**HOJA DE EJERCICIOS 3: Combinatoria** **EDyL 2014-2015**

**[Fecha de publicación: 2014/10/14]**
**[Fecha de entrega: 2014/10/23, 09:00]**
**[Resolución en clase: 2014/10/23]**

**NOTA:** Incluye explicaciones para tus respuestas. Un ejercicio cuya respuesta es correcta, pero que no incluye explicaciones podrá ser valorado como incompleto.

**EJERCICIO 1:** Un examen consta de 10 preguntas tipo test, cada una de las cuales tiene dos posibles respuestas (no se pueden dejar preguntas en blanco). ¿Cuántos estudiantes deben hacer el examen para garantizar que al menos dos de ellos responden exactamente igual a las 10 preguntas?

SOLUCIÓN: Hay 2^10 = 1024 formas de hacer el examen, por tanto por el principio del palomar se necesitan al menos 1024 + 1 = 1025 estudiantes.

**EJERCICIO 2:** En el juego de las 3 en raya los jugadores van marcando las casillas del tablero con los símbolos 'X' y 'O' alternativamente hasta que o bien uno de los dos consigue marcar tres casillas alineadas (horizontal, vertical o diagonalmente) o bien no quedan más casillas por marcar. Siempre comienza la partida el jugador que marca las 'X'. ¿Cuántas formas distintas hay para terminar una partida (posiciones terminales) marcando sólo 5 casillas?

Un ejemplo de posición terminal que cumple las condiciones del enunciado es la que aparece a la derecha.

| | | |
|---|---|---|
| X | | O |
| | X | O |
| | | X |

SOLUCIÓN: Si sólo se han marcado 5 casillas tiene que haber 3 'X' alineadas (del primer jugador) y dos 'O' adicionales del segundo jugador. Hay 8 formas distintas de alinear las 3 'X' (3 filas, 3 columnas y 2 diagonales). Para cada una de ellas las 'O' pueden estar en 6 casillas, es decir hay C(6,2) = 15 formas de poner las 'O' en el tablero. El resultado es por tanto 8*15 = 120.

**EJERCICIO 3:** En una pantalla del juego *Angry Birds* aparecen dos pájaros (rojo y amarillo) y cinco cerdos. En el juego se lanzan los pájaros de uno en uno, primero el rojo y después el amarillo, con el objetivo de alcanzar a los cerdos. En cada lanzamiento de un pájaro se puede fallar o alcanzar a un número de cerdos (como máximo, los que haya en la pantalla en el momento del lanzamiento).

(a) Suponiendo que los cerdos son indistinguibles, ¿cuántos resultados distintos se pueden dar después de haber lanzado los dos pájaros? Cada resultado posible consiste en el número de cerdos alcanzados por cada pájaro, por ejemplo el pájaro rojo alcanza a 3 cerdos, el amarillo a 1 cerdo y sobrevive 1 cerdo.

SOLUCION: 5 bolas indistinguibles (cerdos) y 3 cajas distinguibles (pájaro rojo + pájaro amarillo + 1 caja para los cerdos que sobreviven), C(7,2) = 21

(b) La pantalla se supera cuando todos los cerdos son alcanzados por alguno de los pájaros. ¿Cuántos resultados distintos permiten superar la pantalla?

SOLUCIÓN: 5 bolas indistinguibles (cerdos) y 2 cajas distinguibles (pájaro rojo + pájaro amarillo), C(6,1) = 6

(El pájaro rojo puede matar a 0, 1, 2, 3, 4 o 5 cerdos, el amarillo al resto)

(c) ¿Cuántos resultados distintos permiten superar la pantalla si los cerdos son distinguibles?

SOLUCIÓN:

Para superar la pantalla, todos los cerdos tienen que ser alcanzados o bien por el pájaro amarillo, o bien por el pájaro rojo. Dado que hay 5 cerdos, el total de posibles resultados es $2^5 = 32$.

**EJERCICIO 4:** En una versión simplificada de la lotería de navidad se extrae un único número del bombo (el "gordo"). Reciben premio todos los números que coinciden (tanto en el valor como en la posición) en tres o más cifras con el gordo. Todos los números son de 5 cifras. Por ejemplo si el gordo es el 12345, el número 19395 recibe premio (tres coincidencias), pero el número 54321 no (sólo una coincidencia).

(a) ¿Cuántos números reciben premio?

Números que coinciden en 5 cifras: sólo 1 (el gordo).

Números que coinciden en 4 cifras: C(5,4)*9 = 5*9 = 45, 5 posibilidades para situar la cifra que no coincide, y 9 posibles valores para esta.

Números que coinciden en 3 cifras: C(5,3)*9*9 = 10*9*9 = 810

El resultado es la suma 1 + 45 + 810 = 856

(b) Suponiendo que el gordo no contiene la cifra 1. ¿Cuántos números premiados contienen al menos un 1.

Números que coinciden en 5 cifras: ninguno (el gordo no contiene unos)

Números que coinciden en 4 cifras: 5, 5 posibilidades para situar la cifra que no coincide, que debe ser un 1.

Números que coinciden en 3 cifras: C(5,3)*(8+8+1) = 10*17 = 170, C(5,3) es el número de formas para elegir las 3 coincidencias, en las otras dos posiciones tiene que haber al menos 1 uno (8 posibilidades para 1-X, 8 para X-1 y 1 para 1-1, X es distinto de 1 y de la cifra correspondiente en el gordo).

El resultado es la suma 5 + 170 = 175

(c) ¿Cuántos números distintos tengo que comprar para asegurarme un premio?

Para asegurar un premio tengo que comprar tantos números como casos sin premio más uno: 100000 – 856 + 1 = 99145. Esta solución presupone que compro los números al azar.

También sería posible comprar los números de una forma más inteligente. Si compro por ejemplo los 1000 números que empiezan por 00 también me aseguro un premio, pues las 3 últimas cifras del gordo coincidirán con alguno de ellos.

**EJERCICIO 5:** En una cena de nochevieja se reúnen 20 personas. Como no tienen una mesa grande en la que quepan todos, deciden usar dos mesas. En una de ellas caben 12 personas y en la otra 8.

(a) ¿De cuántas maneras pueden sentarse a cenar si la posición que ocupe cada persona en su mesa es irrelevante?

C(20,8)

(b) ¿De cuántas maneras pueden sentarse a cenar si cada posición en cada una de las mesas es diferente?

20!

(c) Las 20 personas son 10 mujeres y 10 hombres. ¿Cuál es la respuesta al apartado (a) si en cada mesa tiene que haber el mismo número de mujeres y de hombres?

C(10,4)*C(10,4)

**EJERCICIO 6:** En la madrugada del día 6 de enero, los tres reyes magos entran en una casa con 8 regalos y se encuentran con 3 zapatos.

(a) ¿De cuántas formas pueden colocar los regalos en los zapatos, suponiendo que todos los regalos son iguales?

8 bolas indistinguibles a colocar en 3 cajas: CR(3,8) = C(10,2) = 45

(b) ¿De cuántas formas pueden colocar los regalos en los zapatos, suponiendo que todos los regalos son iguales, si no quieren dejar a nadie sin regalos (todos han sido muy buenos)?

Ponemos 1 regalo en cada zapato y los 5 restantes los repartimos como en el apartado (a): 5 bolas en 3 cajas: CR(3,5) = C(7,2) = 21

(c) Los 8 regalos son en realidad 2 libros (iguales), 2 discos (iguales), 2 bufandas (iguales) y 2 gorros (iguales). ¿De cuántas formas pueden colocarse los regalos en los zapatos en este caso si no importa que alguien se quede sin regalos (no han sido tan buenos)?

Para cada tipo de regalo tenemos que decidir en qué zapatos lo ponemos. Esto es un problema equivalente a colocar 2 bolas indistinguibles en 3 cajas: CR(3,2) = C(4,2) = 6

Como esto hay que repetirlo para cada regalo, el resultado es 6x6x6x6 = 1296

(d) ¿Cuál sería el resultado del apartado (c) si no se quiere que nadie tenga dos regalos iguales?

Para cada tipo de regalo, sólo tenemos que decidir quién se queda sin él, y para esto hay tres formas posibles. El resultado es por tanto 3x3x3x3 = 81

**EJERCICIO 7:** Durante la primera fase del mundial de fútbol de Brasil (fase de grupos) los equipos juegan una liguilla por grupos. Hay un total de 8 grupos de 4 equipos cada uno. Los dos mejores de cada grupo pasan a la siguiente fase, en la que los enfrentamientos se producen de acuerdo a la tabla de cruces adjunta. Por ejemplo, el partido 49 enfrenta al primer clasificado del grupo A con el segundo clasificado del grupo B, y el partido 57 enfrenta a los ganadores de los partidos 49 y 50.

**a)** ¿Cuántos resultados distintos pueden darse para el primer y el segundo clasificados del grupo B?

Solución: 4*3 = 12 (el primero se puede elegir entre 4 equipos, el segundo entre los 3 restantes).

**b)** ¿En cuántos de los anteriores se clasifica España?

Solución: 3 + 3 = 6 (España primera y 3 posibles segundos, o España segunda y 3 posibles primeros).

**c)** ¿Cuántos resultados distintos pueden darse para el primer y segundo clasificados de todos los grupos?

Solución: 12^8 = 429981696 (12 formas distintas para cada grupo y 8 grupos).

**d)** ¿De cuántas maneras distintas se puede rellenar la tabla de cruces adjunta?

Solución: 12^8 * 2^14 (12^8 formas de terminar la fase de grupos, 2^8 resultados posibles para octavos, 2^4 para cuartos, 2^2 para semifinales).

**EJERCICIO 8:**

**a)** ¿De cuántas maneras distintas se puede rellenar la tabla de cruces suponiendo que España gana el mundial?

Solución: España puede ganar el mundial quedando primera o segunda de su grupo.
Si queda primera:
12^7 * 3 para fase de grupos
2^7 para octavos
2^3 para cuartos

2 para semifinales
1 para final

El resultado sería el producto de los números anteriores:

3 * 12^7 * 2^11

Si queda segunda:

Lo mismo que antes, 3 * 12^7 * 2^11

Por tanto el resultado final es 3 * 12^7 * 2^11 * 2 = 440301256704

**b)** ¿De cuántas maneras se puede rellenar la tabla de cruces suponiendo que Brasil (grupo A) y España (grupo B) se enfrentan en algún momento?

Solución: España y Brasil sólo se pueden cruzar en los partidos 49, 51, 63 ó 64.

Si se cruzan en el partido 49 Brasil tiene que ser primera del grupo A y España segunda del grupo B:
T1 = 12^6 * 3 * 3 * 2^14

Si se cruzan en el partido 51 Brasil tiene que ser segunda del grupo A y España primera del grupo B:
T2 = 12^6 * 3 * 3 * 2^14

Si se cruzan en el partido 63 España y Brasil son las dos primeras de grupo o las dos segundas, y además los resultados de los partidos 49, 51, 57, 59, 61 y 62 están determinados:
T3 = 2 * 12^6 * 3 * 3 * 2^8

Si se cruzan en el partido 64 España y Brasil son las dos primeras de grupo o las dos segundas, y además los resultados de los partidos 49, 51, 57, 59, 61, 62 están determinados:
T4 = 2 * 12^6 * 3 * 3 * 2^8

El resultado final es la suma T1 + T2 + T3 +T4

**EJERCICIO 9:** Supongamos que Portugal gana el mundial y Cristiano Ronaldo marca 9 goles en total.

a) ¿De cuántas maneras pueden distribuirse esos 9 goles en los partidos jugados por Portugal?

Solución: Equivalente a meter 9 bolas en 7 cajas, C(15,9)

b) ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los 9 goles de Cristiano Ronaldo si no marca más de 4 goles en ningún partido?

Solución: Del número anterior hay que restar los casos en los que hay al menos 5 goles en alguno de los partidos (no puede haber 5 goles en dos partidos distintos):
C(15,9) – 7*C(10,4)

c) ¿De cuántas maneras pueden distribuirse si marca al menos un gol en todos los partidos?

Solución: Asignamos un gol a cada partido, y los 2 restantes los repartimos, C(8,2)

d) ¿Y si en dos de los partidos marca exactamente 3 goles?

Solución:
Primero elegimos los 2 partidos en los que marca 3 goles, C(7,2)
Luego repartimos los 3 goles restantes en los 5 partidos que quedan, C(7,3)
El resultado es el producto, C(7,2)*C(7,3)

**EJERCICIO 10:** En la selección española hay 23 jugadores convocados para el mundial, de los cuales 3 son porteros, 7 son defensas, 9 son centrocampistas y 4 son delanteros.

a) ¿De cuántas maneras se puede formar la alineación de 11 jugadores para un partido?

Solución: C(23,11)

b) ¿De cuántas maneras se puede formar la alineación si tiene que haber un portero, 4 defensas, 4 centrocampistas y 2 delanteros?

Solución: 3 * C(7,4) * C(9,4) * C(4,2)

**EJERCICIO 11:** En el juego del ajedrez se utiliza un tablero de 64 casillas, 32 blancas y 32 negras. Queremos colocar las piezas blancas sobre el tablero (8 peones, 2 torres, 2 caballos, 2 alfiles, 1 rey y 1 reina) y supondremos que las piezas de un mismo tipo son indistinguibles.

a) ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse las piezas blancas sobre el tablero si en cada casilla puede haber como máximo una pieza?

Solución:

Formas de colocar los peones: C(64,8)
Formas de colocar las torres: C(56,2)
Formas de colocar los caballos: C(54,2)
Formas de colocar los alfiles: C(52,2)
Formas de colocar el rey: C(50,1) = 50
Formas de colocar la reina: C(49,1) = 49

El resultado es el producto de los números anteriores.

b) ¿De cuántas formas pueden colocarse las piezas blancas sobre el tablero si tenemos en cuenta que uno de los alfiles debe estar en una casilla blanca y el otro en una negra?

Solución:

En este caso empezamos colocando los alfiles:

Formas de colocar el primer alfil: 32
Formas de colocar el segundo alfil: 32
Formas de colocar los peones: C(62,8)
Formas de colocar las torres: C(54,2)
Formas de colocar los caballos: C(52,2)
Formas de colocar el rey: C(50,1) = 50
Formas de colocar la reina: C(49,1) = 49

El resultado es el producto de los números anteriores.

**EJERCICIO 12:** En mi armario tengo 3 pares de zapatos, 5 pantalones, 8 camisas y 2 sombreros. Cada vez que salgo a la calle por la mañana me pongo un par de zapatos, un pantalón, una camisa y un sombrero.

a) ¿Cuántos días como máximo tienes que esperar a la puerta de mi casa para verme salir dos veces con la misma ropa?

Solución: 3*5*8*2 + 1 = 241

b) Toda mi ropa está numerada, los zapatos del 1 al 3, los pantalones del 1 al 5, las camisas del 1 al 8 y los sombreros del 1 al 2. ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior si nunca me pongo dos prendas que tengan el mismo número?

Solución:

Puedo elegir el sombrero de 2 formas distintas.
Una vez elegido sombrero, puedo elegir zapatos de 2 formas distintas.
Una vez elegido sombrero y zapatos, puedo elegir pantalón de 3 formas distintas.
Una vez elegido sombrero, zapatos y pantalón, puedo elegir camisa de 5 formas distintas.

Por tanto la solución es 2*2*3*5 + 1 = 61