

Superficies parametrizadas. Integrales sobre superficies. Teoremas de Stokes y Gauss.

1.- Hallar la ecuación del plano tangente a las siguientes superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (4u, 3u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0, 1, 6)$.

(b) $\Phi(u, v) = (u^2, e^{v^2}, v^2 + 1)$ en $(0, 1, 1)$.

(c) $\Phi(u, \theta) = (\cosh u \cos \theta, \cosh u \sin \theta, \sinh u)$ en $(0, 1, 0)$.

(d) $\Phi(u, v) = (u^2 + 1, v^2 + 1, u^2 + v^2)$ en $\Phi(1, 1)$.

2.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$ con $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$.

(b) $\Phi(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, r)$ con $0 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

3.- Dada la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerándola como:

(a) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta, \varphi) = (2 \cos \theta \sin \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \varphi)$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

(b) Superficie de nivel 4 de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) Gráfica de la función $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $(x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

4.- (a) Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(d) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en (c).

5.- Hallar el área del helicoides definido por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $\Phi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, \alpha)$ y D es la región donde $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

6.- Un toro (o rosquilla) T se puede representar paramétricamente por la función $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde Φ viene dada por las funciones coordenadas $x = (R + \cos \phi) \cos \theta$, $y = (R + \cos \phi) \sin \theta$, $z = \sin \phi$, donde $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, esto es $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Calcular el área de T .

7.- Demuéstrese que la superficie $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $1 \leq z < \infty$, "se puede llenar pero no se puede pintar" y explíquese el significado de esta frase.

8.- Calcular la integral de superficie $I = \iint_S (x + z) dS$, donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$, perteneciente al primer octante, de dos maneras:

(a) considerando S como la gráfica de una función de las variables x e y y expresando I como una integral doble;

(b) parametrizando la superficie de otra manera (por ejemplo, usando como parámetros la coordenada x y el ángulo θ de las coordenadas polares en el plano yz).

9.- Hallar la integral de superficie $\iint_S F \cdot dS$, siendo $F(x, y, z) = (x^3, y^3, -3z)$ y donde S denota la esfera unidad $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ orientada hacia el exterior.

10.- Hallar la integral del campo

$$\vec{F} = (x + \cos y - \log(1 + z^2), y + \sin \sqrt{1 + x^2 + z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad con la orientación inducida por normal exterior.

11.- Sea S la superficie del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcular la integral

$$\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

12.- Transformar la integral de superficie

$$\int \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$, donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* 0.

b) $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* $-\pi$.

c) $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, yz, -xz)$, donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x, y, z \leq 2$ no situadas en el plano xy y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* -4 .

13.- Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.

a) Siendo C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el plano $x + y + z = 0$,

$$\int_C y dx + z dy + x dz = \pi R^2 \sqrt{3}.$$

b) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $y = z$,

$$\int_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz = 0, \quad \int_C y^2 dx + xy dy + xz dz = 0.$$

c) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $x/a + z/b = 1$, con $a, b > 0$,

$$\int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz = 2\pi a(a + b).$$

14.- Sea S la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $x^2 + y^2 \leq 1/2$. Calcular $\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ (con la orientación inducida por la normal exterior) donde

$$\vec{F} = (xz + e^{y \sin z}, 2yz + \cos xz, -z^2 + e^x \cos y).$$

15.- Hallar la integral de superficie

$$\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{siendo} \quad \vec{F} = (x^3, y^3, -abz),$$

cuando S es el elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

orientado hacia el exterior.

4.

a) Parametrización del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

Observación: PARAMETRIZACIONES HIPERBÓLICAS

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Es inmediato que:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad // \quad \cosh^2 t + \sinh^2 t = \cosh(2t)$$

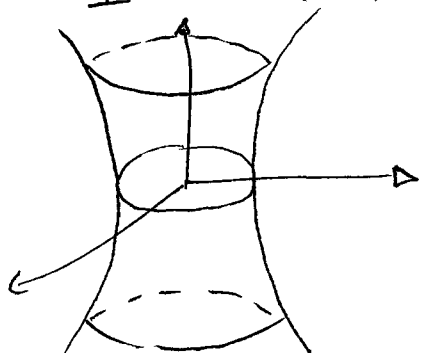
$$(\sinh t)' = \cosh t$$

$$(\cosh t)' = \sinh t$$

$$\text{Si } r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r^2 - z^2 = 25 = 5^2$$

$$r = 5 \cosh t$$

$$z = 5 \sinh t$$

Por último si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ Entonces $\Phi(\theta, t) = (5 \cosh t \cos \theta, 5 \cosh t \sin \theta, 5 \sinh t)$ es una parametrización de S .b) Normal unitaria a S

$$\vec{N}(\theta, t) = \frac{\vec{T}_\theta \times \vec{T}_t}{\|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_t\|}$$

$$\vec{T}_\theta = \partial_\theta \Phi = (-5 \cosh t \sin \theta, 5 \cosh t \cos \theta, 0)$$

$$\vec{T}_t = \partial_t \Phi = (5 \sinh t \cos \theta, 5 \sinh t \sin \theta, \cosh t)$$

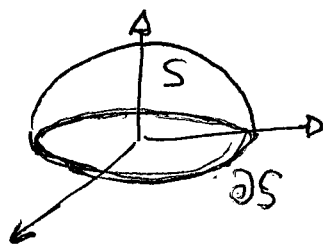
$$\vec{N} = \vec{T}_\theta \times \vec{T}_t = 25 \cosh t (\cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta, -\sinh t)$$

$$\|\vec{N}\| = (25 \cosh t)^2 \cosh(2t)$$

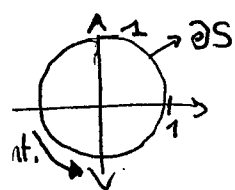
$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

12.1 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{s}$

a) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, xy, xz)$ con $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$



$$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{s} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



$\partial S: (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\partial S} \vec{F}(\partial S(t)) \cdot \partial S'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t, \cos t \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^3 t + \cos^2 t \sin t dt = \int_0^{2\pi} -\sin^3 t dt - \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin t (1 - \cos^2 t) dt = - \int_0^{2\pi} \sin t dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \sin t dt = [\cos t]_0^{2\pi} = 0$$

10. Utilizamos el Teorema de la divergencia:

$$\vec{F} = (x + \cos y - \log(1+z^2), y + \sin \sqrt{1+x^2+z^2}, z)$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \stackrel{T.G}{=} \iiint_{B_1} \operatorname{div}(\vec{F}) \cdot dx dy dz$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = (\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{B_1} \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = \boxed{4\pi}$$

7. La superficie $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donde $z \in [1, \infty)$

"se puede llenar pero no se puede pintar"

- Veamos que se puede llenar:

Volumen sólido encerrado por la superficie =

$$= \iint_{\{(x,y)/(x^2+y^2)^{-1/2} \geq 1\}} z dx dy = \iint_{\{(x,y)/x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy =$$

cambio a polares

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r} \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi < \infty$$

- Veamos que no se puede pintar:

$$S: \{(x,y, \underbrace{z(x,y)}_{\Phi(x,y)} : \underbrace{0 \leq x^2+y^2 \leq 1}_{\Omega}\}$$

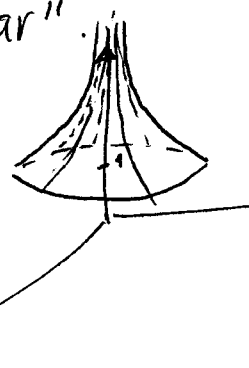
$$\vec{T}_x = (1, 0, -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}})$$

$$\vec{T}_y = (0, 1, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}})$$

$$A(S) = \iint_{\Omega} \|\vec{T}_x \times \vec{T}_y\| dS = \iint_{\Omega} \left(1 + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3}\right)^{1/2} dx dy =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(1 + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^3}\right)^{1/2} dx dy \stackrel{\text{CAMBIO A POLARES}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{r^4}\right)^{1/2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{(1+r^4)^{1/2}}{r^2} r dr \stackrel{\geq 1}{\geq}$$

$$\geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r} = +\infty$$



Curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $y = z$
 cilindro: $x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$

Parametrizamos la superficie: $\Phi(x, y) = (x, y, y)$

Nos piden calcular: $\int_C y^2 dx + xy dy + xz dz$ y ver que es igual a α

$$\boxed{\vec{F} = (y^2, xy, xz)} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 0) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{k} - \vec{j} = (0, -1, 1) \equiv \vec{N}$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & xy & xz \end{vmatrix} \quad \boxed{1^{\text{a}} \text{ FORMA}} = y\vec{k} - 2y\vec{k} - z\vec{j} = (0, -z, -y)$$

$$\iint_S (0, -z, -y) \cdot (0, 1, 1) dA(x, y) = \iint_S -y - z dA(x, y)$$

cambio a polares en el plano yz: $\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r \cos \theta - r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta + \sin \theta d\theta \cdot \int_0^1 -r^2 dr = 0 \quad \underline{\text{COMPROBADO}}$$

$$\boxed{2^{\text{a}} \text{ FORMA}} \quad \vec{F}(\Phi(x, y)) = (y^2, xy, xy)$$

$$\text{ot } \vec{F}(\Phi(x, y)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & xy & xy \end{vmatrix} = x\vec{i} + y\vec{k} - 2y\vec{k} - y\vec{j} = (x, -y, -y)$$

$$\iint_S (x, -y, -y) \cdot (0, -1, 1) dA(x, y) = \iint_S y - y dA(x, y) = 0 \quad \underline{\text{COMPROBADO}}$$

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200.

201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300.

301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400.

401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500.

501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600.