Veamos que el método no es consistente de orden 3 para ninguna elección de los parámetros. De serlo para alguna tendría que ser para $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$. Ahora bien, en este caso

$$R_n = \left(\frac{y'''(\xi_n)}{3!} - \frac{y'''(\bar{\eta}_n)}{4}\right)h^3.$$

Si consideramos un PVI con $y'''(x) = 1$, se tiene entonces que

$$R_n = \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4}\right)h^3 \neq O(h^4),$$

y el método no es de orden 3.

3. Considérese el método

$$y_{n+1} = y_n - \frac{5}{2}hf(x_n, y_n) + \frac{7}{2}hf\left(x_n + \frac{h}{7}, y_n + \frac{h}{7}f(x_n, y_n)\right).$$

- (a) Escribir la función de incremento ϕ_f y comprobar que cumple las hipótesis (H_{MN}).
- (b) Decidir si es consistente y, en caso afirmativo, hallar el orden de consistencia.

Solución. (a) La función de incremento del método es

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = -\frac{5}{2}f(x_n, y_n) + \frac{7}{2}f\left(x_n + \frac{h}{7}, y_n + \frac{h}{7}f(x_n, y_n)\right).$$

Es obvio que si $f = 0$ entonces $\phi_f = 0$, y también que si f es continua, ϕ_f también lo es, en todas sus variables. De manera que sólo queda comprobar que ϕ_f es Lipschitz respecto a la variable y_n . Veamos que también se cumple. Esto será consecuencia de que f es Lipschitz respecto a y (con constante L). En efecto,

$$\begin{aligned} \|\phi(x_n, y_n; h) - \phi(x_n, \hat{y}_n; h)\| &\leq \frac{5}{2}\|f(x_n, y_n) - f(x_n, \hat{y}_n)\| \\ &\quad + \frac{7}{2}\|f\left(x_n + \frac{h}{7}, y_n + \frac{h}{7}f(x_n, y_n)\right) - f\left(x_n + \frac{h}{7}, \hat{y}_n + \frac{h}{7}f(x_n, \hat{y}_n)\right)\| \\ &\leq \frac{5L}{2}\|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{7L}{2}(\|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{hL}{7}\|y_n - \hat{y}_n\|) \\ &\leq \left(6L + \frac{L^2h_0}{2}\right)\|y_n - \hat{y}_n\| \end{aligned}$$

para todo $h \in (0, h_0]$.

(b) Para este método el residuo satisface

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hg(h), \\ g(h) &= -\frac{5}{2}y'(x_n) + \frac{7}{2}f\left(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7}y'(x_n)\right). \end{aligned}$$

Supongamos que $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^d)$, y por tanto que $y \in C^3([a, b])$. Por un lado tenemos que

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(\bar{\xi}_n)}{6}h^3.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} g'(h) &= \frac{7}{2} \left(\frac{1}{7} f_x \left(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7} y'(x_n) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{7} \sum_{J=1}^d f_{y^J} \left(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7} y'(x_n) \right) (y^J)'(x_n) \right) \\ g''(h) &= \frac{7}{2} \left(\frac{1}{7^2} f_{xx} \left(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7} y'(x_n) \right) \right. \\ &\quad + \frac{2}{7^2} \sum_{J=1}^d f_{xy^J} \left(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7} y'(x_n) \right) (y^J)'(x_n) \\ &\quad \left. + \frac{1}{7^2} \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L} \left(x_n + \frac{h}{7}, y(x_n) + \frac{h}{7} y'(x_n) \right) (y^J)'(x_n) (y^L)'(x_n) \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} g(0) &= -\frac{5}{2} y'(x_n) + \frac{7}{2} f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n), \\ g'(0) &= \frac{1}{2} \left(f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) (y^J)'(x_n) \right) = \frac{y''(x_n)}{2}, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} g(h) &= g(0) + g'(0)h + \frac{g''(\bar{\theta}_n)}{2}h^2 \\ &= y'(x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}h + \frac{h^2}{28} \left(f_{xx} \left(x_n + \frac{\bar{\theta}_n}{7}, y(x_n) + \frac{\bar{\theta}_n}{7} y'(x_n) \right) \right. \\ &\quad + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J} \left(x_n + \frac{\bar{\theta}_n}{7}, y(x_n) + \frac{\bar{\theta}_n}{7} y'(x_n) \right) (y^J)'(x_n) \\ &\quad \left. + \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L} \left(x_n + \frac{\bar{\theta}_n}{7}, y(x_n) + \frac{\bar{\theta}_n}{7} y'(x_n) \right) (y^J)'(x_n) (y^L)'(x_n) \right). \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned}
R_n = & h^3 \left(\frac{y'''(\bar{\xi}_n)}{6} - \frac{1}{28} \left(f_{xx} \left(x_n + \frac{\bar{\theta}_n}{7}, y(x_n) + \frac{\bar{\theta}_n}{7} y'(x_n) \right) \right. \right. \\
& + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J} \left(x_n + \frac{\bar{\theta}_n}{7}, y(x_n) + \frac{\bar{\theta}_n}{7} y'(x_n) \right) (y^J)'(x_n) \\
& \left. \left. + \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L} \left(x_n + \frac{\bar{\theta}_n}{7}, y(x_n) + \frac{\bar{\theta}_n}{7} y'(x_n) \right) (y^J)'(x_n) (y^L)'(x_n) \right) \right).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^d)$, se tiene que

$$\tau = \max_{0 \leq n \leq N} \|R_n\|/h = O(h^2),$$

y el orden de consistencia del método es al menos 2.

Para ver que el método no tiene un orden de consistencia mayor, consideramos el PVI

$$y'(x) = x^2/2, \quad y(0) = 0.$$

Nótese que $f \in C^\infty$ para este problema, y que sin embargo

$$\tau = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{28} \right) h^2 \neq O(h^3).$$

Por consiguiente el método no tiene orden de consistencia 3.

4. Repetir el ejercicio anterior para el método

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + (1 - \theta)h, \theta y_n + (1 - \theta)y_{n+1}),$$

donde $\theta \in [0, 1]$.

Solución. (a) La función de incremento del método es

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = f(x_n + (1 - \theta)h, y_n + (1 - \theta)\phi_f(x_n, y_n; h)).$$

Obsérvese que el método sólo es explícito cuando $\theta = 1$.

Continuidad. El valor de la función de incremento se puede obtener por iteración de punto fijo,

$$\begin{aligned}\phi_f(x_n, y_n; h) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_f^{[k]}(x_n, y_n; h), \\ \phi_f^{[k]}(x_n, y_n; h) &= F(\phi_f^{[k-1]}(x_n, y_n; h)),\end{aligned}$$

donde la función de iteración está dada por

$$F(\phi) = f(x_n + (1 - \theta)h, y_n + (1 - \theta)h\phi)$$

Por cierto, la función F será contractiva, y por tanto definirá un único punto fijo, si $Lh(1 - \theta) < 1$.

Por ser f una función continua, si $\phi_f^{[k-1]}$ es una función continua, la función $\phi_f^{[k]} = F(\phi_f^{[k-1]})$ también lo será, pues es composición de funciones continuas.

Tomamos como iterante inicial $\phi_f^{[0]} = 0$. Todas las funciones $\phi_f^{[k]}$ son entonces continuas, pero el límite no tiene por qué serlo. Sí lo será si la convergencia es uniforme.

Observamos que $\phi_f^{[k]} = \sum_{j=1}^k (\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]})$. Si la serie converge uniformemente sobre compactos, la sucesión $\{\phi_f^{[k]}\}_{k=1}^{\infty}$ también lo hará, y el límite será una función continua. Ahora bien,

$$\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| = \|F(\phi_f^{[j-1]}) - F(\phi_f^{[j-2]})\| \leq L_f h(1 - \theta) \|\phi_f^{[j-1]} - \phi_f^{[j-2]}\|.$$

Iterando esta relación, concluimos que

$$\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| \leq (L_f h(1 - \theta))^{j-1} \|\phi_f^{[1]}\|.$$

Pero

$$\phi_f^{[1]}(x_n, y_n; h) = f(x_n + (1 - \theta)h, y_n).$$

Por ser f continua, está acotada sobre compactos. Así pues, para cada subconjunto compacto K de $[a, b] \times \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$, existe una constante M_K tal que $\|\phi_f^{[1]}(x_n, y_n; h)\| \leq M_K$ si $(x_n, y_n; h) \in K$. Concluimos que sobre cada compacto $\|\phi_f^{[j]} - \phi_f^{[j-1]}\| \leq M_K (L_f h(1 - \theta))^{j-1}$. Como la serie $\sum_{j=1}^{\infty} (L_f h(1 - \theta))^{j-1}$ es convergente, tenemos, por el criterio M de

Weierstrass, que la convergencia es uniforme sobre K . Esto implica que ϕ_f es continua sobre K . Como el compacto K es arbitrario, concluimos que ϕ_f es una función continua de sus argumentos si $L_f h(1 - \theta) < 1$.

Lipschitz respecto a y_n . Aplicando la desigualdad triangular y la condición de Lipschitz para f ,

$$\begin{aligned} & \|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \\ & \leq L_f \|y_n - \hat{y}_n\| + L_f h(1 - \theta) \|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\|. \end{aligned}$$

Por consiguiente, para cualquier $h_0 < 1/(L_f(1 - \theta))$ se tiene que

$$\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \leq \frac{L_f}{1 - L_f h_0(1 - \theta)} \|y_n - \hat{y}_n\|, \quad 0 < h < h_0.$$

Así pues, la función ϕ_f es Lipschitz con respecto a su variable y_n con constante $L_{\phi_f} = \frac{L_f}{1 - L_f h_0(1 - \theta)}$.

$f \equiv 0 \Rightarrow \phi_f \equiv 0$. Se sigue inmediatamente de la ecuación que define (implícitamente) ϕ_f .

(b) Para este método el residuo satisface

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hg(h), \\ g(h) &= f(x_n + (1 - \theta)h, \theta y(x_n) + (1 - \theta)y(x_n + h)) \end{aligned}$$

Supongamos que $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^d)$, y por tanto que $y \in C^2([a, b])$. Por un lado tenemos que

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = y'(x_n)h + \frac{y''(\xi_n)}{2}h^2.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} g'(h) &= (1 - \theta) \left(f_x(x_n + (1 - \theta)h, \theta y(x_n) + (1 - \theta)y(x_n + h)) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^d f_{y^j}(x_n + (1 - \theta)h, \theta y(x_n) + (1 - \theta)y(x_n + h)) (y^j)'(x_n + h) \right). \end{aligned}$$

Puesto que

$$g(0) = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n),$$

obtenemos que

$$R_n = h^2 \left(\frac{y''(\xi_n)}{2} - (1 - \theta) \left(f_x(x_n + (1 - \theta)\bar{s}_n, \theta y(x_n) + (1 - \theta)y(x_n + \bar{s}_n)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n + (1 - \theta)\bar{s}_n, \theta y(x_n) + (1 - \theta)y(x_n + \bar{s}_n)) (y^J)'(x_n + \bar{s}_n) \right) \right).$$

Por consiguiente, si $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^d)$, se tiene que

$$\tau = \max_{0 \leq n \leq N} \|R_n\|/h = O(h),$$

y el orden de consistencia del método es al menos 1.

Si $\theta \neq 1/2$ el orden de consistencia es 1. En efecto, si consideramos el PVI

$$y'(x) = x, \quad y(0) = 0,$$

cuyo lado derecho es C^∞ , se tiene que

$$\tau = \left(\frac{1}{2} - (1 - \theta) \right) h^2 \neq O(h^2),$$

y el orden de consistencia del método no puede ser superior a 1.

A continuación veremos que si $\theta = 1/2$ entonces se tiene un orden de consistencia mejor, 2. Suponemos que $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^d)$, y por tanto que $y \in C^3([a, b])$. Podemos tomar ahora un término más en los desarrollos de Taylor. Por un lado tenemos que

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(\bar{\xi}_n)}{6}h^3,$$

y que

$$g'(0) = \frac{1}{2} \left(f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) (y^J)'(x_n) \right) = \frac{y''(x_n)}{2}.$$

Por otro lado,

$$g''(h) = \frac{1}{4} \left(f_{xx}(x_n + \frac{h}{2}, \frac{y(x_n) + y(x_n + h)}{2}) \right. \\ + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n + \frac{h}{2}, \frac{y(x_n) + y(x_n + h)}{2}) (y^J)'(x_n + h) \\ \left. + \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x_n + \frac{h}{2}, \frac{y(x_n) + y(x_n + h)}{2}) (y^J)'(x_n + h) (y^L)'(x_n + h) \right).$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
R_n = & h^3 \left(\frac{y'''(\bar{\xi}_n)}{6} - \frac{1}{8} \left(f_{xx} \left(x_n + \frac{\bar{s}_n}{2}, \frac{y(x_n) + y(x_n + \bar{s}_n)}{2} \right) \right. \right. \\
& + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J} \left(x_n + \frac{\bar{s}_n}{2}, \frac{y(x_n) + y(x_n + \bar{s}_n)}{2} \right) (y^J)'(x_n + \bar{s}_n) \\
& \left. \left. + \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L} \left(x_n + \frac{\bar{s}_n}{2}, \frac{y(x_n) + y(x_n + \bar{s}_n)}{2} \right) (y^J)'(x_n + \bar{s}_n) (y^L)'(x_n + \bar{s}_n) \right) \right).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\tau = O(h^2),$$

y el método tiene orden de consistencia al menos 2.

Para ver que el método no tiene un orden de consistencia mayor, consideramos el PVI

$$y'(x) = x^2/2, \quad y(0) = 1.$$

Nótese que $f \in C^\infty$ para este problema, y que sin embargo

$$\tau = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) h^2 \neq O(h^3).$$

Por consiguiente el método no tiene orden de consistencia 3.

Sección 4.4

1. Comprobar que los autovalores de la matriz compañera del primer polinomio característico son precisamente las raíces de dicho polinomio.
-

Solución. La matriz compañera del polinomio mónico $\rho(\lambda) = \lambda^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \lambda^j$ es

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_{k-1} & -\alpha_{k-2} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veremos, por inducción, que el polinomio característico de esta matriz es $p_A(\lambda) = (-1)^k \rho(\lambda)$, y por tanto que las raíces de $p_A(\lambda)$ y $\rho(\lambda)$ coinciden.

Así pues, queremos demostrar que

$$p_A := \det(A - \lambda I_k) = (-1)^k \rho(\lambda).$$

Empezamos por el caso $k = 1$. En este caso se tiene que

$$p_A = -\alpha_0 - \lambda = (-1)(\lambda + \alpha_0) = \rho_1(\lambda).$$

Supongamos ahora que el resultado es cierto para $k-1$. Para probar que es cierto para k desarrollamos el determinante a lo largo de la última

columna,

$$\det(A - \lambda I_k) = (-1)^k \alpha_0 \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$- \lambda \begin{pmatrix} -\alpha_{k-1} - \lambda & -\alpha_{k-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

El primer determinante es 1, y el segundo, por la hipótesis de inducción,

$$(-1)^{k-1} (\lambda^{k-1} + \alpha_{k-1} \lambda^{k-2} + \cdots \alpha_2 \lambda + \alpha_1).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_k) &= (-1)^k \alpha_0 - \lambda (-1)^{k-1} (\lambda^{k-1} + \alpha_{k-1} \lambda^{k-2} + \cdots \alpha_2 \lambda + \alpha_1) \\ &= (-1)^k \left(\lambda^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \lambda^j \right), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

2. Comprobar que la condición necesaria y suficiente para que todas las potencias de una matriz tengan norma uniformemente acotada es que todos sus autovalores tengan módulo menor o igual que uno y aquellos que tengan módulo uno sean simples.

Solución. Trabajaremos con la norma infinito. El resultado para otras normas se sigue de la equivalencia de las normas.

Sea J la forma canónica de Jordan de la matriz A , y sea P la correspondiente matriz (tal vez compleja) de paso. Se tiene que $A = PJP^{-1}$, y

por tanto que $A^n = PJ^nP^{-1}$. Así pues, las potencias de A permanecen todas acotadas si y sólo si las potencias de J también lo hacen.

Debido a la estructura de la forma canónica de Jordan, se puede considerar por separado cada una de las cajas J_λ que la componen. Si un autovalor tiene multiplicidad m , entonces el bloque de Jordan correspondiente (de dimensión $m \times m$) viene dado por

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + R,$$

donde los elementos de la matriz $(m \times m)$ R son

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i + 1, \ 1 \leq i \leq m, \\ 0, & j \neq i + 1. \end{cases}$$

Se tiene por tanto que

$$J_\lambda^n = (\lambda I + R)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \lambda^{n-j} R^j.$$

Las potencias de la matriz R satisfacen

$$(R^k)_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i + k, \\ 0, & j \neq i + k. \end{cases}$$

Por consiguiente

$$J_\lambda^n = \begin{cases} \binom{n}{k} \lambda^{n-k}, & 0 \leq k \leq \min(n, m) \\ 0, & j \neq i + k. \end{cases}$$

Es entonces evidente que si un autovalor tiene módulo mayor que 1 o hay alguna raíz de módulo 1 múltiple, entonces la norma infinito de la potencia n -ésima del correspondiente bloque de Jordan tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Veamos el recíproco. Si un autovalor tiene módulo menor que uno, entonces está claro que la norma infinito de la potencia n -ésima del correspondiente bloque de Jordan se va a 0 con n . Si un autovalor, λ , tiene módulo 1, pero es simple, entonces $\|J_\lambda^n\|_\infty = |\lambda|^n = 1$. Combinando toda esta información concluimos inmediatamente el resultado.

3. Determinar si son 0-estables: (a) la regla de Simpson, (4.11); y (b) la fórmula BDF de 2 pasos, (4.12).

Solución. (a) El primer polinomio característico del método es $\rho(\zeta) = \zeta^2 - 1$. Sus raíces son $\zeta = \pm 1$. Son ambas de módulo 1, pero son simples. Así pues, se cumple la condición de la raíz, y por tanto el método es 0-estable.

(b) El primer polinomio característico del método es $\rho(\zeta) = \zeta^2 - \frac{4}{3}\zeta + \frac{1}{3}$. Sus raíces son $\zeta_1 = 1$ y $\zeta_2 = \frac{1}{3}$. Se cumple así la condición de la raíz, y por tanto el método es 0-estable.

4. Consideramos la familia de métodos

$$y_{n+3} + (2\alpha - 3)y_{n+2} - (2\alpha - 3)y_{n+1} - y_n = h\alpha(f(x_{n+2}, y_{n+2}) + f(x_{n+1}, y_{n+1})),$$

donde α es un parámetro real. Estudiar para qué valores de α es 0-estable.

Solución. Para estudiar la 0-estabilidad consideramos el primer polinomio característico, $\rho(\zeta) = \zeta^3 + (2\alpha - 3)\zeta^2 - (2\alpha - 3)\zeta - 1$. Se ve inmediatamente que $\rho(1) = 0$. Así que dividimos ρ por $\zeta - 1$,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2\alpha - 3 & 3 - 2\alpha & -1 \\ 1 & & 1 & 2\alpha - 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2\alpha - 2 & 1 & 0. \end{array}$$

Toca por tanto calcular las raíces de $\zeta^2 + (2\alpha - 2)\zeta + 1$. Son

$$\zeta_{\pm} = 1 - \alpha \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 1}.$$

Tenemos tres casos:

- (i) $(\alpha - 1)^2 - 1 > 0$, es decir, $\alpha > 2$ o $\alpha < 0$. Si $\alpha > 2$, entonces $\zeta_- < -1$ y no se cumple la condición de la raíz. Si $\alpha < 0$, entonces $\zeta_+ > 1$ y tampoco se cumple la condición de la raíz.
- (ii) $(\alpha - 1)^2 = 1$, es decir, $\alpha = 2$ o $\alpha = 0$. Si $\alpha = 2$, entonces $\zeta_{\pm} = -1$, y si $\alpha = 0$, entonces $\zeta_{\pm} = 1$. En ninguno de los dos casos se cumple la condición de la raíz.
- (iii) $(\alpha - 1)^2 < 1$, es decir, $\alpha \in (0, 2)$. En este caso se tiene

$$\zeta_{\pm} = (1 - \alpha) \pm i\sqrt{1 - (1 - \alpha)^2}.$$

Por tanto, $|\zeta_{\pm}|^2 = (1 - \alpha)^2 + (1 - (1 - \alpha)^2) = 1$. Si bien estas raíces tienen módulo 1, son distintas, y también distintas de $\zeta_1 = 1$. Por consiguiente se cumple la condición de la raíz.

Resumiendo, el método es 0-estable si y sólo si $\alpha \in (0, 2)$.

5. Extender la prueba del teorema 4.6 al caso vectorial, $d > 1$.

Solución. Basta con repetir la prueba del caso escalar sustituyendo A por $A \otimes I$, donde el producto de Kronecker $B \otimes C$ de dos matrices $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq m_1}$ y $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq m_2}$ es la matriz $m_1 m_2 \times m_1 m_2$ que por bloques se escribe como

$$B \otimes C = \begin{pmatrix} b_{11}C & b_{12}C & \cdots & b_{1m_1}C \\ b_{21}C & b_{22}C & \cdots & b_{2m_1}C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m_1 1}C & b_{m_1 2}C & \cdots & b_{m_1 m_1}C \end{pmatrix}$$

Sección 4.5

1. Estudiar si es convergente la *regla implícita del punto medio*,

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right).$$

Solución. Es inmediato ver que el método es 0-estable (se trata de un método de un paso con $\alpha_0 = -1$). Por otra parte,

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\phi_f(x_n, y_n; h)\right).$$

Por consiguiente, $\phi_f(x, y(x); 0) = f(x, y(x))$. Dado que $\sum_{j=0}^1 \alpha_j = 0$ y que $\sum_{j=0}^1 \alpha_j = 1$, concluimos que el método es consistente.

Como el método es consistente y 0-estable, el Teorema de Equivalencia nos garantiza que es convergente.

2. Repetir el problema anterior para el par predictor-corrector AB2/AM2,

$$\begin{aligned} y_{n+2}^* &= y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)), \\ y_{n+2} &= y_{n+1} + \frac{h}{12}(5f(x_{n+2}, y_{n+2}^*) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)). \end{aligned}$$

Solución. El método se puede escribir como

$$y_{n+2} - y_{n+1} = h\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h),$$

$$\begin{aligned} \phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) &= \frac{1}{12}\left(5f\left(x_n + 2h, y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f(x_n + h, y_{n+1}) - f(x_n, y_n))\right) \right. \\ &\quad \left. + 8f(x_n + h, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)\right). \end{aligned}$$

Se tiene por tanto que $\sum_{j=0}^2 \alpha_j = 0$, $\sum_{j=0}^2 j\alpha_j = 1$ y $\phi_f(x, y(x), y(x); 0) = (5 + 8 - 1)f(x, y(x))/12 = f(x, y(x))$. Por consiguiente el método es consistente.

Por otra parte, las raíces del primer polinomio característico, $\rho(\zeta) = \zeta^2 - \zeta$, son $\zeta_1 = 1$ y $\zeta_2 = 0$. Se cumple por tanto la condición de la raíz, y el método es 0-estable. Como también es consistente, como vimos más arriba, es convergente.

3. Consideramos la familia de métodos

$$y_{n+3} + (2\alpha - 3)y_{n+2} - (2\alpha - 3)y_{n+1} - y_n = h\alpha(f(x_{n+2}, y_{n+2}) + f(x_{n+1}, y_{n+1})),$$

donde α es un parámetro real. Estudiar para que valores de α es convergente.

Solución. Ya vimos en el problema 4.4.4 que el método es 0-estable si y sólo si $\alpha \in (0, 2)$. Así que sólo queda estudiar la consistencia.

Por un lado tenemos que

$$\sum_{j=0}^3 \alpha_j = -1 - (2\alpha - 3) + (2\alpha - 3) + 1 = 0.$$

Por otro,

$$\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}; h) = \alpha(f(x_n + 2h, y_{n+2}) + f(x_n + h, y_{n+1})).$$

Por consiguiente, $\phi_f(x, y(x), y(x), y(x); 0) = 2\alpha f(x, y(x))$. Dado que $\sum_{j=0}^3 j\alpha_j = -(2\alpha - 3) + 2(2\alpha - 3) + 3 = 2\alpha$, se tiene que

$$\phi_f(x, y(x), y(x), y(x); 0) = \sum_{j=0}^3 j\alpha_j f(x, y(x)),$$

y el método es consistente para todo α .

Concluimos por tanto que el método es convergente si y sólo si $\alpha \in (0, 2)$.

4. Construir todos los métodos convergentes de orden 2 de la forma

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \alpha h, y_n + \alpha hf(x_n + \beta h, y_n + \beta hf(x_n, y_n))).$$

Comprobar que ninguno tiene orden de convergencia 3. ¿Tiene alguno orden de convergencia 3 para el problema $y' = y$ en $[0, b]$, $y(0) = 1$?

Solución. Estamos ante un método de Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha & \alpha & \\ \beta & 0 & \beta \\ \hline & 0 & 0 & 1. \end{array}$$

Es inmediato ver que es 0-estable (se trata de un método de un paso con $\alpha_0 = -1$). Por otra parte, $\phi_f(x, y(x); 0) = f(x, y(x))$, así que el método también es consistente, y por tanto convergente.

Para ver para qué valores de α y β el método es consistente de orden 3, calculamos el residuo para funciones del lado derecho $f \in C^2$. Se tiene que

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) \\ &\quad - hf(x_n + \alpha h, y(x_n) + \alpha hf(x_n + \beta h, y(x_n) + \beta hf(x_n, y(x_n)))) \\ &= y'(x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + O(h^3) - h \left(\underbrace{f(x_n, y(x_n))}_{y'(x_n)} \right. \\ &\quad \left. + h \underbrace{\alpha \left(f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \right)}_{y''(x_n)} + O(h^2) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) y''(x_n) h^2 + O(h^3). \end{aligned}$$

Así pues, el método será al menos de orden 2 si y sólo $\alpha = 1/2$.

Veamos que no es de orden 3 para ninguna elección de β . Para ello consideramos el problema

$$y'(x) = x^2/2, \quad y(0) = 0,$$

cuya solución es $y(x) = x^3/6$. Para este problema el residuo resulta ser, con $\alpha = 1/2$,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{(x_n + h)^3}{6} - \frac{x_n^3}{6} - \frac{h(x_n + (h/2))^2}{2} \\ &= \frac{x_n^3 + 3x_n^2h + 3x_nh^2 + h^3}{6} - \frac{x_n^3}{6} - \frac{h(x_n^2 + h + (1/4))}{2} \\ &= h^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right). \end{aligned}$$

Por consiguiente $\tau = h^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) \neq O(h^3)$, y el método no es consistente de orden 3. Este mismo ejemplo demuestra que el método no es convergente de orden 3.

Veamos que, sin embargo, sí hay una elección de β que hace que el método sea consistente (y convergente) de orden 3 para el problema $y' = y$, $y(0) = 1$. En efecto, para este problema $y^{(n)}(x) = y(x)$, y se tiene que

$$\begin{aligned} R_n &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h \left(y(x_n) + \alpha h (y(x_n) + \beta h y(x_n)) \right) \\ &= y(x_n) \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} \right) + \frac{y(\bar{\xi}_n)}{24} h^4 - y(x_n) \left(h + \alpha h^2 + \alpha \beta h^3 \right) \\ &= y(x_n) \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) h^2 + \left(\frac{1}{6} - \alpha \beta \right) h^3 \right) + \frac{y(\bar{\xi}_n)}{24} h^4. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el método será de orden 3 para este problema si y sólo si $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/3$.

5. Al aplicar el método numérico

$$y_{n+2} + \alpha y_{n+1} + \beta y_n = h \phi(x_n, y_n, y_{n+1}; h)$$

al problema $y'(x) = f(x, y(x))$, $x \in [a, b]$, $y(a) = \eta$, se obtiene una aproximación numérica de la solución del problema $y'(x) = 2f(x, y(x))$, $x \in [a, b]$, $y(a) = \eta$. Si $\phi(x, y(x), y(x); 0) = f(x, y(x))$, ¿cuánto valen α y β ?

Solución. El método no es consistente con la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$, sino con la ecuación $y'(x) = 2f(x, y(x))$. Por consiguiente,

$$\phi_f(x, y(x), y(x); 0) = \sum_{j=0}^2 j\alpha_j 2f(x, y(x)) = (2 + \alpha)2f(x, y(x)).$$

Pero sabemos que $\phi(x, y(x), y(x); 0) = f(x, y(x))$. Por lo tanto,

$$(2 + \alpha)2 = 1.$$

Por otra parte, $0 = \sum_{j=1}^2 \alpha_j = 1 + \alpha + \beta$. Concluimos que $\alpha = -3/2$ y $\beta = 1/2$.

Sección 4.6

1. Supongamos que los errores de evaluación de ϕ_f están acotados por ε y los de redondeo por μ . Consideramos un método 0-estable con orden de consistencia p . Sea C una constante tal que $\tau \leq Ch^p$ y sea $\{\hat{y}_n\}$ la solución numérica producida por el ordenador. Dar una cota para el error $\max_{k \leq n \leq N} \|y(x_n) - \hat{y}_n\|$ y obtener el valor de h que minimiza dicha cota.

Solución. La 0-estabilidad implica que existe una constante K tal que

$$\max_{k \leq n \leq N} \|y(x_n) - \hat{y}_n\| \leq K \left(\max_{0 \leq n \leq k-1} \|y(x_n) - \hat{y}_n\| + \max_{0 \leq n \leq N-k} \left\| \frac{R_n}{h} - \left(\varepsilon_n + \frac{\mu_n}{h} \right) \right\| \right),$$

donde los μ_n son errores de redondeo y los ε_n errores de evaluación de ϕ_f . Sabemos que el error en el cálculo de los valores de arranque es como mucho μ , que $|\mu_n| \leq \mu$ y que $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$. Por otra parte, por ser el método de orden p , existe una constante C tal que $\max_{0 \leq n \leq N-k} \|R_n\|/h \leq Ch^p$. Juntando toda esta información deducimos que

$$\max_{k \leq n \leq N} \|y(x_n) - \hat{y}_n\| \leq K \underbrace{\left(\mu + Ch^p + \varepsilon + \frac{\mu}{h} \right)}_{g(h)}.$$

La función $g(h)$ alcanza su mínimo en

$$\bar{h} = \left(\frac{\mu}{Cp} \right)^{1/(p+1)},$$

lo que produce una cota para el error dada por

$$\max_{k \leq n \leq N} \|y(x_n) - \hat{y}_n\| \leq K \left(\mu + \varepsilon + C^{1/(p+1)} \mu^{p/(p+1)} p^{-p/(p+1)} (1+p) \right).$$

2. Consideramos el método $y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n = hf(x_n, y_n)$, que es 0-estable y satisface la condición de consistencia (4.9), pero no la condición de consistencia (4.8). Estudiar cómo se comporta el error.

Solución. Un cálculo sencillo muestra que

$$R_n = \frac{1}{2}y(x_n) + h(y'(\bar{\xi}_n) - y'(x_n)) = \frac{1}{2}y(x_n) + o(h).$$

Restando la recurrencia de la solución numérica de la recurrencia satisfecha por la solución teórica se tiene que

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{2}(y(x_n) - y_n) + R_n,$$

y por tanto que

$$y(x_n) - y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (y(x_0) - y_0) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j R_{n-1-j}.$$

El primer sumando es una $o(1)$ si $y(x_0) - y_0 = o(1)$. En cuanto al segundo sumando, tiene dos contribuciones,

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j o(h).$$

El segundo de estos términos se va a 0 con h ,

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j o(h) \right| \leq Nh \frac{o(h)}{h} = o(1).$$

En cuanto al primero, es el que da problemas. Se tiene que

$$\min_{x \in [a, b]} y(x) \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \leq \max_{x \in [a, b]} y(x) \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j,$$

es decir,

$$\min_{x \in [a, b]} y(x) (1 - 2^{-n}) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \leq \max_{x \in [a, b]} y(x) (1 - 2^{-n}).$$

Por consiguiente, si $\min_{x \in [a,b]} y(x) > 0$, se tiene que

$$\min_{x \in [a,b]} y(x) \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq n \leq N} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \leq \max_{x \in [a,b]} y(x),$$

y el error del método, si bien permanece acotado, no se va a 0 con h .

De forma análoga, si $\max_{x \in [a,b]} y(x) < 0$, se tiene que

$$\min_{x \in [a,b]} |y(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq n \leq N} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j y(x_n) \right| \leq \max_{x \in [a,b]} |y(x)|,$$

y también en este caso el error del método, si bien permanece acotado, no se va a 0 con h .

En resumen, el error del método vendrá dado por el tamaño de la solución.

3. Aplicamos la Regla del Trapecio (resolviendo los problemas implícitos tanto mediante el método de Newton como mediante iteración de punto fijo) al problema (4.18), pidiendo una tolerancia poco exigente, concretamente 10^{-2} , en las iteraciones de Newton/punto fijo. Se obtienen los diagramas de eficiencia que aparecen representados en la Figura 1.

¿Puedes explicar el brusco cambio que experimenta el diagrama de la Regla del Trapecio-Newton cuando el número de evaluaciones de función es aproximadamente 2500? ¿Y por qué no se da una situación parecida para la Regla del Trapecio-punto fijo?

Solución. Para valores de h grandes el iterante inicial no es demasiado bueno, y es necesario hacer más de una iteración de Newton, que es bastante costosa. Al disminuir h , el iterante inicial es cada vez mejor, y llega un momento en que no hay que hacer más que una iteración de Newton (siempre se hace al menos una). Al pasar de dos iteraciones de Newton a una se produce una disminución del trabajo computacional notable. En el caso de usar iteración de punto fijo el ahorro al pasar de una dos iteraciones a una no es tan grande.

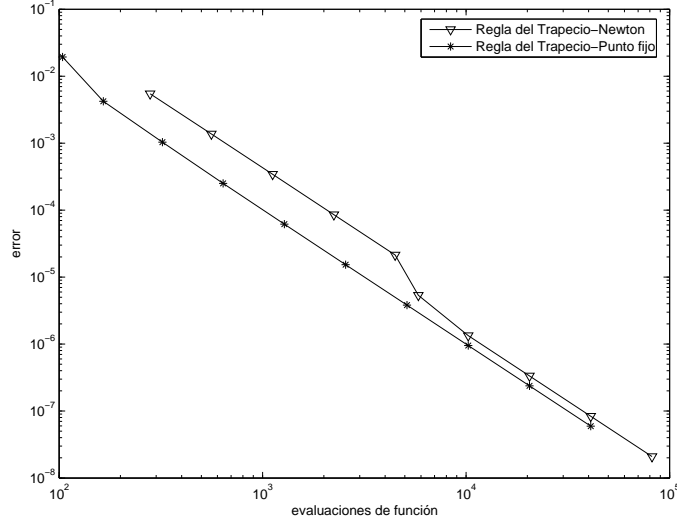


Figura 1: Diagramas de eficiencia para la Regla del Trapecio (con Newton y punto fijo) aplicada al Problema 1, con una tolerancia para las iteraciones igual a 10^{-2} .

4. Sea $f \in C^2$. Demostrar que el error global del método de Euler admite un desarrollo asintótico de la forma

$$y(x_n) - y_n = d(x_n)h + O(h^2),$$

siendo $d \in C^2([a, b])$ la solución del problema

$$d'(x) = \sum_{J=1}^d \frac{\partial f}{\partial y^J}(x, y(x)) d^J(x) + \frac{1}{2} y''(x), \quad d^J(0) = 0, \quad J = 1, \dots, d.$$

Indicación. Si definimos $y_n^* := y_n + d(x_n)h$, la sucesión $\{y_n^*\}$ es la solución numérica producida por el método de un paso cuya función de incremento es

$$\phi_f^*(x_n, y_n^*; h) = f(x_n, y_n^* - d(x_n)h) + d(x_n + h) - d(x_n).$$

El residuo de dicho método es una $O(h^3)$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^* &= y_{n+1} + d(x_{n+1})h \\
&= y_n + hf(x_n, y_n) + d(x_{n+1})h \\
&= y_n^* - d(x_n)h + hf(x_n, y_n) + d(x_{n+1})h \\
&= y_n^* + h\phi_f^*(x_n, y_n^*; h),
\end{aligned}$$

donde

$$\phi_f^*(x_n, y_n^*; h) = f(x_n, y_n^* - d(x_n)h) + d(x_n + h) - d(x_n).$$

Si calculamos el desarrollo de Taylor del residuo de este nuevo método, tenemos que

$$\begin{aligned}
R_n^* &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - \phi_f^*(x_n, y(x_n); h) \\
&= y(x_n) + hy'(x_n) + h^2 \frac{y''(x_n)}{2} + O(h^3) \\
&\quad - y(x_n) - h \underbrace{\left(f(x_n, y(x_n)) \right)}_{y'(x_n)} \\
&\quad - h \underbrace{\sum_{J=1} f_{y^J}(x_n, y(x_n)) d^J(x_n) + h d'(x_n)}_{d'(x_n) - \frac{1}{2} y''(x_n)} + O(h^2) \\
&= O(h^3).
\end{aligned}$$

Así, puesto que el nuevo método es 0-estable,

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n^*\| = O(h^2),$$

o lo que es lo mismo,

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n - d(x_n)h\| = O(h^2),$$

Sección 5.1

1. Sea $q(x) = \prod_{i=1}^{\nu} (x - c_i)$, $q_l(x) = q(x)/(x - c_l)$, $l = 1, \dots, \nu$. Demostrar que el método de colocación de parámetros c_1, \dots, c_ν es un método de Runge-Kutta implícito de tablero

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T, \end{array}$$

con

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} \frac{q_j(x)}{q_j(c_j)} dx, \quad b_i = \int_0^1 \frac{q_i(x)}{q_i(c_i)} dx, \quad i, j = 1, \dots, \nu.$$

Solución. La solución numérica está dada por $y_{n+1} = u(x_{n+1})$, donde u es el polinomio de grado menor o igual que ν tal que $u(x_n) = y_n$ y $u'(x_n + c_i h) = \underbrace{f(x_n + c_i h, u(x_n + c_i h))}_{k_i}$, $i = 1, \dots, \nu$. Por consiguiente,

u' es el polinomio de grado menor o igual que $\nu - 1$ que pasa por los puntos $(x_n + c_1 h, k_1), \dots, (x_n + c_\nu h, k_\nu)$, es decir,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\prod_{l=1, l \neq i}^{\nu} (x - (x_n + c_l h))}{\prod_{l=1, l \neq i}^{\nu} (x_n + c_i h - (x_n + c_l h))} k_i \\ &= \frac{1}{h^{\nu-1}} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{k_i}{q_i(c_i)} \prod_{l=1, l \neq i}^{\nu} (x - (x_n + c_l h)). \end{aligned} \tag{1}$$

Integrando en (x_n, x_{n+1}) y haciendo el cambio de variables $hx = s - x_n$, se tiene que

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= u(x_{n+1}) \\ &= u(x_n) + \frac{1}{h^{\nu-1}} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{k_i}{q_i(c_i)} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \prod_{l=1, l \neq i}^{\nu} (s - (x_n + c_l h)) ds \\ &= y_n + h \sum_{i=1}^{\nu} \frac{k_i}{q_i(c_i)} \int_0^1 \underbrace{\prod_{l=1, l \neq i}^{\nu} (x - c_l)}_{q_i(x)} dx = y_n + h \sum_{i=1}^{\nu} b_i k_i, \end{aligned}$$

con $b_i = \int_0^1 \frac{q_i(x)}{q_i(c_i)} dx$.

Si integramos de nuevo la ecuación (1), cambiando el índice de sumación i por j , en el intervalo $(x_n, x_n + c_i h)$, y haciendo también esta vez el cambio de variable $hx = s - x_n$, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x_n + c_i h) &= y_n + h \sum_{j=1}^{\nu} \frac{k_j}{q_j(c_j)} \int_0^{c_i} q_j(x) dx \\ &= y_n + h \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} k_j, \end{aligned}$$

y por tanto que $k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} k_j)$, con

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} \frac{q_j(x)}{q_j(c_j)} dx.$$

2. Dado un método de Runge-Kutta (RK), comprobar que admite la formulación equivalente

$$Y_i = y_n + h \sum_{k=1}^s a_{ik} f(x_n + c_k h, Y_k), \quad i = 1, \dots, s, \quad (2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_n + c_i h, Y_i), \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

Demostrar, utilizando el Teorema de la Aplicación Contractiva, que para todo h pequeño el sistema de ecuaciones (2) tiene una única solución. *Sugerencia.* Demostrar el resultado usando la norma infinito.

Solución. La equivalencia es inmediata, llamando Y_i al segundo argumento de la f en la definición de la i -ésima etapa,

$$k_i = f \left(x_n + c_i h, y_n + h \underbrace{\sum_{j=1}^s a_{ij} k_j}_{Y_i} \right).$$

Sea $Y = (Y_1, \dots, Y_s)^T$. Queremos ver que la función $F : \mathbb{R}^{d \times s} \mapsto \mathbb{R}^{d \times s}$ definida mediante

$$F(Y) = \begin{pmatrix} y_n + h \sum_{j=1}^s a_{1j} f(x_n + c_j h, Y_j) \\ \vdots \\ y_n + h \sum_{j=1}^s a_{sj} f(x_n + c_j h, Y_j) \end{pmatrix}$$

tiene un único punto fijo para h pequeño. Para empezar observamos que

$$F(Y) - F(\hat{Y}) = \begin{pmatrix} h \sum_{j=1}^s a_{1j} \left(f(x_n + c_j h, Y_j) - f(x_n + c_j h, \hat{Y}_j) \right) \\ \vdots \\ h \sum_{j=1}^s a_{sj} \left(f(x_n + c_j h, Y_j) - f(x_n + c_j h, \hat{Y}_j) \right) \end{pmatrix}.$$

Usando que f es Lipschitz con respecto de su segunda variable,

$$\begin{aligned} \|F(Y) - F(\hat{Y})\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq s} \left\| h \sum_{j=1}^s a_{ij} \left(f(x_n + c_j h, Y_j) - f(x_n + c_j h, \hat{Y}_j) \right) \right\|_\infty \\ &\leq Lh \max_{1 \leq i \leq s} \sum_{j=1}^s |a_{ij}| \|Y - \hat{Y}\|_\infty = Lh \|A\|_\infty \|Y - \hat{Y}\|_\infty, \end{aligned}$$

y F resulta ser contractiva en norma infinito si $Lh \|A\|_\infty < 1$.

La contractividad en otras normas es consecuencia inmediata de la equivalencia de todas las normas en espacios de dimensión finita. No obstante, la restricción sobre h que garantiza tener convergencia para la iteración de punto fijo cambiará al cambiar de norma.

3. Demostrar que la función de incremento ϕ_f de un método (RK) es continua en sus tres variables para todo h suficientemente pequeño.

Solución. La función de incremento está dada por

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n, y_n; h).$$

Ahora bien, usando la notación del problema anterior, se tiene que

$$k_i(x_n, y_n; h) = f\left(x_n + c_i h, Y_i(x_n, y_n; h)\right), \quad i = 1, \dots, s.$$

Pero, según vimos en dicho problema, si h es suficientemente pequeño las funciones Y_i se pueden obtener como límite contractivo en L^∞ de funciones continuas. Por consiguiente, son funciones continuas de sus argumentos. Puesto que f es continua, concluimos que la etapas k_i , $i = 1, \dots, s$ son funciones continuas de sus argumentos, y en consecuencia la función de incremento también tiene esta propiedad.

4. Dado un método de Runge-Kutta explícito de s etapas, definimos $\alpha = \max_{1 \leq i, j \leq s} |a_{ij}|$, $\beta = \sum_{i=1}^s |b_i|$. Sea L una constante de Lipschitz para f con respecto a su segunda variable.

(i) Demostrar que

$$\|k_i(x_n, y_n; h) - k_i(x_n, \hat{y}_n; h)\| \leq L\nu_i \|y_n - \hat{y}_n\|,$$

donde ν_i satisface la recurrencia

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_i = 1 + h\alpha L \sum_{j=1}^{i-1} \nu_j, \quad i = 1, \dots, s.$$

- (ii) Demostrar que la solución de dicha recurrencia es $\nu_i = (1 + h\alpha L)^{i-1}$.
- (iii) Concluir que la función de incremento del método $\phi_f(x_n, y_n; h)$ es Lipschitz respecto a su segunda variable con constante de Lipschitz $\beta L(1 + h_0 \alpha L)^{s-1}$ para $h \in [0, h_0]$.

Solución. (i) Lo demostramos por inducción. Nótese que

$$k_i = f \left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right).$$

Por consiguiente, para $i = 1$, $k_1 = f(x_n + c_1 h, y_n)$, y por lo tanto

$$\|k_1(x_n, y_n; h) - k_1(x_n, \hat{y}_n; h)\| \leq L \|y_n - \hat{y}_n\| = L \nu_1 \|y_n - \hat{y}_n\|$$

con $\nu_1 = 1$.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para todo $j \leq i - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} & \|k_i(x_n, y_n; h) - k_i(x_n, \hat{y}_n; h)\| \\ & \leq L \left(\|y_n - \hat{y}_n\| + h \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \|k_j(x_n, y_n; h) - k_j(x_n, \hat{y}_n; h)\| \right) \\ & \leq L \left(1 + \alpha h \sum_{j=1}^{i-1} \nu_j \right) \|y_n - \hat{y}_n\|, \end{aligned}$$

y el resultado es cierto para i .

(ii) También se prueba por inducción. El resultado es obviamente cierto para $i = 1$. Supongámoslo cierto para todo $j \leq i - 1$. Usando la recurrencia, la hipótesis de inducción, y la fórmula para la suma de un cierto número de términos de una progresión geométrica, se tiene que

$$\nu_i = 1 + h\alpha L \sum_{j=1}^{i-1} (1 + h\alpha L)^{j-1} = (1 + h\alpha L)^{i-1},$$

y la fórmula es también cierta para i .

(iii) La función de incremento del método es

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n, y_n; h).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| &\leq \sum_{i=1}^s |b_i| \|k_i(x_n, y_n; h) - k_i(x_n, \hat{y}_n; h)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^s |b_i| (1 + h\alpha L)^{i-1} \|y_n - \hat{y}_n\| \\
&\leq \beta L (1 + h_0 \alpha L)^{s-1} \|y_n - \hat{y}_n\|
\end{aligned}$$

para todo $h \in (0, h_0]$.

5. Consideramos el método de Runge-Kutta

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 1/4 & -1/4 \\
2/3 & 1/4 & 5/12 \\
\hline
& 1/4 & 3/4.
\end{array}$$

- (i) Comprobar que la correspondiente función de incremento satisface una condición de Lipschitz con respecto a su segunda variable.
- (ii) Comprobar que no es un método de colocación.

Solución. (i) Se tiene que

$$\phi_f(x_n, y_n; h) = \frac{1}{4}k_1(x_n, y_n; h) + \frac{3}{4}k_2(x_n, y_n; h).$$

Por consiguiente, denotando $k_i = k_i(x_n, y_n; h)$, $\hat{k}_i = k_i(x_n, \hat{y}_n; h)$, $i = 1, 2$, se tiene que

$$\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| \leq \frac{1}{4}\|k_1 - \hat{k}_1\| + \frac{3}{4}\|k_2 - \hat{k}_2\|.$$

Ahora bien, las etapas satisfacen

$$k_1 = f\left(x_n, y_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 - \frac{1}{4}k_2\right)\right),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{5}{12}k_2\right)\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|k_1 - \hat{k}_1\| &\leq L\|y_n - \hat{y}_n\| + Lh \left(\frac{1}{4}\|k_1 - \hat{k}_1\| + \frac{1}{4}\|k_2 - \hat{k}_2\| \right), \\ \|k_2 - \hat{k}_2\| &\leq L\|y_n - \hat{y}_n\| + Lh \left(\frac{1}{4}\|k_1 - \hat{k}_1\| + \frac{5}{12}\|k_2 - \hat{k}_2\| \right).\end{aligned}$$

Despejando en la primera de estas ecuaciones obtenemos que, si $h < 4/L$,

$$\|k_1 - \hat{k}_1\| \leq \frac{1}{1 - \frac{Lh}{4}} \left(L\|y_n - \hat{y}_n\| + \frac{Lh}{4}\|k_2 - \hat{k}_2\| \right),$$

que una vez introducido en la segunda produce

$$\|k_2 - \hat{k}_2\| \leq \left(L + \frac{L^2h}{4 - Lh} \right) \|y_n - \hat{y}_n\| + \left(\frac{5Lh}{12} + \frac{L^2h^2}{4(4 - Lh)} \right) \|k_2 - \hat{k}_2\|.$$

Si $h < 2/L$, entonces $1 - \left(\frac{5Lh}{12} + \frac{L^2h^2}{4(4 - Lh)} \right) > 0$ y se tiene que

$$\begin{aligned}\|k_2 - \hat{k}_2\| &\leq \frac{L + \frac{L^2h}{4 - Lh}}{1 - \left(\frac{5Lh}{12} + \frac{L^2h^2}{4(4 - Lh)} \right)} \|y_n - \hat{y}_n\| \\ &= \frac{12L}{12 - 8Lh + L^2h^2} \|y_n - \hat{y}_n\|.\end{aligned}$$

De aquí se llega a

$$\|k_1 - \hat{k}_1\| \leq \frac{L}{1 - \frac{Lh}{4}} \left(1 + \frac{3Lh}{12 - 8Lh + L^2h^2} \right) \|y_n - \hat{y}_n\|.$$

Concluimos finalmente que

$$\begin{aligned}\|\phi_f(x_n, y_n; h) - \phi_f(x_n, \hat{y}_n; h)\| &\leq \left(\frac{L}{4 - Lh} \left(1 + \frac{3Lh}{12 - 8Lh + L^2h^2} \right) + \frac{9L}{12 - 8Lh + L^2h^2} \right) \|y_n - \hat{y}_n\| \\ &\leq \left(\frac{L}{4 - Lh_0} \left(1 + \frac{3Lh_0}{12 - 8Lh_0 + L^2h_0^2} \right) + \frac{9L}{12 - 8Lh_0 + L^2h_0^2} \right) \|y_n - \hat{y}_n\|\end{aligned}$$

para todo $h \in (0, h_0]$, con $h_0 < 2/L$.

(ii) Usaremos aquí las notaciones y resultados del primer problema de esta misma sección. Si este fuera un punto de colocación, los parámetros

de colocación serían $c_1 = 0$, $c_2 = 2/3$. Veamos cuál es el método de colocación correspondiente a esos parámetros. Se tiene que

$$q(x) = x \left(x - \frac{2}{3} \right), \quad q_1(x) = x - \frac{2}{3}, \quad q_2(x) = x.$$

Por consiguiente, un sencillo cálculo muestra que

$$b_1 = \int_0^1 \frac{q_1(x)}{q_1(0)} dx = -\frac{3}{2} \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3} \right) dx = \frac{1}{4},$$

$$b_2 = \int_0^1 \frac{q_2(x)}{q_2(2/3)} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x dx = \frac{3}{4},$$

$$a_{11} = 0,$$

$$a_{12} = 0,$$

$$a_{21} = \int_0^{2/3} \frac{q_1(x)}{q_1(0)} dx = -\frac{3}{2} \int_0^{2/3} \left(x - \frac{2}{3} \right) dx = \frac{1}{3},$$

$$a_{22} = \int_0^{2/3} \frac{q_2(x)}{q_2(2/3)} dx = \frac{3}{2} \int_0^{2/3} x dx = \frac{1}{3}.$$

En resumen, si nuestro método fuera de colocación, tendría parámetros de colocación, $c_1 = 0$, $c_2 = 2/3$, y entonces vendría dado por

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4, \end{array}$$

lo que no es el caso.

Sección 5.2

1. Demostrar que las condiciones (6.7) son necesarias para tener orden de consistencia 2.

Solución. Como hemos visto en la teoría, si $f \in C^2$, el residuo de un método de RK viene dado por

$$\begin{aligned}
 R_n &= y(x_{n+1}) - (y(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n, y(x_n); h)) \\
 &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y(x_n)) \\
 &\quad + \frac{h^2}{2} \sum_{J=1}^d \frac{\partial f}{\partial y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) + \frac{h^3}{3!} y'''(\bar{\xi}_n) \\
 &\quad - \left(y(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_n, y(x_n)) + h^2 \sum_{i=1}^s b_i c_i \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y(x_n)) \right. \\
 &\quad \left. + h^2 \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} \sum_{J=1}^d \frac{\partial f}{\partial y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) + \frac{h^3}{2} \frac{d^2 k_i}{dh^2}(x_n, y(x_n); \bar{\eta}) \right) \\
 &= hf(x_n, y(x_n)) \left(1 - \sum_{i=1}^s b_i \right) + h^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y(x_n)) \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^s b_i c_i \right) \\
 &\quad + h^2 \sum_{J=1}^d \frac{\partial f}{\partial y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \left(\frac{1}{2} - \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} \right) + O(h^3).
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, para el PVI $y'(x) = x$, $y(0) = 0$, el residuo es

$$R_n = hx_n \left(1 - \sum_{i=1}^s b_i \right) + h^2 \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^s b_i c_i \right) + O(h^3),$$

y $R_n \neq O(h^3)$, y por tanto $\tau = \max_{0 \leq n \leq N-1} \frac{\|R_n\|}{h} \neq O(h^2)$, a menos que

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1, \quad \sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, para el PVI $y' = y$, $y(0) = 1$, cuya solución es $y(x) = e^x$, el residuo es

$$R_n = h e^{x_n} \left(1 - \sum_{i=1}^s b_i \right) + h^2 e^{x_n} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} \right) + O(h^3),$$

y $R_n \neq O(h^3)$, y por tanto $\tau \neq O(h^2)$, a menos que

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} = \frac{1}{2}.$$

2. Demostrar que para que un método de Runge-Kutta tenga orden de consistencia 3 es necesario y suficiente que, además de (5.5) y (5.6), cumpla las cinco condiciones¹

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 &= \frac{1}{3}, & \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} &= \frac{1}{3}, & \sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{il} &= \frac{1}{3}, \\ \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{3!}, & \sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jl} &= \frac{1}{3!}. \end{aligned}$$

Determinar cuáles de ellas son necesarias en el caso de problemas autónomos.

Solución. Queremos que el residuo sea $O(h^4)$. Por un lado desarrollamos $F(h) = y(x_n + h)$. Usando la ecuación se tiene que

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + \sum_{j=1}^d f_{y^j}(x, y(x)) f^j(x, y(x)),$$

¹En el caso de métodos que cumplen la condición de suma por filas (5.7) estas cinco condiciones se reducen a dos,

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, \quad b^T A c = \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{3!}.$$

$$\begin{aligned}
y'''(x) &= f_{xx}(x, y(x)) + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x, y(x)) f^J(x, y(x)) \\
&+ \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x, y(x)) f^J(x, y(x)) f^L(x, y(x)) + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x, y(x)) f_x^J(x, y(x)) \\
&+ \sum_{J,L=1}^d f_{y^J}(x, y(x)) f_{y^L}^J(x, y(x)) f^L(x, y(x)).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
F(h) &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2} \left(f_{xx}(x_n, y(x_n)) \right. \\
&+ \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \Big) \\
&+ \frac{h^3}{3!} \left(f_{xx}(x_n, y(x_n)) + 2 \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \right. \\
&+ \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)) \\
&+ \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_x^J(x_n, y(x_n)) \\
&+ \sum_{J,L=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_{y^L}^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)) \Big) + O(h^4).
\end{aligned}$$

Pasamos ahora a desarrollar $G(h) = y(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n, y(x_n); h)$.
Se tiene que

$$\begin{aligned}
G(h) &= y(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i \left(k_i(x_n, y(x_n); h) \Big|_{h=0} \right. \\
&+ h \frac{dk_i}{dh}(x_n, y(x_n); h) \Big|_{h=0} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 k_i}{dh^2}(x_n, y(x_n); h) \Big|_{h=0} + O(h^3) \Big).
\end{aligned}$$

Recordando que

$$k_i(x_n, y(x_n); h) = f \left(x_n + c_i h, y(x_n) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j(x_n, y(x_n); h) \right),$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dk_i}{dh} &= c_i f_x + \sum_{J=1}^d f_{y^J} \left(\sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^J + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{dk_j^J}{dh} \right), \\
\frac{d^2 k_i}{dh^2} &= c_i^2 f_{xx} + 2c_i \sum_{J=1}^d f_{xy^J} \left(\sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^J + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{dk_j^J}{dh} \right) \\
&\quad + \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L} \left(\sum_{j=1}^s a_{ij} k_j^J + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{dk_j^J}{dh} \right) \left(\sum_{l=1}^s a_{il} k_l^L + h \sum_{l=1}^s a_{il} \frac{dk_l^L}{dh} \right) \\
&\quad + \sum_{J=1}^d f_{y^J} \left(2 \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{dk_j^J}{dh} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{d^2 k_j^J}{dh^2} \right),
\end{aligned}$$

donde los argumentos de las k_i y sus derivadas son siempre $(x_n, y(x_n); h)$, y los de f y sus derivadas $(x_n + c_i h, y(x_n) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
k_i(x_n, y(x_n); h)|_{h=0} &= f(x_n, y(x_n)), \\
\frac{dk_i}{dh}(x_n, y(x_n); h)|_{h=0} &= c_i f_x(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) \sum_{j=1}^s a_{ij} f^J(x_n, y(x_n)), \\
\frac{d^2 k_i}{dh^2}(x_n, y(x_n); h)|_{h=0} &= c_i^2 f_{xx}(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + 2c_i \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n, y(x_n)) \sum_{j=1}^s a_{ij} f^J(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x_n, y(x_n)) \sum_{j=1}^s a_{ij} f^J(x_n, y(x_n)) \sum_{l=1}^s a_{il} f^L(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) 2 \sum_{j=1}^s a_{ij} \left(c_j f_x^J(x_n, y(x_n)) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{L=1}^d f_{y^L}^J(x_n, y(x_n)) \sum_{l=1}^s a_{jl} f^L(x_n, y(x_n)) \right)
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned}
G(h) = & y(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_n, y(x_n)) \\
& + h^2 \left(\sum_{i=1}^s b_i c_i f_x(x_n, y(x_n)) + \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \right) \\
& + \frac{h^3}{2} \left(\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 f_{xx}(x_n, y(x_n)) \right. \\
& + 2 \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} \sum_{J=1}^d f_{xy^J}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) \\
& + \sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{il} \sum_{J,L=1}^d f_{y^J y^L}(x_n, y(x_n)) f^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)) \\
& + 2 \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j \sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_x^J(x_n, y(x_n)) \\
& \left. + 2 \sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jl} \sum_{J,L=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) f_{y^L}^J(x_n, y(x_n)) f^L(x_n, y(x_n)) \right) + O(h^4).
\end{aligned}$$

Para tener un cierto orden los desarrollos de F y G tienen que coincidir hasta ese orden. Así, para tener orden 1 basta con que

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1.$$

Ya hemos visto que esta condición es también necesaria. Las condiciones de orden 2 son

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} = \frac{1}{2},$$

que también son necesarias, y las de orden 3

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 &= \frac{1}{3!}, & \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} &= \frac{2}{3!}, & \frac{1}{2} \sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{il} &= \frac{1}{3!}, \\
\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{3!}, & \sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jl} &= \frac{1}{3!}.
\end{aligned}$$

Para ver que estas condiciones son necesarias, basta con aplicar el método a los sistemas siguientes (las condiciones iniciales son irrelevantes):

$$y'(x) = x^2,$$

$$(y^1)'(x) = xy^2(x), \quad (y^2)'(x) = 1,$$

$$(y^1)'(x) = y^2(x)y^3(x), \quad (y^2)'(x) = 1, \quad (y^3)'(x) = 1$$

$$(y^1)'(x) = y^2(x), \quad (y^2)'(x) = x,$$

$$(y^1)'(x) = y^2(x), \quad (y^2)'(x) = y^3(x), \quad (y^3)'(x) = 1.$$

El tercero de estos sistemas, que es autónomo, demuestra que la condición $\sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{il} = \frac{1}{3}$ es necesaria para tener orden 3 para este tipo de problemas. De la misma forma, el quinto de estos sistemas demuestra que la condición $\sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jl} = \frac{1}{3!}$ también es necesaria para tener orden 3 para problemas autónomos. Es fácil comprobar que estas dos condiciones, junto con las de orden 1 y 2 son también suficientes para tener orden 3.

Si se cumple la condición de suma por filas las dos condiciones de orden 2 se reducen a una, $\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}$, y las cinco condiciones de orden 3 a dos,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3!}, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{3!}.$$

3. Restringiéndonos a ecuaciones escalares autónomas, demostrar que el método de Runge-Kutta explícito de tablero

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
<hr/>				
	1/6	1/3	1/3	1/6

tiene orden 4.

Solución. Por un lado desarrollamos $F(h) = y(x_n + h)$. Usando la ecuación se tiene que

$$y'(x) = f(y(x)),$$

$$y''(x) = f'(y(x))f(y(x)),$$

$$y'''(x) = f''(y(x))(f(y(x)))^2 + (f'(y(x)))^2 f(y(x))$$

$$y^{(4)}(x) = f'''(y(x))(f(y(x)))^3 + 4f''(y(x))f'(y(x))(f(y(x)))^2 \\ + (f'(y(x)))^3 f(y(x)).$$

Por consiguiente,

$$F(h) = y(x_n) + hf(y(x_n)) + \frac{h^2}{2}f'(y(x_n))f(y(x_n)) \\ + \frac{h^3}{3!}\left(f''(y(x_n))(f(y(x_n)))^2 + (f'(y(x_n)))^2 f(y(x_n))\right) \\ + \frac{h^4}{4!}\left(f'''(y(x_n))(f(y(x_n)))^3 + 4f''(y(x_n))f'(y(x_n))(f(y(x_n)))^2 \\ + (f'(y(x_n)))^3 f(y(x_n))\right) + O(h^5).$$

Pasamos ahora a desarrollar $G(h) = y(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n, y(x_n); h)$. Por un lado se tiene que

$$k_1(y(x_n); h) = f(y(x_n)).$$

Por otro, $k_2(y(x_n); h) = f(y(x_n) + \frac{h}{2}f(y(x_n)))$. Por lo tanto,

$$\frac{dk_2}{dh}(y(x_n); h) = \frac{1}{2}f'(y(x_n) + \frac{h}{2}f(y(x_n)))f(y(x_n)), \\ \frac{d^2k_2}{dh^2}(y(x_n); h) = \frac{1}{4}f''(y(x_n) + \frac{h}{2}f(y(x_n)))(f(y(x_n)))^2, \\ \frac{d^3k_2}{dh^3}(y(x_n); h) = \frac{1}{8}f'''(y(x_n) + \frac{h}{2}f(y(x_n)))(f(y(x_n)))^3.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} k_2(y(x_n); h) &= f(y(x_n)) + \frac{h}{2}f'(y(x_n))f(y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^2}{8}f''(y(x_n))(f(y(x_n)))^2 + \frac{h^3}{8 \cdot 3!}f'''(y(x_n))(f(y(x_n)))^3 \\ &\quad + O(h^4). \end{aligned}$$

En cuanto a la tercera etapa,

$$k_3(y(x_n); h) = f(y(x_n) + \frac{h}{2}k_2(y(x_n); h)),$$

tenemos que (los argumentos de f y sus derivadas son siempre $(y(x_n) + \frac{h}{2}k_2(y(x_n); h))$ y los de k_3 y su derivadas $(y(x_n); h)$)

$$\begin{aligned} \frac{dk_3}{dh} &= \frac{1}{2}f' \left(k_2 + h \frac{dk_2}{dh} \right), \\ \frac{d^2k_3}{dh^2} &= \frac{1}{4}f'' \left(k_2 + h \frac{dk_2}{dh} \right)^2 + \frac{1}{2}f' \left(2 \frac{dk_2}{dh} + h \frac{d^2k_2}{dh^2} \right), \\ \frac{d^3k_3}{dh^3} &= \frac{1}{8}f''' \left(k_2 + h \frac{dk_2}{dh} \right)^3 + \frac{1}{4}f'' 3 \left(k_2 + h \frac{dk_2}{dh} \right) \left(2 \frac{dk_2}{dh} + h \frac{d^2k_2}{dh^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}f' \left(3 \frac{d^2k_2}{dh^2} + h \frac{d^3k_2}{dh^3} \right). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} k_3(y(x_n); h) &= f(y(x_n)) + \frac{h}{2}f'(y(x_n))f(y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{4}f''(y(x_n))(f(y(x_n)))^2 + \frac{1}{2}(f'(y(x_n)))^2f(y(x_n)) \right) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{1}{8}f'''(y(x_n))(f(y(x_n)))^3 + \frac{9}{8}f''(y(x_n))f'(y(x_n))(f(y(x_n)))^2 \right) \\ &\quad + O(h^4). \end{aligned}$$

Finalmente consideramos la cuarta etapa,

$$k_4(y(x_n); h) = f(y(x_n) + hk_3(y(x_n); h)),$$

tenemos que (los argumentos de f y sus derivadas son siempre $(y(x_n) + hk_3(y(x_n); h))$ y los de k_4 y sus derivadas $(y(x_n); h)$)

$$\begin{aligned}\frac{dk_4}{dh} &= f' \left(k_3 + h \frac{dk_3}{dh} \right), \\ \frac{d^2k_4}{dh^2} &= f'' \left(k_3 + h \frac{dk_3}{dh} \right)^2 + f' \left(2 \frac{dk_3}{dh} + h \frac{d^2k_3}{dh^2} \right), \\ \frac{d^3k_4}{dh^3} &= f''' \left(k_3 + h \frac{dk_3}{dh} \right)^3 + f'' 3 \left(k_3 + h \frac{dk_3}{dh} \right) \left(2 \frac{dk_3}{dh} + h \frac{d^2k_3}{dh^2} \right) \\ &\quad + f' \left(3 \frac{d^2k_3}{dh^2} + h \frac{d^3k_3}{dh^3} \right).\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}k_4(y(x_n); h) &= f(y(x_n)) + hf'(y(x_n))f(y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} (f''(y(x_n))(f(y(x_n)))^2 + (f'(y(x_n)))^2 f(y(x_n))) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \left(f'''(y(x_n))(f(y(x_n)))^3 + \frac{15}{4} f''(y(x_n))f'(y(x_n))(f(y(x_n)))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (f'(y(x_n)))^3 f(y(x_n)) \right) + O(h^4).\end{aligned}$$

Juntando toda la información que acabamos de obtener, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}G(h) &= y(x_n) + hf(y(x_n)) + \frac{h^2}{2} f'(y(x_n))f(y(x_n)) \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \left(f''(y(x_n))(f(y(x_n)))^2 + (f'(y(x_n)))^2 f(y(x_n)) \right) \\ &\quad + \frac{h^4}{4!} \left(f'''(y(x_n))(f(y(x_n)))^3 + 4f''(y(x_n))f'(y(x_n))(f(y(x_n)))^2 \right. \\ &\quad \left. + (f'(y(x_n)))^3 f(y(x_n)) \right) + O(h^5).\end{aligned}$$

Comprobamos que F y G coinciden hasta orden 4. El método tiene por tanto orden de consistencia (y de convergencia) al menos 4. Por otra parte es explícito y tiene 4 etapas. Veremos en la sección siguiente que esto implica que no puede tener orden mayor que 4.

4. Comprobar que las soluciones numéricas por un método de Runge-Kutta del problema de valor inicial (PVI) y de su equivalente autónomo coinciden si el método es consistente y satisface la condición de suma por filas (5.7).

Solución. Al aplicar un RK a la forma autónoma equivalente de un PVI, para la primera componente se obtiene

$$\bar{y}_{n+1}^1 = \bar{y}_n^1 + h \sum_{i=1}^s b_i \bar{k}_i^1 = \bar{y}_{n+1}^1 + h \sum_{i=1}^s b_i.$$

Por otra parte, $\bar{y}_0^1 = a$, y además, por ser el método consistente, $\sum_{i=1}^s b_i = 1$. Así pues,

$$\bar{y}_n^1 = a + nh = x_n.$$

Queremos ver que $\bar{y}_n^l = y_n^{l-1}$, $l = 2, \dots, d+1$, $n = 0, \dots, N$. Lo probaremos por inducción. Para empezar vemos que

$$\bar{y}^l(a) = \eta^{l-1} = y^{l-1}(a), \quad l = 2, \dots, d.$$

Por consiguiente, podemos tomar

$$\bar{y}_0^l = y_0^{l-1} \approx \eta^{l-1}, \quad l = 2, \dots, d.$$

Supongamos ahora que el resultado es cierto para n . Queremos ver que también es cierto para $n+1$. En efecto, para $l = 2, \dots, d+1$, $i = 1, \dots, s$, se tiene, usando la hipótesis de inducción, la condición de suma por filas y lo ya calculado para la primera componente,

$$\begin{aligned} \bar{k}_i^l &= \bar{f}^l \left(\bar{y}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j \right) \\ &= \bar{f}^l \left(\bar{y}_n^1 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{y}_n^2 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j^2, \dots, \bar{y}_n^{d+1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j^{d+1} \right) \\ &= \bar{f}^l \left(x_n + hc_i, y_n^2 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j^2, \dots, y_n^{d+1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j^{d+1} \right) \\ &= f^{l-1} \left(x_n + hc_i, y_n^2 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j^2, \dots, y_n^{d+1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j^{d+1} \right). \end{aligned}$$

Es decir, \bar{k}_i^l y k_i^{l-1} , con $i = 1, \dots, s$, $l = 2, \dots, d+1$, resuelven el *mismo* sistema. Concluimos que $\bar{k}_i^l = k_i^{l-1}$ y, por tanto, que

$$\bar{y}_{n+1}^l = \bar{y}_n^l + h \sum_{i=1}^s b_i \bar{k}_i^l = y_n^{l-1} + h \sum_{i=1}^s b_i k_i^{l-1} = y_{n+1}^{l-1}, \quad l = 2, \dots, d+1,$$

como queríamos demostrar.

5. Consideramos el método de Runge-Kutta de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \\ \hline 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4. \end{array}$$

Este método *no cumple la condición de suma por filas*. Determinar su orden de consistencia. ¿Tiene un orden de consistencia mayor cuando nos restringimos a problemas autónomos?

Solución. Veamos para empezar que el método tiene orden al menos 2 para PVI generales.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 b_i &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 && \Rightarrow \text{orden 1,} \\ \sum_{i=1}^2 b_i c_i &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ \sum_{i,j=1}^2 b_i a_{ij} &= b_1(a_{11} + a_{12}) + b_2(a_{21} + a_{22}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{orden 2}$$

Por otra parte, en el problema 3 de esta misma sección hemos obtenido las condiciones de orden 3 para métodos de RK generales (que no cumplen necesariamente la condición de suma por filas). Una de ellas es $b^T A c = 1/3!$. Veamos que este método no la cumple. En efecto,

$$b^T A c = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3!},$$

así que el método no es en general de orden 3.

Si aplicamos el método a problemas autónomos, no ve los parámetros c_i . Así que para que el método sea de orden 3 para este tipo de problemas basta con que se cumplan las dos condiciones de orden 3 que no involucran a los parámetros c_1 . Una sencilla comprobación muestra que

$$\sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{il} = b_2(a_{21} + a_{22})(a_{21} + a_{22}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3!},$$

$$\sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jl} = b_2 a_{22}(a_{21} + a_{22}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3!},$$

por lo que el método tiene, en efecto, orden al menos 3 para problemas autónomos.

6. Considérese el método cuyo tablero es

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 3/6 & 1/6 & 2/6 \end{array}$$

- (a) Probar que es de orden 2 y no es de orden 3 en general.
- (b) Probar que sí es de orden 3 para todas las ecuaciones lineales de la forma $y' = My$ donde M es una matriz de constantes.

Solución. (a) Nótese que el método cumple la condición de suma por filas. Ver que tiene orden de consistencia al menos 2 es fácil,

$$\sum_{i=1}^3 b_i = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = 1 \quad \Rightarrow \text{orden 1,}$$

$$\sum_{i=1}^3 b_i c_i = \frac{3}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \text{orden 2.}$$

Veamos que sin embargo el método no es de orden 3. En efecto,

$$\sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 = \frac{3}{6} \cdot 0^2 + \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{2}{6} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3},$$

y el método no es de orden 3 para PVI generales.

(b) Queremos comprobar que el residuo,

$$R_n = \underbrace{y(x_n + h)}_{F(h)} - \underbrace{\left(y(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n, y(x_n); h) \right)}_{G(h)},$$

para PVI de este tipo es una $O(h^4)$.

Por una parte,

$$F(h) = y(x_n + h) = e^{hM} y(x_n) = \left(I + hM + \frac{h^2}{2} M^2 + \frac{h^3}{3!} M^3 + O(h^4) \right) y(x_n).$$

Por otra,

$$k_1(x_n, y(x_n); h) = f(x_n, y(x_n)) = My(x_n),$$

$$k_2(x_n, y(x_n); h) = f(x_n + h, y(x_n) + hk_1(x_n, y(x_n); h))$$

$$= f(x_n + h, y(x_n) + hMy(x_n)) = (M + hM^2)y(x_n),$$

$$k_3(x_n, y(x_n); h) = f\left(x_n + h, y(x_n) + \frac{h}{2}(k_1(x_n, y(x_n); h) + k_2(x_n, y(x_n); h))\right)$$

$$= f\left(x_n + h, y(x_n) + \frac{h}{2}(2M + hM^2)y(x_n)\right)$$

$$= \left(M + hM^2 + \frac{h^2}{2} M^3 \right) y(x_n).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} G(h) &= y(x_n) + \frac{h}{6} \left(3My(x_n) + (M + hM^2)y(x_n) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(M + hM^2 + \frac{h^2}{2} M^3 \right) y(x_n) \right) \\ &= \left(I + hM + \frac{h^2}{2} M^2 + \frac{h^3}{3!} M^3 \right) y(x_n). \end{aligned}$$

Concluimos que $R_n = F(h) - G(h) = O(h^4)$. Por tanto, el método es de orden 3 para PVI de este tipo.

Una pregunta: ¿es el método de orden 3 para cualquier problema autónomo?

7. ¿Es posible encontrar un método que tenga orden tres (en general) para problemas escalares $y' = f(y)$ y que tenga orden menor (en general) cuando sean vectoriales?

Solución. Usando los resultados del problema 2 de esta misma sección comprobamos que el residuo para el caso de problemas escalares autónomos viene dado por:

$$\begin{aligned} R_n = & hf(y(x_n)) \left(1 - \sum_{i=1}^s b_i \right) + h^2 f'(y(x_n)) f(y(x_n)) \left(\frac{1}{2} - \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} \right) \\ & + h^3 f''(y(x_n)) (f(y(x_n)))^2 \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2} \sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{il} \right) \\ & + h^3 (f'(y(x_n)))^2 f(y(x_n)) \left(\frac{1}{3!} - \sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jl} \right) + O(h^4). \end{aligned}$$

La EDO $y'(x) = 1$ demuestra que la condición $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ es necesaria para que este tipo de problemas tengan orden 1. La EDO $y'(x) = y(x)$ demuestra que la condición $\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} = 1/2$ es necesaria para tener orden 2. Esta misma EDO permite ver que la $\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} = \frac{1}{3!}$ también es necesaria para tener orden 3. Una vez impuestas todas estas condiciones, la EDO $y'(x) = (y(x))^2$ implica que la condición $\frac{1}{2} \sum_{i,j,l=1}^s b_i a_{ij} a_{il} = \frac{1}{3!}$ es necesaria para tener orden 3.

Resulta que las condiciones que acabamos de comprobar son necesarias para que un método de Runge-Kutta sea de orden 3 para problemas autónomos escalares, son suficientes para que el método sea de orden 3 para problemas autónomos vectoriales. Concluimos que no es posible encontrar un método que tenga orden tres (en general) para problemas escalares $y' = f(y)$ y que tenga orden menor (en general) cuando sean vectoriales.

Conviene reseñar aquí que sí que es posible encontrar métodos que tengan orden 4 para problemas escalares autónomos y que sólo tengan orden 3 para problemas autónomos vectoriales.

Sección 5.3

1. Consideramos el siguiente método creado por Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left(f(x_n, y_n) + 3f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}f(x_n, y_n)\right)\right) \right).$$

- (i) Escribir su tablero.
- (ii) Determinar el orden de convergencia.

Solución. (i) Es inmediato comprobar que la solución numérica dada por este método se puede escribir en la forma

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3 \right),$$

con etapas definidas por

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k_2\right).$$

Así pues, estamos ante un método de Runge-Kutta de tablero

0			
1/3	1/3		
2/3	0	2/3	
<hr/>			
	1/4	0	3/4.

(ii) Se trata de un método de Runge-Kutta explícito. Por tanto, la primera barrera de Butcher nos dice que su orden de convergencia es a lo sumo 3. Veamos que cumple las condiciones de orden 3. Nótese que el método cumple la condición de suma por filas, y que por tanto hay que comprobar menos condiciones. Un sencillo cálculo muestra que:

$$\sum_{i=1}^3 b_i = \frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4} = 1 \quad \Rightarrow \text{orden 1},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 b_i c_i &= 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} & \Rightarrow \text{orden 2} \\
\left. \begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 &= \frac{1}{4} \cdot 0^2 + 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \\
b^T A c &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}
\end{aligned} \right\} & \Rightarrow \text{orden 3.}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el método tiene orden de consistencia 3.

2. Consideramos el método de Runge-Kutta implícito

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 1/4 & -1/4 \\
2/3 & 1/4 & 5/12 \\
\hline
& 1/4 & 3/4.
\end{array}$$

- (i) Comprobar que la correspondiente función de incremento satisface una condición de Lipschitz con respecto a su segunda variable.
 - (ii) Demostrar que es consistente de orden 3. Esto demuestra que puede haber métodos de Runge-Kutta con orden mayor que el número de etapas. Eso sí, tienen que ser implícitos.
-

Solución. (i) Este apartado ya se ha hecho. Concide con el apartado (i) del problema 5.1.5.

(ii) Nótese que el método cumple la condición de suma por filas, y que por tanto hay que comprobar menos condiciones. Un sencillo cálculo muestra que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 b_i &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 && \Rightarrow \text{orden 1,} \\
\sum_{i=1}^2 b_i c_i &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} && \Rightarrow \text{orden 2} \\
\left. \begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 b_i c_i^2 &= \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \\
b^T A c &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{18} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}
\end{aligned} \right\} && \Rightarrow \text{orden 3.}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el método tiene orden de consistencia al menos 3.

Para ver que el método no tiene orden 4, usaremos la condición

$$4! \sum_{j_1, \dots, j_4=1}^2 b_{j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} a_{j_3 j_4} = 1,$$

que, como hemos visto, es necesaria para tener ese orden. Como se cumple la condición de suma por filas, esta condición se puede escribir como

$$b^T A^2 c = \frac{1}{4!}.$$

Si hacemos el cálculo, tenemos que

$$\begin{aligned}
b^T A c &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{18} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{27} \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{4!},
\end{aligned}$$

y el método no puede tener orden 4.

-
3. (a) Demostrar que un método de Runge-Kutta de una etapa no puede tener orden mayor que 2.
- (b) Demostrar que los métodos de Runge-Kutta de s etapas y orden p satisfacen

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^{l-1} = \frac{1}{l}, \quad l = 1, \dots, p.$$

Sugerencia. Aplicar el método a los PVI $y'(x) = x^{l-1}$, $y(0) = 0$, $l = 1, \dots, p$, y estudiar el valor del residuo R_n para $n = 0$.

- (c) Demostrar que un método de Runge-Kutta de dos etapas no puede tener orden mayor que cuatro.
-

Solución. (a) El tablero de estos métodos es

$$\begin{array}{c|c} c & a \\ \hline & b. \end{array}$$

La única condición de orden 1 exige que $b = 1$, mientras que las dos condiciones de orden 2 (no estamos suponiendo la condición de suma por filas) piden que $bc = 1/2$ y que $ba = 1/2$. Así pues, el único método de un paso de orden 2 tiene por tablero

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1. \end{array}$$

Se trata de la regla del punto medio implícita. Veamos que no tiene orden 3. En efecto, no cumple la condición, necesaria para orden 3, $bc^2 = 1/3$. Nótese que para ver que esto no se cumple no necesitamos para nada el valor de a , y que podríamos haber llegado a la misma conclusión sin utilizar la condición $ba = 1/2$.

(b) La solución del PVI que se da en la indicación es $y(x) = x^l/$. Por consiguiente, el residuo para este problema viene dado por

$$R_n = \frac{(x_n + h)^l}{l} - h \sum_{i=1}^s b_i (x_n + c_i h)^{l-1}.$$

En el caso $n = 0$,

$$R_0 = \frac{h^l}{l} - h \sum_{i=1}^s b_i (c_i h)^{l-1} = h^l \left(\frac{1}{l} - \sum_{i=1}^s b_i c_i^{l-1} \right),$$

y el método no puede ser de orden p salvo que

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^{l-1} = \frac{1}{l}, \quad l = 1, \dots, p.$$

(c) De acuerdo con el apartado anterior, las siguientes condiciones son necesarias para tener orden 5,

$$b_1 + b_2 = 1,$$

$$2b_1c_1 + 2b_2c_2 = 1,$$

$$3b_1c_1^2 + 3b_2c_2^2 = 1,$$

$$4b_1c_1^3 + 4b_2c_2^3 = 1,$$

$$5b_1c_1^4 + 5b_2c_2^4 = 1.$$

Cinco ecuaciones y sólo cuatro incógnitas: la cosa tiene mala pinta. Comprobemos que las cuatro primeras determinan los valores de b_i , c_i , $i = 1, 2$, de forma incompatible con la quinta.

Utilizo la primera para eliminar b_2 en la segunda. Queda $2b_1(c_1 - c_2) = 1 - 2c_2$. Llegados a este punto observamos que no es posible que $c_1 = c_2$. En efecto, en caso contrario se tendría necesariamente que $c_1 = 1/2 = c_2$ y la tercera ecuación diría que $3/4 = 1$. Así pues, puedo despejar b_1 en términos de c_1 y c_2 . Intercambiando los papeles de b_1 y b_2 obtengo

de la misma forma una expresión para b_2 en términos de c_1 y c_2 . Las expresiones mencionadas son

$$b_1 = \frac{1 - 2c_2}{2(c_1 - c_2)}, \quad b_2 = \frac{1 - 2c_1}{2(c_2 - c_1)}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la tercera y la cuarta ecuación obtenemos

$$3(c_1^2 - c_2^2) - 6c_1c_2(c_1 - c_2) = 2(c_1 - c_2),$$

$$4(c_1^3 - c_2^3) - 8c_1c_2(c_1^2 - c_2^2) = 2(c_1 - c_2),$$

que una vez divididas por $c_1 - c_2$ producen

$$3(c_1 + c_2) - 6c_1c_2 = 2,$$

$$4(c_1^2 + c_2c_1 + c_2^2) - 8c_1c_2(c_1 + c_2) = 2.$$

Completando cuadrado en la segunda de estas ecuaciones y multiplicando por $3/2$, llegamos a

$$6(c_1 + c_2)^2 - 6c_1c_2(1 + c(c_1 + c_2)) = 3,$$

que combinada con la primera de ellas produce

$$c_1 + c_2 = 1.$$

Meto esta información en la primera y tengo que $c_1c_2 = 1/6$, y por tanto

$$c_2^2 - c_2 - \frac{1}{6} = 0.$$

Concluimos que

$$c_2 = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad c_2 = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{2},$$

y de aquí que $b_1 = 1/2 = b_2$.

Con estos valores, la quinta de las ecuaciones, la que es necesaria para orden 5, dice que $35/36 = 1$, lo que es evidentemente falso.

Es interesante hacer notar aquí que hay métodos de Runge-Kutta (implícitos) de s etapas y orden $p = 2s$. Sin embargo, no hay métodos con orden mayor que $2s$. El objetivo de este problema es precisamente dar una idea de cuál es la prueba de este segundo hecho.

Sección 5.4

1. Comprobar que si f cumple las condiciones (H_f) , entonces la función de incremento ϕ_f del método lineal multipaso (MLM) satisface las hipótesis (H_{MN}) .

Solución. La función de incremento satisface

$$\begin{aligned} \phi_f(x_n, y_n, \dots, y_{n+k-1}; h) &= \beta_k f(x_n + kh, -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h\phi) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_n + jh, y_{n+j}). \end{aligned}$$

Si el método es explícito, $\beta_k = 0$, la continuidad de la función ϕ_f es inmediata. Si $\beta_k \neq 0$, el valor $\phi_f(x_n, y_n, \dots, y_{n+k-1}; h)$ de la función de incremento se obtiene iterando la función

$$F(\phi) = \beta_k f(x_n + kh, -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h\phi) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_n + jh, y_{n+j}).$$

Veamos que esta función es contractiva para todo h pequeño. En efecto,

$$\|F(\phi) - F(\hat{\phi})\| \leq |\beta_k| Lh \|\phi - \hat{\phi}\|,$$

y la función F es contractiva si $h < 1/(L|\beta_k|)$. Así pues, para h pequeño la función ϕ_f se puede obtener como límite contractivo de funciones continuas, y es por tanto una función continua.

Veamos ahora que la función de incremento es Lipschitz respecto a sus argumentos y . En efecto, usando la notación

$$\phi_f = \phi_f(x_n, y_n, \dots, y_{n+k-1}; h), \quad \hat{\phi}_f = \phi_f(x_n, \hat{y}_n, \dots, \hat{y}_{n+k-1}; h),$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
& \|\phi_f - \hat{\phi}_f\| \\
& \leq |\beta_k| \|f(x_n + kh, -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h\phi_f) - f(x_n + kh, -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \hat{y}_{n+j} + h\hat{\phi}_f)\| \\
& \quad + \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j| \|f(x_n + jh, y_{n+j}) - f(x_n + jh, \hat{y}_{n+j})\| \\
& \leq |\beta_k| L \left(\sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_j| \|y_{n+j} - \hat{y}_{n+j}\| + h \|\phi_f - \hat{\phi}_f\| \right) \\
& \quad + L \sum_{j=0}^{k-1} |\beta_j| \|y_{n+j} - \hat{y}_{n+j}\|.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si $|\beta_k|Lh < 1$,

$$\begin{aligned}
\|\phi_f - \hat{\phi}_f\| & \leq \frac{L}{1 - |\beta_k|Lh} \sum_{j=0}^{k-1} (|\beta_k||\alpha_j| + |\beta_j|) \|y_{n+j} - \hat{y}_{n+j}\| \\
& \leq \frac{LM}{1 - |\beta_k|Lh_0} \sum_{j=0}^{k-1} \|y_{n+j} - \hat{y}_{n+j}\|,
\end{aligned}$$

donde $M = \max_{0 \leq j \leq k-1} (|\beta_k||\alpha_j| + |\beta_j|)$, y $h \leq h_0 < 1/(|\beta_k|L)$.

Finalmente, si $f = 0$ se tiene de inmediato que $\phi_f = 0$.

2. Según hemos visto, los métodos de Runge-Kutta y los métodos lineales multipaso que son consistentes son también consistentes de orden 1. Dar un ejemplo de un método consistente que no sea consistente de orden 1.

Solución. El método de un paso $y_{n+1} = y_n + hf_n + h^{3/2}$ tiene la propiedad deseada. En efecto, por una parte el método satisface que $\sum_{j=0}^1 \alpha_j = 0$. Por otra, su función de incremento es $\phi_f(x_n, y_n; h) = f(x_n, y_n) + h^{1/2}$, de manera que $\phi_f(x, y(x); h) = f(x, y(x))$. Puesto que $\sum_{j=0}^1 j\alpha_j = 1$, concluimos que el método es consistente. Para ver que no es consistente de orden 1, consideramos el PVI $y'(x) = 0$, $y(0) = 0$.

El residuo para este problema es $R_n = -h^{3/2}$, de manera que $\tau = h^{1/2}$, y el método no tiene orden de consistencia 1.

3. Demostrar que si un método lineal multipaso es consistente de orden p , con constante de error $C_{p+1} \neq 0$, entonces

$$y_n = \frac{h^{p+1}n^{p+1}}{(p+1)!} - \frac{C_{p+1}h^{p+1}n}{\sum_{j=1}^k j\alpha_j}$$

es solución particular de la recurrencia que se obtiene al aplicar el método al PVI

$$y(x) = x^p/p!, \quad x \in [0, b], \quad y(0) = 0.$$

Concluir que las condiciones de consistencia de orden p son también necesarias para la convergencia de orden p .

Solución. Obsérvese que si el método es convergente, entonces $\rho'(1) = \sum_{j=0}^k j\alpha_j \neq 0$.

Un sencillo cálculo muestra que esta sucesión satisface

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} &= \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{j=0}^k \alpha_j (n+j)^{p+1} \\ &\quad - \frac{C_{p+1}h^{p+1}}{\sum_{j=0}^k j\alpha_j} (n+j) - \frac{h^{p+1}}{p!} \sum_{j=0}^k \beta_j (n+j)^p \\ &= \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \left(\sum_{l=0}^{p+1} \binom{p+1}{l} n^{p+1-l} \sum_{j=0}^k \alpha_j j^l - (p+1) \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} n^{p-l} \sum_{j=0}^k \beta_j j^l \right) \\ &\quad - C_{p+1}h^{p+1} \frac{n \sum_{j=0}^k \alpha_j + \sum_{j=0}^k j\alpha_j}{\sum_{j=0}^k j\alpha_j}. \end{aligned}$$

Usando la primera de las condiciones de orden, $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$, cambiando el índice de sumación l por $l-1$ en el segundo término, y sustituyendo

los números combinatorios por sus valores, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} &= \\ &= h^{p+1} \left(\sum_{l=1}^{p+1} \frac{n^{p+1-l}}{(p+1-l)!l!} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j j^l - (l+1) \sum_{j=0}^k \beta_j j^l \right) \right) - C_{p+1} h^{p+1}. \end{aligned}$$

Usando ahora que $C_l = 0$ para todo $l = 1, \dots, p$, concluimos finalmente que

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} = 0.$$

Si ahora calculamos el error cometido por el método al aplicárselo a este problema tenemos que

$$\begin{aligned} \max_{k \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n| &= \max_{k \leq n \leq N} \frac{|C_{p+1}| h^{p+1} n}{\sum_{j=1}^k j \alpha_j} = \frac{|C_{p+1}| h^{p+1} N}{\sum_{j=1}^k j \alpha_j} \\ &= \frac{C_{p+1} h^p (b-a)}{\sum_{j=1}^k j \alpha_j} \neq O(h^{p+1}), \end{aligned}$$

a pesar de que

$$\max_{0 \leq n \leq (k-1)} |y(x_n) - y_n| = \frac{|C_{p+1}| h^{p+1} (k-1)}{\sum_{j=1}^k j \alpha_j} = O(h^{p+1}),$$

y el método no es de orden $p+1$.

4. Probar que un MLM con polinomios característicos ρ y σ es de orden $p \geq 1$ si y sólo si existe una constante $c \neq 0$ tal que cuando $\zeta \rightarrow 1$

$$\rho(\zeta) - \sigma(\zeta) \log \zeta = c(\zeta - 1)^{p+1} + O(|\zeta - 1|^{p+2}).$$

Solución. Sea $\zeta = e^w$; por tanto $\zeta \rightarrow 1$ corresponde a $w \rightarrow 0$. Desarrollando en serie de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned}\rho(e^w) - w\sigma(e^w) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j e^{jw} - w \sum_{j=0}^k \beta_j e^{jw} \\ &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{j^q w^q}{q!} \right) - w \sum_{j=0}^k \beta_j \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{j^q w^q}{q!} \right) \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j j^q \right) w^q - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q-1)!} \left(\sum_{j=0}^k \beta_j j^{q-1} \right) w^q.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\rho(e^w) - w\sigma(e^w) = cw^{p+1} + O(w^{p+2})$$

para algún $c \neq 0$ si y sólo si el método es de orden p . Volviendo a la variable ζ y usando que

$$\log \zeta = (\zeta - 1) + O((\zeta - 1)^2) \quad \text{para } \zeta \rightarrow 1,$$

se concluye el resultado.

5. Un método lineal de k pasos con orden de consistencia k se dice que es una BDF si $\sigma(\zeta) = \gamma \zeta^k$ para algún $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determinar ρ y el valor de γ . Comprobar que las BDF con $k = 2$ y $k = 3$ son convergentes.

Solución. Usaremos el resultado que se demuestra en el problema 4 de esta misma sección.

Por ser el orden $p = k$ se tiene que

$$\rho(\zeta) - \beta \zeta^k \log \zeta = O(|\zeta - 1|^{k+1}), \quad \zeta \rightarrow 1.$$

Tomando $v = \zeta^{-1}$,

$$v^k \rho(v^{-1}) = -\beta \log v + O(|v - 1|^{k+1}), \quad v \rightarrow 1.$$

Dado que

$$\log v = \log(1 + (v - 1)) = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} (v - 1)^j + O(|v - 1|^{k+1}),$$

deducimos que

$$v^k \rho(v^{-1}) = \beta \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{j} (v-1)^j.$$

Por tanto

$$\rho(\zeta) = \beta v^{-k} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{j} (v-1)^j = \beta \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \zeta^{k-j} (\zeta-1)^j.$$

Sólo queda obtener la forma explícita de β , que se deduce de forma inmediata imponiendo la condición de normalización $\alpha_k = 1$ al polinomio ρ . Obtenemos finalmente que los polinomios característicos de la fórmula BDF de k pasos son

$$\rho(\zeta) = \beta \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \zeta^{k-j} (\zeta-1)^j, \quad \sigma(\zeta) = \beta \zeta^k,$$

con

$$\beta = \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right)^{-1}.$$

Las tres primeras fórmulas son

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= h f_{n+1}, \\ y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n &= \frac{2}{3} h f_{n+2}, \\ y_{n+3} - \frac{18}{11} y_{n+2} + \frac{9}{11} y_{n+1} - \frac{2}{11} y_n &= \frac{6}{11} h f_{n+3}, \end{aligned}$$

La fórmula BDF con $k = 1$ recibe también el nombre de *método de Euler implícito*.

6. Sea un MLM tal que $\rho(\zeta) = (\zeta-1)(\zeta^2+1)$. Determinar $\sigma(\zeta)$ para que alcance el orden máximo posible. Calcular su constante de error.

Solución. Usando el resultado del problema 4 de esta misma sección, es trivial ver que un método es de orden p si y sólo si existe una constante $c \neq 0$ tal que cuando $\zeta \rightarrow 1$ se tiene que

$$\sigma(\zeta) = \frac{\rho(\zeta)}{\log \zeta} + c(\zeta - 1)^p + O(|\zeta - 1|^{p+1}).$$

Así pues, para conseguir un método del mayor orden posible lo que hay que hacer es tomar como σ al único polinomio de grado menor o igual que 3 que coincide con el desarrollo de $\rho(\zeta)/\log(\zeta)$ hasta orden 3 en potencias de $\zeta - 1$.

Para simplificar las cuentas denoto $w = \zeta - 1$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\zeta)}{\log \zeta} &= \frac{\rho(1+w)}{\log(1+w)} = \frac{w((w+1)^2 + 1)}{w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + O(w^5)} \\ &= \frac{w^2 + 2w + 2}{1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{3} - \frac{w^3}{4} + O(w^4)} \\ &= (w^2 + 2w + 2) \left(1 + \frac{w}{2} - \frac{w^2}{12} + \frac{w^3}{24} + O(w^4) \right) \\ &= 2 + 3w + \frac{11}{6}w^2 + \frac{5}{12}w^3 + O(w^4). \end{aligned}$$

Por consiguiente, debemos tomar

$$\sigma(\zeta) = 2 + 3(\zeta - 1) + \frac{11}{6}(\zeta - 1)^2 + \frac{5}{12}(\zeta - 1)^3.$$

7. Cuando un MLM es implícito, para ahorrar trabajo computacional podemos sustituir el valor y_{n+k} en el lado derecho de (MLM) por una aproximación de ese valor dada por un método explícito,

$$y_{n+k}^* = - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\beta}_j f(x_{n+j}, y_{n+j}),$$

de manera que

$$y_{n+k} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \left(\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^*) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) \right).$$

Así pues, primero *predecimos* un valor de y_{n+k} y luego lo *corregimos*. El par predictor-corrector resultante es explícito, pero *no es* un MLM.

- (i) Demostrar que un par predictor-corrector obtenido a partir de dos MLM no puede tener mayor orden de consistencia que el método corrector del par.
- (ii) Demostrar que si los métodos que dan origen al predictor y al corrector son consistentes, también lo es el par predictor-corrector. ¿Se puede debilitar la hipótesis sobre el método predictor? En caso afirmativo, decir cómo, y en caso negativo, explicar por qué.
- (iii) Demostrar que si el predictor es consistente de orden $p - 1$ y el corrector es consistente de orden p , entonces el par es consistente de orden p .

Solución. (i) El residuo del predictor-corrector para un PVI tal que $f(x, y)$ no dependa de y coincide con el residuo para ese problema del método que da origen al corrector.

Consideramos el PVI

$$y'(x) = \frac{x^p}{p!}, \quad y(0) = 0,$$

donde p es el orden del método que da origen al corrector. Puesto que para este problema $y^{(p+1)}(x) = 1$, el residuo (tanto del método que da origen al corrector como para el par predictor-corrector) es $R_n = C_{p+1}h^{p+1}$, donde $C_{p+1} \neq 0$ es la constante de error del corrector. Por consiguiente $R_n \neq O(h^{p+2})$, y el par predictor-corrector no es de orden $p + 1$.

(ii) Por ser el método predictor consistente,

$$\sum_{j=0}^k \hat{\alpha}_j = 0, \quad \sum_{j=0}^k j \hat{\alpha}_j = \sum_{j=0}^k \hat{\beta}_j,$$

y por serlo el corrector,

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \quad \sum_{j=0}^k j \alpha_j = \sum_{j=0}^k k \beta_j.$$

Estudiamos la consistencia del par, que tiene la forma

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \phi_f(x_n, y_n, \dots, y_{n+k-1}; h),$$

con una función de incremento dada por

$$\begin{aligned} & \phi_f(x_n, y_n, \dots, y_{n+k-1}; h) \\ &= \beta_k f \left(x_n + kh, - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\beta}_j f(x_n + jh, y_{n+j}) \right) \\ & \quad + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_n + jh, y_{n+j}). \end{aligned}$$

La primera condición de consistencia del par, $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$, se cumple obviamente, por ser el corrector consistente (es la primera condición de consistencia del corrector). En cuanto a la segunda condición de consistencia, tenemos que

$$\phi_f(x, y(x), \dots, y(x); 0) = \beta_k f \left(x, - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j y(x) \right) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x, y(x)).$$

Usando la primera condición de consistencia del predictor, se tiene que $-\sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j = \hat{\alpha}_k = 1$, y por tanto

$$\phi_f(x, y(x), \dots, y(x); 0) = \sum_{j=0}^k \beta_j f(x, y(x)).$$

Usando ahora la segunda condición de consistencia del corrector, concluimos que

$$\phi_f(x, y(x), \dots, y(x); 0) = \sum_{j=0}^k j \alpha_j f(x, y(x)),$$

y concluimos que el par es consistente.

En ningún momento hemos usado la segunda condición de consistencia del predictor. Así pues, no hace falta pedir que el predictor sea consistente. Basta con que satisfaga $\sum_{j=0}^k \hat{\alpha}_j = 0$.

(iii) Sabemos por el apartado (i) que el orden de consistencia no puede ser superior a p . Veamos que dicho orden sí se alcanza. Para ello calculamos el residuo,

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_{n+j}) \\
&\quad - h \beta_k f \left(x_n + kh, - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j y(x_{n+j}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\beta}_j f(x_n + jh, y(x_{n+j})) \right) \\
&\quad - h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_n + jh, y(x_{n+j})) \\
&= \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_n + jh, y(x_{n+j})) \\
&\quad + h \beta_k \left(f(x_n + kh, y(x_n + kh)) \right. \\
&\quad \left. - f \left(x_n + kh, - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j y(x_{n+j}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\beta}_j f(x_n + jh, y(x_{n+j})) \right) \right).
\end{aligned}$$

Por ser el corrector de orden p , la suma de los dos primeros términos es una $O(h^{p+1})$. En cuanto al último factor, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|f(x_n + kh, y(x_n + kh)) \\
&\quad - f(x_n + kh, - \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j y(x_{n+j}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\beta}_j f(x_n + jh, y(x_{n+j})))\| \\
&\leq L \|y(x_n + kh) + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\alpha}_j y(x_{n+j}) - h \sum_{j=0}^{k-1} \hat{\beta}_j f(x_n + jh, y(x_{n+j}))\| \\
&= O(h^p),
\end{aligned}$$

por ser el predictor de orden $p - 1$. Por consiguiente el último término también es una $O(h^{p+1})$, y concluimos que el par tiene orden p .

8. Consideramos el par predictor-corrector

$$\begin{cases} y_{n+2}^* - 3y_{n+1} + 2y_n = \frac{h}{2} (f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 3f(x_n, y_n)), \\ y_{n+2} - y_n = h (f(x_{n+2}, y_{n+2}^*) + f(x_n, y_n)). \end{cases}$$

- (i) Determinar el orden de consistencia.
- (ii) Estudiar si es convergente.

Solución. (i) Para empezar estudiamos el orden de consistencia del método que da origen al corrector. Un sencillo cálculo muestra que

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \sum_{j=0}^2 \alpha_j = 1 - 1 = 0 \\ C_1 &= \sum_{j=1}^2 j\alpha_j - \sum_{j=0}^2 \beta_j = 2 - (1 + 1) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{orden 1,}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 j^2 \alpha_j - 2 \sum_{j=1}^2 j \beta_j \right) = \frac{1}{2} (4 - 2 \cdot 2) = 0 \Rightarrow \text{orden 2,}$$

$$C_3 = \frac{1}{3!} \left(\sum_{j=1}^2 j^3 \alpha_j - 3 \sum_{j=1}^2 j^2 \beta_j \right) = \frac{1}{3!} (8 - 3 \cdot 4) \neq 0 \Rightarrow \text{no es de orden 3.}$$

Así que el método que da origen al corrector es de orden 2. Gracias al problema anterior sabemos entonces que el par predictor-corrector es a lo sumo de orden 2. Calculemos el residuo para ver que alcanza ese

orden,

$$\begin{aligned}
R_n &= y(x_n + 2h) - y(x_n) - h \left(f(x_n + 2h, 3y(x_n + h) - 2y(x_n)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{h}{2}(y'(x_{n+1}) - 3y'(x_n)) \right) - hy'(x_n) \\
&= y(x_n) + y'(x_n)2h + \frac{y''(x_n)4h^2}{2} + O(h^3) - y(x_n) - h \left(\underbrace{f(x_n, y(x_n))}_{y'(x_n)} \right. \\
&\quad \left. + 2f_x(x_n, y(x_n)) + \underbrace{\sum_{J=1}^d f_{y^J}(x_n, y(x_n)) \left(3(y^J)'(x_n) + \frac{1}{2}((y^J)'(x_n) - 3(y^J)'(x_n)) \right)}_{2y''(x_n)} \right) \\
&\quad \left. + O(h^2) - hy'(x_n) \right) = O(h^3).
\end{aligned}$$

Así que, en efecto, el método tiene orden de consistencia 2.

(ii) Dado que el método es consistente, para ver que es convergente (de orden al menos 2) basta con comprobar que es 0-estable. Las raíces del primer polinomio característico del método, $\rho(\zeta) = \zeta^2 - 1$, son ± 1 . Así pues, el método cumple la condición de la raíz, y es por tanto 0-estable.

Sección 5.5

1. Demostrar que existen métodos lineales de k pasos con orden de consistencia $p = 2k$.

Solución. Podemos eliminar las dos primeras ecuaciones, y las incógnitas α_0 y β_0 , que quedan determinadas por las dos primeras ecuaciones a partir de las demás incógnitas. Se trata por tanto de comprobar que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2^2 & \dots & (k-1)^2 & -2 \cdot 1 & -2 \cdot 2 & \dots & -2 \cdot k \\ 1 & 2^3 & \dots & (k-1)^3 & -3 \cdot 1 & -3 \cdot 2^2 & \dots & -3 \cdot k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{2k} & \dots & (k-1)^{2k} & -2k \cdot 1 & -2k \cdot 2^{2k-1} & \dots & -2k \cdot k^{2k-1} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 & \dots & 2 \cdot 1 \\ 1 & 2 & \dots & (k-1) & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & \dots & 3 \cdot k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{2k-2} & \dots & (k-1)^{2k-2} & 2k \cdot 1 & 2k \cdot 2^{2k-2} & \dots & 2k \cdot k^{2k-2} \end{pmatrix},$$

no es singular.

2. Sea ρ un polinomio mónico de grado k verificando $\rho(1) = 0$. Demostrar que:
 - (a) Existe un único polinomio σ de grado menor o igual que k tal que el MLM dado por ρ y σ tiene orden de consistencia mayor o igual que $k+1$.
 - (b) Existe un único polinomio σ de grado menor estricto que k tal que el MLM dado por ρ y σ tiene orden de consistencia mayor o igual que k .

Solución. Los dos apartados son corolario inmediato del siguiente resultado.

Lema 1 *Sea ρ un polinomio mónico de grado k verificando $\rho(1) = 0$ y sea k' , $0 \leq k' \leq k$. Entonces hay un único polinomio $\sigma(\zeta)$ de grado menor o igual que k' tal que el orden del método determinado por ρ y ζ tiene orden de consistencia mayor o igual que $k' + 1$.*

Demostración. Por ser $\rho(1) = 0$, la función $\rho(\zeta)/\log \zeta$ admite un desarrollo en potencias de $\zeta - 1$,

$$\frac{\rho(\zeta)}{\log \zeta} = c_0 + c_1(\zeta - 1) + c_2(\zeta - 1)^2 + \dots$$

Si elegimos

$$\sigma(\zeta) = c_0 + c_1(\zeta - 1) + c_2(\zeta - 1)^2 + \dots + c_{k'}(\zeta - 1)^{k'},$$

entonces $\frac{\rho(\zeta)}{\log \zeta} - \sigma(\zeta)$ tiene en $\zeta = 1$ un cero de multiplicidad $k' + 1$ (o quizá mayor, si $c_{k'+1} = 0$). Por consiguiente, usando el resultado del problema 4 de la sección anterior, tenemos que el método tiene orden de consistencia al menos $k' + 1$. Nótese que cualquier otra elección de σ hace que $\zeta = 1$ no sea un cero de multiplicidad $k' + 1$, y por tanto que el método no alcance orden $k' + 1$.

-
3. Demostrar que si un método lineal de 3 pasos explícito es de orden 4, entonces $\alpha_0 + \alpha_2 = 8$ y $\alpha_1 = -9$. Deducir de esto que el método no puede ser convergente.
-

Solución. Las condiciones de orden 4 son en este caso

$$\begin{aligned}\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 1 &= 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3 &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9 &= 2(\beta_1 + 2\beta_2), \\ \alpha_1 + 8\alpha_2 + 27 &= 3(\beta_1 + 4\beta_2), \\ \alpha_1 + 16\alpha_2 + 81 &= 4(\beta_1 + 8\beta_2).\end{aligned}$$

Restándole a la última de estas ecuaciones cada una de las anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned}8\alpha_2 + 54 &= \beta_1 + 20\beta_2, \\ 12\alpha_2 + 72 &= 2\beta_1 + 28\beta_2, \\ 14\alpha_2 + 78 &= 3\beta_1 + 31\beta_2 - \beta_0, \\ -\alpha_0 + 15\alpha_2 + 80 &= 4\beta_1 + 32\beta_2.\end{aligned}\tag{4}$$

Si a la primera de estas ecuaciones le resto la mitad de la segunda, obtengo $2\alpha_2 + 18 = 6\beta_2$, es decir

$$\alpha_2 + 9 = 3\beta_2.$$

Usando esto para eliminar β_2 en la segunda ecuación de (4), llegamos a

$$4\alpha_2 = 3\beta_1 + 18.$$

Ahora utilizamos las dos últimas relaciones que hemos obtenido para eliminar β_1 y β_2 en la cuarta ecuación de (4), llegando a

$$\alpha_0 + \alpha_2 = 8.$$

Finalmente usamos que los α_j suman 0 para obtener que

$$\alpha_1 = -9.$$

Nótese que todavía podríamos usar la tercera ecuación de (4) para obtener una expresión para β_0 en términos de α_2 , pero esto va a ser irrelevante para nuestros propósitos.

Ya estamos en disposición de probar que el método no puede ser convergente. En efecto, el primer polinomio característico es

$$\rho(\zeta) = \zeta^3 + \alpha_2 \zeta^2 - 9\zeta + 8 - \alpha_2.$$

Es inmediato comprobar que $\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \rho(\zeta) = -\infty$ y que $\rho(-1) = 16 > 0$, luego ρ tiene una raíz real menor que -1 . Por consiguiente ρ no cumple la condición de la raíz, y el método no es 0-estable.

4. Encontrar el orden de consistencia y la constante de error de los métodos

(a) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{h}{4}(f_{n+2} + 8f_{n+1} + 3f_n),$

(b) $y_{n+2} - y_n = \frac{2}{3}h(f_{n+2} + f_{n+1} + f_n),$

(c) $y_{n+4} - \frac{8}{19}(y_{n+3} - y_{n+1}) - y_n = \frac{6h}{19}(f_{n+4} + 4f_{n+3} + 4f_{n+1} + f_n).$

¿Son convergentes? (El método (c) se conoce como método de Quade.)

Solución. (a) Estudiemos las condiciones de orden,

$$C_0 = \sum_{j=0}^2 \alpha_j = 1 + 1 - 2 = 0,$$

$$C_1 = \sum_{j=0}^2 j\alpha_j - \sum_{j=0}^2 \beta_j = 2 + 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{8}{4} + \frac{3}{4}\right) = 0,$$

$$C_2 = \frac{1}{2!} \left(\sum_{j=0}^2 j^2 \alpha_j - 2 \sum_{j=0}^2 j \beta_j \right) = \frac{1}{2} \left(4 + 1 - 2 \left(\frac{2}{4} + \frac{8}{4} \right) \right) = 0,$$

$$C_3 = \frac{1}{3!} \left(\sum_{j=0}^2 j^3 \alpha_j - 3 \sum_{j=0}^2 j^2 \beta_j \right) = \frac{1}{3!} \left(8 + 1 - 3 \left(\frac{4}{4} + \frac{8}{4} \right) \right) = 0,$$

$$C_4 = \frac{1}{4!} \left(\sum_{j=0}^2 j^4 \alpha_j - 4 \sum_{j=0}^2 j^3 \beta_j \right) = \frac{1}{4!} \left(16 + 1 - 4 \left(\frac{8}{4} + \frac{8}{4} \right) \right) = \frac{1}{4!} \neq 0.$$

Concluimos que el método tiene orden de consistencia 3, y constante de error $1/4!$.

Para ver si es consistente, consideramos las raíces del primer polinomio característico, $\rho(\zeta) = \zeta^2 + \zeta - 2$, que resultan ser $\zeta_1 = 1$ y $\zeta_2 = -2$. No se cumple la condición de la raíz y por tanto el método no es 0-estable. Por consiguiente, tampoco es convergente.

(b) Observamos en primer lugar que el método es 0-estable. En efecto, las raíces del primer polinomio característico, $\rho(\zeta) = \zeta^2 - 1$, son $\zeta_{\pm} = \pm 1$. Por lo tanto, la primera barrera de Dahlquist nos dice que el método como mucho puede tener orden 4. Por otra parte, el método es simétrico, y su orden será necesariamente par, así que nos podemos ahorrar el cálculo de las condiciones de orden par. Tenemos que

$$C_1 = \sum_{j=0}^2 j\alpha_j - \sum_{j=0}^2 \beta_j = 2 - \frac{2}{3}(1 + 1 + 1) = 0,$$

$$C_3 = \frac{1}{3!} \left(\sum_{j=0}^2 j^3 \alpha_j - 3 \sum_{j=0}^2 j^2 \beta_j \right) = \frac{1}{3!} \left(8 - 3 \cdot \frac{2}{3} (4 + 1) \right) = -\frac{1}{3}.$$

El orden de consistencia es por tanto 2, y la constante de error $-1/3$. El método es convergente (de orden 2).

(c) Estudiemos en primer lugar si el método es 0-estable. El primer polinomio característico es

$$\rho(\zeta) = \zeta^4 - \frac{8}{19}(\zeta^3 - \zeta) - 1.$$

Es inmediato ver que tanto 1 como -1 son raíces, y haciendo Ruffini obtenemos que

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta + 1) \left(\zeta^2 - \frac{8}{19}\zeta + 1 \right).$$

Las raíces del último factor son $\zeta_{\pm} = \frac{4}{19} \pm \frac{i}{19}\sqrt{345}$, ambas de módulo 1. Así, si bien las cuatro raíces de ρ tienen módulo 1, todas ellas son simples, y el método es 0-estable. Por la primera barrera de Dahlquist, el método no podrá tener orden mayor que 6.

Por otra parte, el método es simétrico, y tendrá necesariamente orden

par. Veamos que dicen las condiciones de orden impar,

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sum_{j=0}^4 j\alpha_j - \sum_{j=0}^4 \beta_j = 4 - 3 \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{19} - \frac{6}{19} (1 + 4 + 4 + 1) = 0, \\
C_3 &= \frac{1}{3!} \left(\sum_{j=0}^4 j^4 \alpha_j - 3 \sum_{j=0}^4 j^2 \beta_j \right) \\
&= \frac{1}{3!} \left(64 - 27 \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{19} - 3 \cdot \frac{6}{19} (16 + 9 \cdot 4 + 4) \right) = 0, \\
C_5 &= \frac{1}{5!} \left(\sum_{j=0}^4 j^5 \alpha_j - 5 \sum_{j=0}^4 j^4 \beta_j \right) \\
&= \frac{1}{5!} \left(1024 - 243 \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{19} - 5 \cdot \frac{6}{19} (256 + 81 \cdot 4 + 4) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el orden de consistencia (y de convergencia) es 6.

Finalmente calculamos la constante de error,

$$\begin{aligned}
C_7 &= \frac{1}{7!} \left(\sum_{j=0}^4 j^7 \alpha_j - 7 \sum_{j=0}^4 j^6 \beta_j \right) \\
&= \frac{1}{7!} \left(16384 - 2187 \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{19} - 7 \cdot \frac{6}{19} (4096 + 729 \cdot 4 + 4) \right) \\
&= -\frac{6}{19 \cdot 7 \cdot 5}.
\end{aligned}$$

5. Repetir el problema anterior para el método lineal multipaso cuyos polinomios característicos son

$$\rho(\zeta) = \zeta^4 - 1 \quad \text{y} \quad \sigma(\zeta) = \frac{14}{45} (\zeta^4 + 1) + \frac{64}{45} (\zeta^3 + \zeta) + \frac{24}{45} \zeta^2.$$

Solución. Observamos en primer lugar que el método es 0-estable. En efecto, las raíces del primer polinomio característico, $\rho(\zeta) = \zeta^4 - 1$, son $\zeta = \pm 1, \pm i$, todas de módulo 1, pero todas simples. Por lo tanto, la primera barrera de Dahlquist nos dice que el método como mucho

puede tener orden 6. Por otra parte, el método es simétrico, y su orden será necesariamente par, así que nos podemos ahorrar el cálculo de las condiciones de orden par. Tenemos que

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sum_{j=0}^4 j\alpha_j - \sum_{j=0}^4 \beta_j = 4 - \frac{1}{45} (2 \cdot 14 + 2 \cdot 64 + 24) = 0, \\
C_3 &= \frac{1}{3!} \left(\sum_{j=0}^4 j^4 \alpha_j - 3 \sum_{j=0}^4 j^2 \beta_j \right) \\
&= \frac{1}{3!} \left(64 - \frac{3}{45} (14 \cdot 16 + 64(9+1) + 24 \cdot 4) \right) = 0, \\
C_5 &= \frac{1}{5!} \left(\sum_{j=0}^4 j^5 \alpha_j - 5 \sum_{j=0}^4 j^4 \beta_j \right) \\
&= \frac{1}{5!} \left(1024 - \frac{5}{45} (14 \cdot 256 + 64(81+1) + 24 \cdot 16) \right) \\
&= -\frac{2048}{5!} \neq 0.
\end{aligned}$$

El orden de consistencia es por tanto 4, y la constante de error $2048/5!$. El método es convergente (de orden 4).

6. De entre los métodos lineales multipaso de la forma

$$y_{n+3} + \alpha_2 y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n),$$

determinar los simétricos convergentes de mayor orden.

Solución. Puesto que el método es explícito, de acuerdo con la primera barrera de Dahlquist el mayor orden de convergencia posible es $p = k = 3$. Por otra parte, si el método es simétrico, tiene orden par, luego el mayor orden de convergencia posible es 2.

Para que el método sea simétrico necesitamos

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = -\alpha_2, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2,$$

y para que sea de orden 2 (basta con comprobar las condiciones de orden impar, ya que el método es simétrico),

$$0 = C_0 = \sum_{j=0}^3 j\alpha_j - \sum_{j=0}^3 \beta_j = 3 + 2\alpha_2 - \alpha_2 - 2\beta_2.$$

Por consiguiente, el método tendrá orden 2 si y sólo si, además de las condiciones de simetría, se cumple que

$$\beta_2 = \frac{3 + \alpha_2}{2}.$$

Ahora tenemos una familia uniparamétrica de métodos, de parámetro α_2 . Veamos para qué valores del parámetro el método es 0-estable. El primer polinomio característico es $\rho(\zeta) = \zeta^3 + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_2\zeta - 1$. Ya sabemos que $\zeta_1 = 1$ es raíz. Dividiendo por $\zeta - 1$, obtenemos que

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta^2 + (1 + \alpha_2)\zeta + 1) = 0.$$

Así que las otras dos raíces del polinomio resultan ser

$$\zeta_{\pm} = \frac{-(1 + \alpha_2) \pm \sqrt{(1 + \alpha_2)^2 - 4}}{2}.$$

Distinguimos tres casos. El primero es que $(1 + \alpha_2)^2 > 4$. Aquí distinguimos dos subcasos: $1 + \alpha_2 > 2$, que produce $\zeta_- < -1$, y $1 + \alpha_2 < -2$, que lleva a $\zeta_+ > 1$. En ambas situaciones el método no es 0-estable, por tener una raíz de módulo mayor que 1.

El segundo caso se da cuando $(1 + \alpha_2)^2 = 4$. En esta situación $\zeta_{\pm} = -(1 + \alpha_2)/2$ es raíz doble, si $1 + \alpha_2 = 2$, o triple, si $1 + \alpha_2 = -2$. El método tampoco es 0-estable.

En el tercer caso, $(1 + \alpha_2)^2 < 4$, las raíces ζ_{\pm} son complejas,

$$\zeta_{\pm} = \frac{-(1 + \alpha_2) \pm i\sqrt{4 - (1 + \alpha_2)^2}}{2}.$$

Una sencilla cuenta muestra que ambas tienen módulo 1, como la raíz principal. Sin embargo, las tres raíces son simples, y el método es 0-estable. Concluimos que el método es convergente de orden 2 si y sólo si

$$-3 < \alpha_2 < 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{3 + \alpha_2}{2}, \quad \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \alpha_0 = -1.$$

Sección 5.6

1. Programar el método de Runge-Kutta semi-implícito Lobatto IIIA de dos etapas, de tablero

0	0
1	1/2 1/2
	1/2 1/2

resolviendo los sistemas no lineales que aparecen, por un lado por iteración de punto fijo, y por otro usando el método de Newton.

Solución. (a)

(b)

```

1  function [y,evf,evj]=lobatto3(ld,jyld,x,y0,itm,tol);
2  N=length(x)-1; evf=0; evj=0; I=eye(2*length(y0)); d=length(y0);
3  y(:,1)=y0;
4  for n=1:N, % Bucle que recorre los xn
5      numit=0; enewton=tol+1;
6      hn=x(n+1)-x(n);
7      fn=feval(ld,x(n),y(:,n));
8      evf=evf+1;
9      k1=fn; k2k=k1; k3k=k1;
10     while (numit<itm & enewton>tol) % Metodo de Newton para hallar k2 y k3
11         numit=numit+1;
12         g=[k2k;k3k]-[feval(ld,x(n)+hn/2,y(:,n)+hn*(5*k1/24+k2k/3-k3k/24));
13                     feval(ld,x(n)+hn,y(:,n)+hn*(k1/6+2*k2k/3+k3k/6))];
14         evf=evf+2;
15         jacg1=feval(jyld,x(n)+hn/2,y(:,n)+hn*(5*k1/24+k2k/3-k3k/24));
16         jacg2=feval(jyld,x(n)+hn,y(:,n)+hn*(k1/6+2*k2k/3+k3k/6));
17         jacg=I-hn*[jacg1/3,-jacg1/24;2*jacg2/3,jacg2/6];
18         evj=evj+2;
19         correccion=-jacg\g;
20         enewton=norm(correccion,inf);
21         k2k=k2k+correccion(1:d);
22         k3k=k3k+correccion(d+1:2*d);
23     end
24     if enewton<=tol
25         k2=k2k; k3=k3k;
26         y(:,n+1)=y(:,n)+hn*(k1/6+2*k2/3+k3/6);
27     else
28         error('Newton no converge')
29     end

```

-
2. Programar el método de Runge-Kutta implícito Radau IA de dos etapas, de tablero

0	1/4	-1/4
2/3	1/4	5/12
	1/4	3/4,

resolviendo los sistemas no lineales que aparecen tanto por iteración de punto fijo como por el método de Newton.

Solución. (a)

```

1  function [y,evf]=radauIApf(ld,x,y0,itm,tol)
2
3  N=length(x)-1;
4  evf=0;
5  y(:,1)=y0;
6  for n=1:N, % Bucle para recorrer toda la discretizacion
7      numit=0;
8      errorpf=tol+1;
9      hn=(x(n+1)-x(n));
10     k1=feval(ld,x(n),y(:,n));
11     k2=k1;
12     evf=evf+1;
13     while (numit<itm && errorpf>tol)
14         numit=numit+1;
15         nuevok1=feval(ld,x(n),y(:,n)+hn*(k1-k2)/4);
16         nuevok2=feval(ld,x(n)+2*hn/3,y(:,n)+hn*(k1/4+5*k2/12));
17         evf=evf+2;
18         errorpf=norm([nuevok1-k1;nuevok2-k2],inf);
19         k1=nuevok1;
20         k2=nuevok2;
21     end
22     if errorpf<=tol
23         y(:,n+1)=y(:,n)+hn*(k1+3*k2)/4; %incluyo la ultima correccion
24     else
25         error('la iteracion de punto fijo no converge')
26     end
27 end

```

(b)

```

1  function [y,evf,evj]=radauIANw(ld,jyld,x,y0,itm,tol)
2
3  N=length(x)-1;
4  evf=0; evj=0;
5  d=length(y0); % dimension del sistema
6  I=eye(2*d);
7  y(:,1)=y0;
8  for n=1:N, % Bucle para recorrer toda la discretizacion
9      numit=0;
10     errornewton=tol+1;
11     h=x(n+1)-x(n);
12     k1=feval(ld,x(n),y(:,n));
13     k2=k1;
14     evf=evf+1;
15     while (numit<itm && errornewton>tol)
16         numit=numit+1;
17         % g es la funcion de la que hay que encontrar el cero para resolver el
18         % problema no lineal
19         g=[k1;k2]-[feval(ld,x(n),y(:,n)+h*(k1-k2)/4);feval(ld,x(n)+2*h/3,y(:,n)
20                     +h*(k1/4+5*k2/12))];
21         evf=evf+2;
22         jacg1=feval(jyld,x(n),y(:,n)+h*(k1-k2)/4);
23         jacg2=feval(jyld,x(n)+2*h/3,y(:,n)+h*(k1/4+5*k2/12));
24         jacg=I-h*[jacg1/4,-jacg1/4;jacg2/4,5*jacg2/12];
25         evj=evj+2;
26         correccion=-jacg\g;
27         errornewton=norm(correccion,inf);
28         k1=k1+correccion(1:d);
29         k2=k2+correccion(d+1:2*d);
30     end
31     if errornewton<=tol
32         y(:,n+1)=y(:,n)+h*(k1+3*k2)/4; %incluyo la ultima correccion
33     else
34         error('newton no converge')
35     end
36 end

```

-
3. Programar el método de Milne-Simpson de dos pasos para mallas uniformes,

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3} (f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)),$$

usando el método de Newton a la hora de resolver ecuaciones no lineales. Hay que programarlo de manera que funcione para sistemas y de forma que se haga el menor número posible de evaluaciones de función en cada paso. El segundo valor de arranque, y_1 , se calculará mediante el método de Runge-Kutta explícito de tablero

0			
1/3	1/3		
2/3	0	2/3	
	1/4	0	3/4,

un método de orden 3 que se conoce como método de Heun.

Solución.

```

1  function [y,evf,evj]=ms2nw(ld,jyld,x,y0,itm,tol)
2  N=length(x)-1; evf=0; evj=0; I=eye(length(y0));
3  y(:,1)=y0;
4  hn=(x(2)-x(1));
5  fn=feval(ld,x(1),y(:,1));
6  k2=feval(ld,x(1)+hn/3,y(:,1)+hn*fn/3);
7  k3=feval(ld,x(1)+2*hn/3,y(:,1)+2*hn*k2/3);
8  evf=evf+3;
9  y(:,2)=y(:,1)+hn*(fn+3*k3)/4;
10 for n=1:N-1, % Bucle para recorrer la discretizacion
11     numit=0;
12     enewton=tol+1;
13     hn=x(n+1)-x(n);
14     fn1=feval(ld,x(n+1),y(:,n+1));
15     evf=evf+1;
16     yk=y(:,n+1)+hn/2*(3*fn1-fn); % Estimo el iterante inicial con AB2
17     while (numit<itm && enewton>tol) % Bucle del Newton
18         numit=numit+1;
19         % g es la funcion de la que hay que encontrar el cero
20         g=yk-y(:,n)-hn*(feval(ld,x(n+2),yk)+4*fn1+fn)/3;
21         evf=evf+1;
22         jacg=I-hn*feval(jyld,x(n+2),yk)/3;
23         evj=evj+1;
24         correccion=-jacg\g;
25         enewton=norm(correccion,inf);
26         yk=yk+correccion;
27     end
28     if enewton<=tol
29         y(:,n+2)=yk; %incluyo la ultima correccion
30         fn=fn1;
31     else
32         error('newton no converge')
33     end
34 end

```


Sección 7.1

1. Aplicamos el método de Euler mejorado al problema (7.1). ¿Impone alguna limitación al paso h por motivos de estabilidad? En caso afirmativo, ¿cuál?
-

Solución. Al aplicar el método a este problema obtenemos

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) = \lambda(y_n - p(x_n)) + p'(x_n), \\k_2 &= f(x_{n+1}, y_n + hk_1) = \lambda(y_n + hk_1 - p(x_{n+1})) + p'(x_{n+1}), \\y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\&= y_n + \frac{h}{2} \left(\lambda(y_n - p(x_n)) + p'(x_n) \right. \\&\quad \left. + \lambda(y_n + h(\lambda(y_n - p(x_n)) + p'(x_n)) - p(x_{n+1})) + p'(x_{n+1}) \right).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}y(x_{n+1}) &= y(x_n) + \frac{h}{2} \left(\lambda(y(x_n) - p(x_n)) + p'(x_n) \right. \\&\quad \left. + \lambda(y(x_n) + h(\lambda(y(x_n) - p(x_n)) + p'(x_n)) - p(x_{n+1})) + p'(x_{n+1}) \right) + R_n.\end{aligned}$$

Por consiguiente, el error $e_n = y(x_n) - y_n$ satisface la recurrencia

$$\begin{aligned}e_{n+1} &= e_n + \frac{h}{2} \left(\lambda e_n + \lambda e_n + h\lambda^2 e_n \right) + R_n \\&= \left(1 + (\lambda h) + \frac{(\lambda h)^2}{2} \right) e_n + R_n.\end{aligned}$$

La restricción sobre h debida a la estabilidad es

$$\left| 1 + (\lambda h) + \frac{(\lambda h)^2}{2} \right| < 1.$$

2. Repetir el problema anterior para el método de Euler implícito, $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$.
-

Solución. Al aplicar este método al problema (5.1) obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda(y_{n+1} - p(x_{n+1}) + hp'(x_{n+1})),$$

es decir,

$$(1 - h\lambda)y_{n+1} = y_n - \lambda hp(x_{n+1}) + hp'(x_{n+1}).$$

Análogamente,

$$(1 - h\lambda)y(x_{n+1}) = y(x_n) - \lambda hp(x_{n+1}) + hp'(x_{n+1}) + R_n.$$

Por consiguiente, el error $e_n = y(x_n) - y_n$ satisface la recurrencia.

$$e_{n+1} = \frac{e_n}{1 - h\lambda} + \frac{R_n}{1 - h\lambda}.$$

La restricción por motivos de estabilidad es entonces

$$|1 - h\lambda| > 1.$$

Nótese en particular que esto no supone ninguna restricción si la parte real de λ es negativa.

Sección 7.2

1. Determinar el dominio de estabilidad lineal del método de colocación de parámetro $c_1 = 1/2$, (3.13). ¿Es A -estable?
-

Solución. La primera (y única) etapa en el caso de la EDO $y' = \lambda y$ viene dada por

$$k_1 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) = \lambda\left(y_n + \frac{h}{2}k_1\right).$$

Despejando, obtenemos que

$$k_1 = \frac{\lambda y_n}{1 - \frac{\lambda h}{2}}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} y_n &= y_n + hk_1 = y_n + \frac{\lambda h y_n}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{z}{1 - \frac{z}{2}}\right) y_n = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 + \frac{z}{2}}, \end{aligned}$$

donde $z = \lambda h$. Concluimos que el dominio de estabilidad lineal está dado por

$$\mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 + \frac{z}{2}} \right| \right\} = \mathbb{C}^-.$$

La última igualdad se vio en la teoría al estudiar el dominio de estabilidad lineal de la regla del trapecio.

2. Considérese el dominio de estabilidad lineal para el método de Euler mejorado. Estudiar si es simétrico con respecto al punto $z = -1$ (es decir, invariante por giros de 180° alrededor de dicho punto), con respecto a la recta $\text{Im } z = 0$, y con respecto a la recta $\text{Re } z = -1$.
-

Solución. Se obtiene fácilmente (ver por ejemplo el problema 2 de la siguiente sección) que

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| 1 + z + \frac{z^2}{2} \right| \right\}.$$

Dado un $z \in \mathbb{D}$, su simétrico respecto al punto $z = -1$ es $z_a = -2 - z$. Por tanto,

$$R(z_a) = 1 + z_a + \frac{z_a^2}{2} = 1 - 2z + \frac{4 + 4z + z^2}{2} = 1 + z + \frac{z^2}{2} = R(z).$$

Así, si $z \in \mathcal{D}$, $z_a \in \mathcal{D}$.

Dado un $z \in \mathbb{D}$, su simétrico respecto a la recta $\text{Im } z = 0$ es \bar{z} . Ahora bien,

$$R(\bar{z}) = 1 + \bar{z} + \frac{\bar{z}^2}{2} = \overline{R(z)}.$$

Por consiguiente, $|R(\bar{z})| = |R(z)|$, y en consecuencia, si $z \in \mathcal{D}$, $\bar{z} \in \mathcal{D}$.

Dado un $z \in \mathbb{D}$, su simétrico respecto a la recta $\text{Re } z = -1$ es $z_b = -(\bar{z} + 2)$. Por tanto,

$$R(z_b) = 1 - (\bar{z} + 2) + \frac{4 + 4\bar{z} + \bar{z}^2}{2} = 1 + \bar{z} + \frac{\bar{z}^2}{2} = \overline{R(z)}.$$

Por consiguiente, $|R(z_b)| = |R(z)|$, y en consecuencia, si $z \in \mathcal{D}$, $z_b \in \mathcal{D}$.

3. Hallar el supremo de los $h > 0$ tales que al aplicar el método de Euler al problema

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} y,$$

se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ (para cada h fijado) cualquiera que sea la condición inicial $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2$.

Solución. Necesitamos que $|1 + \lambda_i h| < 1$, $i = 1, 2$, donde λ_1, λ_2 son los autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

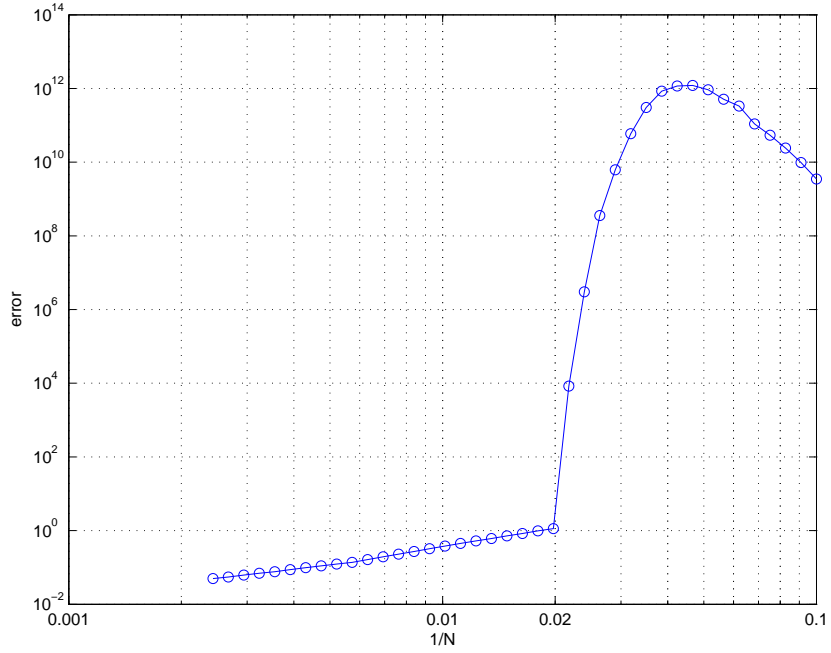


Figura 1: Diagrama de eficiencia para el método de Euler aplicado al problema (1).

Un sencillo cálculo muestra que dichos autovalores son $-1 \pm i$. Las condiciones sobre h se traducen entonces en $|1 + (-1 \pm i)h| < 1$, o equivalentemente, en

$$(1 - h)^2 + h^2 < 1,$$

es decir, $2h(h-1) < 0$. Puesto que $h > 0$, la restricción para que $y_n \rightarrow 0$ es entonces $h < 1$.

4. Al aplicar el método de Euler al PVI

$$y'(x) = -\lambda y(x), \quad x \in [0, 10], \quad y(0) = 1, \quad (1)$$

donde λ es un número real positivo, obtenemos el diagrama que aparece en la Figura 1. ¿Cuál es el valor de λ ?

Solución. El valor de h tal que $-\lambda h$ está en la frontera del dominio de estabilidad lineal del método de Euler es $h^* = (b - a)/N^*$, donde $1/N^* = 0,02$ (ese es el valor crítico en el cuál se observa que hay un cambio cualitativo en el comportamiento del error. Así $h^* = 10 \cdot 0,02 = 0,2$. Por otra parte, teniendo en cuenta cuál es el dominio de estabilidad lineal del método de Euler, tenemos que $-\lambda h^* = -2$. Concluimos que $\lambda = 2/h^* = 10$.

5. Al aplicar el método de Euler al PVI

$$y'(x) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -1/10 \end{pmatrix} y(x), \quad x \in [0, 10], \quad y(0) = (1, 999/10)^T, \quad (2)$$

donde λ es un número real positivo, obtenemos el diagrama que aparece en la Figura 2. ¿Cuál es el valor de λ ?

Solución. Nótese que los autovalores de la matriz del sistema son $-\lambda$ y $1/10$.

En el diagrama de eficiencia vemos que hay un cambio brusco en el comportamiento de las soluciones para una longitud de paso $h^* = (b - a)/N^* = 10 \cdot 0,002 = 0,02$. El motivo es que al crecer h hasta este valor, uno de los dos productos $-\lambda h$, $-h/10$, que para valores de h menores estaban en el dominio de estabilidad lineal del método de Euler, alcanza la frontera de dicho dominio. Puesto que estamos hablando de números reales, el valor crítico es -2. Dado que $-h^*/10 = -0,002$ está en \mathcal{D} , la dificultad proviene del otro autovalor. Se tiene entonces que $-\lambda h^* = -2$, y por tanto que $\lambda = 2/h^* = 100$.

6. Consideramos el θ -método

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f_n + (1 - \theta)f_{n+1}).$$

(a) Determinar para qué valores de θ es A -estable.

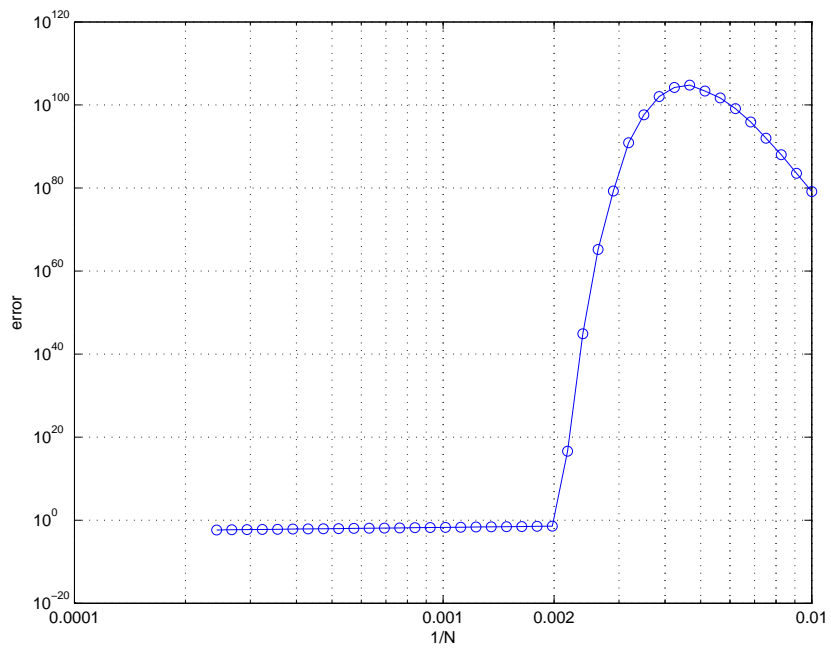


Figura 2: Diagrama de eficiencia para el método de Euler aplicado al problema (2).

- (b) Fijado $h > 0$, ¿es posible elegir θ para que la solución numérica producida por este método para el PVI

$$y' = \lambda y \quad \text{en } [a, b], \quad y(a) = \eta,$$

coincida con la solución exacta? Con el valor de θ así elegido, ¿se obtiene un método A -estable?

Solución. (a) Al aplicar el método al PVI $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, obtenemos que

$$y_{n+1} = \frac{1 + \theta h \lambda}{1 - (1 - \theta) h \lambda} y_n.$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{1 + \theta z}{1 - (1 - \theta) z} \right| < 1 \right\}.$$

Escribimos z en forma módulo-argumental, $z = \rho e^{i\alpha}$. Entonces $z \in \mathcal{D}$ si y sólo si

$$|1 + \rho e^{i\alpha} \theta|^2 < |1 - e^{i\alpha} (1 - \theta)|^2,$$

o lo que es lo mismo, si

$$(1 + \rho e^{i\alpha} \theta)(1 + \rho e^{-i\alpha} \theta) < (1 - e^{i\alpha} (1 - \theta))(1 - e^{-i\alpha} (1 - \theta)).$$

Desarrollando y simplificando obtenemos que, si $\rho > 0$, esto es cierto si y sólo si

$$2 \cos \alpha < \rho(1 - 2\theta).$$

Si estamos en \mathbb{C}^- , entonces $\cos \alpha < 0$. Por consiguiente el método será A -estable si y sólo si $\theta \leq 1/2$.

- (b) Fijado $h > 0$, la solución numérica con valor de arranque $y_0 = y(0) = \eta$ viene dada por

$$y_n = \left(\frac{1 + \theta z}{1 - (1 - \theta) z} \right)^n \eta,$$

mientras que la verdadera solución en los puntos de la malla vendrá dada por

$$y(x_n) = \eta e^{\lambda n h} = \eta e^{\lambda z}.$$

Por consiguiente, si tomamos θ tal que

$$z = \log \left(\frac{1 + z\theta}{1 - (1 - \theta)z} \right),$$

ambas soluciones coinciden. Despejando θ , vemos que necesitamos

$$\theta = \frac{1 + (z - 1)e^z}{z(e^z - 1)}.$$

Usando que $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ y haciendo algunas simplificaciones, llegamos a

$$\frac{1 + (z - 1)e^z}{z(e^z - 1)} = \frac{1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)}{(k+2)!} z^k}{2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k} > \frac{1}{2}.$$

Concluimos que $\theta > \frac{1}{2}$, y por tanto el método no es A -estable.

Observación. En todo esto estamos suponiendo $\lambda \in \mathbb{R}$, de manera que $z \in \mathbb{R}$.

7. Se dice que un método es L -estable si es A -estable y, además, al aplicarlo a $y' = \lambda y$ se cumple $y_{n+1} = R(\lambda h)y_n$ con $R(z) \rightarrow 0$ cuando $\text{Re } z \rightarrow -\infty$.
 - a) Probar que la regla del trapecio no es L -estable mientras que el método implícito $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ sí lo es.
 - b) Explicar en qué sentido los métodos L -estables imitan mejor el decaimiento rápido de la solución de $y' = \lambda y$ cuando $-\text{Re } \lambda$ es grande en comparación con h^{-1} .

Solución. (a) En el caso de la regla del trapecio,

$$R(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}},$$

y por tanto $|R(z)| \rightarrow 1$ cuando $\text{Re } z \rightarrow -\infty$.

Para el método de Euler implícito,

$$R(z) = \frac{1}{1 - z},$$

y el método es obviamente L -estable.

(b) La verdadera solución en los puntos de la malla es $y(x_n) = e^{nz}$, y decae muy deprisa si $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$. La solución numérica es $y_n = e^{\log R(z)}$, y decaerá mucho más despacio que la verdadera solución a menos que $R(z) \rightarrow 0$.

Sección 7.3

1. Demostrar que si un método de Runge-Kutta tiene orden de consistencia p , entonces

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^p}{p!} + O(z^{p+1}).$$

Como consecuencia tenemos que todos los métodos de Runge-Kutta explícitos con $p = s$ tienen como función de estabilidad

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^s}{s!}.$$

Solución. La solución exacta del PVI $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, es $y(x) = e^{\lambda x}$. Por ser el método consistente de orden p tenemos que

$$y(h) - y_1 = O(h^{p+1}),$$

así que

$$y_1 = e^z + O(h^{p+1}) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^p}{p!} + O(z^{p+1}),$$

donde $z = \lambda h$. Usando que $y_1 = R(z)y_0$ concluimos inmediatamente el resultado.

Como consecuencia tenemos que todos los métodos de Runge-Kutta explícitos con $p = s$ tienen como función de estabilidad

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^s}{s!}.$$

En la figura 3 mostramos los correspondientes dominios de estabilidad lineal.

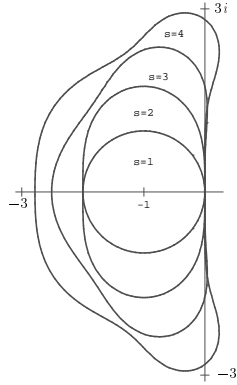


Figura 3: Dominio de estabilidad lineal de los métodos de Runge-Kutta explícitos de orden $p = s$.

2. Hallar la función de amplificación del método de Euler mejorado.

Solución. Se trata de un método explícito de dos etapas y orden 2. Aplicando el problema anterior concluimos que

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}.$$

-
3. Determinar si es A -estable el método de Runge-Kutta cuya función de amplificación viene dada por:

$$R(z) = \frac{1 + \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}}{1 - \frac{z}{3}}.$$

Solución. No puede serlo, pues $|R(z)| \rightarrow \infty$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. El dominio de estabilidad lineal es por tanto acotado, y el método no puede ser A -estable.

4. Considérese el problema

$$y' = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ 10 & -11 \end{pmatrix} y.$$

Calcular aproximadamente (con un error menor que el 1 %) el supremo de los h que pueden emplearse para que con cualquier condición inicial $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, donde y_n es la solución numérica obtenida al aplicar el método de Runge-Kutta clásico de cuatro etapas y orden cuatro.

Solución. Los autovalores de la matriz del enunciado son -20 y -1 . En la base de los autovectores este problema vectorial se “desacopla” en los dos problemas escalares $y' = -20y$, $y' = -y$. Por tanto el supremo pedido es

$$H = \sup\{h : |R(-20h)| < 1, |R(-h)| < 1\}.$$

La función de amplificación viene dada por $R(z) = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + z^4/4!$, que es un polinomio que, restringido a los reales, $z = x$, tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$, y tiende a 1^- cuando $x \rightarrow 0^-$; así que existirá un valor mínimo $x_0 < 0$ con $R(x_0) = 1$, tal que $R(x) < 1$ en $(-\infty, x_0)$ y $0 < R(x) < 1$ en $(x_0, x_0 + \epsilon]$. Si además $|R(x_0/20)| < 1$, se tiene necesariamente $H = -x_0/20$. En definitiva, hay que buscar la menor raíz negativa, x_0 , de la ecuación

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 1,$$

lo que equivale, eliminando la raíz trivial $x = 0$, a hallar la menor raíz de

$$x^3 + 4x^2 + 12x + 24 = 0.$$

El primer miembro es una función creciente f , así que $f(x) = 0$ tiene una sola raíz. Con bisecciones sucesivas,

$$f(-3) < 0 < f(-2), \quad f(-2,8) < 0 < f(-2,5), \quad f(-2,79) < 0 < f(-2,78).$$

Por tanto $x_0 = -2,79 + \delta$, con $0 < \delta < 0,01$ (un cálculo comprueba que $|R(x_0/20)| < 1$). De modo que

$$H = \frac{2,79}{20} + \tilde{\delta} = 0,1395 + \tilde{\delta}, \quad \text{con } |\tilde{\delta}| < 0,0005.$$

Esto aproxima H con un error relativo menor que el 1 %.

5. Estudiar si es A -estable el método de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

y hallar la función de incremento correspondiente, $\phi_f(x_n, y_n; h)$, comprobando que satisface una condición de Lipschitz con respecto a su segunda variable para h pequeño.

Solución. Este método de Runge-Kutta no es ni más ni menos que la regla del trapecio, y todo lo que se pregunta se ha estudiado ya en los apuntes. Sin embargo, aunque ya hemos visto que el método es A -estable, vamos a comprobarlo una vez más por otro procedimiento.

Puesto que

$$I - zA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{2} & 1 - \frac{z}{2} \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$(I - zA)^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{2} & 0 \\ \frac{z}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$R(z) = 1 + z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{2} & 0 \\ \frac{z}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2+z}{2-z}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{2+z}{2-z} \right| \right\} = \mathbb{C}^-,$$

y el método es A -estable.

6. Consideramos el método de Runge-Kutta de tablero

0			
1/2	1/2		
1/3	0	1/3	
<hr/>			
	-1/3	1/3	1.

- (i) Comprobar que no es de orden 3.
- (ii) Sabiendo que la función de amplificación es $R(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6$, demostrar que cuando aplicamos el método al problema lineal escalar $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, se tiene convergencia de orden 3.

Solución. (i) En primer lugar observamos que el método cumple la condición de suma por filas. Pasemos a considerar las condiciones de orden para métodos de Runge-Kutta con esta propiedad. Se tiene que se trata de un método de Runge-Kutta explícito. Por tanto, la primera barrera de Butcher nos dice que su orden de convergencia es a lo sumo 3. Veamos que cumple las condiciones de orden 3. Nótese que el método cumple la condición de suma por filas, y que por tanto hay que comprobar menos condiciones. Un sencillo cálculo muestra que:

$$\sum_{i=1}^3 b_i = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = 1 \quad \Rightarrow \text{orden 1},$$

$$\sum_{i=1}^3 b_i c_i = -\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \text{orden 2}.$$

Sin embargo,

$$\sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 = -\frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{36} \neq \frac{1}{3},$$

y el método no tiene orden de consistencia 3.

- (ii) Sabemos que para este PVI

$$y(x_{n+1}) = R(z)y(x_n) + R_n.$$

Usando que $y(x) = e^{\lambda x}$, tenemos entonces que

$$e^{\lambda x_n + \lambda h} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right) e^{\lambda x_n} + R_n;$$

es decir,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{R_n}{e^{\lambda x_n}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{R_n}{e^{\lambda x_n}} = O(|z|^4),$$

y por tanto $R_n = O(|z|^4) = O(h^4)$.

7. Supongamos que un método de Runge-Kutta tiene función de ampli-ficación $R(z) = \frac{1 + \frac{2z}{3} + z^2}{1 - \frac{z}{3}}$. Demostrar que su orden de consistencia no puede ser superior a 1.

Solución. Si el método tuviera orden 2 o superior, entonces

$$R(z) - \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) = O(|z|^3).$$

Pero una sencilla cuenta muestra que

$$R(z) - \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) = \frac{z^2}{6} \left(\frac{5 - z}{1 - \frac{z}{3}}\right) \neq O(|z|^3)$$

por lo que el método no puede tener orden superior a 1.

8. Comprobar que el método de tablero

0			
1/2	1/2		
1/3	0	1/3	
	-1/3	1/3	1

no es de orden 3 y sin embargo $R(z) = 1 + z + z^2/2 + z^3/6$.

Solución. Ya vimos en el problema 6 de esta misma sección que el método no es de orden 3, sino de orden 2.

Calculemos el valor de $R(z)$. Si denominamos $a = (I - zA)^{-1}e$, entonces $(I - zA)a = e$, o lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{z}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{z}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, $a_1 = 1$, lo que sustituido en la segunda ecuación produce $a_2 = 1 + \frac{z}{2}$, y ambas cosas sustituidas en la tercera ecuación dan que $a_3 = \frac{6+2z+z^2}{6}$. Así pues,

$$\begin{aligned} R(z) &= 1 + \frac{z}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2+z}{2} \\ \frac{6+2z+z^2}{6} \end{pmatrix} \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}. \end{aligned}$$

9. Para cada $\beta \in \mathbb{R}$, consideramos el método Runge-Kutta semi-implícito

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n + \beta h, y_n + h \beta k_1), \\ k_2 &= f(x_n + (1 + \beta) h, y_n + h k_1 + h \beta k_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h \left(\left(\frac{1}{2} + \beta \right) k_1 + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) k_2 \right). \end{aligned}$$

- (a) Determinar su orden de consistencia, comprobando que es independiente de β .
 - (b) Determinar los valores de β para los cuales es A -estable.
-

Solución. (a) Estamos ante un método de Runge-Kutta semi-implícito de tablero

$$\begin{array}{c|cc} \beta & \beta & \\ 1+\beta & 1 & \beta \\ \hline & \frac{1}{2}+\beta & \frac{1}{2}-\beta \end{array}$$

Nótese que el método cumple la condición de suma por filas, y que por tanto hay que comprobar menos condiciones. Un sencillo cálculo muestra que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 b_i &= \frac{1}{2} + \beta + \frac{1}{2} - \beta = 1 & \Rightarrow \text{orden 1,} \\ \sum_{i=1}^2 b_i c_i &= \left(\frac{1}{2} + \beta\right) \cdot \beta + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot (1 + \beta) = \frac{1}{2} & \Rightarrow \text{orden 2.} \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\sum_{i=1}^2 b_i c_i^2 = \left(\frac{1}{2} + \beta\right) \cdot \beta^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot (1 + \beta)^2 = -\beta^2 + \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, la condición de orden 3

$$\sum_{i=1}^2 b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$$

se cumple si y sólo si $\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$.

En cuanto a la otra condición de orden 3, $b^T A c = 1/6$, se tiene que

$$b^T A c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \beta & \frac{1}{2} - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 + \beta \end{pmatrix} = -\beta^2 + \beta.$$

Si $\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$, se tiene que

$$-\beta^2 + \beta = -\frac{1}{6} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \neq \frac{1}{6},$$

y no se cumple la segunda condición de orden 2.

En resumen, no hay ningún valor de β para el cual se cumplan simultáneamente la dos condiciones de orden 3. Concluimos que, independientemente de cuál sea el valor de β , el método tiene orden (de consistencia y convergencia) 2.

(b) Un cálculo tedioso, pero sencillo, demuestra que

$$R(z) = \frac{1 + z(-2\beta + 1) + z^2(\beta^2 - 2\beta + \frac{1}{2})}{(1 - z\beta)^2}.$$

El único polo de $R(z)$ es $z = 1/\beta$. Su parte real es mayor que 0 si y sólo si $\beta > 0$. Por consiguiente, si $\beta \leq 0$ el método no es A -estable.

Para ver que pasa para los valores de β positivos estudiamos $|R(it)|$ para $t \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$|R(it)|^2 = \frac{(1 - t^2(\beta^2 - 2\beta + \frac{1}{2}))^2 + t^2(-2\beta + 1)^2}{(1 - t^2\beta^2)^2 + 4t^2\beta^2}.$$

Esta cantidad es menor o igual que 1 para todo $t \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$t^2 \left(-4\beta^3 + 5\beta^2 - 2\beta + \frac{1}{4} \right) \leq 0,$$

condición que se puede reescribir como

$$\left(\beta - \frac{1}{4} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Obviamente esta condición se cumple si y sólo si $\beta \geq \frac{1}{4}$.

Resumiendo, el método es A -estable si y sólo si $\beta \geq \frac{1}{4}$.

10. Demostrar que el método de tablero

0			
1/2	1/2		
3/4	0	3/4	
	2/9	1/3	4/9

es de orden 3. Comprobar que la región de estabilidad del método tiene intersección no vacía con el eje imaginario $\text{Re } z = 0$.

Solución. Se trata de un método de Runge-Kutta explícito. Por tanto, la primera barrera de Butcher nos dice que su orden de convergencia es a lo sumo 3. Veamos que cumple las condiciones de orden 3. Nótese que el método cumple la condición de suma por filas, y que por tanto hay que comprobar menos condiciones. Un sencillo cálculo muestra que:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 b_i &= \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = 1 && \Rightarrow \text{orden 1,} \\ \sum_{i=1}^3 b_i c_i &= \frac{2}{9} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} && \Rightarrow \text{orden 2} \\ \sum_{i=1}^3 b_i c_i^2 &= \frac{2}{9} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{3} \\ b^T A c &= \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{orden 3.}$$

Por consiguiente, el método tiene orden de consistencia 3.

Como el método es explícito, de tres etapas y orden 3, su función de amplificación es $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$. Queremos ver que existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $|R(ai)| < 1$. Un sencillo cálculo muestra que

$$|R(ai)|^2 = 1 - \frac{a^4}{12} + \frac{a^6}{36}.$$

Esta función de a es igual a 1 si $a^4 \left(-\frac{1}{12} + \frac{a^2}{36}\right) = 0$, es decir, si $a = 0$ o $a = \pm\sqrt{3}$. A partir de aquí es trivial comprobar que $|R(ai)| < 1$ si y sólo si $0 < |a| < \sqrt{3}$.

11. Dado el método de tablero

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

estudiar su A -estabilidad y tratar de dibujar el dominio correspondiente.

Solución. Un calculo tedioso, pero sencillo, demuestra que

$$R(z) = \frac{3z^2 - 4z + 2}{z^2 - 4z + 2}.$$

Así pues,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |R(z)| = 3,$$

y el método no es A -estable.

Sección 7.4

1. Consideramos el método lineal multipaso $y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$ (leap-frog). Demostrar que su dominio de estabilidad lineal es vacío.
-

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \left\{ z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} \right\} = \left\{ z = \frac{e^{2i\theta} - 1}{2e^{i\theta}} \right\} \\ &= \left\{ z = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \right\} = \{ z = i \operatorname{sen} \theta \}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, o bien $\mathcal{D} = \emptyset$, o bien $\mathcal{D} = \mathbb{C} - \mathcal{F}$. Para decidir cuál de las dos situaciones se da, vamos a estudiar si $z = -1$ pertenece o no a \mathcal{D} . Se tiene que el polinomio de estabilidad para este valor de z es

$$\Pi(r, -1) = \rho(r) + \sigma(r) = r^2 - 1 + 2r.$$

Las raíces de este polinomio son

$$r_{\pm}(-1) = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Si bien $|r_+(-1)| < 1$, en cambio $|r_-(-1)| > 1$. Por consiguiente $z = -1$ no pertenece a \mathcal{D} , y concluimos que $\mathcal{D} = \emptyset$.

2. El objetivo de este problema es demostrar que la región de estabilidad absoluta de un método lineal multipaso convergente no puede contener el eje real positivo en un entorno del origen.
 - (i) Demostrar que hay una única raíz, $r_1(z)$, de $\Pi(r, z)$ con la propiedad de que $r_1(z) \rightarrow 1$ cuando $z \rightarrow 0$.
 - (ii) Consideramos el problema (7.9) con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Demostrar que el residuo satisface $R_n = O(h^2)$ cuando $h \rightarrow 0^+$ y deducir de ello que $\Pi(\exp(z), z) = O(z^2)$ cuando $z \rightarrow 0$, $z \in \mathbb{R}^+$.
 - (iii) Usar que $\Pi(r, z) = (1 - z\beta_k)(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_k)$ para concluir que $r_1(z) = e^z + O(z^2) = 1 + z + O(z^2)$ cuando $z \rightarrow 0$, $z \in \mathbb{R}^+$.

Solución. (i) La convergencia del método garantiza que $r = 1$ es raíz simple del primer polinomio característico, $\rho(r)$. Ahora bien, las raíces de un polinomio son funciones continuas de los coeficientes del mismo. Por consiguiente, dado que $\Pi(r, 0) = \rho(r)$, hay una única raíz $r_1(z)$ de $\Pi(r, z)$ con la propiedad de que $r_1(z) \rightarrow 1$ cuando $z \rightarrow 0$. Como veremos, si $z \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$r_1(z) = 1 + z + O(z^2) \quad \text{cuando } z \rightarrow 0, \quad (3)$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado.

(ii) Para demostrar (3), consideramos $\lambda \in \mathbb{R}^+$. La solución del problema $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, es $y(x) = e^{\lambda x}$. Dado que el método es convergente, tiene orden de consistencia al menos uno. Por consiguiente, el residuo satisface

$$R_n = \sum_{j=0}^k \{\alpha_j e^{\lambda(x_n + jh)} - h\lambda\beta_j e^{\lambda(x_n + jh)}\} = O(h^2) \quad \text{cuando } h \rightarrow 0^+.$$

Dividiendo por $e^{\lambda x_n}$ obtenemos

$$\sum_{j=0}^k \{\alpha_j (\exp(z))^j - z\beta_j (\exp(z))^j\} = O(z^2) \quad \text{cuando } z \rightarrow 0, \quad z \in \mathbb{R}^+,$$

es decir, $\Pi(\exp(z), z) = O(z^2)$. Por otro lado,

$$\Pi(r, z) = (1 - z\beta_k)(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_k),$$

donde alguna de las raíces pueden ser iguales.

(iii) Se tiene entonces que

$$(e^z - r_1)(e^z - r_2) \cdots (e^z - r_k) = O(z^2).$$

El primer factor del primer miembro tiende a 0 cuando $z \rightarrow 0$, y ninguno de los demás factores lo hace. Concluimos que

$$r_1(z) = e^z + O(z^2).$$

3. Determinar si es A -estable la fórmula BDF de dos pasos,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}.$$

Indicación. Demostrar que $\operatorname{Re} \left(\frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} \right) \geq 0$.

Solución. Sea $z \in \mathcal{F}$. Entonces

$$z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4}{3}e^{-i\theta} + \frac{1}{3}e^{-2i\theta} \right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \cos \theta + \frac{1}{3} \cos(2\theta) \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \cos \theta + \frac{1}{3} \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cos \theta + \frac{2}{3} \cos^2 \theta \right) \\ &= (1 - \cos \theta)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Así pues, no hay intersección de \mathcal{F} con \mathbb{C}^- . Por consiguiente, si algún punto de \mathcal{C}^- está en \mathcal{D} , entonces todo \mathcal{D} también lo está.

Estudiemos lo que pasa con el punto $z = -1$. El correspondiente polinomio de estabilidad,

$$\Pi(r, -1) = \rho(r) + \sigma(r) = \frac{5}{3}r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3},$$

tiene por raíces

$$r_{\pm}(-1) = \frac{2}{5} \pm \frac{i}{5}.$$

Dado que $|r_{\pm}(-1)| = 1/5$, concluimos que $z = -1$ pertenece a \mathcal{D} . Lo mismo sucede entonces con todo \mathbb{C}^- , y concluimos que el método es A -estable.

4. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
- (i) El método lineal multipaso cuyo primer polinomio característico es $\rho(\zeta) = (\zeta^2 + 1)(\zeta - 1)$ y cuyo segundo polinomio característico es $\sigma(\zeta) = (5\zeta^3 + 7\zeta^2 + 7\zeta + 5)/12$ tiene orden de consistencia 5.
 - (ii) El método lineal multipaso $y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6}{11}hf_{n+3}$ tiene orden de consistencia 3 y es A-estable.
 - (iii) El método lineal multipaso $y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2})$ es convergente de orden 3, pero no de orden 4.

Solución. (i) La afirmación es *falsa*. En efecto, las raíces del primer polinomio característico son $\zeta_1 = 1$, $\zeta_{\pm} = \pm i$. Por tanto, el criterio de la raíz nos garantiza que el método es 0-estable. Por consiguiente, dado que el número de pasos es $k = 3$, un número impar, la primera barrera del Dahlquist nos dice que el orden no puede ser superior a $k + 1 = 4$.

(ii) La afirmación es *falsa*, ya que, por la segunda barrera de Dahlquist, el mayor orden de consistencia de un MLM A-estable es 2.

(iii) La afirmación es *falsa*. En efecto, el método es simétrico, y por tanto tiene orden de consistencia par: si tiene orden 3, tendrá también orden 4.

5. Demostrar que la región de estabilidad absoluta \mathcal{D} del método

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + 3f_n)$$

es el interior del círculo de centro $(-2/3, 0)$ y de radio $2/3$.

Solución. El primer y el segundo polinomio característico del método son

$$\rho(r) = r^2 - 1, \quad \sigma(r) = \frac{1}{2}(r + 3).$$

El fácil comprobar que el método es consistente y 0-estable, y por tanto convergente. Por tanto, dado que el método es explícito, la región de estabilidad absoluta será acotada.

A continuación veremos que el conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} \right\} = \left\{ z = \frac{e^{2i\theta} - 1}{\frac{1}{2}(e^{i\theta} + 3)} \right\}$$

está contenido en la frontera del disco de centro $(-2/3, 0)$ y de radio $2/3$. En efecto, si $z \in \mathcal{F}$, entonces

$$\left| z + \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{e^{2i\theta} - 1}{\frac{1}{2}(e^{i\theta} + 3)} + \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} \left| \frac{3e^{2i\theta} + e^{i\theta}}{\frac{1}{2}(e^{i\theta} + 3)} \right| = \frac{2}{3} \left| e^{2i\theta} \frac{3 + e^{-i\theta}}{3 + e^{i\theta}} \right| = \frac{2}{3}.$$

El exterior del disco no puede estar en \mathcal{D} , pues, como ya hemos explicado, la región de estabilidad absoluta es acotada. Basta por tanto con ver que el interior del disco sí está. Para ello basta con estudiar un punto del interior del disco, por ejemplo $z = -2/3$. El polinomio de estabilidad para este punto,

$$\Pi(r, -\frac{2}{3}) = \rho(r) + \frac{2}{3}\sigma(r) = r \left(r + \frac{1}{3} \right),$$

tiene por raíces

$$r_1(-2/3) = 0, \quad r_2(-2/3) = -1/3,$$

ambas de módulo menor que 1. Concluimos que $z = -2/3$ pertenece a \mathcal{D} . Lo mismo sucede entonces con todo el interior del disco de centro $(-2/3, 0)$ y de radio $2/3$, y tenemos finalmente que

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{2}{3} \right| < \frac{2}{3} \right\}.$$

6. Demostrar que si un MLM de polinomios característicos ρ y σ satisface

$$\operatorname{Re} (\rho(e^{i\theta})\sigma(e^{-i\theta})) = 0, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad (4)$$

entonces o bien \mathcal{D} es vacía o bien $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Demostrar que el método lineal de dos pasos 0-estable y de orden al menos 2 más general que satisface (4) es de la forma

$$y_{n+2} - y_n = h(\beta f_{n+2} + 2(1 - \beta)f_{n+1} + \beta f_n),$$

y que es A -estable si y sólo si $\beta > 1/2$.

Solución. Se tiene que

$$\mathcal{F} = \left\{ z = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})} \right\} = \left\{ z = \frac{\rho(e^{i\theta})\sigma(e^{-i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})\overline{\sigma(e^{i\theta})}} \right\} = \left\{ z = \frac{\rho(e^{i\theta})\sigma(e^{-i\theta})}{|\sigma(e^{i\theta})|^2} \right\}.$$

Por consiguiente, si se cumple (4), entonces \mathcal{F} está contenido en el eje imaginario. Si el método es convergente, por el problema 2 de esta misma sección sabemos que hay puntos de \mathcal{C}^+ que no están en \mathcal{D} . Por consiguiente, como la frontera de \mathcal{D} está contenida en el eje imaginario, ningún punto de \mathcal{C}^+ está en \mathcal{D} . Por la misma razón, o bien todo el semiplano \mathbb{C}^- está en \mathcal{D} , o bien nada de dicho semiplano está contenido en la región de estabilidad absoluta.

Si tenemos un método con orden de consistencia al menos 2, sus coeficientes satisfacen

$$1 + \alpha_1 + \alpha_0 = 0,$$

$$2 + \alpha_1 = \beta_2 + \beta_1 + \beta_0,$$

$$4 + \alpha_1 = 2(2\beta_2 + \beta_1).$$

Estas ecuaciones se pueden usar para escribir α_0 , β_0 y α_1 en función de β_1 y β_2 ,

$$\alpha_0 = 3 - 4\beta_2 - 2\beta_1,$$

$$\beta_0 = 3\beta_2 + \beta_1 - 2,$$

$$\alpha_1 = 4\beta_2 + 2\beta_1 - 4.$$

Por otra parte, la condición (4) nos dice que

$$(\beta_2 + \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1) + (\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1) \cos \theta + (\beta_0 + \alpha_0\beta_2) \cos(2\theta) = 0,$$

que se traduce en las tres condiciones

$$\begin{aligned}\beta_2 + \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 &= 0, \\ \beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1 &= 0, \\ \beta_0 + \alpha_0\beta_2 &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Sustituyendo las expresiones para α_0 y β_0 en la tercera de ellas, y despejando β_1 , obtenemos que

$$\beta_1 = \frac{4\beta_2^2 - 6\beta_2}{1 - 2\beta_2} = 2(1 - \beta_2).$$

Sustituyendo ahora esto en las ecuaciones que nos dan α_0 y α_1 en términos de β_1 y β_2 obtenemos que

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 0.$$

Sustituyo ahora estas expresiones en la primera ecuación de (5), y obtengo que

$$\beta_0 = \beta_2.$$

Finalmente comprobamos que las anteriores elecciones de los parámetros en función de $\beta_2 = \beta$ hacen que se cumpla la segunda ecuación de (5).

En resumen: el método ha de tener la forma indicada en el enunciado del problema.

El polinomio de estabilidad lineal del método está dado por

$$\Pi(r, z) = r^2 - 1 - z(\beta r^2 + 2(1 - \beta)r + \beta).$$

Sea $z = x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, tal que $1 - x\beta > 0$. Si $r \rightarrow \pm\infty$, entonces $\Pi(r, x) \rightarrow +\infty$. Por otra parte,

$$\Pi(1, x) = -2x > 0, \quad \Pi(-1, x) = -2x(2\beta - 1).$$

Si $\beta \leq 1/2$, entonces $\Pi(-1, x) \leq 0$ y por consiguiente $\Pi(r, x)$ tiene una raíz real menor o igual que -1. Por consiguiente $z = x \notin \mathcal{D}$, y por tanto la región de estabilidad absoluta es vacía.

Si $\beta > 1/2$, tomo x satisfaciendo además $|x| < 1/\beta$. Se tiene entonces que $\Pi(0, x) = -1 - x\beta < 0$ y que $\Pi(-1, x) > 0$. Por lo tanto, las dos raíces (reales) de $\Pi(r, x)$ tienen módulo menor que 1. Por consiguiente $z = x \in \mathcal{D}$, y por tanto $\mathcal{D} = \mathbb{C}^-$, y el método es A -estable.

7. Sea el método

$$y_{n+2} - (1 + \alpha)y_{n+1} + \alpha y_n = \frac{h}{2}(1 - \alpha)(f_{n+1} + f_n), \quad -1 < \alpha < 1.$$

- (i) Demostrar que el orden es independiente de α .
 - (ii) Expresar la curva $z = \rho(e^{i\theta})/\sigma(e^{i\theta})$ de la forma $y^2 = F(x)$ si $z = x + iy$.
 - (iii) Determinar la región de estabilidad absoluta.
 - (iv) Deducir que el intervalo de estabilidad absoluta es independiente de α .
-

Solución. (i) Estudiamos las condiciones de orden,

$$C_0 = \sum_{j=0}^2 \alpha_j = 1 - (1 + \alpha) + \alpha = 0,$$

$$C_1 = \sum_{j=0}^2 j\alpha_j - \sum_{j=0}^2 \beta_j = 2 - (1 + \alpha) - \frac{1}{2}(1 - \alpha)(1 + 1) = 0,$$

$$C_2 = \frac{1}{2!} \left(\sum_{j=0}^2 j^2 \alpha_j - 2 \sum_{j=0}^2 j \beta_j \right) = \frac{1}{2} (4 - (1 + \alpha) - \frac{2}{2}(1 - \alpha)) = 1 \neq 0.$$

Por consiguiente, el método tiene orden de consistencia 1, independientemente de cuál sea el valor de α .

(ii) Los puntos de la curva satisfacen

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{1 - \alpha} \cdot \frac{e^{2i\theta} - e^{i\theta} + \alpha(1 - e^{i\theta})}{e^{i\theta} + 1} \\ &= \frac{2}{1 - \alpha} \cdot \frac{e^{i\theta}(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}) + \alpha(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}} \\ &= \frac{2i(e^{i\theta} - \alpha) \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \alpha} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \alpha} \cdot (-\sin \theta + i(\cos \theta - \alpha)). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x = -\frac{2 \operatorname{sen} \theta \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \alpha}, \quad y = \frac{2(\cos \theta - \alpha) \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \alpha}.$$

Así pues, para expresar y^2 como función de x necesitamos escribir $\tan \frac{\theta}{2}$ y $\cos \theta$ en términos de x .

Por un lado tenemos que

$$x = -\frac{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \alpha} = \frac{2(\cos \theta - 1)}{1 - \alpha}.$$

Por consiguiente,

$$\cos \theta = \frac{(1 - \alpha)x}{2} + 1.$$

Por otra parte

$$\frac{(1 - \alpha)x}{2} + 1 = \cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{(1 - \alpha)x}{4}.$$

Por lo tanto,

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(1 - \alpha)x}{4} + 1.$$

y concluimos que

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{x(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)x + 4}.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en

$$y^2 = \frac{4(\cos \theta - \alpha)^2 \tan^2 \frac{\theta}{2}}{(1 - \alpha)^2},$$

llegamos finalmente a

$$y^2 = \frac{(\alpha - 1)x(x + 2)^2}{\underbrace{(1 - \alpha)x + 4}_{F(x)}}.$$

(iii) En primer lugar observamos que $F(x) \geq 0$ si y sólo si $x \in \left(\frac{4}{\alpha - 1}, 0\right]$. Nótese también que $\lim_{x \rightarrow (4/(\alpha - 1))^-} = +\infty$. Además $F(0) = 0 =$

$F(-2)$. Concluimos que la curva $z = \rho(e^{i\theta})/\sigma(e^{i\theta})$ descompone \mathbb{C} en tres regiones. Ahora bien, como el método es explícito, su dominio de estabilidad lineal es acotado. Así pues, la única de estas tres regiones que podría formar parte de \mathcal{D} es la única de ellas que es acotada,

$$\mathcal{R} = \{z = x + iy : -\sqrt{F(x)} < y < \sqrt{F(x)}, -2 < x < 0\}.$$

Para ver si \mathcal{R} forma o no parte de \mathcal{D} , basta con estudiar un punto de la región.

Supongamos en primer lugar que $\alpha \in (-1, 0)$. En este caso el punto $z = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$, que está sobre la recta real, está contenido en \mathcal{R} . Se tiene que

$$\Pi\left(r, \frac{2\alpha}{1-\alpha}\right) = r(r - (1 + 2\alpha)).$$

Las dos raíces de este polinomio tiene módulo menor que 1. Por consiguiente, el punto $z = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ pertenece a \mathcal{D} . Concluimos que $\mathcal{D} = \mathcal{R}$.

Supongamos ahora que $\alpha \in [0, 1)$. En este caso consideramos

$$\Pi(r, -1) = r^2 - \frac{3\alpha + 1}{2}r + \frac{\alpha + 1}{2}.$$

Las raíces de este polinomio son

$$r_{\pm} = \frac{3\alpha + 1 \pm i\sqrt{(1-\alpha)(9\alpha+7)}}{4},$$

con módulo

$$|r_{\pm}|^2 = \frac{\alpha + 1}{2} < 1.$$

Concluimos que $z = -1 \in \mathcal{D}$, y por tanto que $\mathcal{D} = \mathcal{R}$.

(iv) El intervalo de estabilidad absoluta es en todos los casos $I = (-2, 0)$.