
PROBABILIDAD II **Segundo examen casero** CURSO 2019/20

NOMBRE, APELLIDOS Y DNI: **Alejandro Santorum Varela - 44090946S**

INSTRUCCIONES: Pueden usarse libros, apuntes, internet, y la calculadora. NO PUEDE CONSULTARSE NADA RELATIVO AL EXAMEN CON NINGUN SER HUMANO DISTINTO DEL INSTRUCTOR. EN CONCRETO, NO PODEIS COLABORAR ENTRE VOSOTROS. SI PESE A TODO SE REALIZA TAL CONSULTA, DEBERA INDICARSE CON QUIEN O QUIENES. Las respuestas deberán enviarse por correo electrónico a mi cuenta de la UAM, el dia 8 de Mayo (o antes).

INSTRUCCION ADICIONAL: LOS ARCHIVOS DEBERAN TENER PRECISAMENTE EL SIGUIENTE NOMBRE: PRIMER APELLIDO (DEL ALUMNO) SEGUNDO APELLIDO NOMBRE. DEBERA ENTREGARSE UN ARCHIVO TEX CON LAS RESPUESTAS. EL INCUMPLIMIENTO DE UNA O VARIAS DE ESTAS INSTRUCCIONES ACARREARA LA PERDIDA DE UN PUNTO POR CADA INFRACCION.

El Decano de Ciencias nos envia el siguiente texto sobre la realización de las pruebas. Como ya habéis indicado vuestro nombre y DNI, no hace falta que los incluyáis de nuevo. Si no queréis asumir el compromiso, simplemente borrad el texto; si lo mantenéis, se entenderá aceptado.

COMPROMISO DE HONESTIDAD

Yo, Alejandro Santorum Varela con DNI 44090946S me comprometo a realizar las pruebas de evaluación a través de la herramienta, dispositivo, plataforma o cualquiera que sea el soporte que la Universidad Autónoma de Madrid determine de manera individual sin la ayuda de terceros, ya sea en tiempo real (llamadas telefónicas, videoconferencia o cualquier modo análogo) o con material recopilado (vídeos, libros, páginas webs o cualquier recurso análogo) que no haya sido expresamente permitido en la convocatoria de la prueba.
(En cumplimiento del Artículo 3:3 de la Normativa de evaluación académica de la UAM)

I) (10 puntos) Probar el siguiente lema, que se utiliza para demostrar la Ley Fuerte de los Grandes Números de Etemadi: sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales no negativos, y sea $\lceil x \rceil$ el menor entero n tal que $x \leq n$, donde x es un número real. Si para todo $r > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lceil r^n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} a_i = a,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = a.$$

Comentario: se pide una demostración formal, con todos los epsilones que hagan falta. El lema anterior permite aplicar la desigualdad de Chebyshev junto con Borel-Cantelli 1 a subsucesiones de los promedios.

Solución: Estudiando la demostración de la LFGN de Etemadi (1981), la cual se puede leer en el siguiente `enlace` (extracto del Durrent, *Probability: Theory and examples*, publicado por el profesor de la UAM Pablo Fernández), podemos percibir la idea de la demostración del problema que nos ocupa en estos momentos. A continuacón se expone la demostración formal final.

Fijamos un real arbitrario $r > 1$ y para cada natural $k \geq \lceil r \rceil$ existe un natural $n = n(k)$ (así representamos que n depende de k) tal que este k pertenece al siguiente intervalo

$$\lceil r^n \rceil \leq k \leq \lceil r^{n+1} \rceil - 1 \tag{1}$$

Como la sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es no negativa, es decir, $a_i \geq 0 \ \forall i \in N$, obtenemos la siguiente inecuación gracias a (1):

$$\sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{\lceil r^{n+1} \rceil} a_i \tag{2}$$

Ahora exponemos una cadena de desigualdades importante para los razonamientos que haremos en el futuro. Por supuesto, cada desigualdad será explicada:

$$1 \overset{(i)}{<} r \overset{(ii)}{\leq} \lceil r \rceil \overset{(iii)}{\leq} \lceil r^n \rceil \overset{(iv)}{\leq} k \overset{(v)}{\leq} \lceil r^{n+1} \rceil - 1 \overset{(vi)}{\leq} r \lceil r^n \rceil \tag{3}$$

La desigualdad (i) es debido a que por hipótesis fijamos r a un número real mayor estricto que 1. La desigualdad (ii) es por definición de la función techo. La desigualdad (iii) es trivial ya que $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Las desigualdades (iv) y (v) son (1), recuerde que k es cualquier natural $k \geq \lceil r \rceil$ y que n es escogido en función de k para satisfacer precisamente dichas desigualdades. La desigualdad (vi) es la más difícil de ver, por lo que damos una demostración: nos preguntamos si efectivamente $\lceil x^{n+1} \rceil - 1 \leq x \lceil x^n \rceil$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$. Empezamos escribiendo $x^n = m - \delta$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y para algún $\delta \in [0, 1)$. Entonces $\lceil x^{n+1} \rceil - x \lceil x^n \rceil = \lceil x x^n \rceil - x \lceil x^n \rceil = \lceil x(m-\delta) \rceil - xm = \lceil mx - \delta x \rceil - mx < (mx - \delta x + 1) - mx \leq 1$ por lo que podemos concluir que $\lceil x^{n+1} \rceil - 1 \leq x \lceil x^n \rceil$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$ y así queda demostrada la desigualdad (vi).

Dejando aparte la justificación de (3), continuamos con la demostración del problema como tal. Usamos las desigualdades (v) y (vi) junto con la primera desigualdad de (2) para obtener:

$$\frac{1}{r \lceil r^n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} a_i \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \tag{4}$$

Por otro lado, afirmo que

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \leq \frac{r}{\lceil r^{n+1} \rceil - 1} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n+1} \rceil} a_i \tag{5}$$

Puedo justificarlo si demuestro que $k \geq \frac{\lceil r^{n+1} \rceil - 1}{r} \Leftrightarrow rk \geq \lceil r^{n+1} \rceil - 1$. Como la desigualdad (iv) nos dice que $k \geq \lceil r^n \rceil$ bastará probar $r \lceil r^n \rceil \geq \lceil r^{n+1} \rceil - 1$ pero esto es justamente la desigualdad (vi) probada ya anteriormente. Dicho esto, queda justificada la expresión (5).

Si juntamos las expresiones (4) y (5) obtenemos

$$\frac{1}{r \lceil r^n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} a_i \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \leq \frac{r}{\lceil r^{n+1} \rceil - 1} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n+1} \rceil} a_i \tag{6}$$

Y si multiplicamos numerador y denominador por $\lceil r^{n+1} \rceil$ en el tercer término de (6) nos queda

$$\frac{1}{r \lceil r^n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} a_i \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \leq \frac{r \lceil r^{n+1} \rceil}{\lceil r^{n+1} \rceil - 1} \frac{1}{\lceil r^{n+1} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n+1} \rceil} a_i \tag{7}$$

Ya podemos percibir que la cosa va cogiendo forma, de cara a utilizar el resto de hipótesis del enunciado.

Si ahora $k \to \infty$ entonces $n = n(k) \to \infty$ y por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lceil r^n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} a_i = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lceil r^{n(k)} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n(k)} \rceil} a_i = a \tag{8}$$

Por lo que el primer término de (7) tiende a a/r cuando $k \to \infty$. Por lo tanto:

$$\frac{a}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r\lceil r^n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} a_i = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{r\lceil r^{n(k)} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n(k)} \rceil} a_i \tag{9}$$

Usamos el hecho de que si existe el límite, entonces este es igual a su límite inferior:

$$\frac{a}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r\lceil r^n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} a_i = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{r\lceil r^{n(k)} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n(k)} \rceil} a_i = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{r\lceil r^{n(k)} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n(k)} \rceil} a_i \tag{10}$$

Y ahora recordando la primera desigualdad de la expresión (7) podemos escribir:

$$\frac{a}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r\lceil r^n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^n \rceil} a_i = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{r\lceil r^{n(k)} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n(k)} \rceil} a_i = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{r\lceil r^{n(k)} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n(k)} \rceil} a_i \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \tag{11}$$

Realizando un razonamiento análogo, y usando el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \frac{\lceil r^{n+1} \rceil}{\lceil r^{n+1} \rceil - 1} = 1$, podemos controlar el límite superior por ar:

$$\begin{aligned} ar = \lim_{k\to\infty} r \frac{\lceil r^{n(k)+1} \rceil}{\lceil r^{n(k)+1} \rceil - 1} \frac{1}{\lceil r^{n(k)+1} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n(k)+1} \rceil} a_i = \lim_{k\to\infty} r \frac{\lceil r^{n(k)} \rceil}{\lceil r^{n(k)} \rceil - 1} \frac{1}{\lceil r^{n(k)} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n(k)} \rceil} a_i = \\ = \limsup_{k\to\infty} r \frac{\lceil r^{n(k)} \rceil}{\lceil r^{n(k)} \rceil - 1} \frac{1}{\lceil r^{n(k)} \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil r^{n(k)} \rceil} a_i \geq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \end{aligned} \tag{12}$$

Observar que en la última desigualdad de (12) se ha usado el hecho de que el límite superior siempre es mayor o igual que el límite inferior.

Ya para terminar, juntamos (11) con (12) teniendo siempre en mente la expresión (7), para obtener:

$$\frac{a}{r} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i \leq ar \tag{13}$$

Como r era un número real mayor que 1 pero arbitrario, podemos concluir utilizando el Lema del Sandwich que $\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} a_i = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} a_i = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} a_i = a$ y, equivalentemente, llegamos a lo que queríamos probar: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} a_i = a$

Q.E.D.

II) (10 puntos) Sea $Z \sim N(0,1)$. Calcular su función característica.
__**Solución:**__ Dada una variable aleatoria continua X su función característica, denotada por $\varphi_X(t)$ $t \in \mathbb{R}$, se define como:

$$\varphi_X(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx \tag{14}$$

donde se hace uso de la función exponencial compleja.

Para el caso en que nos ocupa, nuestra variable aleatoria Z es una normal estándar (i.e. una v.a. que sigue una distribución normal con media 0 y varianza 1), cuya función de densidad $f_Z(x)$ ya conocemos: $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Por comodidad, a partir de ahora nos referiremos a la Z del enunciado como X, ya sabiendo que $X \sim N(0,1)$.

Dicho esto, utilizamos la función de densidad de la normal estándar junto con la definición (14) para obtener:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-x^2/2} dx \tag{15}$$

Multiplicamos dentro de la integral por $\frac{e^{t^2/2}}{e^{t^2/2}} = e^{t^2/2} e^{-t^2/2} = 1$ y sacamos fuera de la integral $e^{t^2/2}$ porque no depende de x:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2/2} e^{-t^2/2} e^{itx} e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{itx} e^{-x^2/2} dx \tag{16}$$

Completando cuadrados en las exponenciales de la última expresión de (16) obtenemos:

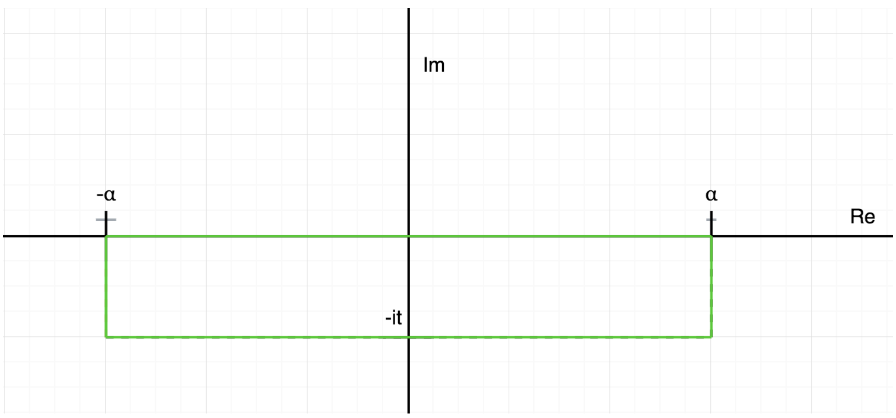
$$\varphi_X(t) = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-it)^2/2} dx \tag{17}$$

A continuación, con el objetivo de realizar el cálculo de la integral (17), utilizaremos técnicas de análisis complejo, vistas en la asignatura Variable Compleja I.

Primero realizamos el cambio de variable $s = x - it \Rightarrow ds = dx$. Calculando los nuevos límites de integración obtenemos que el nuevo límite superior es $\infty - it$ y el nuevo límite inferior es $-\infty - it$, resultando en:

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-it}^{\infty-it} e^{-s^2/2} ds \tag{18}$$

Para la resolución de la integral anterior haremos uso de una región rectangular en el plano complejo en la cual realizaremos una integral de contorno compleja. La región rectangular es la unión de cuatro segmentos: el primer segmento se encuentra sobre el eje real desde α hasta $-\alpha$, el segundo segmento va desde el punto $-\alpha$ hasta $-\alpha - it$, el tercer segmento es paralelo al eje real y va desde el punto $-\alpha - it$ hasta $\alpha - it$ y, finalmente, el cuarto segmento va desde el punto $\alpha - it$ hasta α. La siguiente imagen tiene la misión de ayudar mostrar el contorno descrito:



La unión de estos cuatro segmentos, que denotaremos como C, forma un contorno rectangular cerrado, por lo que podemos utilizar un resultado visto en los cursos de análisis complejo que dice que una integral sobre un contorno cerrado de una función f es igual a $2\pi i \sum_k Res(f, z_k)$ donde z_k son las singularidades aisladas de f (Teorema del residuo o Teorema de los residuos). Como la función que tenemos que integrar (la exponencial compleja) es holomorfa en todo el plano complejo, en particular también lo es en C. Como bien se sabe de Variable Compleja I, holomorfía implica analiticidad, y por lo tanto podemos usar otro resultado de los cursos de análisis complejo que dice que si una función es analítica en una región entonces esta tiene cero residuos en esa región. En resumen, todo esto justifica la siguiente expresión:

$$\int_C e^{-s^2/2} ds = 2\pi i \cdot 0 = 0 \tag{19}$$

Ahora vamos a separar la anterior integral en cuatro, utilizando el hecho de que la curva C está formada por cuatro segmentos conectados, por lo que C es suave a trozos y podemos separar (19) en sendas integrales.

$$\int_C e^{-s^2/2} ds = \int_{\alpha}^{-\alpha} e^{-s^2/2} ds + \int_{-\alpha}^{-\alpha-it} e^{-s^2/2} ds + \int_{-\alpha-it}^{\alpha-it} e^{-s^2/2} ds + \int_{\alpha-it}^{\alpha} e^{-s^2/2} ds = 0 \tag{20}$$

Ahora nos centraremos individualmente en cada una de las nuevas integrales complejas de línea de la expresión (20). Recordar que, a pesar de ya saber que la integral (19) es cero, nos hemos preocupado de realizar la integral de contorno (o de línea, como se prefiera llamar) con orientación positiva.

Nuestro foco de atención será evaluar dichas integrales, pero en el límite cuando $\alpha \to \infty$, buscando despejar el valor de nuestra integral objetivo de la expresión (18).

En primer lugar, la primera integral de (20) cuando $\alpha \to \infty$ es una integral bien conocida por nosotros, ya que es la integral de la función de densidad de la normal estándar y cuyo valor conocemos de antemano:

$$\int_{\alpha}^{-\alpha} e^{-s^2/2} ds = -\sqrt{2\pi} \;\; cuando \;\; \alpha \to \infty \tag{21}$$

Recalcar que el resultado (21) es $-\sqrt{2\pi}$ y no el usual $\sqrt{2\pi}$ porque los límites de integración están intercambiados.

Por otro lado, podemos sostener que la segunda y la cuarta integral de la expresión (20) se anulan cuando $\alpha \to \infty$ debido a que la exponencial se anula claramente en ambos límites de integración:

$$\lim_{\alpha \to \infty} e^{-\alpha^2/2} = \lim_{\alpha \to \infty} e^{-(-\alpha)^2/2} = 0$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} e^{-(-\alpha-it)^2/2} = \lim_{\alpha \to \infty} e^{-(\alpha^2+t^2)/2} = 0$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (20) obtenemos:

$$-\sqrt{2\pi} + 0 + \int_{-\alpha-it}^{\alpha-it} e^{-s^2/2} ds + 0 = 0 \tag{22}$$

Ahora si hacemos $\alpha \to \infty$ y despejando conseguimos el valor de nuestra integral objetivo de la expresión (18):

$$\int_{-\infty-it}^{\infty-it} e^{-s^2/2} ds = \sqrt{2\pi} \tag{23}$$

Finalmente, si juntamos (23) con (18) llegamos a la expresión final de la ansiada función característica de una normal estándar:

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-it}^{\infty-it} e^{-s^2/2} ds = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = e^{t^2/2} \Rightarrow \boxed{\varphi_X(t) = e^{t^2/2}} \tag{24}$$

III) (10 puntos) Probar que la función característica φ_X de una v.a. X, es uniformemente continua.

<u>**Solución:**</u> Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua si $\forall\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$ entonces $\mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \epsilon \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Recalcar que δ depende únicamente de ϵ y nunca de los puntos escogidos, a diferencia de la continuidad (que es una propiedad más débil que la continuidad uniforme).

A veces se da la siguiente definición de continuidad uniforme, equivalente a la primera: una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua si $\mid f(x+h) - f(x) \mid \to 0 \ \ \textit{cuando} \ \ h \to 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nosotros en este ejercicio utilizaremos la segunda, por lo que para probar la continuidad uniforme de $\varphi_X(t)$ buscaremos demostrar que:

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \to 0 \ \ \textit{cuando} \ \ h \to 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{25}$$

Recordamos la definición de función característica de v.a. $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x)$, y sustituimos esto en la expresión (25):

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| = \left|\mathbb{E}[e^{i(t+h)X}] - \mathbb{E}[e^{itX}]\right| = \left|\int e^{i(t+h)x} dF_X(x) - \int e^{itx} dF_X(x)\right| = \\ = \left|\int (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) dF_X(x)\right| = \left|\int (e^{itx}e^{ihx} - e^{itx}) dF_X(x)\right| = \left|\int e^{itx}(e^{ihx} - 1) dF_X(x)\right| \end{aligned} \tag{26}$$

Ahora utilizamos que el valor absoluto de una integral es menor o igual que la integral del valor absoluto (probado en Teoría de la Integral y la Medida y en Variable Compleja):

$$\left|\int e^{itx}(e^{ihx} - 1) dF_X(x)\right| \le \int \left|e^{itx}(e^{ihx} - 1)\right| dF_X(x) = \int \left|e^{itx}\right| \left|(e^{ihx} - 1)\right| dF_X(x) \tag{27}$$

Como $|e^{itx}| = 1$, uniendo (26) con (27) obtenemos:

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \le \int \left|(e^{ihx} - 1)\right| dF_X(x) \tag{28}$$

Ya hemos conseguido controlar $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)|$ por una expresión que no depende de t. Ahora buscamos ver qué pasa cuando $h \to 0$: para ello cogemos una sucesión (h_n) que converge a cero y definimos $f_n(x) = \left|e^{ih_n x} - 1\right|$. Como $(h_n) \to 0 \Rightarrow e^{ih_n x} \to 1 \Rightarrow f_n(x) \to 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Adicionalmente es fácil ver que $|f_n(x)| = \left|e^{ih_n x} - 1\right| \le 2$, el cual es integrable cuando $\mathbb{R}$ está dotado de la medida de probabilidad $\mathbb{P}_X$, por lo que el teorema de la convergencia dominada nos permite asegurar:

$$\lim_{h \to 0} \int \left|(e^{ihx} - 1)\right| dF_X(x) = \lim_{n \to \infty} \int \left|(e^{ih_n x} - 1)\right| dF_X(x) = \int \lim_{n \to \infty} \left|(e^{ih_n x} - 1)\right| dF_X(x) = 0 \tag{29}$$

La expresión anterior prueba que $0 \le |\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \le \int \left|(e^{ihx} - 1)\right| dF_X(x) \to 0$ para $h \to 0$, lo que implica que $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \to 0$ cuando $h \to 0$ independientemente de $t \in \mathbb{R}$, y por consiguiente queda demostrada la expresión (25), nuestro objetivo en este ejercicio.

Q.E.D.

IV) (10 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (indicando claramente la opción elegida): "si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala tal que para todo $n \geq 1$, $X_n \geq 0$ y $E|X_n| = 1$, entonces la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en L^1."

<u>**Solución**</u>: `FALSA`, en este ejercicio construiremos una martingala $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\mathbb{E}(|X_n|) = 1$ y $X_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ tal que la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge en L^1.

Empecemos definiendo nuestro espacio muestral $\Omega = \mathbb{N}$ (donde se está considerando el conjunto de números naturales igual al conjunto de enteros positivos) y su medida de probabilidad asociada como

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{30}$$

Para $n \geq 1$ consideramos $X_n = (n+1)\mathbf{1}_{[n+1,\infty)}$ y $\mathscr{F}_n = \sigma(\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}, [n+1, \infty))$. Nuestro objetivo ahora es demostrar 2 cosas:

- $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $X_n \geq 0$ y $\mathbb{E}(|X_n|) = 1$ $\forall n \geq 1$. Inicialmente ya queda claro que $X_n \geq 0$ porque X_n es una constante positiva (para n fijo) por una función indicatriz (la cual solo puede coger los valores 0 ó 1).
- La sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge en L^1.

Comenzamos viendo que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Primero, es claro que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es adaptado, es decir, X_n es $\mathscr{F}_n$-medible $\forall n \geq 1$, debido a que X_n es una cierta constante (para cada n fijo) multiplicada por la función indicatriz sobre $[n+1, \infty)$, que es precisamente el último conjunto que genera la σ-álgebra $\mathscr{F}_n$.

También se cumple que $X_n \in L^1$, es decir, que $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ $\forall n \geq 1$. Justificamos esto viendo que $\mathbb{E}(|X_n|) = 1$, probando de paso una de las hipótesis del enunciado:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(|X_n|) \overset{(i)}{=} \mathbb{E}[\big|(n+1)\mathbf{1}_{[n+1,\infty)}\big|] \overset{(ii)}{=} \mathbb{E}[(n+1)\mathbf{1}_{[n+1,\infty)}] \overset{(iii)}{=} (n+1)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[n+1,\infty)}] \overset{(iv)}{=} \\ &\overset{(iv)}{=} (n+1)\mathbb{P}([n+1,\infty)] \overset{(v)}{=} (n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \overset{(vi)}{=} (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 1 \end{aligned} \tag{31}$$

donde en (i) se ha usado la defnición de X_n, en (ii) el hecho de que $X_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$, en (iii) la linealidad de la esperanza, en (iv) el hecho de que la esperanza de una función indicatriz de un conjunto es la probabilidad de ese conjunto, en (v) se ha usado la definición (30) de la medida de probabilidad asociada a $\Omega = \mathbb{N}$ y, finalmente, (vi) se debe a que la suma telescópica $\sum_{k=n+1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ es igual a $\frac{1}{n+1}$ (se puede comprobar esto en el siguiente `enlace`).

Falta ver la propiedad $\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = X_{n-1}$. Notar que podemos escribir $\mathscr{F}_{n-1}$ como una partición de n elementos $\{\{1\}, \{2\}, ..., \{n-1\}, [n, \infty)\}$, por lo tanto podemos usar la fórmula para la esperanza condicionada con respecto a la σ-álgebra generada por una partición. Primero, podemos separar $\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}]$ en el sumatorio de las esperanzas de X_n por la función indicatriz de un evento de la partición condicionado por ese mismo evento:

$$\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n \cdot \mathbf{1}_{[n,\infty)}|[n,\infty)] + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}[X_n \cdot \mathbf{1}_{\{k\}}|\{k\}] \tag{32}$$

Sustituimos X_n en (32) por su expresión:

$$\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[(n+1)\mathbf{1}_{[n+1,\infty)} \cdot \mathbf{1}_{[n,\infty)}|[n,\infty)] + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}[(n+1)\mathbf{1}_{[n+1,\infty)} \cdot \mathbf{1}_{\{k\}}|\{k\}] \tag{33}$$

Usamos la linealidad de la esperanza condicional para sacar las constantes y la primera proposición del tema 3 del curso de Probabilidad 2 para sacar las funciones indicatrices que sean medibles en el evento condicionante (e.d., las funciones indicatrices sobre los eventos condicionantes):

$$\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = (n+1)\mathbf{1}_{[n,\infty)} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[n+1,\infty)}|[n,\infty)] + (n+1)\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{\{k\}} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[n+1,\infty)}|\{k\}] \tag{34}$$

Ahora usamos el siguiente resultado: Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria en ese espacio de probabilidad y $H \in \mathscr{F}$ un evento con probabilidad estrictamente positiva, e.d., $\mathbb{P}(H) > 0$, entonces la esperanza condicional de X dado el evento H es

$$\mathbb{E}(X|H) = \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_H X)}{\mathbb{P}(H)} \tag{35}$$

Este resultado se puede encontrar, entre otros sitios, en la página de wikipedia de esperanza condicional (`enlace`). Aplicando (35) a nuestro problema en cuestión podemos transformar la expresión (34) en:

$$\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = (n+1)\mathbf{1}_{[n,\infty)} \cdot \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[n+1,\infty)} \cdot \mathbf{1}_{[n,\infty)}]}{\mathbb{P}([n,\infty))} + (n+1)\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{\{k\}} \cdot \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[n+1,\infty)} \cdot \mathbf{1}_{\{k\}}]}{\mathbb{P}(\{k\})} \tag{36}$$

Recordamos que la esperanza de una función indicatriz de un conjunto es la probabilidad del conjunto. En este caso tenemos la esperanza del producto de dos funciones indicatrices sobre dos conjuntos distintos, lo que es igual a la probabilidad de la intersección de ambos conjuntos. Teniendo esto en cuenta, (36) nos queda en:

$$\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = (n+1)\mathbf{1}_{[n,\infty)} \cdot \frac{\mathbb{P}([n+1,\infty) \cap [n,\infty))}{\mathbb{P}([n,\infty))} + (n+1)\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{\{k\}} \cdot \frac{\mathbb{P}([n+1,\infty) \cap \{k\})}{\mathbb{P}(\{k\})} \tag{37}$$

El sumatorio de la expresión (37) es cero debido a que $[n+1,\infty) \cap \{k\} = \emptyset \ \forall k \in [1, n-1]$, por lo que la expresión (37) se simplifica a:

$$\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = (n+1)\mathbf{1}_{[n,\infty)} \cdot \frac{\mathbb{P}([n+1,\infty))}{\mathbb{P}([n,\infty))} \tag{38}$$

Recordamos que $\mathbb{P}([n,\infty)) = \sum_{k=n}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n}$ y que $\mathbb{P}([n+1,\infty)) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n+1}$. Operando en (38) obtenemos finalmente la justificación de la tercera propiedad de martingala:

$$\mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_{n-1}] = (n+1)\mathbf{1}_{[n,\infty)} \cdot \frac{n}{n+1} = n\mathbf{1}_{[n,\infty)} = X_{n-1} \tag{39}$$

Recapitulando, hemos visto hasta el momento que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es efectivamente una martingala con respecto a la filtración $\{\mathscr{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$, que X_n es no negativa y que $\mathbb{E}(|X_n|) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, cumpliendo así todas las hipótesis del enunciado. Ahora nos falta probar que la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge en L^1 para demostrar que es un contraejemplo a la afirmación enunciada.

Como resultado previo auxiliar, vamos a demostrar que la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguro a $X \equiv 0$. Para ello haremos uso de la definición de convergencia casi segura aportada en los ejercicios 8 y 9 de la hoja 4 de ejercicios, es decir, queremos ver que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{k\geq n} |X_n - 0| \geq \epsilon) = 0 \ \forall \epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{k\geq n} |X_n| \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{k\geq n}(k+1)\mathbf{1}_{[k+1,\infty)} \geq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([n+1,\infty)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \tag{40}$$

Gracias a que ahora sabemos que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0$, de converger en L^1 lo haría también a $X \equiv 0$. La definición de convergencia en L^1 es: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] = 0$, por lo que si la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergiese en L^1 se debería cumplir que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|] = 0$ pero como hemos visto en (31) $\mathbb{E}[|X_n|] = 1 \ \forall n \geq 1$, demostrando que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge en L^1 y culminando el contraejemplo.

Q.E.D.

V) (10 puntos) Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (indicando claramente la opción elegida): "si $S_n \sim B(n,p)$, entonces para todo t y para todo n tenemos

$$\left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > t\right) - P(Z > t)\right| < \frac{1}{2\sqrt{np(1-p)}},$$

donde $Z \sim N(0,1)$."

<u>Solución:</u> `VERDADERA`, se puede probar fácilmente con el teorema de Berry-Esseen visto en clase. Para el problema actual, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, donde $X_1, X_2, ...$ son v.a.i.i.d. tales que $X_i \sim B(1,p)$ porque sabemos que $S_n \sim B(n,p)$. Esto además nos permite saber que $\mathbb{E}(X_i) = \mu = p$, $Var(X_i) = \sigma^2 = p(1-p) \in (0,\infty)$ y $Std(X_i) = \sigma = \sqrt{p(1-p)}$ $\forall i \in \{1,2,...,n\}$. Solo nos falta comprobar que $\mathbb{E}(|X_1|^3) < \infty$ para que se cumplan todas las hipótesis del teorema, pero es trivial ver que para una $B(1,p)$ el valor de la esperanza del valor absoluto al cubo es: $\mathbb{E}(|X_1|^3) = |1|^3 p + |0|^3(1-p) = p \in [0,1]$.

Utilizando lo que ya conocemos y sustituyendo en la función $F_{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t)$ del enunciado del teorema obtenemos:

$$F_{\frac{S_n-np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}}(t) = F_{\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t\right) \tag{41}$$

Además

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) \tag{42}$$

Ahora, vamos a calcular σ^3 y $\mathbb{E}(|X_1 - \mu|^3) = \mathbb{E}(|X_1 - p|^3)$:

$$\sigma^3 = \sigma^2\sigma = p(1-p)\sqrt{p(1-p)} \tag{43}$$

$$\mathbb{E}(|X_1 - \mu|^3) = |1-p|^3 p + |-p|^3(1-p) = (1-p)^3 p + p^3(1-p) = p(1-p)[p^2 + (1-p)^2] \tag{44}$$

Gracias al teorema de Berry-Esseen podemos sostener que para alguna constante $C \in (0.4, 0.5)$ y para toda $t \in \mathbb{R}$:

$$\left|F_{\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) - F_Z(t)\right| \leq \frac{C\mathbb{E}(|X_1-\mu|^3)}{\sigma^3\sqrt{n}} \Rightarrow \left|F_{\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) - F_Z(t)\right| \leq \frac{Cp(1-p)[p^2+(1-p)^2]}{p(1-p)\sqrt{np(1-p)}} \tag{45}$$

Si consideramos $C = 0.5$ la desigualdad se convierte en un menor estricto. Simplificando y utilizando (41) y (42) llegamos a la siguiente expresión:

$$\left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t\right) - P(Z \leq t)\right| < \frac{0.5[p^2 + (1-p)^2]}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{p^2 + (1-p)^2}{2\sqrt{np(1-p)}} \tag{46}$$

Podemos operar en el numerador de (46): $p^2 + (1-p)^2 = p^2 + 1 - 2p + p^2 = 2p^2 - 2p + 1$.
Como $p \in [0,1] \Rightarrow p^2 \leq p \Rightarrow 2p^2 \leq 2p \Rightarrow 2p^2 - 2p \leq 0 \Rightarrow 2p^2 - 2p + 1 \leq 1$, obteniendo que:

$$\left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t\right) - P(Z \leq t)\right| < \frac{1}{2\sqrt{np(1-p)}} \tag{47}$$

Finalmente podemos aplicar complementarios y la propiedad de simetría del valor absoluto para justificar lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t\right) - P(Z \leq t)\right| = \left| \left(1 - P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > t\right)\right) - (1 - P(Z > t))\right| = \\ &= \left| P(Z > t) - P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > t\right)\right| = \left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > t\right) - P(Z > t)\right| \end{aligned} \tag{48}$$

Uniendo las identidades (47) y (48) llegamos a la expresión del enunciado, que era lo que queríamos probar:

$$\left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > t \right) - P(Z > t) \right| < \frac{1}{2\sqrt{np(1-p)}} \tag{49}$$

Q.E.D.