ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 6: Geometría afín II. Referencias afines.

1. En $\mathbb{A}_k^2$ considera los puntos $P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1, Q_2$ cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_C = \{P_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ son las siguientes:

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (1,7), \quad P_2 = (1,1)$$
$$Q_0 = (-1,1), \quad Q_1 = (1,4), \quad Q_2 = (3,0)$$

a) Demuestra los puntos en $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ son afínmente independientes. Demuestra que los puntos en $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ son afínmente independientes.

b) Halla las coordenadas baricéntricas de P_0, P_1 y P_2 respecto a $\mathcal{R}''$ y las de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a $\mathcal{R}'$.

c) Considera los sistemas de referencia cartesiana $\mathcal{R}'_C = \{P_0, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ y $\mathcal{R}''_C = \{Q_0, \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$. Calcula las coordenadas cartesianas de Q_0, Q_1 y Q_2 respecto a $\mathcal{R}'_C$ y las de P_0, P_1 y P_2 respecto a $\mathcal{R}''_C$.

d) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre $\mathcal{R}'_C$ y $\mathcal{R}''_C$.

e) Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}''$.

2. Sean $A = (1,1,1), B = (1,2,3), C = (2,3,1)$ y $D = (3,1,2)$ cuatro puntos en $\mathbb{A}_k^3$ con coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia $\mathcal{R}$.

a) Demuestra que $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ es un sistema de referencia baricéntrico.

b) Calcula las coordenadas cartesianas respecto a $\mathcal{R}$ del baricentro de A, B, C, D.

c) Si $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, halla las coordenadas baricéntricas de O respecto a $\mathcal{R}'$.

3. Sean $O \in \mathbb{A}_k^2$ un punto, y sean $\vec{u}$ y $\vec{v} \in K^2$ dos vectores linealmente independientes. A todo escalar λ, se le asocian los puntos A y B tales que

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{u}, \quad \overrightarrow{OB} = \lambda\vec{v}.$$

Determina el baricentro de A y B en función de λ.

4. En $\mathbb{A}_k^3$ se consideran las referencias cartesianas:

$$\mathcal{R} = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}, \text{ y } \mathcal{R}' = \{O', \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

Sean $O'_{\mathcal{R}} = (-1,6,2)$, $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1$, $\vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$. Si un plano π tiene ecuación $2x - y + 3z = 0$ en $\mathcal{R}$, halla su ecuación respecto a $\mathcal{R}'$.

5. Halla las ecuaciones baricéntricas del plano que pasa por la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$$

y por el punto $P = (-1,-2,5)$.

6. Calcula las ecuaciones implícitas de la recta que corta a las rectas y pasa por $P=(1,6,-3)$

$$s = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z + 4 = 0 \end{cases}, t = \begin{cases} x + y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

(está en el reverso de la hoja)

y pasa por $P = (1, 6, -3)$.

7. Demuestra que en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

8. En el espacio afín real se consideran tres rectas que se cruzan dos a dos y son paralelas a un plano. Demuestra que toda recta que corte a las tres es paralela a un plano fijo. Determina ese plano.

1. $R_c = \{P_0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$

$P_0 = (0,0)$ $\quad$ $P_1 = (1,7)$ $\quad$ $P_2 = (1,1)$

$Q_0 = (-1,1)$ $\quad$ $Q_1 = (1,4)$ $\quad$ $Q_2 = (3,0)$

a) Afínm. indep. ?

$\overrightarrow{P_0P_1} = (1,7)$
$\overrightarrow{P_0P_2} = (1,1)$
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ vectores l. indep $\Rightarrow$
$\Rightarrow P_0, P_1, P_2$ puntos afínm. indep.

$\overrightarrow{Q_0Q_1} = (2,3)$
$\overrightarrow{Q_0Q_2} = (4,-1)$
$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2-12 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{Q_0Q_1}$ y $\overrightarrow{Q_0Q_2}$ vectores l. indep. $\Rightarrow$
$\Rightarrow Q_0, Q_1, Q_2$ puntos afínm. indep.

b) $R''_c = \{Q_0, \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$

¿$[P_0]_{R''_c}$? $\Rightarrow \overrightarrow{Q_0P_0} = (1,-1)$

$(1,-1) = \alpha(2,3) + \beta(4,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha + 4\beta \\ -1 = 3\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-3}{14} \\ \beta = \frac{5}{14} \end{cases}$

$[P_0]_{R''_c} = \left(\frac{-3}{14}, \frac{5}{14}\right)$

¿$[P_1]_{R''_c}$? $\Rightarrow \overrightarrow{Q_0P_1} = (2,6)$

$(2,6) = \alpha(2,3) + \beta(4,-1) \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\alpha + 4\beta \\ 6 = 3\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{13}{7} \\ \beta = \frac{-3}{7} \end{cases}$

$[P_1]_{R''_c} = \left(\frac{13}{7}, \frac{-3}{7}\right)$

¿$[P_2]_{R''_c}$? $\Rightarrow \overrightarrow{Q_0P_2} = (2,0)$

$(2,0) = \alpha(2,3) + \beta(4,-1) \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\alpha + 4\beta \\ 0 = 3\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{7} \\ \beta = \frac{3}{7} \end{cases}$

$[P_2]_{R''_c} = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)$

$[P_0]_{R''} = \left(\frac{6}{7}, \frac{-3}{14}, \frac{5}{14}\right.$

$[P_1]_{R''} = \left(\frac{-3}{7}, \frac{13}{7}, \frac{-3}{7},\right.$

$[P_2]_{R''} = \left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)$

$R'_c = \{P_0, \overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}\}$

¿$[Q_0]_{R'_c}$? $\overrightarrow{P_0Q_0} = (-1,1)$

$(-1,1) = \alpha(1,7) + \beta(1,1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = \alpha + \beta \\ 1 = 7\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{-4}{3} \end{cases}$

$[Q_0]_{R'_c} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right)$

¿$[Q_1]_{R'_c}$? $\overrightarrow{P_0Q_1} = (1,4)$

$(1,4) = \alpha(1,7) + \beta(1,1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 4 = 7\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

$[Q_1]_{R'_c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

¿$[Q_2]_{R'_c}$? $\overrightarrow{P_0Q_2} = (3,0)$

$(3,0) = \alpha(1,7) + \beta(1,1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = \alpha + \beta \\ 0 = 7\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-1}{2} \\ \beta = \frac{7}{2} \end{cases}$

$[Q_2]_{R'_c} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$$\left.\right\} \quad [Q_0]_{R'} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) \qquad [Q_1]_{R'} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad [Q_2]_{R'} = \left(-2, \frac{-1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

d) Ecuaciones de cambio de coordenadas de R'_c y R''_c.

$$R'_c = \{P_0, \underbrace{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}}_{B'}\} \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} R''_c = \{Q_0, \underbrace{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}}_{B''}\}$$

a)

¿$[\overrightarrow{P_0P_1}]_{B''}$? $\longrightarrow (1,7) = \alpha(2,3) + \beta(4,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha + 4\beta \\ 7 = 3\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{29}{14} \\ \beta = \frac{-11}{14} \end{cases}$

$[\overrightarrow{P_0P_1}]_{B''} = \left(\frac{29}{14}, \frac{-11}{14}\right)$

¿$[\overrightarrow{P_0P_2}]$? $\longrightarrow (1,1) = \alpha(2,3) + \beta(4,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha + 4\beta \\ 1 = 3\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5}{14} \\ \beta = \frac{1}{14} \end{cases}$

$[\overrightarrow{P_0P_2}]_{B''} = \left(\frac{5}{14}, \frac{1}{14}\right)$

$[P_0]_{R''_c} = \left(\frac{-3}{14}, \frac{5}{14}\right)$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -3/14 \\ 5/14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 29/14 & 5/14 \\ \frac{-11}{14} & 1/14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1'' \\ r_2'' \end{pmatrix}}$$

b) Mismo procedimiento que antes, o despejando $\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \end{pmatrix}$ de la expr. final.

$$\boxed{\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/14 & 5/14 \\ \frac{-11}{14} & 1/14 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} r_1'' \\ r_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 29/14 & 5/14 \\ -11/14 & 1/14 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3/14 \\ -5/14 \end{pmatrix}}$$

e) Ecuaciones de cambio de coordenadas de $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}''$.

$$\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\} \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} \mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$$

a) $[Q_0]_{\mathcal{R}'} = \left(2, \frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right)$

$[Q_1]_{\mathcal{R}'} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$[Q_2]_{\mathcal{R}'} = \left(-2, \frac{-1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1/3 & 1/2 & -1/2 \\ -4/3 & 1/2 & 7/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1'' \\ r_2'' \\ r_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix}}$$

b) Mismo procedimiento que antes, o despejando $\begin{pmatrix} r_1'' \\ r_2'' \\ r_3'' \end{pmatrix}$ de la expr. final

$$\boxed{\begin{pmatrix} r_1'' \\ r_2'' \\ r_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1/3 & 1/2 & -1/2 \\ -4/3 & 1/2 & 7/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix}}$$

$\boxed{2.}$ $A = (1,1,1)$ $B = (1,2,3)$ $C = (2,3,1)$ $D = (3,1,2)$ $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$

a) Es un sistema de referencia baricéntrico $\Leftrightarrow$ los 4 puntos son afínm. indep. ya que $\dim \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}} = 3$.

$\vec{AB} = (0,1,2)$

$\vec{AC} = (1,2,0)$

$\vec{AD} = (2,0,1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+0-8-1 \neq 0 \Rightarrow \text{los tres vectores son lin. indep.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ los 4 puntos son a. indep.

b) Las coordenadas del baricentro de A, B, C, D respecto a $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ son $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

¿cómo pasar las coordenadas a $\mathcal{R}$?

$\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ $\downarrow$ baricéntricas

$$M_{\tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad M_{\tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}'} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$[\text{Baricentro}]_{\mathcal{R}} = (b, c, d)$

c) Si $R = \{O, \underbrace{e_1, e_2, e_3}_{B}\}$, halla las coordenadas baricéntricas de O a R'.

$\tilde{R} = \{O, P_1, P_2, P_3\}$ tal que $\overrightarrow{OP_i} = \vec{e_i}$

$R' = \{A, B, C, D\}$

▶ opción 1: $[O]_{\tilde{R}} = (1,0,0,0)$

$$M_{\tilde{R}R'}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [O]_{R'}$$

▶ opción 2:

$$\bar{R'} = \{A, \underbrace{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}}_{\bar{B'}}\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[A]_R} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{B\bar{B'}}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\qquad [\overrightarrow{AB}]_B \; [\overrightarrow{AC}]_B \; [\overrightarrow{AD}]_B$

despejamos $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M_{B\bar{B'}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + M_{BB'}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

4. $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ $\quad R=\{O;\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\}$ $\quad R'=\{O';\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$

$[O']_R=(-1,6,2)$

$$\vec{v_1}=\vec{u_1}+3\vec{u_2}+\vec{u_3}$$
$$\vec{v_2}=-\vec{u_1}$$
$$\vec{v_3}=2\vec{u_1}+5\vec{u_2}+7\vec{u_3}$$

$\Pi: 2x-y+3z=0$ en R.

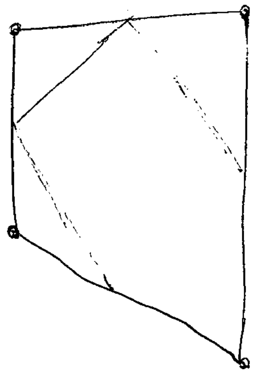
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_R=\begin{pmatrix}-1\\6\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&5\\1&0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{R'}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-1+x'-y'+2z'\\y=6+3x'+5z'\\z=2+x'+7z'\end{cases}$$

Por lo tanto: $2x-y+3z=0 \Rightarrow$

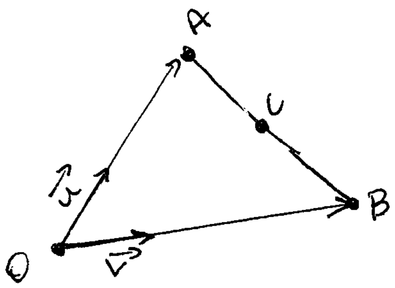
$\Rightarrow \Pi: 2(-1+x'-y'+2z')-(6+3x'+5z')+3(2+x'+7z')=0$
$\hookrightarrow$ en R'.

7.



13.1 $O \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ u, v lin. indep. en $\mathbb{R}$

Para cada $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ escogemos puntos A, B / $\lambda\vec{u} = \vec{OA}$, $\lambda\vec{v} = \vec{OB}$



$$\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$R = \{O ; \vec{OA}, \vec{OB}\}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} =$$

$$= \vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{AO} + \vec{OB}) = \vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$$

$$C_R = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$R' = \{O ; \vec{u}, \vec{v}\}$$

~~In~~

$$\cancel{M_{R'R}} = \quad M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Cambio de ~~coorden~~ sistema

inacabado