PROBLEMAS. HOJA 5. Epidemiología.

1. Considerar el modelo (SIS): Susceptible. Infectado. Susceptible.

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta IS + \alpha I \\ I'(t) = \beta IS - \alpha I \end{cases}$$

   a) Interpreta el modelo si S son susceptibles e I son Infectados.
   b) Comprobar que $N = S + I$ es constante como función de t.
   c) Sustituyendo ahora $S = N - I$ en la segunda comprobar que $I(t)$ es una ecuación logística. Estudiar su comportamiento cualitativo y resolverla explícitamente.

Solución:

   b) $S' + I' = 0$
   c) $I'(t) = \beta I(N - I) - \alpha I = \beta I(N - \alpha/\beta - I)$. Puntos de equilibrio, $x_0 = 0$, $x_1 = N - \beta/\alpha$. Entonces:
      - Si $N > \beta/\alpha$, hay epidemia. La población tiende a x_1 infectados. La enfermedad se hace endémica.
      - Si $N < \beta/\alpha$, no hay epidemia. La población tiende a 0 infectados.
      - Si $\alpha = N\beta$, el número de infectados se extingue. No hay epidemia.

2. Considera el modelo SIR

$$\begin{cases} \dot{x} = -rxy \\ \dot{y} = rxy - \gamma y \end{cases}$$

   - Demuestra que no es un sistemas Hamiltoniano.
     Solución Se resuelve en el punto 3.
   - Sea $\mu(x, y) > 0$. Demuestra que el sistema $(\dot{x}, \dot{y}) = \vec{F}(x, y)$ tiene las mismas trayectorias que el sistema $(\dot{x}, \dot{y}) = \mu(x, y)\vec{F}(x, y)$ para $\mu(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suave y no negativa. (Por tanto, las trayectorias del sistema dado por $\vec{F}$ viven en los conjuntos de nivel de integral primera para el sistema dado por $\mu\vec{F}$.)
     Solución: El μ se cancela en el calculo de trayectorias.
   - Encuentra integrales primeras para SIR.
     Solución: SIR $\vec{F} = (f(x, y), g(x, y)) = (-rxy, -\gamma y + rxy)$. Notemos que $\vec{F} = (xh_1(y), yh_2(x))$, por lo que

$$\text{div}\vec{F} = h_1(y) + h_2(x) \neq 0$$

     y no es hamiltoniano. Podemos adivinar que el factor integrante $1/(xy)$ funciona directamente ($\frac{1}{xy}\vec{F} = (\frac{h_1(y)}{y}, \frac{h_2(x)}{x})$ que tiene obviamente divergencia 0) pero hagamos el cálculo.
     Recordemos que,

$$\text{div}\mu\vec{F} = \langle \nabla\mu, \vec{F} \rangle + \mu \text{div} F, \tag{1}$$

     que en nuestro caso nos da

$$0 = \text{div}(\mu\vec{F}) = (h_1 + h_2)\mu + x\mu_x h_1 + y\mu_y h_2 = h_1(\mu + x\mu_x) + h_2(\mu + y\mu_y)$$

     Resolviendo $(\mu + x\mu_x) = 0 = (\mu + y\mu_y)$, llegamos a $\mu(x, y)xy = k$, con k constante ($k = 1$).

Una vez hallado el factor integrante, hallamos las correspondientes integrales primeras H:

$$H_y = \frac{f(x,y)}{xy} = -r, \qquad -H_x = \frac{-\gamma + rx}{x},$$

entonces

$$H(x,y) = -r(x+y) + \gamma \log(x)$$

Que coinciden con las ecuaciones de las trayectorias calculadas en la teoría.

3. En el modelo SIR supongamos que los miembros de S se vacunan con una tasa λ proporcional a su número. Entonces,

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -rSI - \lambda S \\ \dfrac{dI}{dt} = rSI - \gamma I \end{cases}$$

Estudiar el comportamiento cualitativo y en particular concluír que $S(t)$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$, para cualquier par de soluciones de este sistema.

Solución:

Observación 1: Los ejes son soluciones así pues el primer cuadrante es invariante.

Observación 2: El $(0,0)$ es punto crítico asintóticamente estable.

Observación 3: La única nullclina relevante es $x = \frac{\gamma}{r}$. A su derecha $\dot{x}$ es negativa así que las trayectorias acaban a su izquierda. Pero en esa región tanto $\dot{x}$ como $\dot{y}$ son negativas.