$$\begin{cases} \xi = y_n - \frac{h}{3} f\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left(f\left(t_n - h, y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right)\right) + 3f\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right)\right) \end{cases}$$

Los métodos RK se pueden expresar de la forma

$$\begin{cases} k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j) \quad \forall i = 1, \dots, s \\ y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i \end{cases}$$

donde el vector de nodos $c \in \mathbb{R}^s$, el vector de pesos $b \in \mathbb{R}^s$ y la matriz $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{s\times s}$ configuran el tablero de Butcher asociado al método.

En este caso, con $s = 2$,

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{4}f\left(t_n - h, y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right)\right) + \frac{3}{4}f\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right)\right)$$

de manera que $b_1 = \dfrac{1}{4}$, $b_2 = \dfrac{3}{4}$, $k_1 = f\left(t_n - h, y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right)\right)$ y $k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right)$.
Así que se tiene que

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_n - h, y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right)\right) \\ &= f\left(t_n - 1 \times h, y_n + h\left(0 \times k_1 + 1 \times k_2\right)\right) \end{aligned}$$

por lo que $c_1 = -1$, $a_{11} = 0$ y $a_{12} = 1$.
Análogamente, se sigue que

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right) \\ &= f\left(t_n + \frac{1}{3} \times h, y_n - \frac{h}{3}f\left(t_n + \frac{h}{3}, \xi\right)\right) \\ &= f\left(t_n + \frac{1}{3} \times h, y_n + h\left(0 \times k_1 - \frac{1}{3}k_2\right)\right) \end{aligned}$$

de forma que $c_2 = \dfrac{1}{3}$, $a_{21} = 0$ y $a_{22} = -\dfrac{1}{3}$.
Con todo esto, el tablero de Butcher resulta:

$$\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

La función de estabilidad de un método RK se define como:

$$R(z) = 1 + zb^t(I - zA)^{-1}u$$

En este caso,

$$\begin{aligned}
R(z) &= 1 + z\begin{pmatrix}\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - z\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
&= 1 + z\begin{pmatrix}\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -z\\ 0 & 1+\frac{z}{3}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sea $M = \begin{pmatrix}1 & -z\\ 0 & 1+\frac{z}{3}\end{pmatrix}$, se calcula M^{-1}:

$$det(M) = 1 + \frac{z}{3}$$

$$Adj(M) = \begin{pmatrix}1+\frac{z}{3} & 0\\ z & 1\end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{det(M)}Adj(M)^t = \frac{1}{1+\frac{z}{3}}\begin{pmatrix}1+\frac{z}{3} & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

De manera que,

$$\begin{aligned}
R(z) &= 1 + z\begin{pmatrix}\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\end{pmatrix}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}\begin{pmatrix}1+\frac{z}{3} & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
&= 1 + \frac{z}{1+\frac{z}{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}+\frac{z}{12}, \frac{z}{4}+\frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
&= 1 + \frac{z}{1+\frac{z}{3}}\left(1+\frac{z}{3}\right)\\
&= 1 + z
\end{aligned}$$

La región de estabilidad de un método RK es:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\}$$

Para el método del ejercicio resulta

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |1+z| < 1\}$$

es decir, el disco abierto centrado en $(-1{,}0)$ y con radio $r = 1$. En la Figura 1 se muestra la frontera de la región de estabilidad del método.
Como $\mathbb{C}^-$ no está completamente contenido en $\mathcal{D}$ se concluye que el método no es A-estable.

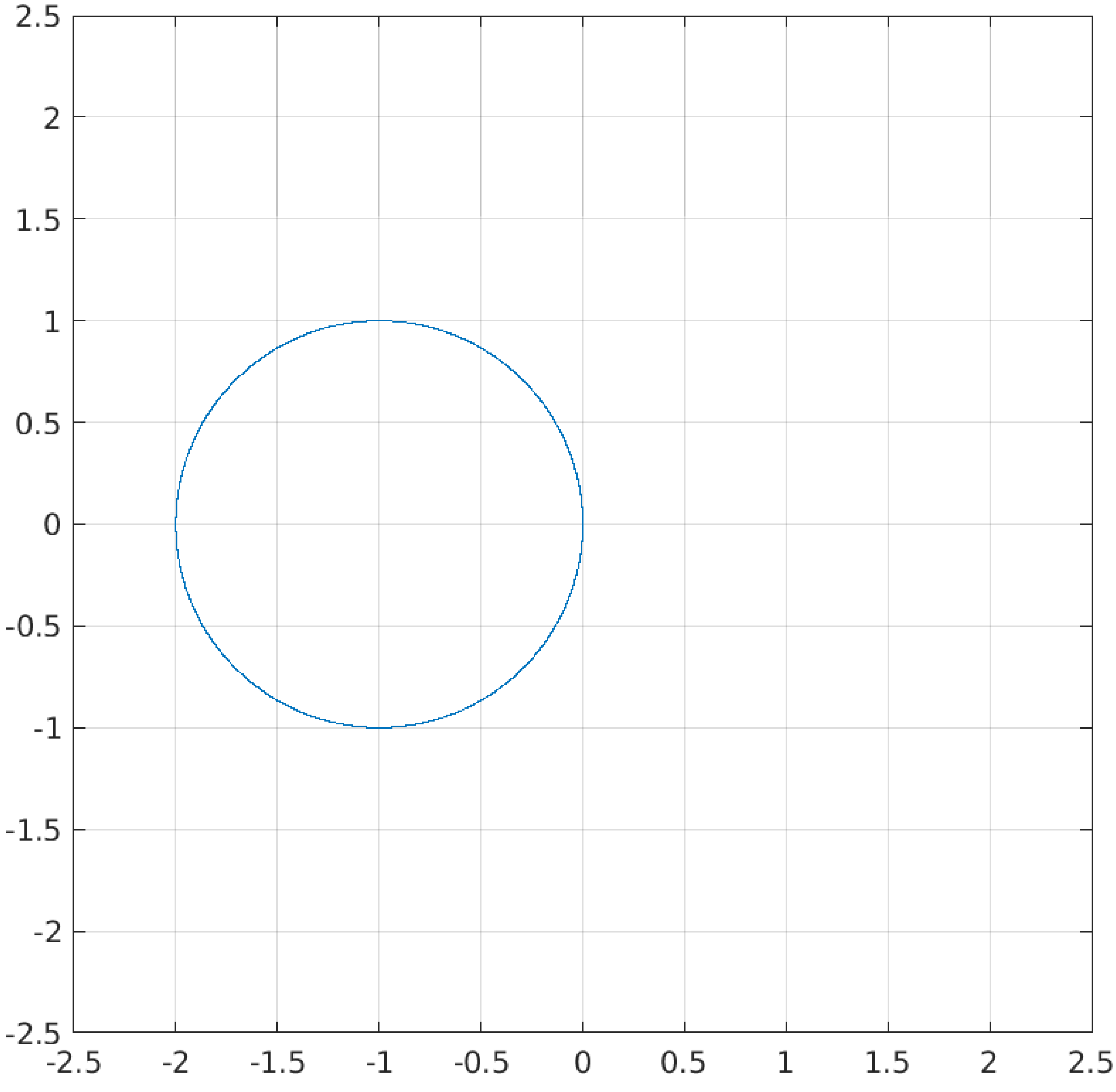


Figura 1: Frontera de la región de estabilidad $\mathcal{D}$.

Tarea 9

$$\xi = y_n + \frac{h}{3}\left(f(t_n,\xi) - f(t_n+h, y_{n+1})\right)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,\xi) + f(t_n+h, y_{n+1})\right)$$

Reutilizamos el tablero de la tarea, donde había uno muy similar:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cc} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Queremos hallar la función de estabilidad del método, $R(z)$.

$$R(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}e$$

$$I - zA = \begin{bmatrix} 1 - z/3 & z/3 \\ -z/2 & 1 - z/2 \end{bmatrix}$$

luego $(I - zA)^{-1} = \dfrac{1}{2z^2-5z+6}\begin{bmatrix} -3z+6 & -2z \\ 3z & -2z+6 \end{bmatrix}$

$$R(z) = 1 + z\left(\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right)\cdot \frac{1}{2z^2-5z+6}\begin{bmatrix} -3z+6 & -2z \\ 3z & -2z+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + \frac{-2z^2+6z}{2z^2-5z+6} = \frac{z+6}{2z^2-5z+6}$$

Tenemos por tanto:

$D = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\}$ de donde se sigue que el método será

A-estable sii $|R(z)| < 1$ en $\mathbb{C}^-$,

ed $\left|\dfrac{z+6}{2z^2-5z+6}\right| < 1$ con $z \in \mathbb{C}^-$

Usando el lema que dice que: Sea una función racional no cte. $R(z) = p(z)/q(z)$ con p, q polinomios. Entonces $|R(z)| < 1 \ \forall z \in \mathbb{C}^-$ sii:

i) $\alpha \in \mathbb{C}$ tq $q(\alpha) = 0$ tienen parte real positiva $(Re(\alpha) > 0)$

ii) $|R(it)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Vemos que $q(z) = 2z^2-5z+6$ tiene $\alpha_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-48}}{4} = \dfrac{5}{4} \pm \dfrac{i\sqrt{23}}{4}$

luego $Re(\alpha_{1,2}) > 0$.

Además

$$R(it) = \frac{it + 6}{2(it)^2 - 5(it) + 6}$$ y queremos ver si $|R(it)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$|it+6|^2 \leq |-2t^2 - 5it + 6|^2$$

$$t^2 + 36 \leq (-2t^2+6)^2 + (-5t)^2$$

$$\cancel{t^2} + \cancel{36} \leq 4t^4 - \underbrace{24t^2 + \cancel{36} + 25t^2}_{\cancel{t^2}}$$

$$0 \leq 4t^4$$

Vemos por tanto que $|R(it)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |R(z)| < 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}^- \Rightarrow$ es A-estable.

Luego el método es A-estable.

A continuación mostramos la gráfica de nuestra región. Para hallarla tomamos z = x+iy y sustituimos en R(z).

Queremos ver que |R(z)| <= 1 luego tenemos:

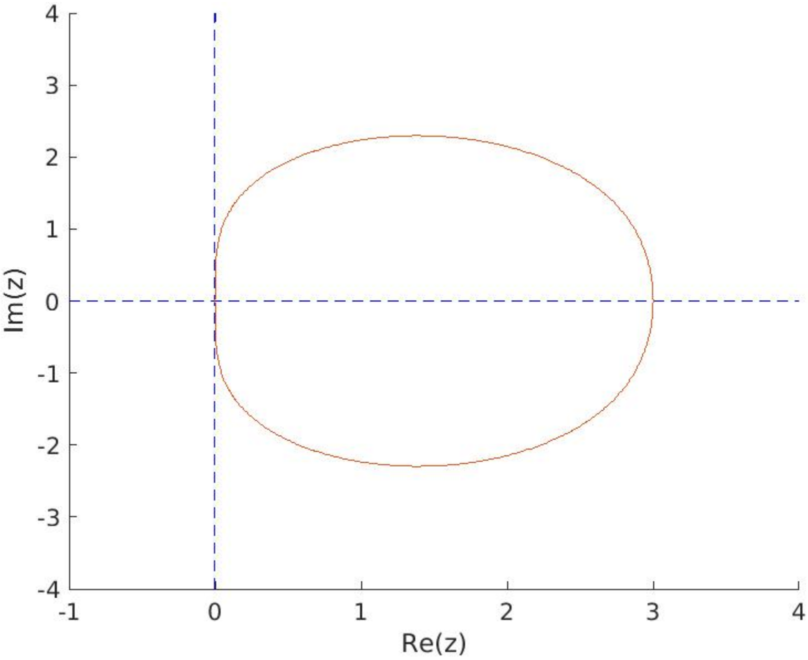
$$\frac{(x+iy)+6}{2(x+iy)^2-5(x+iy)+6} \quad <= 1$$

Elevando al cuadrado y pasándolo todo a la derecha ya tenemos nuestra función lista para representar en matlab:

```
f=@(x,y) (4*x*y -5*y)^2 + (6-5*x +2*(x^2-y^2))^2-(x+6)^2 -y^2;

line([0 0], [-4 4], 'Color', 'blue', 'LineStyle', '--');
line([-1 4], [0 0], 'Color', 'blue', 'LineStyle', '--');
hold on
fimplicit(f, [0 3 -3 3])
xlabel('Re(z)')
ylabel('Im(z)')
```

Por último vemos que la gráfica de la región nos queda:



!!!! Vemos que nuestra región de estabilidad es todo el área de fuera del óvalo. Si tomamos un punto dentro de nuestro óvalo se da un módulo mayor que 1, luego nuestra región será lo de fuera. Vemos que esta región contiene a los complejos negativos lo que demuestra que nuestro método es A-estable como habíamos concluido anteriormente.

ENTREGA 9

$$\begin{cases} \xi = y_n + \dfrac{h}{3}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + \frac{2}{3}h, \xi)\right) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}\left(f(t_n, y_n) + 3f(t_n + \frac{2}{3}h, \xi)\right) \end{cases}$$

El tablero de Butcher asociado es:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Como es un método RK, la función de estabilidad será:

$R(z) = 1 + z b^t (I - zA)^{-1} u$

$$I - zA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3}z & 1-\frac{1}{3}z \end{pmatrix} \quad ; \quad (I-zA)^{-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}z & 0 \\ \frac{1}{3}z & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I-zA)^{-1}u = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}z \\ 1+\frac{1}{3}z \end{pmatrix} \quad ; \quad b^t(I-zA)^{-1}u = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}\left(1 + \tfrac{1}{6}z\right)$$

$$= \frac{1+\frac{1}{6}z}{1-\frac{1}{3}z}$$

$$R(z) = 1 + z b^t (I-zA)^{-1} u = 1 + z \frac{1+\frac{1}{6}z}{1-\frac{1}{3}z} = \frac{1-\frac{1}{3}z + z + \frac{1}{6}z^2}{1-\frac{1}{3}z} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}z^2 + \frac{2}{3}z + 1}{1-\frac{1}{3}z} = \boxed{\frac{z^2+4z+6}{2(3-z)} = R(z)}$$

Para ver si es A-estable usaremos el lema de los polos.

1) El único polo es $\alpha = 3$ y $Re(3) = 3 > 0$ ✓

2) $$R(it) = \frac{-t^2 + 4ti + 6}{2(3-ti)} = \frac{(6-t^2) + 4ti}{6 - 2ti}$$

Para $t=1$: $R(i) = \frac{5+4i}{6-2i}$; $|R(i)|^2 = \frac{|5+4i|^2}{|6-2i|^2} = \frac{41}{40} > 1$

→ El método NO es A-estable

Para representar la región, factorizamos $R(z)$:

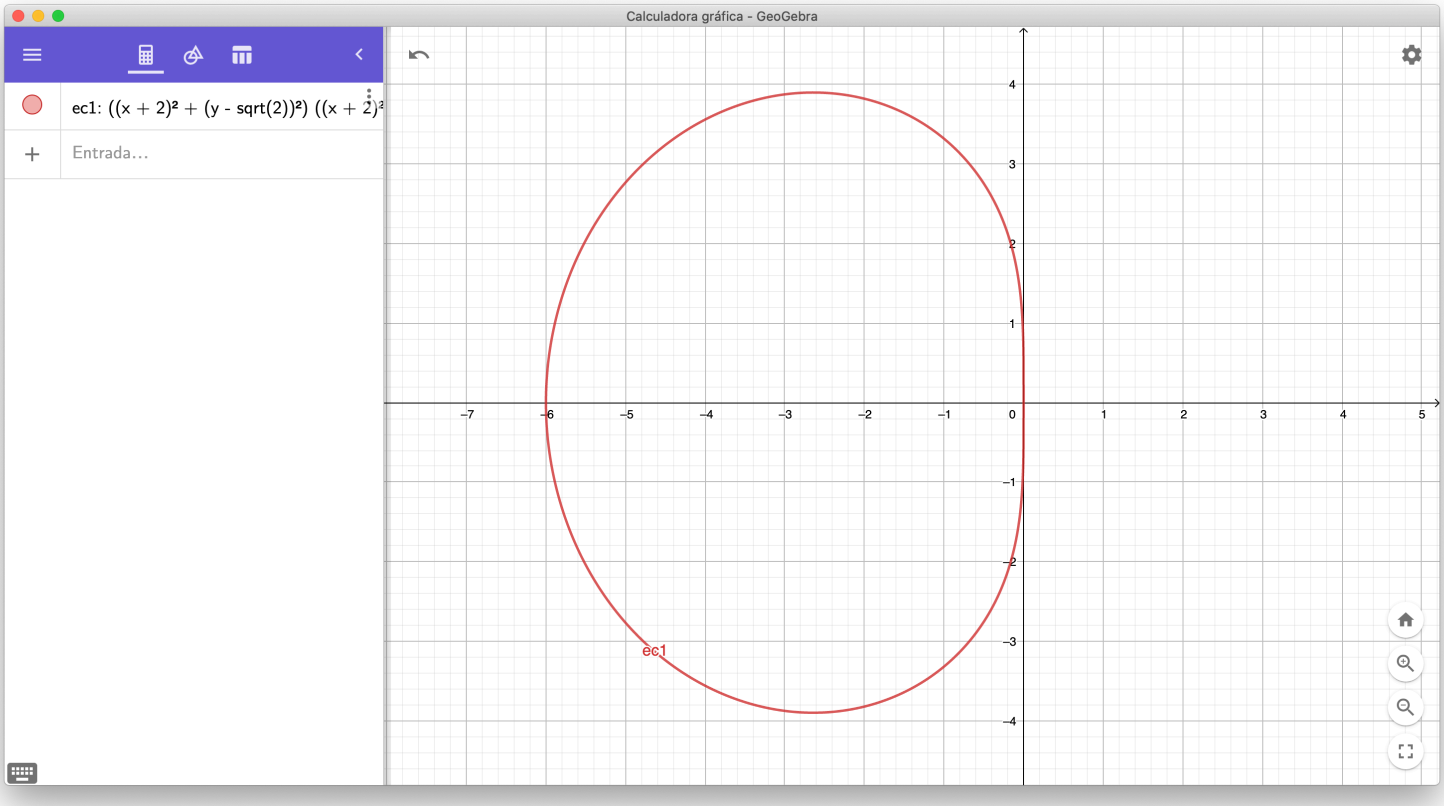
$$R(z) = \frac{z^2+4z+6}{2(3-z)} = \frac{(z+2-\sqrt{2}i)(z+2+\sqrt{2}i)}{2(3-z)}$$

$|R(z)| = 1 \iff |z+2-\sqrt{2}i|\,|z+2+\sqrt{2}i| = |2(3-z)|$

Al cuadrado, la ecuación queda:

$$\boxed{[(x+2)^2 + (y-\sqrt{2})^2][(x+2)^2 + (y+\sqrt{2})^2] = 4[(3-x)^2 + y^2]}$$

si $z = x + yi$


Calculadora gráfica - GeoGebra
ec1: $((x + 2)^2 + (y - \text{sqrt}(2))^2) ((x + 2)^2$
Entrada...
ec1
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
4 3 2 1 −1 −2 −3 −4

Método Runge-Kutta. Regiones de A estabilidad

[redacted]

13 de diciembre de 2020

Recordemos de la tarea 6 cuál era el tablero de Butcher de nuestro método:

$$
\begin{array}{r|rr}
1/3 & 5/12 & -1/12 \\
1 & 3/4 & 1/4 \\
\hline
 & 3/4 & 1/4
\end{array}
$$

Sabemos (7.7 Fernando Quirós) que la función de estabilidad se conoce como:

$$\mathcal{R}(z) = 1 + z \cdot b^T \left(\mathcal{I} - z\mathcal{A}\right)^{-1} e \quad z \in \mathbb{C}$$

Vamos a calcularla:

$$(\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5z}{12} & \frac{-z}{12} \\ \frac{3z}{4} & \frac{z}{4} \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12-5z}{12} & \frac{z}{12} \\ \frac{-3z}{4} & \frac{4-z}{4} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2z^2 - 8z + 12} \begin{pmatrix} 12 - 3z & -z \\ 9z & 12 - 5z \end{pmatrix}$$

$$zb^T \cdot (\mathcal{I} - z\mathcal{A})^{-1} \cdot e = \begin{pmatrix} \frac{3z}{4} & \frac{z}{4} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2z^2 - 8z + 12} \begin{pmatrix} 12 - 3z & -z \\ 9z & 12 - 5z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2z^2 - 8z + 12} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3z}{4} & \frac{z}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 - 4z \\ 12 + 4z \end{pmatrix} = \frac{1}{z^2 - 4z + 6} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3z}{4} & \frac{z}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 - 2z \\ 6 + 2z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-z^2 + 6z}{z^2 - 4z + 6}$$

Por tanto:

$$\mathcal{R}(z) = 1 + \frac{-z^2 + 6z}{z^2 - 4z + 6} = \frac{2z + 6}{z^2 - 4z + 6} \quad z \in \mathbb{C}$$

El dominio de estabilidad está definido como:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |\mathcal{R}(z)| < 1\}$$

Sabiendo que todo método RK será A-estable $\Longleftrightarrow$ $|\mathcal{R}(z)| < 1$ en $\mathbb{C}^-$ más el Lema 7.6 de FQ que dice que se cumple la condición de ser A-estable si y sólo si todos los polos de $\mathcal{R}(z)$ tienen parte real positiva y $|\mathcal{R}(it)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$

1) Los polos de $\mathcal{R}(z)$ son los ceros de $z^2 - 4z + 6$ que valen $\dfrac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$ que tienen parte real $2 > 0$ $\blacksquare$
2) Veamos que $|\mathcal{R}(it)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{2it + 6}{-t^2 - 4it + 6}\right|^2 \leq 1^2$$

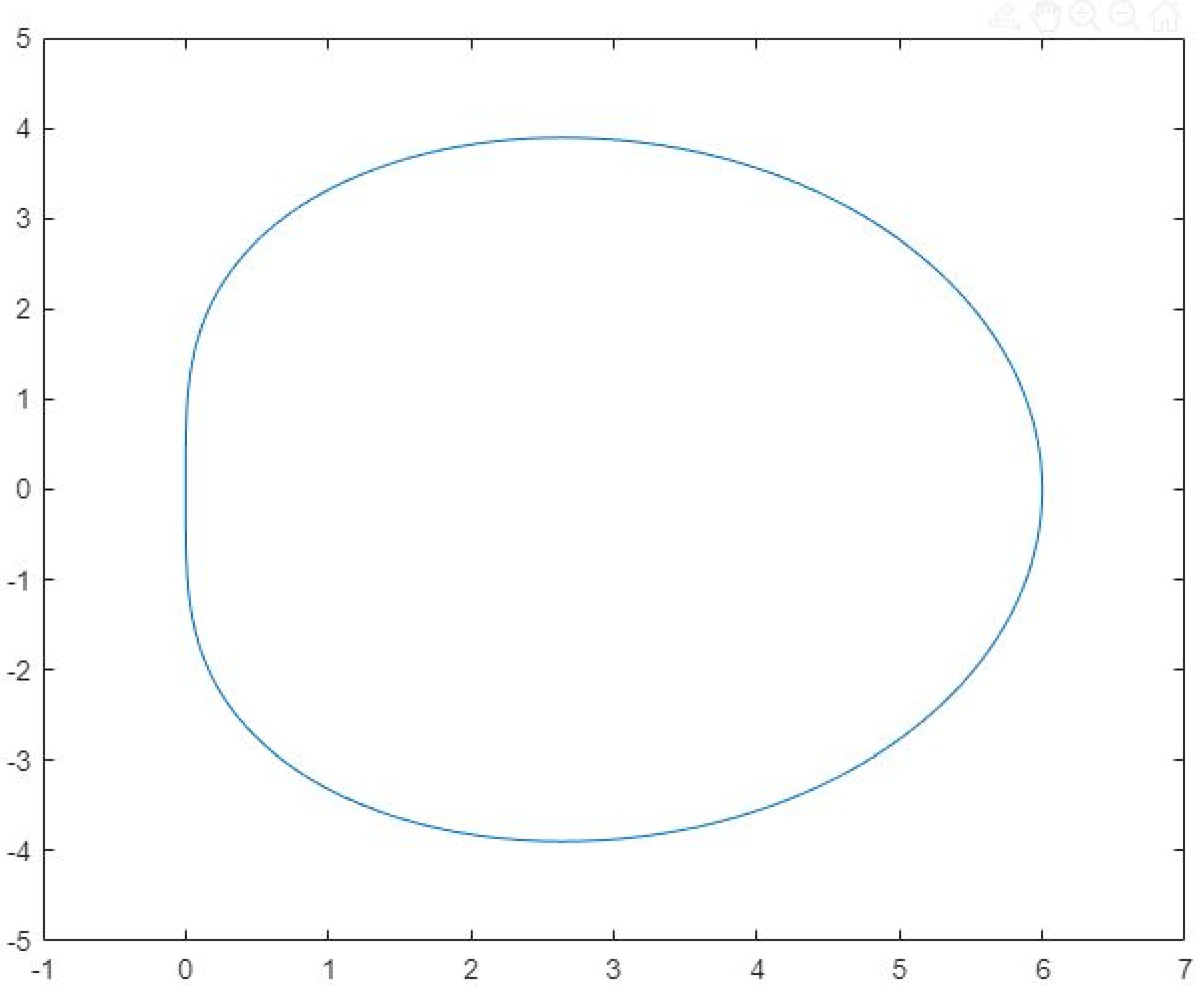
$$\frac{4t^2 + 36}{t^4 + 4t^2 + 36} \leq 1 \Longleftrightarrow 4t^2 + 36 \leq t^4 + 4t^2 + 36 \Longleftrightarrow 0 \leq t^4 \quad \blacksquare$$

Por lo tanto, el método es A-estable
Para representar la frontera de la región, tendré que calcular $|\mathcal{R}(x + iy)| = 1$ para ello, vuelvo a elevar al cuadrado como antes:

$$f(x, y) := |\mathcal{R}(x + iy)|^2 = 1 \Longleftrightarrow \frac{(2x + 6)^2 + (2y)^2}{(x^2 - y^2 - 4x + 6)^2 + (2xy - 4y)^2} = 1$$

$$f(x, y) := (x^2 - y^2 - 4x + 6)^2 + (2xy - 4y)^2 - (2x + 6)^2 - (2y)^2$$

La frontera de la región está dada por la siguiente gráfica:



Tomemos ahora el punto (1,1) que está en el interior de la línea azul.
Si calculamos $f(1,1) = \mathcal{R}(1+i) = \dfrac{8+2i}{4-2i}$ y le hacemos el módulo y nos da $\dfrac{68}{12}$ que es mayor que 1. Por lo tanto, el interior de la gráfica no pertenece a $\mathcal{D}$ y vemos como $\mathbb{C}^- \subset \mathcal{D} = \mathbb{C}/interiordegrfica$