Hoja 6

Integrales dobles y triples. Teorema de Fubini

1.- Sea f la función definida para $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f no es integrable en el rectángulo $R = [0,1] \times [0,1]$.

(b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dx \Big) dy \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dy \Big) dx\,.$$

2.- Definimos $f(x,y)$ en el cuadrado $C = [0,1] \times [0,1]$ como sigue:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Probar que la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$ existe y es igual a 1.

(b) Demostrar que, no obstante, f no es integrable en C.

3.- Demostrar la existencia de la integral $\displaystyle\iint_Q f(x+y)\, dx\, dy$, donde $Q = [0,2] \times [0,2]$ y $f(t) = [t]$ representa el mayor número entero $\leq t$. Hallar el valor de la integral.

4.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Explicar, en cada caso, la existencia de la integral.

(a) $\displaystyle\iint_Q x^2 e^y\, dx\, dy,\ Q = [-1,1] \times [0, \log 2]$; ($b$) $\displaystyle\iint_Q \operatorname{sen}(x+y)\, dx\, dy,\ Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$;

(c) $\displaystyle\iint_Q |xy|\, dx\, dy,\ Q = [-1,2] \times [1,3]$; ($d$) $\displaystyle\iint_Q \operatorname{sen}^2(3x-2y)\, dx\, dy,\ Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

5.- Para cada una de las siguientes funciones f definidas en el rectángulo $Q = [0,1] \times [0,1]$, se pide representar el conjunto de los valores $f(x,y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así obtenido. Determinar también el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in Q : f \text{ no es continua en } (x,y)\}$$

y explicar la existencia de las integrales utilizadas.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} 1-(x+y) & \text{si} \quad x+y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$

6.- Dibujar la región de integración, estudiar la existencia de la integral y calcular su valor:

$$\iint_\Omega x \cos(x+y)\, dx\, dy\,,$$

siendo Ω el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π).

7.- Calcular $\iint_D y\,dx\,dy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 2x/\pi \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$.

8.- Calcular la integral $\iint_D x^3 y \operatorname{sen} \frac{\pi y^2}{x} dxdy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

9.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z = 6$. Dibujar esta pirámide y luego calcular su volumen: a) de manera elemental; b) integrando.

10.- (a) Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

(b) Lo mismo para la región acotada por la gráfica $z = e^{-x^2}$ y los planos $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$.

11.- En los siguientes apartados, se supone que la integral de una función positiva f sobre la región Ω se reduce a la integral iterada que se da. En cada caso, se pide determinar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración.

(a) $\int_0^2 \Big(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx \Big) dy.$ (b) $\int_1^4 \Big(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy \Big) dx\,,$

(c) $\int_1^e \Big(\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy \Big) dx.$ (d) $\int_0^\pi \Big(\int_{-\operatorname{sen} x/2}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy \Big) dx.$

12.- Invirtiendo el orden de integración si fuese necesario, calcúlese la integral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\,dxdy\,.$$

13.- Observando que $\iint_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx \right)^2$, demostrar que

$$2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx \right)^2 .$$

14.- Si $D = [-1,1] \times [-1,2]$, probar que

$$1 \leq \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1} \leq 6\,.$$

15.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a) $\iiint_Q (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, con $Q = [1,2] \times [-1,1] \times [0,1]$.

(b) $\iiint_T x^2 \cos z\,dx\,dy\,dz$, siendo T la región limitada por los planos $z = 0, z = \pi, y = 0, y = 1, x = 0, x + y = 1$.

(c) $\iiint_\Omega x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z = x\,y$ y los planos $y = x, x = 1$ y $z = 0$.

16.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ de la función f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z = 0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz\,dx\,dy$.

(a) $\int_0^1 \Big(\int_0^x \Big(\int_0^y f(x,y,z)\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx.$ (b) $\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \Big(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx.$

(c) $\int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx.$ (d) $\int_{-1}^1 \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz \Big)\,dy \Big) dx.$

HOJA 6

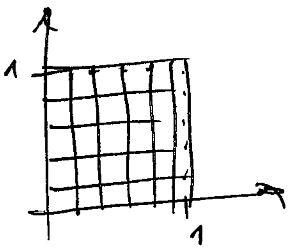
1.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) f NO es integrable en $[0,1]$?

Sea $n = 1, 2, \ldots$ y defino una partición P_n de $[0,1]^2$ con los puntos $\{a_{jk} = \left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) ; 0 \le j,k \le n\}$ $(n+1)^2$ puntos

Con estos puntos $[0,1]^2$ queda dividido en n^2 rectángulos $R_{j,k} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$



$U(f, P_n)$ (sumas superiores de f asociada a P_n)

$$= \sum_{j,k=0}^{n-1} M_{j,k}(f)\, |R_{j,k}| \quad \text{con } M_{j,k}(f) = \sup\{f(x,y) / (x,y) \in P_{j,k}\}$$

$$= \sum_{j,k=0}^{n-1} 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{área}} = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1$$

$L(f, P_n)$ (sumas inferiores de f asociada a P_n) $=$

$$= \sum_{j,k=0}^{n-1} m_{jk}(f)\, |R_{j,k}| \quad \text{con } m_{j,k}(f) = \inf\{f(x,y) / (x,y) \in P_{j,k}\} = 0$$

$$= \sum_{j,k=0}^{n-1} 0 \cdot \frac{1}{n^2} = 0$$

Si f fuera integrable de Riemann en $[0,1]^2$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} U(f, P_n)}_{1} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} L(f, P_n)}_{0}$, lo cual no es así.

$1 \neq 0$

b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy \qquad I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$$

I_1: fijamos $y \in [0,1]$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = h(x)$

Por la misma razón que en el apartado a) $h(x)$ no es integrable en $[0,1]$ $\Rightarrow$ I_1 no existe

I_2: fijamos $x \in [0,1]$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = h(y)$

en todo caso $h(y)$ va a ser constante en $[0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x,y)\, dy = \int_0^1 h(y)\, dy = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow I_2 \text{ es } =$$

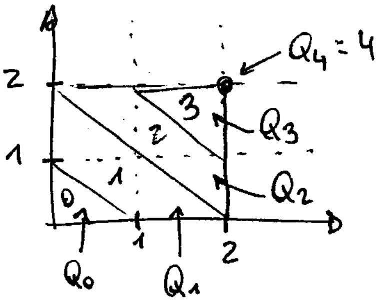
$$= \int_0^1 s(x)\, dx \quad \text{con} \quad s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow s(x) \text{ no es}$$

integrable en $[0,1]$ $\Rightarrow$ I_2 no es integrable en $[0,1]^2$.

$\boxed{3.}$ $I = \iint_Q f(x+y)\,dx\,dy$; $Q = [0,2]^2$ y $f(t) = [t]$

parte entera

$$I = \iint_{[0,2]^2} [x+y]\,dx\,dy$$



$Q = \bigcup_{j=0}^{4} Q_j$ $\quad Q_j = \{(x,y) \in Q : j \leq x+y < j+1\}$

En Q_j, $[x+y] = j$

($j = 0, \ldots, 4$ porque $(x,y) \in Q \Leftrightarrow 0 \leq x, y \leq 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 4$)

$$I = \cancel{0 \cdot A(Q_0)}^{0} + 1 \cdot A(Q_1) + 2A(Q_2) + 3A(Q_3) + 4\cancel{A(Q_4)}^{0}$$

$$\begin{cases} A(Q_1) = A(Q_2) \\ A(Q_1) + A(Q_2) = A(Q) - 2A(Q_0) = 2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(Q_1) = A(Q_2) = \frac{3}{2} \quad ; \quad A(Q_0) = A(Q_3) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = 1 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 6 \ /\!/$$

$\boxed{4.}$ c) $\iint_Q |xy| \, dx dy \quad ; \quad Q = [-1,2] \times [1,3]$

$$I = \iint_{Q=[-1,2]\times[1,3]} |x||y| \, dx\, dy = \int_{-1}^{2} |x| \, dx \cdot \int_1^3 |y| \, dy =$$

$$= \left(\int_{-1}^{0} -x \, dx + \int_0^2 x \, dx \right) \cdot \int_1^3 y \, dy = \left(\left[\frac{-x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \right) \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{2} \cdot 4 = \frac{20}{2} = 10$$

d) $I = \iint_Q \text{sen}^2(3x - 2y) \, dx dy \quad , \quad Q = [0, \pi]^2$

$$I = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \text{sen}^2(3x - 2y) \, dx \right) dy$$

Tenemos que ver $F(x) = \int \text{sen}^2(3x + \overset{a=-2y}{a}) \, dx = \underbrace{\int \overbrace{\text{sen}(3x+a)}^{u} \, \overbrace{\text{sen}(3x+a) \, dx}^{dv}}_{\text{por partes}}$

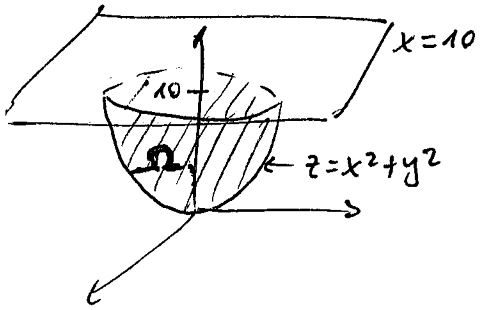
$$= -\frac{1}{3} \text{sen}(3x+a)\cos(3x+a) + \frac{1}{\cancel{3}} \int \cos(3x+a) \, (\cancel{3} \cos(3x+a)) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \underbrace{\text{sen}(3x+a)\cos(3x+a)}_{\frac{1}{2}\text{sen}(6x+2a)} + \int \underbrace{\cos^2(3x+a)}_{1-\text{sen}^2(3x+a)} \, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{12} \text{sen}(6x - 4y) \right) \Big|_{x=0}^{x=\pi} dy = \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{12} \underbrace{\text{sen}(\overbrace{6\pi}^{3(2\pi)} - 4y)}_{\text{sen}(-4y)} + \frac{1}{12} \text{sen}(-4y) \right) d$$

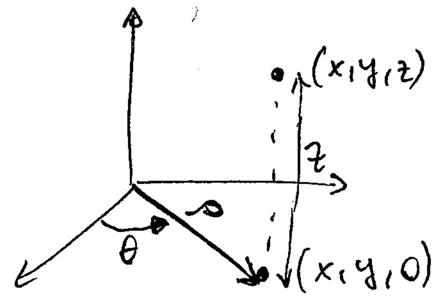
$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \, dy = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2} > 0$$

$\boxed{10.}$ a) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 10\}$ ¿$V(\Omega)$?



Expresamos Ω en coordenadas cilíndrica (ρ, θ, z)

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow$ radio proyectado al plano XY



$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Omega = \{(\rho,\theta,z) \in [0,\infty] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} : \overbrace{\rho^2 \le z \le 10}^{0 \le \rho \le \sqrt{10}},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$V(\Omega) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{10}} \int_{z=\rho^2}^{z=10} \underbrace{\mathrm{Jac}(\rho,\theta,z)}_{\rho}\, dz\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{\sqrt{10}} \left(\int_{z=\rho^2}^{10} \rho\, dz \right) d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{10}} \rho(10-\rho^2)\, d\rho =$$

$$= 20\pi \left(10 - \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$$

En cartesianas sería tal que así: $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 10\}$

$\cancel{= \{(x,y,z) : 0 \le z \le 10}$

$0 \le z \le 10$

$x^2+y^2 \le z \Rightarrow y^2 \le z \Rightarrow -\sqrt{z} \le y \le \sqrt{z}$

$x^2+y^2 \le z \Rightarrow x^2 \le z - y^2 \Leftrightarrow -\sqrt{z-y^2} \le x \le \sqrt{z-y^2}$

$\boxed{8.}$ $I = \iint_D x^3 y \,\text{sen}\, \frac{\pi y^2}{x}\, dx\,dy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

Si $(x,y) \in D \Rightarrow x \geq 0$ (porque $\exists \sqrt{x}$)

Por otra parte si $x \geq 0$ y $(x,y) \in D \Rightarrow x^3 \leq \sqrt{x} \Rightarrow x \in [0,1]$

Por tanto, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 ,\ x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y=x^3}^{\sqrt{x}} x^3 y \,\text{sen}\, \frac{\pi y^2}{x}\, dy \right) dx = \int_0^1 x^3 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} y \,\text{sen}\, \frac{\pi y^2}{x}\, dy \right) dx \qquad (1)$$

$$\int_{x^3}^{\sqrt{x}} y \,\text{sen}(a y^2)\, dy \overset{a = \frac{\pi}{x}}{=} \frac{1}{2a} \Big[-\cos(a y^2) \Big]_{x^3}^{\sqrt{x}}$$

$$I = \int_0^1 x^3 \cdot \frac{x}{2\pi} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{x} y^2\right) \right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2\pi} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{x} y^2\right) \right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int x^3 \left(-\frac{x}{2\pi} \underbrace{\cos\pi}_{-1} - \left(-\frac{x}{2\pi} \cos(\pi x^5) \right) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x^3 \cdot \frac{x}{2\pi} \left(1 + \cos(\pi x^5) \right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 x^4 \left(1 + \cos(\pi x^5) \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{\int_0^1 x^4 dx}_{1/5} + \underbrace{\int_0^1 x^4 \cos(\pi x^5)\, dx}_{\frac{1}{5\pi} \cdot \left[\text{sen}(\pi x^5) \right]_0^1} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10\pi}$$

$\boxed{12.}$

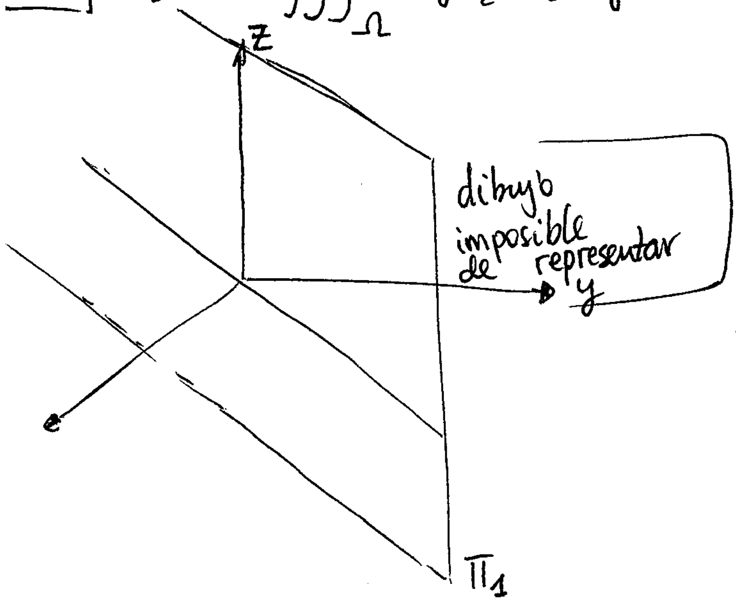
$$I = \int_{y=0}^{4}\int_{x=y/2}^{2} e^{x^2}\,dx\,dy = \iint_{\Omega} e^{x^2}\,dx\,dy \;;\; \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0\le y\le 4 \\ \frac{y}{2}\le x\le 2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2 \;,\; 0\le y\le 2x\}$$

$$\Rightarrow I = \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2x} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=2} e^{x^2}\int_{y=0}^{y=2x} dy\,dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} e^{x^2}\cdot 2x\,dx = \left[e^{x^2}\right]_0^2 = \underline{\underline{e^4-1}}$$

$\boxed{15.}$ c) $I = \iiint_{\Omega} xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$ $\quad\Omega$ limitada por: $\begin{cases} z = xy \\ \Pi_1 \equiv y = x \\ \Pi_2 \equiv x = 1 \\ \Pi_3 \equiv z = 0 \end{cases}$



$0\le z\le xy \;;\; xy\ge 0 \rightarrow \begin{cases} x,y\ge 0 \\ x,y\le 0 \end{cases}$

Si $x,y\ge 0 \Rightarrow x\le 1$ debido a Π_2

$\Rightarrow$ como $y = x\ (\Pi_1) \Rightarrow 0\le y\le x$

~~$0\le x\le 1$~~

Si $x,y\le 0 \Rightarrow \Omega$ no estaría acotada

$$\Rightarrow \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le xy\}$$

$$I = \int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{xy} xy^2z^3\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^x xy^2\left(\int_0^{xy} z^3\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5\left(\int_0^x y^6\,dy\right)dx = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\,dx = \boxed{\frac{1}{28\cdot 13}}$$

16. d)

$$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\, dz\right) dy\right) dx =$$

$$= \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$ y determinar Ω

$$\Omega : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1 ,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$$

$$\Omega : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1 ,\ |y| \leq \sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$$

$$\Omega : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1 ,\ \boxed{y^2 \leq 1-x^2} ,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$$

$\to y^2 \leq 1-x^2 \Rightarrow \underbrace{y^2+x^2 \leq 1}_{\text{más restrictiva que } x^2 \leq 1}$

$$\boxed{\Omega : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1 ,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}}$$

- Determinar $Proy_{xy}(\Omega) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists z \text{ con } (x,y,z) \in \Omega\}$

$$\boxed{\Omega' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}}$$

- Escribir I como $\int\left(\int\left(\int f(x,y,z)\, dz\right)dx\right)dy$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{-1 \leq x \leq 1}, \underbrace{y^2 \leq 1-x^2}_{\text{tenemos que poner } x \text{ en función de } y} , \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1}_{\text{la } z \text{ ya está en función de las otras}}\}$$

$y^2 \leq 1-x^2 \Rightarrow \underline{x^2 \leq 1-y^2}$

$-1 \leq y \leq 1$

$$I' = I = \int_{y=-1}^{y=1}\left(\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1} f(x,y,z)\, dz\right) dx\right) dy$$