1

ESPACIO COCIENTE

Sea E un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y $F \subset E$ un subespacio

Se establece la siguiente relación binaria entre los vectores de E:

$$uRv \Leftrightarrow u-v \in F$$

- Comprobar que R es de equivalencia.

El conjunto cociente se denota por E/F (en vez de E/R)

Vamos a tratar de dotar a E/F de una estructura de e.v

Las operaciones se definen de la manera siguiente:

+) $[u]+[v]=[u+v]$ ("$[u]$": clase de u)

•) $\lambda \circ [u] = [\lambda u]$

- Es evidente que se verifican todas las propiedades requeridas en la definición de e.v. (¡por verificarse para E!)

SALVO POR UN DETALLE: Que la definición sea coherente.

Veamos el siguiente ejemplo: $E=\mathbb{R}^2$. Definimos $(x_1,y_1)\,R\,(x_2,y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2 \in \mathbb{Z} \\ y_1-y_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Es obvio que esta relación también es de equivalencia.

Respecto de ella $u=(\sqrt{2},1)$ y $v=(\sqrt{2}+3,1)$ están relacionados i.e. $[u]=[v]$. Pero si $\lambda = 2/5 \in \mathbb{K}=\mathbb{R}$ vemos que $\lambda u \not R \lambda v$ i.e

$[\lambda u] \neq [\lambda v]$

$\hookrightarrow$ luego la definición de la 2ª operación es ahora incoherente

Así pues, para convencernos de que E/F es un e.V sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ debemos comprobar que las operaciones +) y •)

2) ESTÁN BIEN DEFINIDAS (¡NO DEPENDEN DE LA ELECCIÓN DE REPRESENTANTES!)

Comprobación.

1) $\left.\begin{matrix}[u]=[u_1]\\ [v]=[v_1]\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}u-u_1\in F\\ v-v_1\in F\end{matrix}\right. \Rightarrow (u+v)-(u_1+v_1)\in F \Rightarrow [u+v]=[u_1+v_1]$

2) $\left.\begin{matrix}[u]=[u_1]\\ \lambda\in\mathbb{K}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}u-u_1\in F\\ \lambda\in\mathbb{K}\end{matrix}\right. \Rightarrow \lambda u-\lambda u_1\in F \Rightarrow [\lambda u]=[\lambda u_1].$

Hemos visto, pues, que E/F tiene estructura de e.v.

- El vector nulo es $[\vec{0}]=[u]$, para cualquier $u\in F$
- Es claro también que $-[u]=[-u]$.

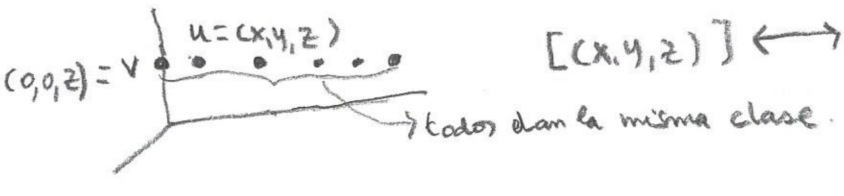
Ejemplos.

1) Si $F=E$; E/E solo consta del vector nulo $[u]=[\vec{0}]$

2) Si $F=\{\vec{0}\}$; $E/\{\vec{0}\}$ se identifica de manera natural con E
$[u]\longleftrightarrow u$

3) $\dfrac{\mathbb{R}^3}{\mathbb{R}^2\times\{0\}}$ se identifica de manera natural con $\{(0,0)\}\times\mathbb{R}$

$[(x,y,z)]\longleftrightarrow(0,0,z)$



PROPOS. $\dim E/F = \dim E - \dim F$

Dem. Sea $\{u_1,\dots,u_r\}$ una base de F y $\{u_1,\dots,u_r,u_{r+1}\dots u_n\}$ una base de E. Deseamos ver que $\{[u_{r+1}],\dots,[u_n]\}$ es base de E/F

Indep. $\lambda_{r+1}[u_{r+1}]+\dots+\lambda_n[u_n]=[\vec{0}]\Rightarrow[\lambda_{r+1}u_{r+1}+\dots+\lambda_n u_n]=[\vec{0}]\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \lambda_n u_n - \vec{0} \in F \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \lambda_n u_n = a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r$ para ciertos $a_i \in \mathbb{K}$

$\{u_1, \ldots, u_r\}$ base de F

$\xrightarrow[(u_1, \ldots u_r, u_{r+1} \ldots u_n \text{ ind})]{} \underbrace{0 = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n}= a_1 = \cdots = a_r$

Generadores ¿$\forall [u] \in E/F$, $\exists \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \,/\, [u] = \lambda_{r+1}[u_{r+1}] + \cdots + \lambda_n [u_n]$?

Bien, $\forall u \in E$ tenemos:

$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \lambda_n u_n$; $\lambda_i \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$\Rightarrow [u] = \lambda_1 \underset{[\vec{0}]}{\underset{\shortparallel}{[u_1]}} + \cdots + \lambda_r \underset{[\vec{0}]}{\underset{\shortparallel}{[u_r]}} + \lambda_{r+1}[u_{r+1}] + \cdots + \lambda_n [u_n]$

$u_1, \ldots, u_r \in F$

$\Rightarrow [u] = \lambda_{r+1}[u_{r+1}] + \cdots + \lambda_n [u_n]$

C. Q. D.

OBSERVACIÓN La demostración dice además cómo encontrar una base de E/F. A saber

① Se escribe primero una base de F: $\{u_1, \ldots, u_r\}$

② Se completa a una de E: $\{u_1, \ldots, u_r; u_{r+1}, \ldots, u_n\}$

③ $\{[u_{r+1}], \ldots, [u_n]\}$ proporciona una base de E/F

<u>Ejemplo</u> Sea $E = \mathbb{R}^4$, $F = \langle u, v \rangle$ donde

$u = (2,-2,3,1)$, $v = (-1,4,-6,-2)$ como en el

ejercicio 5 de la hoja 2.

Para encontrar una base de E/F, procedemos así:

① $\{u, v\}$ base de F

② $\{u, v, e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0)\}$ base de E

③ $\{[e_2], [e_3]\}$ es una base de E/F

- ¿Cuáles son las <u>coordenadas</u> de $[w]$ con $w = (0,1,1,0)$] resp. de esta base!

$w = e_2 + e_3 \Rightarrow [w] = 1 \cdot [e_2] + 1 \cdot [e_3] \longrightarrow$ coordenadas: $(1,1)$

- ¿Cuáles son las coordenadas de $[w]$ con $w = (1,3,-1,-1)$.

① Primero expresamos $w = x_1 u + x_2 v + x_3 e_2 + x_4 e_3$ i.e.

resolvemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \text{sol:} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

② $w = u + v + e_2 + 2e_3 \Rightarrow [w] = \cancel{[u]} + \cancel{[v]} + [e_2] + 2[e_3]$

Luego las coordenadas son: $(1,2)$.

El $1^{\underline{er}}$ teorema de isomorfía

Teorema. Si $f: V \to W$ es una aplicación lineal, se tiene:

1°) $\bar{f}: V/_{N(f)} \longmapsto Im f$, $\bar{f}([v]) = f(v)$ es una aplicación lineal bien definida. (Notación: $N(f) = Ker f$)

2°) $\bar{f}$ es incluso un isomorfismo.

3°) $\dim V = \dim N(f) + \dim Im f$ (de nuevo)

Demostración.

1°) a) Debemos comprobar que si $[v_1] = [v_2]$ entonces $\bar{f}([v_1]) = \bar{f}([v_2])$.

Veamos: $[v_1] = [v_2] \Rightarrow v_1 - v_2 \in N(f) \Rightarrow \vec{0} = f(v_1) - f(v_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow \bar{f}([v_1]) = \bar{f}([v_2])$.

b) La linealidad de la aplicación $\bar{f}: V/_{N(f)} \longmapsto W$ es ahora una consecuencia de la de $f: V \to W$.

c) Por definición $\forall v \in V$, $\bar{f}([v]) = f(v) \in Im f$, luego en el homomorfismo $\bar{f}$ podemos sustituir W por el subespacio $Im f$.

2°) El argumento de la parte c) anterior prueba que $\bar{f}: V/_{N(f)} \longmapsto Im f$ es supreyectiva.

Para demostrar que es inyectiva, calculamos su núcleo:

$$N(\bar{f}) = \left\{ [v] \in V/_{N(f)} \;\middle|\; \bar{f}([v]) = f(v) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ [v] \in V/_{N(f)} \;\middle|\; v \in N(f) \right\} = \{ [\vec{0}] \}$$

3) $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} \bar{f} = \dim E/_{N(f)} = \dim E - \dim N(f)$

<u>Ejemplo</u>:

$$f : M_{2\times 3} \longmapsto P_2 = \{\text{polinomios de grado} \leq 2\}$$

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = (a+b) + (c+c')x + (a'+b')x^2$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \in \operatorname{Im} f \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x \in \operatorname{Im} f \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 \in \operatorname{Im} f \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = P_2 \quad \text{i.e } f \text{ es un } \underline{\text{epimorfismo}}$$

b)
$$N(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a+b=0 \\ c+c'=0 \\ a'+b'=0 \end{array} \right\}$$

Tenemos: $\dfrac{M_{2\times 3}}{N(f)} \cong P_2$; $\underset{6}{\underset{\shortparallel}{\dim M_{2\times 3}}} = \underset{?}{\underset{\shortparallel}{\dim N(f)}} + \underset{3}{\underset{\shortparallel}{\dim P_2}}$

Se deduce que $\dim N(f) = 3$. Y, en efecto, una base es

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

c) ¿Y una base de $M_{2\times 3}/_{N(f)}$?

d) ¿Y las coordenadas de $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ respecto de esa base?