Cálculo I

Guillermo Julián Moreno

UAM - 2011/2012 - C1

30 de enero de 2016 03:18

Apuntes UAM
Doble Grado Mat.Inf.

Código en Github

Índice general

[0]Documento compilado el 30 de enero de 2016 a las 03:18

1. Fundamentos

A rellenar: *Inducción*

Teorema 1.1 (Binomio de Newton).

$$(a+b)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{n}{k} a^n b^{n-k}$$

1.1. Conjuntos

Un conjunto es una colección de elementos. Hay tres formas de definirlo:

1. Enumerar los elementos: $A = \{a, b, c, ...\}$.
2. Operaciones con conjuntos: $A = B \cap C$.
3. A través de una fórmula: $A = \{x \in B \;/\; P(x)\}$

Par ordenado

Definición 1.1 **Par ordenado**. $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Lema 1.2. $(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$.

Producto cartesiano o directo

Definición 1.2 **Producto cartesiano o directo**. *Sean X e Y dos conjuntos. Entonces $X \times Y = \{(a, b\} \;/\; a \in X \; b \in B\}$.*

Si X e Y son finitos, $\#(X \times Y) = \#X \cdot \#Y$

1.2. Sucesiones y límites

Una sucesión es una colección ordenada de números.

Convergencia

Definición 1.3 **Convergencia**. *Una sucesión x_n es convergente a l (o tiene límite l) si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n > n_0 \; |x_n - l| < \varepsilon$.*

n_0 suele depender del ε que tomemos.

Teorema 1.3 (Teorema del Sandwich o principio de comparación). *Sean a_n, b_n, c_n tres sucesiones, y $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n$. Si a_n y c_n convergen al mismo límite α, entonces b_n tiene límite y es α.*

Proposición 1.4 (Cálculo de límites).

$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$$

$$\lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}\ ; \lim b_n \neq 0$$

Lema 1.5. *Si $A \neq \emptyset$ entonces $\exists \{a_n\} \in A$ monótona creciente tal que $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = sup(A)$.*

Sucesión de Cauchy

Definición 1.4 **Sucesión de Cauchy**. *Una sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N} \diagup |y_n - y_{n'}| < \varepsilon\ \forall n, n' \geq n_o$.*

Proposición 1.6. *Toda sucesión de Cauchy tiene límite.*

Subsucesión

Definición 1.5 **Subsucesión**. *Dada una sucesión $\{x_n\}$ se dice que $\{y_k\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$ si existen índices $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tales que $y_k = x_{n_k}$.*

Teorema 1.7 (Principio del palomar). *Sean A y B dos conjuntos tales que $\#(A) < \#(B)$. No existe una aplicación inyectiva entre A y B.*

Es decir, si tenemos m huecos y tenemos que meter $n > m$ elementos, en algún hueco hay más de un elemento.

Teorema 1.8 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión $\{x_n\}$ acotada posee una subsucesión convergente.*

Demostración. Supongamos que $a_0 \leq x_n \leq b_0\ \forall n$. Hay infinitos $\times_n$ distintos. Sea $I_0 = [a_0, b_0]$: una de sus dos mitades, que llamaremos $I_1 = [a_1, b_1]$, contiene infinitos elementos x_n. A su vez, una de sus dos mitades de I_1, a la que llamamos $I_2 = [a_2, b_2]$, contiene infinitos elementos.

Por recurrencia, existen intervalos $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_k = [a_k, b_k]$ cada uno de los cuales contiene infinitos elementos de la sucesión. Además, la longitud de cada uno es la mitad del anterior. Observamos que $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+a} \leq \cdots \leq b_{k+1} \leq b_k \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$. Luego $\exists \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$.

Construimos la subsucesión de forma siguiente. $x_{n_1} \in I_1$, $x_{n_2} \in I_2$ pero con $n_1 < n_2$. Luego $\exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$. □

Corolario 1.9. *Toda sucesión de Cauchy es convergente en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ de Cauchy, luego es acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una sucesión convergente $\{x_{n_k}\}$. Por lo tanto $\exists L = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Entonces, se tiene que $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = L$. □

Lema 1.10. *La serie* $\sum^{\infty} a_n$ *converge si* $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$.

2. Funciones

Función

Definición 2.1 **Función**. *Una relación* $f \subset A \times B$ *es función si* $\forall x \in A \; \exists! \; y \in B$. *Se denota como* $f : A \longmapsto B$.

Antiimagen

Definición 2.2 **Antiimagen**. *Sea* $f : X \longmapsto Y$. *La antiimagen de un conjunto* $B \subset Y$ *es*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \;/\; f(x) \in B\}$$

.

Observación: No confundir la antiimagen con la función inversa. La antiimagen es sólo con conjuntos, la inversa con elementos. Por ejemplo, si x es un elemento y X es un conjunto, $f^{-1}(f(x)) = x$, pero $f^{-1}(f(X))$ no tiene por qué ser igual a X.

Por ejemplo, sea $X = [0, 2]$ y $f(x) = x^2$. La imagen de X es $[0, 4]$. Sin embargo, la antiimagen de $[0, 4]$ es $[-2, 2] \neq X$.

Función inyectiva

Definición 2.3 **Función inyectiva**. *Una función* $f : X \longmapsto Y$ *es inyectiva si elementos distintos tienen imágenes distintas:* $f(x) = f(y) \implies x = y$.

Función sobreyectiva

Definición 2.4 **Función sobreyectiva**. *Una función* $f : X \longmapsto Y$ *es sobreyectiva si* $f(X) = Y$, *es decir:* $\forall y \in Y \exists x \in X \;/\; f(x) = y$.

Función biyectiva

Definición 2.5 **Función biyectiva**. *Una funcion es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Función inversa

Definición 2.6 **Función inversa**. *Sea* $f : X \longmapsto Y$ *una función. La relación inversa es* $f^{-1} : Y \longmapsto X$, *y si es función, se dice que* f^{-1} *es la inversa de* f.

Proposición 2.1. f *es invertible si y sólo si es inyectiva.*

Demostración. Para que $f : X \longmapsto Y$ *sea invertible,* $f^{-1} : Y \longmapsto X$ *tiene que ser función. Es decir, que* $\forall y \in Y \exists! \; x \in X$. *Comprobamos primero la existencia de imagen para cualquier elemento de* Y. *Si* f *es sobreyectiva, entonces tenemos que* $Y = f(X)$. *Por lo tanto, cualquier elemento de* Y *tiene una imagen en* X. *Si no fuese sobreyectiva existiría algún elemento en* Y *que no fuese imagen de un elemento de* X, *así que* f^{-1} *no sería función.*

Pasamos ahora a demostrar la unicidad de la imagen para cualquier elemento de Y. Si f es inyectiva, tenemos que $\forall x, x' \in X\ f(x) = f(x') \iff x = x'$. Cada elemento de X esta relacionado con un sólo un elemento de Y, por lo que cada elemento de Y tiene una sola imagen. Si no fuera inyectiva, algún elemento de Y tendría dos imágenes en X y la relación inversa no sería función. □

Composición

Definición 2.7 **Composición**. *Sean $f : A \longmapsto B$ y $g : C \longmapsto D$, y $f(A) \subset C$. Entonces se define la composición f compuesto con g como $g \circ f : A \longmapsto D$, tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$.*

La composición de funciones cumple la propiedad asociativa ($(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$).

Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

Límite

Definición 2.8 **Límite**. *Sea $f : A \longmapsto \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ se dice que f tiene límte L en el punto a si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ / \ (x \in A \wedge |x - a| < \delta) \implies |f(x) - L| < \varepsilon$.*

Se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Observación: No es necesario que $a \in A$.

Límite lateral

Definición 2.9 **Límite lateral**. *Se define el límite lateral por la derecha de $f : A \longmapsto \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ (con valor L_d como aquel que cumple que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ / \ (x \in A \wedge |x - a| < \delta \wedge x > a) \implies |f(x) - L_d| < \varepsilon$. La definición de límite lateral por la izquierda es análoga, salvo que $x < a$.*

Los límites laterales por la derecha e izquierda se escriben, respectivamente, como

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_d$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_i$$

Límite en el infinito

Definición 2.10 **Límite en el infinito**. *Se dice que $f : A \longmapsto \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ tiene límite L para $x \to +\infty$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \ / \ (x > M \wedge x \in A) \implies |f(x) - L| < \varepsilon$. La definición es análoga cuando $x \to -\infty$, salvo que $x < -M$.*

Teorema 2.2. *f tiene límite L en a si y sólo si toda sucesión $\{x_n\} \subset dom(f)$ con $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ cumple que $\{f(x_n)\}$ forman una sucesión convergente a L ($\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$).*

Continuidad en un punto

Definición 2.11 **Continuidad en un punto**. *Se dice que $f : A \longmapsto \mathbb{R}$ es continua* *en a si cumple que $a \in A \wedge \exists \lim_{x \to a} f(x) \wedge \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Función continua

Definición 2.12 **Función continua**. *Una función es continua si lo es en todos los puntos de su dominio.*

Teorema 2.3 (Lema del sándwich para funciones - Principio de comparación).

$$(f(x) \leq g(x) \leq h(x) \; \forall x \neq c \wedge \exists \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L) \implies \exists \lim_{x \to c} g(x) = L$$

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $\neg c \in \{x_n\}$ y $\lim_{n \to \infty} x_n = c$. Entonces, tenemos que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} h(x_n) = L$. Por el lema del sandwich para las sucesiones, tenemos que $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \implies \exists \lim_{n \to \infty} g(x_n) = L \implies \exists \lim_{x \to c} g(x) = L$. □

Teorema 2.4 (Teorema de los valores intermedios - Teorema de Bolzano). *Si $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < f(b)$, $\forall v \in (f(a), f(b)) \, \exists z \in [a, b] \diagup f(z) = v$.*

Demostración. Sea $a_0 = a$, $b_0 = b$ y $I_0 = [a_0, b_0]$. Sea m_0 el punto medio de I_0. Si $f(m_0) = v$, hemos terminado. Si no, cogemos I_1 como la parte izquierda de I_0 si $f(m_0) > v$ o la parte derecha si $f(m_0) < v$.

Por recurrencia encontramos intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ tal que $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n$, de forma que $f(a_n) < v < f(b_n)$. Se tiene que $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$. z es el límite de a_n, que coincide con el límite de b_n. Por ser f continua, $f(z) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \leq v$ y $f(z) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) \geq v$, por lo tanto $f(z) = v$. □

Acotación de funciones

Definición 2.13 **Acotación de funciones**. *Se dice que $f : A \longmapsto \mathbb{R}$ está acotada superiormente si $\exists M \diagup f(x) \leq M \; \forall x \in A$. La definición es análoga para la cota inferior.*

Teorema 2.5 (Teorema de Weierstrass). *Toda función continua en un intervalo cerrado está acotada y alcanza su máximo y mínimo.*

Teorema 2.6. *Sea $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ inyectiva y continua. Entonces, f es estrictamente creciente o decreciente y f^{-1} es continua.*

Observación: Esto también quiere decir que

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

Demostración. Como f es inyectiva, $\forall a \neq b\ f(a) \neq f(b)$, es decir que $f(a) < f(b)$ o $f(a) > f(b)$. Suponemos el primer caso $f(a) < f(b)$.

Previo: Sabemos que $a < x < b \implies f(a) < f(x) < f(b)$, ya que si $f(a) < f(b) < f(x)$ dado un $v \;/\; f(b) < v < f(x)$ por Bolzano $\exists x_1 \in [a,x];\ x_2 \in [x,b] \;/\; f(x_1) = f(x_2) = v$, contradicción con que la función es inyectiva.

Si la función no fuese estrictamente creciente, entonces $\exists x, y \in [a,b] \;/\; x < y \wedge f(x) > f(y)$. En ese caso, $a < x < y$ y $f(a) < f(y) < f(x)$, lo que es imposible según el argumento previo.

Demostramos la segunda parte, la continuidad de la inversa. Sea $\varepsilon > 0$, $x_0 \in dom f^{-1} \;/\; f(x_0) = y_0$, buscamos $\delta \;/\; |y - y_0| < \delta \implies |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$. Suponemos que $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$. Sea $\delta = min(y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0)$. Entonces $|y_0 - y| < \delta \implies y \in (f(x_0 - \varepsilon, f(x_0 + \varepsilon))$ luego $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$. □

2.1. Derivadas

Derivada

Definición 2.14 **Derivada**. *Sea f una función continua. La derivada en un punto a es*

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se dice que una f es derivable en a si y sólo si $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

La derivada en un punto marca la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Proposición 2.7. *Si $H(x)$ es una recta que pasa por el punto de la gráfica de f $(a, f(a))$ y cumple que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - H(x)}{x - a} = 0$$

entonces f es derivable en a y su derivada en ese punto es la pendiente de H.

Demostración. Sea $H(x) = f(a) + m(x - a)$. Entonces

$$\frac{f(x) - H(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a) - m(x - a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - m$$

que tiende a 0 cuando $x \to a$. Por lo tanto,

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$$

. □

Proposición 2.8 (Cálculo operativo). *Sean f, g derivables en a. Entonces*

- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- *Si* $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$.
- *Si* $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.
- $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Proposición 2.9. *La derivada de una función derivable en un extremo local (máximo o mínimo) vale cero.*

Teorema 2.10 (Teorema de Rolle). *Sea $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R} \,/\, f(a) = f(b)$ continua en el cerrado y derivable en el abierto. Entonces $\exists c \in (a, b) \,/\, f'(c) = 0$.*

Demostración. Sólo es necesario buscar un extremo local en (a, b). Por el teorema de Weierstrass (2.5) f alcanza el máximo y mínimo x_1, x_2 en el intervalo $[a, b]$. Si $x_1 \in (a, b)$ o $x_2 \in (a, b)$, hemos terminado. Si no, el máximo y mínimo están en los extremos y como $f(a) = f(b)$ f es constante y su derivada siempre vale 0. □

Teorema 2.11 (Teorema del valor medio de Lagrange). *Sea $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en el cerrado y derivable en el abierto. Entonces, $\exists t \in (a, b) \,/\, f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Demostración. Sea

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

. Es claro que $h(a) = h(b)$, por lo tanto $\exists c \in (a, b) \,/\, h'(c) = 0$. Derivamos $h(x)$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si $h'(c) = 0$

$$\begin{aligned} h'(c) &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ 0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.12 (Teorema del valor medio de Cauchy). *Sean f y $g : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continuas en el cerrado y derivables en el abierto. Entonces $\exists t \in (a,b)$ tal que*

$$\big(f(b) - f(a)\big)\, g'(t) = \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(t)$$

Si $g(b) \neq g(a)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Demostración. Sea $h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)\, g'(x) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f'(x)$. Es claro $h(a) = h(b)$, así que $\exists t \in (a,b) \diagup h'(t) = 0$. □

Lema 2.13. *Sea $f : (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ derivable. Si $f'(x) \geq 0$ la función es creciente.*

Teorema 2.14 (Regla de L'Hopital). *Sean f y g derivables definidas sobre un intervalo abierto I salvo quizás en un punto $a \in I$. Supongamos*

1. *$g'(t) \neq 0 \forall t \in I$.*
2. *$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$.*
3. *$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$*

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Lema 2.15 (Resolución indeterminaciones 0/0). *Sean $f, g : (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ derivables. Supongamos*

1. *$\lim_x a^+ f = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$.*
2. *$g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.*
3. *$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.*

Entonces,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

3. Polinomios y Teorema de Taylor

Definición 3.1 .Se dice que $f(x)$ es o de una función $\varphi(x)$ cuando $x \to a$ (notación: $f(x) = o(\varphi(x)),\ x \to a$) si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$$

Definición 3.2 .Se dice que f y g tienen orden de contacto superior a n cuando

$$f(x) - g(x) = o(|x-a|^n); x \to a$$

, es decir

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n}$$

.

En particular, f y su recta tangente tienen orden de contacto superior a 1.

Derivada superiore

Definición 3.3 **Derivada superiore**. *Si f es una función derivable en un intervalo I podemos considerar la función derivada $f' : I \longmapsto \mathbb{R}$. Si ésta es a su vez derivable, la segunda derivada es $f''(x)$, y así sucesivamente para la n-ésima derivada.*

Polinomio de Taylor

Definición 3.4 **Polinomio de Taylor**. *Sea f n veces derivable en el entorno de un punto a. Se define el polinomio de Taylor de orden n asociado a f en el punto $x = a$ como*

$$P_n(x) = P_{n,a}f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^n f}{dx^n}(a) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}$$

.

Propiedades del polinomio de Taylor:

1. $P_n(a) = f(a),\ P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a),\ k = 1, 2, \cdots, n.$
2. $\frac{d}{dx}\left(P_n(f)\right)(x) = P_{n-1}f'(x).$
3. f y P_n tienen orden de contacto superior a n para $x \to a$.
4. P_n es el único polinomio de grado menor o igual que n con la propiedad anterior.

Demostración. Propiedad 2:

$$\frac{d}{dx}\left(P_n(f)\right)(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = P_{n-1,a}f'(x)$$

.

Propiedad 1: $P_n(a) = f(a)$ es evidente. $P_n^{(k)} = f^{(k)}(a)$ también lo es a partir de la propiedad 2.

Propiedad 3: Usando L'Hopital siempre que el límite exista:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^n} =^{0/0} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}$$

$P_n^{(n-1)}(x)$ es la ecuación de la recta tangente a $f^{(n-1)}(x)$ en $x=a$, así que

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = 0$$

.

Propiedad 4: Sea Q un polinomio de grado menor o igual que n que cumpla la propiedad 3. Entonce $P_n - Q$ tiene orden de aproximación superior a n en $x\to a$ porque

$$\lim_{x\to a}\frac{P_n(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\left(\frac{P_n(x)-f(x)}{(x-a)^n}+\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}\right) = 0-0=0$$

Si $P_n(x)-Q(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n, entonces

$$0=\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{A_0+A_1(x-a)+\cdots}{(x-a)^n}$$

, por lo que $A_0=0$. Como A_0 es 0, reducimos una potencia y

$$\lim_{x\to a}\frac{A_1+A_2(x-a)+\cdots}{(x-a)^{n-1}}$$

, de forma que A_1 es 0 y así sucesivamente cualquier A_n vale 0. Por lo tanto, $R=0$ y $P_n=Q$. □

Teorema 3.1 (Teorema de Taylor). *Sea f derivable $(n+1)$ veces alrededor del punto a. Entonces, dado un x $\exists t\in(a,x)$ tal que*

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

.

Resto

Definición 3.5 **Resto**. *$R_{n,a}f(x)=f(x)-P_{n,a}f(x)$ se denomina resto y el teorema nos da la forma de Lagrange de este resto.*

4. Geometría de gráficas de funciones

Asíntota vertical

Definición 4.1 **Asíntota vertical**. *Se dice que f tiene una asíntota vertical por la derecha para $x = c$ si $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$. La definición es análoga para la asíntota vertical por la izquierda.*

Asíntota oblicua

Definición 4.2 **Asíntota oblicua**. *Se dice que f tiene una asíntota horizontal para $x \to \pm\infty$ si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = m$.*

5. Integrales

5.1. Integral de Riemann

Suma superior e inferior

Definición 5.1 **Suma superior e inferior**. *La suma superior asignada a una partición $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ de un conjunto $[a, b]$ se define como*

$$S_p f = \sum_{k=1}^{n} (\textit{long. } I_k) \sup_{I_k} f$$

De forma análoga, se define la suma inferior (notación $s_p f$).

Función integrable

Definición 5.2 **Función integrable**. *Dada $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ acotada, se dice que f es integrable (Riemann) si*

$$\sup s_p f = inf S_p f$$

y se denota por

$$\int_a^b f \ \equiv \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposición 5.1.

$$f \textit{ integrable} \iff \forall\varepsilon > 0, \exists P \text{ particion} \ / \ S_P f - s_P f \leq \varepsilon$$

Proposición 5.2. *Si $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable.*

Observación: Algunas funciones con una cantidad numerable de discontuinidades son integrables.

Propiedades de la integral: Sean f y g dos funciones integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$\int_b^a (f + g) = \int_b^a g + \int_b^a g$$

$$\int_b^a \alpha f = \alpha \int_b^a f$$

$$f \leq g \implies \int_b^a f \leq \int_b^a g$$

$$m \leq f \leq M \implies m \leq \frac{1}{b-a} \int_b^a f \leq M$$

$$\left| \int_b^a f \right| \leq \int_b^a |f|$$

$$c \in (a,b) \implies \int_b^a f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Proposición 5.3. *Si f no es positiva, entonces llamamos $f_+ = max(f(x), 0)$ y $f_- = -min(f(x), 0)$. f es integrable si y sólo si f_+ y f_- lo son, y*

$$\int_b^a f = \int_b^a f_+ - \int_b^a f_-$$

Función Lipschitziana

Definición 5.3 **Función Lipschitziana**. *Una función es Lipschitziana si para cierta constante k $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.*

Teorema 5.4. *Si f es integrable y acotada, entonces la función $F(x) = \int_a^x f$ es continua y Lipschitziana.*

Teorema 5.5 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Si F es continua en $[a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.*

Demostración. Fijado $x_0 \in (a,b)$ queremos ver que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

.

Usamos que f es continua en x_0: dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \ / \ |x_0 - t| < \delta \implies |f(x_0) - f(t)| < \varepsilon$. Sea $|h| < \delta$, $h > 0$. Entonces

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt$$

y

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt \leq f(x_0) + \varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ dt - f(x_0) \leq \varepsilon$$

Por lo tanto el límite existe y es $f(x_0)$. $\square$

Consecuencia: $F(x)$ es una primitiva de f si es continua y $F(a) = 0$.

Si $G(x)$ es otra primitiva ($G' = f$) entonces $F(X) = G(X) + C$, donde C es una constante.

En particular,

$$0 = F(a) = G(a) + C \implies C = -G(a)$$

Luego

$$\int_a^b f(t)dt \overset{\text{TFC}}{=} F(b) = G(b) + c = G(b) - G(a)$$

Regla de Barrow

y a esto lo llamamos la **Regla de Barrow**.

5.2. Integrales impropias

Usamos los métodos de integración más general cuando f no es acotada o cuando la región de integración no es acotada.

$$\int_a^\infty f = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(t)\ dt$$

Sean $\varphi(x),\ \psi(x)$ derivables. Entonces

$$H(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt$$

es derivable y su derivable es fácil de hallar si nos damos cuenta de que, si llamamos $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ entonces $H(x) = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$.

Índice alfabético