Economía y finanzas matemáticas
Optativa del grado en Matemáticas, UAM, 2020-2021

Hoja 2 (instrumentos derivados)

CONTRATOS FORWARD

1. a) El precio de la onza de oro está hoy a 1300 euros. En el mercado se cotizan contratos forward a 1 año con precio de compraventa 1321 euros (coste hoy, 0). Suponiendo que se puede prestar/pedir prestado a un tipo (anual, continuo) del 1 %, diseña una oportunidad de arbitraje.

b) Tomamos en consideración ahora los costes de almacenamiento del oro. Digamos que d es el coste mensual (en euros) de almacenamiento de una onza de oro. ¿A partir de qué valor de d desaparece la oportunidad de arbitraje anterior?

2. La cotización hoy de una cierta acción es $S_0 = 100$ euros. El tipo de interés anual (continuo) es del 1 %.

a) Entramos en un contrato forward a 6 meses. ¿Cuál debe ser el precio F_0 que se deberá fijar para la compraventa si queremos que el contrato cueste hoy 0?

b) Supongamos que F_0 es 103. ¿Habría una oportunidad de arbitraje? Si es así, diséñala.

c) Repite los cálculos del apartado a) si sabemos que se pagará un dividendo de 5 euros por acción dentro de 3 meses.

3. En tu cartera tienes un contrato forward comprado en el que se establece un precio de compraventa K_1 en tiempo T para una determinada acción; y un forward vendido, con las mismas características, salvo que el precio de compraventa es K_2 (con $K_2 > K_1$). ¿Cuál es el perfil de posibles flujos de tu cartera? Interprétalo.

FRAS Y SWAPS

4. Supongamos que los bonos cupón cero de nominal 100 a plazos 1 año y 1 año y seis meses se cotizan hoy a 99 y 97 euros respectivamente.

a) En un FRA a un año para el periodo 1 año → 1.5 años, una parte paga un tipo de interés fijo K, y la otra el tipo simple a seis meses que se fije dentro de un año. Calcula el tipo K que hace que este FRA cueste 0 hoy.

b) Si K fuera $K = 1{,}5\,\%$, ¿habría oportunidad de arbitraje? Si es así, descríbela.

5. El descuento a 1 año es del 90 %, y el descuento a 3 años del 80 %. Vamos a prestar 100 euros dentro de 1 año, para recuperarlos en $t = 3$ años. Además, hemos contratado (hoy) un FRA de coste 0 y nominal 100 para el periodo $1 \to 3$ en el que *recibiremos tipo fijo*. ¿Cuánto dinero recibiremos en tiempo $t = 3$?

Para los ejercicios siguientes, se puede usar la siguiente curva cupón cero (o de descuentos):

año 0	año 1	año 2	año 3	año 4	año 5	año 6	año 7	año 8	año 9	año 10
100 %	98,97 %	98,50 %	97,55 %	95,72 %	94,77 %	93,13 %	91,74 %	89,99 %	89,74 %	88,41 %

Si se necesitan descuentos en fechas intermedias, puedes calcularlos por interpolación lineal.

6. Dentro de un acuerdo de financiación que hemos suscrito, pagaremos intereses cada 3 meses, empezando dentro de 6 meses, durante los próximos 3 años. En cada instante de pago, los intereses se calculan sobre un nominal de 100 y según el tipo Euribor (simple, anual) a 3 meses que se haya fijado 3 meses antes. Los pagos que vamos a realizar son, claro, inciertos (dependerán de cómo esté el Euribor a 3 meses en cada fecha de pago). Querríamos intercambiarlos por pagos de montante conocido. Describe el instrumento financiero adecuado para hacer esto, y calcula el montante de los intereses que se pagarán en cada instante.

7. Valora un bono a 10 años de nominal M con cupones semestrales ($\Delta t = 1/2$) variables, que devuelve nominal a vencimiento. Los pagos de cupón van como sigue:

- dentro de 6 meses se pagará un cupón $M \cdot \Delta t \cdot R_s(0, 1/2)$ (este tipo es conocido hoy);
- dentro de un año se pagará cupón $M \cdot \Delta t \cdot R_s(1/2, 1)$ (el tipo simple a seis meses que tendremos dentro de seis meses);
- dentro de año y medio se pagará cupón $M \cdot \Delta t \cdot R_s(1, 3/2)$ (el tipo simple a seis meses que tendremos dentro de un año);
- etc.

(Sugerencia: contrata la cadena de FRAs adecuados).

CALLS Y PUTS

8. Consideremos una call y una put (sobre el mismo subyacente) con el mismo strike K y el mismo vencimiento T. ¿Cuál es el K que hace que ambas opciones tengan hoy el mismo precio?

9. Supongamos que un cierto subyacente $\mathcal{S}$ reparte dividendos entre hoy y tiempo T.

a) ¿Qué efecto debería tener (en cuanto a aumentar/disminuir) este reparto de dividendos sobre los precios de la call y la put?

b) Digamos que D es el valor actual de esos dividendos, y llamemos c y p a los precios de la call y la put con vencimiento T y strike K. Halla cotas inferiores y superiores para c y p, y escribe la relación de paridad call-put en este caso.

10. Considera una call de vencimiento $T = 1$ año y strike $K = 90$ sobre un subyacente que hoy cuesta $S_0 = 100$ y que pagará un dividendo de 5 euros dentro de 6 meses. El tipo de interés continuo es del 3 % anual.

a) Halla una cota inferior para el precio hoy de la call.

b) Si el precio de la call hoy es de 10 euros, ¿cuál deberá ser el precio de la put (con mismo strike y vencimiento) para que no se creen oportunidades de arbitraje?

c) Si la call cuesta hoy 10 euros y la put 4 euros, diseña una oportunidad de arbitraje.

11. Una call *digital* con strike K y vencimiento T paga 1 euro si la cotización del subyacente a vencimiento, S_T, queda por encima de K; y 0 en caso contrario. La correspondiente put digital paga 1 si $S_T < K$ y 0 en caso contrario. Escribe la relación de paridad call/put para digitales.

12. Un *caplet/floorlet* es el equivalente, para tipos de interés, de la call/put. Poseer un caplet/floorlet da derecho a pedir prestado/prestar un nominal M, a tipo de interés (simple, anual) K para el periodo $T \to T + \Delta T$, donde T y ΔT se expresan en años.

a) Comprueba que, desde el punto de vista del poseedor del caplet, el flujo (en tiempo $T + \Delta T$) del instrumento es $M \cdot \Delta T \cdot (R_T - K)^+$, donde R_T es el tipo de mercado (simple, anual) a plazo ΔT que se fijará en tiempo T. Comprueba que el flujo del floorlet, por su parte, y de nuevo desde el punto de vista del que lo posee, es $M \cdot \Delta T \cdot (K - R_T)^+$.

b) ¿Cuál sería la fórmula de paridad caplet/floorlet?

13. Describe carteras de instrumentos (calls, puts, dinero, forwards, etc.) que dan lugar en tiempo T a los flujos que se recogen en las figuras (r es el tipo anual continuo):