Se asume siempre que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ es una sub-σ-álgebra.

1) Demostrar la desigualdad aritmético-geométrica: para $n \geq 2$ e $i = 1, \ldots, n$, si se cumple que $x_i \geq 0$ y $\alpha_i > 0$ con $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, entonces $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Sugerencia: usar la convexidad de la exponencial, o la concavidad del logaritmo.

2) De una urna con 10 bolas blancas y 10 bolas negras se extraen simultaneamente 3 bolas. Calcular la probabilidad de que exactamente dos de ellas sean blancas. Responder a la misma pregunta si las bolas se extraen de manera sucesiva.

3) Disponemos de dos urnas, U_1, que contiene 6 bolas azules y 8 bolas blancas, y U_2, que contiene 3 bolas azules y 9 bolas blancas. Se sortea con un dado equilibrado de 4 caras la elección de una urna, escogiendose U_1, si salen 1, 2 o 3, y U_2, si sale 4. Posteriormente se extrae al azar una bola de esa urna.
1) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea azul? Sugerencia: usar la regla de la probabilidad total. Respuesta: 43/112.
2) Si la bola extraida resulta ser blanca ¿cual es la probabilidad de que proceda de la urna U_1? Sugerencia: usar Bayes o el apartado anterior. Respuesta: $16/23 = 1 - 43/112$.

4) Enfermedades raras. Ningún test biológico es 100 % preciso. Supongamos que un test para determinar si cierta infección se ha producido, da falsos positivos en un 1 % de los casos, y falsos negativos en un 2 % de los casos. Si una de cada 100 000 personas entre la población general está infectada, determinar la probabilidad de que una persona escogida al azar esté infectada, sabiendo que el test ha dado positivo.

5) Angel y Benito tienen sendas barajas españolas (40 cartas). Cada uno saca de su baraja una carta al azar (es decir, con iguales probabilidades, e independientemente). Hallar:

a) La probabilidad de obtener al menos un as.

b) La probabilidad de obtener dos cartas del mismo palo.

c) La probabilidad de no obtener ningún as.

d) La probabilidad de no obtener ni una copa ni una espada.

6) Ana y Bea eligen cada una un número al azar, entre 0 y 2. Sean A, B, C, D, los siguientes eventos:
A: La diferencia entre ambos números es al menos 1/3.
B: Al menos uno de los números es mayor que 1/3.
C: Los dos números son iguales.
D: El número de Bea es mayor que 1/3.
Hallar $P(B)$, $P(C)$ y $P(A \cup D)$.

7) Con 12 chicas y 4 chicos se forman al azar 4 grupos de 4 personas. Calcular la probabididad de que haya un chico en cada grupo. Sugerencia: usar la regla del producto.

8) Benito tiene un dado trucado, con 6 caras numeradas del 1 al 6. La probabilidad de las distintas caras es proporcional al número de puntos inscritos en ellas. Hallar la probabilidad de que Benito obtenga con ese dado un número par.

9) En una reunión hay 25 personas. Calcular la probabilidad de que celebren su cumpleaños el mismo día del año al menos dos personas. Observación: con frecuencia es más fácil calcular intersecciones que uniones. Sugerencia: calcular la probabilidad del evento complementario.

10) Inclusión-Exclusión: Probar que $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, |I|=k} (-1)^{k-1} P(\cap_{i \in I} A_i)$.

11) Emparejamientos al azar: tenemos n cartas, que colocamos al azar en n sobres (en vez de cuidadosamente poner cada carta en su sobre). Calcular la probabilidad de que alguna carta está en el sobre correcto (es decir, al menos una carta). Estimar dicha probabilidad cuando $n \to \infty$. Sugerencia: usar Inclusión-Exclusión. Observar que la probabilidad de que todas las cartas de 1 a k esten en el sobre correcto es $(n-k)!/n!$. Respuesta en el límite: $1 - e^{-1}$.

12) Media o esperanza. Con los datos del problema anterior, calcular el número esperado de emparejamientos al azar, es decir, cuantas cartas esperamos que están en el sobre correcto. Comentario: este problema es muy fácil.

13) Dado C con $P(C) > 0$, decimos que A y B son condicionalmente independientes con respecto a C si $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$. Probar que si $P(B \cap C) > 0$, $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$ es equivalente a $P(A|C) = P(A|B \cap C)$.

14) Estudiar para $\alpha > 0$ la convergencia en media cuadrática (es decir, en L^2) de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, sabiendo que

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

15) Probar el lema de Kronecker: si $\{x_n\}_1^\infty$ es una sucesión de números reales y $0 < b_1 \leq b_2 \leq \dots$ satisface $\lim_n b_n = \infty$, entonces la convergencia de $\sum_{i=1}^{\infty} x_i/b_i$ a un número real implica que $\lim_n b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

16) Dar un ejemplo de tres eventos A, B, C independientes 2 a 2, que no sean independientes.