HOJA DE EJERCICIOS 3: Combinatoria   EDyL 2011-2012

[Fecha de publicación: 28 octubre 2011]
[Fecha de entrega: 10 noviembre 2011]
[Resolución en clase: 10/11 noviembre 2011]

Notación:

$$C_{n,k} = C(n,k) = \binom{n}{k}$$
$$C^R_{n,k} = C^R(n,k) = C(n+k-1,k) = C(n+k-1,n-1)$$
$$P_{n,k} = P(n,k) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$
$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

Ejercicio 1: ¿Cuántos números entre 100 y 1000 se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4, que tengan todas sus cifras distintas?

SOLUCIÓN:

Son tres cifras, pero la primera no puede ser cero. Por tanto la solución es 4*4*3

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

[Números de 3 cifras que no repiten dígito a partir de los 5 dígitos dados P(5,3)]
- Números de 3 cifras que empiezan por cero (= números de 2 cifras que excluyen el cero) [P(4,2)]

= 5*4*3 – 4*3 = 60 - 12 = 48.

Ejercicio 2: ¿Cuántas palabras de longitud 8 pueden formarse con las 5 vocales, si se impone la restricción que la letra “a” aparezca exactamente 3 veces y la letra “u” aparezca exactamente 2 veces?

SOLUCIÓN:

Letra “a”: elegir 3 de las 8 posiciones -> C(8,3)
Letra “u”: elegir 2 de las 5 restantes -> C(5,2)
Resto de letras: 3 vocales en 3 posiciones con repetición -> 3*3*3

La solución es el producto de los tres números anteriores.

Ejercicio 3: En un ascensor de un edificio de cinco plantas viajan cuatro personas (A, B, C y D). Se sabe que todas las personas se van a bajar en alguna planta. ¿Cuántas posibilidades hay?

SOLUCIÓN

Para cada persona hay que elegir en qué planta se baja. Por tanto hay que elegir 4 números entre cinco cifras, con repetición. La solución es 5^4.

Ejercicio 4: ¿De cuántas maneras es posible distribuir una moneda de 20 céntimos, una moneda de 10 céntimos, una moneda de 5 céntimos, y veinticinco monedas de un céntimo entre cinco niños, de manera que el mayor de ellos reciba exactamente 15 o 20 céntimos?

SOLUCIÓN

Por casos, según las monedas que recibe el mayor. En cada caso hay que repartir las monedas únicas que queden entre los cuatro niños restantes (es decir, un factor 4 por cada moneda única), y las monedas de céntimo que queden entre los 4 niños restantes (es decir, soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ no. monedas de un céntimo restantes). El resultado será la suma de todos los casos considerados.

(20)	->	$4 * 4 * C^R(4,25)$
(10)+(5)+5*(1)	->	$4 * C^R(4,20)$
(10)+10*(1)	->	$4 * 4 * C^R(4,15)$
(5)+15*(1)	->	$4 * 4 * C^R(4,10)$
20*(1)	->	$4 * 4 * 4 * C^R(4,5)$
(10)+(5)	->	$4 * C^R(4,25)$
(10)+5*(1)	->	$4 * 4 * C^R(4,20)$
(5)+10*(1)	->	$4 * 4 * C^R(4,15)$
15*(1)	->	$4 * 4 * 4 * C^R(4,10)$

Ejercicio 5: ¿De cuantas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra RIFIRRAFE, de manera que las dos “I” vayan siempre juntas?

SOLUCIÓN

Consideramos las dos I como una sola letra “II”, quedan 8 letras, con repeticiones (3 R’s, 2 F’s) y, por tanto la solución es $8! / (3!\ 2!)$

Ejercicio 6: ¿De cuantas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra RIFIRRAFE, de manera que las dos "I" **NUNCA** vayan juntas?

SOLUCIÓN 1

Si excluimos las dos I, quedan 7 letras con 3 repetidas, que se pueden ordenar de 7! / 3! 2! maneras. Las dos "I" tienen que ponerse ahora en los 8 huecos posibles entre dos letras (incluido el principio y el final), es decir, hay que elegir 2 huecos entre 8 = C(8,2). La solución por tanto es C(8,2)* 7! / (3! *2!) = 7* 8! / (2 *3! * 2!)

SOLUCIÓN 2

Número total de palabras distintas posibles [9! / (3! * 2! * 2!)]

- Número de palabras con II juntas [8! / (3! * 2!)]

= 8! / (3! 2!) * [9/2-1] = 7 * 8! / (2 *3! *2!)

Ejercicio 7: Se distribuyen 100 sillas iguales entre cinco seminarios. En los dos mayores se colocan en total 50 de esas sillas. ¿Cuántas distribuciones distintas pueden plantearse?

SOLUCIÓN:

Llamemos A y B a los seminarios de mayor tamaño.

Primero hay que rotular 50 sillas con A o B, es decir, combinaciones con repetición de dos letras escogidas cincuenta veces: C(2+50-1, 50) = C(51,50) = C(51,1)

Luego hay que rotular las otras 50 sillas con las letras C, D o E (el resto de seminarios), es decir combinaciones con repetición de tres letras escogidas cincuenta veces: C(3+50-1, 50) = C(52,50) = C(52,2)

La solución es el producto C(51,1) * C(52,2)

Ejercicio 8: En un grupo hay n hombres y n mujeres. ¿De cuantas maneras se puede hacer una fila que no deje a nadie fuera y donde hombres y mujeres siempre van alternados?

SOLUCIÓN

n! * n! * 2

Ejercicio 9: ¿Cuántos bytes contienen exactamente 2 unos? ¿y al menos cuatro unos?

SOLUCIÓN

a1 – C(8,2)
a2- C(8,4)+C(8,5)+C(8,6)+C(8,7)+C(8,8)

Ejercicio 10: Siete mujeres y nueve hombres son profesores del departamento. ¿De cuántas formas se puede escoger una comisión de cinco miembros del departamento si debe de haber al menos una mujer en la comisión?

SOLUCIÓN

C(16,5) – C(9, 5)

Ejercicio 11: Sea la siguiente ecuación de cuatro incógnitas: x+y+z+t=10, donde las cuatro incógnitas toman valores enteros no negativos. ¿Cuántas soluciones distintas existen?

SOLUCIÓN

CR(4, 10) = C(13,10) = C(13,3)= 13! / 10! 3!

Ejercicio 12: ¿De cuántas formas se pueden colocar 10 canicas del mismo tamaño en cinco recipientes distintos si todas las canicas son indistinguibles? ¿Y si las canicas son distinguibles?

SOLUCIÓN

b1- CR(5, 10) = $P_{14}^{10,4}$ = 14! / 10! 4!
b2- 5^{10} (cada canica se puede poner en 5 sitios)

Ejercicio 13: Calcula el coeficiente de x^5y^8 en el desarrollo de $(x+y)^{13}$

SOLUCIÓN

C(13, 8)