- $y_{n+2} = \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h f_{n+2}$

Primero miro cuál es la función incremento : $y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} h f_{n+2}$

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} h f(t_n+2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + h \phi_f)$$

Por lo que $\phi_f (t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \underbrace{\frac{2}{3} f(t_n+2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + h \phi_f)}_{F(\phi_f)}$

Veamos si es contractiva:

$$\| F(\phi_f) - F(\hat{\phi}_f) \| = \frac{2}{3} \| f(t_n+2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + h \phi_f) - f(t_n+2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + h \hat{\phi}_f) \|$$

f es Lipschitz respecto a la 2ª variable.

$$\leq \frac{2}{3} L_f \| \cancel{\frac{4}{3} y_{n+1}} - \cancel{\frac{1}{3} y_n} + h \phi_f - (\cancel{\frac{4}{3} y_{n+1}} - \cancel{\frac{1}{3} y_n} + h \hat{\phi}_f) \| =$$

$$= \frac{2}{3} L_f \| h \phi_f - h \hat{\phi}_f \| = \underbrace{\frac{2 \cdot L_f \cdot h}{3}}_{K} \| \phi_f - \hat{\phi}_f \|$$

Sólo falta ver que $0 < \underbrace{\frac{2 \cdot L_f \cdot h}{3}}_{K} < 1$ para tener que F sea contractiva.

Sabemos que $\underbrace{\frac{2 \cdot L_f \cdot h}{3}}_{K} > 0$ porque $L_f > 0$ y h también es positivo. ✓

Tenemos que poner $h < \frac{3}{2 \cdot L_f}$ para que K sea < 1. pero como podemos resolverlo como queramos la distancia entre los puntos del mallado ✓.

F es contractiva

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2})$$

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2})$$

$$\sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{n+j} = h\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) \qquad \alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \phi_f = \frac{1}{3}(f(t_n, y_n) + 4f(t_n+h, y_{n+1}) + f(t_n + 2h, y_n + h\phi))$$

$$\phi = F(\phi)$$

Veamos que esta función es contractiva.

Queremos llegar a $\|F(\phi) - F(\hat{\phi})\| \leq \underset{\overset{\wedge}{1}}{C} \|\phi - \hat{\phi}\|$ (Lipschitz con $C < 1$)

$$\|F(\phi(t_n, y_n, y_{n+1}; h)) - F(\hat{\phi}(t_n, y_n, y_{n+1}; h))\| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{3}(\cancel{f(t_n, y_n)} + \cancel{4f(t_n+h, y_{n+1})} + f(t_n+2h, y_n + h\phi)) - \frac{1}{3}(\cancel{f(t_n, y_n)} + \cancel{4f(t_n+h, y_{n+1})} + f(t_n+2h, y_n + h\hat{\phi}))\right\|$$

$$\leq \left\| \frac{1}{3} f(t_n+2h, y_n+h\phi) - \frac{1}{3} f(t_n+2h, y_n+h\hat{\phi})\right\|$$

* (Sabemos que f es Lipschitz en la segunda variable)

$$\overset{*}{\leq} \frac{1}{3} L_f \|(\cancel{y_n}+h\phi) - (\cancel{y_n}+h\hat{\phi})\|$$

$$\leq \frac{1}{3} h L_f \|\phi - \hat{\phi}\|$$

Nos interesa que $\frac{L_f h}{3} < 1 \Rightarrow h < \frac{3}{L_f}$ ✓

TAREA 4:

Dado el MN: $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta) y_{n+1})$,

con $\theta \in (0,1)$.

Define el método de la forma $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\phi(t_n, y_n, \dots, y_{n+k-1}; h)$.
Esta función de incremento satisface un punto fijo $\phi = F(\phi)$.
Ver que esta función es contractiva.

De la Tarea 2 sabemos que:

$$y_{n+1} - y_n = h \underbrace{f(t_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta) y_{n+1})}_{\phi_f \,:=\, \text{función de incremento}},$$

La ϕ_f podemos escribirla así:

$$\phi_f(t_n, y_n; h) = f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h\,\phi_f(t_n, y_n; h))$$

Consideramos el problema del punto fijo $\phi = F(\phi)$ y usamos que f es Lipschitz con respecto a la segunda variable (con constante L_f):

$$\| F(\phi) - F(\hat{\phi}) \| = \| f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h\phi) - f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h\hat{\phi}) \| \leq$$
$$\leq L_f \cdot (1-\theta) \cdot h \, \| \phi - \hat{\phi} \|.$$

Necesitamos que $L_f \cdot (1-\theta) \cdot h < 1$, por lo que tomamos $h < \frac{1}{(1-\theta)L_f}$, con $\theta \in (0,1)$. La función F es contractiva y el punto fijo único.

Tarea 4

Dado el (MN): $y_{n+1} = y_n + h\cdot(\theta f_n + (1-\theta)\cdot f_{n+1})$, $\theta\in(0,1)$

Por tareas anteriores, tenemos que

$$\Phi_f(t_n, y_n; h) = \underbrace{\theta f(t_n, y_n) + (1-\theta)\cdot f(t_n+h,\, y_n + h\cdot\Phi_f)}_{:=F(\Phi)}$$

Veamos que F es contractiva, es decir,

$\|F(\Phi)-F(\hat{\Phi})\| \le \Lambda \|\Phi - \hat{\Phi}\|$ con $\Lambda < 1$:

$$\|F(\Phi)-F(\hat{\Phi})\| = \| \cancel{\theta\cdot f(t_n,y_n)} + (1-\theta)\cdot f(t_n+h, y_n + h\cdot\Phi) - \cancel{\theta\cdot f(t_n,y_n)} - (1-\theta)\cdot f(t_n+h, y_n+h\cdot\hat{\Phi})\| =$$

$$\overset{\theta\in(0,1)}{=} (1-\theta)\|f(t_n+h, y_n+h\cdot\Phi) - f(t_n+h, y_n+h\cdot\hat{\Phi})\| \le$$

$$\underset{\substack{f \text{ Lipschitz} \\ \text{en la 2ª variable}}}{\le} (1-\theta)\cdot L_f\cdot\|y_n + h\cdot\Phi - y_n - h\cdot\hat{\Phi}\| =$$

$$= (1-\theta)\cdot L_f\cdot h\cdot\|\Phi-\hat{\Phi}\|$$

Puedo tomar h suficientemente pequeño, de manera que $L_f\cdot h < 1$. $\Rightarrow (1-\theta)\cdot L_f\cdot h < 1 \Rightarrow F$ es contractiva.

(de hecho basta h tq $L_f\cdot h < \frac{1}{1-\theta}$)