TEMA 1 | TOPOLOGÍA. CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto no vacío. Una TOPOLOGÍA sobre X es una familia τ de subconjuntos de X, llamados abiertos, tal que verifica las siguientes propiedad

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) $\{A_i\}_{i\in I}$ $A_i \in \tau$ $\forall i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ (unión arbitraria)

iii) Si $A_1, \dots, A_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ (intersección finita)

Diremos que (X, τ) es un ESPACIO TOPOLÓGICO, o bien, si se supone τ, se abrevia a X espacio topológico.

Decimos que $K \subset X$ es un conjunto cerrado (para τ) si su complementario es abierto: $\underbrace{C_X K}_{\text{complementario de } K \text{ en } X} = X \setminus K$ abierto.

Si τ_1, τ_2 son topologías sobre X, diremos que τ_2 es MÁS FINA que τ_1 si $\tau_1 \subset \tau_2$. También se dice que τ_1 es MÁS GROSERA, MENOS FINA, MÁS DÉBIL ...

__Observación:__ puede que no se puedan comparar, e.d., ni $\tau_1 \subset \tau_2$, ni $\tau_2 \subset \tau_1$.

__Ejemplo:__ $(\tau \subset \underbrace{\mathcal{P}(X)}_{\text{partes de } X})$

1) Si $\tau = \mathcal{P}(X)$ ¿cumple las propiedades? Sí

Esta topología se llama topología discreta (τ_d) — Es la más fina

$\tau_u :=$ topología usual $\tau_u \subset \tau_d$

2) Si $\tau = \{\emptyset, X\}$ se denomina $\tau_t :=$ topología trivial

$\tau_t \in \tau$ $\forall \tau$ topología en X (es la menos fina)

5) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_u = ?$ ¿ ¿Cómo se define la topología usual?

$\mathcal{T}_u = \{(a,b) / a<b,\ a,b\in\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \cdots$? falta la unión de abiertos

$\mathcal{T}_u = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{$unión arbitraria de intervalos abiertos$\}$.

Vamos a demostrar 3), de hecho, vamos a ver que basta con demostrar que la intersección de dos abiertos ya es suficiente.

$$3) \iff \overbrace{(\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{U}\cap\mathcal{V} \in \mathcal{T})}^{3'}$$

$3 \Rightarrow 3'$ ✓

¿$3' \Rightarrow 3$? Si $n=2 \Rightarrow 3'$ ✓

Si $n>2$, supongamos que es cierto para $n-1$.

$B_1, \dots, B_{n-1}$ $\quad \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \in \mathcal{T}$

Sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \underset{\mathcal{T}}{\underset{\cap}{\mathcal{U}}} = A_1$, $V = \bigcap_{j=2}^{n} A_j \Rightarrow \mathcal{U}\cap V \in \mathcal{T}$

por inducción $\subset \mathcal{T}$

Ahora demostramos $3'$ en la topología usual:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{U} \in \mathcal{T} \iff \mathcal{U} = \bigcup_{j\in I} I_j : I_j = (a_j, b_j) \\ V \in \mathcal{T} \iff V = \bigcup_{l\in\Lambda} N_l : N_l = (c_l, d_l) \end{array}\right\} \mathcal{U}\cap V = \bigcup_{j\in I}\bigcup_{l\in\Lambda} (I_j \cap N_l)$$

Falta ver que $I_j \cap N_l$ es abierto o unión de abiertos.
De hecho es o el vacío o un intervalo abierto.

<u>Ejemplo</u>: (X, d) espacio métrico

$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0 \iff x=y$

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$\mathcal{T}_{\text{distancia}} := \{\emptyset, X\} \cup \{$uniones arbitrarias de bolas$\}$ $\quad$ $B(p,\varepsilon) = \{q\in X / d(p,q) < \varepsilon\}$

La intersección de dos bolas abiertas es abierta ya que para cada punto en la intersección tomamos la bola centrada en ese punto con distancia $\underbrace{d(p,F)}_{\min\{d(p,f):\, f\in F\}}/2$. $\quad$ $F \to$ frontera

$(X, \mathcal{T})$ espacio topológico

$\mathcal{T} \equiv$ una topología sobre $X \subset \mathcal{P}(X)$

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(2) $\{A_i\}_{i\in I}$, $A_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

(3) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

<u>TEOREMA:</u> $X \neq \emptyset$ conjunto, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

*(2) $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $F_\alpha \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \in \mathcal{F}$

(3) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow \mathcal{T} := \{\underbrace{\complement_X F}_{\text{complementario de } F \text{ en } X} \mid F \in \mathcal{F}\}$ es una topología sobre X tal que $\mathcal{F}$ es la familia de cerrados de $\mathcal{T}$.

<u>demostración</u>

$\mathcal{T}$ satisface (1), (2) y (3) de la definición de topología.

<u>DEFINICIÓN:</u> $E \subset X$, $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico

$$\overline{E} = \bigcap_{E\subset K} \{K \mid K \text{ cerrado}\} = cl_X(E) = cl(E)$$

($\overline{E}$:= la ADHERENCIA/CLAUSURA de E en X para la topología $\mathcal{T}$)

<u>COROLARIO:</u> $\overline{E}$ es siempre un conjunto cerrado (por (2) *)

<u>LEMA:</u> $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

<u>demostración</u>

$\overline{A} = \bigcap\{F \mid F \text{ cerrado}, A \subset F\}$; $\overline{B} = \bigcap\{K \mid K \text{ cerrado}, B \subset K\}$

Si K cerrado $\left.\begin{matrix} B \subset K \\ A \subset K\end{matrix}\right\} \Rightarrow K$ cerrado que contiene a $A \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

PROPOSICIÓN: $\overline{E}$ es el mínimo cerrado que contiene a E.

demostración

$\overline{E}$ siempre es un cerrado que contiene a E.

Supongamos que existe F cerrado en X tal que

$E \subset F \subset \overline{E} \Longrightarrow F \in \{K \mid K \text{ cerrados}, E \subset K\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \overline{E} = \bigcap \{K \mid K \text{ cerrado}, E \subset K\} \subset F \Longrightarrow F = \overline{E}$. ∎

Observación:
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &\xrightarrow{cl} \mathcal{P}(X) \\ E &\longmapsto \overline{E} \end{aligned}$$

TEOREMA: Si tenemos una función $\phi: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que:

(1) $E \subset \phi(E)$

(2) $\phi(\phi(E)) = \phi(E)$

(3) $\phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)$

(4) $\phi(\emptyset) = \emptyset$

(5) E cerrado para $\tau \Longleftrightarrow E = \phi(E)$

$\Longrightarrow \mathcal{F} := \{K \mid \phi(K)\}$ es una familia de cerrados para una topología sobre X.

PROPOSICIÓN: Si (X, τ) es un espacio topológico $\Longrightarrow \phi = cl_X$ verifica (1), (2), (3), (4) y (5) del teorema anterior.

(1) $\equiv E \subset \overline{E}$

(2) $\equiv \overline{\overline{E}} = \overline{E}$

(3) $\equiv \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(4) $\equiv \overline{\emptyset} = \emptyset$

(5) $\equiv E$ cerrado $\Leftrightarrow E = \overline{E}$

demostracion (2)

$E \subset \bar{E}$ por (1) $\xRightarrow{\text{Lema}}$ $\bar{E} \subset \bar{\bar{E}}$ = (el mínimo cerrado que contiene a $\bar{E}$) $= \bar{E}$

ya que $\bar{E}$ siempre es cerrado

demostración (3)

$A \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B}$
$B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$
$\Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ = es el mínimo cerrado que contiene a $A \cup B$.

Pero $\bar{A} \cup \bar{B}$ es un cerrado que contiene a $A \cup B$ $\Rightarrow$ ($\overline{A \cup B}$ es el mínimo)

$\Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$

demostración (5)

$\boxed{\Rightarrow}$ $\bar{E}$ = mínimo cerrado que contiene a $E \overset{E \text{ cerrado}}{=} E$

$\boxed{\Leftarrow}$ $E = \bigcap\{K \mid K$ cerrado, $E \subset K\}$ que es cerrado

Ejemplo: $X \neq \emptyset$, $E \subset X$, τ = topología cofinita en X.

$\bar{E} := \bigcap\{K \subset X \mid K$ cerrado, $E \subset K\}$

*) [K cerrado en $X \overset{def.}{\Longleftrightarrow} K$ finito ó $K = X$]

(1) Demostrar que la definición (*) da una topología sobre X ($\mathcal{F} = \{K \subset X \mid K$ finito ó $K = X\}$)

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
(2) $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $K_\alpha \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha \in \mathcal{F}$
(3) $K_1, K_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \mathcal{F}$.

Habría que ver que (*) cumple estas 3 propiedades

$\tau := \{G \mid \complement_X G \in \mathcal{F}\}$ son los abiertos de τ.

$$\begin{cases} E = \emptyset \Rightarrow \bar{E} = \emptyset \\ \text{Card}(E) < \infty \Rightarrow \bar{E} = E \\ \text{Card}(E) = \infty \Rightarrow \bar{E} = X \end{cases}$$

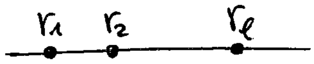
$K \in \mathcal{F}$, $E \subset K$

DEFINICIÓN: (X, τ)
$E \subset X$ se dice DENSO si $\bar{E} = X$

Caso particular: $X = \mathbb{R}$

E cerrado en $\mathbb{R} \iff E$ es finito ó $E = \mathbb{R}$

G abierto en $\mathbb{R} \iff \complement_{\mathbb{R}} G$ es finito ó $\mathbb{R}$



$G_1 = \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_\ell\}$ es abierto

$G_2 = (1,2)$ no es abierto para topología cofinita; tampoco cerrad

$\complement G = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \prod_{j=1}^{\ell} (x - r_j) = 0\}$ topología de Zariski de $\mathbb{R}$.

- RECUERDO -

(X, τ) espacio topológico

$\tau \subset \mathcal{P}(X)$, τ es una topología sobre X

Los elementos de τ son los abiertos de X.

$G \subset X$, G abierto de X para la topología τ en X; también, por abuso del lenguaje, se dice G abto. de τ (para)

DEFINICIÓN: (X, τ) espacio topológico, $E \subset X$, el INTERIOR de E es el conjunto: $\overset{\circ}{E} = \mathrm{Int}_X(E) = \mathrm{Int}(E) = \bigcup \{G \subset X \,/\, G \subset E,\ G \in \tau\}$

COROLARIO: $\forall E \subset X$, se tiene que $\mathrm{Int}(E)$ es abierto (para τ).

PROPIEDADES BÁSICAS:

(1) $\overset{\circ}{E} = \mathrm{Int}(E) \subset E$ (demostrado por la def.

(2) $\complement_X(\overset{\circ}{E}) = \overline{\complement_X E}$ $\left(X \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{X \setminus E}\right) \longleftrightarrow \left(\overset{\circ}{E} = X \setminus (\overline{X \setminus E})\right)$

(3) $\complement_X(\overline{E}) = \mathrm{Int}(\complement_X E)$ $\left(X \setminus \overline{E} = \mathrm{Int}(X \setminus E)\right)$

demostración

(2) $X \setminus \overset{\circ}{E} = X \setminus \left(\bigcup \{G \mid G \in \tau, G \subset E\}\right) = \bigcap \{X \setminus G \mid G \in \tau,\ G \subset E\} =$

$\underset{F = X \setminus G}{=} \bigcap \{F \mid F \text{ cerrado},\ X \setminus E \subset F\} = \overline{X \setminus E}$

(3) (deducimos (3) de (2)) $A = X \setminus E \Rightarrow \mathrm{Int}(X \setminus E) = \mathrm{Int}(A) \overset{\overset{\circ}{A} = X \setminus (\overline{X \setminus A})}{=} X \setminus \left(\overline{X \setminus (X \setminus E)}\right) =$

$= X \setminus \overline{E}$

TEOREMA: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

Consideremos la aplicación $\mathrm{Int}_X : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$

$$E \longmapsto \mathrm{Int}_X(E) = \mathring{E}$$

Entonces:
(1) $\mathrm{Int}_X(E) \subset E$

(2) $\mathrm{Int}_X(\mathrm{Int}_X(E)) = \mathrm{Int}_X(E)$

(3) $\mathrm{Int}_X(A \cap B) = \mathrm{Int}_X(A) \cap \mathrm{Int}_X(B)$

(4) $\mathrm{Int}_X(X) = X$

(5) $\mathrm{Int}(G) = G \iff G \in \mathcal{T}$

PROPOSICIÓN: $E \subset X \Rightarrow \mathrm{Int}(E)$ es el mayor abierto de X (para $\mathcal{T}$) contenido en E.

demostración (prop. & teorema)

1) • $\mathring{E}$ es abierto

• Sea A abierto de X, $A \subset E$ $\left(\mathring{E} \subset A \subset E \overset{?}{\Rightarrow} \mathring{E} = A\right)$

Como A es abierto contenido en E, $A \subset E \Rightarrow$

$\Rightarrow A \in \{G \in \mathcal{T} / G \subset E\} \Rightarrow A \subset \bigcup\{G \in \mathcal{T} / G \subset E\} \Rightarrow A = \mathring{E}$

2) $\mathrm{Int}(E) \subset E \Longrightarrow \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(E)) \subset \mathrm{Int}(E)$

$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

Como $\mathrm{Int}(E)$ es abierto $\underset{\text{prop.}}{\Longrightarrow} \mathrm{Int}(E) = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(E))$

3) $A \cap B \subset A \Longrightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A)$
$A \cap B \subset B \Longrightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(B)$ $\Big\} \Rightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

proposición $\Rightarrow$ son iguales

$\mathring{A}$ abierto $\mathring{A} \cap \mathring{B}$
$\mathring{B}$ abierto $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ $\Big\} \Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B}$ abierto $\Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$

4) Trivial

5) $\Leftarrow$ obvio por def. de topología

$\Rightarrow$ prop. 2 de topología (G se puede reescribir como una unión (famili de abiertos)

TEOREMA: $\phi: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que:
$$E \longmapsto \phi(E)$$

(1) $\phi(E) \subset E$

(2) $\phi(\phi(E)) = \phi(E)$

(3) $\phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$

(4) $\phi(X) = X$

$\tau := \{A \subset X \,/\, \phi(A) = A\} \Longrightarrow (X, \tau)$ es un espacio topológico para el que $\mathrm{Int}_{(X,\tau)}(E) = \phi(E)$

DEFINICIÓN: FRONTERA de un conjunto $E \subset X$ es: $\partial E = Fr_X(E) = \overline{E} \cap (\overline{X \setminus E})$

Como $\overline{X \setminus E} = X \setminus \overset{\circ}{E} \Rightarrow Fr(E) = \overline{E} \cap (X \setminus \overset{\circ}{E}) = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$

Ejemplo: $E = [0,1)$

$\overset{\circ}{E} = (0,1) \subset E \subset \overline{E} = [0,1] = \bigcap\{K \text{ cerrado} \,/\, K \supset E\}$

$\overset{\circ}{E} = \bigcup\{G \,|\, G \text{ abierto}, G \subset E\}$

$Fr(E) = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \{0,1\}$

COROLARIO: $x \in Fr(E) \Longleftrightarrow \forall H \in \tau$ tal que $x \in H$, $H \cap E \neq \emptyset \;\wedge$
$\wedge\; H \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$.

demostración

$x \in Fr(E) \Longleftrightarrow \underbrace{(x \in \overline{E})}_{(1)} \wedge \underbrace{(x \in \overline{X \setminus E})}_{(2)}$

$G = X \setminus K \Longleftrightarrow K = X \setminus G$

(1) $\equiv x \in \overline{E} \Longleftrightarrow \forall K$ cerrado $E \subset K$, $x \in K \Longleftrightarrow \forall G$ abto., $G \subset X \setminus E$, $x \notin G$

(2) $\equiv x \in \overline{X \setminus E} \Longleftrightarrow \forall K'$ cerrado $X \setminus E \subset K'$, $x \in K' \Longleftrightarrow \forall A$ abto., $A \subset E$, $x \notin X \setminus A$

TEOREMA:

(1) $\overline{E} = E \cup Fr(E)$

(2) $\mathring{E} = E \setminus Fr(E)$

(3) $X = \mathring{E} \cup Fr(E) \cup \overset{\circ}{(X \setminus E)}$

demostración

(1)

$$E \cup Fr(E) = E \cup \left(\overline{E} \cap \overline{X \setminus E}\right) = \underbrace{(E \cup \overline{E})}_{\overline{E}} \cap \underbrace{(E \cup \overline{X \setminus E})}_{\substack{\cup \\ E \cup X \setminus E = X}} =$$

$$= \overline{E} \cap X = \overline{E}$$

(2)

$$E \setminus Fr(E) = E \cap \complement_X(Fr(E)) = E \wedge \complement_X(\overline{E} \cap \overline{X \setminus E}) =$$

$$= E \cap \left[\complement \overline{E} \cup \complement(\overline{X \setminus E})\right] = E \cap \left[Int(\complement E) \cup Int(\complement\complement E)\right] =$$

$$= \underbrace{E \cap Int(\complement E)}_{\substack{\cap \\ E \cap \complement E = \emptyset}} \cup \underbrace{E \cap Int(E)}_{Int(E)} = Int(E) = \mathring{E}$$

3) Bastaría ver que $\underbrace{\mathring{E} \cup Fr(E) \cup Int(X \setminus E)}_{[1]} = \overbrace{\mathring{E} \cup \complement \mathring{E}}^{(*)} = X$

$(*) = \mathring{E} \cup \overline{\complement E} \overset{\uparrow}{=} \underbrace{\mathring{E} \cup Fr(E) \cup (X \setminus E)}_{[2]}$

$\overline{X \setminus E} = \overline{\complement E} = Fr(X \setminus E) \cup (X \setminus E) = Fr(E) \cup (X \setminus E)$

Falta ver que [1] = [2]

$\boxed{\supset}$ Siempre

$\boxed{\subset}$ $Int(X \setminus E) = (X \setminus E) \setminus Fr(X \setminus E) \Rightarrow (X \setminus E) = Int(X \setminus E) \cup Fr(E)$

∎

Más propiedades:

(4) $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

(5) K cerrado (para τ) $\Longleftrightarrow$ $Fr(K) \subset K$

demostración

(5)

$\boxed{\Rightarrow}$ K cerrado $\Leftrightarrow K = \overline{K} \Rightarrow Fr(K) \subset \overline{K} = K$ ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ $Fr(K) \subset K$

$$\overline{K} \cap \overline{X \setminus K} = \overline{K} \cap \complement \mathring{K}$$

$$\overline{K} = \overline{K} \cap X = \overline{K} \cap (\mathring{K} \cup \complement \mathring{K})$$

ENTORNOS DE UN PUNTO

DEFINICIÓN: (X, τ) espacio topológico $x_0 \in X$. Un ENTORNO de x_0 es un subconjunto $U \subset X$ tal que U contiene a un abierto que contiene al punto x_0. Es decir, U entorno de $x_0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists G \in \tau$ con $x_0 \in G$ tal que $G \subset U$.

Ejemplo: $U = [0, 1)$ es un entorno de $1/2$ para $\tau = \tau_n$ en $\mathbb{R}$. Sin embargo, no es un entorno del cero.

$\mathcal{U}_{x_0}$:= familia de entornos del punto x_0 = SISTEMA DE ENTORNOS DE x_0

TEOREMA (Propiedades básicas de los entornos de un punto):

1) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow x \in U$

2) $U, V \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_x$

3) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \in \mathcal{U}_y \; \forall y \in V$

4) $U \in \mathcal{U}_x \,,\, U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$

5) $G \in \mathcal{T} \Leftrightarrow G$ contiene a un entorno de cada uno de sus puntos.

demostración

2) $x \in U,\ x \in V \Rightarrow x \in U \cap V$

$$\left.\begin{array}{l} U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists G_1 \in \mathcal{T},\ x \in G_1,\ G_1 \subset U \\ V \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists G_2 \in \mathcal{T},\ x \in G_2,\ G_2 \subset V \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{prop. 3 topología}} G := G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T},\ x \in G$$

$$\left.\begin{array}{l} G_1 \cap G_2 \subset G_1 \subset U \\ G_1 \cap G_2 \subset G_2 \subset V \end{array}\right\} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \subset U \cap V$$

3) Sea $U \in \mathcal{U}_x,\ x \in U \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T},\ x \in G,\ G \subset U$

¿$V = G$?

¿$V \in \mathcal{U}_x$? $\rightarrow$ sí

Sea $y \in V = G \overset{?}{\Rightarrow} U \in \mathcal{U}_y$

Sí, porque U contiene a un abierto ($= G$) que contiene a y ($\in G = V$)

4) Como $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T},\ x \in G,\ G \subset U$

Como $U \subset V \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T},\ x \in G,\ G \subset U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$.

5) $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $x \in G$, luego, por hipótesis $G \in \mathcal{T},\ x \in G \subset G$. Lo que da que $G \in \mathcal{U}_x$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $x \in G \Rightarrow \exists A_x \in \mathcal{T},\ x \in A_x,\ A_x \subset G \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \bigcup_{x \in G} A_x \subset G \\ \text{Para cada } g \in G\ \exists A_g \in \mathcal{T},\ g \in A_g \Rightarrow g \in \bigcup_{x \in G} A_x \end{array}\right\} \Rightarrow G = \bigcup_{x \in G} A_x$$

TEOREMA: Dado un conjunto $X \neq \emptyset$. Si para cada punto $x \in X$ tenemos dada una familia $\mathcal{U}_x$ que satisface 1), 2), 3) y 4) del anterior teorema y definimos

$$\tau := \{ G \subset X : \forall g \in G,\ \exists W_g \in \mathcal{U}_g,\ W_g \subset G \}$$

Entonces, τ es una topología sobre X y para esta topología $\mathcal{U}_{x,\tau} = \mathcal{U}_x,\ \forall x \in X$.

$\left(\Longrightarrow x \in B,\ \forall B \in \mathcal{B}\right.$

DEFINICIÓN: Una BASE de entornos de $x_0 \in X$, es una subfamilia $\mathcal{B}_x$ de $\mathcal{U}_x$ tal que $\forall U \in \mathcal{U}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset U$.

<u>demostración teorema</u>

I) τ es una topología

- $\emptyset, X \in \tau$
- $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}^{G_\alpha \in \tau} \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \in \tau$
- $G_1, G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

II) $\left(\mathcal{U}_{x,\tau} \subset \mathcal{U}_x,\ \mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_{x,\tau} \right) \forall x \in X$

Entornos de un punto

Tma A. - Sea (X,τ) un espacio topológico. El sistema de entornos $\mathcal{U}_x$ de un punto $x\in X$ satisface:

1) $U\in\mathcal{U}_x \Rightarrow x\in U$.

2) $U,V\in\mathcal{U}_x \Rightarrow U\cap V\in\mathcal{U}_x$

3) $U\in\mathcal{U}_x \Rightarrow \exists V\in\mathcal{U}_x$ tal que $(\forall y\in V,\ U\in\mathcal{U}_y)$

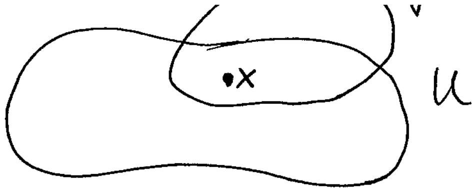
4) $U\in\mathcal{U}_x,\ U\subset V \Rightarrow V\in\mathcal{U}_x$.

5) $G\in\tau \Leftrightarrow$ G contiene a un entorno de cada uno de sus puntos

Corolario 1: 3) $\Rightarrow [U\in\mathcal{U}_x \Rightarrow \exists W\subset U, W\in\mathcal{U}_x$ y tal que $(\forall y\in W,\ U\in\mathcal{U}_y)]$

Corolario 2: $A,B\in\mathcal{U}_x \Rightarrow A\cup B\in\mathcal{U}_x$.

demostración corolario 1



- $W := U \cap V \subset U$ (*)
- $W \in \mathcal{U}_x$ por la prop. 2
- $\forall y \in W \overset{(*)}{\Longrightarrow} y \in V \Longrightarrow U \in \mathcal{U}_y$ por la prop. 3

Tma B: Sea X un conjunto no vacío. Si para cada punto $x \in X$ tenemos dada una familia no vacía $\mathcal{U}_x$ verificando 1), 2), 3), 4) del Tma A, y definimos:

$$\tau := \{G \subset X : \forall g \in G, \exists W_g \in \mathcal{U}_g, W_g \subset G\}$$

Entonces:

(I) τ es una topología sobre X

(II) Para la topología τ dada en (I), la familia de entornos de $x \in X$, pongamos $\mathcal{U}_{x,\tau}$, satisface

$$\mathcal{U}_{x,\tau} = \mathcal{U}_x \quad ,$$

para cada $x \in X$.

demostracion (I) del teorema

$$\left(\tau := \{ G \subset X \,/\, \forall g \in G,\ \exists W_g \in \mathcal{U}_g,\ W_g \subset G \} \right)$$

1) $X \in \tau \iff \forall g \in X,\ \exists W_g \in \mathcal{U}_g,\ W_g \subset X$

Escogemos $W_g := X$ y $W_g = X \in \mathcal{U}_g$ por prop. 4

$\emptyset \in \tau \iff \forall g \in \emptyset,\ \exists W_g \in \mathcal{U}_g,\ W_g \subset \emptyset$

2) $G_1, G_2 \in \tau \overset{??}{\Longrightarrow} G_1 \cap G_2 \in \tau$

$G_1 \in \tau \Rightarrow \forall g \in G_1,\ \exists W_{1,g} \in \mathcal{U}_g,\ W_{1,g} \subset G_1$

$G_2 \in \tau \Rightarrow \forall g \in G_2,\ \exists W_{2,g} \in \mathcal{U}_g,\ W_{2,g} \subset G_2$

Sea $g \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \begin{cases} \exists W_{1,g} \in \mathcal{U}_g \\ \exists W_{2,g} \in \mathcal{U}_g \end{cases} \xRightarrow{\text{prop } 2} W_{1,g} \cap W_{2,g} \in \mathcal{U}_g$

Además $W_{1,g} \cap W_{2,g} \subset G_1 \cap G_2$

3) $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda},\ G_\alpha \in \tau \overset{??}{\Longrightarrow} \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \in \tau$

Para cada $\alpha \in \Lambda \Rightarrow \forall g \in G_\alpha,\ \exists W_{\alpha,g} \in \mathcal{U}_g,\ W_{\alpha,g} \subset G_\alpha$

Sea $g \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in \Lambda,\ g \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists W_{\alpha_0,g} \in \mathcal{U}_g,\ W_{\alpha_0,g} \subset G_{\alpha_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow W_{\alpha_0,g} \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$. En consecuencia, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \in \tau$.

demostración (II) del teorema B

¿$\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_{x,\tau}$?

Recordar: V entorno de x para τ si V contiene un abierto para τ que contiene al punto x.

• ¿$\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_{x,\tau}$?

$U \in \mathcal{U}_x \overset{?}{\Longrightarrow} U \in \mathcal{U}_{x,\tau}$

$\Downarrow$ corolario 1

$U \in \tau$

• ¿$\mathcal{U}_{x,\tau} \subset \mathcal{U}_x$?

$\Omega \in \mathcal{U}_{x,\tau} \Rightarrow \exists G \in \tau,\ x \in G\ \ G \subset \Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists W_x \in \mathcal{U}_x,\ W_x \subset G \xRightarrow{\text{prop. } 4} G \in \mathcal{U}_x$

$G \in \tau \iff \forall g \in G,\ \exists W_g \in \mathcal{U}_g,\ W_g \subset G$

Base de entornos de un punto $x \in X$

<u>Definición</u>.- Una base de entornos de un punto x de un espacio topológico (X, τ) es una subfamilia $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ del sistema de entornos de x, $\mathcal{U}_x$, que verifica la propiedad:

$$\forall U \in \mathcal{U}_x, \ \exists W \in \mathcal{B}_x \text{ con } W \subset U.$$

A sus elementos se les llama entornos básicos.

<u>Ejercicio</u>: Demuestra que

$$\mathcal{U}_x = \{ \Omega \subset X : \exists V \in \mathcal{B}_x \text{ con } V \subset \Omega \}$$

<u>Tma A</u>.- Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ una base de entornos de x. Entonces

1) $V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow x \in V$

2) $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$

3) $V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists V_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que $\forall y \in V_0 \ (\exists W_y \in \mathcal{B}_y \text{ con } W_y \subset V)$

4) $G \in \tau \Leftrightarrow G$ contiene un entorno básico de cada uno de sus puntos.

<u>Dem</u> (Ejercicio)

Tma B. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Supongamos que para cada $x \in X$ está dada una familia $\mathcal{B}_x$ verificando las propiedades 1), 2) y 3) de Tma A

Entonces,

$$\tau := \{ G \subset X : \forall g \in G, \exists \Omega_g \in \mathcal{B}_g , \Omega_g \subset G \}$$

es una topología sobre X y la familia $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de x en X para la topología τ.

Dem (Ejercicio).

TEOREMA: (X, τ) espacio topológico. $\forall x \in X$, $\mathcal{B}_x$ es una base de entorno de x.

1) $G \in \tau \iff G$ contiene un entorno básico de cada uno de sus punto

2) F cerrado $\iff \forall x \notin F, \exists W_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $W_x \cap F = \emptyset$.

3) $x \in \overline{E} \iff \forall \Omega_x \in \mathcal{B}_x,\ \Omega_x \cap E \neq \emptyset$

4) $x \in \mathring{E} \iff \exists \Omega_x \in \mathcal{B}_x,\ \Omega_x \subset E$

5) $x \in Fr(E) \iff \forall \Omega_x \in \mathcal{B}_x,\ \Omega_x \cap E \neq \emptyset$, y $\Omega_x \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$.

<u>demostración</u>

1) Def. de $\mathcal{B}_x$ + caracterización de G abto. con la familia $\mathcal{U}_x$

2) F cerrado $\iff G = \complement F$ abto $\overset{1)}{\iff} \forall x \in G, \exists W_x \in \mathcal{B}_x,\ W_x \subset G \iff$

$\iff \forall x \notin F, \exists W_x \in \mathcal{B}_x,\ W_x \cap F = \emptyset$.

3) $x \notin \overline{E} \iff x \in \complement\overline{E} = Int(\complement E) \overset{1)}{\iff} \exists W_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $W_x \subset \complement\overline{E} \subseteq \complement E$

4) $\boxed{\Rightarrow}$ $x \in Int(E) \overset{1)}{\Longrightarrow} \exists \Omega_x \in \mathcal{B}_x,\ \Omega_x \subset Int(E) \subset E$

$\boxed{\Leftarrow}$

Sea $\Omega_x \in \mathcal{B}_x,\ \Omega_x \subset E \Rightarrow \Omega_x \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists G_x \in \tau,\ G_x \subset \Omega_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists G_x \in \tau,\ x \in G_x \subset \Omega_x \subset E \Rightarrow x \in G_x \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} \{G_\alpha \in \tau : G_\alpha \subset E\} =: Int(E)$

5) FORMA 1

$x \in Fr(E) = \overline{E} \cap \overline{X \setminus E} \iff \forall \Omega_{1,x} \in \mathcal{B}_x,\ \Omega_{1,x} \cap E \neq \emptyset$,

$\forall \Omega_{2,x} \in \mathcal{B}_x,\ \Omega_{2,x} \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$

FORMA 2

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\Omega_x \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \begin{cases} \Omega_x \cap E \neq \emptyset & \text{pues } x \in \overline{E} \\ \Omega_x \cap (X \setminus E) \neq \emptyset & \text{pues } x \in \overline{X \setminus E} \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\Omega_x \in \mathcal{B}_x \overset{(1)}{\Longrightarrow} \Omega_x \cap E \neq \emptyset$

Sea $\Omega_x \in \mathcal{B}_x \overset{(2)}{\Longrightarrow} \Omega_x \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$.

TEOREMA: (X, τ_1), (X, τ_2). Para cada $x \in X$ están dadas $\mathcal{B}_x^1$, $\mathcal{B}_x^2$ bases de entornos de x para τ_1, τ_2 respectivamente.

Son equivalentes: notación en algunos libros

1) $\tau_1 \subset \tau_2$ $(\tau_1 \prec \tau_2)$

2) $\forall x \in X$, $A \in \mathcal{B}_x^1 \Longrightarrow \exists B \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B \subset A$

demostración

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Sea $x \in X$, sea $A \in \mathcal{B}_x^1 \Longrightarrow \exists G_1 \in \tau_1$, $x \in G_1$, $G_1 \subset A \Longrightarrow$ $\overset{1)}{\Longrightarrow} \exists G = G_1 \in \tau_2$, $x \in G$, $G \subset A \Longrightarrow A \in \mathcal{U}_x^2 \Longrightarrow \exists B \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B \subset A$.

$\mathcal{B}_x^2$ base de entornos de x para τ_2.

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Sea $G_1 \in \tau_1$. Veamos que $G_1 \in \tau_2$.

$$G_1 \in \tau_1 \Longrightarrow G_1 = \bigcup_{x \in G_1} \Omega_x^1, \ \Omega_x^1 \in \mathcal{B}_x^1 \overset{2)}{\Longrightarrow} \exists \Omega_x^2 \in \mathcal{B}_x^2, \ \Omega_x^2 \subset \Omega_x^1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow G_1 = \bigcup_{x \in G_1} \Omega_x^2 \in \tau_2.$$

PUNTOS DE ACUMULACIÓN

(X, τ) espacio topológico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $x \in X$

x se dice PUNTO DE ACUMULACIÓN de A si $\forall U \in \mathcal{U}_x$, $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

$A' = \{x \in X \mid x$ de acumulación de $A\}$ es el conjunto DERIVADO de A.

PROPOSICIÓN: $\bar{A} = A \cup A'$

demostración

$\boxed{\supset}$ • $A \subset \bar{A}$

• $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x$, $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Sea $U \in \mathcal{U}_x$, $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \emptyset = (U \setminus \{x\}) \cap A \subset U \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow A' \subset \bar{A}$

$\Longrightarrow A \cup A' \subset \bar{A}$

$\boxed{\subset}$ $x \in \bar{A} \Longrightarrow \forall \Omega \in \mathcal{B}_x$, $\Omega \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow \begin{cases} (\Omega \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow x \in A' \\ (\Omega \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \Longrightarrow x \in A. \end{cases}$

BASES Y SUB-BASES DE TOPOLOGÍAS

DEFINICIÓN: (X, τ) espacio topológico. Una BASE para τ es una subfamilia $\mathcal{B}$ de τ $(\mathcal{B} \subset \tau)$ tal que:

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B : \mathcal{G} \subset \mathcal{B} \right\}$$

TEOREMA: $X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, son equivalentes:

1) $\mathcal{B}$ es una base para UNA topología

2) Se verifican $\begin{cases} a) \ X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \\ b) \ B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow \forall p \in B_1 \cap B_2, \ \exists B_3 \in \mathcal{B} \text{ con } p \in B_3, \ B_3 \subset B_1 \cap B_2 \end{cases}$

Ejemplo: $\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a < b\} \overset{\text{teorema}}{\Longrightarrow} \exists \tau^*$ topología para $\mathbb{R}$

Pregunta: ¿$\tau^* = \tau_u$? respuesta, sí

3) $\forall x \in X$, la familia $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es una base de entornos para UNA topología sobre X.

DEFINICIÓN: Dado (X, τ) un espacio topológico, y dada una subfamilia $\mathcal{C}$ de τ, diremos que $\mathcal{C}$ es una SUB-BASE para τ si la familia: $\left\{ \bigcap_{j \in J} B_j : B_j \in \mathcal{C}, |J| < \aleph_0 \right\}$ es una base para τ.

FUNCIONES CONTINUAS ENTRE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

DEFINICIÓN: (X,τ), (Y,τ') dos espacios topológicos, $f: X \longrightarrow Y$ función. Sea $x_0 \in X$. Diremos que f es CONTINUA EN x_0 si $\forall V \in \mathcal{U}_{f(x_0),\tau'}$, $\exists U \in \mathcal{U}_{x_0,\tau}$ tal que $f(U) \subset V$.

Diremos que f es CONTINUA EN X si es continua en cada $x \in X$.

Recordar:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\underbrace{|x - x_0| < \delta}_{x \in B_X(x_0,\delta)} \Longrightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}_{f(x) \in B_Y(f(x_0),\varepsilon)}$

Diremos que f es ABIERTA si $\forall G \in \tau$, $f(G) \in \tau'$.

$\left[f: X \longrightarrow Y \iff f \subset X \times Y \text{ tal que } \forall x \in X, \exists! y \in Y \text{ con } (x,y) \in f \right]$

TEOREMA: Son equivalentes: (Obs: $f(X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$)

1) f continua
2) $\forall H$ abierto en $Y \Rightarrow f^{-1}(H)$ es abierto en X.
3) $\forall F$ cerrado en $Y \Rightarrow f^{-1}(F)$ es cerrado en X.
4) $\forall E \subset X$, $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

demostración

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$

$\overline{f(E)} = \bigcap \{K : K \text{ cerrado en } Y \quad f(E) \subset K\}$

$\overline{E} = \bigcap \{F : F \text{ cerrado en } X, \; E \subset F\}$

K cerrado en Y, $f(E) \subset K \overset{(3)}{\Longrightarrow} E \subset f^{-1}(K)$, $f^{-1}(K)$ cerrado en X

$f^{-1}(f(E)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(E)\}$

Divagaciones (demostración más adelante)

Pregunta:

$$\varphi: A \longrightarrow B$$

$$\varphi^{-1}(\complement_B E) = \complement_A \varphi^{-1}(E)$$

demostración:

$$a \in \varphi^{-1}(\complement E) \iff \varphi(a) \in \complement E \iff \varphi(a) \notin E$$

$$a \in \complement \varphi^{-1}(E) \iff a \notin \varphi^{-1}(E)$$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sea H abierto de Y. Sea $x_0 \in f^{-1}(H) \Rightarrow f(x_0) \in H$.

Además f es continua en x_0. $\underbrace{\forall V \in \mathcal{U}_{f(x_0),\tau'},\ \exists U \in \mathcal{U}_{x_0,\tau},\ f(U) \subset V}_{\text{lo que sabíamos}}$

H puede ser a lo que llamamos V: $\forall H \in \mathcal{U}_{f(x_0),\tau'},\ \exists U \in \mathcal{U}_{x_0,\tau},\ f(U) \subset H$

Luego $f(U) \subset H \Rightarrow U \subset f^{-1}(H)$

$U \subset f^{-1} \circ f(U) \subset f^{-1}(H)$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Sea K cerrado en Y. Definimos $H = Y \setminus K$ es abierto en Y

$$\left.\begin{array}{l} \overset{2)}{\Longrightarrow} f^{-1}(H) \text{ abierto en } X \\ \text{Pero } f^{-1}(\complement K) = \complement(f^{-1}(K)) \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(K) \text{ cerrado en } X.$$

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$

$$y_0 \in f(\overline{E}) = f\left(\bigcap\{M : M \text{ cerrado en } X,\ M \supset E\}\right) \overset{?}{\subset} \bigcap\{K : K \text{ cerrado},\ K \supset f(E)\} = \overline{f(E)}$$

$y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in M$, $\forall M$ cerrado en X, $M \supset E$

Sea K cerrado en Y tal que $K \supset f(E)$. Veamos que $y_0 \in K$.

$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

$y = f(a),\ a \in A \xRightarrow{A \subset B} y = f(a),\ a \in B$

$f^{-1}(K) \supset f^{-1}(f(E)) \supset E$

$[4 \Rightarrow 1]$ Sea $x_0 \in X$. Veamos que es cont. en ...

Sea $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$. Se define $E = X \setminus f^{-1}(V)$

- $U := X \setminus \overline{E}$ abto.
- $f(U) \subset V$
- ¿$x_0 \in U$? Habrá que aplicar 4) de alguna manera.

OJO: NOTA

$f: A \to B$, $Z \subset B$

$f(f^{-1}(Z)) = Z \cap f(A)$

Sea $E := X \setminus f^{-1}(V)$, $\overline{E} \subset X$ cerrado, $U = X \setminus \overline{E}$ abierto.

Veamos que $x_0 \in U$. Si $x_0 \notin U \Rightarrow x_0 \in \overline{E} \Rightarrow \forall \Omega \in \mathcal{U}_{x_0}, \Omega \cap E \neq \emptyset$

$\Omega \cap \complement f^{-1}(V) \neq \emptyset$ $[a \in \Omega \cap \complement f^{-1}(V) \neq \emptyset,\ a \in \Omega,\ a \notin f(V)]$, listo.

$[x_0 \in \Omega \cap \complement f^{-1}(V) \neq \emptyset,\ x_0 \in \Omega,\ x_0 \notin f(V)]$

Por otro lado, si ahora $x_0 \in \Omega$, $x_0 \notin E$, $x_0 \in Fr(E)$, $\overset{x_0}{\Omega \cap} \overset{x_0}{f^{-1}}(V) \neq \emptyset$

$f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$. Veamos que $x_0 \in U$. Si $x_0 \notin U = X \setminus \overline{E} \Rightarrow x_0 \in \overline{E} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_0) \in f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)} = \overline{f(X \setminus f^{-1}(V))} = \overline{f \circ f^{-1}(\complement V)} = \overline{\complement V \cap f(X)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_0) \notin V$.

$\longrightarrow$ esto es para ver que $\exists U \in \mathcal{U}_{x_0, \tau}$, $f(U) \subset V$

FUNCIONES CONTINUAS (RECUERDO)

(X, τ_1), (Y, τ_2), (Z, τ_3) espacios topológicos

$X \xrightarrow[f \text{ cont.}]{} Y \xrightarrow[g \text{ cont.}]{} Z \Rightarrow g \circ f$ continua

$G \in \tau_3 \Rightarrow g^{-1}(G) \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(G)) \in \tau_1$

DEF1: $f:(X,\tau_1)\longrightarrow(Y,\tau_2)$ es un HOMEOMORFISMO si f es cont., biyectiva y f^{-1} continua.

DEF2: $f:(X,\tau_1)\longrightarrow(Y,\tau_2)$ es una INMERSIÓN si f es inyectiva y continua.

TEOREMA: Son equivalentes para $f:(X,\tau_1)\longrightarrow(Y,\tau_2)$

1) f homeomorfismo
2) $G\subset X \Longrightarrow [f(G)\in\tau_2 \Longleftrightarrow G\in\tau_1]$
3) $F\subset X \Longrightarrow [f(F)$ cerrado en $Y \Longleftrightarrow F$ cerrado en $X]$
4) $E\subset X \Longrightarrow f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$

SUBESPACIOS TOPOLÓGICOS

(X,τ) espacio topológico, $A\subset X$

$\tau_A := \{G\cap A \mid G\in\tau\}$ TOPOLOGÍA RELATIVA o de SUBESPACIO DE A

En este caso decimos que A es un subespacio topológico de X

$$\begin{array}{ccc}(A,\tau_A) & \overset{i}{\hookrightarrow} & (X,\tau)\\ a & \longmapsto & a=i(a)\end{array}$$

¿i inmersión? Sí, i inyectiva + i continua

<u>observación</u>: $G\in\tau \Rightarrow i^{-1}(G) = G\cap A\in\tau_A$

Por ejemplo, $A=[0,1)\subset X=\mathbb{R}$, $\tau=\tau_u$
$[0,1/2)$ abto. en A pero no en $X=\mathbb{R}$.

ejemplo: $(A=[0,1), \tau_A) \xhookrightarrow{i} (\mathbb{R}, \tau_d)$

$G = \{1/2\} \in \tau_d \Longrightarrow i^{-1}(G) = \{1/2\} \notin \tau_A$

TEOREMA: $A \subset X$, A subespacio de X (e.d., la top. de A es la τ_A)

1) $H \subset A$ es abierto en $A \Longleftrightarrow \exists G \in \tau,\ H = G \cap A$

2) $F \subset A$ es cerrado en $A \Longleftrightarrow F = K \cap A$, K cerrado en X

3) $E \subset A \Longrightarrow cl_A(E) = \overline{E}^A = A \cap \overline{E}^X$

4) $a \in A \Longrightarrow [V \in \mathcal{U}_{a,\tau_A} \Longleftrightarrow V = U \cap A,\ U \in \mathcal{U}_{a,\tau}]$

5) $\forall a \in A$, $\mathcal{B}_{a,\tau}$ base de entornos de a en $X \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \{B \cap A : B \in \mathcal{B}_{a,\tau}\}$ base de entornos de a para τ_A

6) $\mathcal{B}$ es base para $\tau \Longrightarrow \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ base para τ_A.

DEFINICIÓN: $f: (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ $\quad A \subset X$

La RESTRICCIÓN de f a A es $f|_A = f_A : (A,\tau_A) \longrightarrow (Y,\tau')$

$f_A(a) = f(a)$

PROPOSICIÓN: f continua, $A \subset X$ subespacio topológico $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow f_A : A \longrightarrow Y$ es continua
$\quad a \longmapsto f(a)$

demostración

G abierto en $Y \Longrightarrow f^{-1}(G) \in \tau \Longrightarrow f^{-1}(G) \cap A$ es abierto en A

$(f_A^{-1})(G) = \{a \in A \mid f_A(a) \in G\} = \{a \in A \mid f(a) \in G\} = f^{-1}(G) \cap A$.

PROPOSICIÓN: $(X,\tau_1) \xrightarrow{f} (Y,\tau_2)$, $Y \xhookrightarrow{i} Z$, Y sub. top. de (Z,τ_3) y $\tau_2 = (\tau_3)_Y$. f es continua $\iff$ $i\circ f$ continua

demostración

$\boxed{\Rightarrow}$ Composición de continuas

$\boxed{\Leftarrow}$ $H \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(H) = f^{-1}(G\cap Y) = \underbrace{(i\circ f)^{-1}(G)}_{\shortparallel}$

$\Downarrow$

$H = G\cap Y$, $G \in \tau_3$

$$\{x\in X \mid (i\circ f)(x)\in G\} =$$
$$= \{x\in X \mid i(f(x))\in G\} =$$
$$= \{x\in X \mid f(x)\in G\cap Y\}$$

TOPOLOGÍA ASOCIADA A UN ORDEN

DEFINICIÓN: Una RELACIÓN R en un conjunto X se dice de ORDEN sobre X (o un orden lineal sobre X) si:

(1) $\forall x,y \in X$, $x\neq y \Rightarrow xRy$ ó yRx (prop. comparabilidad)

(2) $\forall x,y\in X$, si $xRy \Rightarrow x\neq y$ (prop. irreflexiva)

(3) $\forall x,y,z \in X$, xRy, $yRz \Rightarrow xRz$ (prop. transitiva)

Abreviamos $(X,R) = (X,<)$

Intervalos para el orden: $a,b\in X$

$(a,b) = \{x\in X \mid a<x<b\}$

$(a,b] = \{x\in X \mid a<x<b, \text{ ó } x=b\}$

$[a,b) = \{x\in X \mid a<x<b, \text{ ó } x=a\}$

$[a,b] = \{x\in X \mid a<x<b, \text{ ó } x=a \text{ ó } x=b\}$

Obs: $X = \mathbb{Q}$, $\cancel{[\sqrt{2},2)} = \bigcup_{n=0}^{\infty}(r_n,2)$

$r_n\in\mathbb{Q}$, $r_n \longrightarrow \sqrt{2}$

BASE PARA UNA TOPOLOGIA ASOCIADA A $<$

$\mathcal{B} := \{$ • los intervalos (a,b), $a,b \in X$, $a<b$,

• todos los intervalos $[a_0,b)$ si $a_0 = \min X$ si existiera, ($b \in X$)

• todos los intervalos $(a,b_0]$ si $b_0 = \max X$ si existiera $\}$ ($a \in X$)

¿$\mathcal{B}$ base para una topología? $|X| \geq 2$ (dos elem. para ordenar algo)

1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

Sea $x_0 \in X$. Si $x_0 = \max X$ usamos $(a, x_0] \ni x_0$ (el otro elemento)

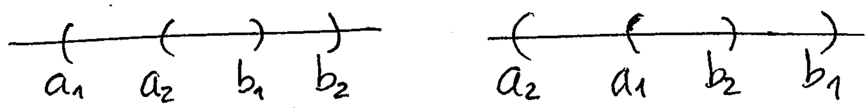
Si $x_0 = \min X$ lo podemos encajar en $[x_0, a) \ni x_0$

Si $x_0 \neq \min X$ y $x_0 \neq \max X \Rightarrow \exists a \in X$, $a < x_0$ pues x_0 no puede ser el mínimo; y $\exists b \in X$, $x_0 < b$ pues x_0 no puede ser el máximo $\Rightarrow x_0 \in (a,b)$ (en este caso $|X| \geq 3$).

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$, $B_3 \subset B_1 \cap B$

CASO 2.1: $B_1 = (a_1, b_1)$, $B_2 = (a_2, b_2)$ (suponemos que se cortan

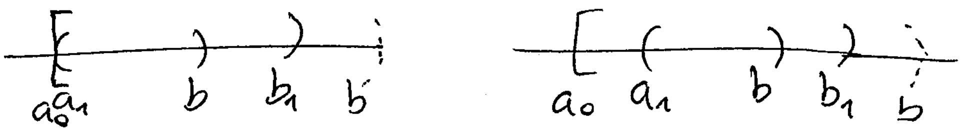
$B_1 \cap B_2$:



$B_1 \cap B_2 = (u,v) = (\max\{a_1,a_2\}, \min\{b_1,b_2\})$

CASO 2.2: $B_1 = (a_1, b_1)$, $B_2 = [a_0, b)$

$B_1 \cap B_2$:



$B_1 \cap B_2 = (u, v) = (a_1, \min\{b_1, b\})$

CASO 2.3: $B_1 = (a_1, b_1)$, $B_2 = (a, b_0]$

CASO 2.4: $B_1 = [a_0, b)$, $B_2 = (a, b_0]$

$\}$ Iguales

Ejemplos:

1) $X = \mathbb{R}$, $\tau_< = \tau_u$

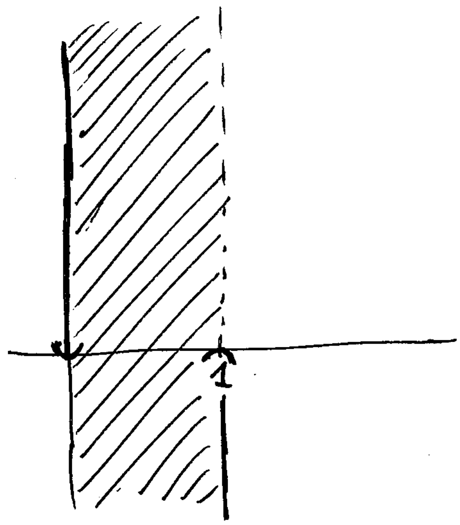
2) $X = \mathbb{R}^2$

▷ $<_{lex}$: $(a,b) <_{lex} (c,d) \iff \begin{cases} a < c \\ \text{ó} \\ a = c,\ b < d \end{cases}$

$X = \mathbb{R}^2$, $(P_1, P_2) = \{ Q \in \mathbb{R}^2 \mid P_1 <_{lex} P_2 \}$

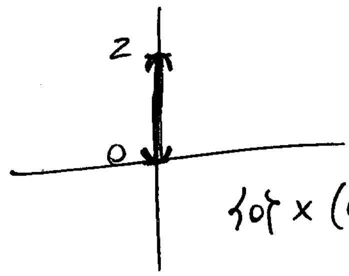
$P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$

$(P_1, P_2) = \{ (x,y) \mid \underbrace{(0,0) <_{lex} (x,y)}_{\substack{0<x \\ 0=x \Rightarrow 0<y}} \underbrace{<_{lex} (1,0)}_{\substack{x<1 \\ \text{ó} \\ x=1 \Rightarrow y<0}} \}$



Si ahora $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,2)$

$(P_1, P_2) = \{ (x,y) \mid (0,0) <_{lex} (x,y) <_{lex} (0,2) \}$



$\{0\} \times (0,2)$

TOPOLOGÍA PRODUCTO

$\{(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ familia de espacios topológicos$\}$

Como si fuera un identificador

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \ni \underline{x}, \quad \underline{x} : \Lambda \longrightarrow \biguplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{\alpha\}\times X_\alpha$$
$$i \longmapsto \underline{x}(i) := x_i \in X_i$$

$\underline{x} = (x_i)_{i\in X}$, $x_i \in X_i$

$$\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}_i \ni \underline{x} : \mathbb{N} \longrightarrow \biguplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}_i$$
$$i \longmapsto \underline{x}(i) = x_i \in \mathbb{R}_i \equiv \{i\}\times\mathbb{R}$$

<u>DEFINICIÓN</u>: $\Omega \in \beta \iff \Omega = \prod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$, $U_\alpha \in \tau_\alpha \ \forall \alpha\in\Lambda$

Esta definición da una base para una topología en el espacio producto $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, $\tau_\square :=$ topología caja.

Otra posibilidad es: $\mathcal{S} := \{\pi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i\}_{i\in\Lambda}$

con
$$\pi_i : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow X_i$$
$$(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \longmapsto x_i$$

$\pi_i :=$ la i-ésima proyección

$\pi_i(a) = \prod_{\alpha\in\Lambda} \Omega_\alpha$ donde

$$\Omega_\alpha = \begin{cases} \{a\} & \text{si } \alpha = i \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \neq i \end{cases}$$

$\mathcal{S}$ es una sub-base para una topología, llamada la topología producto en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

$$\pi_i^{-1}(U_i) = \prod_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha \quad \text{con} \quad W_\alpha = \begin{cases} U_i & \text{si } \alpha = i \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \neq i \end{cases}$$

$\tau_{prod} = \tau_X =$ la topología engendrada por $\mathcal{S}$.

- RECUERDO: $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, $\underline{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, $X \xrightarrow{\pi_i = pr_i} X_i$, $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \longmapsto x_i$

$$\tau_X \longleftarrow \mathcal{J}_X = \{ \pi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i , i\in\Lambda \}$$

$$\tau_\square \longleftarrow \mathcal{J}_\square = \{ \prod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha , \forall\alpha\in\Lambda \}$$

$$\mathcal{J}_\square \ni \pi_i^{-1}(U_i) = \prod_{\alpha\in\Lambda} \Omega_\alpha \quad \text{con} \quad \Omega_\alpha = \begin{cases} U_i & \text{si } \alpha = i \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \neq i \end{cases}$$

Observación: $\tau_X \subset \tau_\square$

¿$\tau_X = \tau_\square$? NO

Contraejemplo: $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$, $X_n = \mathbb{R}$, $\tau_n = \tau_u$

$A := \mathbb{R}$, top. usual

$f_n : A \longrightarrow X_n$, $x \longmapsto x$; $A \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^\omega, \tau_\square)$, $x \longmapsto f(x) := (f_n(x))_{n=0}^{\infty}$

f_n es continua $\not\Longrightarrow$ f no es continua

$$\underline{0} = (0)_{n=0}^{\infty} \in B := \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{n+1} , \frac{1}{n+1} \right) \in \tau_\square$$

¿$f^{-1}(B)$ abierto en $\mathbb{R} = A$?

Veamos que 0 no es un punto interior de $f^{-1}(B)$

Caso contrario $\exists \delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subset f^{-1}(B) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f((-\delta,\delta)) \subset B \Longrightarrow \forall n , (-\delta,\delta) \subset \left(\frac{-1}{n+1} , \frac{1}{n+1} \right)$ ¡IMPOSIBLE!

TEOREMA: $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ familia de espacios topológicos. Sea A conjunto. Si $\forall\alpha\in\Lambda$, tenemos dada una aplicación $f_\alpha : A \longrightarrow X_\alpha$ y definimos $f: A \ni a \longrightarrow (f_\alpha(a))_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$

Si $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ tiene la topología τ_X, entonces f continua $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\alpha\in\Lambda$, f_α continua.

demostración

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \arrow[r, "\pi_i = pr_i"] & X_i \end{tikzcd}$$

$$a \longmapsto (f_\alpha(a))_{\alpha\in\Lambda} \longmapsto f_i(a)$$

$f_i := \pi_i \circ f$ es cont. por ser composición de cont.

π_i: cont. $\quad f$: cont.

porque $\tau = \tau_X$

$\boxed{\Leftarrow}$ Veamos que la contraimagen de los elementos de la sub-base es abierto en A.

$f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = \{a\in A \mid f(a) \in \pi_i^{-1}(U_i)\} = \{a\in A \mid (f_\alpha(a))_{\alpha\in\Lambda} \in \pi_i^{-1}(U_i)\} =$

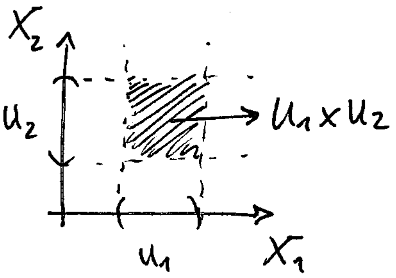
$= \{a\in A \mid (f_\alpha(a)) \in \pi_i^{-1}(U_i)\} = \{a\in A \mid f(a) \in U_i\} = f_i^{-1}(U_i)$ abto. en A por hipótesis ∎

Pregunta: ¿Son iguales $\tau_\times$ y $\tau_\square$ si $|\Lambda| < \infty$?

$$(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \Rightarrow (X_1 \times X_2, \tau_\square) \overset{?}{=} (X_1 \times X_2, \tau_\times)$$

$\tau_\times \subset \tau_\square$

¿$\supset$?



$$U_1 \times U_2 = \underbrace{(U_1 \times U_2)}_{\substack{\cap \\ \tau_\times}} \cap \underbrace{(X_1 \times X_2)}_{\substack{\cap \\ \tau_\times}}$$

La respuesta es sí

(aunque desconozco si esto es una demostración)

TOPOLOGÍA DE SUBESPACIO

$A \subset (X, \tau)$ $\quad \tau_A := \{G \cap A : G \in \tau\}$ top. de subespacio de A

PROPOSICIÓN: $A \subset (X, \tau)$, A abierto en X $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (H abierto en A $\Leftrightarrow$ H abierto en X).

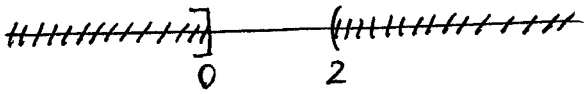
Ejemplo: $A = [0,1)$, $G = (-1/2, 1/2)$, $A \cap G = [0, 1/2)$

TEOREMA 1: $(X, <)$ conjunto ordenado, $\tau = \tau_<$. Sea Y un intervalo de la forma (a,b), $(-\infty, b)$, (a, ∞) $\Rightarrow$ τ_Y es la top. asociada al orden $<_Y$, orden en $<$ considerado para elems. de Y.

TEOREMA 2: $A \subset B$, $B \subset Y$ $\Rightarrow$ la top. producto $A \times B$ es la misma que la top. de subespacio de $X \times Y$.

Observación: $A = (-\infty, 0] \cup (2, \infty) \subset \mathbb{R}$

1) Topología de subespacio de $\mathbb{R}$, τ_A, $\tau = \tau_u$



$(-\varepsilon, 0]$ son entornos abiertos en A para τ_A.

2) Ordenamos A, $<$ y definimos en A la top. $\tau_<$

$a \in A$, $(\underbrace{a-\varepsilon}_{\in A}, \underbrace{a+\varepsilon}_{\in A})$, $(\underset{\in A}{u}, \underset{\in A}{v}) \ni a$

$0 \in A$, $0 \in (\underset{\in A}{u}, \underset{\in A}{v}) = \{a \in A \mid u < a < v\}$

por ejemplo, $(-1, 3) = \{a \in A \mid -1 < a < 3\}$

$(-\varepsilon, 2+\varepsilon) = \{a \in A \mid -\varepsilon < a < 2+\varepsilon\} = (-\varepsilon, 0] \cup (2, 2+\varepsilon)$

TEOREMA: $(X, <)$, $Y = (a,b)$ ó $(-\infty, b)$, (a, ∞)

$\Longrightarrow \tau_Y = \tau_{<_Y}$

demostración

Topología de subespacio $G \in \tau_Y \Longleftrightarrow G = H \cap Y$, con $H \in \tau$.

Topología asociada al orden$|_Y$: $a, b \in Y$, $a <_Y b \Longleftrightarrow a < b$

$\tau_<$) $\mathcal{J} = \{(a,b) \mid a,b \in X, a<b\} \cup \{(a, b_0] \mid b_0 = \max X\} \cup$

sub-base para $\tau_<$ $\cup \{[a_0, b) \mid a_0 = \min X\}$

τ_Y) $\mathcal{J}_Y = \{(a,b) \cap Y \mid a, b \in X\} \cup \{(a, b_0] \cap Y \mid b_0 = \max X\} \cup$

sub-base para $\tau_{<|_Y}$ $\cup \{[a_0, b) \cap Y \mid a_0 = \min X\}$

$\tau_{<|_Y}$) $\tilde{\mathcal{J}} := \{(a,b) \mid a, b \in Y\} \cup \{(a, \tilde{b}_0] \mid \underset{a \in Y}{\tilde{b}_0 = \max X}\} \cup \{[\tilde{a}_0, b) \mid \underset{b \in Y}{\tilde{a}_0 = \min Y}\}$

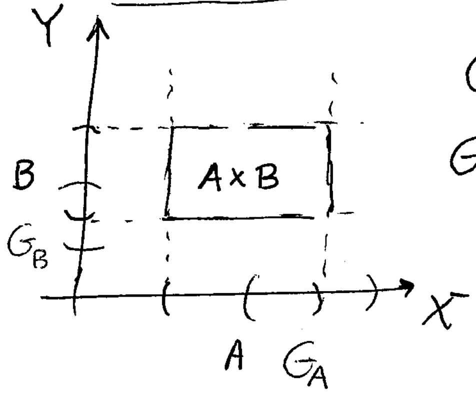
Ahora habría que comparar con todos los casos de $Y = (a,b)$, $(-\infty, b)$ ó (a, ∞). (Munkres)

TEOREMA: $A \subset X$, $B \subset Y$ con $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ esp. topológicos

$$\Rightarrow (A\times B, \tau_{A\times B}) \equiv (A\times B, \tau_\times)$$

$$\tau_\times = \tau_A \times \tau_B$$

demostración



$G_A = H \cap A$ con $H \in \tau_1$

$G_B = N \cap B$ con $N \in \tau_2$

$$\tau_A \times \tau_B = \tau_\times \ni G_A \times G_B = \underbrace{(H\times N)}_{\text{abto. en } X\times Y} \cap (A\times B) \in \tau_\times\big|_{A\times B}$$

$$(x,y) \in G_A \times G_B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x\in H,\ x\in A \\ y\in N,\ y\in B \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y) \in (H\times N)\cap(A\times B)$$

PROPIEDADES DE SEPARACIÓN TOPOLÓGICA (HAUSDORFF)

$(X, \tau) \longrightarrow$ separación "por abiertos" de los puntos distintos

$x_1 \neq x_2$ ¿Podemos buscar entornos (abtos.) Ω_1 de x_1 y Ω_2 de x_2 tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$?

No siempre es posible: por ejemplo $(\mathbb{R}, \tau_{cofinita})$

$r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_1 \neq r_2$

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 = \mathbb{R} \setminus \{x_{11}, \dots, x_{1n}\} \ni 1 \\ \Omega_2 = \mathbb{R} \setminus \{x_{21}, \dots, x_{2m}\} \ni 2 \end{array}\right] \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$$

<u>DEFINICIÓN</u>: (X, τ) se dice <u>T_2</u> ó <u>Hausdorff</u> si $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existen entornos $\Omega_1 \in \mathcal{U}_{x_1}$ y $\Omega_2 \in \mathcal{U}_{x_2}$ tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

<u>TEOREMA</u>: (X, τ) es $T_2 \Rightarrow$ todo subconjunto finito es cerrado.

<u>demostración</u>

Sea $A \subset X$, $n = |A| < \infty$. Por inducción en n, basta demostrarlo para $n = 1$. Pues si $A = \{a_1, \dots, a_n\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{a_j\}$ entonces si $\{a_j\}$ es cerrado A es cerrado por ser unión finita de cerrados.

Veamos que $A = \{p\}$ es un conjunto cerrado en X. Veamos que $A = \bar{A}$. Si existe $x \in \bar{A} \setminus A \Rightarrow x \in \bar{A}$, $x \neq p$. Como X es $T_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists \Omega_1 \in \mathcal{U}_x$, $\exists \Omega_2 \in \mathcal{U}_p$ tal que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Pero $\Omega_1 \in \mathcal{U}_x$, $\Omega_1 \cap A \neq \emptyset$ por $x \in \bar{A} \Rightarrow p \in \Omega_1$, que es una contradicción. ∎

<u>TEOREMA</u>: (X, τ) es T_2, $|X| = \infty$, $A \subset X$

$x \in A' \iff \forall U$ entorno de x, se tiene $|U \cap A| = \infty$

<u>demostración</u>

$\boxed{\Leftarrow}$ Por def. de $x \in A'$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea U entorno abto. de x, $|U \cap A| < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow U \cap (A \setminus \{x\}) = \{x_1, \dots, x_n\}$ con $x_j \neq x$.

$$\left.\begin{array}{l} V := U \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \neq \emptyset \\ V \in \mathcal{U}_x \text{ abierto por ser } X \ T_2 \end{array}\right\} \Rightarrow V \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \Rightarrow x \notin A'.$$

V es el complementario de un cerrado.

■

<u>TEOREMA</u>: (X, τ) Son equivalentes:

1) X es T_2

2) La diagonal $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ es cerrada en $(X \times X, \tau_\times)$

<u>demostración</u>

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ $K = \Delta^c = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2 \ , \ x_1, x_2 \in X\}$

Sea $(x_1, x_2) \in G$, veamos que $(x_1, x_2) \in \mathrm{Int}(G)$.

Como $(x_1, x_2) \in G \Rightarrow x_1 \neq x_2 \xrightarrow{(1)} \exists \Omega_1$ abto. $\in \mathcal{U}_{x_1}$, $\exists \Omega_2$ abto. $\in \mathcal{U}_{x_2}$ tal que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Veamos que $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset G$, e.d., $(\Omega_1 \times \Omega_2) \cap \Delta = \emptyset$. Si esto no se cumpliese, existiría $(a,a) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \Rightarrow a \in \Omega_1, a \in \Omega_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ (contradicción con T_2).

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Sean $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Consideremos el punto $p = (x_1, x_2) \notin \Delta$ $\Rightarrow p = (x_1, x_2) \in G\Delta \overset{(2)}{=} \mathrm{Int}(G\Delta) \Rightarrow \exists A_{x_1} \in \mathcal{U}_{x_1}$ abto., $A_{x_2} \in \mathcal{U}_{x_2}$ abto. tal que $A_{x_1} \times A_{x_2} \subset G\Delta$. En consecuencia $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \emptyset$, pues en caso contrario existe $a \in A_{x_1} \cap A_{x_2} \Rightarrow (a,a) \in (A_{x_1} \times A_{x_2}) \cap A$, contradicción ■

TEOREMA:

(1) Todo conjunto ordenado es T_2 con la top. asociada al orden.

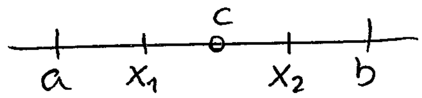
(2) El producto finito de T_2 es T_2.

(3) (X, τ) es T_2, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \tau_Y)$ es T_2.

demostración

(1) $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow x_1 < x_2$ ó $x_2 < x_1$

CASO 1: X no tiene max ni min:



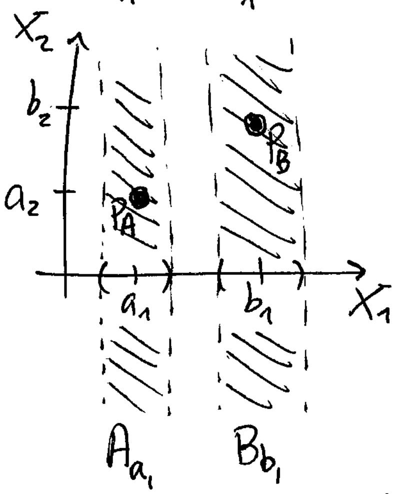
Si $\exists c \begin{cases} x_1 \in (a, c) \\ x_2 \in (c, b) \end{cases}$ y $(a, c) \cap (c, b) = \emptyset$

Si $\nexists c \begin{cases} x_1 \in (a, x_2) \\ x_2 \in (x_1, b) \end{cases}$ y $(a, x_2) \cap (x_1, b) = \emptyset$ (porque no hay nada entre x_1, x_2)

CASO 2: X tiene max pero no min:
lo mismo ...
[...]

(2) Sean $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$ y $(b_1, b_2) \in X_1 \times X_2$ tales que $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$

Si $a_1 \neq b_1 \Longrightarrow \exists A_{a_1}$ entorno de a_1, $\exists B_{b_1}$ entorno de en X_1 tales que $A_{a_1} \cap B_{b_1} = \emptyset$



$G_1 := A_{a_1} \times X_2 \in \mathcal{U}_{P_A}$

$G_2 := B_{b_1} \times X_2 \in \mathcal{U}_{P_B}$ con $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Si $a_1 = b_1 \Rightarrow a_2 \neq b_2 \Longrightarrow$ misma jugada pero trabajando primero en X_2.

ESPACIOS MÉTRICOS (desde un punto de vista topológico)

DEFINICIÓN: (X, d), $X \neq \emptyset$, se dice ESPACIO MÉTRICO si $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando:

i) $\forall x, y \in X$, $d(x,y) \geq 0$ $\wedge$ $d(x,y) = 0 \iff x = y$

ii) $\forall x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

DEFINICIÓN: $B_d(x;\varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon \}$ $\quad \forall \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\varepsilon}} > 0$

$\forall x_0 \in X$, $\beta_{x_0} := \{ B_d(x_0;\varepsilon) \mid \varepsilon > 0 \}$ base de entornos de x_0.

DEFINICIÓN: $U \in \tau_d \overset{\text{def. de}}{\underset{\tau_d}{\iff}} \forall x \in X$, $\exists B_d(x;\varepsilon) \in \beta_x$, $B_d(x;\varepsilon) \subset U$

$\tau_d :=$ topología asociada a d en X.

DEFINICIÓN: (X, τ) espacio topológico. Se dice que (X, τ) es METRIZABLE si existe d tal que $\tau = \tau_d$.

PROPOSICIÓN: (X, d) espacio métrico $\Longrightarrow$ (X, τ_d) es Hausdorff.

Observación: $(\mathbb{R}, \tau_{cofinita})$ no es T_2 $\Longrightarrow$ $\nexists d$ tal que $\tau_{cof.} = \tau_d$ (e.d. $(\mathbb{R}, \tau_{cofinita})$ no es metrizable).

DEFINICIÓN: (X, d) espacio métrico y $A \subset X$.

$\operatorname{diam}(A) := \sup\{ d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A \} \geq 0$

DEFINICIÓN: $A \subset X$ es ACOTADO $\iff$ $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

<u>TEOREMA</u>: (X, d) espacio métrico. Definimos: $\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$
Entonces $(X, \bar{d})$ espacio métrico.

<u>Ejemplo</u>: $X = \mathbb{R}$, $\bar{d}(1,100) = \min\{d(1,100), 1\} = \min\{99, 1\} = 1$
$(\mathbb{R}, \bar{d})$ modelo acotado de los reales.

<u>DEFINICIÓN</u>: Sea J un conjunto de índices y consideramos en $\mathbb{R}^J$ la siguiente métrica:

Sean $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^J$, $\underline{x} = (x_j)_{j\in J}$ $\quad \underline{y} = (y_j)_{j\in J}$

$$\rho(\underline{x},\underline{y}) := \sup\{\bar{d}(x_j, y_j) \mid j \in J\}$$

$(\mathbb{R}^J, \rho)$ es un espacio métrico y la topología de $\mathbb{R}^J$ inducida por ρ se llama la TOPOLOGÍA UNIFORME en $\mathbb{R}^J$.

<u>Observación</u>: La topología uniforme es más fina que la topología producto para $|J| = \infty$.

FUNCIONES CONTINUAS EN ESPACIOS MÉTRICOS

<u>TEOREMA</u>: $f: (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$. Son equivalentes:

1) f continua
2) $\forall x \in X \ [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $B_{d_X}(x;\delta) \Rightarrow f(B_{d_X}(x;\delta)) \subset B_{d_Y}(f(x);\varepsilon$

$$d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

<u>DEFINICIÓN</u>: $(x_n)_{n=0}^{\infty} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, y lo escribiremos $x_n \longrightarrow x$ cuando $n \to \infty$ si $\forall U \in \mathcal{U}_x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $x_n \in U$.

En particular: Si $\tau = \tau_{distancia}$, $d=$ distancia

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0,\ x_n \in B_d(x;\varepsilon)$$

LEMA de la sucesión:

(1) (X,τ) espacio topológico, $A\subset X$. Si existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n\in A$ tal que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \implies x\in \overline{A}$.

(2) (X,d) espacio métrico, $x\in \underset{\tau=\tau_d}{\overline{A}} \implies \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n\in A$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

TEOREMA: Sea $f:(X,d_X)\longrightarrow (Y,d_Y)$. Son equivalentes:

1) f continua en x_0.

2) $\forall x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ en $X \implies f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ en Y.

LÍMITE UNIFORME DE FUNCIONES

DEFINICIÓN: $f_n:(X,\tau)\longrightarrow (Y,d)$, $n=1,2,\dots$ sucesión de funciones. Decimos que $\{f_n\}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE a f, $f:X\to (Y,d)$, si $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$ tal que $d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$ $\forall n\geq N$, $\forall x\in X$.

TEOREMA: $(X,\tau) \underset{f}{\overset{f_n}{\rightrightarrows}} (Y,d)$, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif.}} f \implies f$ continua.

TOPOLOGÍA COCIENTE

APLICACIÓN COCIENTE

X, Y dos espacios topológicos, $p: X \to Y$ (sobreyectiva)
p se dice una APLICACIÓN COCIENTE si $\forall U \subset Y$ ["U es abierto en $Y \Longleftrightarrow p^{-1}(U)$ abierto en X"]. $\boxed{\Rightarrow}$ En particular, p es continua

PROPOSICIÓN: $p: X \to Y$ continua y sobreyectiva. Si p abierta $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ p cociente.

demostración

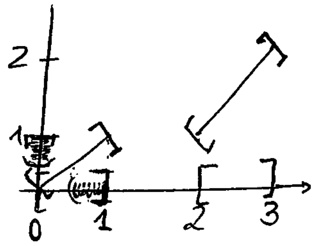
Sea $U \subset Y$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $G = p^{-1}(U) \subset X$ tal que G es abierto en X. Como p es abierta entonces $p(G)$ abierto en Y, $p(G) = p(p^{-1}(U)) \underset{p \text{ sobre}}{=} U$ abierto en Y.

Observación: $\not\Leftarrow$ $p: X \to Y$

$X = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ $\qquad$ $Y = [0,2] \subset \mathbb{R}$

$$p(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



$p((\frac{1}{2},1]) = (\frac{1}{2},1] \subset [0,2]$
no abto. en $[0,2]$

$p^{-1}(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = (1-\varepsilon, 1) \cup [2, 2+\varepsilon)$ abto. en X

DEFINICIÓN: $C \subset X$, C es SATURADO respecto de una aplicación $p: X \to Y$ sobreyectiva si C contiene cada fibra que lo corta

TEOREMA: $p: X \longrightarrow Y$ sobreyectiva. Son equivalentes:

a) p es aplicación cociente.

b) p es continua y lleva abiertos saturados de X en abiertos de Y

RECUERDO:

Aplicación cociente

Def.- $p:(X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ sobreyectiva

$\forall U \subset Y \ [U \in \tau' \Leftrightarrow p^{-1}(U) \in \tau]$

p aplicación cociente

Obs: p cociente $\Rightarrow$ p continua

Tma.- $p: X \longrightarrow Y$ sobre. Son equivalentes:

a) p cociente.

b) p continua y lleva abtos. saturados de X en abtos de Y

$\rightarrow$ C es saturado con respecto de p si cada fibra que lo corta está totalmente contenida en C ($C \cap p^{-1}(y_0) \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow p^{-1}(y_0) \subset C$.

demostración

$\boxed{a \Rightarrow b}$ p cociente $\Rightarrow$ p continua

Sea C abto. saturado de X, pongamos $U = p(C)$. Pero, por a),
$U \in \tau' \Leftrightarrow \underbrace{p^{-1}(U)}$ abto. en X

$\|$

$p^{-1}(p(C)) \overset{?}{=} C$

- $x \in C_1 = \bigcup_{j \in J} p^{-1}(y_j) \Rightarrow p(x) = y_{j_0}$, $\exists j_0 \in J \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in p^{-1}(p(x)) = p^{-1}(y_{j_0}) \Rightarrow x \in p^{-1}(p(C))$
- $a \in p^{-1}(p(C_1)) \Rightarrow p(a) \in p(C_1) \Rightarrow \underset{\overset{\|}{z}}{p(a)} = p(c), \exists c \in$
$p^{-1}(z) \cap C_1 \neq \emptyset$ pues $c \in p^{-1}(z) \cap C_1 \overset{C \text{ sat}}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow a \in p^{-1}(z) \subset C_1$.

$\boxed{b \Rightarrow a}$

p continua $\Rightarrow \forall U \subset Y \left[U \in \tau' \Rightarrow p^{-1}(U) \in \tau \right]$

Sea $U \subset Y$, $p^{-1}(U) \in \tau$. Veamos que $U \in \tau'$.

Sea $G = p^{-1}(U) \in \tau$. Basta demostrar que G es saturado para p, pues $p(G) = pp^{-1}(U) \overset{p \text{ sobre}}{=} U \underset{b)}{\in} \tau'$.

¿G saturado para p?

$G \cap p^{-1}(y_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x_0 \in X,\ \overbrace{x_0 \in G = p^{-1}(U)}^{p(x_0) = z_0 \in U},\ p(x_0) = y_0$.

Sea $a \in p^{-1}(y_0) \Rightarrow p(a) = y_0 \Rightarrow a \in G = p^{-1}(U)$

$p(a) = y_0 = p(x_0) = z_0 \in U$ ■

TOPOLOGÍA COCIENTE INDUCIDA POR p

(X, τ) espacio topológico, A conjunto, $A \neq \emptyset$, $p : X \longrightarrow A$ sobre

TEOREMA: $\exists!$ topología τ_c sobre A tal que p es aplicación cociente.

Observación: $\Omega \subset A$, $\Omega \in \tau_c \overset{def.}{\Longleftrightarrow} p^{-1}(\Omega) \in \tau$.

(A, τ_c) esp. top. $f : (X, \tau) \longrightarrow (A, \tau_c)$ apl. cociente

$x \longmapsto f(x) := p(x)$

Ejemplo/Ejercicio: (X, τ) esp. top., $A \subset X$, $p : X \twoheadrightarrow A$ sobre.

Entonces: $\exists \tau_c$ en A tal que $p : X \twoheadrightarrow A$ es una aplicación cociente. $\left[\Omega \in \tau_c \overset{def.}{\Longleftrightarrow} p^{-1}(\Omega) \in \tau \right]$.

Unicidad: Sea τ^* otra topología sobre A tal que $p : (X, \tau) \twoheadrightarrow (A, \tau^*)$ es una apl. cociente.

$\forall U \subset A \left[U \in \tau^* \Leftrightarrow p^{-1}(U) \in \tau \right]$

$\Updownarrow$ def. de τ_c

$U \in \tau_c$

$$\begin{tikzcd}
(X, \tau) \arrow[rr, two heads, "p_1 = p"] \arrow[dr, "p_2 = p"'] & \arrow[d, phantom, "\text{triángulo conmutativo}"] & (A, \tau_c) \arrow[dl, "id_A = f"] \\
& (A, \tau^*) &
\end{tikzcd}$$

$p_2 = f \circ p_1$

Ejemplo 1: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$

$$(a,b) \longmapsto \frac{b}{a} \text{ si } a \neq 0$$

$$(0,b) \longmapsto \infty$$

$$\infty > r, \ \forall r \in \mathbb{R}$$

$(\overline{\mathbb{R}}, \tau_{<_{ext.}})$ porque hemos añadido el infinito (∞).

p sobre $\Longrightarrow \exists!\, \tau_c$ tal que p cociente $(\overline{\mathbb{R}}, \tau_c)$

EL ESPACIO COCIENTE

(X, τ) esp. topológico

X^* es una partición de X ($\equiv$ conjuntos disjuntos cuya unión es X)

$$p: (X,\tau) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow X^*$$

$$x \longmapsto [x] = \bar{x} :=$$ el elemento de X^* en el que está el punto x.

¿p aplicación cociente para una cierta τ^* en X^*?

p continua y lleva abiertos saturados de X en abiertos de X^*.

A la topología cociente inducida por p en X^* la llamamos τ^* y a (X^*, τ^*) le llamamos ESPACIO TOPOLÓGICO COCIENTE.

$$\Omega \in \tau^* \Longleftrightarrow p^{-1}(\Omega) \text{ abierto en } (X,\tau)$$

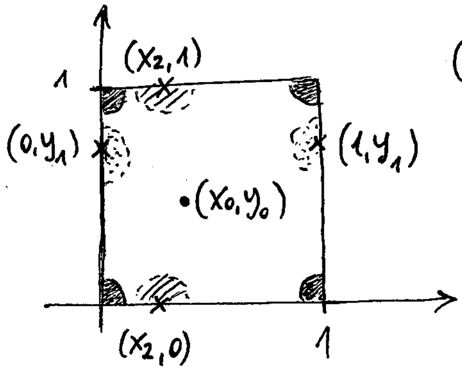
$$\Omega \in \tau^* \Longleftrightarrow \bigcup_{[x]\in\Omega} [x] \in \tau.$$

Ejemplo 2: $X = [0,1]\times[0,1]$; $X^* = \{\overline{(x,y)} \mid (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\}$

$= \{\overline{(x_0,y_0)} \mid 0\le x_0\le 1,\ 0<y_0<1\} \cup$

$\cup \{\overline{(0,y_1)}\}_{0<y_1<1} \cup \{\overline{(x_2,0)}\}_{0<x_2<} \cup$

$\cup \{\overline{(0,0)}\}$



$\overline{(x_0,y_0)} = \{(x_0,y_0)\}$

$\overline{(x_2,0)} = \{(x_2,0),(x_2,1)\}$

$\overline{(0,y_1)} = \{(0,y_1),(1,y_1)\}$

$\overline{(0,0)} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$$\begin{aligned} p: [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow X^* \\ (a,b) &\longmapsto \overline{(a,b)} \end{aligned}$$

TEOREMA: X, Y, Z espacios topológicos. $p: X \twoheadrightarrow Y$ aplicación cociente $g: X \longrightarrow Z$ aplicación continua que es constante en cada fibra de p (i.e. es constante en $p^{-1}(y)$, $\forall y\in Y$). Entonces g induce una aplicación continua $f: Y\longrightarrow Z$ tal que el siguiente triángulo es conmutativo. Además, f continua $\Longleftrightarrow$ g continua, f cociente $\Longleftrightarrow$ g cociente.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, two heads, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, dashed, "\exists f"'] & Z \end{tikzcd} \qquad (f\circ p = g)$$

demostración

$$\begin{aligned} f: Y &\longrightarrow Z \\ y &\longmapsto f(y) := g(p^{-1}(y_0)) \end{aligned}$$ hay que ver que está bien def.

$x_1, x_2 \in p^{-1}(y_0) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ ⟷ sí

Evaluamos si $x_0\in X$, $(f\circ p)(x_0) = f(\underbrace{p(x_0)}_{y_0}) = g(p^{-1}(p(x_0))) \overset{?}{=} g(x_0)$

- ¿f continua? V abierto de $Z \overset{g \text{ cont.}}{\Longrightarrow} g^{-1}(V)$ abierto de X. $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow p^{-1}(f^{-1}(V))$ abierto de $X \Longleftrightarrow f^{-1}(V)$ abierto en Y

¿$f^{-1}(V)$ abto. en Y? Sí

$\forall U$ (U abto. en $Y \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow p^{-1}(U)$ abto. en X

∎

Ejemplo (Toro topológico)

$$X=[0,1]\times[0,1] \xrightarrow[\text{continua}]{g} S^1\times S^1 \subset \{(x,y,z,t) \mid x^2+y^2+z^2+t^2=2\} \simeq S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

$$(t,s) \overset{g}{\longmapsto} (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), \cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s))$$

$$= (\cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1, \cos\theta_2, \operatorname{sen}\theta_2)$$

$\theta_1 = 2\pi t$

$\theta_2 = 2\pi s$

(con esto vemos que también es biyectiva)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & S^1\times S^1 \\ X^* \arrow[ur, dashed, "\exists f"'] & \end{tikzcd}$$

$\exists f$ continua (por el teorema)

X^* (la partición de X del día anterior)

$\overline{(t,s)} = [(t,s)]$

falta ver esta hipótesis

¿ g constante en cada fibra de p?

Sea $y_0 \in X^*$, $p^{-1}(y_0) = \begin{cases} g(t_0,s_0), & \text{si } (t_0,s_0)\in(0,1)\times(0,1) \\ g(0,s_0)=g(1,s_0), & \text{si } y_0=\{(0,s_0),(1,s_0)\} \\ g(t_0,0)=g(t_0,1), & \text{si } y_0=\{(t_0,0),(t_0,1)\} \\ g(0,0)=g(0,1)= \\ =g(1,0)=g(1,1), & \text{si } y_0=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \end{cases}$

¿ f abierta?

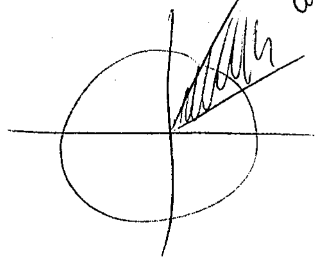
$$\Omega_{y_0} = (t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_1)\times(s_0-\varepsilon_2, s_0+\varepsilon_2)$$

$$f(\Omega_{y_0}) = \{(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}) \mid (t,s)\in\Omega_{y_0}\}$$

$$\| $$

$$\left\{(z_1,z_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} \arg(z_1)\in 2\pi(t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_1) \\ \arg(z_2)\in 2\pi(s_0-\varepsilon_2, s_0+\varepsilon_2)\end{array}\right\}$$

abierto en $S^1\times S^1$



"quesito" abierto en S^1

APLICACIONES COCIENTE

(X,τ), (Y,τ') dos esp. top.

$p: X \longrightarrow Y$ apl. cociente

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "p=g"] \arrow[dr, "\psi"'] & (Y,\tau')=(X^*,\tau_c) \arrow[d, "\exists f"] \\
& (Z,\hat{\tau})
\end{tikzcd}$$

$\exists f$ continua tal que $f\circ p = \psi$

ψ cont. + const. en las fibras de p:

$\forall x_1, x_2 \in p^{-1}(y_0)$, $\psi(x_1)=\psi(x_2)$

TOPOLOGÍA COCIENTE

(X,τ) esp. top.

$(X,\tau) \xrightarrow{g} (A,\tau_c)$

$A = X^*$

$(X,\tau) \xrightarrow{g} (X^*,\tau_c)$, $X^* = Y$, $\tau_c = \tau'$

ESPACIO COCIENTE

$(X,\tau) \rightsquigarrow X^*$ una part. de X

$q: X \ni x \longmapsto \bar{x} \in X^*$ $q =$ "paso al cociente"

$X^* = [0,1]\times[0,1] / \sim$

$([0,1]\times[0,1], \tau) \xrightarrow{g} (X^*, \tau_c)$

PROPOSICIÓN: $p:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ cociente, $A \subset X$ saturado para p

$q:(A,\tau_A) \longrightarrow (p(A), \tau_{p(A)})$ $q(a)=p(a)$, A abierto $\Rightarrow q$ cociente

demostración

$\forall U \subset p(A)$, $[U$ abto. en $p(A) \Longleftrightarrow q^{-1}(U)$ abto. en $A]$

$\boxed{\Rightarrow}$

$U = \Omega \cap p(A)$, Ω abto. en $Y \xRightarrow{p \text{ continua}} p^{-1}(\Omega)$ abto. en X.

$q^{-1}(U) = q^{-1}(\Omega \cap p(A)) \overset{?}{=} p^{-1}(\Omega)\cap A$ abto. en A

? $\rightarrow$ Sea $a \in q^{-1}(\Omega\cap p(A)) \Longrightarrow p(a) = q(a) \in \Omega \cap p(A) \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(a)\in\Omega \Longrightarrow a \in p^{-1}(\Omega) \\ y_a = p(a) \in p(A) \Longrightarrow a \in p^{-1}(y_a) \subset A. \end{cases}$$

A saturado y $a \in A$.

Sea ahora $a \in p^{-1}(\Omega)\cap A \Rightarrow \left.\begin{cases} a\in A \Rightarrow p(a)\in p(A) \\ y_a = p(a) \in \Omega \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow a \in q^{-1}(\Omega \cap p(A))$

No es que en la prop. haya un si y solo si, sino que para demostrar que q es cociente hay que dem. un si y solo si.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\underbrace{q^{-1}(U)}_{p^{-1}(U)\cap A}$ abto. en A. $U \subset p(A) \Rightarrow p^{-1}(U) \subset p^{-1}(p(A$

A abto. en $X \Longrightarrow q^{-1}(U)$ abierto en X saturado

$\Updownarrow$ p cociente

$U \cap p(A)$ abto. en Y.

$\boxed{\text{TEMA 2}}$ PROPIEDADES ESPACIOS TOPOLÓGICOS

CONEXIÓN

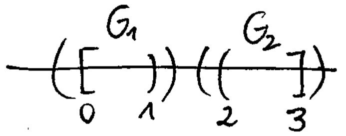
Definición: (X, τ) espacio topológico; decimos que X es CONEXO si no es posible expresarlo como unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos.

X conexo $\Longleftrightarrow \nexists A, B \in \tau$, $\begin{matrix} A \neq \emptyset \\ B \neq \emptyset \end{matrix}$, $X = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ Si $X = G_1 \cup G_2$, $G_i \in \tau$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow G_1 = \emptyset$ ó $G_2 = \emptyset$.

A se dice CONEXO si (A, τ_A) es un esp. topológico conexo.

Observación: ① $X = \mathbb{R}$, $\tau = \tau_u$, $(A = [0,1) \cup (2,3]$, $\tau_A)$



$A = G_1 \uplus G_2$ no conexo

② $X = A = [0,1) \cup (2,3]$, $\tau = \tau_<$ ¿A conexo?

$A = G_1 \uplus G_2$, G_1 abto. y G_2 abto.

$G_1 = [0,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{n})$

$G_2 = (2,3] = \bigcup_{n=2}^{\infty} (2 + \frac{1}{n}, 3]$

$\Rightarrow A$ no conexo

1 y 2 no están en A, por lo que así no podemos def. entornos de la $\tau_<$

pero así sí. Unión arbitraria de abtos. es abto.

Proposición: (X, τ) esp. topológico

1) X conexo $\iff$ X no es unión de dos cerrados no vacíos y disjuntos.

2) X conexo $\iff$ los únicos subconjuntos que son a la vez cerrados y abiertos son el vacío y el total.

3) $A \subset X$.

A conexo $\iff$ $\forall U, V \subset X$ abiertos tales que $A \subset U \cup V$

$$U \cap V \cap A = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \subset U \\ A \cap V = \emptyset \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} A \subset V \\ A \cap U = \emptyset \end{cases}$$

4) $A \subset X$

A conexo $\iff$ $\forall F, K \subset X$ cerrados tales que $A \subset F \cup K$

$$F \cap K \cap A = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \subset F \\ A \cap K = \emptyset \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} A \subset K \\ A \cap F = \emptyset \end{cases}$$

demostración

$F = A^c \quad K = B^c$

1) X no conexo $\iff \exists \overset{\neq \emptyset}{A}, \overset{\neq \emptyset}{B} \in \tau, \ A \cap B = \emptyset, \ X = A \cup B \iff$

$\iff \exists F, K$ cerrados $F \cap K = \emptyset, \ X = F \cup K$

2) $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$, A es abto. y cerrado $\Rightarrow$

$\Rightarrow X = \underbrace{A}_{\text{abto.}} \uplus \underbrace{A^c}_{\text{abto. porque } A \text{ es cerrado}} \iff X$ no conexo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si X es no conexo $\Rightarrow \exists A, B \in \tau$, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$

$X = A \uplus B \Rightarrow A$ es abto. y cerrado a la vez.

3) $\boxed{\Leftarrow}$ Si A no conexo $\Longrightarrow A = G_1 \uplus G_2$, G_1, G_2 abtos. en A,

$G_i \neq \emptyset \wedge G_i \neq X$. $\left.\begin{array}{l} G_1 = U \cap A \ , \ U \in \tau \\ G_2 = V \cap A \ , \ V \in \tau \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = (U \cap A) \cup (V \cap A) \subset U \cup V$

¿ $U \cap V \cap A = (U \cap A) \cap (V \cap A) = G_1 \cap G_2 = \emptyset$? Sí

$\xRightarrow{\text{hip.}} \begin{cases} A \subset U \\ A \cap V = \emptyset = G_2 \end{cases}$ ó $\begin{cases} A \subset V \\ A \cap U = \emptyset = G_1 \end{cases}$ contradicción

$\Rightarrow A$ conexo.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sean U, V abtos. de X tal que $A \subset U \cup V$, $A \cap U \cap V = \emptyset$

$A = A \cap (U \cup V) = A \cap (U \setminus U \cap V) \cup (A \cap V \setminus U \cap V) \cup (\underbrace{A \cap U \cap V}_{= \emptyset}) =$

$= [A \cap (U \setminus U \cap V)] \uplus [A \cap (V \setminus U \cap V)] = \underbrace{[A \cap U]}_{\substack{= \\ G_1 \text{ abto.} \\ \text{en } A}} \uplus \underbrace{[A \cap V]}_{\substack{= \\ G_2 \text{ abto.} \\ \text{en } A}} \Rightarrow$

$\xRightarrow{A \text{ conexo}} \begin{cases} A \cap U = \emptyset \Rightarrow A = A \cap V \ [1] \\ \text{ó} \\ A \cap U = A \Rightarrow A \cap V = \emptyset \ [2] \end{cases}$

$[1] \Rightarrow A \subset V, \ A \cap U = \emptyset$

$[2] \Rightarrow A \subset U, \ A \cap V = \emptyset$

4) Parecido al 3. ∎

Proposición: (X, τ) espacio topológico. $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos conexos $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ conexo.

demostración

Sea $A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Sean U, V abtos de X tal que $A \subset U \cup V$. $A \cap U \cap V = \emptyset$. Sea $p \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow p \in U$ ó $p \in V$, $p \notin U \cap V$

Veamos que si $p \in U$, entonces $A \subset U$, y también $A \cap V = \emptyset$.

Basta demostrar que $\forall \alpha \in \Lambda$, $A_\alpha \subset U$. Sea $\alpha_0 \in \Lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow p \in A_{\alpha_0} \subset U \cup V$, $A_\alpha \cap U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ ← A_{α_0} conexo

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{\alpha_0} \subset U \\ A_{\alpha_0} \cap V = \emptyset \end{cases} \text{ó} \begin{cases} A_{\alpha_0} \subset V \\ A_{\alpha_0} \cap U = \emptyset \end{cases} \xRightarrow{p\in U} \begin{cases} A_{\alpha_0} \subset U \\ A_{\alpha_0} \cap V = \emptyset \end{cases}$$

Proposición: (X, τ) esp. topológico. Si $A \subset X$, A conexo $\Rightarrow \bar{A}$ conexo.

Definición: (X, τ) espacio topológico. $Y \subset X$. Una SEPARACIÓN de Y es un par $\underset{\neq\emptyset}{A}, \underset{\neq\emptyset}{B} \subset Y$, tal que $A \cap B = \emptyset$, $Y = A \uplus B$, $A \cap \bar{B} = \emptyset$, $\bar{A} \cap B = \emptyset$.

Lema 1: Y es conexo $\Longleftrightarrow$ No existe una separación de Y.

Lema 2: (X, τ) espacio topológico, $Y \subset X$ conexo.
Si C, D es una separación de $X \Rightarrow \begin{cases} Y \subset C \\ \text{ó} \\ Y \subset D \end{cases}$

demostración lema 1

$\boxed{\Rightarrow}$ Y no conexo $\iff Y = U \uplus V$, $\overset{\overset{\emptyset}{\not\shortparallel}}{U}, \overset{\overset{\emptyset}{\not\shortparallel}}{V}$ abtos en Y, $U \cap V = \emptyset$

$$U \cap \overline{V} \underset{\overset{\uparrow}{\overline{V} = V}}{=} U \cap V = \emptyset \,, \qquad V \cap \overline{U} \underset{\overset{\uparrow}{\overline{U}^X \cap Y = \overline{U}^Y = U}}{=} V \cap U = \emptyset$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $Y = A \uplus B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap \overline{B} = \emptyset$, $B \cap \overline{A} = \emptyset$.

$$\overline{B}^Y = \overline{B}^X \cap Y = \overline{B} \cap (A \uplus B) = (\overline{B} \cap A) \uplus (\overline{B} \cap B) = \emptyset \uplus B = B$$

$$\left.\begin{array}{l} \complement_Y A = B \\ \overline{B}^Y = B \end{array}\right\} \Longrightarrow A \text{ abto. en } Y$$

Análogamente, B es abto $\Longrightarrow Y$ no es conexo. $\blacksquare$

demostración lema 2

$X = C \uplus D$, $C \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$, $C \cap \overline{D} = \emptyset$, $\overline{C} \cap D = \emptyset$

Y conexo, $Y \subset X$

$$Y = Y \cap X = Y \cap (C \uplus D) = \overbrace{(Y \cap C)}^{A} \uplus \overbrace{(Y \cap D)}^{B}$$

¿A, B es una separación de Y? Si es que sí $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ contradicción con que Y es conexo. Luego no es una separación $\Longrightarrow A = \emptyset$ ó $B = \emptyset \iff Y \subset D$ ó $Y \subset C$. $\blacksquare$

TEOREMA: (X, τ) espacio topológico $Y \subset X$

Y conexo, $Y \subseteq Z \subseteq \bar{Y} \implies Z$ conexo.

demostración

Supongamos que Z no conexo $\implies$ existe una separación de Z, $Z = C \uplus D$, $C \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$, $\bar{C} \cap D = \emptyset$, $C \cap \bar{D} = \emptyset$

$$Y \subset Z = C \uplus D \xRightarrow[\text{lmp.}]{\text{lema 2}} \begin{cases} Y \subset C \Rightarrow \bar{Y} \subset \bar{C} \Rightarrow Z \subset \bar{C} \Rightarrow Z \cap D = \emptyset \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow Z \subset C \Rightarrow D = \emptyset \text{ (contradicción)} \\ \text{ó} \\ Y \subset D \Rightarrow \cdots \text{ lo mismo } \cdots \end{cases}$$

$\Rightarrow Z$ no puede tener una separación $\xRightarrow{\text{lema 1}}$ Z conexo. ∎

TEOREMA: $f: X \longrightarrow Y$ continua, X conexo $\implies f(X)$ conexo

demostración

$f(X) = U \uplus V$, U, V abiertos de $f(X)$, no vacíos, $U \cap V = \emptyset$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Omega_1 := f^{-1}(U) \text{ abto. en } X \\ \Omega_2 := f^{-1}(V) \text{ abto. en } X \end{cases}, \text{ y además } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

$x_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \implies f(x_0) \in U \cap V = \emptyset$

$\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset X$. Sea $x_1 \in X \Rightarrow y_1 = f(x_1) \in f(X) = U \uplus V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 \in U \Rightarrow x_1 \in f^{-1}(y_1) \subset f^{-1}(U) = \Omega_1 \\ \text{ó} \\ y_1 \in V \Rightarrow x_1 \in f^{-1}(y_1) \subset f^{-1}(V) = \Omega_2 \end{cases}$$

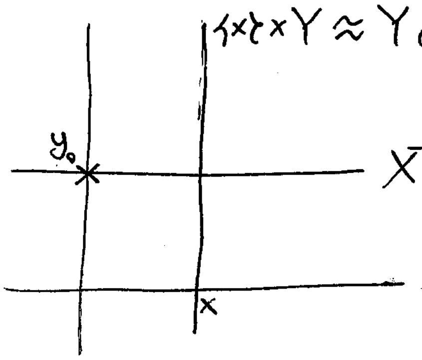
Luego $X = \Omega_1 \cup \Omega_2$. ∎

TEOREMA: (X,τ), (Y,τ') conexos $\Longrightarrow$ $(X\times Y, \tau_{prod.})$ conexo.

<u>demostración</u>

$$X\times Y = \bigcup_{x\in X} C_x \;,\quad X\times\{y_0\} \subset \bigcap_{x\in X} C_x \neq \emptyset \overset{teo.}{\Longrightarrow} X\times Y \text{ conexo.}$$

$\{x\}\times Y \approx Y$ conexo



$X\times\{y_0\} \approx X$ conexo

$$C_x = (\{x\}\times Y)\cup(X\times\{y_0\}) \text{ conexo} \quad \blacksquare$$

COROLARIO: $(X_1,\tau_1),\cdots,(X_n,\tau_n)$ esp. topológicos conexos $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow (X_1\times\cdots\times X_n, \tau_{prod})$ es conexo.

<u>Ampliación</u>: (X_α,τ_α), X_α conexo $\Longrightarrow \left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \tau_{prod}\right)$ conexo.

COMPONENTES Y CONEXIÓN LOCAL

DEFINICIÓN: (X,τ) esp. topológico, $x_1,x_2\in X$

$x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \exists A\subset X$, A conexo tal que $x_1,x_2\in A$.

Las clases de equivalencia de X por $\sim$ se llaman las COMPONENTES ó COMPONENTES CONEXAS de X.

Ahora habría que demostrar que $\sim$ es una rel. de equivalen

DEFINICIÓN: (X,τ) esp. topológico. $x_1,x_2\in X$

$x_1 \sim^* x_2 \Longleftrightarrow$ existe UN CAMINO que une x_1 con x_2.

$$\begin{aligned} \gamma:[0,1] &\longrightarrow X \quad \text{continua, con } \gamma(0)=x_1 \\ t &\longmapsto \gamma(t) \qquad\qquad\quad\;\; \gamma(1)=x_2 \end{aligned}$$

Habría que demostrar que $\sim^*$ es una rel. de equivalencia (reflexiva, simétrica, transitiva), Las clases de equivalencia de $\sim^*$ se denominan las COMPONENTES CONEXAS POR ARCOS o ARCOCOMPONENTES de X.

TEOREMA 1: (X, τ) espacio topológico. Las componentes conexas de X son subespacios disjuntos conexos cuya unión es X, de forma que cada subespacio conexo de X no trivial interseca solo a una de ellas.

TEOREMA 2: Las componentes conexas por caminos son subespacios disjuntos conexos por caminos cuya unión es X, de forma que cada subespacio conexo por caminos de X no trivial interseca solo a una de ellas.

DEFINICIÓN:

a) Un espacio X se dice LOCALMENTE CONEXO en x_0 y para cada entorno U de x_0, existe V_0 entorno conexo de x_0, $V_0 \subset U$.
Un espacio se dice *localmente conexo* si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

b) Un espacio se dice LOCALMENTE CONEXO POR CAMINOS (ó LOCALMENTE ARCOCONEXO) en x_0 si para cada entorno U de x_0, existe V_0 entorno arcoconexo de x_0, $V_0 \subset U_0$.
Un espacio es *localmente arcoconexo* si lo es en cada uno de sus puntos.

TEOREMA:

A) X localmente conexo $\iff$ $\forall G \subset X$, G abto., cada componente conexa de G es abta. en X.

B) X localmente arcoconexo $\iff$ $\forall G \subset X$, G abto., cada arcocomponente de G es abta. en X.

demostración

Obs: Si D es compon. conexa $\Rightarrow D = \bar{D}$
Teo. A $\Rightarrow$ Si X local. conexo $\Rightarrow D = \mathring{D}$

A) $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $G \subset X$ un abto., $G \neq \emptyset$; sea C_1 una componente conexa de G. Veamos que $C_1 = \mathring{C_1}$. Sea $x \in C_1 \Rightarrow$

hip. aplicada G y x_0 $\Rightarrow \exists V_0$ entorno conexo de x tal que $V_0 \subset G$, $x \in C_1 \cap V_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_0 \subset C_1$. Luego $x \in \mathring{C_1}$.

? comp. conexa

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $x_0 \in X$. Sea U entorno de x_0. Sea G abto. tal que $x_0 \in G \subset U$. Por hip, cada componente conexa de G es abta. en X. Luego si $G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} C_{1\alpha}$. Sea $x_0 \in \Lambda$ tal que $x_0 \in C_{1x_0}$ conexo y abto. en X, luego entorno conexo de x_0, $V_0 = C_{1x_0} \subset G \subset U$

B) Análoga. ∎

TEOREMA: (X, τ) esp. topológico.

(1) Cada arcocomponente de X está contenida en una componente conexa.

(2) Si X es localmente conexo por caminos, entonces las componentes conexas y las componentes arconexas coinciden.

demostración

(1) Sea $\{C^*_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ la familia de arcocomponentes de X.

Sea $\{D_j\}_{j\in J}$ la familia de componentes conexas de X.

Sea $\alpha_0\in\Lambda$. Veamos que existe $j_0\in J$ tal que $C^*_{\alpha_0}\subset D_{j_0}$.

Sea $c\in C^*_{\alpha_0}\subset X=\bigcup_{j\in J} D_j$. Entonces existe $j_0\in J$ tal que $c\in D_{j_0}$.

Veamos $C^*_{\alpha_0}\subset D_{j_0}$. Sea $x\in C^*_{\alpha_0}$. Como $x\sim^* c$, existe

$\gamma_{c,x}:[0,1]\longrightarrow X$, tal que $\gamma_{c,x}(0)=c$, $\gamma_{c,x}(1)=x$,

$\gamma_{c,x}$ continua. Entonces $A:=\gamma_{c,x}([0,1])$ conexo de X $c,x\in A\Rightarrow$

$\Rightarrow c\sim x\Rightarrow x\in D_{j_0}$.

(2) Si X es localmente arcoconexo $\Longrightarrow C^*_{\alpha_0}=D_{j_0}$.

$$D_{j_0}=D_{j_0}\cap X=D_{j_0}\cap\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}C^*_\alpha\Big)=\underbrace{D_{j_0}\cap\Big(\bigcup_{\{\alpha\mid C^*_\alpha\subset D_{j_0}\}}C^*_\alpha\Big)}_{=A}\ \uplus$$

$$\uplus\ \overbrace{D_{j_0}\cap\Big(\bigcup_{\{\alpha\mid C^*_\alpha\not\subset D_{j_0}\}}C^*_\alpha\Big)}^{B}=A\uplus B\Longrightarrow$$

B: abto. por el Teo. B

A: abto. en D_{j_0}

$$\Longrightarrow\begin{cases}A=D_{j_0},\ B=\emptyset\\ \text{ó}\\ A=\emptyset,\ B=D_{j_0}\end{cases}\ \overset{}{\underset{A\neq\emptyset}{\Longrightarrow}}\ A=D_{j_0}\ \Longrightarrow\ C^*_{\alpha_0}=D_{j_0}$$

LEMA: A arcoconexo $\Longrightarrow$ A conexo.

Obs: 1) D componente conexa $\Longrightarrow D = \overline{D}$.

2) Si X tiene un nº finito de comp. conexas $\Longrightarrow D = \mathring{D}$.

$$X = D_1 \cup \cdots \cup D_n \Rightarrow X = D_1 \cup \underbrace{\overline{D_2} \cup \cdots \cup}_{\text{cerrado}}$$

ESPACIOS COMPACTOS

DEFINICIÓN: Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se dice un RECUBRIMIENTO ABIERTO de X si la unión de los elementos de $\mathcal{F}$ es X y los elementos de $\mathcal{F}$ son abiertos de X.

Un SUBRECUBRIMIENTO $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ es un subconjunto $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G}$ es un recubrimiento $(\mathcal{G} \subset \mathcal{F})$.

DEFINICIÓN: (X, τ) espacio topológico. X se dice COMPACTO (CUASI-COMPACTO para los franceses) si cada recubrimiento abierto $\mathcal{F}$ de X admite un subrecubrimiento $\mathcal{G}$ finito.

(para los franceses: compacto $\equiv T_2$ + cuasi-compacto).

Ejemplo 1: (X, τ), $|X| < \infty \Longrightarrow X$ compacto.

Ejemplo 2: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ en $(\mathbb{R}, \tau)$, $X := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a\}$, (X, τ_X)

¿(X, τ_X) compacto? $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$: $|x_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

Sea $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento abierto de X (no necesar. numerable) $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$. Para cada n, $\exists \alpha_n \in \Lambda$ tal que $x_n \in U_{\alpha_n}$. Como $a \in X \Rightarrow$ $\exists \beta \in \Lambda$, $a \in U_\beta$. Entonces $\overline{\mathcal{F}} = \{U_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{U_\beta\}$ es un recubrimiento de X. Como U_β es abto. en el que está a, entonces $\exists n_0$: $x_n \in U_\beta$ $\forall n \geq n_0$.

Definimos $\mathcal{G} = \{U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_{n_0-1}}, U_\beta\} \subset \overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow X = \left(\bigcup_{j=0}^{n_0-1} U_{\alpha_j}\right) \cup U_\beta$.

Ejemplo 3: $(\mathbb{R}, \tau_u)$ no es compacto, i.e., $\exists$ recubrimiento abierto que no admite subrecubrimiento finito. 61

LEMA: (X,τ), $Y \subset X$, (Y, τ_Y). Son equivalentes:

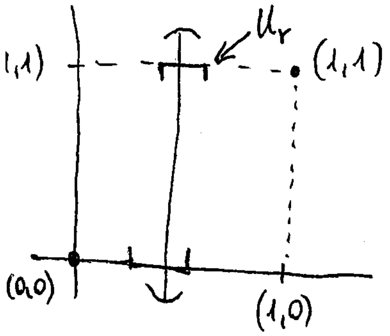
a) Y compacto

b) Cada cubrimiento de Y por abiertos de X admite un subcubrimiento finito.

$\to Y \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$, U_α abierto de X

$\to$ Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un cubrimiento, un subcubrimiento es una subfamilia del cubrimiento.

Ejemplo $(\mathbb{R}^2, \tau_{<_{lex}})$, $Y = [0,1]\times[0,1]$



$\mathcal{F} = \{U_r\}_{r\in[0,1]}$

(Y, τ_Y) no es compacto.

demostración lema

$\boxed{a\Rightarrow b}$ $Y \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$, U_α abto. de X

$\mathcal{F} = \{Y\cap U_\alpha : \alpha\in\Lambda\} = $ recubrimiento de Y por abtos. de $Y \overset{(a)}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow \exists\, \mathcal{G} = \{Y\cap U_{\alpha_j}\}_{\alpha_j\in J}$ $= $ subrecubrimiento, $J\subset\Lambda$, $|J|<\infty \Rightarrow Y\subset \bigcup_{j\in J} U_{\alpha_j}$

$\boxed{b\Rightarrow a}$ Sea $\mathcal{F} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, recubrimiento abto. de Y.

Como para cada $\alpha\in\Lambda$, A_α es abto. en $Y \Longrightarrow \exists U_\alpha \subset X$ abierto en X tal que $A_\alpha = Y\cap U_\alpha \subset U_\alpha$. Luego $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un cubrimiento de Y. ∎

(X,τ) espacio topológico compacto.

(X,τ), $Y \subset X$, (Y,τ_Y) compacto

TEOREMA 1: (X,τ) compacto, Y cerrado $\Longrightarrow$ Y compacto.

demostración

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento abierto de Y. Entonces $\mathcal{F} = \{X\setminus Y\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto entonces existe $J \subset \Lambda$, $|J| < \infty$ tal que $X = \underbrace{(X\setminus Y)}_{\text{abto. por ser } Y \text{ cerrado}} \cup \left(\bigcup_{j\in J} U_j\right)$. Luego $Y \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. ■

TEOREMA 2 (X,τ) es T_2, K compacto $\Longrightarrow$ K cerrado.

demostración

Veamos que $G = X\setminus K$ es abto. Sea $y \in G$. Para cada $x \in K$ existen Ω_{xy} entorno abierto de y, U_x entorno abierto de x, tales que $U_x \cap U_{xy} = \emptyset$ (por ser X T_2). Entonces $\{U_x : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K. Luego, existen $x_1, \dots, x_n \in K$ tal que $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$.

Sea $A = \bigcap_{j=1}^{n} U_{x_j y}$ es un abto., $y \in A$, $A \subset G$. $\Longrightarrow$ G abierto $\Longrightarrow$ K cerrado. ■

COROLARIO: X es T_2, $K \subset X$ compacto, $y \notin K$ $\Longrightarrow$ $\exists\, \Omega, U$ abtos. en X y disjuntos tales que $y \in \Omega$, $K \subset U$.

<u>TEOREMA 3</u>: La imagen de un espacio compacto por una aplicación continua es un compacto.

$$\underset{\text{compacto.}}{X} \xrightarrow[\text{cont.}]{f} Y \Longrightarrow f(X) \text{ compacto.}$$

<u>demostración</u>

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de $f(X)$, i.e. $f(X) \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.

Entonces $\mathcal{F} = \{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ es un recubrimiento abto. de X, por ser f continua. Por ser X compacto, $X = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_j)$.

Veamos que $f(X) \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$; basta observar que $f(X) =$

$$= f\left(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_j)\right) \subset \bigcup_{j=1}^{n} f f^{-1}(U_j) \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j .$$

<u>TEOREMA 4</u>: $\underset{\text{compacto}}{X} \xrightarrow{f} \underset{T_2}{Y}$ cont. y biyectiva $\Longrightarrow f$ homeomorfismo.

<u>demostración</u>

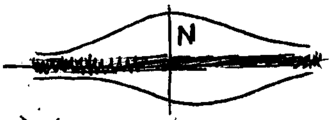
Veamos que f es cerrada ($\Longleftrightarrow f^{-1}$ cont.). Sea K cerrado de $X \Longrightarrow K$ compacto. $\overset{\text{teor. 3}}{\Longrightarrow} f(K)$ compacto en Y y Y es $T_2 \Rightarrow$
$\overset{\text{teor. 2}}{\Longrightarrow} f(K)$ cerrado en Y. ∎

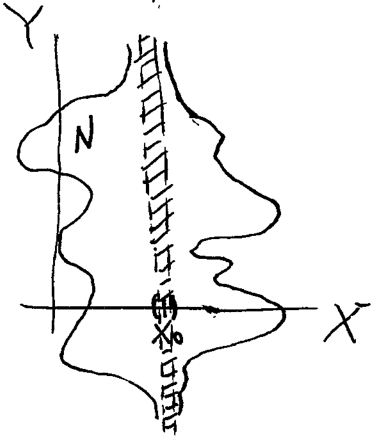
<u>TEOREMA</u>: $(X,\tau), (Y,\tau')$ esp. top. compactos $\Longrightarrow (X\times Y, \tau_\times)$ compacto.

<u>TEOREMA DE TYCHONOFF</u>: $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ esp. top. compactos $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha , \tau_{prod.}\right) \text{ espacio compacto.}$$

<u>LEMA del tubo</u>: Sean X, Y dos espacios topológicos. Supongamos que Y es compacto, entonces si N es un subconjunto abierto de $X\times Y$ que contiene a $\{x_0\}\times Y \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \exists W_0$ entorno de x_0 en X tal que $W_0\times Y \subset N$.



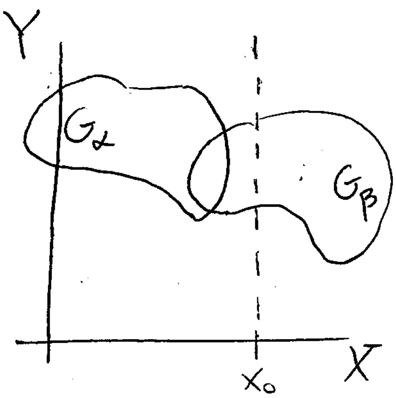


<u>demostración del teorema</u>

Sea $\mathcal{F} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ recubrimiento abierto de $X\times Y$. Sea $x_0 \in X$. Consideramos la familia de abiertos de $X\times Y$. $\mathcal{F}_{x_0} = \{G_\alpha \mid G_\alpha \cap (\{x_0\}\times Y) \neq \emptyset\}$

$N_{x_0} := \bigcup_{G_\alpha\in \mathcal{F}_{x_0}} G_\alpha$ abto. de $X\times Y$. $\left[\tilde{N}_{x_0} := \bigcup_{i\in I_{x_0}} G_{\alpha_i},\ |I_{x_0}|<\infty\right.$

$\{x_0\}\times Y \subset N_{x_0} \xRightarrow{\text{lema tubo}} \exists W_{x_0}$ ent. abierto de x_0 tal que $\boxed{W_{x_0}\times Y \subset N_{x_0}.} \equiv \underbrace{W_{x_0}\times Y \subset \tilde{N}}_{\text{caso fin}}$



Consideramos $\mathcal{G} = \{W_{x_0} : x_0 \in X\}$ recubrimiento abierto de X. Como X es compacto, $\exists x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{m} W_{x_j}$.

$X\times Y = \bigcup_{j=1}^{m} W_{x_j} \times Y \subset \bigcup_{j=1}^{m} \tilde{N}_{x_j} \Longrightarrow X\times Y = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i\in I_{x_j}} G_{\alpha_i}$. ∎

<u>demostración del lema</u>

Para cada $y\in Y$, se tiene que $(x_0, y)\in N$, pues $\{x_0\}\times Y \subset N$. Entonces existen abiertos $U_{x_0} \in \beta_{x_0}$ abto, $\Omega_y \in \beta_y$ abto tal que $U_{x_0}\times \Omega_y \subset N$.

Consideremos $\mathcal{F} = \{\Omega_y : y \in Y\}$. $\mathcal{F}$ es un recubrimiento abto. de $Y \Longrightarrow$

$\xRightarrow{\text{compacto}} Y = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_{y_j}$.

Sea $W_0 := \bigcap_{j=1}^{n} U_{x_0, y_j} \in \beta_{x_0}$ abto. $\quad W_0 \times Y \subset N$

$$\begin{array}{c} (x,y) \\ \cap \\ U_{x_0,y_j}\times \Omega_{y_j} \subset N. \end{array}$$ ∎

Proposición: X compacto $\iff \forall \mathcal{C}$ colección de conjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección no vacía $\Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$

demostración

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, C_α cerrado $\forall \alpha \in \Lambda$.

$$\forall J \subset \Lambda,\ |J| < \infty \Rightarrow \{C_\alpha\}_{\alpha \in J},\ \bigcap_{\alpha \in J} C_\alpha \neq \emptyset$$

$G_\alpha = X \setminus C_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$

$\mathcal{F} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $G_\alpha \in \mathcal{T}$.

Si $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha = \emptyset \Rightarrow \mathcal{F}$ recubrimiento abierto de $X \xRightarrow{X \text{ compacto}} \exists$ un subrecubrimiento finito $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n} \in \mathcal{F}$ tal que

$X = G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n} \Rightarrow \emptyset = C_{\alpha_1} \cap \dots \cap C_{\alpha_n}$ contradicción

Entonces $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha \neq \emptyset$. ∎

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ recubrimiento abierto de X.

$\mathcal{C} = \{C_\alpha := X \setminus U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de cerrados.

Entonces $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha = \emptyset$.

Supongamos que $\mathcal{F}$ no tiene un subrecubrimiento finito, e.d.,

$\nexists J \subset \Lambda$, $|J| < \infty$, $X = \bigcup_{j \in J} U_{\alpha_j}$

COMPACIDAD LOCAL

Objetivo: (X, τ) es T_2.

X localmente compacto $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$ y U un entorno de x, existe V entorno de x tal que $\overline{V}$ compacto y $\overline{V} \subset U$.
($\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\exists$ un sistema fundamental de entornos de x de adherencia compacta).

DEFINICIÓN:

a) (X, τ) espacio topológico, $x \in X$
X es LOCALMENTE COMPACTO EN x $\Leftrightarrow$ $\exists C \subset X$, $x \in C$, C compacto.

b) (X, τ) LOCALMENTE COMPACTO $\Longleftrightarrow$ $\forall x$, X localmente compacto en x.

TEOREMA: (X, τ) espacio topológico. Son equivalentes:

a) X localmente compacto.

b) $\exists$ un espacio topológico Y tal que
1) X subespacio (topológico) de Y
2) $|Y \setminus X| = 1$ (diferencia de un punto)
3) Y compacto y T_2.

DEFINICIÓN:

① Y compacto y T_2, $X \neq Y$ es denso en Y, entonces decimos que Y es una COMPACTIFICACIÓN de X.
Ejemplo: $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $Y = [0,1]$, $X \subset Y$

② $|Y \setminus X| = 1$, entonces decimos que Y es la COMPACTIFICACIÓN A UN PUNTO de X ó COMPACTIFICACIÓN DE ALEXANDROFF de X.

Obs: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = Y$ ¿Y compact. de Alexandroff de $\mathbb{R}$? No $\rightarrow$ Y no es compac

¿y la $\boxed{\text{proy. estereográfica}}$? Sí $\longrightarrow$ compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$.

demostración del objetivo

$\boxed{\Leftarrow}$ trivial

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos X localmente compacto en x_0.

Sea U entorno de x_0 en X.

Por el teorema anterior, $\exists Y$ con $X \subset Y$, Y compactificación de Alexandroff de X, $C := Y \setminus U$ (cerrado en Y) $\Rightarrow$ C compacto en Y

$x \notin C$, Y es T_2 $\Rightarrow \exists V$ entorno de x_0 y Ω entorno de C tales que $V \cap \Omega = \emptyset$. Además $\overline{V}^Y$ es compacto

$\overline{V}^Y \cap C = \emptyset \Rightarrow \overline{V}^X \subset U$. ∎

SUBESPACIOS COMPACTOS EN ESPACIOS MÉTRICOS

TEOREMA 1 (pág 196 Munkres)

Si X es un conjunto simplemente ordenado y verificando la propiedad de la mínima cota superior, entonces cada intervalo cerrado es compacto para la topología del orden.

TEOREMA 2: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces son equivalentes:

a) A es compacto con la topología usual

b) A es cerrado y acotado.

COROLARIO: $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R} \Rightarrow \prod_{k=1}^{N} I_k \subset \mathbb{R}^N$ compacto

demostración teorema 2

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ A compacto, $\mathbb{R}^2$ es $T_2 \Rightarrow A$ cerrado

Sea $f(\vec{x}, \vec{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$\mathcal{F} = \{B_f(\vec{0}, n) : n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 : A \subset B(\vec{0}, n_0) \Rightarrow A$ acotado

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$

¿A es cerrado dentro de un compacto? Si sí $\Rightarrow$ A compacto.

A acotado $\Rightarrow d(\vec{x},\vec{y}) \leq N \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in A$.

Sea $\vec{a_0} \in A$, $r := f(\vec{a_0},\vec{0})$. $\forall \vec{x} \in A$, $f(\vec{x},\vec{0}) \leq f(\vec{x},\vec{a_0}) + f(\vec{a_0},\vec{0}) \leq \underset{\lambda}{\underset{\parallel}{N+r}}$

$\vec{x} \in \underbrace{[-\lambda,\lambda]\times\cdots\times[-\lambda,\lambda]}_{K} \subset \mathbb{R}^n$ ∎

TEOREMA: $f: X \longrightarrow Y$ aplicación continua. Y conjunto con la topología asociada al orden. Entonces, X compacto $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists c, d \in X$ tal que $m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M \quad \forall x \in M$.

idea demostración

$f(X)$ compacto $\Rightarrow \exists M = \max f(x) \quad x \in X$

LEMA (Nº de Lebesgue de un recubrimiento): Sea (X,d) un espacio métrico. Sea A un recubrimiento abierto de X. Si X es compacto, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de X con diámetro $<\delta$, existe un elemento de A que lo contiene. $\delta :=$ un nº de Lebesgue del recubrimiento de A.

$\text{diam}(A) = \sup\{d(a_1,a_2) : a_1,a_2 \in A\}$

LEMA: $X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.
$x \longmapsto d(x,A)$

demostración

$\forall a \in A$, $x_0 \notin A$

$d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \leq d(x,y) + d(y,A)$

$d(x_0,A) - d(y,A) \leq d(x_0,y)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $d(x_0,y) < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. ∎

demostración del lema del nº de Lebesgue

$\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$

▷ Si $X \in \mathcal{A} \Rightarrow$ hecho.

▷▷ Si $X \notin \mathcal{A} \Rightarrow A_\alpha \neq X,\ \forall \alpha \in \Delta$

Sean $A_1, \dots, A_n \in A$ tales que $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Pongamos $C_i = X \setminus A_i \neq \emptyset$, C_i compactos.

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) \quad (*)$$

con i) $f(x) > 0,\ \forall x \in X$

ii) $\exists \delta = \min_{x\in X} f(x) > 0$

Sea $B \subset X$, $\operatorname{diam}(B) < \delta$. $x_0 \in B \Rightarrow B \subset B_d(x_0; \delta) \overset{(*)}{\subset} A_m$

$y \in B_d(x_0, \delta) \Rightarrow d(y, x_0) < \delta = \min\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) : x \in X\} \underset{(*)}{\leq}$

$\overset{(*)}{\leq} d(x_0, C_m) \Rightarrow y \notin C_m \Rightarrow y \in A_m$.

$$(*) \equiv \underset{\displaystyle \frac{n\, d(x_0, C_m)}{n}}{\underset{\wedge\backslash}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_0, C_i)}} = f(x_0) \geq \delta$$

$\exists\, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $d(x_0, C_i) \leq d(x_0, C_m)\ \forall i$

■

TEOREMA DE CONTINUIDAD UNIFORME: $f: X \longrightarrow Y$ continua entre espacios métricos. Si X compacto $\Rightarrow f$ uniformemente continua.

DEFINICIÓN: f uniformemente continua; $f: (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$

f es uniformemente continua $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $d_X(x_0, x_1) < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon$, $\boxed{\forall x_0, x_1 \in X.}$ aquí también sería correcto

demostración TCU

Sea $\varepsilon > 0$. Consideramos $B_{d_Y}(y; \frac{\varepsilon}{2})$, $y \in Y$.

$\mathcal{A} = \{f^{-1}(B_{d_Y}(y; \frac{\varepsilon}{2})) : y \in Y\}$ recubrimiento abto. de X.

Sea δ un número de Lebesgue de $\mathcal{A}$.

Sean x_0, x_1, $d_X(x_0, x_1) < \delta \Rightarrow E = \{x_0, x_1\}$ $\text{diam}(E) < \delta$

$\Longrightarrow \exists \hat{y} \in Y$ tal que $E \subset f^{-1}\left(B_{d_Y}(\hat{y}; \frac{\varepsilon}{2})\right) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(x_0), f(x_1) \in B_{d_Y}(\hat{y}; \frac{\varepsilon}{2}) \Longrightarrow d_Y\left(f(x_0), f(x_1)\right) \leq d_Y\left(f(x_0), \hat{y}\right) +$

$+ d_Y\left(\hat{y}, f(x_1)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

<u>TEOREMA</u>: X compacto, T_2, X sin puntos aislados $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow X$ es no numerable.

<u>demostración</u>

Veamos que no existe $f: \mathbb{N} \to X$ que sea sobreyectiva.

$f: \mathbb{N} \longrightarrow X$ (inacabado $\longrightarrow$ como ejercicio)

$n := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$

<u>LEMA 1</u>: X T_2 y sin puntos aislados. $\emptyset \neq U \subset X$ abto, $x_0 \in X \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists V \subset U$, $x_0 \notin \overline{V}$.

TEMA 3 | HOMOTOPÍA

CONCEPTOS BÁSICOS

$Y \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} X$ dos funciones continuas, $A \subset Y$.

Decimos que f es HOMÓTOPA a g relativo a A si existe

$$\begin{aligned} F: Y \times [0,1] &\longrightarrow X \text{ continua} \\ (y,t) &\longmapsto F(y,t) \end{aligned} \quad \text{tal que} \quad \begin{aligned} F(\cdot,0) &= f, \\ F(\cdot,1) &= g \end{aligned}$$

$\forall a \in A$, $F(a,t) = f(a) = g(a)$. Se denota por $f \sim_A g$.

La aplicación F se llama HOMOTOPÍA entre f y g rel. a A

Un camino de extremos x_0, x_1 en X es una aplicación continua $\sigma: [0,1] \longrightarrow X$ $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = x_1$.

Dos caminos son homótopos, $[0,1] \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} X$ si $\sigma \sim_{\{0,1\}} \tau \iff$

$$\iff \exists F: I \times [0,1] \longrightarrow X \text{ continua tal que: } \begin{aligned} F(s,0) &= \sigma(s) \\ F(s,1) &= \tau(s) \end{aligned}$$
$$(s,t) \longmapsto F(s,t)$$

$$F(0,t) = \sigma(0) = \tau(0) = x_0$$
$$F(1,t) = \sigma(1) = \tau(1) = x_1$$

PROPOSICIÓN: $f \sim_A g$ es una relación de equivalencia.

demostración

- Reflexiva: $f \sim_A f$
- Simétrica: $f \sim_A g \Rightarrow g \sim_A f$
- Transitiva: $f \sim_A g \wedge g \sim_A h \Rightarrow f \sim_A h$.

Reflexiva: $f \sim_A f$ $\qquad \begin{aligned} F: Y \times I &\longrightarrow X \text{ continua} \\ (y,t) &\longmapsto f(y) \end{aligned}$

Simetrica: $f \sim_A g \iff \exists F: Y \times [0,1] \longrightarrow X$

$(y,t) \longmapsto F(y,t)$

$F(\cdot,0) = f$

$F(\cdot,1) = g$

$\forall t \in [0,1],\ F(a,t) = f(a) = g(a)$
$\forall a \in A$

$\iff \exists G: Y \times [0,1] \longrightarrow X$

$(y,t) \longmapsto ?$

$G(\cdot,0) = g$

$G(\cdot,1) = f$

$G(a,t) = g(a) = f(a)$

$\forall a \in A,\ \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow \boxed{G(y,t) := F(y,1-t)}$

continua

Transitiva: $f \sim_A g \ \wedge \ g \sim_A h$

$\exists F: Y \times [0,1] \longrightarrow X$

$(\cdot,0) \longmapsto f$

$(\cdot,1) \longmapsto g$

$\exists G: Y \times [0,1] \longrightarrow X$ continuas

$(\cdot,0) \longmapsto g$

$(\cdot,1) \longmapsto h$

Buscamos $f \sim_A h$, e.d., $\exists H: Y \times [0,1] \longrightarrow X$

$(\cdot,0) \longmapsto f$

$(\cdot,1) \longmapsto h$

$$H(y,t) = \begin{cases} F(y,2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(y,2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} f(a) = g(a), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(a) = h(a), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

continua

■

<u>COROLARIO PARTICULAR</u> (caminos): $\sigma \sim_{\{0,1\}} \tau,\ \tau \sim_{\{0,1\}} \gamma \Longrightarrow \sigma \sim_{\{0,1\}} \gamma$

<u>LAZOS:</u> $\sigma: [0,1] \longrightarrow X$ camino. Decimos que σ es un LAZO en un punto si $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. El punto x_0 se llama BASE del lazo.

$$\mathcal{L}_{x_0} := \{ \sigma : [0,1] \longrightarrow X \mid \sigma(0) = \sigma(1) = x_0 \}$$

DEFINICIÓN: Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{L}_{x_0}$, si $\sigma \sim_{\{0,1\}} \tau$ se dice que son HOMOTÓPICAMENTE EQUIVALENTES.

$[\sigma] = \sigma\sim =$ la clase de equivalencia de σ.

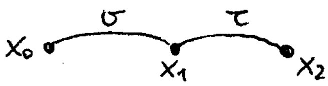
DEFINICIÓN: $\pi_1(X, x_0) := \mathcal{L}_{x_0}/\sim$

TEOREMA: $\forall x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo.

$$[\sigma_1] * [\sigma_2] = [\sigma_1 \sigma_2]$$

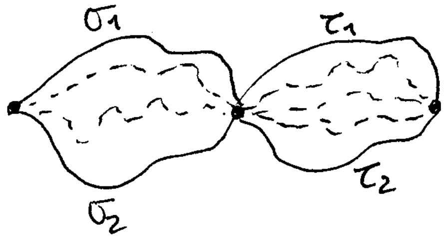
DEFINICIÓN: YUXTAPOSICIÓN DE CAMINOS

$I \overset{\sigma}{\underset{\tau}{\rightrightarrows}} X$ continuas $\qquad \sigma(0) = x_0, \ \sigma(1) = \tau(0) = x_1, \ \tau(1) = x_2$



$$(\sigma\tau)(t) \overset{def.}{=} \begin{cases} \sigma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tau(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

PROPOSICIÓN: $\left.\begin{array}{ll} \sigma_1 \sim \sigma_2 & , \ \sigma_1(1) = \tau_1(0) \\ \tau_1 \sim \tau_2 & , \ \sigma_2(1) = \tau_2(0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \sigma_1\tau_1 \sim \sigma_2\tau_2$



$\mathcal{L}_{x_0} = \{$lazos en X con base $x_0\}$

$\pi_1(X, x_0) = \mathcal{L}_{x_0}/\sim =$ GRUPO FUNDAMENTAL de X en x_0.

También conocido como GRUPO DE POINCARÉ DE X en x_0.

$\sigma : I \xrightarrow{cont.} X$ lazo en X con base x_0

$0 \longmapsto x_0$

$1 \longmapsto x_0$

$$\Pi_1(X,x_0)\times\Pi_1(X,x_0)\xrightarrow{\ *\ }\Pi_1(X,x_0)$$
$$([\sigma],[\tau])\longmapsto[\sigma]*[\tau]\overset{\text{def.}}{=}[\sigma\tau]$$

Observaciones:

- $*$ es una operación <u>no</u> conmutativa
- El elemento neutro de $\Pi_1(X,x_0)$ es $[c_{x_0}]$ donde

$$c_{x_0}: I\longrightarrow X \qquad [c_{x_0}]*[\sigma]=[c_{x_0}\sigma]=[\sigma]$$
$$s\longmapsto x_0$$

demostr. $\longrightarrow F(t,s)=\begin{cases} c_{x_0}(t) & 0\leq t\leq \frac{1-s}{2}\\ \sigma\left(\frac{2t-1+s}{1+s}\right), & \frac{1-s}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$

PROPIEDADES DE LA HOMOTOPÍA:

1) $I=[0,1]\xrightarrow{\sigma} X\xrightarrow{f} Z$ continua $\Longrightarrow \Pi_1(X,x_0)\xrightarrow{f_*}\Pi_1(Z,f(x_0))$

$$[\sigma]\longmapsto[f\circ\sigma]$$

homomorfismo de grupos: $f_*([\sigma_1]*[\sigma_2])=f_*([\sigma_1])*f_*([\sigma_2])$

2) x_0, x_1 en la misma arcocomponente $\Longrightarrow \Pi_1(X,x_0)\cong\Pi_1(X,x_1)$

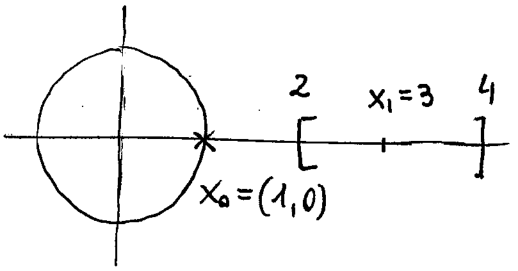
isomorfismo de grupos

3) $X\underset{\varphi}{\cong} Z$ homeomorfos $\Longrightarrow \Pi_1(X,x_0)\cong\Pi_1(Z,\varphi(x_0))$ isomorfos

DEFINICIÓN: X, Y arcoconexos. X e Y son HOMOTÓPICAMENTE EQUIVALENTES si tienen el mismo grupo fundamental.

Ejemplos:

①

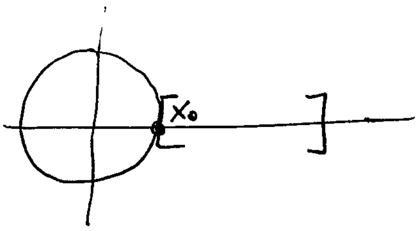


$$\Pi_1(X, x_0) = \Pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$$

$$\Pi_1(X, x_1) = \Pi_1([2,4], \underset{\overset{\parallel}{3}}{x_1}) = \{c_{x_1}\}$$

$$X = S^1 \cup [2,4]\times\{0\}$$

②



$$\Pi_1(\quad, x_0) \cong \Pi_1(\quad, x_0)$$

DEFINICIÓN: X es CONTRACTIBLE si $id_X \sim_\phi c_{x_0}$. Es decir,

$$\exists\, F : X \times [0,1] \longrightarrow X$$
$$(\cdot, 0) \longmapsto id_X \qquad (\forall x \in X,\ F(x,0) = id_X(x) = x)$$
$$(\cdot, 1) \longmapsto c_{x_0} \qquad (\forall x \in X,\ F(x,1) = x_0)$$

Ejemplo: $X = [2,4]$, $F : [2,4]\times[0,1] \longrightarrow [2,4]$, $F(x,t) = (1-t)x + 3t$

$$(x,0) \longmapsto x$$
$$(x,1) \longmapsto 3$$

Observaciones:

1) Todo $\mathbb{R}$-e.v. topológico es contractible

2) Todo convexo de un $\mathbb{R}$-e.v. topológico es contractible (en cada arcocomponente).

i) $\left.\begin{array}{l} F: V \times [0,1] \longrightarrow V \\ (\vec{v}, t) \longmapsto (1-t)\vec{v} + t\vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow V$ es contractible

ii) $\left.\begin{array}{l} F: E \times [0,1] \longrightarrow E \\ (\vec{e}, t) \longmapsto (1-t)\vec{e} + t\vec{e_0} \end{array}\right\} \Rightarrow E$ es contractible en $\vec{e_0}$

TEOREMA: Son equivalentes:

1) X contractible

2) $\forall Y$ esp. topológico $\forall f, g: Y \longrightarrow X$ continuas $\Rightarrow f \sim_\phi g$

PROPOSICIÓN: X contractible $\Longrightarrow$ X conexo por caminos

($\not\Leftarrow$ p.ej. $X = S^1$)

DEFINICIÓN: Decimos que X es SIMPLEMENTE CONEXO (en x_0) si

$\Pi_1(X, x_0) = \{1\} = \{[C_{x_0}]\}$

Ejemplo: $\Pi_1(V, \vec{0}) = \{[C_{\vec{0}}]\}$, $\Pi_1(E, \vec{e_0}) = \{[C_{\vec{0}}]\}$

TEOREMA: X contractible a un punto $\Longrightarrow$ X es simplemente conexo.

RECUERDO

Def.- (X, τ) esp. topológico, $x_0 \in X$.

$\left(X \underset{C_{x_0}}{\overset{id_X}{\rightrightarrows}} X \right)$ Si $id_X \sim_{\emptyset} C_{x_0}$ decimos que X es contractible en x_0.

$$\exists F : X \times I \longrightarrow X \text{ continua} \qquad F(\cdot, 0) = id_X$$
$$(x, t) \longmapsto F(x,t) \qquad F(\cdot, 1) = C_{x_0}$$

Teorema: Son equivalentes:

a) X contractible en x_0

b) $\forall Y$ esp. top. $Y \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} X \Rightarrow f \sim_{\emptyset} g$

$$\left(Y \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} X, \ \exists H : Y \times I \longrightarrow X \right.$$
$$(y, t) \longmapsto H(y,t)$$
$$(\cdot, 0) \longmapsto f$$
$$\left. (\cdot, 1) \longmapsto g \right)$$

Ejemplo: $[2,4] \times \{0\}$

$$F(s,t) = (1-t)s + 4t$$
$$F(s,0) = id_{[2,4]}(s) = s$$
$$F(s,1) = 4 = C_4$$

$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ f, g continuas $A \subset X$

f HOMÓTOPA a g RELATIVO a A si $\exists F: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continua
$(x,t) \longmapsto F(y,t)$

tal que $F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = g$ y $\forall a \in A$ $F(a,t) = f(a) = g(a)$

Se dice que $f \sim_A g$.

Dos caminos γ y η son HOMÓTOPOS en $\{0,1\}$ si:

$\gamma \sim_{\{0,1\}} \eta \iff \exists F: I \times [0,1] \longrightarrow X$ continua
$(s,t) \longmapsto$

$$F(s,0) = \gamma(s)$$
$$F(s,1) = \eta(s)$$
$$F(0,t) = \gamma(0) = \eta(0) = x_0$$
$$F(1,t) = \gamma(1) = \eta(1) = x_1$$

Obs:
$\gamma: [0,1] \longrightarrow X$
$\eta: [0,1] \longrightarrow X$
$\gamma(0) = \eta(0) = x_0$
$\gamma(1) = \eta(1) = x_1$

$\mathcal{L}_{x_0} := \{$ caminos que empiezan y acaban en x_0 (lazos de x_0) $\}$

$[\sigma_1] * [\sigma_2] = [\sigma_1\sigma_2]$ $\quad \sigma_1\sigma_2(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma_2(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

PROPOSICIÓN: $\left.\begin{array}{ll} \sigma_1 \sim \sigma_2 & \sigma_1(1) = \gamma_1(0) \\ \gamma_1 \sim \gamma_2 & \sigma_2(1) = \gamma_2(0) \end{array}\right\} \rightarrow \sigma_1\gamma_1 \sim \sigma_2\gamma_2$

DEFINICIÓN: Grupo Fundamental

$$\pi_1(X, x_0) = \mathcal{L}_{x_0} / \sim_{\{0,1\}}$$

PROPOSICIÓN: x_0, x_1 en la misma arcocomponente $\rightarrow$

$$\Longrightarrow \pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_1)$$

PROPOSICIÓN: $\varphi : X \longrightarrow Y$

X, Y homeomorfos $\Longrightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, \varphi(x_0))$

PROPOSICIÓN:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow \sigma & & \\ I = [0,1] & & \end{array}$$

f continua $\Longrightarrow \exists f^* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f^*} \pi_1(X, f(x_0))$

$$[\sigma] \longmapsto [f \circ \sigma]$$

lazo en x_0 lazo en $f(x_0)$

f^* es un homomorfismo de grupos

$$f^*([\sigma_1] * [\sigma_2]) = f^*([\sigma_1]) * f^*([\sigma_2])$$

DEFINICIÓN: X, Y arcoconexos. X e Y HOMOTÓPICAMENTE EQUIVALENTES si tienen el mismo grupo fundamental.

DEFINICIÓN: X es CONTRACTIBLE si $id_X \sim_{\varnothing} c_{x_0}$. Es decir,

$$\exists F : X \times [0,1] \longrightarrow X$$

$$(\cdot, 0) \longmapsto id_X$$

$$(\cdot, 1) \longmapsto c_{x_0}$$