Variable Compleja I (16449), **2019-2020** (Segundo Cuatrimestre)

Tercer curso de Grado en Matemáticas y Cuarto de Doble Grado Matemáticas - Ing. Informática

Programa de la asignatura

1. *Números complejos y funciones.* Operaciones aritméticas en el cuerpo de los números complejos. Representación polar. Conjugación. Desigualdad triangular. Raíces y potencias. Topología del plano complejo. Esfera de Riemann. Funciones complejas. Límites y continuidad.

2. *Funciones holomorfas.* Derivada compleja. Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Funciones armónicas. La función exponencial. Funciones trigonométricas e hiperbólicas. Función argumento. Teorema de la función inversa. La función logaritmo. Series de potencias. Principio de los ceros aislados.

3. *Fórmula integral de Cauchy y sus aplicaciones.* Fórmula de Green. Teorema de Cauchy. Teorema de Liouville. Teorema de Morera. La función primitiva en un dominio simplemente conexo. Fórmula integral de Cauchy. Equivalencia entre holomorfía y analiticidad.

4. *Cálculo de residuos.* Singularidades aisladas. Teorema de la singularidad evitable de Riemann. Series de Laurent. Teorema de los residuos. Aplicaciones al cálculo de integrales.

5. *Algunos teoremas fundamentales de la variable compleja.* Teorema de Rouché. Principio del argumento. Teorema de la aplicación abierta. Principio del módulo máximo. Lema de Schwarz.

6. *Introducción a la representación (transformación) conforme.* Transformaciones de Möbius. Automorfismos del disco. Teorema de representación conforme de Riemann. Aplicaciones conformes entre distintos dominios simplemente conexos en el plano.

Referencias

- L.V. Ahlfors, *Complex Variables*, McGraw-Hill, 1979. (*Análisis de Variable Compleja*, Aguilar, 1971.)
- J. W. Brown, E.V. Churchill, *Variable compleja y aplicaciones*, McGraw-Hill, 2004
- J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer, 1983.
- A. Fernández Arias, *Teoría de funciones de variable compleja*, Sanz y Torres, 2016.
- T.W. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer, 2003.
- N. Levinson, R. Redheffer, *Curso de variable compleja*, Reverté, 1990.
- D. Pestana, J.M. Rodríguez, F. Marcellán, *Curso práctico de variable compleja y teoría de transformadas*, Pearson, 2013.

Evaluación continua

La nota del curso se basará en el examen final y en dos exámenes parciales de 45-50' de duración cada uno (que se realizarán en horario de clase y se anunciarán oportunamente), siendo la calificación final del curso $C = 0,2P_1 + 0,2P_2 + 0,6F$ (en caso de presentarse a ambos parciales) o $C = 0,2P_k + 0,8F$ (en caso de presentarse sólo a un parcial), donde F es la nota del examen final y P_k la nota del parcial k-ésimo, $k \in \{1,2\}$. En la convocatoria extraordinaria, sólo se tendrá en cuenta la nota del examen final.

Profesores y aulas

- Doble Grado (grupo 240), Módulo 11, aula 101-1:

  José Pedro Moreno Díaz (despacho: Módulo 08, 211) josepedro.moreno@uam.es

- Grado en Matematicas (grupo 731), Módulo 03, aula 401:

  Dragan Vukotić, coordinador (despacho: Módulo 08, 208) dragan.vukotic@uam.es

  Los materiales del curso estarán disponibles en http://www.uam.es/dragan.vukotic

VARIABLE COMPLEJA I

TEMA 1 NÚMEROS COMPLEJOS Y FUNCIONES

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

Notación: $(a,b) = a + bi$

Veamos que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un CUERPO:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a,b)$$

$$(a,b)\cdot(x,y) = (1,0) \Longrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = \boxed{a^2+b^2 \neq 0}$$

cálculo de inverso

CONDICIÓN Para que tenga inverso

Resolviendo el cálculo del inverso:

$$(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Observación 1: $(0,1)\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1 \Longrightarrow i^2 = -1$

Observación 2: $(a,0) = a \Longrightarrow$ Los reales respetan las operaciones de los números complejos

Observación 3: $(x+yi)^2 = a+bi \longrightarrow$ calculamos las raíces de (a,b)

$$(x^2-y^2,\ 2xy) = (a,b) \longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Resolviendo salen dos raíces

siempre se puede resolver

Notación: $z = a + bi = (a,b)$

$$a = Re(z)$$
$$b = Im(z)$$

$\overline{z} = (a,-b)$ conjugado de z

Propiedades del conjugado:

1) $z.\overline{z} = (a,b)(a,-b) = (a^2+b^2, 0) \Longrightarrow z.\overline{z} = |z|^2$

$|z| = +\sqrt{a^2+b^2}$; $|z|^2 = a^2+b^2$

2) $|z_1 . z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

demostración

$|z_1.z_2|^2 = (z_1.z_2)(\overline{z_1.z_2}) = \circledast$

Pausa: ¿ $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$ con $z,w \in \mathbb{C}$?

$$\left.\begin{array}{l} z = (a,b) \\ w = (c,d) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} zw = (ac-bd, ad+bc) \\ \overline{zw} = (ac-bd, -ad-bc) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{z} = (a,-b) \\ \overline{w} = (c,-d) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{z}.\overline{w} = (ac-bd, -ad-bc) = \overline{zw}$$

$\circledast = (z_1.z_2)(\overline{z_1}.\overline{z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2.\overline{z_2}) = |z_1|^2 . |z_2|^2$ ∎

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

4) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

5) $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ (visto) y además $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

6) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

8) $z + \overline{z} = 2 Re(z)$; $z - \overline{z} = 2 Im(z)$

9) $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

10) $|Re(z)| \leq |z| = \sqrt{|Re(z)|^2 + |Im(z)|^2}$

$|Im(z)| \leq |z| = \sqrt{|Re(z)|^2 + |Im(z)|^2}$

Vamos a demostrar la desigualdad triangular: $|z+w| \leq |z| + |w|$

Queremos probar esto: $|z+w|^2 \underset{?}{\leq} (|z|+|w|)^2$

$$|z+w|^2 = (z+w)\cdot(\overline{z+w}) \overset{?}{\leq} (|z|+|w|)^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$$

$$\overline{z+w} = (\bar{z}+\bar{w})$$

$$\Rightarrow z\cdot\bar{z} + \bar{z}\cdot w + z\cdot\bar{w} + w\bar{w} = (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w}) \underset{?}{\leq}$$

$$z\cdot\bar{z} + \bar{z}\cdot w + z\cdot\bar{w} + w\bar{w} = |z|^2 + \bar{z}w + z\bar{w} + |w|^2$$

Solo nos falta demostrar que $\bar{z}w + z\bar{w} \leq 2|z||w|$:

$$\bar{z}w + z\bar{w} = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) \Longrightarrow ¿\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) \leq |z||w|\,?$$

$\bar{z}w = \overline{z\bar{w}}$

Sí, porque $|z||w| = |z||\bar{w}| = |z\bar{w}|$

y sabemos que $|\mathrm{Re}(x)| \leq |x|$ ■

Ahora veamos que $|z| - |w| \leq |z+w|$:

$$|z| = |z+w-w| \leq |z+w| + |w| \Longrightarrow |z| - |w| \leq |z+w| \;■$$

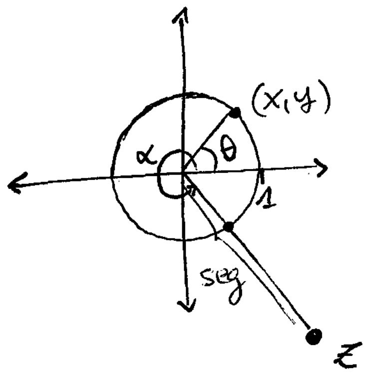
Y también $|w| - |z| \leq |z+w|$, haciendo lo mismo.

Por lo que: $\boxed{\big||z|-|w|\big| \leq |z+w| \leq |z| + |w|}$

Usando inducción podemos ver fácilmente que:

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

FORMA POLAR



$x^2+y^2=1$

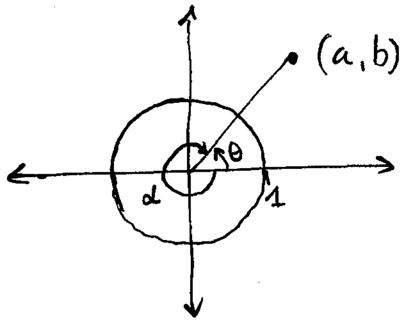
$(x,y)=(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

longitud del segmento 'seg' (módulo de z, $\rho = |z|$ ó $r=|z|$)

$z = |z|(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

argumento de z
$\arg(z)=\alpha$

Observación: no existe un único argumento válido



$\theta - \alpha = 2\pi \Rightarrow \theta = \alpha + 2\pi$

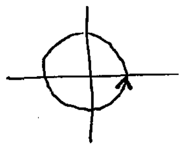
Como las funciones $\operatorname{sen}(\cdot)$ y $\cos(\cdot)$ son periódicas de periodo 2π, da igual que ángulo escojamos.

No obstante, hay muchos argumentos válidos más:

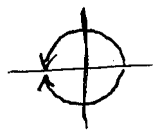
$\arg(z) = \{\theta + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$

$\operatorname{Arg}(z)$ = argumento principal

elección 1 → $[0,2\pi)$



elección 2 → $(-\pi,\pi]$



Representación polar: $z = \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = \rho \cdot \operatorname{cis}\theta$

$\theta \in \arg(z) \qquad \rho = |z|$

Spoiler: dentro de poco $z = \rho e^{i\theta}$

Observación 2: $z = \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = a+bi$

$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}(\theta)$, pero esto no implica que $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ porque la función arctg está definida solo en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

<u>Ejemplo</u>: $z = 1 - i = \underbrace{\sqrt{2}}_{\substack{\| \\ |z| \\ \| \\ \sqrt{1^2+(-1)^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

Buscamos θ tal que $\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$ $\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$ ó $\theta = \frac{7\pi}{4}$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4},\ \mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$$

Ahora, ¿z^{-1}?

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{2}(1+i)$$

<u>Ejemplo multiplicación</u>: $z = \rho_1(\cos\theta_1, \mathrm{sen}\,\theta_1)$

$w = \rho_2(\cos\theta_2, \mathrm{sen}\,\theta_2)$

$$\Rightarrow z.w = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2,\ \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2) =$$

$$= \underbrace{\rho_1\rho_2}_{\text{producto módulos}}\left(\cos(\theta_1+\theta_2),\ \mathrm{sen}\,\underbrace{(\theta_1+\theta_2)}_{\text{suma argumentos}}\right)$$

Esto simplifica el cálculo de raíces y de potencias

<u>Ejemplo</u>: $z = r(\cos t, \mathrm{sen}\,t)$

$\Rightarrow z^n = r^n(\cos(nt), \mathrm{sen}(nt))$ $\Big\} \rightarrow$ $(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)^n = \cos(nt) + i\,\mathrm{sen}(nt)$

FÓRMULA DE MOIVRE

- ¿Cómo calcular raíces n-ésimas? $\boxed{z^n = w}$ $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\left.\begin{array}{l} w = \rho(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta) \\ z = r(\cos t, \mathrm{sen}\,t) \end{array}\right\} \Rightarrow z^n = r^n(\cos(nt), \mathrm{sen}(nt)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r^n = \rho \\ nt = \theta \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[n]{\rho}} \\ \Rightarrow nt = \theta + 2\pi K \Rightarrow \boxed{t = \frac{\theta}{n} + 2\pi\frac{K}{n} \quad K = 0, 1, \dots, n} \end{array}$

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son reales $\Longrightarrow$ las raíces son reales o vienen en parejas $z, \bar{z}$.

<u>Aplicación fórmula de Moivre</u>: Probar que

$$1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

Para demostrarlo empezamos analizando $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n} \neq 1$

$w^n = \cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\, 2\pi = 1 \quad \Longrightarrow \quad w^n - 1 = 0 = 1 - w^n$

como sabemos, $w^n - 1 = 0$ es un pol. ciclotómico, por lo que

$$0 = 1 - w^n = (1 - w)(1 + w + \cdots + w^{n-1})$$

Como $1 - w \neq 0 \Longrightarrow 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$

$$\mathrm{Re}(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = \mathrm{Re}(0) = 0$$

fórmula de Moivre

Afirmamos que $\mathrm{Re}(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$ ■

<u>Obs</u>: $\mathrm{Im}(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = \mathrm{Im}(0) = 0$

$$\mathrm{Im}(1 + w + \cdots + w^{n-1}) = \mathrm{sen}\frac{2\pi}{n} + \mathrm{sen}\frac{4\pi}{n} + \cdots + \mathrm{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

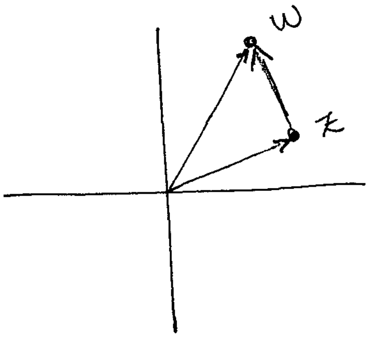
Demostrar que $\cos(nx)$ es un polinomio de $\cos x$ de grado n

Para hacerlo, usaremos inducción

Ejemplo: calcular $\cos(3x)$

$$\cos(3x) \overset{\text{De Moivre}}{=} Re\left[(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3\right] \overset{\text{Binomio}}{=} Re\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cdots\right)$$

Subconjuntos en el plano



$z = a+bi$
$w = c+di$

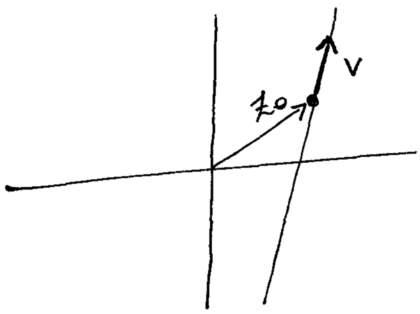
$$|z-w| = |(a-c)+(b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} = \underset{\|z-w\|_2}{\overset{\|}{dist(z,w)}}$$

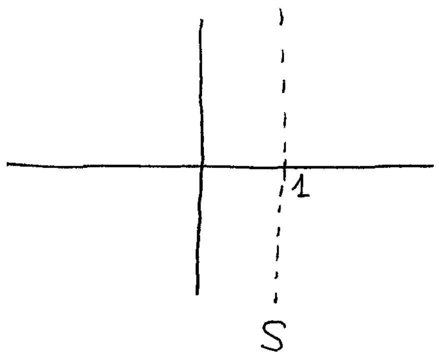
$$D_r(z) = B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < r\} \; ; \; \overline{D_r}(z) = \overline{B_r}(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| \leq r\}$$

$$C_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| = r\} \; ; \quad S^1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\} = \{\cos t + i \operatorname{sen} t : t \in [0, 2\pi)\}$$

$$L = \{z = z_0 + tv : t \in \mathbb{R}\} = \{z - z_0 = tv : t \in \mathbb{R}\} = \left\{\frac{z-z_0}{v} = t : t \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{z \in \mathbb{C} : Im\left(\frac{z-z_0}{v}\right) = 0\right\}$$





$$S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 1\} = \{Re(z) = 1\}$$

A veces lo económico no es lo más sencillo

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = z^2$$

$f(S)$ ¿qué es?

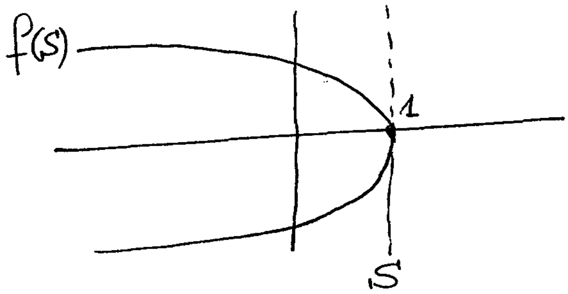
$\hookrightarrow$ Complicado, necesitamos escribir S de otra forma

$S = \{ z = (1, t) : t \in \mathbb{R} \} = \{ z = 1 + ti : t \in \mathbb{R} \}$

$$(1+ti)^2 = (1-t^2) + 2ti = x + yi \longrightarrow \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 2t \rightarrow t = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

Una parábola de cero $(1,0)$



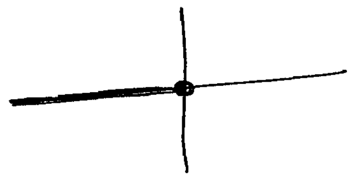
Si hacemos lo mismo para $S_{1/2} = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) = \frac{1}{2} \}$ te queda

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} t^2 \\ y = t \end{cases} \longrightarrow x = \frac{1}{4} - t^2$$

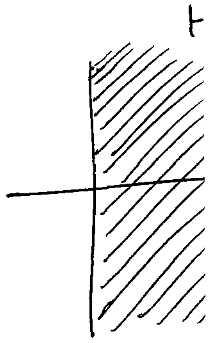
otra parábola

Esto pasa para todas las rectas $S_a = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) = a \}$, menos para el caso $S_0 = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) = 0 \} = \{ z = ti : t \in \mathbb{R} \}$

$z^2 = t^2 i^2 = -t^2$, es decir la semirecta dentro de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ $(-\infty, 0)$.



Ahora nos preguntamos qué pasa en $H = \{ Re(z) \geq 0 \}$



¿ $f(H) = \mathbb{C}$? Sí, porque $\forall w \in \mathbb{C}$, $\exists z \in H$ tal que $z^2 = w$

$\downarrow$

las raíces de esta ecuación son un nº en $\mathbb{C}$ y su opuesto.

Al menos uno de ellos está en H

Para el futuro: ¿qué forma tiene este subconjunto?

$$L = \{ z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| < 1 \}$$

$$L = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| < 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \underbrace{|z^2 - 1|^2}_{=\,(z^2-1)(\bar{z}^2-1)\,<\,1} < 1\}$$

$$(z^2-1)(\bar{z}^2-1) = |z|^4 - z^2 - \bar{z}^2 + \cancel{1} < \cancel{1} \Longrightarrow$$

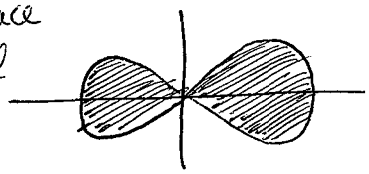
$$\Longrightarrow |z|^4 - z^2 - \bar{z}^2 < 0 \Longrightarrow |z|^4 < z^2 + \bar{z}^2$$

Si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$: $r^4 < r^2(\cos(2\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta)) + r^2(\cos(2\theta) - i\operatorname{sen}(2\theta))$

$$\Rightarrow r^4 < r^2 \cdot 2\cos(2\theta) = 2r^2\cos(2\theta) \Longrightarrow \boxed{r^2 < \boxed{2\cos(2\theta)}}$$

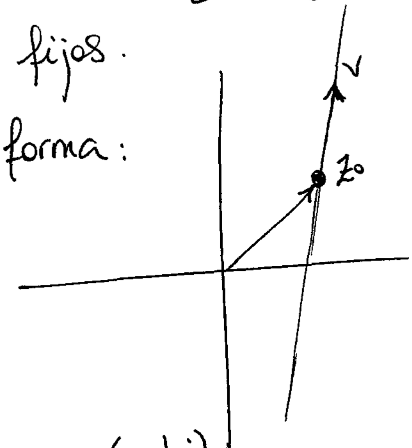
$r = 0 \Rightarrow z = 0$ que no satisface la desigualdad

LEMNISCATA



¿Cuál es el siguiente subconjunto?

$L \equiv \operatorname{Im}\left(\frac{z-z_0}{v}\right) =$



$H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z - z_0}{v}\right) > 0\}$ con $z_0, v \in \mathbb{C}$ fijos.

Recordemos que $\operatorname{Im}\left(\frac{z-z_0}{v}\right) > 0$ es de la forma:

Sea $w \in \mathbb{C}$: $w = \frac{z - z_0}{v} = a + bi$ con $b > 0$

$H = \{z \in \mathbb{C} : w = \frac{z - z_0}{v} = a + bi$ con $\underline{b > 0}\}$

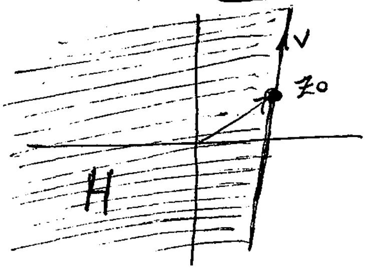
Despejemos z : $z - z_0 = v(a + bi) \Longrightarrow z = z_0 + v(a+bi)$

$$\Longrightarrow z = \underbrace{z_0 + av}_{\Uparrow\ L} + \underbrace{b\boxed{iv}}$$

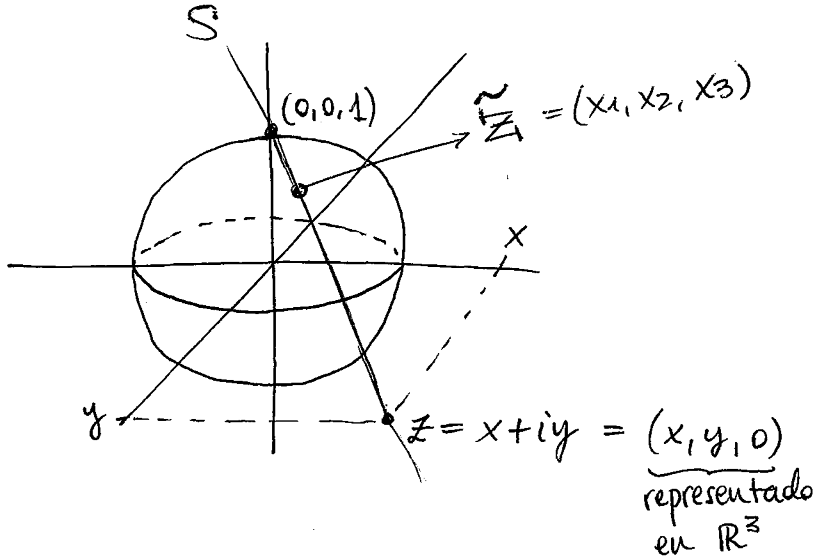
multiplicar un número complejo (v) por i es girarlo $90°$ ó $\frac{\pi}{2}$.

multiplicar por b es solo aumentar su módulo.

Por lo tanto vemos que si z tiene esta forma $(z = z_0 + av + biv)$ entonces $z \in H$. Habría que ver la inclusión contraria (que es seguir los mismos pasos al revés)



EL PLANO EXTENDIDO Y SU REPRESENTACION ESFERICA



Las imágenes de los puntos fuera de S^1 (plano XY) están en el hemisferio superior.
Las imágenes de los puntos dentro de S^1 están en el hemisferio inferior.
La imagen del $(0,0,0)$ es el polo sur. $(0,0,-1)$

Como $(0,0,1)$ no es imagen de nadie, se lo asignamos a ∞.

Supongamos conocido $\tilde{z} = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$
¿Cómo encontramos z?

$$S = \{ \lambda(0,0,1) + (1-\lambda)(x,y,0) \ , \ \lambda \in [0,1] \}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \tilde{z} = \lambda(0,0,1) + (1-\lambda)(x,y,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = (1-\lambda)x \\ x_2 = (1-\lambda)y \\ x_3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{x_1}{1-\underbrace{\lambda}_{x_3}} \qquad y = \frac{x_2}{1-\underbrace{\lambda}_{x_3}}$$

Obs: Sabemos que $1-\lambda \neq 0$ porque $\lambda \neq 1$ porque sería el polo norte.

Con esto buscamos demostrar que $\mathbb{C} \simeq S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$

- Suponemos ahora conocido $z = x+iy = (x,y,0)$ (representado en $\mathbb{R}^3$)
  ¿Cómo encontramos $\tilde{z}$? $\quad N = (0,0,1)$

Recta $S \equiv \{ tN + (1-t)z : t \in \mathbb{R} \} = \{ t(0,0,1) + (1-t)(x,y,0) : t \in \mathbb{R} \} =$

$$= \{ ((1-t)x, (1-t)y, t) : t \in \mathbb{R} \}$$

Buscamos que $((1-t)x, (1-t)y, t) \in S^1$ para algún t:

$$(1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 = 1$$

$$\overset{\shortparallel}{(1-t)^2|z|^2 + t^2} \Rightarrow (1-t)^2|z|^2 = 1-t^2 \Rightarrow (1-t)^{\cancel{2}}|z|^2 = \cancel{(1-t)}(1+t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-t)|z|^2 = 1+t \Rightarrow |z|^2 - 1 = t(1+|z|^2) \longrightarrow \boxed{\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = t}$$

$$1-t = \frac{|z|^2+1}{|z|^2+1} - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = \frac{2}{|z|^2+1}$$

Por lo que $\boxed{\underset{\substack{\shortparallel \\ f(z)}}{\tilde{z}} = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) = \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{-i(z-\bar{z})}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)}$

$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus N$ homeomorfismo

Además:

$f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ homeomorfismo (plano extendido)

$f(\infty) = N$

¿Cómo definimos una distancia en $\overline{\mathbb{C}}$ que induzca en $\mathbb{C}$ la topología usual?

$d(z, z') = \| f(z) - f(z') \|_2 \quad z, z' \in \overline{\mathbb{C}}$ MÉTRICA CORDAL

Nuestro objetivo es encontrar la expresión de $\underset{z,z' \in \mathbb{C}}{d(z,z')}$ y $\underset{z \in \mathbb{C}}{d(z,\infty)}$

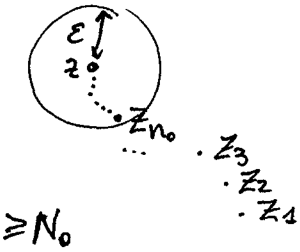
$$d(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Aspectos topológicos del plano complejo

$$d: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+\cup\{0\}$$
$$z,\ w \longmapsto |z-w| = \|(x,y)-(x',y')\|_2$$

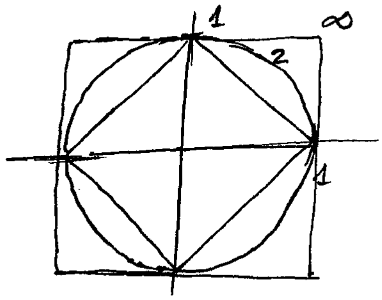
con $\begin{cases} z = x+iy \\ w = x'+iy' \end{cases}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sucesión}}}{\{z_n\}} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{límite de la sucesión}}}{z} \iff \{|z_n - z|\} \longrightarrow 0$$



Para cada $\varepsilon>0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$ tal que $z_n\in D(z,\varepsilon)$ $\forall n\geq N_0$

$$|Re(z)|,\ |Im(z)| \leq |z| \leq |Re(z)|+|Im(z)|$$
$$|x|,|y| \leq |z| = \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$$
$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$



Sucesión compleja $\{z_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} z \iff \begin{cases} \{Re(z_n)\} \longrightarrow Re(z) \\ \{Im(z_n)\} \longrightarrow Im(z) \end{cases}$

Esto se deduce de que $|Re(z)|,|Im(z)|\leq|z| \leq |Re(z)|+|Im(z)|$

$$z_n \longrightarrow z \iff |z_n - z| \longrightarrow 0 \iff \begin{cases} \{Re(z_n-z)\} \longrightarrow 0 \\ \{Im(z_n-z)\} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Si $\{z_n\} \longrightarrow z \implies \{|z_n|\} \longrightarrow |z|$

$$\longrightarrow |z_n - z| \longrightarrow 0$$

$$0 \leq \big||z_n|-|z|\big| \leq |z_n - z|$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad \text{Lema Sandwich} \qquad 0$$

$$0$$

<u>Ejemplo</u>: ¿a dónde converge?

$\left\{ z_n = \frac{n}{n+i} \right\}$ Creemos que el límite puede ser 1, veámoslo:

$$\left| \frac{n}{n+i} - 1 \right| = \left| \frac{n}{n+i} - \frac{n+i}{n+i} \right| = \left| \frac{-i}{n+i} \right| = \frac{1}{|n+i|} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

<u>SERIES</u>: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z \equiv \left\{ \sum_{n=1}^{m} z_n \right\} \xrightarrow[m\to\infty]{} z$

<u>Observación</u>: $\{z_n\}$ es de Cauchy $\Longleftrightarrow \begin{cases} \{Re(z_n)\} \text{ es de Cauchy} \\ \text{y} \\ \{Im(z_n)\} \text{ es de Cauchy} \end{cases}$

<u>PROPOSICIÓN</u>: $\{z_n\}$ es convergente $\Longleftrightarrow$ $\{z_n\}$ es de Cauchy. (en $\mathbb{C}$)

<u>RESULTADOS VARIOS</u>:

i) Suma de series convergentes $\Longrightarrow$ convergente

ii) Si $\sum z_n$ converge $\Longrightarrow \{z_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>demostración</u>

Si $\sum z_n$ converge $\Rightarrow$ fijado $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$\left| \sum_{n=1}^{m} z_n - \sum_{n=1}^{k} z_n \right| < \varepsilon$ si $k, m \geq n_1$. En particular, si $m = k+1$

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{m} z_n - \sum_{n=1}^{k} z_n \right| = \left| z_{k+1} \right| < \varepsilon \text{ si } k \geq n_1 . \Rightarrow \{z_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

iii) Si $\sum |z_n|$ converge $\Longrightarrow \sum z_n$ converge.

iv) A compacto $\Longleftrightarrow$ A cerrado y acotado (en $\mathbb{C}$)

Ejemplos

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2+i}$ ¿converge?

$$\left|\frac{i^k}{k^2+i}\right| = \left|\frac{1}{k^2+i}\right| = \frac{1}{|k^2+i|} = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}} \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{CONVERGE}$$

$\Longrightarrow$ Como $\sum \frac{1}{k^2}$ converge $\Longrightarrow \sum\left|\frac{i^k}{k^2+1}\right|$ converge $\Rightarrow \sum \frac{i^k}{k^2+1}$ converge

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+i} = \sum \frac{k-i}{k^2+1}$

Parte real: $\sum \frac{k}{k^2+1}$ comparable a $\sum \frac{1}{k}$ que NO converge

$\Rightarrow \sum \frac{1}{k+i}$ no converge porque su parte real no converge

FUNCIONES CONTINUAS COMPLEJAS

Una función compleja, definida en un entorno de z_0 es continua en z_0 si $\{f(z_n)\} \longrightarrow f(z_0) \quad \forall \{z_n\} \longrightarrow z_0$.

Si f es continua en todo su dominio, se dice que es continua.

$$f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \in \mathcal{D} \longmapsto f(z) = u(z) + i v(z)$$
$$z = x+iy = (x,y)$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

f es continua $\Longleftrightarrow$ u, v continuas

$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{U}$ entorno de z_0

f es continua en z_0 si $\forall \{z_n\} \subset \mathcal{U}$ tal que $\{z_n\} \longrightarrow z_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{f(z_n)\} \longrightarrow f(z_0)$

$f(z) = u(z) + iv(z)$

si $z = x+iy$: $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

<u>PROPOSICIÓN</u>: f continua $\Leftrightarrow$ u, v continuas

<u>PROPOSICIÓN</u>: La suma, el producto y el cociente (allí donde el denominador no se anula) de funciones continuas, es una función continua.

<u>demostración</u>

i) $(f+f')(z) = f(z) + f'(z) = \big(u(z) + iv(z)\big) + \big(u'(z) + iv'(z)\big) =$

$$= \big(u(z) + u'(z)\big) + i\big(v(z) + v'(z)\big)$$

ii) $f \cdot g = (u.v - u'v') + i(uv' + u'v)$

iii) $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \Rightarrow$ ¿ g^{-1}, la función inverso es continua si $\neq 0$?

Sí, porque $g^{-1} = \frac{\bar{g}}{|g|^2} = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$

■

<u>CONVERGENCIA UNIFORME</u>: $\{f_n\}: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad n \geq n_0, \forall z \in D$.

<u>PROPOSICIÓN</u>: $\{f_n\} \longrightarrow f$ unif. $\Longleftrightarrow \begin{cases} Re(f_n) \longrightarrow Re(f) \text{ unif.} \\ Im(f_n) \longrightarrow Im(f) \text{ unif.} \end{cases}$

M-TEST: Supongamos $\{f_n\}: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas

Si $|f_n(z)| \leq M_n \ \forall z \in D$ y $\sum_n M_n < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a una función $f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua

Notación: $\left\{\sum_{n=1}^{K} f_n\right\} \xrightarrow[K \to \infty]{} f$ se escribe así $\sum_n f_n = f$.

demostración

Fijado $z \in D$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es convergente porque es absolutamente convergente: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| < \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

Denotemos por $f(z)$ al límite de $\left\{\sum_{n=1}^{K} f_n(z)\right\}$ (e.d., a $\sum_n f_n(z)$)

¿por qué $f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ así definida es continua?

Porque $\sum_{n=1}^{K} f_n(z)$ son continuas y convergen uniformemente a $f(z)$.

Fijo $\varepsilon > 0$, hay que encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{n=1}^{m} f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon$ si $m \geq n_0$, $\forall z \in D$.

$$\left|\sum_{n=1}^{m} f_n(z) - f(z)\right| = \left|\cancel{\sum_{n=1}^{m} f_n(z)} - \cancel{\sum_{n=1}^{m} f_n(z)} - \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} M_n \quad (*)$$

(*) Es la cola de una serie convergente, por lo que se puede hacer tan pequeña como queramos ($< \varepsilon$).

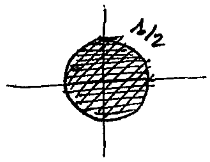
Observación: El M-test es solo una implicación, no una condición necesaria y suficiente.

Ejemplo: $\{f_n(z) = nz^n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ para saber si converge (y a donde) intentamos aplicar el M-test

Si $|z| \le \frac{1}{2} \implies |nz^n| \le n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^n}$

Como $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \text{ es convergente}}_{(*)}$, podemos aplicar el M-test. $\implies$

$\implies \sum f_n$ converge unif. en $\{|z| \le \frac{1}{2}\}$



(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ es convergente por el criterio de la raíz

<u>Criterio de la raíz</u>: Dada una serie compleja $\sum z_n$, consideramos

$\rho = \limsup \sqrt[n]{|z_n|}$. Si $\rho < 1 \implies \sum z_n$ converge absolutamente

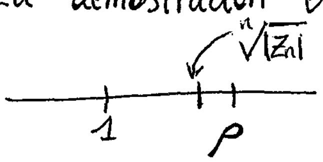
Si $\rho > 1 \implies \sum z_n$ diverge

Si $\rho = 1 \implies$ no hay información

<u>demostración del criterio</u>

La demostración es la misma que en el caso real

$\rho > 1$:



$\rho = \limsup \sqrt[n]{|z_n|}$

hay infinitos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|z_n|} > 1 \iff |z_n| > 1 \implies \sum z_n$ diverge

Queda pendiente el caso $\rho < 1$.

TEMA 2 | FUNCIONES HOLOMORFAS

DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPLEJAS

Las funciones complejas son "funciones de z": $f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z)$

Ejemplo: $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$

$z = x+iy \implies p(z) = p(x,y) = \left(Re(\alpha_0) + Re(\alpha_1)x - Im(\alpha_1)y + \cdots, \ldots\right)$ [POCO ÚTIL]

En resumen, si tengo un polinomio complejo, tengo una función de dos variables.

Y al contrario, ¿es cierto que todo polinomio de dos variables es un polinomio complejo? No. Consideramos $x^2+y^2-2xyi =$

$= \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n = \alpha_0 + \alpha_1(x+iy) + \cdots + \alpha_n(x+iy)^n$

Si $y=0$, entonces: $x^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \implies$

$\implies 0 = \alpha_0 + \alpha_1 x + (\alpha_2 - 1)x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ (cierto $\forall x \in \mathbb{R}$)

En particular será cierto si $x=0$. $\implies \alpha_0 = 0$

$\implies 0 = \alpha_1 x + (\alpha_2 - 1)x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ (cierto $\forall x \in \mathbb{R}$)

En particular será cierto $\forall x \in \mathbb{R}$ distinto de cero: [obs *]

$\implies 0 = \alpha_1 + (\alpha_2 - 1)x + \cdots + \alpha_n x^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \implies$

$\implies$ cierto $\forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 = 0$

$\vdots$

$\alpha_n = 0$

$\implies x^2+y^2-2xyi = z^2 = x^2-y^2+2xyi$

$\neq$

no es x^2+y^2-2xyi un polinomio complejo

$\implies$ No tiene utilidad ver los polinomios complejos como funciones de dos variables.

DEFINICIÓN: $f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

Se dice que f es DERIVABLE en z si existe el siguiente límite: $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$. Cuando dicho límite existe, se denota mediante $f'(z)$, y se llama DERIVADA de f en z

Ejemplo:

1) $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ No es derivable en ningún punto.
$z \longmapsto f(z) = \bar{z}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\bar{z}} + \bar{h} - \cancel{\bar{z}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h \in \mathbb{R} \\ -1 & \text{si } Re(h) = \end{cases}$$

2) $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable y además $g'(z) = nz^{n-1}$.
$z \longmapsto g(z) = z^n$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{z^n} + \binom{n}{1} z^{n-1} \cancel{h} + \binom{n}{2} z^{n-2} h^{\cancel{2}} + \dots + h^{\cancel{n}\, n-1} - \cancel{z^n}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} n z^{n-1} + h \underbrace{\left(\binom{n}{2} z^{n-2} + \dots + h^{n-2} \right)}_{\text{acotado}} = nz^{n-1}$$

$\hookrightarrow$ como mucho vale $n \cdot (\max\{1, |z|\})^n n! < \infty$

PROPOSICIÓN: Si f, g son derivables en z, entonces $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ también lo son, siendo además:

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z) \quad ; \quad (f-g)'(z) = f'(z) - g'(z)$$

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

Si $g'(z) \neq 0$, entonces también $\frac{f}{g}$ es derivable en z, siendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

Proposición: Si f es derivable en $z \Longrightarrow f$ es continua en z.

demostración

f es continua en $z \iff \lim_{h\to 0} f(z+h) - f(z) = 0$

$$f(z+h) - f(z) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \cdot h \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(z+h) - f(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \cdot h =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(z) \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

Demostración de que $z^n = 1$ si $z \neq 1$ y $\theta \notin \pi\mathbb{Q}$ es denso en S^1

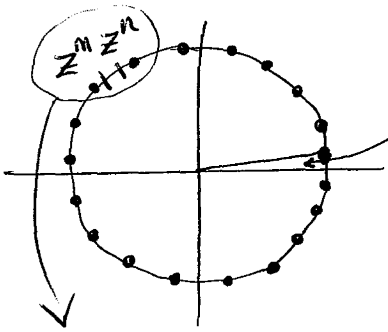
$\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ [*] $\longrightarrow$ veamos que $\{z^n\}$ nunca repite el mismo valor [☆]

Supongamos que sí: $\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta) = \cos(m\theta) + i\,\mathrm{sen}(m\theta) \iff$

$\iff n\theta = m\theta + 2\pi K \iff (n-m)\theta = 2K\pi \iff \frac{\theta}{\pi} = \frac{2K}{n-m} \in \mathbb{Q}$

contradicción con [*]

Veamos que es denso:



arco de tamaño $\frac{2\pi}{M}$ de tal forma que los puntos de limitan el arco están a distancia menor que ε.

Buscamos encontrar dos potencias en el mismo arco.
Si los encontramos, como ε era arbitrario $\Longrightarrow$ sería denso.

Sabemos que hay al menos dos potencias debido a que hay un nº finito de arcos. Esto junto [☆] y el Principio del Palomar nos lo asegura.

$z = x+iy$; $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

Supongamos que f es derivable (en el sentido complejo) en z:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \overset{\text{si } h\in\mathbb{R}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) + iv(x+h,y) - u(x,y) - iv(x,y)}{h} =$$

$$= \boxed{u_x + iv_x = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}} \quad [1]$$

ahora, si $h\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$h\in\mathbb{R}$

$ih\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h) + iv(x,y+h) - u(x,y) - iv(x,y)}{ih}$$

$$= \frac{u_y}{i} + v_y = \boxed{-iu_y + v_y = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}} \quad [2]$$

Como $[1] = [2]$, llegamos a las <u>ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN</u>:

$$\boxed{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{array}}$$

donde hemos igualado partes reales y partes imaginarias en [1] y [2].

<u>Conclusión</u>: si $f(z) = f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ es derivable, en el sentido complejo, en $z \Longrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$.

El recíproco no es cierto: $f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = (0,0)$$

($f\equiv 0$ en los ejes)

y se cumple C-R, pero f no es derivable en $z=0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Re}(h)\,\mathrm{Im}(h)}{|h|^2} = \lim_{(x,y)\to\vec{0}}\frac{xy}{x^2+y^2} \overset{\text{radiales}}{=}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{depende de } \theta$$

Proposición: Si todas las derivadas parciales existen, son continuas en z y se verifica C-R, entonces f es derivable en z.

Observación: Si $f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en z, entonces también es diferenciable en z. Además, si $f'(z) = a + bi$, entonces
$$Df(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Regla de la cadena: Sean f y g holomorfas en G y Ω respectivamente. Supongamos que $f(G) \subset \Omega$. Entonces $g \circ f$ es holomorfa y además $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) \quad \forall z \in G$.

Regla de la cadena: $f: G \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $g: G \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(G) \subseteq \Omega$

Si f es derivable en G y g es derivable en Ω, Entonces $g \circ f$ es derivable en G y $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z)$

demostración

Fijamos $z_0 \in G$, $\lim_{h_n \to 0} \frac{(g \circ f)(z_0 + h_n) - (g \circ f)(z_0)}{h_n} \overset{?}{=} g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$,

hay que probar eso para cada sucesión $\{h_n\} \longrightarrow 0$.

caso 1: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(z_0 + h) - f(z_0) \neq 0$

$$\frac{g(f(z_0 + h_n)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h_n) - f(z_0)} \qquad \frac{f(z_0 + h_n) - f(z_0)}{h_n}$$

(f cont. en z_0) $\downarrow n \to \infty$ $\qquad$ $\downarrow n \to \infty$

$$g'(f(z_0)) \qquad f'(z_0)$$

Recuerda: $f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$

caso 2: $f(z_0+h_n) - f(z_0) = 0$ para una cantidad infinita de n's.

Caso 2.1: Supongamos que $\{h_n\}$ se puede expresar como la unión de dos subsucesiones que denotamos mediante $\{l_n\}$ y $\{K_n\}$.

caso 2.2: $f(z_0+h_n) = f(z_0)$ $\forall n$

$$f'(z_0) = \lim_n \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{l_n} = 0$$

$$\lim_n \frac{g\circ f(z_0+l_n) - g\circ f(z_0)}{l_n} = \lim_n \frac{g(f(z_0+h)) - g(f(z_0))}{l_n} = 0$$

$$\lim_n \frac{g(f(z_0+K_n)) - g(f(z_0))}{K_n} = \lim_n \frac{g(f(z_0+K_n)) - g(f(z_0))}{f(z_0+K_n) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z_0+K_n) - f(z_0)}{K_n} =$$

$$= g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot 0 = 0$$

$\blacksquare$

f biyectiva

Supongamos que S y T son abiertos, $f: S \longrightarrow T$ es inyectiva. Suponemos que $f(S) = T$. Suponemos que $g = f^{-1}: T \longrightarrow S$ es continua en $z_0 \in T$. Entonces, si f es derivable en $g(z_0)$ y además $f'(g(z_0)) \neq 0$, se tiene que g es derivable en z_0 y $g'(z_0) = \dfrac{1}{f'(g(z_0))}$

$$f\circ g(z) = z = id_T$$

No se puede aplicar la R.C porque g es solo continua.

Calculemos:

Si $z \neq z_0$
$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{\dfrac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)}} = \frac{1}{f(g(z)) - f(g(z_0))}$$

tomando límite

$z \to z_0$

$\Downarrow$

$g(z) \longrightarrow g(z_0)$

Proposición: Si $f: G \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa ($f \in \mathcal{H}(G)$). Si $f = u + iv$, y u es constante $\Longrightarrow f$ es constante en G.

demostración

Hay que probar que v es también constante.

Usando Cauchy-Riemann: $\begin{matrix} V_y = U_x = 0 \\ -V_x = U_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} v$ const.

Fijamos $z_0 \in G$. Hay que probar que $f(z) = f(z_0)\ \forall z \in G$ $\rightarrow$ [*]

G es conexo por caminos, lo cual significa que

$\exists\, \gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$,

$\{\gamma(t) : t \in [0,1]\} = \gamma^*$ (imagen o traza de γ) es compacto.

$\forall t \in [0,1]$, $\exists\, r_t > 0$ tal que $D(\gamma(t), r_t) \subset G$.

$\{D(\gamma(t), r_t) : t \in [0,1]\}$ recubrimiento abierto de γ^*.

γ^* es compacto $\Rightarrow \exists \{t_1, \dots, t_m\} \subset [0,1]$ tal que $\gamma^* \subset \bigcup_{i=1}^{m} D(\gamma(t_i), r_{t_i})$

Queremos sustituir r por un camino poligonal, hecho con segmentos verticales y horizontales. En realidad lo que hay que probar es que v es constante. Sabemos que $u = cte. \Rightarrow \begin{cases} U_x = 0 \\ U_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{cases} V_y = 0 \\ -V_x = 0 \Rightarrow V_x = 0 \end{cases}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} v$ constante

[*] ahora es $v(z) = v(z_0)\ \forall z \in G$. $v: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $z_0 \overset{S}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet} z$

Si v se restringe a un segmento horizontal S, entonces

$v|_S = g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g'(s) = V_x(s) = 0$. g es constante en S.

Lo mismo si considero un segmento vertical T: $v|_T = h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$h'(t) = V_y = 0$.

<u>PROPOSICIÓN</u>: $f: G \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, G región abierta y conexa, $f \in \mathcal{H}(G$
Si $|f| = cte. \Longrightarrow f$ es constante.

<u>demostración</u>

Si $|f| \equiv 0 \Longrightarrow f \equiv 0$

Si $|f| = cte. \neq 0 \Longrightarrow u^2 + v^2 = cte.$

Usamos C-R:
$$\begin{aligned}
&uu_x - vu_y = 0 \;] \leftarrow \text{mult. por } u\\
&uu_x + vv_x = 0\\
&uu_y + vv_y = 0\\
&vu_x + uu_y = 0 \;] \leftarrow \text{mult. por } v
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u.(uu_x - vu_y) = 0 \\ v.(vu_x + uu_y) = 0 \end{array} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \underset{\neq 0}{(u^2+v^2)}\, u_x = 0 \Rightarrow u_x = 0 \\ \text{de modo similar, } u_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u = cte. \Longrightarrow f$ cte.

<u>RECUERDO</u>:
Si $\underset{u+iv}{\overset{}{f}}: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en z_0, existe $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'$

$$\boxed{f'(z_0) = u_x + iv_x}$$

<u>PROPOSICIÓN</u>: Si $f'(z) = 0 \;\; \forall z \in \Omega$, entonces $f \equiv cte.$

Supongamos que f es inyectiva, $f(\Omega) = 1$,
$f: \Omega \longrightarrow T$, T abierto, $f^{-1} = g : T \longrightarrow \Omega$

<u>PROPOSICIÓN</u>: Si f es derivable en $g(z_0)$ y $f'(g(z_0)) \neq 0$, entonces g es derivable en z_0 y $g'(z_0) = \dfrac{1}{f'(g(z_0))}$.

FUNCIONES ARMÓNICAS

Supongamos que $u, v \in \mathcal{C}^2$

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= v_{yx} \\ u_{yy} &= (-v_x)_y = -v_{xy} = -v_{yx} \end{aligned}\right\} \text{sumando} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{ECUACIÓN DE LAPLACE}}$$

<u>DEFINICIÓN</u>: Una función $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ que cumple la ecuación de Laplace $\Delta h = 0$ se llama FUNCIÓN ARMÓNICA.

<u>Obs</u>: $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow \mathrm{Re}(f)$ es armónica

Como consecuencia, $\mathrm{Im}(f)$ también es armónica.

<u>PROPOSICIÓN</u>: Supongamos $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica.
Entonces $u_x - iu_y$ es holomorfa.

<u>demostración</u>

$g = u_x - iu_y$ ya es $\mathcal{C}^1$ porque $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica ($\mathcal{C}^2$).
Solo nos falta ver que g cumple C-R: $(u_x)_x = (-u_y)_x \Leftrightarrow \Delta u = 0$ ✓

$$-(u_x)_y = (-u_y)_x \Leftrightarrow u \in \mathcal{C}^2 \; ✓$$

∎

Hemos visto que si una función es armónica, entoces la función de las derivadas parciales es holomorfa.

DEFINICIÓN: Si $u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica y $v: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface que $u+iv \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se dice que v es la CONJUGADA ARMÓNICA de u.

RECUERDO:

$u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^2$, es armónica si $\Delta u = 0$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

Si $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\underset{u+iv}{\overset{\shortparallel}{f}} \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow \underset{u}{\overset{\shortparallel}{Re(f)}}$ es armónica $\Rightarrow \underset{v}{\overset{\shortparallel}{Im(f)}}$ es armónica

PROPOSICIÓN: Ω es simplemente conexo $\Longleftrightarrow$ toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω.

Ejemplo: $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo

$$u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

$$u_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad ; \quad u_{xx} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad ; \quad u_{yy} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

PROPOSICIÓN: Si $u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica $\Rightarrow f = u_x - i u_y$ es holomorfa en Ω.

¿Cómo determinar una conjugada armónica? (caso de que exista)

Ejemplo: $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ $\qquad u_x = v_y$

$u_y = -v_x$

Buscamos averiguar quien es v:

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$$

$$v = \int 3x^2 - 3y^2\,dy = 3x^2y - y^3 + C(x)$$

$$-v_x = -\left(6xy + C'(x)\right) = -6xy + 2 \implies C'(x) = -2$$

$$\Downarrow$$

$$C(x) = -2x + K$$

$$\implies \boxed{v = 3x^2y - y^3 - 2x + K}$$

SERIES DE POTENCIAS

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad a_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$a \in \mathbb{C}$$

$$\frac{P-VR}{P-R}$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad a_n = 1$$
$$a = 0$$

No converge si $|z| \geq 1 \implies |z|^n \geq 1$
$$\not\to 0$$

Si $|z| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-z}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Sea $R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

PROPOSICIÓN: Si $R|z-a| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ conv. absolutam

Si $R|z-a| > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ diverge

Si $R|z-a| = 1 \Rightarrow$ este método no te da informació

$|z-a| < \frac{1}{R}$ $\longrightarrow$ distancia que te puedes alejar de 'a' para asegurar convergencia.

$\frac{1}{R}$ se llama RADIO DE CONVERGENCIA.

Consecuencia importante: Si $0 < r < \frac{1}{R}$, entonces $\sum a_n(z-a)^n$ converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$