HOJA 3

$\boxed{3.}$ $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 6 \ , \ y'(0) = 10 \end{cases}$

Razón: (*)
$$\begin{cases} y = e^{\lambda x} \\ y' = \lambda e^{\lambda x} \\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{cases} \rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$$(*) \ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Solución general: $\boxed{y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}}$

Como $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$

$$y(0) = 6 \iff C_1 + C_2 = 6$$
$$y'(0) = 10 \iff C_1 + 3C_2 = 10$$
$$-2C_2 = -4 \Rightarrow \boxed{C_2 = 2} \Rightarrow \boxed{C_1 = 4}$$

$\boxed{5.}$ Hallar una solución particular de $y'' + y = \cos(x + \alpha)$ donde α es constan

NOTA: La solución general de esta ecuación sería $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea (en este caso $y'' + y = 0$) e y_p es una solución particular de la ecuación completa.

Hemos visto 2 formas de calcular una solución particular de la ecuación:

1) Variación de las constantes.
2) Coeficientes indeterminados

Vamos a hacer este ejercicio de las dos formas

1) La solución de la ecuación homogénea es la que resuelve $y'' + y = 0$ (E_h)

El polinomio característico asociado a esta ecuación es $\lambda^2 + 1 = 0$. Por tanto, las raíces del polinomio característico son $\lambda = \pm i$.

Esto significa que la solución general de E_h se puede escribir como $y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

Nota: Si las raíces del polinomio característico fuesen $\lambda = \alpha \pm i\beta$, entonces la solución general de la ecuación homogénea se escribiría como $\boxed{y_h(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)}$.

Queremos buscar una solución particular de la ecuación completa por el método de la <u>variación de las constantes</u>, es decir, buscamos que $y_p(x) = C_1(x) \underbrace{\cos(x)}_{V_1} + C_2(x) \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{V_2}$.

Para hallar quien es $C_1(x)$ y $C_2(x)$, como hicimos con las ecuaciones de primer orden, derivamos y_p y sustituimos en la ecuación completa:

$y_p'(x) = C_1'(x) \cos x - C_1(x) \operatorname{sen} x + C_2'(x) \operatorname{sen} x + C_2(x) \cos x$

→ SIMPLIFICACIÓN: <u>Consideramos</u> $\boxed{C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \operatorname{sen} x = 0}$

(en general, la condición sería $C_1'(x) V_1 + C_2' V_2 = 0$, donde V_1 y V_2 son las soluciones linealm. independientes de E_h).

y obtenemos que $y_p'(x) = -C_1(x) \operatorname{sen} x + C_2(x) \cos x$

Volvemos a derivar: $y_p''(x) = -C_1'(x) \operatorname{sen} x - C_1(x) \cos x + C_2'(x) \cos x - C_2(x) \operatorname{sen}$

o sustituimos en la ecuación: $y_p'' + y_p' = \cos(x + \alpha)$

$-C_1'(x) \operatorname{sen} x - \cancel{C_1(x) \cos x} + C_2'(x) \cos x - \cancel{C_2(x)} \operatorname{sen} x + \cancel{C_1(x) \cos x} + \cancel{C_2(x)} \operatorname{sen} x = \cos(x+$

Esto es: $\boxed{C_1'(x)(-\operatorname{sen} x) + C_2'(x) \cos x = \cos(x + \alpha)}$

Por tanto, mi solución particular debe cumplir:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \operatorname{sen} x = 0 \\ C_1'(x)(-\operatorname{sen} x) + C_2'(x) \cos x = \cos(x + \alpha) \end{cases}$$

Matricialmente, esto se puede escribir como:

$$\begin{array}{c} \\ V_1 = \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \cos x & \overset{V_2}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{sen} x}} \\ \underset{V_1'}{\underset{\shortparallel}{-\operatorname{sen} x}} & \underset{V_2'}{\underset{\shortparallel}{\cos x}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x+\alpha) \end{pmatrix} = r(x)$$

y para resolverlo: • $C_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \cos(x+\alpha) & \cos x \end{vmatrix}}{W} = \dfrac{-\operatorname{sen} x \cos(x+\alpha)}{W} = -\operatorname{sen} x \cos(x$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \neq 0$$

Luego $C_1(x) = -\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos(x+\alpha)\, dx = \int -\operatorname{sen} x\left(\cos x \cos \alpha - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha\right)d$

$$= \cos\alpha \cdot \frac{\cos^2 x}{2} + \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right)$$

• $C_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \cos(x+\alpha) \end{vmatrix}}{W} = \dfrac{\cos x \cos(x+\alpha)}{W} = \cos x \cos(x+\alpha)$

Luego $C_2(x) = \displaystyle\int \cos x \cdot (\cos x \cos\alpha - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\alpha)\, dx = \cos\alpha\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right) +$

$+ \operatorname{sen}\alpha \cdot \dfrac{\cos^2 x}{2}$, y así tendríamos por este método una solución particular de la forma $y_p(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\operatorname{sen} x$

NOTA: En general para el método de variación constantes: Para ec. de 2º orden si queremos hallar una solución particular por este método basta con resolver $\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_1' & V_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}$ con $r(x)$ el lado derecho de la ecuación $y'' + py' + qy = r(x)$

Sin embargo, este ejercicio se puede atacar de una forma mucho más fácil utilizando el método 2.

2) El método de los coeficientes indeterminados consiste en probar soluciones particulares que están relacionadas con la función a la derecha de la ecuación (en este caso, $\cos(x+\alpha)$)

Nótese que $\cos(x+\alpha) = \cos x \underbrace{\cos\alpha}_{\text{constante}} - \operatorname{sen} x \underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{\text{constante}}$

Si sen$x$ y cos$x$ no fuesen soluciones de la ecuación homogénea habría que ensayar con soluciones $y_p(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$, A, B constantes. Pero como en nuestro caso sen$x$ y cos$x$ sí son soluciones de la ec. homogénea, tenemos que probar con soluciones de la forma $y_p(x) = Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x$.

Nota: Si la ecuación fuese $y'' - 4y' + 3y = e^x$ (ej. 3 cambiando el lado derecho), como en este caso e^x es. solución de la ecuación homogénea, para buscar la solución particular por el método de los coef. indeterminados habría que probar con $y_p(x) = Bxe^x$, $B \equiv cte$

Si hubiese raíces dobles en el polinomio característico, por ejemplo: $y'' - 2y' + y = e^x$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \longrightarrow \text{raíz } \lambda = 1 \text{ (doble)}$$

La solución general de la ecuación de la homogénea es $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$

↳ le añadimos un polinomio de grado 1 para que la solución xe^x sea lin. indep. de e^x.

En este caso, para buscar una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados probaría con soluciones del tipo: $y_p(x) = Cx^2 e^x$

↳ pol. de segundo orden

Volviendo a nuestro ejercicio particular, ensayamos soluciones de la forma $y_p(x) = Ax\cos x + Bx\,\text{sen}\,x$

Derivamos y sustituimos en la ecuación:

$$y_p'(x) = A\cos x - Ax\,\text{sen}\,x + B\,\text{sen}\,x + Bx\cos x$$

$$y_p''(x) = -2A\,\text{sen}\,x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\,\text{sen}\,x$$

Entonces: $y_p''(x) + y_p(x) = \cos(x+\alpha) = \cos x\cos\alpha - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,\alpha \iff$

$$\iff (-2A - \cancel{Bx})\,\text{sen}\,x + (2B - \cancel{Ax})\cos x + \cancel{Ax\cos x} + \cancel{Bx\,\text{sen}\,x} =$$

$$= \cos x\cos\alpha - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,\alpha \iff -2A\,\text{sen}\,x + 2B\cos x = \cos x\cos\alpha - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\iff \begin{cases} 2A = \text{sen}\,\alpha \\ 2B = \cos\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{2} \\ B = \dfrac{\cos\alpha}{2} \end{cases}$$

Por tanto, una solución particular sería

$$\boxed{y_p(x) = \frac{\text{sen}\,\alpha}{2}\,x\cos x + \frac{\cos\alpha}{2}\,x\,\text{sen}\,x}$$

o.) Probar por el método de la variación de las constantes aplicado a $y''+y=f(x)$ obtenemos como sol particular

$$y(x)=\int_0^x f(s)\,\mathrm{sen}(x-s)\,ds$$

$$y''+y=0 \longrightarrow \lambda^2+1=0 \longrightarrow \lambda=\pm i$$

$$y_h(x)=C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}x$$

$$\begin{pmatrix}\cos x & \mathrm{sen}x\\ -\mathrm{sen}x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ f(x)\end{pmatrix} \qquad W=\begin{vmatrix}\cos x & \mathrm{sen}x\\ -\mathrm{sen}x & \cos x\end{vmatrix}=1$$

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \mathrm{sen}x\\ f(x) & \cos x\end{vmatrix}}{W}=-f(x)\,\mathrm{sen}x \Leftrightarrow C_1(x)=-\int_0^x f(s)\,\mathrm{sen}(s)\,ds$$

$\leftarrow$ enunciado

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\mathrm{sen}x & f(x)\end{vmatrix}}{W}=\cos x\, f(x) \Leftrightarrow C_2(x)=\int_0^x \cos f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow y_p(x)=C_1(x)\cos x + C_2(x)\,\mathrm{sen}x=$$

$$=-\int_0^x \cos x\,\mathrm{sen}(s)\,f(s)\,ds + \int_0^x \mathrm{sen}x\cos(s)\,f(s)\,ds=$$

$$=\int_0^x \underbrace{\left(\mathrm{sen}x\cos(s)-\cos x\,\mathrm{sen}(s)\right)}_{\mathrm{sen}(x-s)} f(s)\,ds$$

11. Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ soluciones de $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$.

a) Probar que si tienen un cero en común en una de ellas es múltiplo constante de la otra.

$\exists t_0 : \ x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0 \qquad (x_1, x_2 \not\equiv 0)$

$y(t) = x_1 + Cx_2 \qquad$ (si $y(t)=0$, entonces $x_1(t) = -Cx_2(t)$)

donde C hace que $x_1'(t_0) + Cx_2'(t_0) = 0 \qquad$ (e.d. $C = \dfrac{-x_1'(t_0)}{x_2'(t_0)}$)

$y(t)$ cumple:

$$\left.\begin{aligned} & x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0 \\ & x(t_0) = 0 \\ & x'(t_0) = 0 \end{aligned}\right\} \text{(PVI)} \longleftarrow$$ la solución $x \equiv 0$ es solución del (PVI).

Por unicidad de soluciones, necesariamente, $y = 0$.

b) Probar lo mismo si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen máximos o mínimos relativos en el mismo punto.

$\exists t_0 : \ x_1'(t_0) = x_2'(t_0) = 0$

$y(t) =$