$\boxed{1.}$ Demostración Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorov para $X_i \in \mathcal{L}^2$.

En la demostración utilizaremos dos resultados previos, que demostramos a continuación:

▶ TEOREMA DE LA CONVERGENCIA DE LAS MARTINGALAS DE DOOB:

Sea X una martingala tal que $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$. Entonces $\lim_n X_n$ existe c.s., y además, $\mathbb{P}(|\lim_n X_n| < \infty) = 1$.

<u>Demostración</u>: Dados a y b con $a<b$, sea

$$\Lambda_{a,b} := \{\omega \in \Omega : \liminf_n X_n(\omega) < a < b < \limsup X_n(\omega)\},$$

y sea, $\Lambda := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \text{ no tiene límite en } [-\infty, \infty]\}$

Entonces $\Lambda = \bigcup_{\{a,b \in \mathbb{Q} : a<b\}} \Lambda_{a,b}$

Como $\Lambda_{a,b} \subseteq \{\omega : U_\infty[a,b](\omega) = \infty\}$, concluimos que $\mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0$ y por tanto $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$.

Definiendo $X_\infty(\omega) := \liminf_n X_n(\omega)$, tenemos que $\lim_n X_n$ existe y es igual a X_∞ casi seguramente.

Por Fatou, $\mathbb{E}(|X_\infty|) = \mathbb{E}(\liminf_n |X_n|) \leq \liminf_n \mathbb{E}(|X_n|) \leq$
$\leq \sup \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, luego $\mathbb{P}(|X_\infty| < \infty) = 1$. ■

▶ LEMA DE KRONECKER: Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$ existe y es finita. Entonces tenemos que para todo $0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots$ y $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0.$$

Demostración: Llamamos S_K a las sumas parciales de los X's. Usando suma por partes:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{K=1}^{n} b_K x_K = S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{K=1}^{n-1}(b_{K+1}-b_K)S_K \quad [*]$$

Fijamos cualquier $\varepsilon > 0$ y escogemos N tal que S_K está a una distancia menor que ε de s para todo $K > N$. Esto se puede hacer porque la secuencia S_K converge a s.

Entonces $[*] = S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{K=1}^{N-1}(b_{K+1}-b_K)S_K - \frac{1}{b_n}\sum_{K=N}^{n-1}(b_{K+1}-b_K)S_K =$

$$= S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{K=1}^{N-1}(b_{K+1}-b_K)S_K - \frac{1}{b_n}\sum_{K=N}^{n-1}(b_{K+1}-b_K)s - \frac{1}{b_n}\sum_{K=N}^{n-1}(b_{K+1}-b_K)(S_K-s) =$$

$$= S_n - \frac{1}{b_n}\sum_{K=1}^{N-1}(b_{K+1}-b_K)S_K - \frac{b_n-b_N}{b_n}s - \frac{1}{b_n}\sum_{K=N}^{n-1}(b_{K+1}-b_K)(S_K-s)$$

Ahora si $n \to \infty$, el primer término $\longrightarrow s$, que se cancela con el tercer término. El segundo término $\longrightarrow 0$ porque la suma es un valor fijo. Finalmente, como la secuencia de b_i's es creciente, el último término está acotado por $\frac{\varepsilon(b_n-b_N)}{b_n} \leq \varepsilon$. ∎

Realizadas las demostraciones de estos dos resultados, podemos comenzar con la Ley de los Grandes Números de Kolmogorov para $X_i \in \mathcal{L}^2$:

Para comenzar, usaremos el siguiente caso especial del Lema de Kronecker: sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{i} < \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = 0$.

Es un caso especial porque si $Z_i := \frac{X_i}{i}$, $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i < \infty$ por hipótesis, entonces por el lema de Kronecker para toda familia $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ tal que $0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots$ con $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{\infty} b_i Z_i = 0$.

Escogemos $b_n = n$ (es decir, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3, \ldots$ con $b_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$) y tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} i Z_i = 0$, pero $Z_i = \frac{X_i}{i}$ y entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} X_i = 0$.

Continuando con la demostración de LFGNK definimos $Y_i := X_i - \mathbb{E}(X_i)$, $M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{i}$ y $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Afirmamos que $M = \{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala con $\mathbb{E}(M_n) = 0$.

Probémoslo:

i) M_n es $\mathcal{F}_n$-medible para cada n porque $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ y $M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{i}$, combinación lineal de las v.a. que generan la n-ésima filtración. ($\Rightarrow M$ es adaptado).

ii) Nos preguntamos si $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Nos preguntamos si $\mathbb{E}(|M_n|)^2 < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{E}(|M_n|) \leq \mathbb{E}(|M_n|)^2$, vemos que para probar que $\mathbb{E}(|M_n|)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{E}(|M_n|)^2 \leq \mathbb{E}(|M_n|^2) = \mathbb{E}(M_n^2) - \mathbb{E}(M_n)^2$ porque esto lo veremos a continuación

$\mathbb{E}(|M_n|^2) = \mathbb{E}(M_n^2)$ y $\mathbb{E}(M_n)^2 = 0 \stackrel{\downarrow}{=} \mathbb{E}(M_n)$.

Entonces $\mathbb{E}(M_n^2) - \mathbb{E}(M_n)^2 = \mathrm{Var}(M_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{independencia}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{Var}(Y_i)}{i^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_i)}{i^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótesis}}}{<} \infty$

$\Rightarrow \mathbb{E}(|M_n|) < \infty$.

iii) ¿ $\mathbb{E}(M_n \mid \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}) = M_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

prop. esperanza condicional

diap. 11 tema 3

$$\mathbb{E}(M_n / \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{i} \Big| \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \mathbb{E}(Y_i \mid \tilde{\mathcal{F}}_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} Y_i + \frac{1}{n} \underbrace{\mathbb{E}(Y_n \mid \sigma(Y_1, \dots, Y_{n-1}))}_{\substack{\parallel \\ \mathbb{E}(Y_n) \\ \parallel \\ 0}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Y_i}{i} = M_{n-1} \, .$$

Y_n indep. de $\sigma(Y_1, \dots, Y_{n-1})$ y usamos teorema diap. 13 tema 3

$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}(X_n)) = 0$ al estar normalizada

$\Longrightarrow M$ es una martingala

Ahora justificamos que $\mathbb{E}(M_n) = 0$:

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\frac{Y_i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \mathbb{E}(Y_i) = 0$$

Una vez que hemos probado que M es una martingala y que $\mathbb{E}(M_n) = 0$, continuamos con la demostración de LFGNK: Usamos el TCM de Doob y el lema de Kronecker (ambos demostrados anteriormente) para sostener que para casi todo $\omega \in \Omega$, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i(\omega) = 0$.

Faltaría justificar que la hipótesis del TCMD se cumple, es decir, que $\sup_n \mathbb{E}(|M_n|) < \infty$, o equivalentemente, $\sup_n \mathbb{E}(|M_n|)^2 < \infty$:

$\mathbb{E}(|M_n|^2) = \mathbb{E}(M_n^2)$ y $\mathbb{E}(M_n) = 0$

para toda $n \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{E}(|M_n|)^2 \leq \mathbb{E}(|M_n|^2) = \mathbb{E}(M_n^2) - \mathbb{E}(M_n)^2 =$

$$= \mathrm{Var}(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{Var}(Y_i)}{i^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_i)}{i^2} < \infty \, .$$

independencia $\qquad$ hipótesis LFGNK

■

2.

a) $\mathbb{E}(Y|W)$

def. esperanza condicional

Si $W=1$, Y puede tomar infinitos valores en $\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(Y|W=1) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbb{P}(Y=n|W=1) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6} =$$

$Y=n$ quiere decir que han salido $n-1$ caras distintas que 5 y finalmente (en la tirada n-ésima) sale un 5.

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{5/6}{(1-5/6)^2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5/6}{1/36} = \frac{30}{5} = \boxed{6}$$

$(*)$ $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot r^n = \frac{r}{(1-r)^2}$ si $r<1$.

Si $W=2$, Y toma el valor del siguiente lanzamiento de un dado de 6 caras

$$\mathbb{E}(Y|W=2) = \sum_{i=1}^{6} i\,\mathbb{P}(Y=i|W=2) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \cdots + 6\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+\cdots+6) = \boxed{3'5 = \frac{7}{2}}$$

b) $\mathbb{E}(Y)$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y|W=1)\cdot\mathbb{P}(W=1) + \mathbb{E}(Y|W=2)\cdot\mathbb{P}(W=2) =$$

$$= 6\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{2}\cdot\frac{3}{4} = \boxed{\frac{33}{8} = 4'125}$$

3. VERDADERA

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que $X_n \longrightarrow X$ en probabilidad.

Podemos coger $\varepsilon > 0$ tal que para un n lo suficientemente grande $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \varepsilon$. Para estos n's suficientemente grandes tenemos:

$$\mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}\right)$$

$\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} < 1$

$$\leq \mathbb{E}\left(\underbrace{|X_n - X|}_{\leq \varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}\right) \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}\right) = \varepsilon \cdot \underbrace{\mathbb{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon)}_{\leq 1} + \underbrace{\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)}_{\leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario y $\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ llegamos a que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que para n's suficientemente grandes $\mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) \leq \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}$.

Para esos n's suficientemente grandes obtenemos:

$$\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \geq \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}\right) \geq \mathbb{E}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon).$$

Entonces, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon^2/1+\varepsilon}{\varepsilon/1+\varepsilon} = \varepsilon$.

Esto prueba que $X_n \longrightarrow X$ en probabilidad. $\blacksquare$

$\boxed{4.}$ Toda variable aleatoria real X se puede descomponer en parte positiva y negativa: $X = X^+ - X^-$.

Como $X \in L^1(\mathbb{P}) \Rightarrow \mathbb{E}(X) < \infty \Rightarrow \mathbb{E}(X^+), \mathbb{E}(X^-) < \infty$.

Lo mismo para $Y = Y^+ - Y^-$ con $\mathbb{E}(Y) < \infty \Rightarrow \mathbb{E}(Y^+), \mathbb{E}(Y^-) < \infty$.

Ahora X^+, X^-, Y^+ e Y^- son variables aleatorias positivas y podemos utilizar el ejercicio 2 de la hoja 4.

Por hipótesis:
$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{\mathbb{P}(X \leq t) < \mathbb{P}(Y \leq t)}^{[1]} \\ \quad \shortparallel \qquad\qquad\qquad \shortparallel \\ 1 - \mathbb{P}(X > t) \quad 1 - \mathbb{P}(Y > t) \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\mathbb{P}(X > t) > \mathbb{P}(Y > t)}^{[2]}$$

Además, por el ejercicio 2 Hoja 4:
$$\mathbb{E}(X^+) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,dt \quad ; \quad \mathbb{E}(Y^+) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > t)$$
$$\mathbb{E}(X^-) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X^- > t)\,dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \leq -t)\,dt = \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(X \leq t)\,dt$$
$$\mathbb{E}(Y^-) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y^- > t)\,dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \leq -t)\,dt = \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(Y \leq t)\,dt$$

Por monotonía de la integral y $[1] \Rightarrow \mathbb{E}(X^-) < \mathbb{E}(Y^-)$

Por monotonía de la integral y $[2] \Rightarrow \mathbb{E}(X^+) > \mathbb{E}(Y^+)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Y) = \underbrace{\mathbb{E}(Y^+)}_{\substack{\wedge \\ \mathbb{E}(X^+)}} - \underbrace{\mathbb{E}(Y^-)}_{\substack{\vee \\ \mathbb{E}(X^-)}} < \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-) = \mathbb{E}(X)$$

$\blacksquare$

<u>VERDADERO</u>

5. FALSO

Se muestra un contraejemplo sencillo construyendo una familia de variables aleatorias discretas que toman dos valores y utilizando el primer lema de Borel-Cantelli para llegar a ver que el enunciado es falso.

Sea X_n familia de variables aleatorias independientes tales que X_n toma el valor $\frac{-n^2}{2}$ con probabilidad $\frac{1}{n^2}$ y el valor $\frac{n^2}{2(n^2-1)}$ con probabilidad $1-\frac{1}{n^2}$.

Entonces, comprobamos que efectivamente $\mathbb{E}(X_n)=0$ $\forall n\geq 1$ y $\mathbb{E}(|X_n|)=1$ $\forall n\geq 1$:

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{-n^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n^2}{2(n^2-1)}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{n^2-1}{2(n^2-1)} = \frac{-1}{2}+\frac{1}{2} = 0$$

$$\mathbb{E}(|X_n|) = \left|\frac{-n^2}{2}\right|\cdot\frac{1}{n^2} + \left|\frac{n^2}{2(n^2-1)}\right|\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n^2}{2(n^2-1)}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

Ahora vamos a usar el 1^{er} lema de Borel-Cantelli:

RECUERDO: 1^{er} lema de Borel-Cantelli

Sean $A_1, A_2, \dots$ sucesos de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, si $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) < \infty \Longrightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Como $\mathbb{P}(X_n = \frac{-n^2}{2}) = \frac{1}{n^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_n=\frac{-n^2}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$

El lema 1 de B-C $\Longrightarrow \mathbb{P}(\limsup_n X_n = \frac{-n^2}{2}) = 0$

Ahora usamos la igualdad $\limsup_n A_n = (\liminf_n A_n^c)^c$:

$$0 = \mathbb{P}\left(\limsup_n X_n = \frac{-n^2}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\left(\liminf_n X_n \neq \frac{-n^2}{2}\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\liminf_n X_n \neq \frac{-n^2}{2}\right) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\liminf_n X_n = \frac{n^2}{2(n^2-1)}\right) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\liminf_n X_n = \frac{n^2}{2(n^2-1)}\right) = 1$$

Acabamos de ver que X_n toma el valor $\frac{-n^2}{2}$ infinitamente a menudo con probabilidad cero (lo que ya demuestra la falsedad del enunciado al ser $\frac{-n^2}{2} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$) y, además, sabemos que $X_n = \frac{n^2}{2(n^2-1)}$ con probabilidad 1 para todo n suficientemente grande, lo que hace $\liminf_n X_n > 0$ casi seguro. $\left(\frac{n^2}{2(n^2-1)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\right)$.