TOPOLOGÍA. UAM, 24 de enero de 2017

Apellidos, Nombre: ______________________________

Grupo: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	TOTAL
2 puntos	2 puntos	2 puntos	2 puntoss	2 puntos	10

1. *a*) Definir con precisión qué es un **espacio topológico de Hausdorff**.

b) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación inyectiva y continua del espacio topológico X en el espacio topológico de Hausdorff Y. Demostrar que, entonces, X es también de Hausdorff.

c) Aplicar el punto b) para demostrar que un subespacio de un espacio de Hausdorff es también de Hausdorff.

d) Utilizar el punto b) o el punto c) para demostrar que si un producto de espacios topológicos es un espacio de Hausdorff; entonces cada uno de dichos espacios es también de Hausdorff.

2. *a*) Definir con precisión qué es un **espacio topológico compacto**.

b) Demostrar que, si $\{C_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados no vacíos de un espacio topológico compacto X, tales que $\forall j \in \mathbb{N}$, $C_{j+1} \subset C_j$, entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j \neq \emptyset$.

c) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ una aplicación continua y cerrada de $\mathbb{R}$, con su topología usual en un espacio topológico compacto X. Usando la familia $\{f([j, \rightarrow[)\}_{j\in\mathbb{N}}$, aplicar el punto b) para demostrar que existe algún $x \in X$ tal que $f^{-1}(x)$ es un conjunto infinito.

⇝ **dorso**

3. Considera la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\beta = \{(a,b) \ : \ a < b \ , \ a,b \in \mathbb{R} \ \} \cup \{(a,b) \setminus K \ : \ a < b \ , \ a,b \in \mathbb{R} \ \}$$

donde $K = \{\frac{1}{n} \ : \ n = 1,2,3,...\}$.

a) Demuestra que β es una base para una topología en $\mathbb{R}$ que es más fina que la topología usual.

b) Denotaremos por $\mathbb{R}_K$ a $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base β. Demuestra que $(-\infty, 0)$ con la topología usual es homeomorfo a $(-\infty, 0)$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}_K$.

c) Demuestra que $\mathbb{R}_K$ es conexo.

---

4. En $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se considera la topología $\mathcal{T}_1$ producto de la topología usual en el primer factor $\mathbb{R}$ por la topología discreta en el segundo factor $\mathbb{R}$.
Después se define en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$:

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

a) Demostrar que el espacio cociente X de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1)$ por la relación $\mathcal{R}$ es homeomorfo a $[0, \rightarrow [$ con su topología usual.

b) Estudiar si la proyección canónica de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1)$ sobre X es abierta o cerrada.

c) Repetir el ejercicio considerando en $\mathbb{R}^2$ la topología usual $\mathcal{T}$ en lugar de $\mathcal{T}_1$.

---

5. *a*) Explicar con detalle qué quiere decir que el espacio topológico Y sea un **retracto de deformación fuerte** (o retracto deformación, para abreviar) del espacio topológico X. Poner algún ejemplo.

b) Enunciar y demostrar un resultado que relacione los grupos de homotopía de X y de Y cuando Y es un retracto de deformación de X.

c) Demostrar con detalle que el vaso vacío Y es un retracto de deformación del vaso lleno X. En concreto, tomar

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 \leq 1) \wedge (0 \leq z \leq 1)\}, \qquad \text{e}$$

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ((x^2 + y^2 \leq 1) \wedge (z = 0)) \vee ((x^2 + y^2 = 1) \wedge (0 \leq z \leq 1))\}$$

d) Determinar, razonadamente los grupos de homotopía de los espacios X e Y del punto anterior.

TIEMPO: 3 horas.