

$$1. y' = \frac{2x^3}{1+x^2+y^2}$$

a) Existencia y unicidad en  $x \in \mathbb{K}$ .

$$y(0) = 0$$

(a)

i)  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$

(Razón:  $f$  es cociente de dos polinomios con denominador que nunca se anula  $\geq 1$ ).

ii)  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4x^3y}{(1+x^2+y^2)^2}$ , continua en  $\mathbb{R}^2$  por la misma razón que en i.

HASTA AQUÍ EXISTENCIA Y UNICIDAD LOCAL —

$$\text{iii) } \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \frac{4|x|^3|y|}{(1+x^2+y^2)^2} = 4|x|^3 \frac{|y|}{(1+x^2+y^2)^2} \leq 4|x|^3 \frac{4}{2(1+x^2+y^2)} \leq 2|x|$$

$2|x| \frac{x^2}{1+x^2+y^2} \leq 2|x|$   
 $\forall \leftarrow$  dos opcio  
 $\downarrow$

$$(*) \begin{cases} |y| \leq \frac{1+y^2}{2} \\ |y| \leq \frac{1+x^2+y^2}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{|y|}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$(0 \leq (|y|-1)^2 = |y|^2 + 1 - 2|y|, \text{ e.d. } 2|y| \leq y^2 + 1)$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq 2|x|^3 \leq 2M^3 \quad \text{si } |x| \leq M$$

e.d.,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  está acotada en  $[-M, M] \times \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$  en  $[-M, M]$   
 $T_{\text{ma}}^{\text{global}}$

Como  $M$  puede ser cualquiera,  
 $\exists!$  en  $\mathbb{R}$ .

$$1) |y(x)| \leq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = \frac{2x^3}{1+x^2+y^2}$$

•  $x \geq 0$

$$0 \leq y'(x) = \frac{2x^3}{1+x^2+y^2} \leq 2x \quad \uparrow x \geq 0$$

$$\underbrace{\int_0^x 0 \, ds}_0 \leq \underbrace{\int_0^x y'(s) \, ds}_{y(x) - y(0)} \leq \int_0^x 2s \, ds = x^2 \Rightarrow$$

Importante

$$\Rightarrow y(x) \geq 0 \Rightarrow |y(x)| = y(x) \leq x^2$$

•  $x \leq 0$

$$2x \leq y'(x) = \frac{2x^3}{1+x^2+y^2} \leq 0$$

Hacemos lo mismo

TRA POSIBILIDAD PARA HACERLO:

$$\bar{y}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} y(-x) \Rightarrow \bar{y}'(x) = -y'(-x) = \frac{-2(-x)^3 y(-x)}{1+(-x)^2 + (y(-x))^2}$$

$$\text{e.d. } \bar{y}'(x) = \frac{2x^3}{1+x^2+\bar{y}^2} \xrightarrow{\text{unic.}} \bar{y}(x) = y(x)$$

$$\bar{y}(0) = 0$$

$$\parallel$$

$$y(-x)$$

2.  $X' = AX$

$$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z(t) = \underbrace{e^{(1+i)t}}_{e^t \cdot \underbrace{e^{it}}_{\cos t + i \sin t}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) 3 soluciones reales indep.  $\hookrightarrow \cos t + i \sin t$

$$X_2(t) = \operatorname{Re}(Z(t)) = e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3(t) = \operatorname{Im}(Z(t)) = e^t \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t + \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ X_1(0) & X_2(0) & X_3(0) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

wros.  $\Rightarrow \det(X_1(t), X_2(t), X_3(t)) \neq 0 \quad \forall t$

b)  $\mathbb{F}$  tal que  $\mathbb{F}(0) = \operatorname{Id}$ .

$\Phi(t)$  fundam.,  $\Phi(0) = \operatorname{Id}$

i)  $\mathbb{F}(t)B$  fundamental si  $\det(B) \neq 0$   $B$  constante

$$B = \mathbb{F}(0)^{-1}$$

$$\Phi(t) = \mathbb{F}(t) \cdot \mathbb{F}(0)^{-1}$$

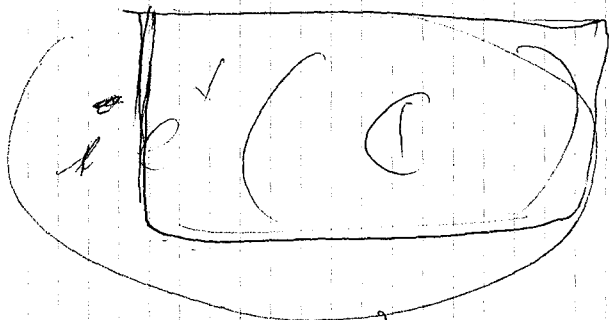
c)  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1+i$ ,  $\lambda_3 = 1-i$

$\Phi(t) = e^{At}$  explicar esto.

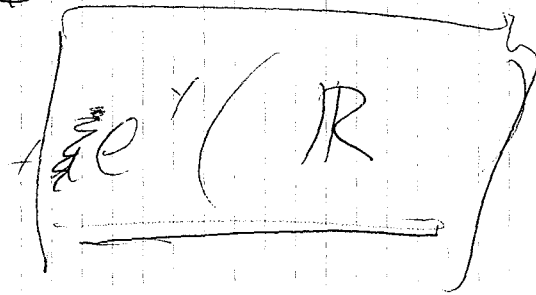


$$e^{+t} (\cos t + i \sin t) \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$e^{+t} \left\{ \underbrace{\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{REAL}} + \underbrace{i \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{C}} + \underbrace{i \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{C}} + \underbrace{\sin t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Real}} \right\}$$



Im  $z(t)$



Re  $z(t)$

$$z(t) = \textcircled{a} + \textcircled{b}i$$

