# Topología, curso 2019-20

## Hoja 6

**1.** Demuestra que si $p : X \to Y$ es una aplicación continua y sobreyectiva que además es abierta o cerrada, entonces es una aplicación cociente.

**2.** Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre el primer factor.

**i)** Sea $X$ el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea $g$ la restricción de $\pi_1$ a $X$. Demuestra que $g$ es una aplicación cerrada pero que no es una aplicación abierta.

**ii)** Sea $Y$ el subespacio $(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea $h$ la restricción de $\pi_1$ a $Y$. Demuestra que la aplicación $h$ no es ni abierta ni cerrada, pero sí es una aplicación cociente.
Indicación: $h^{-1}(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = U \times \{0\}$.

**3.** Sea $Z$ el subespacio $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^2$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to Z$ la aplicación dada por

$$g(x, y) = (x, 0) \quad \text{si} \quad x \neq 0\,; \qquad g(0, y) = (0, y).$$

**i)** Estudia si la aplicación $g$ es continua, si es abierta y si es cerrada.

**ii)** Demuestra que la topología cociente inducida en $Z$ por $g$ no es Hausdorff.

**4.** Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$, y $\sim$ la relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son las siguientes:

- $[(x, y)] = \{(x, y)\}$ si $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$
- $[(x, 0)] = \{(x, 0), (x, 1)\}$ si $0 < x < 1$
- $[(0, y)] = \{(0, y), (1, y)\}$ si $0 < y < 1$
- $[(0, 0)] = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

Se considera el conjunto cociente $X/\sim$ como espacio topológico dotado de la topología cociente. Dibuja en $X$ entornos abiertos de los puntos $(1/2, 1/2)$, $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ y $(0, 0)$ que sean saturados para la aplicación de paso al cociente $p : X \to X/\sim$ que envía cada punto a su clase de equivalencia. ¿A qué subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (con la topología inducida por la usual) es homeomorfo $X/\sim$ ?

**5.** Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$, y $\sim$ la relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son las siguientes:

- $[(x, y)] = \{(x, y)\}$ si $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$
- $[(x, 0)] = \{(x, 0), (x, 1)\}$ si $0 < x < 1$
- $[(0, y)] = \{(0, y), (1, 1 - y)\}$ si $0 < y < 1$
- $[(0, 0)] = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

Se considera la topología cociente en $X/\sim$. Dibuja en $X$ entornos abiertos de los puntos $(1/2, 1/2)$, $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ y $(0, 0)$ que sean saturados para la aplicación de paso al cociente $p : X \to X/\sim$ que envía cada punto a su clase de equivalencia. Este espacio topológico $X/\sim$, conocido como la *botella de Klein*, es compacto. ¿Por qué? (Nota: se puede demostrar que, a diferencia del ejercicio anterior, no existe ningún subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que sea homeomorfo a la botella de Klein. ¿Puedes hacerte una idea de qué *forma* tiene?)

**Observación.-** Los dos ejercicios anteriores producen ejemplos de *superficies topológicas compactas*. Una superficie topológica es, dicho de manera imprecisa, un espacio topológico Hausdorff en el que todo punto tiene un entorno homeomorfo a una bola de $\mathbb{R}^2$. Las superficies regulares en $\mathbb{R}^3$ que se estudian en el curso de Geometría de Curvas y Superficies son superficies topológicas, pero la definición formal general no requiere que tales espacios topológicos puedan *realizarse* como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ (ver el ejercicio anterior). Si se parte de un polígono cerrado de $2m$ lados y se *identifican* parejas de lados con una relación de equivalencia (como hemos hecho en los ejercicios anteriores empezando con un polígono de 4 lados), el espacio cociente es una superficie topológica compacta. Se pueden clasificar las superficies topológicas compactas usando que todas ellas pueden construirse de este modo.

**6.** La colección de traslaciones $G = \{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{Z}\}$ dadas por $f_n(x) = x + n$ forman un grupo con la operación de composición de aplicaciones (para verlo debe comprobarse la existencia de elemento neutro, de elementos inversos y la asociatividad). Como las traslaciones son homeomorfismos de $\mathbb{R}$ en sí mismo (topología usual), $G$ es de hecho un subgrupo del grupo que forman todos los homeomorfismos de $\mathbb{R}$ en sí mismo.

**i)** Definimos $x \sim y$ si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f_n(x) = y$. Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.

**ii)** Denotamos al espacio topológico cociente $\mathbb{R}/\sim$ como $\mathbb{R}/G$. Dibuja entornos saturados en $\mathbb{R}$ que te ayuden a justificar que $\mathbb{R}/G$ es Hausdorff. Observa que $\mathbb{R}/G$ es el mismo espacio topológico que se obtiene al identificar los extremos del intervalo cerrado $[0, 1]$ como hicimos en clase. Concluye que $\mathbb{R}/G$ es homeomorfo a una circunferencia.

**7.** Sea $X$ un espacio topológico Hausdorff y supongamos que $G$ es un subgrupo del grupo de homeomorfismos de $X$ en $X$ que tiene la siguiente propiedad: para todo $x \in X$ existe un abierto $U_x$ que contiene a $x$ y tal que $U_x \cap g(U_x) = \varnothing$ para todo $g \in G$ salvo que $g$ sea la aplicación identidad (elemento neutro de $G$). (Se suele describir un tal $G$ como un *grupo de homeomorfismos totalmente discontinuo*). Definimos $\sim$ en $X$ dada por $x \sim y$ si existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$.

**i)** Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

**ii)** Denotamos $X/G$ al espacio topológico cociente $X/\sim$. Demuestra que dado $x \in X$, si $U_x$ es un abierto que cumple la condición descrita arriba, entonces $U = \bigcup_{g \in G} g(U_x)$ es un abierto saturado respecto de la aplicación $p : X \to X/G$ de paso al cociente, por lo que $p(U)$ es un entorno abierto de $[x] \in X/G$. Observa que $p(U) = p(U_x)$.

**iii)** Comprueba que el espacio cociente $X/G$ es Hausdorff.

**8.** Consideremos en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

**i)** Demuestra que este espacio es $T_0$ pero no $T_1$.

**ii)** Estudia la convergencia de la sucesión $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio dado y observa que el límite de una sucesión no tiene por qué ser único.

**9.** Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de la topología cofinita.

**i)** Demuestra que este espacio es $T_1$ pero no $T_2$ (es decir, no es Hausdorff).

**ii)** Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales distintos. Demuestra que cada número real es un límite de esta sucesión en la topología cofinita.

**10.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico $T_1$.

**i)** Demuestra que si $X$ es finito, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

**ii)** Demuestra que si $\mathsf{A}$ es un subconjunto finito de $X$, $\mathsf{A}$ no tiene puntos de acumulación, es decir $\mathsf{A}' = \varnothing$.

**11.** Se considera en $\mathbb{R}$ la topología conumerable, formada por el conjunto vacío y por los conjuntos cuyo complementario es numerable o finito.

**i)** Determina razonadamente si esta topología es $T_0$, $T_1$, $T_2$.

**ii)** Halla el límite o límites (si existen) de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$.

**iii)** ¿Qué sucesiones tendrán límite? ¿Cuándo será único?

**12.** Demuestra las siguientes caracterizaciones.

**i)** Un espacio topológico $X$ es $T_1$ si y sólo si para cada punto $x \in X$ se cumple que

$$\{x\} = \cap\{U : U \text{ es un entorno abierto de } x\}\,.$$

**ii)** Un espacio topológico $X$ es Hausdorff ($T_2$) si y sólo si para cada punto $x \in X$ se cumple que

$$\{x\} = \cap\{\overline{U} : U \text{ es un entorno abierto de } x\}\,.$$

**13.** Si un espacio es IAN con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina?, ¿y con una más fina? Lo mismo para IIAN.

**14.** Sea $X$ un espacio IAN. Sean $A \subset X$ y $x \in X$. Demuestra lo siguiente: $x \in \partial A$ si y solamente si existen $(x_n)_{n>0} \subset A$ y $(y_n)_{n>0} \subset X \setminus A$, ambas con límite $x$.

**15.** Demuestra que si en un espacio topológico $X$, un conjunto $\mathsf{A}$ y su complementario son densos (esto es, $\overline{\mathsf{A}} = \overline{X \setminus \mathsf{A}} = X$), entonces $\overset{\circ}{\mathsf{A}} = \mathsf{Int}\,(X \setminus \mathsf{A}) = \varnothing$. ¿Es cierto el recíproco?