ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

$x'(t) = 2x(t) \longrightarrow x(t) = e^{2t}$ (porque $x'(t) = 2e^{2t} = 2x(t)$)

$x(t) = 7e^{2t}$ tambien es solución

$x(t) = ae^{2t}$ $a \in \mathbb{R}$ tambien es solución

¿Qué se necesita para determinar "a"?

Por ejemplo, si pedimos $x(0) = 8 \Rightarrow 8 = x(0) = a \cdot e^{2\cdot 0} = a \Rightarrow a = 8$

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = 2x(t) \\ x(0) = 8 \end{array}\right\} \text{Problema de VALORES INICIALES (PVI)}$$

$\longrightarrow$ única solución $x(t) = 8e^{2t}$

Otro ejemplo:

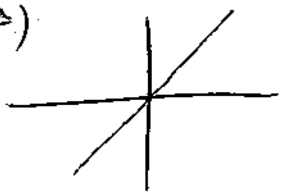
$x'(t) = 3\left(x(t)\right)^{2/3}$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = t^3 \\ x(t) = 0 \end{array}\right\} \text{soluciones}$$

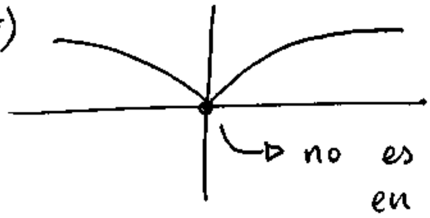
$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = 3\left(x(t)\right)^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{array}\right\} \text{tiene 2 soluciones distintas}$$

En ambos casos, la ecuación es del tipo $x'(t) = f(x(t))$

1ª)



2ª)



$\Rightarrow$ no es diferenciable en $x = 0$

Ejemplo: $x' = \lambda x$ ($\leadsto x(t) = ae^{\lambda t}$)

Crecimiento de una población

(tasa de crecimiento) $\lambda = $ natalidad − mortalidad

$\uparrow$ típicamente

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx x'(t) = \alpha x \qquad \frac{\Delta x}{x}\Big/\Delta t \xrightarrow[\lim \Delta t \to 0]{} \frac{x'}{x}$$

¿Cómo se puede modificar para tener en cuenta los recursos que son limitados?

$$x'(t) = \underbrace{a\left(1-\frac{x(t)}{L}\right)}_{\text{"}\lambda\text{"}} x(t)$$

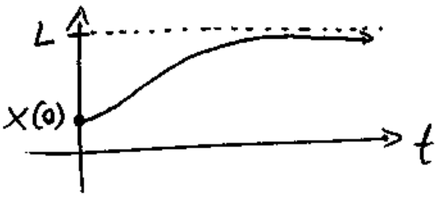
cuando $x \ll L \to$ límite

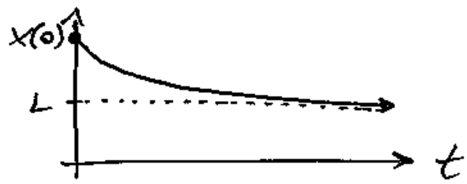
$x' \approx ax$

cuando $x \approx L$

$a\left(1-\frac{x(t)}{L}\right) \approx 0$

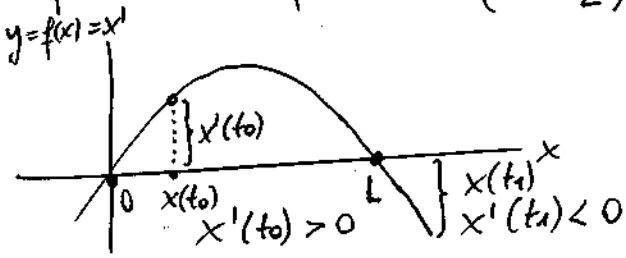
Veremos:





Eso se puede ver sin encontrar la solución

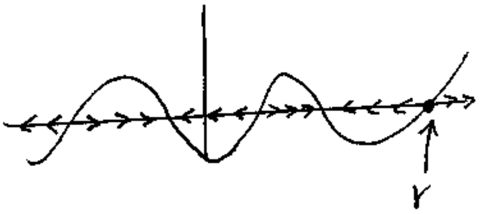
$x' = f(x) \qquad f(x) = a\left(1-\frac{x}{L}\right)x \qquad a>0$



→ dibujo de la derivada

Para ver el comportamiento, no necesitamos hallar las soluciones

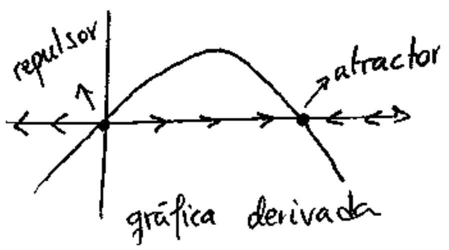
$(x' = f(x))$

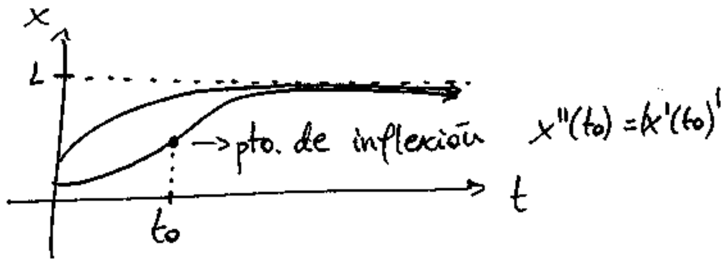


$x(t_0) = r \qquad x'(t_0) = 0 = f(r) = f(x(t_0))$

Esos puntos son puntos de equilibrio (si la función empieza ahí se queda ahí). Pueden ser repulsores (inestables) o atractores (estables).

$$y = a\left(1-\frac{x}{L}\right)x \qquad\qquad x' = a\left(1-\frac{x}{L}\right)x$$





Veremos que estos son los posibles aspectos de las funciones que cumplen la ecuación diferencial

Ejercicio (resuelto próximamente)

Si consideramos el PVI: $x' = a\left(1-\frac{x}{L}\right)x \qquad x(0) = x_0 \qquad 0 < x_0 < L$

¿para qué x_0 se da  y  ?

Ejemplo: $\quad y' = xy \quad (y'(x) = xy(x))$

Manipulaciones sin justificar (de momento)

$$\frac{dy}{dx} = xy \rightsquigarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \rightsquigarrow \ln(y) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\rightsquigarrow |y| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \rightsquigarrow y = \pm e^c \cdot e^{x^2/2} = K e^{x^2/2}$$

Esto se conoce como "método de separación de variables".

Ejercicio: Resolver $x' = a\left(1-\frac{x}{L}\right)x$ (resultado final próximamente)

En General: $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (P)$

PROPOSICIÓN: Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$, $G(y)$ una primitiva de $g(y)$ (e.d. $\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \wedge \frac{dG(y)}{dy} = g(y)$).

Entonces las soluciones de P cumplen: $G(y(x)) = F(x) + \overset{\text{const}}{C}$

razón:

$$\frac{d}{dx}\left(G(y(x))\right) = \frac{dG}{dy}(y(x))\,\frac{dy}{dx}(x) \overset{G'=g \text{ y resuelve } P}{=} g(y(x))\cdot\frac{f(x)}{g(y(x))} = f(x) = \frac{dF(x)}{dx}(x)$$

Es decir, $\frac{d}{dx}\left(G(y(x)) - F(x)\right) = 0 \Rightarrow G(y(x)) - F(x) = \text{constante}$ ∎

COMENTARIOS

① Deberíamos haber supuesto algo sobre $f(x)$ y $g(y)$ para poder hablar de primitivas suyas, por ejemplo $f(x), g(y)$ continuas. Eso nos asegura que existen F y G y son C^1 (donde esten definidas).

② $h'(x) = 0 \Longrightarrow h$ es constante en cada intervalo en el que está definida (si h está definida en todo $\mathbb{R}$, h es const. en todo $\mathbb{R}$)

Significado geométrico de $y' = f(x,y)$ $\quad (y'(x) = f(x, y(x))$, f dada$)$

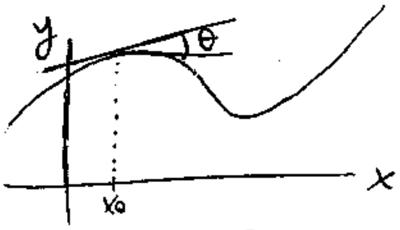
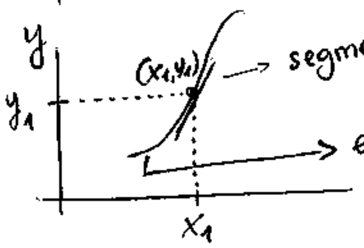


gráfico $y = y(x)$

$y'(x_0) = \tan\theta =$ pendiente a la recta tangente al gráfico de $y(x)$ en $(x_0, y(x_0))$



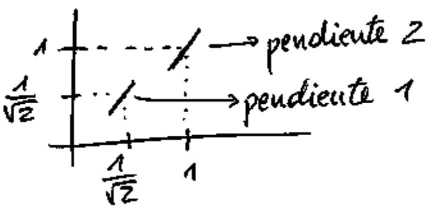
→ segmento con pendiente $f(x_1, y_1)$

→ esto no puede ser una solución de $y' = f(x,y)$ con $y(x_1) = y_1$

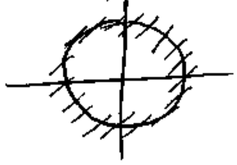
CAMPO DE PENDIENTES ⟶ ver esas pendientes para muchos puntos

Ejemplo: $x' = t^2 + x^2$ $\quad$ (e.d. $x'(t) = t^2 + x(t)^2$)

$f(t,x) = t^2 + x^2$



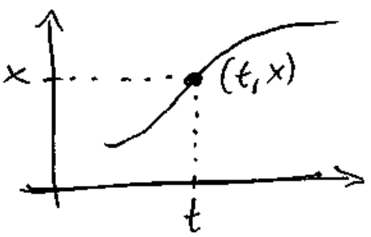
Obs: En todos los puntos (t,x) de la circunferencia unidad la pendiente es 1.



$t^2 + x^2 = 1 \longrightarrow$ Isoclina (misma inclinación)

Para $y'(x) = f(x, y(x))$ $\quad$ Isoclina $f(x, y(x)) = C$

Ejemplo: $x' = t^2 + x^2$ $\quad$ (P)



La pendiente de la recta tangente a la solución tiene pendiente $t^2 + x^2$

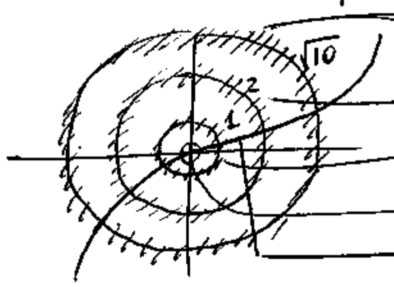
ISOCLINAS

$$\{(t,x):\ t^2+x^2=c\} := \text{Iso}(c)$$

Observación: $\text{Iso}(c) = \emptyset$ si $c<0$

- $\text{Iso}(0) = \{(0,0)\}$
- $\text{Iso}(c) =$ circunferencia de radio $\sqrt{c}$ si $c>0$.

$c=1$, $c=4$, $c=10$, $c=1/4$

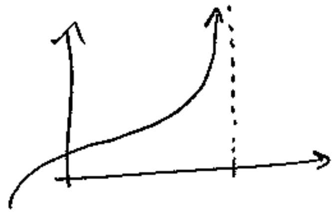


→ pendiente 10
→ pendiente 4
→ pendiente 1
→ pendiente 1/4
→ no puede pasar por el origen (hay una que pas[a] pero tiene otra for[ma])

Recuerda: $x' = t^2+x^2$ (P)

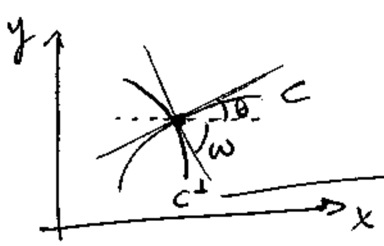
Una solución de P tiene que ser tangente a la pendiente marcada en cada punto por el que pasa

Parece que $x(t) \to \infty$, ¿pero con asíntota o sin asíntota

¿  ó  ?

EDOs Y PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

1.- TRAYECTORIAS ORTOGONALES



$\text{pend}_C = \tan(\theta)$

$\text{pend}_{C^\perp} = \tan(\omega)$

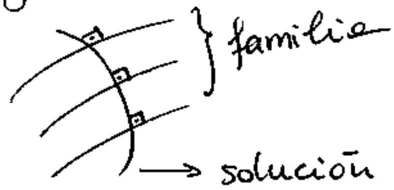
→ perpendicular (ortogonal) a C en el punto de intersección.

$\omega = \theta - \frac{\pi}{2}$ (ω es negativo)

$$\tan(\omega) = \frac{\text{sen}(\theta-\pi/2)}{\cos(\theta-\pi/2)} = \frac{-\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} = \frac{-1}{\tan(\theta)}$$

Es decir, $\boxed{\text{pend}_C \cdot \text{pend}_{C^\perp} = -1}$

Objetivo: Dada una familia de curvas, encontrar una que sea ortogonal a todas las de la familia en sus puntos de corte



Vamos a suponer que la familia original satisface una EDO $y' = f(x,y)$

Buscamos una EDO para las ortogonales

¿pendiente de $C^\perp$ en (x,y)? $\text{pend}_{C^\perp} = \dfrac{-1}{\text{pend}_C} = \dfrac{-1}{f(x,y)}$

Si $C^\perp$ está dada por una función $y = y(x)$:

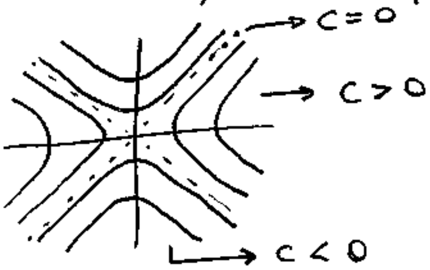
$(x,y) = (x, y(x))$

$y'(x) = \text{pend}_{C^\perp} = \dfrac{-1}{f(x,y)}$

EDO familia original	EDO trayectoria ortogonal
$y' = f(x,y)$	$y' = \dfrac{-1}{f(x,y)}$

Ejemplo: Familia $x^2 - y^2 = c$ (hipérbolas) $(c \neq 0)$

Para cada c, eso define y (implícitamente) en función de x.



1er paso: Encontrar una EDO que cumplan esas curvas

$$x^2 - (y(x))^2 = c \xrightarrow{\text{derivamos}} 2x - 2y \cdot y' = 0$$

Es decir, $\boxed{y' = \dfrac{x}{y} \equiv f(x,y)}$

2º paso: EDO para las trayectorias ortogonales

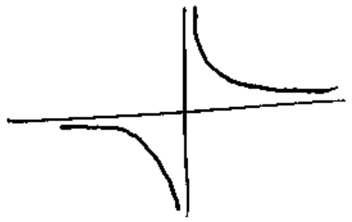
$$y' = \frac{-1}{f(x,y)} = \frac{-y}{x} \Longrightarrow \boxed{y' = -\frac{y}{x}}$$

3er paso: Resolver la EDO del paso 2

$$y' = \frac{-y}{x} = \frac{dy}{dx} \xrightarrow[\text{variables}]{\text{separación}} \frac{dy}{y} = \frac{-dx}{x} \longrightarrow \text{integrar}$$

$$\Longrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + c \Longrightarrow |y| = \frac{e^c}{|x|} \text{ ó } |xy| = e^c$$

Es decir, $\underline{|xy = K|}$ $\quad K = e^c$ ó $K = -e^c$



$\leftarrow y = \dfrac{K}{x}$

Preguntas anteriores: $x' = a\left(1 - \frac{x}{L}\right)x$

$$\int \frac{dx}{\left(1-\frac{x}{L}\right)x} = \int a\,dt$$

Vemos que $\dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{L}\right)x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-\frac{x}{L}} \Rightarrow$ (después de algunos cálculos)

$$\Rightarrow \left|\frac{x}{L-x}\right| = e^c \cdot e^{at} \qquad \left(K = \begin{cases} e^c \\ -e^{-c} \end{cases}\right)$$

$$x(t) = \frac{LKe^{at}}{1 + Ke^{at}}$$ Las soluciones son curvas logísticas

$$\begin{cases} x' = a\left(1 - \frac{x}{L}\right)x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Sacamos K sabiendo que $x(0) = x_0$

$$\boxed{x(t) = \frac{Lx_0 \cdot e^{at}}{L - x_0 + x_0 e^{at}}}$$

Falta ver también el posible punto de inflexión:

Reducimos el número de parámetros (quitaremos "a" y "L")

① $y(t) \overset{def.}{=} \dfrac{x(t)}{L}$

$$y'(t) = \frac{x'(t)}{L} = \underbrace{aL}_{b}(1-y)y$$

② $z(t) \overset{def.}{=} y(\alpha t)$ con α apropiado se consigue que $z' = (1-z)z$

$$x' = a\left(1 - \frac{x}{L}\right)x \xrightarrow[y(t) = \frac{x(t)}{L}]{} y' = aL(1-y)y$$

$\Rightarrow z(t) = y(\alpha t)$ para eliminar "aL"

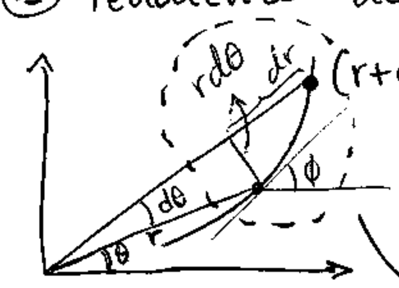
$$z'(t) = \alpha y'(\alpha t) = \alpha a L \big(1 - \underbrace{y(\alpha t)}_{z}\big)\underbrace{y(\alpha t)}_{z}$$

con $\alpha = \dfrac{1}{aL}$ obtenemos $z' = (1-z)z$

Trayectoria ortogonal en coord. polares

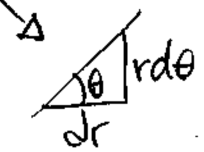
Partimos de una familia de curvas solución de una EDO $r' = h(r,\theta)$ (e.d. $r'(\theta) = h(r(\theta),\theta)$) ¿Familia ortogonal?

① Pendiente de una curva en polares



pendiente $= \tan(\phi)$

Salvo por términos de orden $dr^2, d\theta^2$



$\longrightarrow \tan\phi = \dfrac{r\,d\theta}{dr} = \dfrac{r}{r'}$

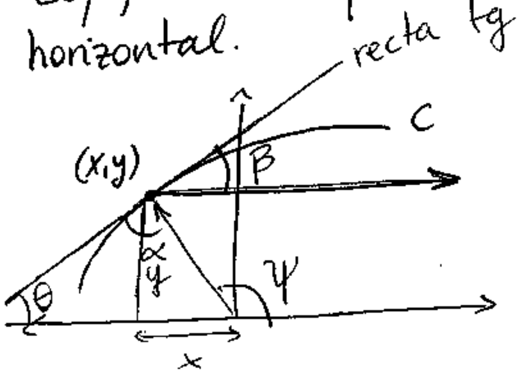
Si esa curva es solución de la EDO entonces la pendiente es $\frac{r}{h}$ (porque $h = r'$)

$$\text{pend}_{c^\perp} = \frac{-1}{\text{pend}_c} = \frac{-1}{r/h} = -h/r$$

$\text{pend}_{c^\perp} = \dfrac{r}{r'} \longrightarrow \boxed{r' = \dfrac{-r^2}{h}}$ puede ser útil cuando aparecen expresiones x^2+y^2

Ejemplo: ej. geométrico (el espejo)

Espejo tal que si la luz parte del origen la reflejada es horizontal.



$\alpha = \beta = \theta$ (reflexión)

$y'(x) = \tan(\theta)$

$\tan(\psi) = \dfrac{y}{x}$

$\psi = 2\theta$

$\psi + (\pi - 2\theta) = \pi$

$$\tan(2\theta) = \frac{\text{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2\,\text{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2y'}{1-y'^2}$$

$\dfrac{2y'}{1-y'^2} = \tan(\psi) = \dfrac{y}{x}$; e.d. $(1-y'^2)y = 2y'x \Rightarrow yy'^2 + 2xy' - y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$ $\longrightarrow$ ¿cuál? pues $+$ porque la derivada de C es $+$.

$$\Longrightarrow \boxed{y' = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}} \qquad \text{cambio: } \quad z(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad \left(z = \frac{y}{x}\right)$$

$$z' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y' - z\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} - z\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{-x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} - z\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2}+1} - z\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow xz' = -z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\left(\sqrt{1+z^2}\right)$$

Ecuación de variables separables:

Integrar $\longrightarrow$ resultado: $1-\sqrt{1+z^2} = \frac{c}{x}$

Como $z = \frac{y}{x}$ $\longrightarrow$ $\boxed{y^2 = c^2 + 2cx}$

Ahora hay que escoger c dependiendo de un dato inicia

La ecuación que hemos obtenido es una ecuación homogénea, e.d., una EDO con $y' = f(x,y)$ con f homogénea de grado 0

$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ $\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right.$ es homogénea de grado $\left.0\right)$

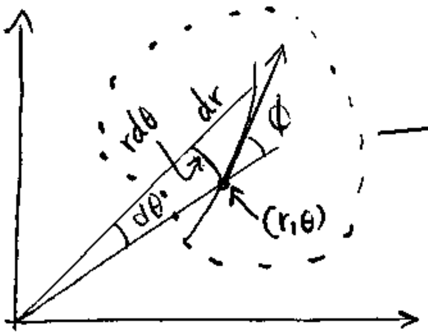
Entonces $f(x,y) = f(x\, 1, x\, \frac{y}{x}) = f(1, y/x)$

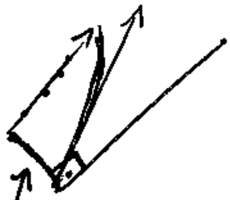
λ

Haciendo el cambio $z = y/x$:

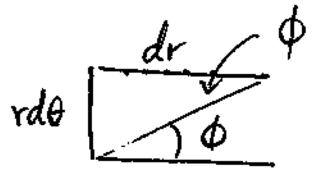
$$z' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{f(1,y/x)}{x} - \frac{1}{x}\cdot\frac{y}{x} = \boxed{\frac{f(1,z)-z}{x}} \quad y$$

es una ecuación de variables separables (pero a veces una ecuación de variables separables NO ES INTEGRABLE).



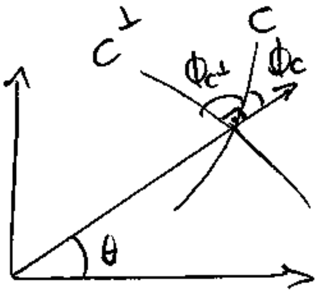


casi recto
(infinitesimal)



$$\tan\phi = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r}{r'}$$

$$\left(r' = \frac{dr}{d\theta}\right)$$



$$\phi_{C^\perp} = \frac{\pi}{2} + \phi_C$$

$$\tan(\phi_{C^\perp}) = \frac{-1}{\tan(\phi_C)} = \frac{-r}{h(r,\theta)}$$

$$\tan(\phi_{C^\perp}) = \frac{r}{r'}$$

$$\Longrightarrow r' = -\frac{r^2}{h(r,\theta)}$$

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN 1

Ejemplo

$x' = x + t \quad (x'(t) = x(t) + t)$

① $x' = x$ (es de variables separables)

una solución: e^t

② $(e^{-t}x)' \underset{(ec)}{\overset{\text{ecuación}}{=}} -e^{-t}x + e^{-t}x' = e^{-t}(-x + x') \overset{x'=x+t}{=} te^{-t}$

$y(t) = e^{-t}x(t)$

$y'(t) = te^{-t}$

$$y(t) = \int te^{-t}\,dt = \int t\,d(-e^{-t}) =$$

$$= -t.e^{-t} + \int e^{-t}\,dt = -te^{-t} - e^{-t} + c$$

con c constante

es decir, $e^{-t}x(t) = c + e^{-t}(-1-t)$

es decir, $\boxed{x(t) = ce^t - 1 - t}$

Comentarios:

1. $-1-t$ es una solución de (ec) ("una solución particular")

   Corresponde a tomar $c = 0$.

2. e^t es solución de la "ecuación homogénea" $x' = x$.

3. Esa ecuación homogénea es lineal, e.d.
   - la suma de soluciones de esa ecuación es también solución $\left(\begin{matrix} x' = x \\ y' = y \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x+y)' = x+y \Big)$
   - si $x(t)$ es solución entonces $\lambda x(t)$ es solución para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Todas las soluciones de $x' = x$ (la homogénea) son $x(t) = ce^t$.

5. $x(t) = ce^t + (-1-t)$ dice que:

   la solución general a (ec) es igual a una solución particular $(-1-t)$ más la solución general de la homogénea.

En general:

$$x'(t) = \alpha(t)\, x(t) + \beta(t) \quad , \alpha, \beta \text{ continuas}$$

La ecuación homogénea asociada es: $x'(t) = \alpha(t)\, x(t)$

Es lineal: suma de soluciones es solución.

$$\left. \begin{matrix} x_1'(t) = \alpha(t)\, x_1(t) \\ x_2'(t) = \alpha(t)\, x_2(t) \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x_1 + x_2)' = \alpha\,(x_1 + x_2)$$

y si $x(t)$ es solución, también lo es $\lambda x(t)$.

Observación: Si sumo soluciones de (ec) obtengo

$$(x_1 + x_2)' = \alpha\,(x_1 + x_2) + 2\beta$$

¿Cuál es la solución general en este caso?

① $x'(t) = \alpha(t)\, x(t)$

Si $A(t)$ cumple $A'(t) = \alpha(t)$ entonces $x(t) = e^{A(t)}$ que verifica que $x' = \underbrace{e^{A(t)}}_{x} \cdot \underbrace{A'(t)}_{\alpha(t)}$, e.d., $x' = \alpha(t)\, x$ ✓

si $x' = \alpha x + \beta$ $\quad A' = \alpha$

② $\left(e^{-A(t)} x\right)' = \left(e^{-A} x' - e^{-A} \cdot A' \cdot x\right) = e^{-A}(x' - \alpha x) = e^{-A}\beta$

$\Rightarrow \left(e^{-A} x\right)' = e^{-A(t)} \beta(t)$

Integrando:

$$e^{-A(t)} x(t) = \int e^{-A(t)} \beta(t)\, dt$$

PROPOSICIÓN: Supongamos que α, β son funciones continuas en $[a,b]$ $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Sean: $A(t) \overset{\text{def.}}{=} \int_a^t \alpha(u)\, du$

$$H(t) = \int_a^t e^{-A(u)} \beta(u)\, du$$

Entonces:

① $x(t)$ verifica $x'(t) = \alpha(t)\, x(t) + \beta(t)$ para todo $t \in [a,b]$ $\Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $x(t) = H(t) e^{A(t)} + c\, e^{A(t)}$

② Dado $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists!\, c$ tal que $x(t) = c\, e^{A(t)} + e^{A(t)} H(t)$ es solución del P.V.I.

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t)\, x(t) + \beta(t) & t \in [a,b] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

demostración

① es el cálculo que acabamos de hacer

② $x_0 = x(t_0) = c\, e^{A(t_0)} + e^{A(t_0)} H(t_0) \longrightarrow \exists!\, c$ pues $e^{A(t_0)} \neq 0$. ∎

Observación: hemos visto que para el P.V.I. $\begin{array}{l} x' = \alpha(t)x + \beta(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}$

existe solución y es única.

VISTO:

(ecuación lineal) $x' \overset{(EL)}{=} \alpha(t)x + \beta(t) \quad t \in [a,b], \ \alpha, \beta$ continuas

① $x' \overset{(ELH)}{=} \alpha(t)x$ (ecuación lineal homogénea asociada a (EL))

x_1, x_2 son soluciones de (ELH) en $t \in [a,b]$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces $\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$ es solución de (ELH), e.d., el conjunto de soluciones de (ELH) es un espacio vectorial.

Además si $A(t)$ es una primitiva de $\alpha(t)$ (e.d. $A' = \alpha$; existe por el T^ma^ Fundamental del Cálculo; por ejemplo $\int_a^t \alpha(u)\,du$ A es C^1) entonces todas las soluciones de (ELH) son las de la forma $\lambda e^{A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (el espacio vectorial de soluciones de (ELH) tiene dimensión 1 y $e^{A(t)}$ es una base).

② Si x_1, x_2 son soluciones de (EL), entonces $x_1 - x_2$ es solución de (ELH) y por tanto de la forma $\lambda e^{A(t)}$.

Para encontrar todas las soluciones de (EL) basta encontrar una, $\bar{x}(t)$, con esta, se encuentran todas las soluciones de (EL) por:

$$\boxed{\underbrace{x(t)}_{\substack{\text{solución}\\ \text{general}\\ \text{de (EL)}}} = \underbrace{\bar{x}(t)}_{\substack{\text{solución}\\ \text{particular}}} + \underbrace{\lambda e^{A(t)}}_{\text{solución general de la homogénea}}} \qquad (x = \bar{x} + \lambda e^{A})$$

Por ejemplo, $\bar{x}(t) = e^{A(t)} \int_0^t \beta(u)\, e^{-A(u)}\, du$ es una solución particular.

③ Si $t_0 \in [a,b]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces el P.V.I. :

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta & \text{en } [a,b] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución y es única

(λ tal que $x_0 = \bar{x}(t_0) + \lambda e^{A(t_0)}$)

TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

$$\text{VI)} \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \left(x'(t) = f(t, x(t)) \right)$$

Proposición ($T^{\underline{ma}}$ ex. y unic. versión global)

Sea $f : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1 y tal que $\overset{\frac{\partial f}{\partial x}}{\overbrace{f_x}}$ es acotada, e.d., $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que $|f_x(t,x)| \leq L$ $\forall t \in [a,b]$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sea $t_0 \in [a,b]$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces el (PVI):

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene solución y es única.

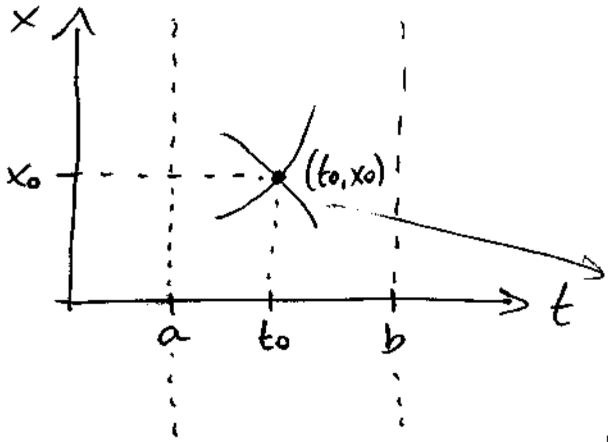
($x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1 y tal que (PVI))

(demostración $\longrightarrow$ cuando lo hagamos en $\mathbb{R}^n$).

Observación: En el caso de (EL), $f(t,x) = \alpha(t) x + \beta(t)$ y $f_x(t,x) = \alpha(t)$ ($|\alpha(t)| \leq L$ continua en un compacto).

Comentarios

① Visual



no puede haber dos soluciones del (PVI) como las del dibujo

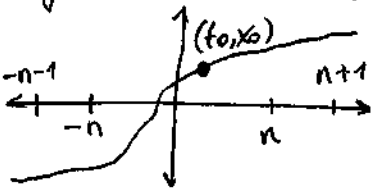
$\rightarrow$ No se pueden cruzar/toc

Es decir, considerando el gráfico como un subconjunto del plano, dos de esos subconjuntos, o son coincidentes o son disjuntos.

② Si $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple $|f_x| \leq L$ entonces el

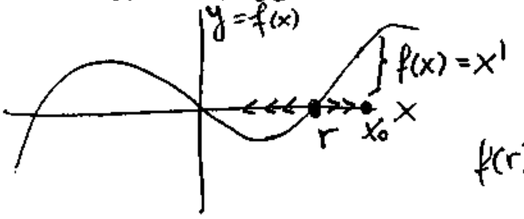
(PVI) $\begin{cases} x' = f(t,x) & \text{en } t\in\mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ tiene solución y es única.

Razón: tomar $[a,b] = [-n,n]$ y hacer que $n\to\infty$



③ Por ejemplo, para las ecuaciones autónomas:

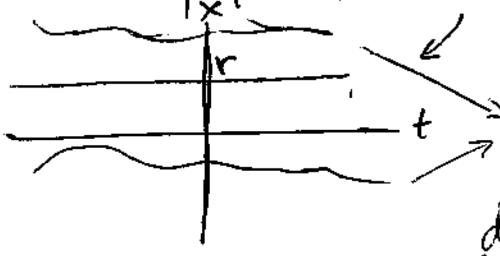
$x' = f(x)$
$x(t_0) = x_0$



$f(r)=0 \Rightarrow x_1(t) \equiv r$ es solució

porque $x_1'(t) = 0 = f(r) = f(x_1(t$

$\boxed{x_1(t_0) = r}$

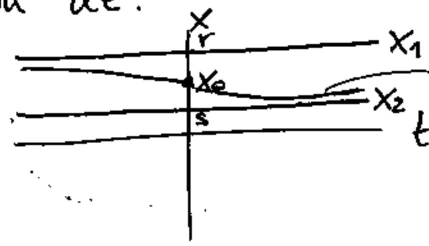


no cruzar r

debido a la unicida

$x_2(t) \equiv s$ es solución de:

$x_2' = f(x_2)$
$x_2(t_0) = s$



no puede tocar/cruzar s por razones de la unicidad!

$x' = f(x)$
$x(t_0) = x_0$

<u>Pregunta</u> (respuesta próximamente)

Supongamos que $x(t)$ resuelve $x' = f(x)$ y $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} a$

¿Es $f(a) = 0$?

Ejemplo:

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in [-2,2]$$

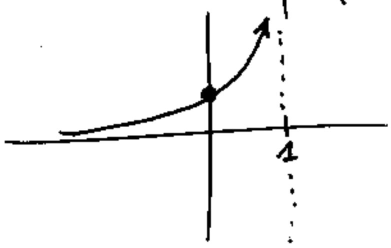
No tiene solución

Razón: $\frac{dx}{dt} = x^2 \longrightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int dt = t + c \Rightarrow \frac{-1}{x} = t + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-1}{t+c}$$

Como $x(0) = 1 \rightsquigarrow c = -1$

$x(t) = \frac{1}{1-t}$ pero esto no es solución en $[-2,2]$ porque no está definida en $t = 1$.



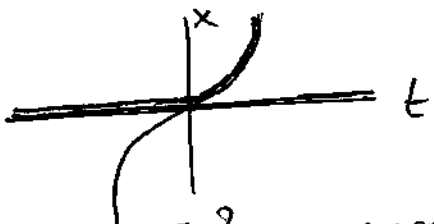
$f(t,x) = x^2$

$f_x = 2x$ que NO está acotada en $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: $\begin{cases} x' = x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1(t) \equiv 0$ es solución

variables separables

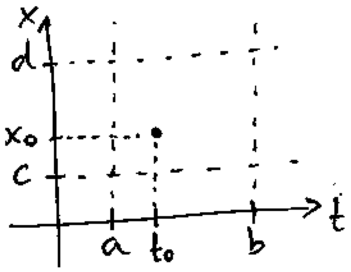
$\Longrightarrow x_2(t) = \left(t/3\right)^3$



¿Cómo conseguir otra solución? $\rightarrow$ coger un cacho de cada una. (en rojo)

PROPOSICIÓN (1ª de existencia y unicidad LOCAL)

Sea $f: [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, y sean $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in (c,d)$



① EXISTENCIA

$\exists \delta > 0$ y $x: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1

y tal que x es solución del PVI:

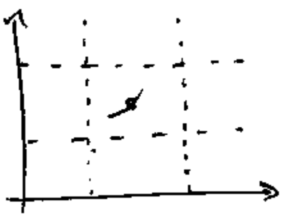
$$\begin{cases} x' = f(t,x) & |t - t_0| < \delta \\ x(t_0) = x_0 & (\delta < \min(t_0 - a, b - t_0)). \end{cases}$$

② UNICIDAD: Si $x_1(t)$, $x_2(t)$ son C^1 en un intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ y satisfacen

$$\begin{cases} x_i'(t) = f(t, x_i(t)), & |t - t_0| < \varepsilon \\ x_i(t_0) = x_0 & (\varepsilon < \min(t_0 - a, b - t_0)) \end{cases}$$

Entonces $x_1(t) = x_2(t)$ $\forall t$ tal que $|t - t_0| < \varepsilon$.

Comentarios

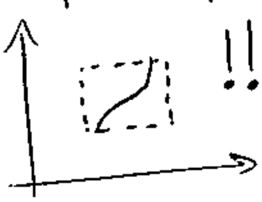
(i) 

una única solución para cada punto en el rectán

NO $\longrightarrow$ 

(ii) Otra forma de expresar la unicidad es: si dos soluciones de $x' = f(t,x)$ coinciden en un punto $(x_1(t_0) = x_2(t_0))$, entonces coinciden en un intervalo alrededor de ese punto.

(iii) ¿qué puede pasar para que la solución no exista en todo $[a,b]$



!! $\Longrightarrow$

$\longrightarrow$ se puede "prolongar" la solución

(iv) No es necesario suponer que f es C^1.

Existencia $\longrightarrow$ basta con que f sea continua

Unicidad $\longrightarrow$ basta que f_x exista y sea continua (incluso men

REGULARIDAD

$\rightarrow [a,b]\times[c,d] \longmapsto \mathbb{R}$ continua

① $x'(t) = f(t, x(t))$ es un intervalo, f continua y x derivable, entonces:

- x derivable $\Rightarrow$ x continua
- $\left.\begin{array}{l} x(t) \text{ continua} \\ f(t,x) \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow f(t, x(t))$ es continua $\Rightarrow x'(t)$ continua

  es decir, x es C^1.

② Si $f(t,x)$ es C^1 entonces $f(t, x(t))$ es C^1 pues

$$\frac{d}{dt}\Big(f(t, x(t))\Big) = \underbrace{f_t(t, x(t))}_{\text{continua pq } f\ C^1} + \underline{f_x(t, x(t))} \cdot \underbrace{x'(t)}_{\substack{\text{continua} \\ \text{por ①}}}$$

Por tanto $x''(t) = \frac{d}{dt}\big(x'(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(f(t, x(t))\big)$, que es continua.
Es decir x es C^2.

③ Continuando de esta forma, si f es C^k, entonces x es C^{k+1}.

ECUACIONES EXACTAS

Supongamos que y está definida implícitamente por $g(x,y) = cte$ con g C^1.

$g(x, y(x)) = cte$ Si derivamos con respecto a x:

$g_x(x, y(x)) + g_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$, e.d., $y(x)$ resuelve:

$$y' = \frac{-g_x(x,y)}{g_y(x,y)} \quad \text{(EDO)}$$

A esto se le puede dar la vuelta si $y(x)$ verifica la (EDO) entonces $g(x, y(x)) \equiv cte$. (en intervalos) pues $\frac{d}{dx}\big(g(x, y(x))\big) = 0$

¿cómo reconoces ecuaciones de este tipo? ($\rightarrow$ "ecuaciones exactas")

Notación habitual: $\frac{dy}{dx} = \frac{-g_x}{g_y} \Rightarrow g_x\,dx + g_y\,dy = 0$

Supongamos que tenemos una ecuación $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, e.d., $M.dx + N.dy = 0$. ¿Cuándo existe $g(x,y)$ tal que $\begin{matrix} M = g_x \\ N = g_y \end{matrix}$, e.d cuándo es exacta?

(En este caso la solución es $g(x,y) = c$ en forma implícita).

Ejemplo: $y' = \frac{-y}{x}$ e.d. $ydx + xdy = 0$ es exacto

$g(x,y) = xy$ $\quad g_x = y,\ g_y = x \longrightarrow$ solución $xy = c$, e.d., $y = \frac{c}{x}$

CONDICIÓN NECESARIA: Si $Mdx + Ndy$ es exacta, y la g correspondiente es C^2, entonces $M_y = N_x$.

Razón: Exacta $\Rightarrow \exists g$ tal que $M = g_x$ y $N = g_y$. Entonces

$M_y = (g_x)_y$; $N_x = (g_y)_x \Rightarrow g_{xy} = g_{yx}$ iguales porque $g \in \mathcal{C}^2$.

$\Rightarrow M_y = N_x$ ∎

Comentario: $(M,N) = \nabla g$; $\int_\gamma Mdx + Ndy = g(\text{final}) - g(\text{inicial})$

EXISTENCIA: $Mdx + Ndy = 0$ ¿$\exists g$ tal que $g_x = M,\ g_y = N$?

Notación: $M + N\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N}{M}$$

Condición necesaria: $M_y = N_x$

Ejemplo: $\underbrace{(y + x^3)}_{M}dx + \underbrace{(x + y^3)}_{N}dy = 0$ (E1) $\quad M_y = N_x = 1$ ✓

¿g? $\quad g_x = M = y + x^3$ Integrando en x (suponiendo y constante)

$$g = yx + \frac{x^4}{4} + c(y)$$

$$g_y = N = x + y^3 = \left(yx + \frac{x^4}{4} + c(y)\right)' = x + c'(y)$$

$$\Rightarrow \cancel{x} + y^3 = \cancel{x} + c'(y) \Rightarrow c'(y) = y^3 \Rightarrow c(y) = \frac{y^4}{4}\ (+\text{cte.})$$

$\Rightarrow \quad g(x,y) = xy + \frac{x^4+y^4}{4}$ función

e.d., las soluciones de $(E1)$ vienen dadas implícitamente por

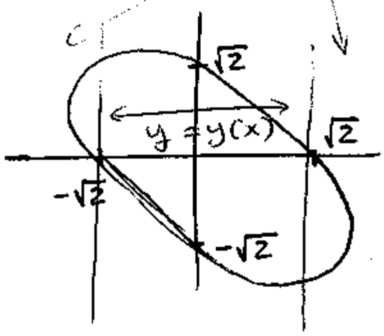
$$xy + \frac{x^4+y^4}{4} = \underbrace{c}_{\text{constante}}$$

x como función de y

c

<u>$c=1$</u>

$$xy + \frac{x^4+y^4}{4} = 1$$



<u>Recordatorio</u>

<u>PROPOSICIÓN</u>: Sea Ω un abierto, simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$.
Sean $M, N: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1. Entonces:
$\exists g: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ C^2 tal que $M = g_x$, $N = g_y$ en $\Omega \iff$
$\iff M_y = N_x$ en Ω.

Simplemento conexo $\rightsquigarrow$ "no tiene agujeros"
Si Ω es acotado. Simplem. conexo $\iff \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ es conexo

<u>Consecuencia</u>: En rectángulos $(a,b) \times (c,d)$ funciona!

FACTORES INTEGRANTES

$$M dx + N dy = 0 \qquad M_y \neq N_x$$

$\Updownarrow$ si $\mu(x,y) \neq 0$ "$\forall (x,y)$" $\longrightarrow$ en la zona en que estamos trabajando

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

Intentamos buscar $\mu(x,y)$ tal que $(\mu M)_x = (\mu N)_y$.

Una μ que cumpla eso es un factor integrante de $Mdx + Ndy =$

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} + (M_y - N_x)\mu = 0$$

$$\left(M \frac{\partial}{\partial y} - N \frac{\partial}{\partial x}\right)\mu + (M_y - N_x)\mu = 0$$

Habitualmente se intenta que μ solamente dependa de una de las 2 variables, es decir $\mu(y)$ o $\mu(x)$.

Ejemplo

$$\underbrace{xy}_{M}dx + \underbrace{y^2}_{N}dy = 0 \quad (E)$$

$M_y = x \neq N_x = 0 \implies$ no es exacta ¿factor integrante?

Intentar encontrar μ que dependa solo de una variable

① $\mu = \mu(x)$? $\longrightarrow \mu M dx + \mu N dy = 0$

e.d. $\mu(x)\, xy\, dx + \mu(x)\, y^2 dy = 0$

$$(\mu(x)\, xy)_y \overset{??}{=} (\mu(x)\, y^2)_x$$

$$\mu(x)\, x \overset{??}{=} \mu'(x)\, y^2$$

la igualdad equivale a $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \dfrac{x}{y^2}$

¡IMPOSIBLE! depende de y también

$\mu(y)$?

$$\left(\mu(y)\,xy\right)_y \overset{??}{=} \left(\mu(y)\,y^2\right)_x$$

$$\mu'(y)xy + x\mu(y) \overset{??}{=} 0$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{-1}{y} \Rightarrow \text{Integrando} \Rightarrow \left(\log|\mu|\right) = -\log|y|$$

$$\Rightarrow \mu(y) = \frac{1}{y} \quad \text{es solución}$$

es decir, (E) equivale a: $x\,dx + y\,dy = 0$

$$\boxed{\frac{x^2+y^2}{2} = c} \Rightarrow x^2 + y^2 = \tilde{c}$$

Comentario

Le ecuación lineal de 1^{er} orden $y' = a(x)\,y + b(x)$

con $A(x)$ tal que $A'(x) = a(x)$ $\left(e^{A(x)}\right)$

$e^{-A(x)}$ es un factor integrante de $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$.

Ejemplo: $y'(x) = \underbrace{x^3}_{b(x)} \underbrace{-2x}_{a(x)} y(x)$ "solución general" $\equiv$ todas las soluciones

① Buscamos solución general de la homogénea: $y' = -2xy$

Variables separables: $\frac{dy}{dx} = -2xy \to \frac{dy}{y} = -2x\,dx \xrightarrow{\text{integrar}} y(x) = ce^{-x^2}$

② Usando e^{-x^2} (una solución de ①) volvemos a $y' = x^3 - 2xy$

$$x^3 = y' + 2xy$$

$$z(x) = e^{-(-x^2)}\,y = e^{x^2}y$$

$$z' = 2xe^{x^2}y + e^{x^2}y' = e^{x^2}(2xy + y') = e^{x^2}x^3$$

$$z(x) = \int \underbrace{x^3 e^{x^2}}_{\frac{x^2}{2}\underbrace{2xe^{x^2}}_{d(e^{x^2})}}dx = \frac{x^2-1}{2}e^{x^2} + c$$

$$e^{x^2}y$$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{\frac{x^2-1}{2}}_{\text{sol. particular}} + \underbrace{ce^{-x^2}}_{\text{Solución general de la ec. homogénea}}$$

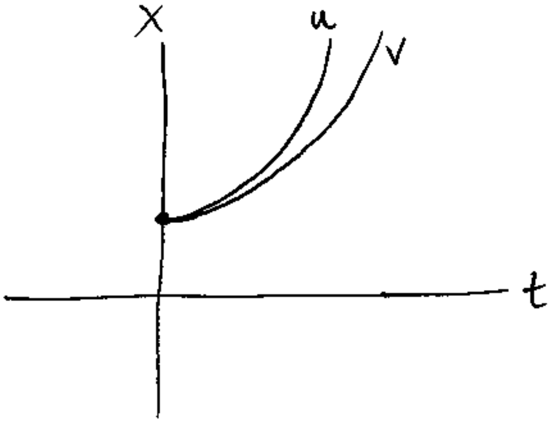
Pregunta jueves 7:

(1) $\begin{cases} x' = t^2 + x^2 = f(t,x) \\ x(0) = 1 \end{cases}$ Campos de pendientes parecían indicar $x(t) \nearrow \infty$ en $t=1$ o antes ¿es cierto?

$|f_x| \leq L$ no se cumple

Vamos a comparar la solución de (1) con la de (2) $\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Sea $u(t)$ la solución de (1) y $v(t)$ la solución de (2).



En $t=0$ tiene la misma pendiente (pendiente = 1).

¿podemos comparar cuatitativamente u y v?

Sea $z(t) = u(t) - v(t)$

Puedo conseguir $z(t) \geq$?

$$z'(t) = u'(t) - v'(t) = t^2 + u^2 - v^2 = t^2 + (u-v)(u+v) =$$
$$= t^2 + (u+v)z \qquad \left(\begin{array}{c}\text{en } 0 \text{ son } 1 \text{ y } u', v' > 0 \\ \text{en } t>0\end{array}\right)$$

Pero $u(t) \geq 1$, $v(t) \geq 1$ si $t \geq 0$

e.d., $z' \geq 2z + t^2 \Rightarrow z' - 2z \geq t^2$

$$w(t) = e^{-2t} z(t)$$
$$w' = -2e^{-2t} z(t) + e^{-2t} z'(t) =$$
$$= e^{-2t} \underset{\substack{\vee\!/ \\ t^2}}{(z' - 2z)} \geq e^{-2t} t^2$$

$$\left.\begin{array}{l} w'(t) \geq t^2 \\ w(0) = z(0) = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow w(t) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{w(0)}} + \int_0^t w'(s)\,ds \geq$$

$$\geq \int_0^t s^2 e^{-2s}\,ds = -e^{-2s}\left(\frac{2s^2 + 2s + 1}{4}\right)\Bigg|_0^t$$

$w'(s) \geq s^2 e^{-2s}$

e.d. $\underset{e^{-2t}\cdot z(t)}{\underset{\shortparallel}{w(t)}} \geq \frac{1}{4} - e^{-2t}\left(\frac{2t^2 + 2t + 1}{4}\right)$

e.d. $$\underset{u-v}{\underset{\shortparallel}{z(t)}} \geq \frac{e^{2t} - (2t^2+2t+1)}{4}$$

$$u(t) \geq \underset{\frac{1}{1-t}}{\underset{\shortparallel}{v(t)}} + \frac{e^{2t} - (1+2t+2t^2)}{4}$$

$\leftarrow$ hecho anteriormente

Consecuencia: como $v(t) \nearrow \infty$ cuando $t \to 1$, $u(t) \nearrow \infty$ en $t=1$ o antes.

Ejercicio: encontrar otra ecuación que sea sencilla de resolver para obtener $u(t) \leq$ algo.

ECUACIONES DE 2º ORDEN $\quad x'' = f(t, x, x')$

Observación: $x'' = 5x'$ es de orden 2 solo formalmente.

Con $y(t) = x'(t)$ se convierte en $y' = 5y \rightarrow y = ce^{5t} \rightarrow$ ("x'")

$\rightarrow x(t) = \int ce^{5t}dt = a + \frac{c}{5}e^{5t} = a + be^{5t}$

¿Cómo se determinarían a y b?

P.V.I: $\begin{cases} x'' = 5x' \\ x(0) = 1 \longrightarrow a+b = 1 \\ x'(0) = 0 \longrightarrow b = 0 \end{cases} \longrightarrow a = 1 \longrightarrow x(t) \equiv 1$

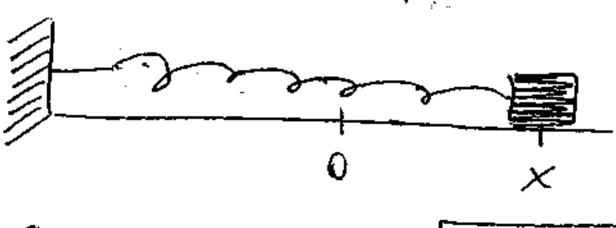
Fuente de ejemplos $\longrightarrow F = ma$ donde $a = x''(t)$.

Ejemplo: muelles (oscilador armónico)

si $x = 0$ corresponde a la situación de equilibrio (e.d. todo "parado")

Si suponemos que:

- Sin fricción
- Movimientos pequeños desde el equilibrio



$F = -Kx$ (constante del muelle)

Como $F = ma \Rightarrow \boxed{mx'' = -Kx}$ ¿Soluciones?

$mx'' = -Kx \Rightarrow x'' = \frac{-Kx}{m}$

$y(t) = x(at)$ (a diferente a la aceleración para "esconder" el $\frac{K}{m}$)

$y''(t) = a^2x''(at) = a^2\left(\frac{-K}{m}x(at)\right) = \frac{-K}{m}a^2y(t)$

Eligiendo $a = \sqrt{\frac{m}{K}}$ tenemos $y'' = -y \longrightarrow$ sen$t$, cos$t$ son soluciones.

Además, $y'' = -y$ es lineal: $y_1(t)$, $y_2(t)$ son soluciones, entonces $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$ es solución.

Entonces con $y_1 = $ sen, $y_2 = \cos \Rightarrow \alpha_1 \operatorname{sen}(t) + \alpha_2\cos(t)$ es solución.

Pregunta: ¿esas son todas? Sí (debido al siguiente teorema)

PROPOSICIÓN: (T^{ma} existencia GLOBAL y unicidad para ec. lineales 2º ord)

Se considera la ecuación $x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t)$

con $p, q, r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas.

Sean $t_0 \in [a,b]$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.

Entonces existe una única solución al PVI:

$$\begin{cases} x'' + px' + qx = r, & t \in [a,b] \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

Consecuencia: $y(t) = \alpha \operatorname{sen}(t) + \beta \cos(t)$ son todas las soluciones a $y'' = -y$.

Razón: Dados cualquier y_0, y_1, $\exists \alpha, \beta$ tal que $y_{\alpha,\beta}(t) : \alpha \operatorname{sen} t + \beta \cos t$ cumple

$$\begin{matrix} y_{\alpha,\beta}(0) = y_0 \\ y_{\alpha,\beta}(0) = y_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha = y_1 \\ \beta = y_0 \end{pmatrix}$$

En el momento que sepamos el valor $y(0), y'(0) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y(t) = y(0) \cdot \cos t + y'(0) \operatorname{sen} t$

$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ $\quad p, q$ continuas en $[a,b]$

PROPIEDADES:

① Es lineal: el conjunto de soluciones es un espacio vectorial (x_1, x_2 sol's, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ es solución).

② Ese espacio vectorial tiene dimensión.

demostración: ① como en el ejemplo.

② Sea x_1 la solución del PVI $\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \\ x(a) = 1 \\ x'(a) = 0 \end{cases}$

y sea $x_2(t)$ la solución pero con $\begin{cases} x(a) = 0 \\ x'(a) = 1. \end{cases}$

Por existencia y unicidad $\longrightarrow$ x_1, x_2 existen en $[a,b]$.
Además ninguna es un múltiplo de la otra (e.d. son "linealmente independientes"), pues: cualquier $x = \alpha x_1$ cumple $x'(a) = 0$ pero $\underset{1}{\underset{\parallel}{x_2'(a)}} \neq 0$ & cualquier $x = \beta x_2$ cumple $x(a) = 0$ pero $x_1(a) = 1 \neq 0$.

Consecuencia: la dimensión del espacio de soluciones es, al menos, 2.

Que es exactamente 2, se sigue de que dada cualquier solución, $x(t)$, de la ecuación $x(t) = x(a)\, x_1(t) + x'(a)\, x_2(t)$.
Por unicidad, lo de la derecha es solución con
$\begin{cases} \text{valor en } a \text{ igual a } x(a) \\ \text{derivada en } a \text{ igual a } x'(a) \end{cases}$

<u>Observación</u>: para resolver $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ basta encontrar dos soluciones linealm. independientes.

<u>ECUACIÓN DE ORDEN 2 COMO SISTEMAS</u>

$$x'' = f(t, x, x')$$

Sea $y = x'$ $\quad (y(t) = x'(t))$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \overset{y}{x'(t)} \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ f(t, x, y) \end{bmatrix}$$

$$y' = x'' = f(t, x, \overset{y}{\overset{\parallel}{x'}})$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \longrightarrow X'(t) = F(t, X)$$

PROPOSICIÓN (ESTRUCTURA DE SOLUCIONES DE LA EDO $x''+p(t)x'+q(t)x=r(t)$)

① El conjunto de soluciones de la EDO homogénea ($x''+px'+qx=0$) es un espacio vectorial de dimensión 2. Es decir, existen dos soluciones linealmente independientes, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, y todas las demás soluciones son las de la forma $\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Un tal par se obtiene, por ejemplo, resolviendo los PVI:

$$\begin{cases} x''+p(t)x'+q(t)x=0 \\ x(t_0)=1 \\ x'(t_0)=0 \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} x''+p(t)x'+q(t)x=0 \\ x(t_0)=0 \\ x'(t_0)=1 \end{cases}$$

② Si $x_p(t)$ particular es una solución de $x''+p(t)x'+q(t)x=r(t)$ entonces cualquier solución se escribe como:

$x(t)=x_p(t)+\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)$ con x_1, x_2 como en ①

y todas esas son soluciones.

Comentarios:

i) SIEMPRE suponemos que $p(t), q(t), r(t)$ son continuas en un intervalo $[\alpha, \beta]$ (y el de ① está en él).

ii) El procedimiento habitual es resolver primero la homogénea y luego buscar una solución particular.

iii) ② dice "solución general de la EDO" = una sol. particular + sol. general homogénea

demostración

① Visto ayer a partir de existencia y unicidad.

② Si $x(t)$ resuelve la EDO entonces $x(t)-x_p(t)$ resuelve la EDO homogénea asociada. Por tanto $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t)-x_p(t)=\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)$. ∎

Ejemplo: EC. LINEAL DE ORD. 2 CON COEF. CONSTANTES

$x'' + ax' + bx = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad (p(t) = a \ \& \ q(t) = b)$

Supongamos este ejemplo: $x'' + 3x' + 2x = 0$

Intentamos $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Que sea solución quiere decir que $(\lambda^2 + 3\lambda + 2)e^{\lambda t} \equiv 0$ (idénticamente), entonces $e^{\lambda t}$ es solución si y solo si $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, es decir, $\lambda = -1$ ó $\lambda = -2$.

$\Rightarrow x_1(t) = e^{-t}$, $x_2(t) = e^{-2t}$ son soluciones

Linealmente independientes $\Rightarrow x(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-2t}$ es la solución general.

En general: $x'' + ax' + bx = 0$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$e^{\lambda t}$ solución $\Longleftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

- Casos: Las soluciones las llamamos λ_1, λ_2

① $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reales $(a^2 - 4b > 0)$

$x_1 = e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = e^{\lambda_2 t}$ son linealm. indep. ✓

② $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $(a^2 - 4b < 0)$

Como los coeficientes a, b son reales $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

Si $\lambda_1 = \mu + i\omega$ $\quad (\lambda_2 = \mu - i\omega)$ con $\omega \neq 0$ $\quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\mu t + i\omega t} = e^{\mu t} e^{i\omega t} = e^{\mu t}\big(\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)\big) =$$

$(\mu, \omega \in \mathbb{R})$ $$= e^{\mu t}\cos(\omega t) + i e^{\mu t} \operatorname{sen}(\omega t)$$

Afirmación: $\begin{array}{l} x_1(t) = e^{\mu t}\cos(\omega t) \\ x_2(t) = e^{\mu t}\operatorname{sen}(\omega t) \end{array}$ son soluciones (y lin. indep.)

$x(t) = u(t) + iv(t)$, u, v reales

$$\underset{0}{\underset{\|}{x'' + ax' + bx}} = \underset{0}{\underset{\|}{(u'' + au' + b)}} + i\underset{0}{\underset{\|}{(v'' + av' + b)}}$$

$\Longleftrightarrow$ ... y ...

③ $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$

Ejercicio: $x_2(t) = t e^{\lambda_1 t}$ es también solución (y lin. indep. de x_1)

→ caso ②

Otro ejemplo: $x'' + x' + x = 0$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\mu = -\frac{1}{2} \quad , \quad \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1(t) = e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad , \quad e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Ejemplo caso ③: $x'' + 2x' + x = 0$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Otro ejemplo: $x'' + 3x' + 2x = te^t$

Obs:

$$x = e^{\gamma t} pol(t) \Longrightarrow x' = e^{\gamma t} \widehat{pol}(t) \Longrightarrow x'' = e^{\gamma t} \hat{\hat{pol}}(t)$$

Intentamos: $x(t) = e^t(\alpha + \beta t) \longrightarrow x' = e^t(\alpha + \beta + \beta t) \longrightarrow$

$\longrightarrow x'' = e^t(\alpha + 2\beta + \beta t)$

$$x'' + 3x' + 2x = e^t(\alpha + 2\beta + \beta t) + 3e^t(\alpha + \beta + \beta t) + 2e^t(\alpha + \beta t) =$$

$$= e^t\big(\alpha + 2\beta + \beta t + 3(\alpha + \beta + \beta t) + 2(\alpha + \beta t)\big) =$$

$$= e^t(6\beta t + 6\alpha + 5\beta) \quad [1]$$

¿$[1] = e^t \cdot t$? $\Longrightarrow \begin{cases} 6\beta = 1 \\ 6\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$ fácil de resolver para α y β.

VISTO ANTERIORMENTE...

$$x'' + 3x' + 2x = te^{t}$$

$\hookrightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2$

Ejemplo: $x'' + 3x' + 2x = te^{-t}$

Intentamos $x(t) = e^{-t}(\alpha + \beta t + \gamma t^2)$ sobra (lo veremos) es necesario (como veremos)

$$x' = e^{-t}(-\alpha - \beta t - \gamma t^2 + \beta + 2\gamma t)$$

$$x'' + 3x' + 2x = e^{-t}(4\gamma + 2\beta + 2\gamma t)$$

α NO APARECE (e^{-t} es solución de la homogénea y esa parte da 0).

$$4\gamma + 2\beta = 0 \ , \ 2\gamma = 1 \longrightarrow \boxed{\gamma = \tfrac{1}{2}, \ \beta = -1}$$

es decir, $x(t) = e^{-t}(t - t^2/2)$ es una solución particular

Ejemplo: $x'' + 2x' + x = e^{-t}t$ ⊗

$x'' + 2x' + x = 0 \rightsquigarrow$ "$e^{\lambda t}$" $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = -1$ (doble)

$\Longrightarrow$ 2 soluciones independientes de la homogénea son e^{-t}, te^{-t}

Para buscar una solución particular de ⊗ tomamos

$$(\underbrace{\alpha + \beta t}_{\text{sobra}} + \gamma t^2 + \delta t^3)e^{-t} \rightsquigarrow \ldots$$

$\hookrightarrow$ por razones de multiplicidad

fijarse en el ejemplo anterior también

CLAVE

$x(t) = e^{\gamma t}\, pol(t) \implies x'(t)$ es del mismo tipo: $e^{\gamma t} \cdot \hat{pol}(t)$

¿Qué familias de funciones cumplen eso?

① $\boxed{e^{\gamma t} pol(t)}$, con $pol(t)$ un polinomio de cualquier grado.

CASO PARTICULAR: Si $\gamma = 0$ son simplemente polinomios.

② $\boxed{e^{\gamma t}\left(pol_1(t)\, sen(\alpha t) + pol_2(t) \cos(\alpha t)\right)}$

ALGUNAS OBSERVACIONES PARA EL CASO GENERAL PARA EC. LIN. ORDEN 2

$x'' + p(t)x' + q(t)x = r(x)$ con $p(t), q(t), r(t)$ continuas en un intervalo y por tanto tenemos existencia y unicidad para el P.V.I.:

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = r(x) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad t_0 \in [\alpha, \beta]$$

① Si se tiene una solución $x_1(t)$ de la homogénea $x'' + p(t)x' + q(t)x =$ y $x_1(t) \neq \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$ se puede encontrar una segunda, lin. indep. de la primera, de la forma $x_2(t) = u(t)\, x_1(t)$ con $u(t)$ apropiada

Razón:

Sea $x(t) = u(t)\, x_1(t) \implies x' = u'x_1 + ux_1' \implies x'' = u''x_1 + 2u'x_1' + ux_1''$

$$\implies x'' + p(t)x' + q(t)x = u(\underbrace{x_1'' + px_1' + qx_1}_{0}) + u'(2x_1' + px_1) + u''x_1$$

x_1 era solución de la homogénea

Entonces $u(t)x_1(t)$ es solución de la homogénea si y solo si $\boxed{u''x_1 + u'(2x_1' + px_1) = 0}$. Si llamamos $y(t) = u'(t)$ entonces

$$y' = \frac{-(2x_1' + px_1)y}{x_1} = -\left(\frac{2x_1'}{x_1} + p\right)y \implies \frac{dy}{y} = \int\left(\frac{-2x_1'}{x_1} + p\right)dt \implies$$

$$\implies y = \frac{e^{-P(t)}}{x_1^2(t)} \quad \text{donde } P'(t) = p(t)$$

Entonces: $u' = y = \dfrac{e^{-P(t)}}{(x_1(t))^2} = u(t) = \int \dfrac{e^{-P}}{x_1^2}$

una primitiva de

Afirmación: $x_2(t) = u(t)\, x_1(t)$ con $u(t)$ una primitiva de $\frac{e^{-\cdots}}{(x_1(t))\cdots}$ es solución de la homogénea (visto) y es lin. indep. de x_1.

Razón: basta ver que $u(t) \not\equiv$ constante.

$$u'(t) = \frac{e^{-P(t)}}{(x_1(t))^2} \neq 0 \quad (\forall t \in [\alpha,\beta])$$

$e^{-P(t)}$ ← positivo

entonces u no puede ser consta…

Si $t_0 \in [\alpha,\beta]$

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds$$

$$\int \frac{e^{-P}}{x_1^2} = \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-P(s)}}{(x_1(s))^2}\, ds \quad \blacksquare$$

(2) x_1, x_2 lin. indep., soluciones de la homogénea, se puede encontrar una solución particular de $x'' + px' + qx = r$ de la forma $u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$.

<u>RECUERDO</u>:

(*) $x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t)$ con p, q, r continuas en $[a,b]$

x_1, x_2 soluciones independientes de la homogénea (e.d. con $r(t)=0$) entonces se pueden encontrar $u_1(t)$, $u_2(t)$ tal que $x(t) = u_1x_1 + u_2x_2$ es una solución particular de (*)

Método llamado "Variación de las constantes".

<u>Razón</u>: (1) $x' = u_1x_1' + u_2x_2' + \underbrace{u_1'x_1 + u_2'x_2}_{1^{a}\text{ condición}} = 0$ (esto idénticamente cero)

(2) $x'' = (u_1x_1' + u_2x_2') = u_1x_1'' + u_2x_2'' + u_1'x_1' + u_2'x_2'$

Entonces $x'' + px' + qx = u_1\underbrace{(x_1'' + px_1' + qx_1)}_{= 0 \text{ porque } x_1 \text{ sol. homogénea}} + u_2\underbrace{(x_2'' + px_2' + qx_2)}_{= 0 \text{ porque } x_2 \text{ sol. h}} + u_1'x_1' + u_2'x_2'$

Es decir, 2^{a} condición: $u_1'x_1' + u_2'x_2' = r$

3) Juntando las condiciones: $u_1x_1 + u_2x_2$ es solución de $(*)$ si y solo si:

$$\begin{aligned} u_1'x_1 + u_2'x_2 &= 0 \\ u_1'x_1' + u_2'x_2' &= r \end{aligned} \quad , \text{e.d.,} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{notación} \\ \equiv \\ W(t)}} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} \qquad t \in [a,b]$$

4) Sea $w(t) = \det W(t)$ ("Wronskiano de x_1 y x_2")

EMA: Si x_1, x_2 son linealmente independientes entonces $w(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$

demostración

Si existe $t_0 \in [a,b]$ tal que $w(t_0) = 0$, entonces las columnas de $\begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes, e.d., una es múltiplo de otra, digamos que $\begin{bmatrix} x_2(t_0) \\ x_2'(t_0) \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_1'(t_0) \end{bmatrix}$

Entonces x_2 y cx_1 satisfacen las mismas condiciones iniciales y por unicidad de soluciones de (P.V.I)

$$\begin{aligned} x'' + px' + qx &= 0 \\ x(t_0) &= x_0 \\ x'(t_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \overset{\text{"}x_2(t_0)\text{"}}{x_0} = c\, x_1(t_0) \\ \underset{\text{"}x_2'(t_0)\text{"}}{y_0} = c\, x_1'(t_0) \end{pmatrix}$$

se tiene $x_2(t) = c\,x_1(t)$ $t \in [a,b]$

contradicción: x_1, x_2 son linealmente independientes

5) Por ④, $W(t)$ es invertible y $\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \quad u_1' = \frac{-x_2 r}{w} = \frac{-x_2(t)\, r(t)}{w(t)} \qquad u_2' = \frac{x_1 r}{w} = \frac{x_1(t)\, r(t)}{w(t)}$$

$u_1 \longrightarrow$ primitiva de $\frac{-x_2 r}{w}$ $\left(\text{por ej. } \int_a^t \frac{-x_2(s) r(s)}{w(s)} ds\right)$

$u_2 \longrightarrow$ primitiva de $\frac{x_1 r}{w}$ ~~(por ejemplo)~~ $\left(\text{por ejemplo } \int_a^t \frac{x_1(s) r(s)}{w(s)} ds\right)$

COMENTARIOS

(1)

LEMA 2: Si $w(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in [a,b]$ entonces x_1, x_2 son lin. indep.. Como consecuencia $w(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$.

demostración

Directamente, si $w(t_0) \neq 0$ entonces $\begin{bmatrix} x_2(t_0) \\ x_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq c \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_1'(t_0) \end{bmatrix}$ $\forall c$ const.

$\Longrightarrow x_2(t) \neq c\, x_1(t) \quad \forall c$ const.

demostración alternativa

Justificar, primero, que $w(t)$ satisface $w'(t) + p(t)w(t) = 0$ y, por tanto, $w(t) = w(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$

Esa expresión es siempre 0 ó siempre $\neq 0$. ∎

Observación:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}$$

(2) Este método también es útil para coeficientes constantes si $r(t)$ no es de las familias: exp$\cdot$ polin.

exp$\cdot$ (pol$_1$ sen + pol$_2$ cos)

) ~~Si~~ ~~x_1~~ Todo esto está enunciado en intervalos compactos. Truco de "llenar todo" incrementando los intervalos.

Ejemplos

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (hoja 3) con $x \in (-1,1)$

$2 \longleftarrow \nu(\nu+1)$ en general

Para $\nu \in \mathbb{N}$ siempre existe una (o infinitas) solución que es un polinomio de grado $\nu \longrightarrow$ polinomios de Legendre

$y_1(x) = x$ es solución

Encontrar todas las soluciones de la ecuación:

① Es homogénea $\rightsquigarrow$ basta encontrar $y_2(x)$ solución lin. indep. de y_1

② Buscamos $y_2(x) = u(x)y_1(x) = xu(x)$

y_2 es solución $\Longleftrightarrow \dfrac{u''}{u'} = \cancel{4x^2-2}\ \dfrac{4x^2-2}{x-x^3} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ ③ $\log|u'| = \displaystyle\int \frac{4x^2-2}{x-x^3}\,dx = \int \frac{3x^2-1}{x-x^3}\,dx + \underbrace{\int \frac{x^2-1}{x-x^3}\,dx}_{= -\frac{1}{x}}$

$\rightsquigarrow u = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$y_2 = -1 + \dfrac{x}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Obs: $y_2 = -1 + \dfrac{x}{2}\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ es solución en los dos intervalos de $|x|>1$. "Explota" en $x = \pm 1$

$y'' - \underbrace{\dfrac{2x}{1-x^2}}_{P} y' + \underbrace{\dfrac{2}{1-x^2}}_{Q} y = 0$

P, $Q \longrightarrow$ singulares en ± 1 (ni existen ahí)

__Ejemplo:__ Encontrar todas las soluciones de $\overset{ED}{y'' - y = e^{2x}}$ que cumplen $y(0) = 0$.

__Homogénea:__ $\overset{ED_h}{y'' - y = 0} \longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 1$

$\Longrightarrow y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones lin. indep. de $y'' - y = 0$

__Solución general de ED__ = sol. part ED + sol. general ED_h

↑ ya está obtenida

¿Solución particular ED? Variación de las constantes:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$\begin{array}{c} e^{x} \\ e^{x} \end{array} \begin{bmatrix} y_1 & \overset{e^{-x}}{y_2} \\ y_1' & \underset{-e^{-x}}{y_2'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{bmatrix} \leftarrow r(x) \Longrightarrow \begin{cases} e^{x}u_1' + e^{-x}u_2' = 0 \\ e^{x}u_1' - e^{-x}u_2' = e^{2x} \end{cases} \xrightarrow{+}$$

$$\xrightarrow{+} 2u_1'e^{x} = e^{2x} \Longrightarrow u_1' = \frac{e^{x}}{2} \Longrightarrow u_1 = \frac{e^{x}}{2} \text{ por ejemplo}$$

$$\Longrightarrow u_2'e^{-x} = -e^{x}u_1' = -\frac{e^{2x}}{2} \Longrightarrow u_2' = \frac{-e^{3x}}{2} \Longrightarrow u_2 = \frac{-e^{3x}}{6}$$

$$y_p = \underbrace{\frac{e^{x}}{2}}_{u_1}\underbrace{e^{x}}_{y_1} + \underbrace{\left(-\frac{e^{3x}}{6}\right)}_{u_2}\underbrace{e^{-x}}_{y_2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)e^{2x} = \frac{1}{3}e^{2x} \checkmark \text{ (por ejemplo)}$$

SOLUCIÓN GENERAL: $y = \dfrac{e^{2x}}{3} + c_1e^{x} + c_2e^{-x}$

$$0 = y(0) = \frac{1}{3} + c_1 + c_2 \Longrightarrow y = \frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{-x}}{3} + c_1(e^{x} - e^{-x})$$

$$c_2 = -\frac{1}{3} - c_1$$

$\longrightarrow$ despejar c_1, c_2

Pregunta: Solución general $y'' - y = e^{2x} + xe^{5x}$

OBSERVACIÓN: Si y_j es solución de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r_j(x)$, $j = 1, 2$
entonces $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ es solución de:
$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ donde $r(x) = \alpha_1 r_1(x) + \alpha_2 r_2(x)$

RESONANCIA

$$\left(\begin{aligned} mx'' &= -Kx \\ x'' &= \frac{-K}{m}x \end{aligned}\right)$$

- $x'' + \omega_0^2 x = 0$

(movimiento armónico simple
oscilador armónico) $\quad \omega_0 \neq 0$

Solución general: $x = a\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$ $\quad \left(\begin{aligned} &\text{periódica de periodo } \tfrac{2\pi}{\omega_0} \\ &\text{frecuencia} = \tfrac{\omega_0}{2\pi} \end{aligned}\right)$

uerza exterior periódica de comportamiento:

$$x'' + \omega_0^2 x = \cos(\omega t)$$

aso $\omega \neq \omega_0$

solución particular? probamos "$a\cos(\omega t)$"
($\cos(\omega t)$ NO es solución de la homogénea)

$\longrightarrow a = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$, e.d., la solución general de la ED es

$$\frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} + \alpha\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \beta\cos(\omega_0 t)$$

aso $\omega = \omega_0$ Ahora $\cos(\omega t) \equiv \underset{\uparrow}{1} \cos(\omega_0 t)$ es solución de la homogénea
1 pol. de grado 0

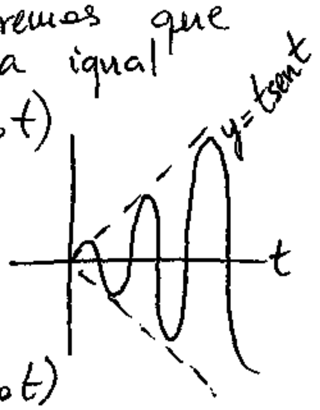
Intentamos una solución particular del tipo $x = at\cos(\omega_0 t) + bt\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$

...

$$x'' + \omega_0^2 x = 2\omega_0\left(-a\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)\right) \overset{?}{=} \cos(\omega_0 t)$$

queremos que sea igual

so requiere $a = 0$, $2\omega_0 b = 1$, e.d., $b = \dfrac{1}{2\omega_0}$



olución particular: $x_p(t) = \dfrac{t\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0}$

olución general: $x(t) = \dfrac{t\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0} + \alpha\cos(\omega_0 t) + \beta\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$

Comentarios

Es más "limpio" resolver las ecuaciones usando $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$ y luego separando parte real y imaginaria

$$\left(\begin{array}{l} x = e^{i\omega t} \longrightarrow x' = i\omega e^{i\omega t} \\ \quad ie^{-i\omega t} \qquad\quad x'' = (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t} \end{array} \right.$$

Pregunta:

$$x'' + \omega_0^2 x = \cos(\omega t) \quad (ED)$$

Para $\omega = \omega_0 \longrightarrow x_p = \dfrac{t\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0}$

Si $\omega \neq \omega_0$:

sol. de la homogénea

$$\underbrace{\frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2-\omega^2} - \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2-\omega^2}}_{\text{es solución de ED}}$$

$$\frac{1}{\omega+\omega_0}\cdot\frac{\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)}{\omega_0-\omega} \xrightarrow[\omega\to\omega_0]{} \frac{1}{2\omega_0} - \left.\frac{d}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \cos(\omega t)$$

$$= \frac{t\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0}$$

OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO

(Pensar en un muelle)

$$x'' = \underbrace{-\omega_0^2 x}_{\text{fuerza de remperación del muelle}} \quad \text{(oscilador armónico simple)}$$

Supongamos ahora que hay rozamiento $\rightsquigarrow$ fuerza que es proporcional a la velocidad (para velocidades no muy grandes) en dirección contraria al movimiento.

ojo: $\omega_0 > 0$, $\mu > 0$

$$x'' = -\omega_0^2 x - \mu x' \longrightarrow x'' + \mu x' + \omega_0^2 x = 0$$ ecuación lineal homogénea

Solución general $= C_1 y_1 + C_2 y_2$ con y_1, y_2 sol. lin. indep.

¿y_1, y_2? $\longrightarrow \lambda^2 + \mu\lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$\boxed{\text{caso } \frac{\mu}{2} > \omega_0}$

$$\lambda_\pm = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$y_1 = y_+ = e^{\lambda_+ t}$ $\quad \lambda_- < \lambda_+ < 0$

$y_2 = y_- = e^{\lambda_- t}$

$y_1(t), y_2(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \to \infty$

$\boxed{\text{caso } \frac{\mu}{2} = \omega_0}$

$\lambda_+ = \lambda_- = -\frac{\mu}{2}$ (raíz doble)

$y_1 = e^{-\frac{\lambda}{2}t}$, $\quad y_2 = te^{-\frac{\lambda}{2}t}$

$\boxed{\text{caso } \frac{\mu}{2} < \omega_0}$

$$-\frac{\mu}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2} = -\frac{\mu}{2} \pm i\omega_\mu$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{-\frac{\mu}{2}t}\cos(\omega_\mu t), \quad y_2 = e^{-\frac{\mu}{2}t}\operatorname{sen}(\omega_\mu t)$$

esto tiende a 0 cuando $t \to \infty$.

HOJA 3: ejercicio 13

Comentarios

$$x'' + \varepsilon x' + 4x = \text{sen}(\omega t) \qquad \varepsilon > 0 \text{ pequeño}$$

solución del tipo $\alpha\cos() + \beta\,\text{sen}()$

HOJA 3: ejercicio 14

$$y_1 \longrightarrow y'' + q(x)\,y = 0$$

$$y_2 \longrightarrow y'' + r(x)\,y = 0$$

Hipótesis: $q(x) > r(x) > 0$

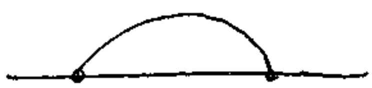
a) $y_1, y_2 > 0$ en $I \longrightarrow W(y_1, y_2)$ es estrictamente creciente en I

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \qquad W' > 0 \;??$$

$$W' = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{0} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -qy_1 & -ry_2 \end{vmatrix} = \underbrace{(q-r)}_{>0}\underbrace{y_1}_{>0}\underbrace{y_2}_{>0} > 0$$

b) f C^1, $f(x) > 0$ si $a < x < b$, $f(a) = f(b) = 0$

$\Longrightarrow f'(a) \geq 0 \geq f'(b)$



$f'(a) \geq 0$ $\qquad \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) \geq 0}{h \geq 0} \geq 0$

c) y_1, y_2 como en el enunciado, entonces y_1 se anula al menos una vez entre cada par de ceros consecutivos de y_2.

Sean $a < b$, $y_2(a) = y_2(b) = 0$. Podemos suponer $y(x) > 0$ si $a < x < b$ (sino, usamos $-y_2$)

Basta demostrar que $y_1(a)\,y_1(b) < 0$

$W(a) < W(b)$ por el apartado a

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = y_1(a)\,y_2'(a) \qquad = y_1(b)\,y_2'(b)$$

Afirmación: $y_2'(a) > 0$ (es ≥ 0 por el apart. (b))

Esto es porque si $y'(a) = 0$, entonces $y_2 \equiv 0$ unicidad (*)
$(y_2(a) = 0,\ y'(a) = 0)$

pero en el enunciado pone que las soluciones son no triviales.

Mismo argumento para ver que $y_2'(b) < 0$.

$y_1(a)\, y_2'(a) < y_1(b)\, y_2'(b)$

$\Longrightarrow y_1(a)\, y_1(b) < 0$
...

falta el razonamiento

(*) ampliación razonamiento

y_2 resuelve $\begin{cases} y'' + r(x) y = 0 \\ y(a) = 0 \\ y'(a) = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{unicidad}}$ de sol $\Longrightarrow$ $r(x)$ continua

$\hat{y}_2 \equiv 0$ resuelve también esto

HOJA 2 - 20

(d) $2yy'' = 1 + (y')^2$

$u(y)$ "=" y' $\quad \dfrac{du}{dy} = \dfrac{du}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dy} = y'' \cdot \dfrac{1}{y'} = \dfrac{\frac{1+(y')^2}{2y}}{y'} = \dfrac{1+u^2}{2yu} \Longrightarrow$

$y'' = \dfrac{1+(y')^2}{2y}$

$\Longrightarrow \dfrac{du}{dy} = \dfrac{1+u^2}{2uy}$ variables separables

ECUACIONES LINEALES CON COEF. CONSTANTES DE ORDEN >

Ejemplo inicial:

$$y^{(IV)} - 2y^{(III)} + 4y'' + 3y = 0$$

Intentamos con $e^{\lambda x} \longrightarrow (\lambda^4 - 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 3)\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0$

Ecuación general:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{(homogénea)}$$

$\longrightarrow e^{\lambda x}$ es solución $\Longleftrightarrow \underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}_{p(\lambda)} = 0$

$\longrightarrow$ n raíces contadas con multiplicidad

λ simple

- $\longrightarrow$ real $\longrightarrow e^{\lambda x}$ solución
- $\longrightarrow$ compleja $\longrightarrow \lambda = a + ib \quad b \neq 0$

  soluciones: $e^{ax}\cos(bx),\ e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$

  $(e^{\lambda x},\ e^{\bar{\lambda} x})$

λ multiplicidad $m > 1$:

- $\longrightarrow$ real $\longrightarrow e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}$ soluciones
- $\longrightarrow$ compleja $\longrightarrow \lambda = a + ib \quad b \neq 0$

$$e^{ax}\cos(bx),\quad e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$$
$$xe^{ax}\cos(bx),\quad xe^{ax}\operatorname{sen}(bx)$$
$$\vdots$$
$$x^{m-1}e^{ax}\cos(bx),\quad x^{m-1}e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$$

$\lambda, \bar{\lambda}$ m veces cada una (2m soluciones)

$D = \frac{d}{dx}$ FR = funciones regulares (C^∞)

$$D: FR \longrightarrow FR$$
$$f \longmapsto Df = f'$$

operador lineal $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

$$D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$$

$$D^2 f = f'' = D(Df) \text{ lineal}$$

$$D^2: FR \xrightarrow{D} FR \xrightarrow{D} FR$$
$$f \longmapsto f' \longmapsto f''$$

En la ecuación anterior $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

$P(D)(y)$, $P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D^1 + a_0 D^0 = 0$

① Como $D(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}$

$P(D)(e^{\lambda x}) = P(\lambda) e^{\lambda x}$

$P(D)\, e^{\lambda x} = 0 \iff P(\lambda) = 0$

② Si $P(\lambda) = 0$ y λ es múltiple $(m \geq 2)$ entonces $P(D)(xe^{\lambda x}) = 0$, e.d., $xe^{\lambda x}$ también es solución de la EDO.

<u>Razón</u>:

$(\bullet)$ $P(D)(e^{\lambda x}) = P(\lambda) e^{\lambda x}$

$(\bullet\bullet)$ $\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{d}{d\lambda}$, e.d., $\frac{d}{d\lambda} D = D \frac{d}{d\lambda}$, y más generalmente, $\frac{d}{d\lambda}(aD^K) = aD^K \frac{d}{d\lambda}$

$(\bullet\bullet\bullet)$ $\frac{d}{d\lambda}(P(D)(e^{\lambda x})) \underset{(\bullet\bullet)}{=} P(D)\left(\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda x})\right) = P(D)(xe^{\lambda x})$

(∷) Combinando (·) y (⋰):

$$P(D)\left(xe^{\lambda x}\right) \underset{(\cdot\cdot)}{=} \frac{d}{d\lambda}\left(P(D)\left(e^{\lambda x}\right)\right) \underset{(\cdot)}{=} \frac{d}{d\lambda}\left(P(\lambda)\, e^{\lambda x}\right) =$$

$$= P'(\lambda)\, e^{\lambda x} + P(\lambda)\, x e^{\lambda x}$$

(⁙) Si λ es raiz de ~~orden~~ multiplicidad ≥ 2

$$P(\lambda) = 0 \;,\; P'(\lambda) = 0$$

por (∷) : $P(D)\left(xe^{\lambda x}\right) = \underbrace{\left(P'(\lambda) + xP(\lambda)\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}\;!!} e^{\lambda x}$, e.d.

$$P(D) = \left(xe^{\lambda x}\right) = 0$$

<u>observación</u>: Si es de orden ≥ 3

$$\rightsquigarrow \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{2}\left(P(D)\left(e^{\lambda x}\right)\right) = \cdots$$

SISTEMAS DE ORDEN 1

INTRODUCCIÓN

$$x' = f(t, x, y)$$
$$y' = g(t, x, y)$$

$$X' = F(t, X) \qquad \left(X'(t) = F(t, X(t)) \right)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad F(t, X) = \begin{bmatrix} f(t, x, y) \\ g(t, x, y) \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $x'' + \mu(1-x^2)x' + x = 0$ (Van der Pol) $\mu > 0$

$y = x'$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x' &= y \rightsquigarrow f \\ y' &= (x'') = -x - \mu(1-x^2)y \rightsquigarrow g \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ -x - \mu(1-x^2)y \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $\overset{x_2}{x''} - \overset{x_4}{x'y'} + \overset{x_1}{x^2} + \overset{x_3}{y^2} = \operatorname{sen}(t)$

$$y'' + 2xy' - x^2 = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \\ x_3 &= y \\ x_4 &= y' \end{aligned}$$

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' \; (= x'') = x_2 x_4 + x_1^2 + x_3^2 + \operatorname{sen} t$$

$$X' = F(X) \xrightarrow[t \text{ explícitamente}]{\text{no aparece}} \text{SISTEMAS AUTÓNOMOS}$$

bservación: Cualquier sistema se puede convertir en uno autónomo.

$$X' = F(t, X) \qquad \begin{aligned} X &: (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ F &: (\alpha, \beta) \times \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap|}{\Omega}} \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$Y \overset{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix}, \quad Y' = \begin{bmatrix} 1 \\ F(\underbrace{t, X}_{Y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ F(Y) \end{bmatrix} = G(Y)$$

Notación:

$$\begin{matrix} & & & & \mathbb{R} \\ & & & & \cup \\ X, Y, Z, A, B \ldots & \text{vectores en } \mathbb{R}^n & \text{o} & \text{func.} & (\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \longrightarrow$ matrices o funciones

SISTEMAS LINEALES

$x' = 2tx - e^t y + \operatorname{sen} t$

$y' = x - \cos t \cdot y$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & -e^t \\ 1 & -\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

(EDL) $X' = \underbrace{\mathbb{A}(t)}_{n\times n} \underbrace{X}_{n\times 1} + \underbrace{B(t)}_{n\times 1}$

TEOREMA DE EXISTENCIA, UNICIDAD Y ESTRUCTURA

Sean $\mathbb{A}: [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $B: [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ambas continuas.

Sea $t_0 \in [\alpha,\beta]$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$:

① Existe una solución $X(t)$ del P.V.I $\begin{cases} X' = \mathbb{A}(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ $t \in [\alpha,\beta]$

Es decir, existe $X: [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ derivable tal que . . . "

Además, esa solución es única.

② Para la ecuación homogénea asociada EDL_H: $X' = \mathbb{A}(t)X$

2.1 Existen $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ linealm. indep. (e.d. $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t) \equiv 0 \quad t \in [\alpha,\beta] \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$) que son soluciones de EDL_H en $t \in [\alpha,\beta]$

2.2 Si $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ son soluciones linealm. indep de EDL_H entonces $X(t)$ es solución de EDL_H en $[\alpha,\beta] \iff \exists c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tal que $X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \cdots + c_nX_n(t)$ (por 2.1 los c_j son únicos).

3) (Estructura)

Si $X_p(t)$ es una solución de EDL_H entonces $X(t)$ es solución de EDL (en $[\alpha,\beta]$) $\Longleftrightarrow$ $\exists c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$X = X_p + \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \quad \text{(los } c_j\text{'s son únicos)}.$$

<u>demostración</u>

① No de momento $\longrightarrow$ cuando veamos el resultado general.

② <u>2.1</u> Elegimos $t_0 \in [\alpha,\beta]$

$X_j(t)$ la solución del P.V.I. con $X_j(t_0) = (0,0,\dots,0,\overset{j}{1},0,\dots,0)^T = e_j$

Afirmación: Son linealm. indep., debido a que:

$\sum c_j X_j(t) \equiv 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j X_j(t_0) = 0$, es decir, $\sum_{j=1}^{n} c_j e_j = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

$e_1,\dots,e_n$ es base de $\mathbb{R}^n$

<u>2.2</u> $X_1, X_2,\dots, X_n$ soluciones de EDL_H linealm. indep.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $X = \sum c_j X_j$ entonces X es solución

$\boxed{\Longrightarrow}$ Elegimos $t_0 \in [\alpha,\beta]$

a) $X_1(t_0),\dots, X_n(t_0)$ lin. indep. porque si no lo fuesen existirían $c_1,\dots,c_n$ no todos cero y tal que $c_1 X_1(t_0) + \cdots + c_n X_n(t_0) = 0$. Entonces:

$c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t)$ resuelve $\begin{cases} X' = \mathbb{A}(t) X \\ X(t_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow X(t) = 0$

es también solución. Por unicidad $\sum_{j=1}^{n} c_j X_j(t) \equiv 0$

<u>contradicción</u>

b) Si $X(t)$ es solución de EDL_H, por a) $\exists c_1,\dots,c_n$ tal que $X(t_0) = \sum c_j X_j(t_0)$ ($X_1(t_0),\dots, X_n(t_0)$ son vect. lin. indep. en $\mathbb{R}^n \Longrightarrow$ base).

Por unicidad (sol. de EDL_H) $X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j(t) \quad t \in [\alpha,\beta]$

RECUER. (3) Solución general de $X' = \mathbb{A}(t)X + B(t)$ = sol. parti + solución general de la homogénea

<u>continuación demostración</u>

Si $X(t)$ resuelve $X' = \mathbb{A}(t)X + B(t)$

Si $Y(t) \overset{def.}{=} X(t) - X_p(t)$

$$Y' = X' - X_p' = \left(\mathbb{A}(t)X + B(t)\right) - \left(\mathbb{A}(t)X_p + B(t)\right) =$$

$$= \mathbb{A}(t)X - \mathbb{A}(t)X_p = \mathbb{A}(t)(X - X_p) \quad \text{, e.d., } Y' = \mathbb{A}(t)Y$$

$$\Rightarrow Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n \quad \checkmark$$

<u>Comentarios:</u>

(2) dice que el conjunto de soluciones de la EDL_H es un espacio vectorial de dimensión n.

Además durante la demostración de (2) vimos (básicamente) el siguiente lema.

<u>LEMA</u>: Sean $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ soluciones de la EDL_H. Son equivalentes:

1. $X_1(t), \dots, X_n(t)$ son lin. indep. como funciones (e.d. $\sum c_j X_j(t) \equiv 0$ en $[\alpha,\beta] \Rightarrow c_j = 0$).
2. $\exists t_0 \in [\alpha,\beta]$ tal que $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0)$ son vectores lin. indep.
3. $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $X_1(t), \dots, X_n(t)$ son vectores lin. indep.

En la demostración del $T^{\underline{ma}}$ vimos (1) $\Leftrightarrow$ (2) y (3) se sigue sin dificultad

Observación

i) El enunciado del lema sigue siendo cierto si hay m ($\leq n$) soluciones.

ii) $X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)$ son lin. indep. $\iff \det \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \neq 0$

DEFINICIÓN: El WRONSKIANO de $X_1, \dots, X_n$ es la función

$$w(t) = \det \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t) & X_2(t) & \cdots & X_n(t) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Lo que dice parte del lema es $w(t) \neq 0 \ \forall t \in [\alpha, \beta] \iff \exists t_0 \in [\alpha, \beta]$ tal que $w(t_0) \neq 0$.

Más adelante veremos que $w(t)$ satisface la ecuación $w'(t) = a(t) w(t)$ $t \in [\alpha, \beta]$ donde $a(t) = \text{traza}(\mathbb{A}(t))$.

De ahí: $w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$ y se ve que $w(t) \equiv 0$ ó $w(t) \neq 0$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$.

¿CÓMO ENCONTRAR UNA BASE PARA EDL_H $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$?

▶ SISTEMA LINEAL CON COEF. CONSTANTES

$$X'(t) = \mathbb{A} X(t), \quad \mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n \times n} \text{ constante}$$

Probamos $X(t) = e^{\lambda t} V$ $\quad V \in \mathbb{R}^n$ constante $\quad$ ¿λ, V?
$V \neq \vec{0}$

$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V$
?$\|$? $\to$ queremos que estas expresiones sean iguales
$\mathbb{A} X(t) = \mathbb{A}(e^{\lambda t} V) = e^{\lambda t} \mathbb{A} V$

$X' = \mathbb{A} X \iff e^{\lambda t}(\mathbb{A}V - \lambda V) \equiv 0 \iff \mathbb{A} V = \lambda V \iff$ V es autovect[or] de $\mathbb{A}$ con autova[lor] λ

Ejemplo: $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} X$

Autovalores de $\mathbb{A} \rightsquigarrow 1, 1, 2$ con correspondientes autovectores:

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (son linealm. indep.)

$\rightsquigarrow X_1(t) = e^t V_1$, $X_2(t) = e^t V_2$, $X_3(t) = e^{2t} V_3$

$\{V_1, V_2, V_3\}$ base del espacio de soluciones $X' = \mathbb{A}X$

es decir, $\mathbb{B}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{B} = \underbrace{diag(1, 1, 2)}_{\longrightarrow \text{ matlab notation}}$.

Ejemplo: $X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} X$

Autovalores de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{triangular}} 2, 2$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $\quad$ $2a + b = 2a$, $2b = 2b$, $b = 0$ $\quad$ $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ autovector y no tengo más por este método

$\Rightarrow X_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para buscar otra intentamos: $X(t) = e^{2t}(C + tD)$ — C, D vectores en $\mathbb{R}^2$

$X' = e^{2t}(2C + D + 2tD)$

Queremos que esto sea igual a $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} X = e^{2t}(\mathbb{A}C + t\mathbb{A}D)$

es decir, se necesita $\mathbb{A}D = 2D \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ por el cálculo hecho arriba

$\mathbb{A}C = 2C + D \Rightarrow (\mathbb{A} - 2I)C = D \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ $b = 1$, a cualquiera $\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Conclusión, $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2(t) = e^{2t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

Si, por ejemplo, $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ & 2 & 1 & \\ 0 & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ $X' = \mathbb{A}X$ se intentan:

$$X(t) = e^{2t}\left(u_1 + tu_2 + \frac{t^2}{2!}u_3 + \frac{t^3}{3!}u_4\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\mathbb{A}-2I)u_4 = 0 \\ (\mathbb{A}-2I)u_k = u_{k+1} \end{array}}$$

$_H) X' = \mathbb{A}X$; $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{d\times d}$

Por el T$^{\underline{ma}}$ de existencia y unicidad $\exists X_1(t), \dots, X_d(t)$ soluciones linealm. indep.

Sea $\mathbb{F}(t) = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1(t) & \cdots & X_d(t) \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ (el wronskiano de $X_1(t), \dots, X_d(t)$ es $\det(\mathbb{F}(t))$).

<u>DEFINICIÓN</u>: $\mathbb{F}(t)$ es una <u>matriz fundamental</u> de la EDO $X' = \mathbb{A}X$

<u>Observación</u>:

i) La solución general de EDL$_H$ es $\underbrace{\mathbb{F}(t)C}_{\sum_{j=1}^{d} c_j X_j(t)}$, con $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$

ii) Esto vale para $X' = \mathbb{A}(t)X$.

¿ $\mathbb{F}(t)$?

$$\mathbb{F}'(t) = \mathbb{A}\mathbb{F}(t) \quad ; \quad \det(\mathbb{F}(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\left[x_1', \dots, x_d'\right] = \mathbb{A}\left[x_1 \cdots x_d\right] = \left[\mathbb{A}x_1 \cdots \mathbb{A}x_d\right]$$

Vamos a buscar una $\mathbb{F}$ especial, la que cumple $\mathbb{F}(0) = I$.

" $\mathbb{F}(t) = e^{\mathbb{A}t}$ "

EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ

$A \in \mathcal{M}_{d \times d}$

LEMA: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \left(= I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots\right)$

Esto converge sea cual sea A.

demostración

① Definimos $\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|y\|_2 = 1} \|Ay\|_2$ $\quad x, y$ vectores en $\mathbb{R}^d$ ó $\mathbb{C}$

y $\|z\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2}$.

Esto es una norma y tiene una propiedad importante: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B$

En particular: $\|A^n\| \leq \|A\|^n \quad n \in \mathbb{N}$.

② $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} \longleftarrow$ converge porque $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} < 1$ (de hech es cero

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge y $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$ ∎

DEFINICIÓN: $e^A = \exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

PROPIEDADES BÁSICAS:

① Si A y B conmutan (es decir, $AB = BA$) entonces:

$$e^{A+B} = e^A e^B \left(= e^B e^A\right)$$

② Si A es diagonal $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix} \leftarrow \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, entonces:

$$e^A = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_d}\right)$$

③ Si $A = SBS^{-1}$, entonces $e^A = Se^BS^{-1}$.

④ Si B es una matriz de bloques diagonales

bloques cuadrados pero pueden ser de distinto tamaño

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & B_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

$\uparrow \operatorname{diag}_d(B_1, \dots, B_m)$

entonces: $B^n = \operatorname{diag}_d(B_1^n, B_2^n, \dots, B_m^n)$

$$e^B = \operatorname{diag}_d\left(e^{B_1}, e^{B_2}, \dots, e^{B_m}\right)$$

demostración

① A, B conmutan

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$ (como conmutan podemos usar el binomio de Newton)

$$e^A e^B = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B^\ell}{\ell!}\right) \overset{\text{sumas finitas + paso al límite}}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{i+\ell=m} \frac{A^i}{i!}\frac{B^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} \underbrace{\frac{m!}{i!(m-i)!}}_{=\binom{m}{i}} A^i B^{m-i} =$$

$\hookrightarrow \ell = m-i$ $\qquad \uparrow \ell = m-i$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(A+B)^m = e^{A+B} \qquad \blacksquare$$

② $$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_d \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d^m \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

④ $$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \vdots \\ 0 & B_2 & \vdots \\ \cdot & \cdot & \ddots \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} B_1^2 & 0 & \vdots \\ 0 & B_2^2 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

③ $A = SBS^{-1}$

$A^2 = SB\cancel{S^{-1}S}BS^{-1} = SB^2S^{-1}$

$\vdots$

$A^m = SB^mS^{-1}$

$$\Longrightarrow \sum \frac{A^m}{m!} = S \sum \frac{B^m}{m!} S^{-1} \qquad \blacksquare$$

Proposición: $A \in \mathcal{M}_{d\times d}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA} \quad \left(= e^{tA}\cdot A\right)$$

demostración

$M(t) := e^{tA}$. Sabemos que $M'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{M(t+h) - M(t)}{h}$

Entonces:
$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ tA,\, hA \text{ conmutan}}}{\overset{①}{=}} \frac{e^{hA}\cdot e^{tA} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA} - I}{h}\, e^{tA}$$

Afirmación: $\dfrac{e^{hA} - I}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} A$

Razón: $e^{hA} = I + hA + \dfrac{h^2A^2}{2!} + \cdots$

$$\left\| \frac{e^{hA} - I}{h} - A \right\| = \left\| \sum_{n\geq 2} \frac{A^n}{n!} h^{n-1} \right\| \leq \sum_{n\geq 2} \frac{\|A^n h^{n-1}\|}{n!} \leq$$

$$\leq \sum_{n\geq 2} \frac{\|A\|^n |h|^{n-1}}{n!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } |h|<1 \\ \Downarrow \\ |h|^{n-1} \leq |h|}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{n\geq 2} \frac{\|A\|^n}{n!}\right)}_{\text{constante}} \cdot \underbrace{|h|}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$
, es decir,

$$\frac{e^{hA} - I}{h} - A \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \implies \frac{e^{hA} - I}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} A$$

e^{tA} ← matriz y FORMA DE JORDAN

FORMA CANÓNICA DE JORDAN

$$A = SJS^{-1}$$

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right]$$

Los bloques pueden ser diagonales

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

λ puede ser complejo, en este caso la matriz S también tiene elementos en $\mathbb{C}$.

(i) $$e^{tA} \underset{\substack{tA = StJS^{-1} \\ \text{prop. 3}}}{=} Se^{tJ}S^{-1} = S \left[\begin{array}{c|c|c} e^{tJ_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{tJ_2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right] S^{-1}$$

$$tJ = \begin{bmatrix} tJ_1 & & 0 \\ & tJ_2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

(ii) Si el bloque $B = J_i$ es de la forma $B = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ entonces $e^{tB} = \operatorname{diag}(e^{t\lambda}, e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}) = e^{t\lambda} I$

(iii) Si $B = J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + N$ con $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$

Recordatorio: $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$

Si $N \in \mathcal{M}_{m\times m} \Rightarrow N^{m-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix}$, $N^m = 0$

λtI, tN conmutan

$$tB = \lambda tI + tN \Rightarrow e^{tB} = e^{\lambda tI + tN} = e^{\lambda tI} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN}$$

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tN)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(tN)^k}{k!} = I + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots \overset{=}{\uparrow}$$

$N \in \mathcal{M}_{m\times m}$

$N^m = 0 \Rightarrow N^{m+\ell} = 0$ $\forall \ell \geq$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$e^{tB} = e^{t\lambda} e^{tN} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ & & \ddots & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

<u>Recordatorio</u>: ¿por qué aparecen estos bloques?

Porque hay "autovectores generalizados":

$0 \neq v \in \mathbb{R}^d \leftarrow J \in \mathcal{M}_{d\times d}$ tal que:

$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda I)^m v &= 0 \quad (m \geq 2) \\ (A-\lambda I)^{m-1} v &\neq 0 \end{aligned}\right\} \leftarrow \text{debido a esto}$$

$$\left(\Rightarrow \underset{v_1}{v \neq 0},\ \underbrace{(A-\lambda I)v}_{\substack{\neq \\ 0}}_{v_2}, \ldots, \underbrace{(A-\lambda I)^{m-1} v}_{\substack{\neq \\ 0}}_{v_{m-1}} \right)$$

$v_{m-1} \longrightarrow$ <u>sólo es este autovector</u>

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \cdots$$

autovalores $= -1$ (triple) , 3

autovectores de -1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ autovector de 3: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Necesitamos un autovector generalizado para -1:

$$(A - \lambda I)^2 \underset{\lambda=-1}{\equiv} (A+I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & 16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Ker de esta matriz

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (A+I)^2 v = 0 \ , \quad \underbrace{(A+I)v}_{= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = SJS^{-1}$$

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{-t} & & & \\ & e^{3t} & & \\ & & e^{-t} & te^{-t} \\ & & 0 & e^{t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

PROPIEDADES

① $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} \quad \forall t,s \in \mathbb{R}$

② e^{tA} es invertible y su inversa es $e^{-tA} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

demostración

① tA, sA conmutan

② $e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA}$

$$\overset{\shortparallel}{e^{0A}} = I$$

RECUERDO:

$X' = \mathbb{A}(t)X \qquad \mathbb{A} \in \mathcal{M}_{d\times d}$

$\mathbb{F}(t) = \left[X_1 \cdots X_d\right]$ soluciones linealmente independientes $\longrightarrow$ matriz fundamental

VISTO: Como consecuencia del $T^{\underline{ma}}$ de existencia y unicidad

PROPOSICIÓN: $\mathbb{F}(t)$ es matriz fundamental $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{F}'(t) = \mathbb{A}(t)\mathbb{F}(t)$ $\exists t_0$ tal que $\mathbb{F}(t_0)$ es invertible (y entonces lo es para cualquier t).

$$\mathbb{F}' = \left[X_1' \cdots X_d'\right] = \left[\mathbb{A}(t)X_1, \dots, \mathbb{A}(t)X_d\right] = \mathbb{A}(t)\underbrace{\left[X_1 \cdots X_d\right]}_{\mathbb{F}(t)}$$

Para el caso: $X' = \mathbb{A}X$

PROPOSICIÓN: $e^{t\mathbb{A}}$ es una matriz fundamental para $X' = \mathbb{A}X$ que además cumple que su valor en $t=0$ es I ($\rightsquigarrow$ matriz fundamental principal en $t=0$)

demostración

- $\frac{d}{dt} e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{A} e^{t\mathbb{A}}$

- $e^{0\mathbb{A}} = I$ $\left((e^{t\mathbb{A}})^{-1} = e^{-t\mathbb{A}} \right)$ ■

Recordatorio: Si $\mathbb{F}(t)$ es una matriz fundamental la solución general de $X' = \mathbb{A}(t)X$ es $\mathbb{F}(t)\,\underbrace{C}_{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}}$ $(= c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_dX_d)$

$e^{t\mathbb{A}}$ →
- pasando a la forma canónica de Jordan
- encontrar las $X_1(t), \ldots, X_d(t)$ "directamente" es decir:

(i) Se calculan los autovalores de $\mathbb{A}$, es decir, las soluciones de $\underbrace{\det(\mathbb{A} - \lambda I)}_{\text{pol. grado } d} = 0$

(polinomio característico de

(ii) Buscar tantas soluciones de $X' = \mathbb{A}X$ (con datos iniciales apropiados) como el tamaño de $\mathbb{A}$ ("d").

- λ autovalor con multiplicidad m $\Longrightarrow$
  $\Longrightarrow$ necesitamos m lin. indep. asociados a este autovalor.
- todas las posibles de la forma $e^{\lambda t}V$ (e.d. V autovector de $\mathbb{A}$ con autovalor λ) luego todas las posibles (indep. de los anteriores) de la forma $e^{\lambda t}(V_1 + tV_2)$

Si es necesario se continua con $e^{\lambda t}(V_1 + tV_2 + t^2V_3)$ y así sucesivamente.

Usos de $e^{t\mathbb{A}}$

① Solución del PVI $\begin{cases} X' = \mathbb{A}X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

- solución general de $X' = \mathbb{A}X$

"$\mathbb{F}(t)C$"

$X(t) = e^{t\mathbb{A}} C_1$

$X_0 = X(t_0) = e^{t_0\mathbb{A}} C_1 \implies C_1 = \left(e^{t_0\mathbb{A}}\right)^{-1} X_0 = e^{-t_0\mathbb{A}} X_0$

es decir, $X(t) = e^{t\mathbb{A}} C_1 = e^{t\mathbb{A}} e^{-t_0\mathbb{A}} X_0 = e^{(t-t_0)\mathbb{A}} X_0$

② Solucición particular de $X' = \mathbb{A}X + B(t)$

Variación de las constantes $\longrightarrow$ Intentamos $X(t) = e^{t\mathbb{A}} \underset{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_d(t) \end{bmatrix}}{U(t)}$

$$X'(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{t\mathbb{A}}\right) U(t) + e^{t\mathbb{A}} \cdot \frac{d}{dt} U(t) =$$

$$= \mathbb{A} \underbrace{e^{t\mathbb{A}} \; U(t)}_{X(t)} + e^{t\mathbb{A}} U'(t)$$

Buscamos esta igualdad: $\underset{\substack{\| \; ?? \\ \mathbb{A}X + B(t)}}{X'} = \mathbb{A}X + e^{t\mathbb{A}} U'(t)$

Necesitamos $e^{t\mathbb{A}} U'(t) = B(t) \rightsquigarrow U'(t) = \left(e^{t\mathbb{A}}\right)^{-1} B(t) = e^{-t\mathbb{A}} . B$

$U(t)$ una primitiva de $e^{-t\mathbb{A}} B(t)$. Por ejemplo:

$$U(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-s\mathbb{A}} B(s)\, ds$$

La solución particular sería $X(t) = e^{t\mathbb{A}} U(t) = e^{t\mathbb{A}} \int_{t_0}^{t} e^{-s\mathbb{A}} B(s)\, ds$

③ Solución de $\begin{cases} X' = \mathbb{A}X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

$$X(t) = e^{(t-t_0)\mathbb{A}} X_0 + e^{t\mathbb{A}} \int_{t_0}^{t} e^{-s\mathbb{A}} B(s)\, ds$$

Lo mismo se puede hacer para el caso general $X' = \mathbb{A}(t)X + B(t)$

si $\mathbb{F}(t)$ es matriz fundamental

$$\text{PVI} \begin{cases} X' = \mathbb{A}(t)\,X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$X(t) = \mathbb{F}(t)\,C_1$$

$$X_0 = X(t_0) = \mathbb{F}(t_0)\,C_1 \implies C_1 = \mathbb{F}(t_0)^{-1}X_0$$

$$\implies X(t) = \mathbb{F}(t)\,\mathbb{F}(t_0)^{-1}X_0$$

De la misma forma:

- Solución particular de $X' = \mathbb{A}(t)X + B(t)$

$$\mathbb{F}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbb{F}(s)^{-1}B(s)\,ds$$

- Solución de $\begin{cases} X' = \mathbb{A}(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$: $X(t) = \mathbb{F}(t)\,\mathbb{F}(t_0)^{-1}X_0 +$

$$+\ \mathbb{F}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbb{F}(s)^{-1}B(s)\,ds$$

Ejemplo:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad ¿\, e^{t\mathbb{A}}\, ?$$

① Autovalores

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} \implies \lambda = 2,\ \lambda = 4 \text{ (doble)}$$

② $\lambda = 2 \rightsquigarrow$ autovector $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$X_1(t) = e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ es solución de $X' = \mathbb{A}X$

$\lambda = 4 \quad (\mathbb{A} - 4I)V = 0$

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \quad (\text{o múltiplos})$$

$X_2(t) = e^{4t}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ es solución

Pero 4 solo contribuye una solución (con autovectores)

③ Buscamos otra del tipo $e^{4t}(U_1 + tU_2)$ con $U_2 \neq 0$

$X = e^{4t}(U_1 + tU_2)$

$X' = e^{4t}(4U_1 + U_2 + 4tU_2)$

$\parallel$

$\mathbb{A}X = \mathbb{A}\left(e^{4t}(U_1 + tU_2)\right) = e^{4t}\left(\mathbb{A}U_1 + t\mathbb{A}U_2\right)$, e.d.,

$\mathbb{A}U_1 = 4U_1 + U_2 \Rightarrow \mathbb{A}U_2 = 4U_2$, e.d.,

$$\begin{cases}(\mathbb{A} - 4I)U_1 = U_2\\ (\mathbb{A} - 4I)U_2 = 0\end{cases} \quad \text{y necesitamos } U_2 \neq 0.$$

U_1 tal que $(\mathbb{A} - 4I)^2 U_1 = 0 \quad [1]$

$\underbrace{(\mathbb{A} - 4I)U_1}_{U_2} \neq 0 \quad [2]$

$(\mathbb{A} - 4I)^2 = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ cualquier U_1 tal que $U_1 = \begin{bmatrix}0\\a\\b\end{bmatrix}$

por [1]

Como necesitamos $(\mathbb{A}-4I)\,v_1 \neq 0$ por [2]

$$(\mathbb{A}-4I) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo: $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = (\mathbb{A}-4I)v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow X_3(t) = e^{4t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-3t)e^{4t} \\ 3t\,e^{4t} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$

<u>Comentarios:</u> Si estuviésemos en dimensión más alta:

i) Buscaríamos todas las soluciones de este estilo:

$$e^{4t}(v_1 + t v_2) \quad \text{tal que} \quad v_2 \neq 0.$$

ii) Si no hay entre autovectores y las de i) tantas lin. indep. como la multiplicidad del autovalor buscamos el mayor número posible de la forma:

$$e^{4t}\left(v_1 + t v_2 + \frac{t^2}{2!} v_3\right) \quad \text{tal que:}$$

$$(\mathbb{A}-4I)^3 v_1 = 0$$

$$v_3 \neq 0$$

$$v_{k+1} = (\mathbb{A}-4I)\,v_k \qquad k=1,2,$$

etc...

$$\mathbb{F}(t) = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ X_1(t) & X_2(t) & X_3(t) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & (1-3t)e^{4t} \\ 0 & -e^{4t} & 3te^{4t} \end{bmatrix}$$

¿es $e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{F}($

NO! $\to \mathbb{F}(0) \neq I$

$$\mathbb{F}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación/PROPOSICIÓN: Si $\mathbb{F}(t)$ es una matriz fundamental y

B es invertible $\Longrightarrow$ $\mathbb{F}(t)B$ también es matriz fundamental.

del mismo tamaño que $\mathbb{F}(t)$

demostración

$\mathbb{F}$ matriz fundamental

$$(\mathbb{F}(t)\,B)' = \mathbb{F}'(t)\,B = (\mathbb{A}\,\mathbb{F}(t))\,B = \mathbb{A}\,(\mathbb{F}(t)\,B)$$

es decir, las columnas de $\mathbb{F}(t)B$ son soluciones

Si $\mathbb{F}(t_0)$ es invertible, $\mathbb{F}(t_0)B$ es invertible (por serlo ambas) ∎

Vamos ahora a "corregir" $\mathbb{F}(t)$: $\mathbb{F}(t).B\Big|_{t=0} = I$

Entonces: $\mathbb{F}(0)B = I \Longrightarrow B = \mathbb{F}(0)^{-1}$

$$\mathbb{F}(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{t\mathbb{A}} = \mathbb{F}(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccc} X_1 & X_3 & X_3 - X_2 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-3t)e^{4t} & -3te^{4t} \\ 0 & 3te^{4t} & (1+3t)e^{4t} \end{bmatrix}$$

Comentarios

) • Para $X' = \mathbb{A}X + B(t)$

• Si $B(t) = e^{\mu t}\begin{bmatrix} pol_1(t) \\ pol_2(t) \\ pol_3(t) \end{bmatrix}$ se intenta $X(t)$ del mismo estilo

(igual si aparecen sen, cos, etc.)

) Si en $X' = \mathbb{A}X$ aparecen autovalores complejos $\lambda = a+ib \rightarrow$
$\longrightarrow V$ también es complejo $\rightsquigarrow$ $Re\left(e^{\lambda t}V\right)$
autovector
$Im\left(e^{\lambda t}V\right)$?

$X' = \mathbb{A}(t)X$ en $M_{d\times d}$

$X_1, \dots, X_d$ soluciones (no necesariamente lin. indep.)

$\mathbb{F}(t) \overset{def.}{=} \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ X_1 & \cdots & X_d \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ $\qquad w(t) = \det\left(\mathbb{F}(t)\right)$

PROPOSICIÓN: w satisface la EDO $w'(t) = a(t)\,w(t)$ donde $a(t) = \text{traza}\left(\mathbb{A}(t)\right)$. Como consecuencia $w(t) = w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ y $w(t) \equiv 0$ (en el intervalo de definición) o $w(t) \neq 0 \ \forall t$ (en su intervalo de definición)

demostración

$\mathbb{F}' = \mathbb{A}(t).\mathbb{F}(t)$

$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} \leftarrow f_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow f_d \rightarrow \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} \leftarrow a_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow a_d \rightarrow \end{bmatrix}$

i) $\frac{d}{dt}\det(\mathbb{F}) = \begin{vmatrix} \leftarrow f_1' \rightarrow \\ \leftarrow f_2 \rightarrow \\ \leftarrow f_d \rightarrow \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \leftarrow f_1 \rightarrow \\ \leftarrow f_2' \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow f_d \rightarrow \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \leftarrow f_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow f_d' \rightarrow \end{vmatrix} =$

$= \sum_{i=1}^{d} \begin{vmatrix} \leftarrow f_1 \rightarrow \\ \leftarrow f_i' \rightarrow \\ \leftarrow f_d \rightarrow \end{vmatrix} =$ $f_i' = a_i\mathbb{F}$ $\quad (\mathbb{F}' = \mathbb{A}\mathbb{F})$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \leftarrow f_1 \rightarrow \\ a_i F \\ \leftarrow f_d \rightarrow \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \leftarrow f_1 \rightarrow \\ \vdots \\ a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + \cdots + a_{1d} f_d \\ \vdots \\ \leftarrow f_d \rightarrow \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{ij} \begin{vmatrix} \leftarrow f_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow f_d \rightarrow \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{d} a_{ii} \begin{vmatrix} \leftarrow f_1 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow f_d \rightarrow \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\sum a_{ii}\right)}_{\text{traza}(A(t))} \cdot w(t)$$

■

EXISTENCIA Y UNICIDAD

<u>INTRODUCCIÓN</u>: $\begin{array}{l} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{array}$ (PVI)

$F: [a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $t_0 \in [a,b]$, $X_0 \in \Omega$ abto. en $\mathbb{R}^d$

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} X'(s)\,ds \overset{\text{si cumple el PVI}}{=} \underbrace{X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\,ds}_{\equiv\, G(X)(t) \text{ Notación}}$$

$G(X)$ ← función $X(t)$

Hay que resolver $X = G(X)$

G: espacio de funciones $\longrightarrow$ espacio de funciones

<u>Intentamos</u>:

$X_0(t) \equiv X_0$

$X_{n+1}(t) = G(X_n)(t)$

<u>Objetivo</u>

Ver si X_n converge (digamos a una función X) y si cuando $X_n \to X$ (funciones), entonces $G(X_n) \longrightarrow G(X)$, es decir "G es continua"

↳ convergencia de funciones

CONVERGENCIA DE FUNCIONES

$I \subset \mathbb{R}$ (típicamente un intervalo) $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

DEFINICIÓN: (CONVERGENCIA PUNTUAL UNIFORME)

Sean $f_n: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$.

① f_n converge a f puntualmente (o punto a punto) si y solo si $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$ $\forall t \in I$ (notación: $f_n \xrightarrow[pp]{} f$)

② f_n converge uniformemente a f si y solo si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ $\forall t \in I$ $\forall n \geq N$.

Observación:

! Diferencia fundamental entre 1 y 2.

1) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in I$ $\exists N$ tal que $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

Ese $N = N(\varepsilon, t)$

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \cdots$ Ese $N = N(\varepsilon)$

Por otro lado, claramente: $f_n \xrightarrow{unif.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[pp]{} f$

$\not\Leftarrow$ falso en general

Ejemplo

$f_n: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = 1 + x^n$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \left.\begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}\right\} \text{definición de nuestra } f.$$

$f_n \xrightarrow[pp]{} f$

Afirmación: $f_n \not\xrightarrow{unif.} f$ en $[0,1]$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $n \geq$??

$$x < 1 \quad |f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{n \log x}_{\text{negativo}} < \underbrace{\log \varepsilon}_{\text{negativo}} \Rightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

$(-\log \varepsilon < n(-\log x))$

Cuando $x \to 1$, $\log x \to 0 \Longrightarrow \frac{\log \varepsilon}{\log x} \longrightarrow \infty$

$N \geq \frac{\log \varepsilon}{\log x}$ $\quad N$ tiene que depender de x

$$N = \frac{\log \varepsilon}{\log x} + 1$$

Pero $f_n \longrightarrow f$ unif. en $[0,a]$ para $a<1$

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq a^n < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log a} \approx N$$

<u>Observación</u>: otra forma de expresar $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ es la siguiente.

$$\underbrace{|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I}_{\underbrace{\sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon}_{\|f_n(t) - f\|_\infty}} \quad \text{si} \quad n \geq N.$$

Definición/Notación

Sea $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$\|g\|_\infty = \sup_{t \in I} |g(t)|$ $\quad$ (puede ser $+\infty$ si g no está acotada)

Propiedades $\|\cdot\|_\infty$

i) $\|f\|_\infty = 0 \iff f \equiv 0$

ii) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

demostración iii

$$|f(t)+g(t)| \leq \underset{\|f\|_\infty}{\underset{\wedge|}{|f(t)|}} + \underset{\|g\|_\infty}{\underset{\wedge|}{|g(t)|}} \quad , \quad \text{es decir,}$$

$$|f(t)+g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \Longrightarrow \overbrace{\sup_{t\in I} |f(t)+g(t)|}^{\|f+g\|_\infty} \leq$$

$$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \Longrightarrow \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \blacksquare$$

Comentarios

i) $+\infty + a = +\infty$

ii) $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \Longleftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$

Ejemplos (de espacios de funciones)

1) $B(I) = \{g : \quad g: I \to \mathbb{R} \, , \quad g \text{ acotada}\}$

$\Updownarrow$ e.d. $\exists L_g \in \mathbb{R} : |g(t)| \leq L_g \ \forall t \in I$

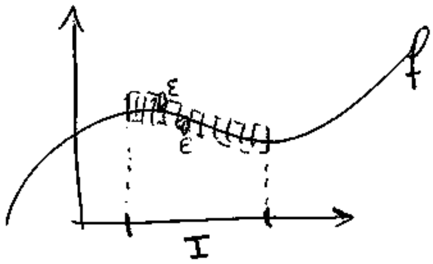
$\|g\|_\infty < \infty$ si $g \in B(I)$

$B(I)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_\infty$ es una normal en él.

2) $I = [a,b]$, $C([a,b]) = \{f : \quad f:[a,b] \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$ es un espacio vectorial $\left(\subseteq B(I)\right)$, y $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en él.

Observación: no se necesita $I=[a,b]$, basta que $I \subseteq \mathbb{R}$ sea compacto.

Visualmente $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$

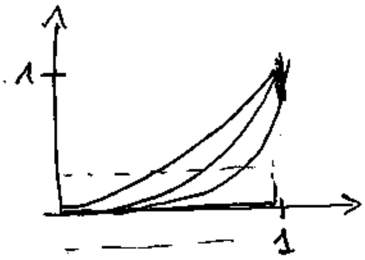


$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$ tal que $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ $\quad \forall t \in I \quad \forall n \geq N$

el gráfico de f_n tiene que estar en esa "banda" $\updownarrow 2\varepsilon$ si n es grande.

Ejemplo: $f_n(x) = x^n \quad 0 \leq x \leq 1$

$$x^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \longleftarrow f(x)$$



$$\|f_n - f\|_\infty = ?$$

Ejemplo: $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x}$ en $[0,1]$ ¿converge uniformemente? (a alg

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$n^2x \to \infty$ si $x > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall n \geq N$

$\varepsilon > 0 \quad |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \dfrac{x}{1+n^2x}$

2 casos

$0 \leq x \leq \varepsilon \implies \dfrac{x}{1+n^2x} \leq x < \varepsilon$ ✓ (para cualquier n)

$\varepsilon \leq x \leq 1 \implies \dfrac{x}{1+nx^2} \overset{x \leq 1}{\leq} \dfrac{1}{1+n^2x} \overset{x \geq \varepsilon}{\leq} \dfrac{1}{1+n^2\varepsilon} \underset{??}{<} \varepsilon$

$\dfrac{1}{1+n^2\varepsilon} < \varepsilon \iff 1 + n^2\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff n^2\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, e.d.,

suponemos $\varepsilon < 1$ $\quad n \geq \sqrt{\dfrac{(1/\varepsilon - 1)}{\varepsilon}} = N(\varepsilon)$ NO DEPENDE DE X ✓

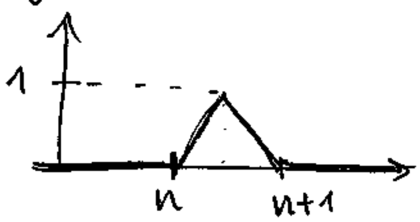
PREGUNTA

Como $f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} 0$, $\|f_n\|_\infty \longrightarrow 0$

¿ $\|f_n\|_\infty$?

$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x)$ $f_n \geq 0$ continua

Ejemplo



$f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\|f_n\|_\infty = 1 \not\longrightarrow 0$ $\quad f_n \underset{\text{unif.}}{\not\rightarrow} f \quad \forall x \geq 0$

ROPOSICIÓN: Sean $f_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$.
Supongamos que f_n es continua para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces f es continua.

demostración

Sea $t_0 \in I$ ¿ es f continua en t_0?

¿ $\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \delta>0$ tal que si $|t-t_0|<\delta \;\; t\in I$ entonces $|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon$?

$$|f(t)-f(t_0)| = |f(t)-f_n(t)+f_n(t)-f_n(t_0)+f_n(t_0)-f(t_0)| \overset{(*)}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{|f(t)-f_n(t)|}_{①} + \underbrace{|f_n(t_0)-f(t_0)|}_{②} + \underbrace{|f_n(t)-f_n(t_0)|}_{③}$$

① Como $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$, dado $\varepsilon>0$ existe N tal que $|f_n(t)-f(t)| < \varepsilon/3$ $\forall t\in I, \forall n\geq N$

En (*) fijamos $n=N$ Entonces $\underset{n=N}{①} < \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad \underset{N}{②} < \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad ③\; |f_N(t)-f_N(t_0)| < \varepsilon/3$

Como f_n es continua $\exists\delta>0$ tal que $|f_N(t)-f_N(t_0)| < \varepsilon/3$ para $|t-t_0|<\delta$, $t\in I$, y $|f(t)-f(t_0)| \leq ①+②+③ < \varepsilon$ ∎

COROLARIO:

$$\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow[pp]{} f \\ f_n \text{ cont. } \forall n \\ f \text{ NO continua} \end{array}\right\} \Longrightarrow f_n \not\xrightarrow[unif.]{} f$$

¿Cómo comprobar que f_n converge uniformemente sin conocer su (posible) límite?

DEFINICIÓN: $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, son una SUCESIÓN DE CAUCHY para $\|\cdot\|$ si y solo $\|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, e.d., $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ $\forall n,m \geq N$.

PROPOSICIÓN: Si f_n es una sucesión de Cauchy entonces $\exists f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_n \xrightarrow{unif.} f$.

demostración

i) $f_n(x)$ converge $\forall x \in I$.

Sea $x \in I$ (*) $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{y\in I} |f_n(y) - f_m(y)| = \|f_n - f_m\| \xrightarrow[n,m]{} 0$

Entonces $\{f_n(x)\}_n$ es sucesión (x fijado) de Cauchy en $\mathbb{R}$

($\mathbb{R}$ completo) $\Longrightarrow f_n(x)$ converge a un punto de $\mathbb{R}$.

Llamemos $f(x)$ a ese punto, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_n \xrightarrow[pp]{} f$

ii) $f_n \xrightarrow[unif.]{} f$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ $n,m \geq N$

Por (*) $|f_n(x) - \underset{\downarrow\, f(x)}{f_m(x)}| < \varepsilon$ $\forall n,m \geq N$ $\forall x \in I$

Hacemos $m \to \infty$.

VISTO

- $\left.\begin{array}{l} f_n \longrightarrow f \\ f_n \text{ continua} \end{array}\right\} \Longrightarrow f$ continua

- f_n sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{}$

$C([a,b])$, $\|f\|_\infty = \underset{x\in[a,b]}{\overset{(\sup)}{\max}} |f(x)|$

$\|\cdot\|_\infty \longrightarrow$ permite definir una "distancia" $\|f-g\|_\infty$

ROPOSICIÓN: $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ es completo, e.d., toda sucesión e Cauchy converge (a un elemento de ese espacio).

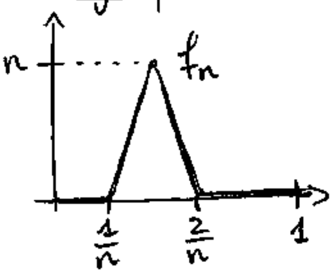
demostración $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

① Cauchy $\|\cdot\|_\infty$ $\Longrightarrow$ converge uniformemente (a f)

② $\left.\begin{array}{l} f_n \text{ continua} \\ f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \end{array}\right\} \Longrightarrow f$ continua (y $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[0]{} 0$) ∎

ONVERGENCIA E INTEGRALES

Ejemplo:



$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$

$f_n \xrightarrow[\text{pp}]{} 0 = f$

$f_n \not\xrightarrow[\text{unif}]{} f$

$\int_0^1 f = 0$

PROPOSICIÓN: Sean $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables y tal que $f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} f$ en $[a,b]$. Entonces, $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$

COROLARIO: $\left.\begin{array}{l} f_n \in C([a,b]) \\ f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \; (\Rightarrow f \in C([a,b])) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$

demostración prop.

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty = \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\downarrow\, 0} (b-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$

SERIES DE FUNCIONES

Recordatorio: ① $a_n \in \mathbb{R}$, $\sum a_n$ converge $\iff S_n \overset{\text{def.}}{=} \sum_{m=0}^{n} a_m$ converge.

$\underset{\text{cauchy}}{\iff} \{S_n\}$ Cauchy $\iff \underset{S_n - S_m}{\sum_{k=m}^{n} a_k} \; (= a_{m+1} + \cdots + a_n)$ converge a 0 $_{m,n\to\infty}$

② $a_n \geq 0$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ entonces $\sum a_n$ converge

existe y es <1

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$\sum f_n \xrightarrow[\text{pp}]{} g$ $\qquad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

$\sum f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} g$ $\qquad S_n(x) \xrightarrow[\text{pp}]{} g(x)$ $\forall x \in I$

$S_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} g$ en I

$\sum f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} g \implies \sum f_n \xrightarrow[\text{pp}]{} g$

CRITERIO DE CAUCHY: $\sum f_n \xrightarrow[\text{unif}]{} () \iff \{S_n\}$ es sucesión de Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$.

CRITERIO DE WEIERSTRASS: $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que $\|f_n\|_\infty \leq M_n \in \mathbb{R}$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en I, y su límite se denota $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$

demostración

- $\sum f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} \overset{def}{\equiv} S_n \xrightarrow[\text{unif.}]{}$ donde $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$
- $S_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} \iff \{S_n\}$ es Cauchy en $\|\cdot\|_\infty$, e.d. $\|S_n - S_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$
- $S_n(x) - S_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)$ suponemos $m \leq n$.

Tomando $\|\cdot\|_\infty$: $\|S_n - S_m\|_\infty = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} f_k\right\|_\infty \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\|_\infty \leq$

$\underset{\text{hipótesis}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} M_k \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ pues $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge. ■

Ejemplos

① $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge uniformemente en $|x| \leq r < 1$.

Razón: $f_n(x) = x^n$, $I = [-r, r]$ $(r < 1)$

$|x^n| \leq |x|^n \underset{|x|\leq r}{\leq} r^n$ auxiliar

② $\sum r^n$ converge si $r < 1$ $\left(\begin{array}{l} a_n = r^n \\ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1 \ \checkmark \end{array} \right)$

Razón: Por el Crit. Weierstrass:

$\sum x^n$ converge uniformemente en $|x| \leq r$

Como $S_n = \sum_{k=1}^{n} x^k$ es continua (es un polinomio), y

$S_n(x) \xrightarrow[\text{unif.}]{} \sum_{m=1}^{\infty} x^m$, entonces $f(x) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} x^m$ es continua en $[-r, r]$

(y por tanto en $|x| < 1$)

③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge uniformemente en $x \geq a > 1$.

$\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{n^z}_{e^{z \log n}}} \quad \begin{matrix} z \in \mathbb{C} \\ Re(z) > 1 \end{matrix} \right.$ es la función Zeta de Riemann $\left. \right)$

$$x \geq a \implies n^x \geq n^a \implies \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

$\left\| \frac{1}{n^x} \right\|_\infty \leq \frac{1}{n^a}$ en $[a, \infty)$ y $\sum \frac{1}{n^a}$ converge.

Por C-W $\sum \frac{1}{n^x}$ converge unif. en $x \geq a$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ continua.

Ejemplo

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

$$\left\| \frac{\cos(3^n x)}{2n} \right\|_\infty = \frac{1}{2^n} \quad \text{y} \quad \sum \frac{1}{2^n} < \infty$$

Función de Weierstrass: es continua pero NO es derivable en NINGÚN punto.

Derivando formalmente: $- \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} \operatorname{sen}(3^n x)$

Enlazando con esto:

PROPOSICIÓN: Sean $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1

Supongamos que:

- $f_n' \xrightarrow[\text{unif.}]{} g$
- $\exists t_0 \in [a,b]$ tal que $f_n(t_0)$ converge

Entonces $\exists f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1 y tal que:

- $f_n \xrightarrow[\text{unif}]{} f$
- $f' \longrightarrow g$

(Para series: $\sum f_n' \xrightarrow[\text{unif.}]{} g$, $\sum f_n(t_0)$ conv. $\Rightarrow \sum f_n$ converge unif. y $(\sum f_n)' = \sum f_n'$)

<u>demostración</u> (esquema demostración)

i) $f_n(t) = f_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} f_n'(s)\,ds$

ii) f_n es Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$

iii) f_n converge y se puede pasar al límite en i).

iv) f verifica: $f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \Rightarrow f' = g$.

! <u>TÉCNICA HABITUAL</u> (OJO con el Crit. de Weierstrass)

Para comprobar $f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{}$ se puede pasar a una serie de funciones:

$g_1 = f_1$, $g_2 = f_2 - f_1$, $\dots$, $g_n = f_n - f_{n-1}$ $n \geq 2$

$f_n = g_1 + g_2 + \dots + g_n = \sum_{m=1}^{n} g_m$, e.d., convergencia de $f_n \Longleftrightarrow$ convergencia de $\sum g_n$.

!! Todo lo visto para funciones con valores en $\mathbb{R}$ es válido para:

- funciones $I \longrightarrow \mathbb{C}$ ($|\ | \equiv$ módulo)
- funciones $I \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix} \qquad |v| = \sum_{j=1}^{d} |v_j| \quad (\text{o cualquier otra norma})$$

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$

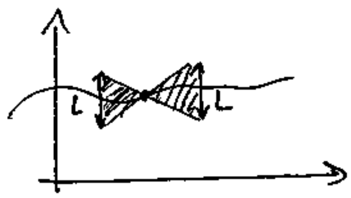
$$f_n \xrightarrow[\text{unif}]{} f \iff f_n^k \xrightarrow[\text{unif.}]{} f^k \qquad k=1,\dots,d$$

$$\begin{bmatrix} f_n^1 \\ \vdots \\ f_n^d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^d \end{bmatrix}$$

convergencia unif. componente a componente

PREVIO EXISTENCIA Y UNICIDAD

DEFINICIÓN: f es LIPSCHITZ si y solo si $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in A$



Observación: Lipschitz $\Rightarrow$ continua

PROPOSICIÓN: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abto., $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ C^1:

① Si Ω es convexo y $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq C$ $\forall x \in \Omega$, $\forall i=1,\dots,d$, $\forall j=1,\dots,m$, entonces f es Lipschitz.

② Si $A \subset \Omega$ es compacto y convexo, f es Lipschitz en A

demostración

① Ω $\quad x \bullet\!\!-\!\!\bullet\, y$ $\qquad \gamma(t) = x + t(x-y) \quad 0 \leq t \leq 1$

$$f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(f(\gamma(t))\Big) =$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial f_j}(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\gamma_j'(t)}_{= y_j - x_j}\, dt \xrightarrow{\substack{\text{tomamos}\\ \text{valores}\\ \text{absolutos}}} |f(x)-f(y)| = \left|\sum \cdots\right| \leq$$

$$\leq \sum \left|\int \cdots\right| \leq \sum \int \left\|\frac{\partial f}{\partial f_j}(\gamma(t))\right\| |y_j - x_j|\, dt \leq \int_0^1 C \cdot d \cdot \sum |y_j - x_j|\, dt$$

$$= \underbrace{C \cdot d}_{L}\, |x-y| = L \cdot |x-y| \quad \blacksquare$$

② Igual que ① usando que al ser A compacto y $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ continuas $\Longrightarrow \exists C$ como en ①.

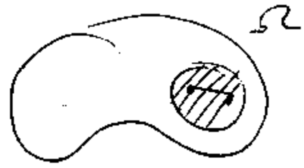
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

<u>COROLARIO</u>: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abto., $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ C^1, entonces f es localmente Lipschitz, e.d., si $x_0 \in \Omega$ y $\overline{B}(x_0, \delta) \subset \Omega$ se tiene que f es Lipschitz en $\overline{B}(x_0,\delta)$.

Recuerda: $\overline{B}(u,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x-u| \leq \delta\})$

<u>demostración</u>

$A = B(x_0, \delta)$ es un compacto convexo en Ω ▣



<u>Comentarios</u>: estos van a ser los casos que usemos, pero:

i) $f(x) = |x|$ es Lipschitz en $\mathbb{R}$

ii) Si $f(x) = \int_0^x g(u)du$, con g integrable y acotada en $[-a,a]$, es Lipschitz. $\left(|f(y) - f(x)| = \left|\int_x^y g(u)du\right| \leq \|g\|_\infty |y-x|\right)$

<u>TEOREMA</u> (Existencia y unicidad GLOBAL)

Sea $F: [a,b] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua y tal que $\exists L \in \mathbb{R}$ con $|F(t,X) - F(t,Y)| \leq L|X-Y|$ $\forall t \in [a,b]$ ("F es Lipschitz en X unif. en $t \in [a,b]$").

Sea $t_0 \in [a,b]$ y $X_0 \in \mathbb{R}^d$, entonces:

- Existe $X: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ C^1 y tal que $\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) & \forall t \in [a,b] \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

- Esa $X(t)$ es única.

demostración

① Sea $h>0$, con $h<\frac{1}{L}$ $(Lh<1)$. Entonces existe $X(t)$ C^1 en $\underbrace{[t_0-h,\ t_0+h]\cap[a,b]}_{\overset{\text{not.}}{=} I}$ y tal que $X' = F(t,x)$ en I

$X(t_0) = X_0$

razón

i) Definimos recursivamente:

$$X(t_0) \equiv X_0 \ , \quad t\in[a,b]$$

$$X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X_n(s))\, ds \quad n\geq 0$$

Afirmación: X_n es continua (y está definida) para todo $t\in[a,b]$

demostración: (quejas de este esquema de **** a Antonio Sánchez)

Por inducción en n:

- $n=0$
- cierto para n: X_n continua

$\Rightarrow F(s, X_n(s))$ es continua (composición de continuas) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} F(s, X_n(s))\, ds$ es continua $\Rightarrow X_{n+1}$ continua. ∎

ii) $\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \leq (Lh)^n \|X_1 - X_0\|_\infty \quad n\geq 1$

(aquí $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{t\in I} |\cdot|$)

demostración: por inducción $n\geq 1$

$$X_{n+1}(t) - X_n(t) = \int_{t_0}^{t} F(s, X_n(s))ds - \int_{t_0}^{t} F(s, X_{n-1}(s))ds$$

$$\Rightarrow |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |F(s, X_n(s)) - F(s, X_{n-1}(s))|\, ds\right| \leq$$

$$\overset{\text{F-Lipschitz}}{\leq} \left|\int_{t_0}^{t} L\,|X_n(s) - X_{n-1}(s)|\, ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} L\|X_n - X_{n-1}\|_\infty\, ds\right| =$$

$$= L\|X_n - X_{n-1}\|_\infty\, |t-t_0| \overset{t\in I}{\leq} Lh\|X_n - X_{n-1}\|_\infty$$

Tomando $\max_{t\in I}$, $\|X_{n+1}-X_n\|_\infty \leq L.h.\|X_n - X_{n-1}\|_\infty \leq$

$\leq \cdots \leq (Lh)^n \cdot \underbrace{\|X_1 - X_0\|_\infty}_{\text{un número}}$ $\left(\begin{array}{l} X_1 - X_0 \text{ es continua en} \\ I \text{, que es un compacto}\end{array}\right)$

iii) $X_n(t)$ converge unif. en I

demostración

Sea $D_n = X_n - X_{n-1}$, $n \geq 1$

$X_n = X_0 + \underbrace{D_1}_{X_1 - X_0} + \underbrace{D_2}_{X_2 - X_1} + \cdots + \underbrace{D_n}_{X_n - X_{n-1}}$ converge unif. de $X_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ convergencia unif. $\sum_{n=0}^{\infty} D_n$ $(D_0 = X_0)$

Por ii) : $\|D_n\|_\infty \leq (Lh)^{n-1} \cdot \|D_1\|_\infty$ $n \geq 1$

Si $hL < 1$, la serie $\sum (Lh)^k$ converge por el criterio de Weierstrass $\sum D_n$ converg. unif. en I, e.d., $X_n \xrightarrow[\text{unif.}]{}$ en I.

Llamemos X al límite (que es continua en I por serlo cada D_n y ser la conv. unif.) . ■

iv) $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))ds \quad t \in I$

demostración : pasar al límite en: $X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X_n(s))ds$

$X_{n+1}(t) \xrightarrow[pp]{} X(t)$ (de hecho $\xrightarrow[\text{unif.}]{}$)

Afirmación : $F(t, X_n(t)) \xrightarrow[\text{unif.}]{} F(t, X(t))$ $t \in I$

razón

$|F(t, X(t)) - F(t, X_n(t))| \leq L|X(t) - X_n(t)| \leq$

$\leq L\|X - X_n\|_\infty \quad t \in I$.

$\|F(\cdot, X(\cdot)) - F(\cdot, X_n(\cdot))\|_\infty \leq L\|X - X_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow F(t, X_n(t)) \xrightarrow[\text{unif.}]{} F(t, X(t))$ en $t \in I$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} F(s, X_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))ds$ ■ fin razón

fin demostración

v) Como $X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\, ds$

- $X(t_0) = X_0 + 0 = X_0$ ✓
- $X'(t) = \left(\int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\, ds \right)' = F(t, X(t))$ ← $F(t, X(t))$ continua

vi) X es única, es decir, si $Y : I \to \mathbb{R}^d$ C^1 satisface

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)), & t \in I \\ Y(t_0) = X_0 \end{cases}, \quad \text{entonces} \quad X(t) = Y(t) \quad \forall t \in I.$$

<u>demostración</u>

Como $Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s))\, ds$ (y X también lo verifica).

Restando: $Y(t) - X(t) = \int_{t_0}^{t} \left[F(s, Y(s)) - F(s, X(s)) \right] ds$

Supongamos $t_0 < t$ (para $t < t_0$ es similar)

$$|Y(t) - X(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \cdots \right| \leq \int_{t_0}^{t} |F(s, Y(s)) - F(s, X(s))|\, ds \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} L |Y(s) - X(s)|\, ds \leq L \int_{t_0}^{t} \|Y - X\|_\infty = L \|Y - X\|_\infty (t - t_0) \leq$$

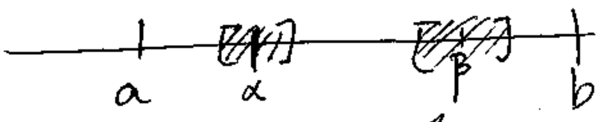
$\leq L.h \|Y - X\|_\infty$. Tomando $\sup_{t \in I}$ ($\max_{t \in I}$ porque son continuas)

$\|Y - X\|_\infty \leq L.h \|Y - X\|_\infty$, pero $Lh < 1 \Rightarrow \|Y - X\|_\infty = 0$, e.d., $Y(t) = X(t)$ $\forall t \in I$. ∎

2) La solución encontrada en ① se puede extender ("prolongar") a todo $[a, b]$:

i) Idea:

Si hemos extendido a $[\alpha, \beta]$ y, digamos, $\beta < b$



encuentras solución única en este intervalo

ii) Supongamos que podemos extraer la solución a $[\alpha, \beta]$ y ese β es máximo con esa propiedad. Entonces $\beta = b$.

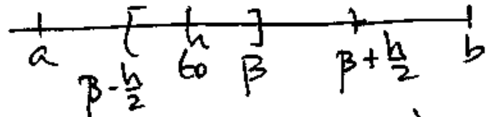
demostración

Sea $h = \frac{1}{2L}$ $\left(h < \frac{1}{L}\right)$

Sea $\hat{t_0} = \beta - \frac{h}{2}$, $\hat{x}_0 = x(\hat{t_0})$

Por ① aplicado a $\hat{t_0}, \hat{x}_0$ da una solución $\hat{x}$ definida en $[\hat{t_0} - h, \hat{t_0} + h] \cap [a,b]$ (obs: $\hat{t_0} + h = \beta - \frac{h}{2} + h = \beta + \frac{h}{2}$)

Sea $x_{nueva}(t) = \begin{cases} x(t) & t \leq \beta \\ \hat{x}(t) & \text{si } t \geq \hat{t_0} - h \quad (y\ t \in [a,b]) \end{cases}$



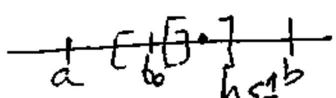
Como x y $\hat{x}$ están def. en $[\hat{t_0} - \frac{h}{2}, \hat{t_0} + \frac{h}{2}]$ y cumplen la EDO y $x(\hat{t_0}) = \hat{x}(\hat{t_0})$. Por la unicidad de ① $x(t) = \hat{x}(t)$ $t \in [\hat{t_0} - \frac{h}{2}, \hat{t_0} + \frac{h}{2}] \cap [a,b]$, x_{nueva} es solución de la EDO hasta $\beta + \frac{h}{2}$ (o $\min(\beta + \frac{h}{2}, b)$)

(para $t < \beta \to$ usar x
para $\beta - \frac{h}{2} < t \to$ usar $\hat{x}$)

con $\underset{x(t_0)}{\underset{\|}{x_{nueva}(t_0)}} = x_0$ contradicción $\times\!\!\!\times$ ∎

③ Unicidad en $[a,b]$

i) Idea



x, y soluciones en $[a,b]$

$x(t_0) = y(t_0) = x_0$

ii) Esquema algo más riguroso:

A. Sea $C = \{t \in [a,b] : x(t) = y(t)\}$

$C \neq \emptyset \xrightarrow[\text{porque}]{} t_0 \in C$!!

B. C es cerrado (relativo) en $[a,b]$

demostración

Basta ver que si $t_n \in C$ $\forall n$ y $t_n \to t$ entonces $t \in C$

Pero si $t_n \to t$

$$\begin{array}{ccc} x(t_n) & = & y(t_n) \\ \text{cont.} \downarrow & & \downarrow \text{cont} \\ x(t) & = & y(t) \end{array}$$

e.d., $t \in C$.

c. G_1 es abto. en $[a,b]$, e.d., $\forall \bar{t} \in G_1 \ \exists \delta > 0$ tal que $(\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta) \cap [a,b] \subset G_1$.

<u>demostración</u>

- $X(\bar{t}) = Y(\bar{t})$ pues $\bar{t} \in G_1$.
- X, Y son soluciones de la ec. $z' = F(t, z)$ en $[a,b]$
  $z(\bar{t}) = X(\bar{t}) = Y(\bar{t})$

Por unicidad local en $[\bar{t}-h, \bar{t}+h] \cap [a,b]$, $h = \frac{1}{2L}$

$\delta = h = \frac{1}{2}L$

$(\bar{t}-\delta, \bar{t}+\delta) \subset G_1$

e.d., $X = Y$ en ese intervalo

D. $G_1 = [a,b]$

<u>demostración</u>

$$\left.\begin{array}{l} G_1 \text{ es abto. en } [a,b] \\ G_1 \text{ es cerrado en } [a,b] \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{conexo}]{[a,b] \text{ es}} G_1 = [a,b] \qquad G_1 \neq \emptyset$$

COROLARIO: (Teoremas ya enunciados)

a) Sean $A : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$, $B : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continuas, $t_0 \in [a,b]$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$,

entonces existe una solución (y es única) $X : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, de

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$
$$X(t_0) = X_0$$

b) Si $p, q, r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in [a,b]$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, entonces existe solución, y es única, $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, del (PVI):

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t), & t \in [a,b] \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

demostración

a) $X'(t) = F(t, X(t))$, $F(\underset{[a,b]}{t}, \underset{\mathbb{R}^d}{X}) = A(t)X + B(t)$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1d}(t) \\ \vdots & & \\ a_{d1}(t) & \cdots & a_{dd}(t) \end{bmatrix}, \quad a_{ij} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

1. F es continua
2. Satisface una condición de Lipschitz uniforme en t. Para verlo:
   i) $\exists K$ tal que $\sum_{j=1}^{d} |a_{ij}(t)| \leq K$, $t \in [a,b]$

   la suma es una función continua en $[a,b] \Longrightarrow$ acotada

   ii) $|F(t,Y) - F(t,X)| = |A(t)(Y-X)|$ $\left(|z| = \sum_{j=1}^{d} |z_j|\right)$ $(|z_j| \leq |z|)$

La componente i-ésima de $F(t,Y) - F(t,X)$ es: $\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(t)(Y_j - X_j)$

En $|\cdot|$: $|\sum \cdots| \leq \sum_{j=1}^{d} |a_{ij}(t)| \underbrace{|Y_j - X_j|}_{\leq |Y-X|} \leq \left(\sum_{j=1}^{d} |a_{ij}(t)|\right) |Y - X| \leq$

$\leq K|Y-K|$ $\quad (L = K)$

b) Consecuencia de a)

$$x'' + px' + qx = r \longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}}^{H(t)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix}}^{B(t)}$$

Vale para $x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + p_2 x^{(n-2)} + \cdots = p_{n+1}$

con $p_j(t)$ continuas, $x^{(k)} = \frac{d^{(k)}x}{dt^k}$

!! COMENTARIO: Aunque no lo hemos enunciado así, hemos demostrado que $\exists!\ X : \underset{[t_0-h,\, t_0+h]\cap[a,b]}{\overset{\shortparallel}{I}} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$X(t) = \underbrace{X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\,ds}_{G(X)}, \quad t \in I.$$

$G : C(I) \longrightarrow C(I)$ y $G(X) = X$, es decir,

$C(I)$: funciones continuas en I

G tiene un único punto fijo.

CLAVE: $\|G(X) - G(Y)\|_\infty \leq \alpha \|X - Y\|_\infty$ $\quad \alpha = Lh < 1$

CONTRACTIVA

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD LOCAL

<u>Proposición</u>: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto, $F: [a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua y unif. Lipschitz en t. (e.d. $\exists L$ tal que $|F(t,X) - F(t,Y)| \leq L|X-Y| \quad \forall t \in [a,b], \ \forall X, Y \in \Omega$)

Sean $t_0 \in [a,b]$, $X_0 \in \Omega$. Entonces, si δ es suficientemente pequeño existe $X: I \longrightarrow \Omega$, $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [a,b]$ C^1 y tal que

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)) & t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Esa solución es única.

<u>demostración</u>

La demostración es como en el caso $\Omega = \mathbb{R}^d$. $X_0(t) \equiv X_0$ y, recursivamente, $X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X_n(s))\,ds$. Para que las X_n estén bien definidas hay que asegurarse de que $X_n(t) \in \Omega$ $\forall t \in I$.

¿Cómo elegir δ para que eso ocurra?

i) $\left.\begin{array}{l} \Omega \text{ abierto} \\ X_0 \in \Omega \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r > 0$ tal que $\overline{B}(X_0, r) \subset \Omega$

Como $[a,b] \times \overline{B}(X_0, r)$ es compacto y $F\big|_{[a,b]\times\overline{B}}$ es continua, $\exists M \ (= M(r))$ tal que $|F(t,X)| \leq M$ si $t \in [a,b]$ y $X \in \overline{B}(X_0, r)$

ii) Si $\delta \leq \frac{r}{M}$ entonces $X_n(t) \in \overline{B}(X_0, r)$ si $t \in I$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>demostración</u>: por inducción en n.

$n = 0$ $\quad (X_0(t) \equiv X_0)$ ✓

paso inductivo: cierto para $n \Longrightarrow$ cierto para $n+1$. $X_n(s) \in \overline{B}(X_0, r)$

$$|X_{n+1}(t) - X_0| = \left|\int_{t_0}^{t} F(s, X_n(s))\,ds\right| \overset{\text{supon. } t_0 \leq t}{\leq} \int_{t_0}^{t} |F(s, X_n(s))|\,ds \overset{\text{H.I.}}{\leq} \int_{t_0}^{t} M =$$

$$= M \cdot (t - t_0) \leq M \cdot \delta \overset{\delta \leq \frac{r}{M}}{\leq} r$$

Ahora se procede como en el caso global para demostrar convergencia, para lo que se necesita $L\delta < 1$. ■ (proposición)

<u>Comentarios</u>: Se necesita $\delta \leq \frac{r}{M(r)}$, $\delta < \frac{1}{L}$

<u>PROPOSICIÓN</u>: (Regularidad de las soluciones)

Con las hipótesis del T$^{\underline{ma}}$ existencia/unicidad local, si F es $C^m([a,b]\times\Omega)$ entonces $X \in C^{m+1}(I)$

<u>demostración</u>: por inducción

$m=1$: X es C^2

X es C^1 por la prop.

$$X'(t) = F(\underset{\underset{C^1}{\uparrow}}{t, X(t)}) \Rightarrow C^1$$ (por la regla de la cadena), e.d.,

X' es C^1 o, lo que es lo mismo, X es C^2. ■

<u>PROLONGABILIDAD DE SOLUCIONES</u>

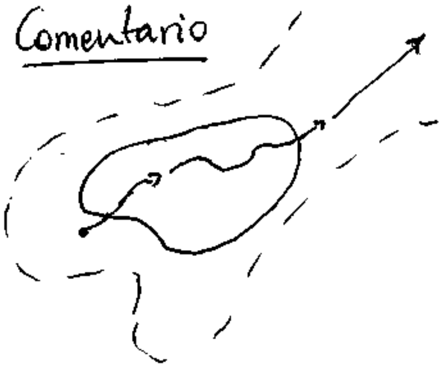
<u>PROPOSICIÓN</u>: Con las mismas hipótesis del T$^{\underline{ma}}$ de existencia y unicidad local ($F: [a,b]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$), existe un intervalo máximo en el que está definida la solución. Ese intervalo es de uno de los siguientes tipos: $[a,b]$, $[a,\beta]$, $(\alpha,b]$, (α,β) donde $a \leq \alpha < \beta \leq b$.

Además, si es de la forma $*,\beta)$ entonces $\forall K \subset \Omega$ compacto existe un $t_K < \beta$ tal que $X(t) \notin K$, $t_K < t < \beta$

Algo similar para $(\alpha, *$

<u>Sin demostración</u>

<u>Comentario</u>



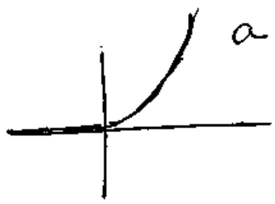
En palabras menos precisas
$X(t) \text{ "}\xrightarrow[t\to\beta]{}\text{" } \partial\Omega$ ó ∞
e.d. $|X(t)| \longrightarrow \infty$

<u>Ejemplos</u>:

- YA HECHOS:

① $x' = x^{2/3}$
$x(0) = 0$
(No es Lipschitz cerca de 0, en 0 "la derivada" es ∞)

$X_1(t) = 0$
$X_2(t) = at^3$
son soluciones


$a \neq 0$
no unicidad

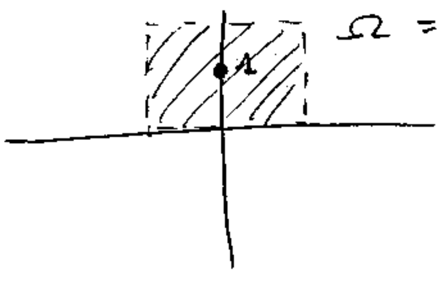
② $x' = x^2$
$x(0) = 1$
$t \in [-1,1] \longleftarrow$ intervalo de existencia es $[-1,1]$

$\hookrightarrow x(t) = \frac{1}{1-t}$ existe si $t < 1$

si no nos restringimos inicialmente a $[-1,1]$, está definida en $(-\infty, 1)$

<u>Observación</u>: para el caso autónomo se pueden tomar $[a,b]$ cada vez más grandes hasta que llenen $\mathbb{R}$ ($[-n,n]$, $n \in \mathbb{N}$)

Volviendo al ejemplo: $F(t,x) = x^2$ $\quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
pero no es Lipschitz en $x \in \mathbb{R}$, porque $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$ no está acotada en $\mathbb{R}$, pero sí en $[-A,A]$, $A \in \mathbb{R}^+$, e.d., es Lipschitz en x, uniformemente en t, si la restringimos a $\mathbb{R}\times[-A,A]$ $(L = 2A)$



$\Omega = [-1,1]\times[0,2]$

Observación: $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ $\quad f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$\uparrow$ intervalo

Si $f \in C^1(I)$, entonces $\underset{x \in I}{|f'(x)| \leq L}$ porque

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq L \qquad h \to 0 \implies |f'(x)| \leq L$$

▶ MÁS EJEMPLOS:

$x'' = \cos(tx)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

$\hookrightarrow$ sistema $y = x'$: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ \cos(tx) \end{bmatrix} = F(t, X)$, $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$T^{\underline{ma}}$ existencia / unicidad

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t\,\mathrm{sen}(tx) \end{bmatrix}$$

En $[a,b] \times \mathbb{R}^2$, las derivadas parciales de F con respecto a x, y están acotadas $\leadsto$ se puede usar el $T^{\underline{ma}}$ existencia y unicidad global: $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq 1$ $\quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \leq \max(|a|, |b|)$

$\uparrow$ por el "$-t$".

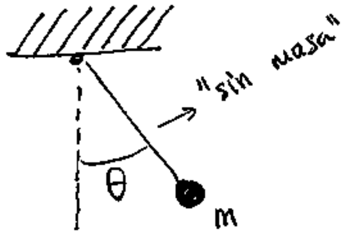
$\implies \exists!$ solución en $[a,b]$

$n \in \mathbb{N}$, $[a,b] = [-n,n] \longrightarrow \exists!\, X_n : [-n,n] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ solución

$X_{n+1}\big|_{[-n,n]}$ es solución, por unicidad, $X_{n+1}\big|_{[-n,n]} = X_n$

$\longrightarrow \exists!\, X: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ solución $\left(X\big|_{[-n,n]} \overset{\text{def.}}{=} X_n \right)$

PÉNDULO SIMPLE:



Sin resistencia al aire

$$\theta'' = \frac{-g}{\ell} \operatorname{sen}(\theta) \qquad \ell = \text{long. barra}$$

El PVI con $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = V_0 \end{cases}$ tiene solución $t \in \mathbb{R}$ y es única.

$\longrightarrow$ Sistema: $\begin{bmatrix} \theta \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix} = F(t, \theta, v)$

$\frac{\partial F}{\partial v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(\theta) \end{bmatrix}$ ambas acotadas en $[\theta, v]^T \in \mathbb{R}^2$

DEPENDENCIA DE PARÁMETROS

Motivación:

① $\left.\begin{array}{l} X'(t) = F(t, X(t)) \\ X(t_0) = \xi \end{array}\right\} \longrightarrow X(t, \xi)$ "la" solución

Si se mueve ξ ligeramente, ¿es la nueva solución similar a la original?

② Podría ser que F depende de un parámetro λ.

$\begin{array}{l} X'(t) = F(t, X(t), \lambda) \\ X(t_0) = \xi \end{array}$ solución $\rightsquigarrow X(t, \xi, \lambda)$

Si variamos λ ligeramente, ¿produce variaciones pequeñas en la solución?

Obser: ② se puede convertir en ① de la siguiente manera: $Y(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ \lambda \end{bmatrix} \rightsquigarrow Y' = \begin{bmatrix} X' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t, X, \lambda) \\ 0 \end{bmatrix} = G(t, Y)$

$$Y(t_0) = \begin{bmatrix} \xi \\ \lambda \end{bmatrix}$$

③ Si $\hat{F}(t,x) \overset{\downarrow}{\approx} \overset{\downarrow}{F}(t,x)$

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}' &= \hat{F}(t,\hat{x}) \\ \hat{x}(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\| \begin{aligned} x' &= F(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \qquad \text{¿es } \hat{x} \approx x\,?$$

Ej: $\theta'' = -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}(\theta)$ "F"

$\theta'' = -\frac{g}{\ell}\cdot\theta$ "$\hat{F}$"

y para $|\theta| << 1$, $\mathrm{sen}(\theta) \approx \theta$ $\left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\theta} = 1\right)$

$\mathrm{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots$

$|\mathrm{sen}\,\theta - \theta| \leq C|\theta|^3 \qquad |\theta| \leq 1$

Base:

LEMA DE GRONWALL

Sean $u, f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, y $g \geq 0$.

Supongamos que $u(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)\,u(s)\,ds$

Entonces: $u(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)\,g(s)\,e^{\int_s^t g(u)\,du}\,ds \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)\,g(s)\,e^{\int_s^t g(u)\,du}\,ds}$$

demostración

Sea $z(t) \overset{def.}{=} \int_a^t g(s)\,u(s)\,ds$

- $z'(t) = g(t)\,u(t) \underset{g\geq 0}{\overset{hip.}{\leq}} g(t)\Big(f(t) + z(t)\Big) = gf + gz$

•• Sea $G(t)$ una primitiva de $g(t)$, e.d., $G'(t) = g(t)$
(por ejemplo $G(t) = \int_a^t g(u)\,du$)

$$\underbrace{e^{-G}\left(z'(t) - g(t)\cdot z(t)\right)}_{\frac{d}{dt}\left(e^{-G(t)}\cdot z(t)\right)} \leq f(t)\, g(t)\, e^{-G}$$

$$e^{-G} \geq 0$$

$$\therefore \left(e^{-G} z\right)' \leq f g e^{-G} \xrightarrow[\text{entre } a \text{ y } t]{\text{integrando}} \underbrace{\int_a^t \left(e^{-G} z\right)' ds}_{[1]} \leq$$

$$\leq \int_a^t f(s)\, g(s)\, e^{-G(s)}\, ds$$

$$[1] = e^{-G(s)} z(s) \Big|_{s=a}^{s=t} = e^{-G(t)}\cdot z(t) - e^{-G(a)}\cdot z(a) = e^{-G(t)} z(t)$$

e.d., $e^{-G(t)} z(t) \leq \int_a^b f(s)\, g(s)\, e^{-G(s)}\, ds \xRightarrow{e^G > 0}$

$$\Rightarrow z(t) \leq e^{G(t)} \int_a^t f(s)\, g(s)\, e^{-G(s)}\, ds = \int_a^t f(s)\, g(s)\, e^{G(t)-G(s)}\, ds$$

y $G(t) - G(s) = \int_s^t g(u)\, du$

$\therefore$ Hasta ahora "$\int_s^t G'(u)\, du$" observar que

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)\, u(s)\, ds = f(t) + z(t) \leq$$

$$\leq f(t) + \int_a^t f(s)\, g(s)\, e^{\int_s^t g(u)\, du}\, ds \quad \blacksquare$$

CASOS PARTICULARES

① $f \equiv M$ constante

$u(t) \leq M e^{\int_a^t g(s)\,ds}$

② $f \equiv M$, $g \equiv L$ constantes

$u(t) \leq M e^{L(t-a)}$

CONSECUENCIAS DEL LEMA DE GRONWALL

Proposición: Sea Ω abto. en $\mathbb{R}^d$, $F: [a,b]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua y tal que $|F(t,\xi) - F(t,\eta)| \leq L|\xi - \eta|$ $\quad \xi,\eta \in \Omega$, $t\in[a,b]$ $(L\in\mathbb{R}, L\geq 0)$

Sean $X_1, X_2 : [a,b] \longrightarrow \Omega$ C^1, y sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tal que $|X_j'(t) - F(t, X_j(t))| \leq \varepsilon_j$, $t\in[a,b]$, $j=1,$

$\Big(\|X_j' - F(t,X_j)\|_\infty \underset{\text{en } [a,b]}{\leq} \varepsilon_j \Big)$. Entonces:

$$|X_1(t) - X_2(t)| \leq |X_1(a) - X_2(a)|\, e^{L(t-a)} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{e^{L(t-a)}-1}{L} \quad , t\in[a,b]$$

demostración

i) Sea $u(t) = |X_1(t) - X_2(t)|$

$X_1(t) = X_1(a) + \int_a^t X_1'(s)\,ds$

$X_2(t) = X_2(a) + \int_a^t X_2'(s)\,ds$

Restando: $\left| X_1(a) - X_2(a) + \int_a^t (X_1'(s) - X_2'(s))\,ds \right| \leq$

$\leq |X_1(a) - X_2(a)| + \int_a^t |X_1'(s) - X_2'(s)|\,ds$

ii) $|X_1'(s) - X_2'(s)| \leq |X_1'(s) - F(s,X_1(s))| + |X_2'(s) - F(s,X_2(s))| +$

$+ |F(s,X_1(s)) - F(s,X_2(s))| \implies |X_1'(s) - X_2'(s)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + L\underbrace{|X_1(s) - X_2(s)|}_{u(s)}$

iii) Entonces:

$$u(t) \leq |X_1(a) - X_2(a)| + \int_a^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + L u(s))\, ds =$$

$$= \underbrace{|X_1(a) - X_2(a)| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t-a)}_{f(t)} + \int_a^t \overset{g(t)}{L}\, u(s)\, ds$$

iv) Aplicando el L.G.:

$$u(t) \leq \underset{\alpha + \beta t}{\overset{\parallel}{f(t)}} + \int_a^t L \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrar por partes}}}{f(s)}\, e^{L(t-s)}\, ds \qquad e^{L(t-s)} \leftarrow e^{\int_s^t g(u)\,du}, \quad g(u) = L$$

y se obtiene la estimación del enunciado. ∎

HIPÓTESIS BÁSICA A PARTIR DE AHORA:

$F: [a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua, Lipschitz en Ω $\longrightarrow \exists L$ const. F unif. en t

VISTO:

$$|X_1(t) - X_2(t)| \leq |X_1(a) - X_2(a)|e^{L(t-a)} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{L(t-a)} - 1}{L}$$

donde $\left|X_j'(t) - F(t, X_j(t))\right| \leq \varepsilon_j \quad t \in [a,b]$

<u>Consecuencias</u>

a) Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (e.d. son soluciones) y $X_1(a) = X_2(a)$, entonces $X_1 = X_2$ en $[a,b]$ ($\rightsquigarrow$ unicidad otra vez)

b) Dependencia continua de condiciones iniciales.

PROPOSICIÓN: F como habitual. Sea $X(t,\xi)$ es la solución (local) a $X'(t) = F(t, X(t))$ $(\xi \in \Omega)$

$$X(a) = \xi$$

Supongamos que $\xi_0 \in \Omega$, entonces:

1. Existen $r>0$, $\delta>0$ tal que $X(t,\xi)$ va de $[a, a+\delta] \times \overline{B}(\xi_0, r)$ en $\overline{B}(\xi_0, r)$ (y es solución en $[a, a+\delta]$)

2. $|X(t,\xi) - X(t,\eta)| \leq |\xi - \eta| e^{L(t-a)}$

   $\xi, \eta \in \overline{B}(\xi_0, \frac{r}{2})$, $a \leq t \leq t+\delta$

3. Más generalmente, si M es una cota superior de $|F(t,\xi)|$ $(t,\xi) \in [a,b] \times \overline{B}(\xi_0, r)$ (es compacto y F es continua), entonces $|X(t,\xi) - X(\hat{t}, \eta)| \leq M|t-\hat{t}| + |\xi - \eta| e^{L(\min(t,\hat{t}) - a)}$.

En particular, X es continua (en ambas variables) y C^1 en t

$$\Big(X: [a, \underset{\substack{\Downarrow \\ t}}{a}+\delta] \times \overline{B}(\underset{\substack{\Downarrow \\ \xi}}{\xi_0}, r) \longrightarrow \Omega\Big)$$

demostración

1. $T^{\underline{ma}}$ exist./unic. local

2. Por la proposición de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (soluciones) y $\xi = X_1(a)$, $X_1(t) = X(t,\xi)$, $X_2(t) = X(t,\eta)$, $\eta = X_2(a)$

3. Supongamos que $t < \hat{t}$. $|X(t,\xi) - X(\hat{t},\eta)| \leq$ sumar y restar $X(t,\eta)$

$$\leq \underset{\substack{\wedge\!| \, 2. \\ |\xi-\eta| e^{L(t-a)}}}{|X(t,\xi) - X(t,\eta)|} + \underbrace{|X(t,\eta) - X(\hat{t},\eta)|}_{\circledast}$$

$$\circledast \underset{\uparrow}{=} \left| \int_t^{\hat{t}} X'(s,\eta)\,ds \right| \overset{\text{solución}}{=} \left| \int_t^{\hat{t}} F(t, X'(s,\eta))\,ds \right| \leq$$

$$X(t,\eta) = \underset{\substack{\| \\ \eta}}{X(a,\eta)} + \int_a^t X'(s,\eta)\,ds$$

$\leq \int_t^{\bar t} |F(s, X(s,\eta))| ds \leq M(\bar t - t) = M|\bar t - t|$

Juntamos las estimaciones obtenemos 3. ∎

CORALARIO: Si $F = F(t, \xi, \overset{\text{parámetro}}{\lambda})$ y es Lipschitz en (ξ, λ) pasando al problema $\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} X' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$ y usando el resultado anterior vemos que la solución $X(t, \xi, \lambda)$ de $X' = F(t, X, \lambda)$, $X(a) = \xi$ es continua en todas las variables.

ntinuación
nsecuencias p. 96

=) Sea $\hat F : [a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz continua.

Sea $\hat X(t)$ la solución de $\begin{cases} \hat X'(t) = \hat F(t, \hat X(t)) \\ \hat X(a) = \xi_a \end{cases}$

y X la de $\begin{cases} X' = F(t, X(t)) \\ X(a) = \xi_a \end{cases}$

Supongamos que $|\hat F(t, \hat X(t)) - F(t, \hat X(t))| \leq \varepsilon$, entonces

$$|X(t) - \hat X(t)| \leq \varepsilon \, \frac{e^{L(t-a)} - 1}{L}$$

demostración

1. $\hat X$ es "casi solución" para F, e.d., $|\hat X'(t) - F(t, \hat X(t))| \leq \varepsilon$ $t \in [a,b]$

Razón:

$\hat X'(t) = \hat F(t, \hat X(t))$

$|\hat X'(t) - F(t, \hat X(t))| = |\hat F(t, \hat X(t)) - F(t, \hat X(t))| \overset{\text{hipótesis}}{\leq} \varepsilon$

2. Con $X_1 = X$, $X_2 = \hat X$, $|\underbrace{X_1(a)}_{\xi_a} - \underbrace{X_2(a)}_{\xi_a}| = 0$

$\varepsilon_1 = 0$ $\quad \varepsilon_2 = \varepsilon$

Entonces $|\underset{X(t)}{\underset{\parallel}{X_1(t)}} - \underset{\hat X(t)}{\underset{\parallel}{X_2(t)}}| \leq \varepsilon \, \frac{e^{L(t-a)} - 1}{L}$ ∎

VISTO

$X' = F(t, X(t)) \qquad t \in [a,b]$

$\hat{X}' = F(t, \hat{X}(t)) \qquad X(a) = \hat{X}(a)$

$\left|\hat{F}(t,\hat{X}(t)) - F(t,\hat{X}(t))\right| \leq \varepsilon$ en $t \in [a,b]$ entonces

$|X(t) - \hat{X}(t)| \leq \varepsilon \dfrac{e^{L(t-a)} - 1}{L}$ ($L \rightsquigarrow$ const. Lipschitz de F)

Ejemplo: péndulo simple

$\theta'' = \dfrac{-g}{L} \operatorname{sen}(\theta) \qquad \begin{bmatrix} \theta \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{g}{\ell} \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = F(\theta, v)$

$v = \theta'$

Observación: para θ pequeño, $\operatorname{sen}(\theta) \approx \theta$

Problema aproximado: $\theta'' \overset{(\hat{P})}{=} \dfrac{-g}{L}\theta \longrightarrow \begin{bmatrix} \theta \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{g}{L}\theta \end{bmatrix}$ $\hat{F}$

Datos iniciales: $\theta(0) = \theta_0, \; \theta'(0) = 0$

La solución a $(\hat{P})$ es $\hat{\theta}(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$, $\omega = \sqrt{g/\ell}$ $\quad (|\hat{\theta}(t)| \leq \theta_0)$

$\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \cos(\omega t) \\ -\omega\theta_0 \operatorname{sen}(\omega t) \end{bmatrix}$ ¿comparación de F y $\hat{F}$ en $\hat{X}(t)$?

$$\underbrace{\left|\hat{F}(\hat{\theta}(t), \hat{v}(t)) - F(\hat{\theta}(t), \hat{v}(t))\right|}_{= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-g}{L}(\hat{\theta}(t) - \operatorname{sen}(\hat{\theta}(t))) \end{bmatrix}} = \frac{g}{L}\left|\hat{\theta}(t) - \operatorname{sen}(\hat{\theta}(t))\right| \underset{\text{afirmación (LEMA)}}{\leq} \frac{g}{L} \cdot \frac{|\hat{\theta}(t)|^3}{6}$$

LEMA: Si $\theta \geq 0$, $\theta - \dfrac{\theta^3}{3!} \leq \operatorname{sen}\theta \leq \theta$

demostración

Serie de potencias del seno

otra forma: $\underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{f(\theta)} \leq \theta = g(\theta) \quad \theta \geq 0$

$f(0) = g(0) \; (= 0)$

$f'(\theta) = \cos\theta \leq 1 = g'(\theta) \quad \left((g-f)' \geq 0 \Rightarrow g-f \text{ crece y vale } 0 \text{ en } 0\right)$

$\Rightarrow f(\theta) \le g(\theta) \quad \forall \theta \ge 0$

$\underbrace{\theta - \frac{\theta^3}{6}}_{f} \le \underbrace{\operatorname{sen}(\theta)}_{g}$ En 0 $f(0) = g(0)$ ¿ $f'(\theta) \le g'(\theta)$?

$1 - \frac{\theta^2}{2} \le \cos(\theta)$, $f'(0) \overset{?}{=} g'(0)$, ¿ $f'' \le g''$?

$\overset{\shortparallel}{-\theta} \le -\operatorname{sen}\theta$ ✓ sí

Como $\theta - \operatorname{sen}(\theta)$ es impar: $|\theta - \operatorname{sen}(\theta)| = |\theta| - \operatorname{sen}(|\theta|) \le \frac{|\theta|^3}{6}$

Entonces:

$$\left|\hat{F}(\hat{\theta},\hat{v}) - F(\hat{\theta},\hat{v})\right| \le \frac{g}{\ell}\frac{|\hat{\theta}(t)|^3}{6} \le \frac{g}{\ell}\frac{|\theta_0|^3}{6}$$

$\hat{\theta}(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$

Consecuencia

$$|X(t) - \hat{X}(t)| \le \frac{g}{\ell}\frac{|\theta_0|^3}{6} \cdot \frac{e^{Lt}-1}{L}$$

$$|\theta(t) - \hat{\theta}(t)| + |\theta'(t) - \hat{\theta}'(t)| \le \frac{g}{\ell} \cdot \frac{|\theta_0|^3}{6} \cdot \frac{e^{Lt}-1}{L}$$

¿L? $F = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix}$

$\frac{\partial F}{\partial v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{\ell}\cos(\theta) \end{bmatrix}$ $L = \max\left(1, \frac{g}{\ell}\right)$ ∎

DIFERENCIABILIDAD CON RESPECTO A PARÁMETROS Y DATOS INICIALES

$$F(t,x,\lambda) : \overbrace{(a,b) \times \Omega \times \Lambda}^{V} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$\qquad\qquad\quad \underset{t}{\Psi} \qquad \underset{x}{\Psi} \qquad \underset{\lambda}{\Psi}$$

Ω abto en $\mathbb{R}^d$, Λ abto en $\mathbb{R}^m$

<u>Notación</u>: $D_x F \equiv \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ $\quad \begin{array}{l} i=1,\dots,d \\ j=1,\dots,d \end{array}$ $\qquad D_\lambda F \equiv \dfrac{\partial F_i}{\partial \lambda_K}$ $\quad \begin{array}{l} i=1,\dots,d \\ K=1,\dots,m \end{array}$

Sea $(t_0, \xi_0, \lambda_0) \in V$. Supongamos que F es continua y $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial \lambda_K}$ son continuas en V.

<u>Proposición</u>: $\exists \delta > 0$ tal que si $|\xi - \xi_0| < \delta$, y $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, entonces existe una solución (que es única) del problema

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t), \lambda) & \text{en } [t_0, t_0+\delta] \\ X(t_0) = \xi \end{cases}$$

Esa solución $X(t,\xi,\lambda)$ es C^1 y sus derivadas con respecto a λ_K o ξ_j satisfacen una EDO. Por ejemplo, si

$Y(t) \overset{def.}{=} \dfrac{\partial X}{\partial \lambda_K}(t,\xi,\lambda)$, entonces Y satisface

$$(\text{ec})\begin{cases} Y'(t) = D_x F(t, X(t,\xi,\lambda), \lambda) \cdot Y(t) + \underbrace{\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_K}(t, X(t,\xi,\lambda),\lambda)}_{B(t) \quad d\times 1} \\ Y(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$(Y' = A(t) Y + B(t))$$

En términos de matrices, si $M(t) = \underset{\mathcal{M}\, d\times m}{DX(t,\xi,\lambda)}$, entonces

$$M'(t) = A(t) M(t) + D_\lambda F(t, X(t,\xi,\lambda),\lambda)$$
$$M(t_0) = 0$$

Si $N(t) = \underset{d\times d}{DX}$, $\quad \begin{array}{l} N' = A(t) N \\ N(0) = I \end{array}$

Observación: (EC) se obtiene derivando formalmente (t, ξ, λ)

$$\frac{\partial X'}{\partial \lambda} \overset{\text{cadena}}{=} D_x F \cdot \underbrace{\frac{DX}{\partial \lambda_k}}_{= Y} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}(t, X(t,\xi,\lambda), \lambda)$$

Como $X(t_0) = \xi$, $\frac{\partial X}{\partial \lambda_k}(t_0, \xi, \lambda) = \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_k} = 0$

SISTEMAS AUTÓNOMOS EN EL PLANO (Antonio (tarde))

$X'(t) = F(X(t))$, e.d., F no depende de t, solo de X

Ejemplo

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z + xy$$

$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} \sigma(y-x) \\ \rho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{bmatrix}$$

sistema de Lorenz (meteorología)

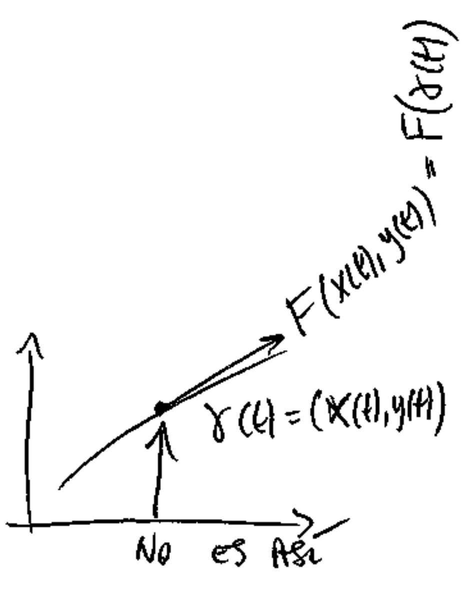
$x'' = f(x, \frac{dx}{dt})$ Sistemas mecánicos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ f(x,y) \end{bmatrix} \qquad y = x'$$

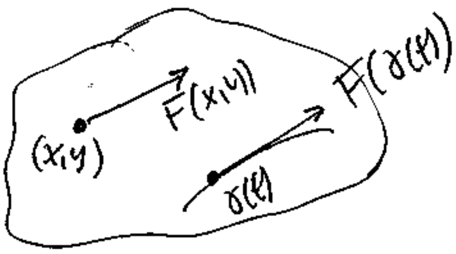
Ejemplo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = F(x,y)$$

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \qquad \gamma'(t) = F(x(t), y(t)) = F(\gamma(t))$$

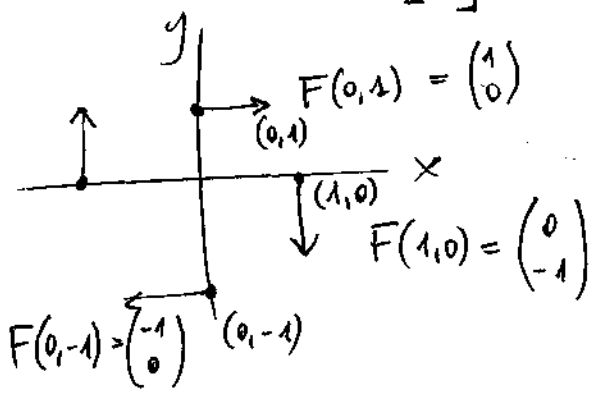


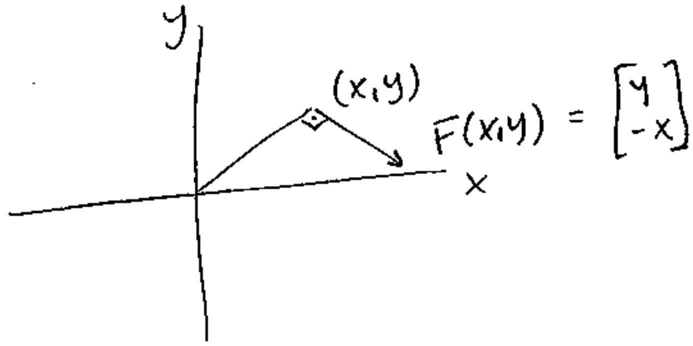
$F: \underset{\text{abto}}{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se puede interpretar como un "campo vector



Si $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$, la curva es tangent al vector F asociado al punto $\gamma(t)$

Ejemplo: $F(x,y) = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$





DEFINICIÓN: Una TRAYECTORIA del sistema $\vec{x}' = F(\vec{x})$ es la curva que describe la solución, sin tener en cuenta la parametrización, es decir, es el subconjunto del plano descrito por la solución.

En general es más sencillo encontrar las trayectorias que resolver el sistema.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = y \,, \quad \frac{dy}{dt} = -x \qquad \frac{dy}{dx} \text{ "="} \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-x}{y} \rightsquigarrow \text{exac.}$$

$$d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0 \longrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} = C$$

En general las trayectorias de $\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$ "son las soluciones" de $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ siempre que $g(x,y) \neq 0$ $\left(\frac{dx}{dy} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \text{ si } f \neq 0 \right)$

Cerca de los puntos (x_0, y_0) donde $g(x_0,y_0) \neq 0$ se puede hacer lo 1º y cerca de puntos (x_0, y_0) donde $f(x_0,y_0) \neq 0$ se puede hacer lo 2º.

DEFINICIÓN: Consideramos el sistema $\begin{matrix} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{matrix}$ (f, g C^1 en un abierto) Un PUNTO CRÍTICO (o de EQUILIBRIO) del sistema es un (x_0,y_0) tal que $\begin{cases} f(x_0,y_0) = 0 \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$.

Relevancia

$\begin{matrix} x(t) \equiv x_0 \\ y(t) \equiv y_0 \end{matrix}$ es una solución del sistema

x(t) const.

$x'(t) = 0 = f(x_0,y_0) = f(x(t), y(t))$

lo mismo para y'

la trayectoria de esa solución es el punto (x_0, y_0)

PROPOSICIÓN: Sea $\begin{matrix} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{matrix}$ un sistema autónomo ($f, g \in C^1(\Omega)$ Ω abto $\subset \mathbb{R}^2$)

1. Si $(x(t), y(t))$ es solución del sistema, entonces $\begin{matrix} \bar{x}(t) = x(t+a) \\ \bar{y}(t) = y(t+a) \end{matrix}$ también lo es (y describe la misma trayectoria)

2. Si dos soluciones describen la misma trayectoria entonces están relacionadas como 1.

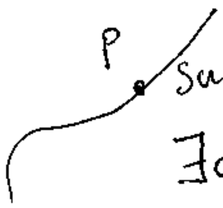
demostración

① $\bar{x}'(t) = x'(t+a) = f(x(t+a), y(t+a)) \underset{f \text{ no depende de } t}{=} f(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$

Lo mismo para $\bar{x}$

$$f(t+a, x(t+a), y(t+a)) = f(t+a, \bar{x}(t), \bar{y}(t))$$

② $(x(t), y(t))$, $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ dos soluciones con la misma trayectoria



Supongamos que es $(x(0), y(0))$

$\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $(\bar{x}(a), \bar{y}(a)) = P = (x(0), y(0))$

Sea $\hat{x}(t) = \bar{x}(t+a)$

$\hat{y}(t) = \bar{y}(t+a)$

i) $(\hat{x}, \hat{y})$ es solución por ①

ii) $(\hat{x}(0), \hat{y}(0)) = p = (x(0), y(0))$

por unicidad, $\hat{x}(t) = x(t)$, $\hat{y}(t) = y(t)$ (intervalo de existencia) e.d.,

$$x(t) = \bar{x}(t+a), \quad y(t) = \bar{y}(t+a) \quad \blacksquare$$

SISTEMAS AUTÓNOMOS (el de la pesca con mosca)

$X'(t) = V(t)$, en general sería $V(t,x)$, aquí no.

① $V(X)$ Lipschitz $\longrightarrow$ existencia y unicidad (local o global)

para $\begin{cases} X' = V(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

② $X(t)$ es solución de $X' = V(X)$

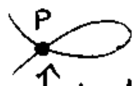
Entonces $Y(t) = X(t+c)$ también es solución

$Y'(t) = x'(t+c) = V(X(t+c)) = V(y(t))$

③ $X(t)$ solución

$\quad \Lsh\ X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \equiv$ curva parametrizada

Supongamos $X(t_1) = X(t_2) \Longrightarrow$



$t = t_1, t_2$ NO PUEDE SER

$Y_1(t) = X(t+t_1)$

$Y_2(t) = X(t+t_2)$

$$\left.\begin{array}{l} Y_1'(t) = V(Y_1) \\ Y_1(0) = X(t_1) = P \\ \hline Y_2'(t) = V(Y_2) \\ Y_2(0) = X(t_2) = P \end{array}\right\} \Rightarrow Y_1 \equiv Y_2 \ \forall t$$

$\Longrightarrow X(t+t_1) = X(t+t_2) \ \forall t \qquad t_1 + t = s \ ; \ t = s - t_1$

$X(s) = X(s + \underbrace{(t_2 - t_1)}_{\equiv T}) = X(s+T) \ \forall s$ periódica

Observación

Soluciones periódicas $\equiv$ trayectorias cerradas

4) Interpretación geométrica

$\mathbb{R}^3$

TEOREMA (WINTNEY)

$V: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz. Sea $X'(t) = V(X(t))$

$K \subset \mathbb{R}^m$, compacto, con $X(t_0) \in K$. Entonces hay tres posibilidade

proyección

1) $\exists \hat{t} > t_0$ tal que $X(\hat{t}) \notin K$.

2) $X(t)$ es una trayectoria cerrada

3) $X(t)$ se aproxima cuando $t \to \infty$ a una determinada región de K, llamada atractor.

DEFINICIÓN:

* V es un CAMPO COMPLETO $\Longleftrightarrow$ las soluciones del sistema $X' = V(X)$ están definidas $\forall t$.

* $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es una INTEGRAL PRIMERA del campo $V \Longleftrightarrow$ $f(X(t)) = cte.$ para toda solución $X(t)$.

(Soluciones $\subset$ son conjuntos de nivel de f).

Ejercicio: demostrar que si f es una integral primera tal que $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$, entonces V es completo.

Sea $X(t)$ solución de $X'(t) = V(X(t))$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f(X(t)) = c \\ f(x) \xrightarrow[\|x\| \to \infty]{} \infty \end{array}\right\} X(t) \underset{t \to \infty}{\not\longrightarrow} \infty \Longrightarrow \exists M > 0 \text{ tal que } \|X(t)\| \leq M \ \forall$$

① $K = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq M\}$

$X(t) \subset K \quad \forall t \underset{\text{Wintney}}{\Longrightarrow} (2), (3) \leadsto$ sol. definida $\forall t$

alternativas

② $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^{m+1}$

$\tilde{K} = \{(x,t),\ \|x\| \leq M,\ t \in [0,1]\}$

$\|X(t)\| \leq M \Longrightarrow$ las trayectorias no salen por la "pared" lateral del cilindro $\Longrightarrow$ están definidas en $[0,T]$, T arbitrario

$\Longrightarrow$ definidas en $[0,\infty]$

Comentar que para el ejercicio anterior la demostración es idéntica para el caso $-\infty$.

<u>Ejercicio:</u> $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1$, $\lim_{\|x\| \to \infty} g(x) = \infty$

$\frac{d}{dt}(g(X(t))) \leq C$, para alguna constante.

Demostrar que X es infinitamente prolongable hacia la derecha.

Integrando en $[t_0, t]$: $g(x(t)) - g(x(t_0)) \leq C(t - t_0)$

$$g(x(t)) \leq g(x(t_0)) + C(t - t_0)$$

Nos fijamos en $t \in [t_0, T]$:

$$g(x(t)) \leq g(x(t_0)) + C(T - t_0) \leq M \quad \forall t \in [t_0, T]$$

$$g(x(t)) \leq M \underset{\substack{\uparrow \\ g(x) \xrightarrow[\|x\| \to \infty]{} \infty}}{\Longrightarrow} x(t) \text{ acotada } \forall t \in [t_0, T] \Rightarrow X \text{ definida en } [t_0, T] \ \forall t.$$

--- <u>RECUERDO</u>: Sistemas Autónomos ---

$X' = V(X)$ ¿soluciones $X(t)$ están definidas $\forall t$?

Integral primera: $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es una i.p. del campo $V \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow f(X(t)) = c \quad \forall X(t)$ solución

<u>Ejemplo</u>: $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1$, $\|g(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to \infty]{} \infty$

Sea $X(t)$ curva del campo tal que $\underbrace{\frac{d}{dt}(g(X(t))) \leq C}_{\text{hipótesis imposible de comprobar en la práctica}}$

Entonces $X(t)$ existe $\forall t > 0$.

<u>Ejemplo</u>: $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1$, $\|g(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to \infty]{} \infty$

$$\left|\frac{d}{dt}(g(x(t)))\right| = \left|\langle \nabla g(x(t)), X'(t) \rangle\right| = \left|\langle \nabla g(x(t)), V(x(t)) \rangle\right| \leq M \Rightarrow$$

$\Rightarrow V$ es completo.

$-M \leq \frac{d}{dt}(g(x(t))) \leq M$

hipótesis apriori:

$$|\langle \nabla g(\xi), V(\xi) \rangle| \leq M \quad \forall \xi \in D$$

Ejercicio:

a) $X'' + \nabla U(X) = 0 \quad , X \in \mathbb{R}^3$

$U: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ U \in C^1, \ \lim_{\|x\| \to \infty} |U(x)| = \infty$

Demostrar que las trayectorias son completas

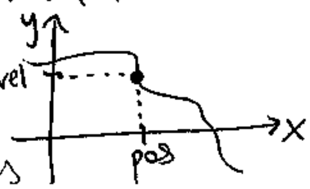
b) (ejercicio $\longrightarrow$ que lo haga Marta)

SISTEMA DE ORDEN 1 ASOCIADO:

a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\nabla U(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1' = y_1 \ ; \ x_2' = y_2 \ ; \ x_3' = y_3 \\ y_1' = -U_{x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ y_2' = -U_{x_2}(x_1, x_2, x_3) \\ y_3' = -U_{x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$

$\underbrace{(\overset{\text{posición}}{x}, \overset{\text{velocidad}}{y})}$

plano de fases desde el punto de vista de un físico



$\langle x''(t), x'(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\|x'\|^2\right)$

$\langle x', x' \rangle = \|x'\|^2$

$X(t)$ trayectoria

Idea: $\frac{d}{dt}\left(U(x(t))\right) = \langle \nabla U(x(t)), x'(t) \rangle$

$$0 = \langle x'' + \nabla U(x) \ , x' \rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|x'\|^2 + U(x)\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\|x\|^2 + U(x) = cte. \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\|y\|^2}_{E_c} + \underbrace{U(x)}_{E_p} = cte.$$

Falta demostrar:

$\|E(x,y)\| \xrightarrow[\|(x,y)\| \to \infty]{} \infty$ con $E(x,y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + U(x)$

(sabiendo que $|U(x)| \xrightarrow[\|x\| \to \infty]{} \infty$)

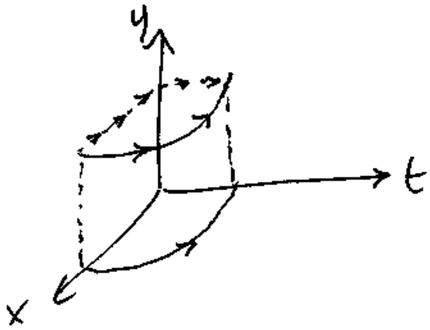
$$\left.\begin{matrix} \|(x,y)\| \longrightarrow \infty \\ \| \\ \|(x,0) + (0,y)\| \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} \|x\| \longrightarrow \infty \Longrightarrow V(x) \longrightarrow \infty \\ \text{ó} \\ \|y\| \longrightarrow \infty \Longrightarrow \frac{1}{2}\|y\|^2 \longrightarrow \infty \end{matrix}\right\} |E(x,y)| \longrightarrow \infty$$

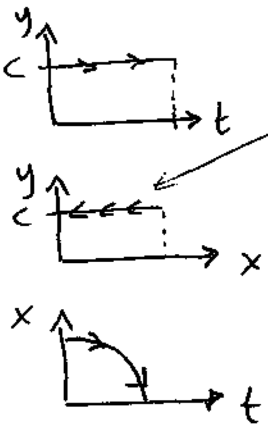
SISTEMAS AUTÓNOMOS EN EL PLANO (2 dimensiones)

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = F(x(t), y(t)) \\ y'(t) = G(x(t), y(t)) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} F(\underset{\text{NO}}{t}, x, y) \\ G(\underset{\text{NO}}{t}, x, y) \end{array}$$

<u>Observación</u>: $(x(t), y(t))$ es solución $\Longrightarrow$ $(x(t+c), y(t+c))$ es sol.

<u>INTERPRETACIÓN GRÁFICA</u>:





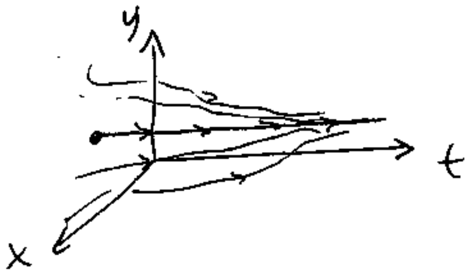
las flechas indican la dirección (el avance con respecto t)

La proyección en el plano XY es en el que nos centraremos

PUNTOS DE INTERÉS

① PUNTOS DE EQUILIBRIO:

(x_0, y_0) tales que $\left.\begin{cases} F(x_0, y_0) = 0 \\ G(x_0, y_0) = 0 \end{cases}\right\} \Longrightarrow$ Soluciones de $\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 \end{cases}$



$\xrightarrow[XY]{\text{proyección}}$

punto de equilibrio

De aquí viene la cuestión de estabilidad

② TRAYECTORIAS CERRADAS:

$(x(t), y(t))$ periódicas

INTEGRALES PRIMERAS

DEFINICIÓN: $E: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una integral primera de $\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} E \text{ no es constante en ningún abierto de } \Omega. \\ \text{Para cada solución } (x(t), y(t)), \text{ se tiene } E(x(t), y(t)) = C \end{cases}$

$$E(x(t),y(t)) = C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(E(x(t),y(t))\Big) = 0$$

Ejemplo: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2+1 \end{cases}$ Encontrar una integral primera:

$$\frac{dE}{dt}(x(t), y(t)) \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{dE}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{dE}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial E}{\partial y} y' = \frac{\partial E}{\partial x} y + \frac{\partial E}{\partial y}(x^2+1)$$

Problema: encontrar $E(x,y)$ tal que $\frac{\partial E}{\partial x} y + \frac{\partial E}{\partial y}(x^2+1) = 0$

Idea: buscar $E(x,y) = E_1(x) + E_2(y)$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} y + \frac{\partial E_2}{\partial y}(x^2+1) = 0 \implies \begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial x} = -(x^2+1) \implies E_1(x) = \frac{-x^3}{3} - x \\ \frac{\partial E_2}{\partial y} = y \implies E_2(y) = \frac{y^2}{2} \end{cases}$$

Solución: conjunto de nivel de $E(x,y) = \frac{-x^3}{3} - x + \frac{y^2}{2}$

Aplicación: ecuación del péndulo (sin rozamiento)

ángulo $\equiv x(t)$ Ley de Newton: $\boxed{x'' + K \operatorname{sen} x = 0}$

$\begin{cases} x' = y \\ y' = -K \operatorname{sen} x \end{cases}$ Buscamos $E(x,y)$ tal que $\frac{\partial E}{\partial x} x' + \frac{\partial E}{\partial y} y' = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial x} y + \frac{\partial E}{\partial y}(-K \operatorname{sen} x) = 0 \quad \begin{cases} \nearrow \frac{\partial E}{\partial x} = K \operatorname{sen} x \\ \searrow \frac{\partial E}{\partial y} = y \end{cases}$$

$$\implies E(x,y) = \frac{1}{2} y^2 - K \cos x$$

Soluciones: $\frac{1}{2} y^2 - K \cos x = C$

$$\frac{1}{2}y^2 - K\cos x = c \implies y^2 = 2(c + K\cos x) \implies \boxed{y = \pm\sqrt{2}\sqrt{c + K\cos x}}$$

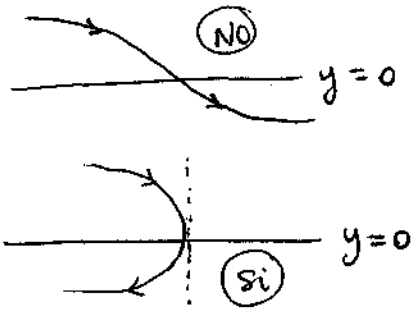
Recuerda: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -K\operatorname{sen} x \end{cases}$

como es $\pm$ es ① una simetría respeto del eje X.

② $\begin{cases} y > 0 \implies x'(t) > 0 \implies x(t) \nearrow \rightsquigarrow (x(t), y(t)) \ \boxed{\longrightarrow} \text{ a la derecha} \\ y < 0 \implies \text{a la izquierda} \end{cases}$

3) Buscamos puntos críticos (de equilibrio)

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ -K\operatorname{sen} x = 0 \end{array}\right\} \implies (k\pi, 0), \ k \in \mathbb{Z}$$



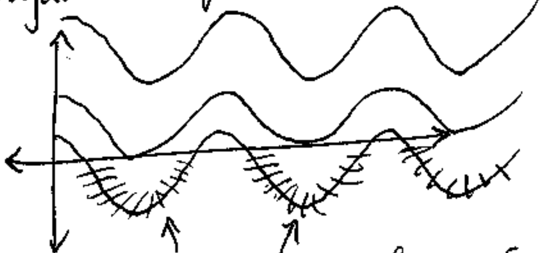
tangente vertical

) $y = 0$, pero (x, y) no es un punto crítico

Dibujando la gráfica $y > 0$ ($y < 0$ por simetría)

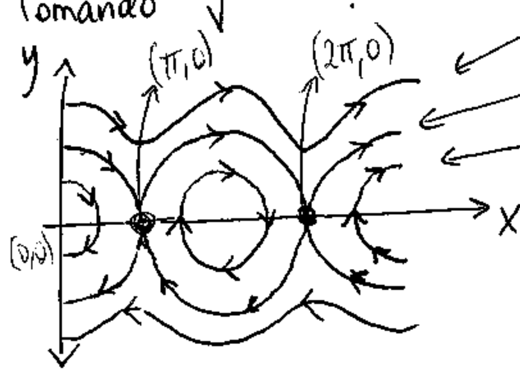
$y = \sqrt{2}\sqrt{c + K\cos x}$

Dibujamos $y = c + K\cos x$, que es similar



al tomar la raíz cuadrada nos olvidamos de estas trazas

Tomando $\sqrt{}$:

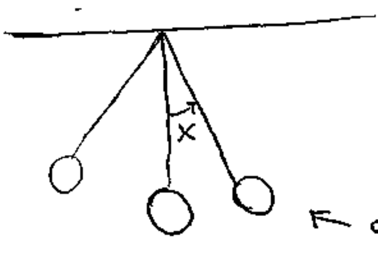


energía grande

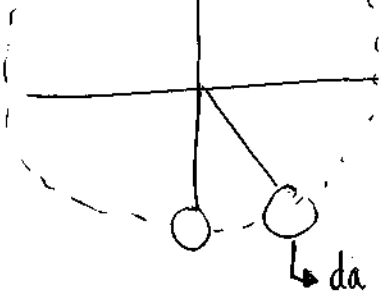
energía crítica

energía pequeña

} por simetría



← oscilaciones periódicas



$x = \pi$, velocidad 0, posición inestable. Si no se moviera un poco daría una vuelta completa y volvería a esta posición

↳ da vueltas indefinidamente

CASO GENERAL: SISTEMAS MECÁNICOS CONSERVATIVOS

$$x'' + f(x) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y = -f(x) \end{cases}$$

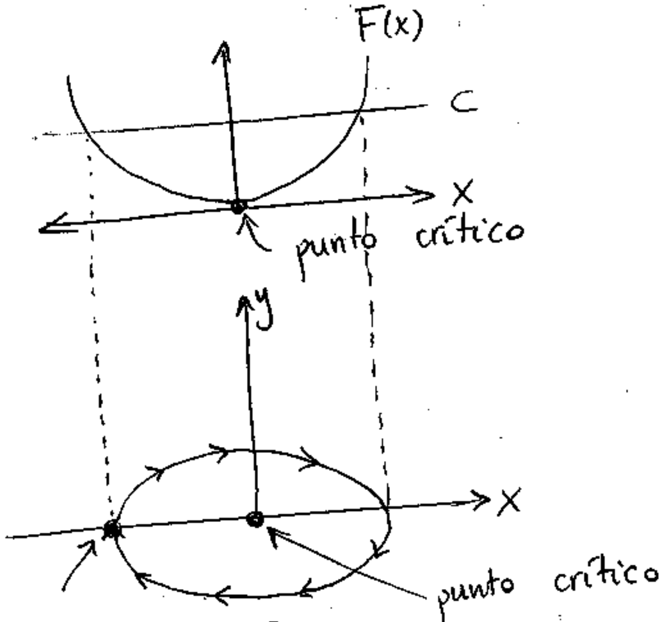
Buscamos una integral primera $E(x,y)$

$$0 = \frac{\partial E}{\partial x} x' + \frac{\partial E}{\partial y} y' = \frac{\partial E}{\partial x} y - \frac{\partial E}{\partial y} f(x)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial x} = f(x) \\ \frac{\partial E}{\partial y} = y \end{cases} \Rightarrow E(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + F(x), \text{ donde } F(x) = \int f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \pm \sqrt{2}\sqrt{C - F(x)}}$$

Puntos críticos: $\begin{cases} y = 0 \\ f(x) = F'(x) = 0 \end{cases}$

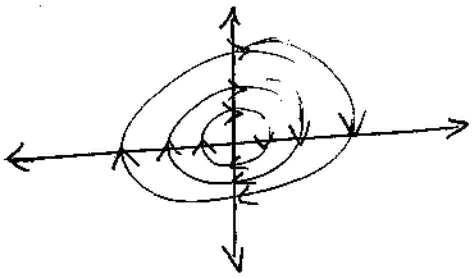


Si $F(x) = C \Rightarrow y = 0$

Ejercicio 1: $F(x) = x^4$

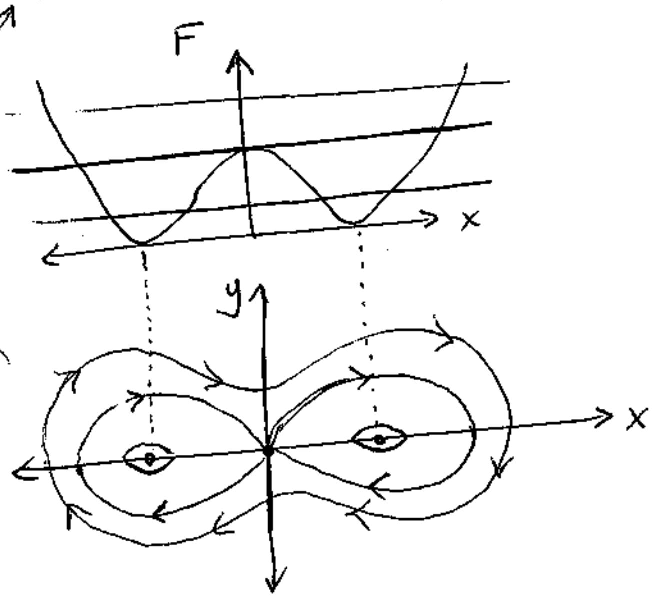
$$x'' + 4x^3 = 0$$

Así que dependiendo de C:

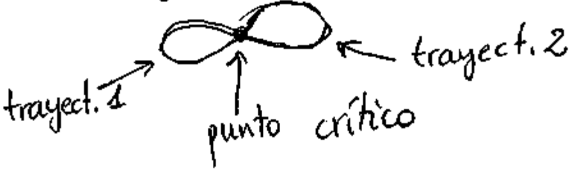


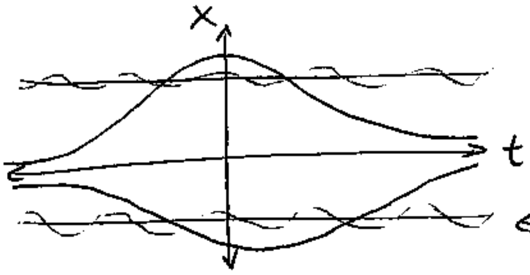
Me muevo hacia la derecha porque estos problemas empiezan con $x' = y \Rightarrow$ si $y > 0$ $x \nearrow$

Ejercicio 2:



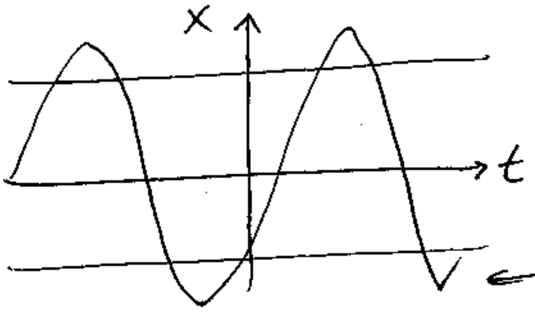
En el caso azul hay tres trayectorias:





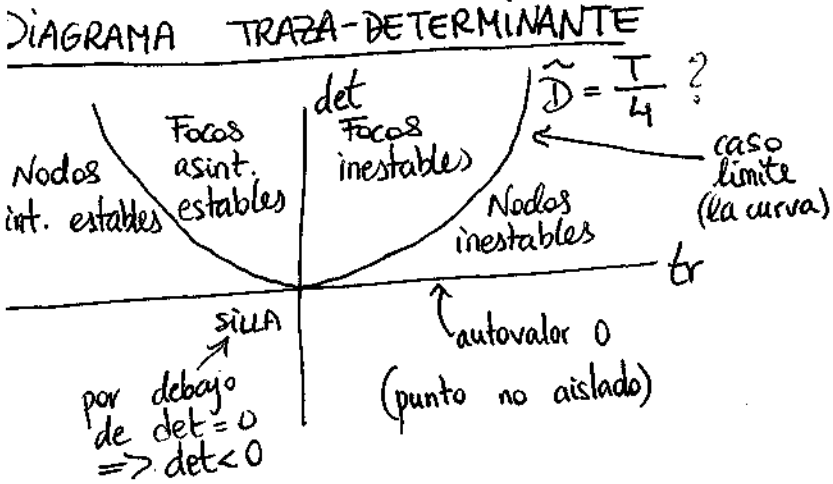
los 3 puntos críticos son soluciones constantes

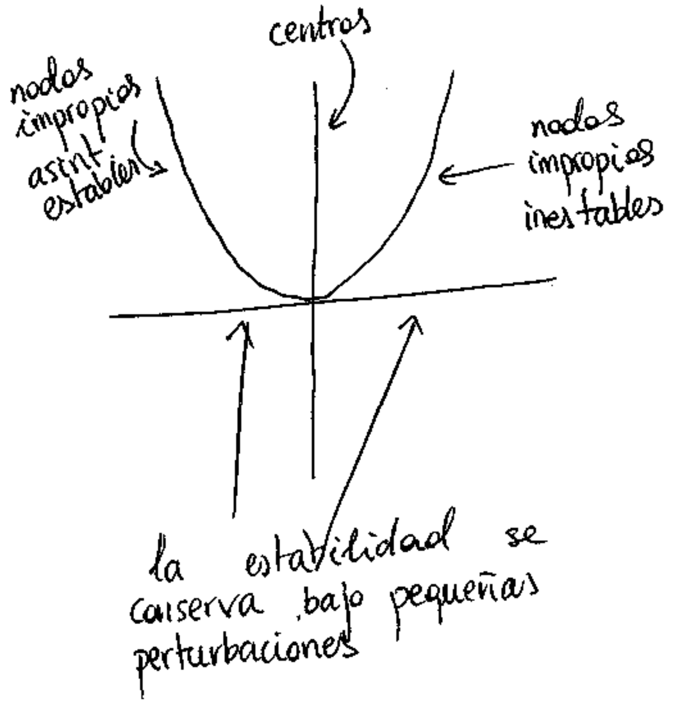
← trayectorias pequeñas



las soluciones grandes cortan a los tres puntos, y como son curvas cerradas, $x(t)$ es periódica.

DIAGRAMA TRAZA-DETERMINANTE





Aplicación: Método de linealización

VERSIÓN 1

Supongamos $(0,0)$ punto crítico aislado del sistema

$$x' = Ax + By + f(x,y)$$
$$y' = Cx + Dy + g(x,y)$$

con $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$?

ERROR para $(x,y) \sim (0,0)$

Entonces si consideramos el sistema lineal asociado:

$$\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases}$$

, y $(0,0)$ es un punto crítico de alguno de los ceros principales, entonces es un punto crítico del mismo tipo en el sistema completo.

VERSIÓN 2

Idea: $F(x,y) = F(a,b) + \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(y-b) + E_F(x,y)$ dond

$$\frac{E_F(x,y)}{\|(x-a,y-b)\|} \xrightarrow{(x,y)\to(a,b)} 0$$

$$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}, \quad F, G \in C^1, \quad F(a,b) = G(a,b) = 0 \quad (a,b) \text{ punto crítico}$$

$$\xrightarrow{\text{Taylor}} \begin{cases} x' = F(a,b) + \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)(y-b) + E_F(x,y) \\ y' = G(a,b) + \frac{\partial G}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial G}{\partial y}(a,b)(y-b) + E_G(x,y) \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x' = x - xy^4 \\ y' = y - y^3x^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{puntos críticos}} \begin{cases} x - xy^4 = 0 \\ y - y^3x^2 = 0 \end{cases}$$

- caso 1: $x = 0 \Rightarrow y = 0$
- caso 2: $y = \pm 1 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Quedan: $(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - y^4 \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = -2xy^3$$

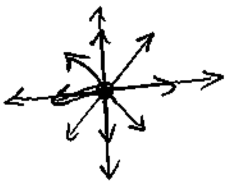
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -4xy^3 \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 1 - 3x^2y^2$$

$\boxed{(0,0)}$ Sistema lineal asociado:

$$x' = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial G}{\partial y}(0,0)y = x$$

$$y' = \frac{\partial G}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial G}{\partial y}(0,0)y = y$$

Autovalores de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow 1$ doble $\longrightarrow$ autovectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Nodo impropio inestable 

[illegible]

$$x' = \frac{\partial F}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial F}{\partial y}(1,1)(y-1) = -4(y-1)$$

$$y' = \frac{\partial G}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial G}{\partial y}(1,1)(y-1) = -2(x-1) - 2(y-1)$$

Traslación a $(0,0)$: $\tilde{x} = x-1$
$\tilde{y} = y-1$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}' &= -4\tilde{y} \\ \tilde{y}' &= -2\tilde{x} - 2\tilde{y} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{aligned} &\nearrow tr = -2 \\ &\searrow det = -8 \end{aligned} \Bigg\} \Longrightarrow \text{Silla}$$

$\vdots$

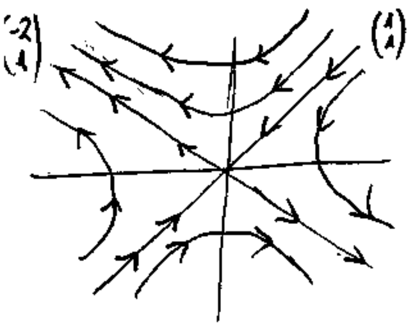
Autovalores $\lambda = 2, -4$

? → no sería $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

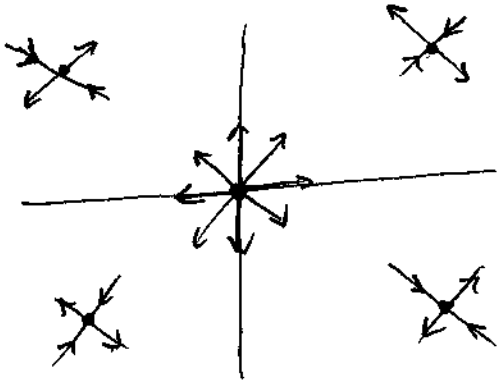
Autovectores asociados:

$\lambda = 2$ ($>0 \Rightarrow$ dirección de salida): $u = 2v \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -4$ ($<0 \Rightarrow$ dirección de entrada): $u = v \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Entonces:

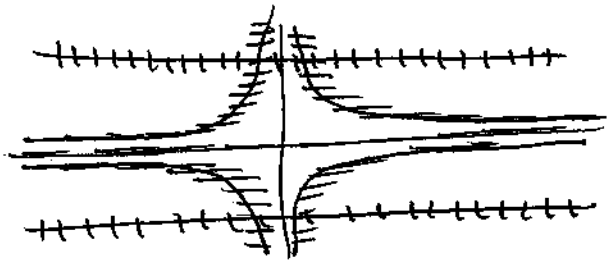


Quedan por hacer

¿Comportamiento global? ⟵ No hay reglas fijas

* Isoclinas, pendiente horizontal y vertical
* Simetrías

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - xy^4 \\ y' &= y - x^2y^3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &x - xy^4 = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 1 - y^4 = 0 \end{cases} \\ &y - x^2y^3 = 0 \begin{cases} y = 0 \\ x^2y^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$



Para isoclinas en (0,0) no hay un foco ⇒ Nodo inestable

¿Dirección de salida de (0,0)?

<u>Idea</u>: $(x(t), y(t))$ trayectoria que sale de (0,0)

$$\lim_{t\to-\infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$$

$$\lim_{t\to-\infty} (x'(t), y'(t)) = \text{dirección de salida}$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} \equiv \text{pendiente dirección de salida} \equiv L$$

$$L = \lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$$

$$L = \lim_{t\to-\infty} \frac{y'}{x'} = \lim_{t\to-\infty} \frac{y-y^3x^2}{x-xy^4} = \lim_{t\to-\infty} \frac{y}{x}\left(\frac{1-y^2x^2}{1-y^4}\right) = L \Rightarrow$$ No hay restricción en L

Caso general: $L = E(L) \rightsquigarrow$ posibles pendientes $\equiv$ sol. esuación

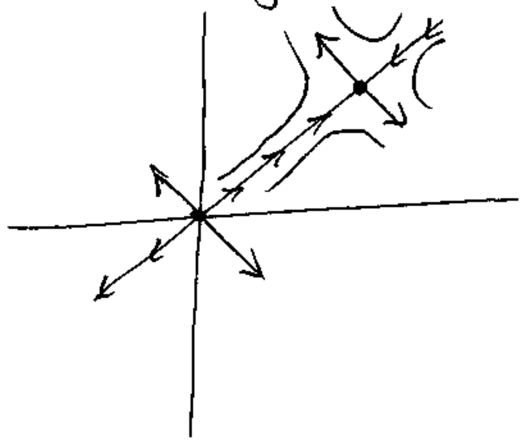
Simetrías

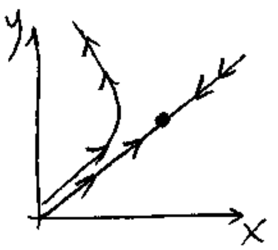
$$\begin{aligned} r(t) &= -x(t) \\ s(t) &= y(t) \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} r' &= -x' = r - rs^4 \\ s' &= y' = y - y^3x^2 = s - s^3r^2 \end{aligned}$$

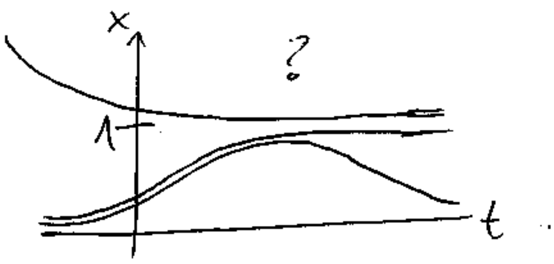
Reemplazamos en el sistema inicial $\Rightarrow$ Simetría respecto al eje OY.

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) \\ v(t) &= -y(t) \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} u' &= x' = x - xy^4 = u - uv^4 \\ v' &= -y' = \dots = v - v^3u^2 \end{aligned}$$ $\equiv$ simetría respecto al eje OX

$\Longrightarrow$ Simetría respecto al origen







Ejemplo: $x'' = x - x^3 - xx'$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 - xy \end{cases}$$

Obs: $x'' = x - x^3$ es un sistema conservativo, ya habíamos desarrollado la teoría para estudiarlo

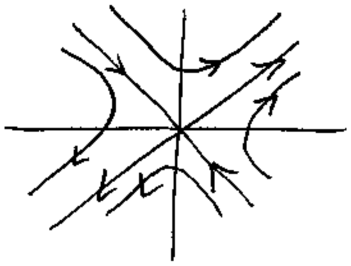
Puntos críticos: $\begin{cases} y = 0 \\ x - x^3 - xy = 0 \end{cases} \Longrightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (0,0) \\ (1,0) \\ (-1,0) \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) &= y \\ G(x,y) &= x - x^3 - xy \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \;, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 \\ &\frac{\partial G}{\partial x} = 1 - 3x^2 - y \;, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -x \end{aligned}$$

(0,0) Sistema asociado $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \longrightarrow \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \underbrace{\boxed{\lambda = \pm}}_{\text{SILLA}}$

Direcciones principales:

* dirección de salida: autovector de $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
* dirección de entrada: autovector de $\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



Se mantiene el sistema completo.

(1,0) Sistema lineal asociado (después de traslación)

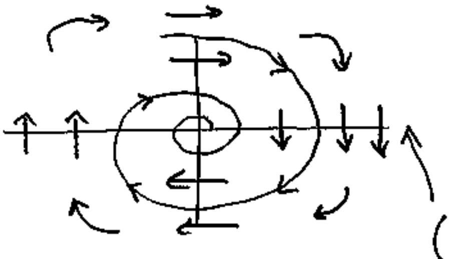
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x - y \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Autovectores } \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

$\frac{\partial G}{\partial x}(0,0)$ $\quad$ $\frac{\partial G}{\partial y}(1,0)$

Giro
(hay parte imaginari

Tengo parte real $\Longrightarrow$ No es un centro

Es un foco $\underbrace{\text{asintóticamente estable}}$ $\longrightarrow$ parte real < 0



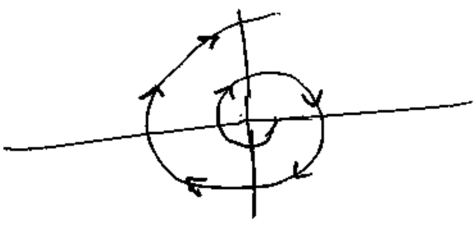
$x' = 0 \Longleftrightarrow y = 0$

$y' = 0 \Longleftrightarrow y = -2x$

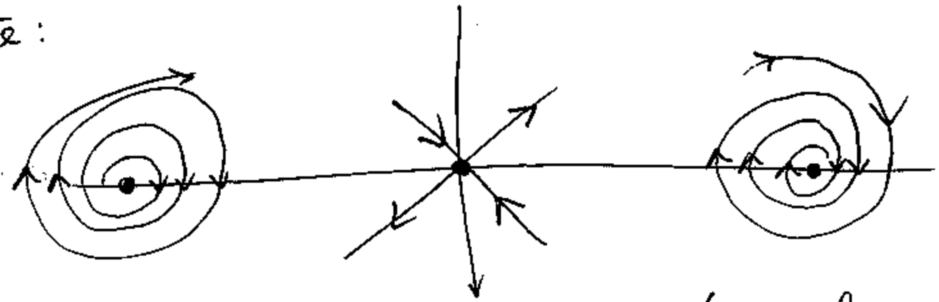
$(x,0),\ x > 0$

$y' = -2x - y < 0$

(-1,0) A completar



Finalmente:



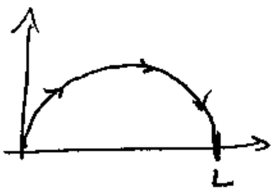
Necesitamos estudiar de dónde salen las trayectorias

Daremos un teorema en el que veremos que todas las curvas tienen de dónde venir y a donde ir.

Por ello, las trayectorias de las espirales se unen, ya que de un punto de silla puede salir una única trayectoria.

Ejemplo 1: Diagrama de poblaciones

Modelo logístico: $x' = ax(L-x) = f(x)$



Competencia entre especies:

x (presas)

y (depredadores)

En ausencia de predadores, $x' \sim ax$

Probabilidad encuentro depredador-presa $\sim xy$

encuentro perjudicial para x

Ecuaciones de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x' = ax - bxy = F(x,y) \\ y' = -cy + dxy = G(x,y) \end{cases}$$

encuentro favorable para y

$$F(x,y) = x(a-by)$$
$$G(x,y) = y(-c+dx)$$
$\longrightarrow$ ptos. críticos: $(0,0)$, $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a - by \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -bx$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = dy \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -c + dx$$

Linealización:

$(0,0) \rightsquigarrow$ matriz: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \Rightarrow v_1 = (1,0) \\ \lambda_2 = -c \Rightarrow v_2 = (0,1) \end{cases}$ SILLA

$\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \longrightarrow$ matriz: $\begin{pmatrix} a - \frac{ba}{b} & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & -c + d\frac{c}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$ ... centro

caso límite

Buscamos una integral primera $E(x,y)$:

$$\frac{d}{dt}\left(E(x(t), y(t))\right) = E_x \cdot x' + E_y \cdot y' = E_x \cdot x(a-by) + E_y \cdot y(-c+dx) = 0$$

buscamos una energía que se conserve

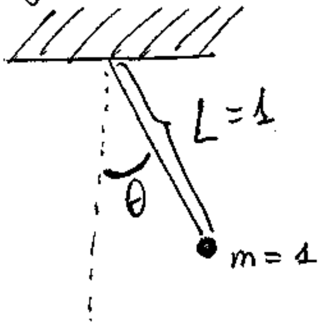
$$\begin{cases} xE_x = -c + dx \\ yE_y = -a + by \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{-c}{x} + d \\ E_y = \frac{-a}{y} + b \end{cases}$$

$$E(x,y) = -c\ln x + dx - a\ln y + by$$

Sol:

$-c\ln x + dx - a\ln y + by = cte. \Leftarrow$ TRAYECTORIAS CERRADAS

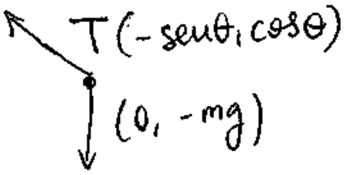
Ejemplo 2: Péndulo con rozamiento



posición: $\bar{x}(t) = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$

velocidad: $\bar{x}'(t) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

aceleración: $\bar{x}''(t) = \theta''(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + (\theta'')^2(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$



2ª Ley de Newton: $F = m.x''$

Es decir, $T(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) + (0, -g) = \theta''(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + (\theta')^2(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$$\begin{cases} -T\operatorname{sen}\theta = \theta''\cos\theta + (\theta')^2(-\operatorname{sen}\theta) \\ T\cos\theta - g = \theta''\operatorname{sen}\theta + (\theta')^2\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -T\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \theta''\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,(\theta')^2 \\ T\operatorname{sen}\theta\cos\theta - g\operatorname{sen}\theta = \theta''\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,(\theta')^2 \end{cases}$$

$\boxed{\theta'' = -g\operatorname{sen}\theta}$ péndulo sin rozamiento

Tenemos que añadir un rozamiento $-\varepsilon x'$

Por lo que $\boxed{\theta'' = -g\operatorname{sen}\theta - \varepsilon\theta'}$

$$\Longrightarrow \theta'' + \varepsilon\theta' + g\operatorname{sen}\theta = 0$$

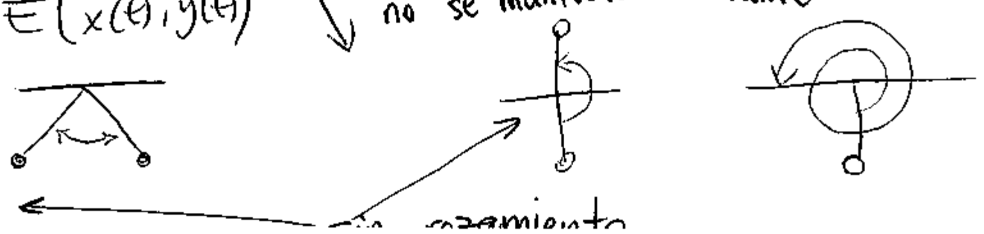
$$\begin{matrix} \theta(t) = x(t) \\ \theta'(t) = y(t) \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -\varepsilon y - g\operatorname{sen}x \end{cases}$$

$\boxed{\varepsilon = 0}$ Integral primera (energía)

$$E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - g\cos x$$

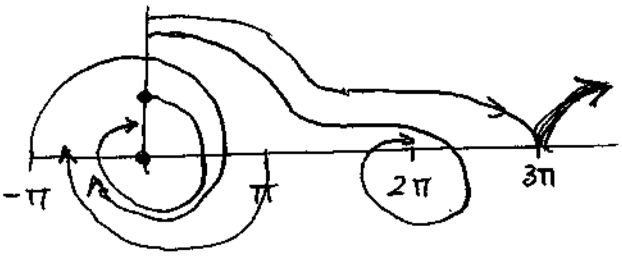
$\boxed{\varepsilon > 0}$ $\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = E_x x' + E_y y' = g\operatorname{sen}x\,y + y(-\varepsilon y - g\operatorname{sen}x) =$

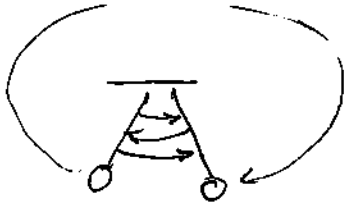
$= -\varepsilon y^2 \leq 0 \Longrightarrow E(x(t), y(t)) \searrow$ no se mantiene constante



... rozamiento

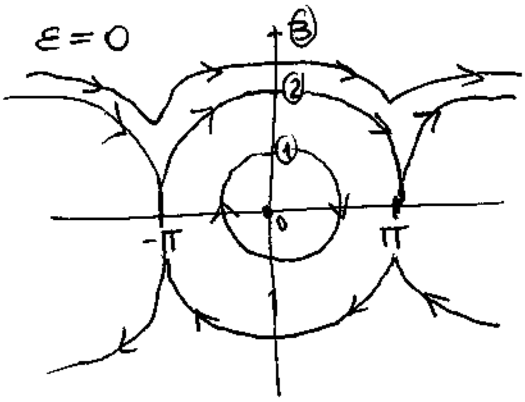
Con rozamiento:

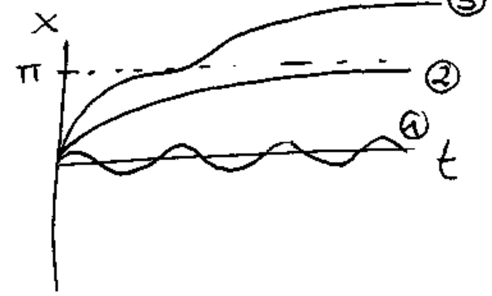




Puntos críticos: $(k\pi, 0)$, $k \in 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si $\varepsilon = 0$





Si $\varepsilon > 0$ con linealización tendremos ptos. de silla y los centros se transformarán en focos asintót. estables (espirales)

① Acaba siendo una espiral que se va cerrando

② También

③ Depende, habrá una que caiga justo en π. Otras que caigan en 0 como espiral. Otras en otro foco. O podrían caer en otro punto de equilibrio.

Ejemplo 3: $x'' = x - x^3 \underbrace{- x x''}$ $\rightarrow$ se puede interpretar como un rozamiento

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 - xy \end{cases}$$

Vamos a verlo sin rozamiento

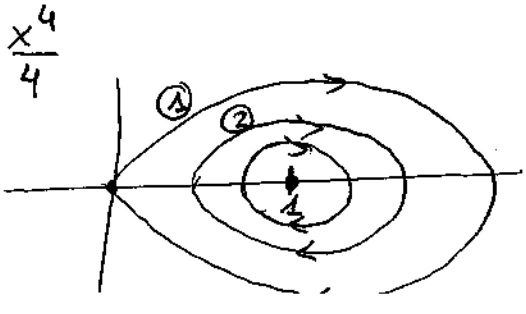
$$\hookrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 \end{cases}$$

Sistema sin rozamiento:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 \end{cases}$$ conservativo

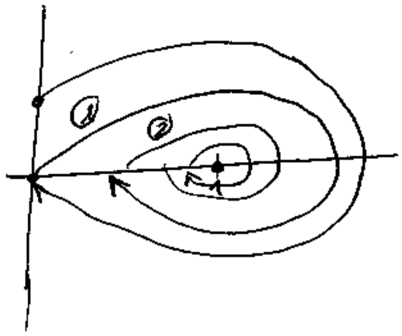
Integral primera $E(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$

$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = 0$ se cumple



Sistema con rozamiento: tomamos la misma energía

$$\frac{d}{dt}E(x(t),y(t)) = E_x x' + E_y y' = (-x+x^3)x' + yy' = -xy + x^3y + xy$$
$$-x^3y - xy^2 = -xy^2 \quad \begin{matrix} \leq 0 \ (\text{si } x>0) \\ < 0 \ (\text{si } x>0 \text{ e } y\neq 0) \end{matrix}$$



Una con energía positiva que cae justo en $(0,0)$

Problemas del método de linealización:

1. Casos límite
2. Autovalor $\lambda = 0$
3. Problemas con falta de regularidad (no se puede usar Taylor)

MÉTODO DIRECTO DE LIAPUNOV

DEFINICIÓN: Supongamos $E(0,0)=0$

* E es definida positiva en $B_R^{(0,0)} \iff E(x,y)>0$ en $B_R^{(0,0)} \setminus \{(0,0)\}$.
* E es semidefinida positiva en $B_R^{(0,0)} \iff E(x,y) \geq 0$
* Similar para def. negativa y semidef. negativa.

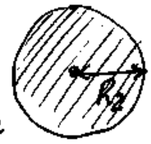
TEOREMA DE LIAPUNOV: $E \in C^1$, $E(0,0)=0$, E def. positiva en $B_R^{(0,0)}$

1. Si $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G < 0$ en $B_{R_2}^{(0,0)}$, $R_2 \leq R$., entonces $(0,0)$ es asintóticamente estable.

2. Si $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \leq 0$ en B_{R_2}, entonces $(0,0)$ es estable (tal vez asintóticamente estable)

⊛ E se llamaría FUNCIÓN DE LIAPUNOV.

demostración

1\.  B_{R_2}

E es positiva ($E>0$ fuera de $(0,0)$ y 0 en $(0,0)$)

$E_x F + E_y G < 0$

$$\left.\begin{array}{l} E(x,y) > 0 \text{ en } \overset{\text{compacto}}{\partial B_{R_2}} \\ E \text{ continua} \end{array}\right\} \; E \text{ alcanza } \underset{M}{\underset{\uparrow}{\text{máximo}}} \text{ y } \underset{m}{\underset{\uparrow}{\text{mínimo}}} \text{ en } \partial B_{R_2}$$

$E(x,y) \geq m > 0 \quad \forall (x,y) \in \partial B_{R_2}$

$$\left.\begin{array}{l} E(0,0) = 0 \\ E \text{ continua} \end{array}\right\} \Longrightarrow E \text{ pequeña cerca de } (0,0)$$

$\exists \delta > 0$ tal que $E(x,y) < \frac{m}{2}$ en $B_\delta(0,0)$

Una trayectoria $(x(t_0), y(t_0))$ que pasa por $B_\delta^{(0,0)}$ no sale de $B_{R_2}^{(0,0)}$ $(x(t_0), y(t_0)) \in B_{R_2}$ $\forall t \geq t_0$, porque la energía decrece y tiene como mucho $\frac{m}{2}$. Para "llegar" a la frontera necesitaría como poco m.

Obs: definición de estabilidad

p es estable $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tal que si $(x(t_0), y(t_0)) \in B_\delta^p$ entonces $(x(t), y(t)) \in B_\delta^p \; \forall t \geq t_0$.

Con esto demostramos 2. ∎

Definimos $g(t) = E(x(t), y(t))$

$g'(t) = E_x x' + E_y y' = E_x F + E_y G < 0$

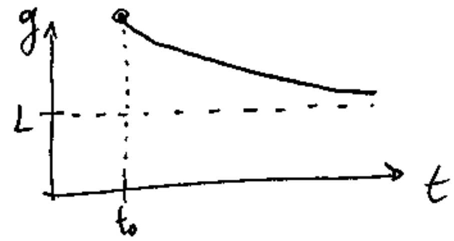
g decrece $\searrow \Longrightarrow g(t_0) = E(x(t_0), y(t_0)) < \frac{m}{2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists \lim\limits_{t\to\infty} g(t) = L$

- $\nearrow$ caso 1: $L = 0$ Fin ya que $(x(t), y(t)) \xrightarrow{t\to\infty} (0,0)$
- $\searrow$ caso 2: $L > 0$ Hay que estudiarlo.

Si $L > 0$:

Sup.



$\begin{cases} E(0,0) = 0 \\ E \text{ continua} \end{cases} \Rightarrow \exists\, \delta' > 0$ tal que

$0 \leq E(x,y) \leq \frac{L}{2}$ para $(x,y) \in B_{\delta'} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la trayectoria $(x(t), y(t))$ no entra en $B_{\delta'}$ para $t \geq t_0$

$K = \overline{B_R - B_{\delta'}}$ compacto

$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G$ continua (< 0) en $K \Rightarrow$ alcanza $\underset{\substack{\uparrow \\ M}}{\text{máx}}$ y $\underset{\substack{\uparrow \\ m}}{\text{mín}}$ en K.

$g(t) = E(x(t), y(t))$

$$g'(t) = \frac{\partial E}{\partial x} x' + \frac{\partial E}{\partial y} y' = \frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \underset{\substack{\downarrow \\ (x(t),y(t)) \in K}}{\leq} M < 0$$

Contradicción con $g(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} g'(s)\, ds \leq g(t_0) + M(t - t_0) \xrightarrow[t \to \infty]{} -\infty$

<u>Resumen</u>: $\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial G}{\partial y} G$ < 0 asintót. estable

≤ 0 estable (quizá asintót. estable)

¿Qué pasa si es > 0?

Nos alejamos del punto, sería inestable (pero no vale para mucho)

<u>Resultados globales</u>: (comentario)

Hipótesis <u>global</u> sobre E

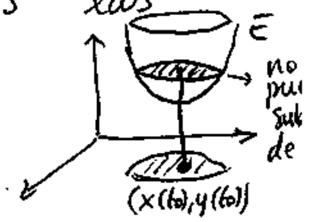
$E(x,y) \xrightarrow[\|(x,y)\| \to \infty]{} \infty$ Coercitividad

<u>Observación</u>: $\forall c > 0$ $\{(x,y) : E(x,y) < c\}$ es acotado

TEOREMA 1: $E \in C^1$ con $E(0,0)=0$ y $E(x,y)>0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

E coercitiva, $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G \leq 0$. Entonces todas las trayectorias están acotadas para $t \geq t_0$.

(No necesariamente acotada para $t \to -\infty$).



TEOREMA 2: Mismo que antes pero $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G < 0$.

Entonces todas las trayectorias "caen" en $(0,0)$, e.d., $(x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} (0,$

Problema de estos teoremas: son casos demasiado particulares.

Ejemplo: $\begin{cases} x' = -y^3 \\ y' = x^3 \end{cases}$ Punto crítico $\equiv (0,0)$

Linealizando $\to$ matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no vale

Usamos Liapunov: idea $\longrightarrow E(x,y) = ax^{2n} + by^{2m} = x^{2n} + Ay^{2m}$

(que se parezca a un paraboloide

Buscamos n, m, A: $E \in C^1$, $E(0,0)=0$, $E(x,y)>0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

¿$\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G < 0$? $\longrightarrow 2n x^{2n-1} \cdot (-y^3) + A2my^{2m-1}x^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ¿$2n x^{2n-1} \cdot y^3 = A2my^{2m-1} \cdot x^3$? $\longrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=2 \\ A=1 \end{cases}$

$\Rightarrow E(x,y) = x^4 + y^4$ es una integral primera $\rightsquigarrow \boxed{sol \equiv x^4 + y^4 =}$

$(0,0)$ es estable, pero no es asintóticamente estable.

Ejemplo: $\begin{cases} x' = 2xy + x^3 \\ y' = -x^2 + y^5 \end{cases}$ Punto crítico $\equiv (0,0)$
Linealización $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inútil

Buscamos $E(x,y) = x^{2n} + Ay^{2m}$ $(A \geq 0)$

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = 2n x^{2n-1}(2xy + x^3) + 2mAy^{2m-1}(-x^2+y^5) =$$

$$= \underbrace{4nx^{2n}y}_{\text{pot. impar}} + \underbrace{2mx^{2m+2}}_{\text{pot. par}} \underbrace{-2mAy^{2m-1}x^2}_{\text{pot. impar}} + \underbrace{2mAy^{2m+4}}_{\text{pot. par}}$$

¿podemos cancelarlo?

$$4nx^{2n}y = 2mAy^{2m-1}x^2 \Longrightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=1 \\ A=2 \end{cases}$$

$E(x,y) = x^2 + 2y^2$ Solución: $x^2 + 2y^2 = C$

$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G = 2x^4 + 4y^6 > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$

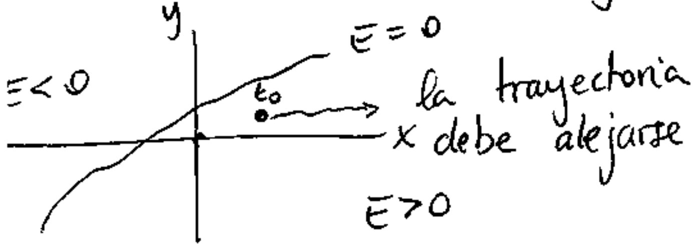
Todas las trayectorias se alejan del origen $\Rightarrow$ es inestable.

TEOREMA DE CHETAEV (CRITERIO DE INESTABILIDAD)

Sea $E \in C^1$, $E(0,0) = 0$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ podemos encontrar $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in B_\varepsilon^{(0,0)}$ con $E(x_\varepsilon, y_\varepsilon) > 0$.

Sea $\mathcal{U} = \{(x,y) \,/\, E(x,y) > 0\}$

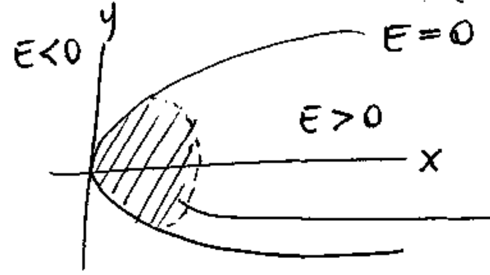
Supongamos $\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G > 0$ en $\mathcal{U} \cap B_R \Longrightarrow (0,0)$ inestabl



Si tengo $E > 0$ y la energía va aumentando, tengo que alejarme (Inestable).
En la región $E < 0$ no sabemos nada.

Ejemplo 1: $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 \\ y' = x^3 - y^2 \end{cases}$ Estudiar la estabilidad en $(0,0)$ usando $E(x,y) = x - \frac{y^2}{2}$

Linealización $\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no sirve



$\longrightarrow$ Chetaev, ¿ $E_x x' + E_y y' > 0$?

polares: $x = r\cos$ $y = r\,\mathrm{sen}$

$E_x x' + E_y y' = 1\,(x^2+y^2) - y(x^3 - y^2) = x^2 + y^2 - x^3 y + y^3 =$

$= r^2 - r^4 \cos^3\theta\, \mathrm{sen}\,\theta + r^3 \mathrm{sen}^3\theta = r^2 \underbrace{\left(1 - r^2\cos^3\theta\, \mathrm{sen}\,\theta + r\,\mathrm{sen}^3\theta\right)}_{\xrightarrow[r \to 0]{} 1}$

$\Longrightarrow \exists r_0$ tal que $E_x x' + E_y y' > 0$ si

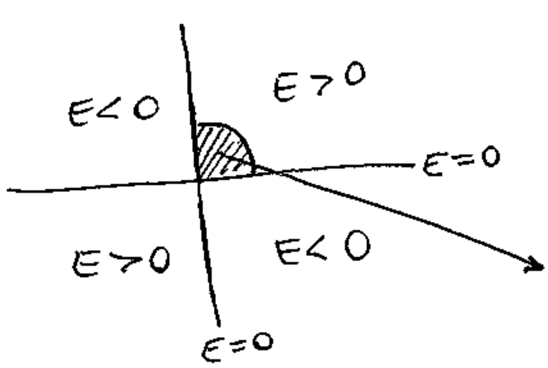
$(x,y) \in R = \{E(x,y) > 0\} \cap B_{r_0}(0,0) \Longrightarrow$ criterio de Chetaev $\Rightarrow$ inesta

Ejemplo 2: $\begin{cases} x' = 3x + y + x^2 \\ y' = x - y + xy \end{cases}$ Estudiar $(0,0)$ $<$ linealización; $E(x,y) = xy$

Linealización: $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial G}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Autovalores: $0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \begin{cases} \lambda_+ > 0 \\ \lambda_- < 0 \end{cases}$ punto de silla (se conserva en el sistema completo)

$E(x,y) = x(t) \cdot y(t)$



$E_x x' + E_y y' = y(3x + y + x^2) + x(x - y + xy$

$= 3xy + y^2 + x^2 y + x^2 - xy + x^2 y =$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2x^2 y = (x+y)^2 + 2x^2 y$:

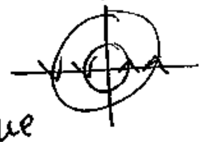
$\longrightarrow$ en $\mathcal{U} = \{E(x,y) > 0\} \cap \{x^2 + y^2 < R^2,\ y \geq 0\}$

Por el criterio de Chetaev $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ inestabilidad

<u>Ejemplo 3</u>: $\begin{cases} x' = -y + axy^2 \\ y' = x - bx^2y \end{cases}$ Estudiar $(0,0)$ dependiendo de $a, b \in \mathbb{R}$.

<u>Linealización</u>: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ autovalores $\lambda = \pm i$

$\Longrightarrow$ centro  No tiene por qué conservarse en el sistema completo.

Habría que ver la dirección de giro

<u>Liapunov</u>: $E(x,y) = x^{2n} + Ay^{2m}$

$$E_x x' + E_y y' = 2n x^{2n-1}(-y + axy^2) + 2Amy^{2m-1}(x - bx^2y) =$$

$$= \underbrace{-2n x^{2n-1} y} + 2an x^{2n} y^2 + \underbrace{2Amy^{2m-1} x} - 2Abm x^2 y^{2m}$$

Buscamos cancelación

$$2n x^{2n-1} y = 2Amxy^{2m-1} \qquad n = m = A = 1$$

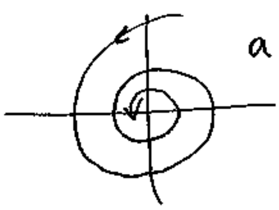
$$\Longrightarrow E(x,y) = x^2 + y^2$$

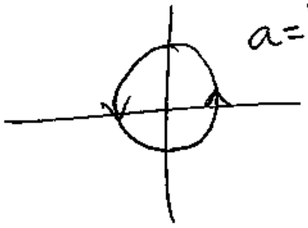
$$E_x x' + E_y y' = 2ax^2y^2 - 2bx^2y^2 = 2x^2y^2(a-b)$$

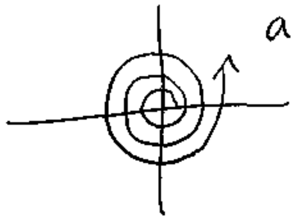
Si $a > b$: $\forall x,y$ inestabilidad (espirales que se alejan del origen)

Si $a = b$: $\forall x,y$ tenemos integral primera $E(x,y) = cte.$ (circunf. que rodean el origen)

Si $a < b$: $\forall x,y$ estabilidad asintót. (espirales que caen al origen)


$a < b$


$a = b$


$a > b$

Sentido de giro inventado. Habría que calcularlo.

Ejemplo 4: $\begin{cases} x' = y + x(x^2+y^2) \\ y' = -x + y(x^2+y^2) \end{cases}$ Usar coordenadas polares para estudiar el sistema. Plano de fases.

Linealización $\longrightarrow \dots \longrightarrow (0,0)$ centro

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad 2rr' = 2xx' + 2yy'$

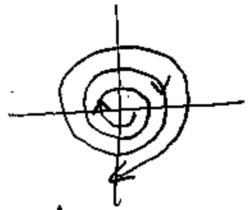
$$rr' = xx' + yy' = x\left(y + x(x^2+y^2)\right) + y\left(-x + y(x^2+y^2)\right)$$

$$= xy + x^2(x^2+y^2) - xy + y^2(x^2+y^2) = (x^2+y^2)^2 = r^4$$

$\boxed{r' = r^3}$ Como $r>0$ siempre, es inestable

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\theta' = \frac{y'x - yx'}{x^2} = \frac{x(-x+y(x^2+y^2)) - y(y+x(x^2+y^2))}{x^2} =$$

$$= \frac{-x^2 + xy(x^2+y^2) - y^2 - xy(x^2+y^2)}{x^2} = \frac{-r^2}{r^2\cos^2\theta} = \frac{-1}{\cos^2\theta}$$



$\theta' = -1$ $\hookrightarrow$ sentido horario

Ejemplo 5: $\begin{cases} x' = 3x - y - xe^{x^2+y^2} \\ y' = x + 3y - ye^{x^2+y^2} \end{cases}$ a) Estudiar por el método de linealitación b) Estudiar en polares

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 10 \longrightarrow \lambda = 3 \pm i$$

foco inestable

El sentido de giro se estudia aparte, debe dar antihorario

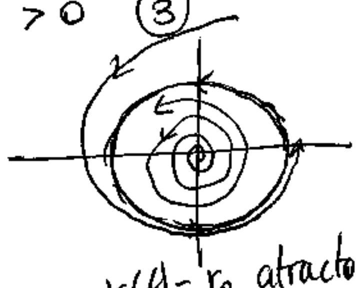
¿Comportamiento global? $\longrightarrow$ coordenadas polares

$\begin{cases} r^2 = x^2+y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \longrightarrow$ mismas cuentas que antes $\longrightarrow \begin{cases} r' = r(3 - e^{r^2}) \\ \theta' = 1 \end{cases}$

$r' > 0$ si r pequeño, $r' < 0$ si r grande

Número clave: $r_0 = \sqrt{\log 3}$
- $r > r_0 \longrightarrow r' < 0$ ①
- $r = r_0 \longrightarrow r' = 0$ ②
- $r < r_0 \longrightarrow r' > 0$ ③

① Espirales que se cierran
② $r(t) = r_0 \quad \forall t$ es solución
③ $r < r_0 \longrightarrow r' > 0 \rightarrow$ espirales que se abren



$r(t) = r_0$ atractor

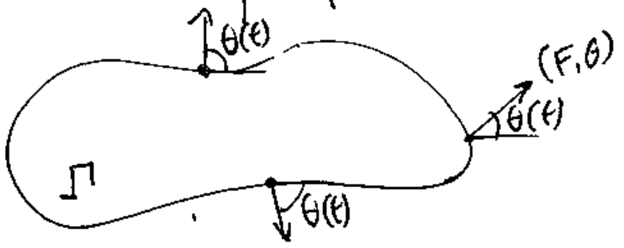
demostración del teorema que enunciaron ayer:

Índice de un campo de una curva plana

(F, G) campo continuo

$\Gamma = \{\gamma(t),\ t \in [0,T]\}$ curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$

(Γ no tiene por que ser una trayectoria de ningún sistema)



Supongamos $(F,G) \neq (0,0)$ $\forall$ punto de Γ

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,T]$

$(F(x(t),y(t)), G(x(t),y(t))) \neq (0,0)$ $\forall t \in [0,T]$

$\theta(t) \equiv$ ángulo que forma (F,G) con la parte del eje horizontal.

Obs: $\theta(t)$ bien definido sobre Γ por ser $(F,G) \neq (0,0)$

* $\theta(t)$ no depende de la longitud de (F,G), así que podríamos normalizar y usar $\left(\frac{F}{\sqrt{F^2+G^2}}, \frac{G}{\sqrt{F^2+G^2}}\right)$ en vez de (F,G)

* $(F,G) = \left(\sqrt{F^2+G^2}\cos\theta, \sqrt{F^2+G^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$

* (F,G) continuo $\Longrightarrow$ θ continuo.

* Γ cerrada $\Longrightarrow$ $\big(F(\gamma(0)), G(\gamma(0))\big) = \big(F(\gamma(T)), G(\gamma(T))\big)$

* $\cos(\theta(0)) = \cos(\theta(T))$ y $\mathrm{sen}(\theta(0)) = \mathrm{sen}(\theta(T))$

Conclusión:

$\theta(T) = \theta(0) - 2K\pi \qquad K \in \mathbb{Z}$

Índice del campo (F,G) a lo largo de la curva Γ $\equiv \mathrm{Ind}_{(F,G)}\Gamma$

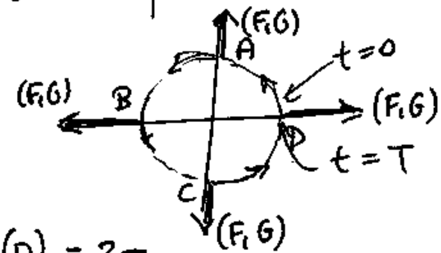
Ejemplos:

1) $(F,G) = (0,1)$

$\theta(t) = \frac{\pi}{2} \quad \forall t \implies \mathrm{Ind}_{(F,G)}\Gamma = 0 \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\cancel{k}^{\,0}\pi$

En general, el índice es **0** si el campo es constante.

2) $(F,G) = (x,y) \qquad \Gamma \equiv x^2+y^2 = r^2$

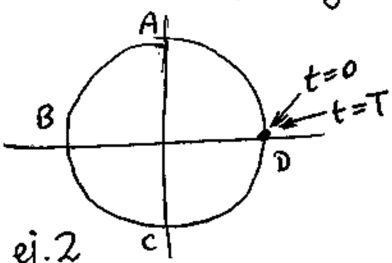


$\theta(0) = 0 \;,\quad \theta(A) = \frac{\pi}{2} \;,\; \theta(B) = \pi \;,\; \theta(C) = \frac{3\pi}{2} \;,\; \theta(D) = 2\pi$

$\implies \mathrm{Ind}_{(x,y)}(x^2+y^2=r^2) = 1 \quad \forall r$

3) $(F,G) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \,,\; \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

la circunferencia no está centrada en el origen. Aún así da lo mismo que en el ej.2



$\left.\begin{array}{l} \theta(0) = 0 \\ \theta(A) = \frac{\pi}{2} \\ \theta(B) = \pi \\ \theta(C) = \frac{3\pi}{2} \\ \theta(D) = 2\pi \end{array}\right\} \implies \mathrm{Ind} = 1$

(*) Si la trayectoria no contiene al "punto crítico", el índice tiene que ser 0.

<u>TEOREMA DE POINCARÉ</u>: Si tenemos una trayectoria cerrada, en su interior tiene que haber al menos un punto crítico (lo ha dicho muy por encima, puede estar mal)

LEMA 1: $\bar{U} = (F, G)$ continuo $\quad \bar{U}$ normalizado $\quad \|\bar{U}\| = 1$

Si Γ no contiene ni rodea ningún punto crítico $\Rightarrow \mathrm{Ind}_{\bar{U}}\, \Gamma = 0$

demostración

→ no hay puntos críticos, ni en $\mathrm{int}(\Gamma)$ ni en $\partial\Gamma$

↳ entorno de la curva donde $\bar{U} \neq (0,0)$

Tomamos el cierre de ese entorno, que es un compacto K simplemente conexo $\quad \Gamma \subset K \quad \bar{U}$ continua en K.

TEOREMA DE POINCARÉ - BENDIXSON: apuntes Antonio

Aplicación: estudiar la existencia de soluciones periódicas.

Ejemplo a:
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - x^2 y + x^3 \end{cases}$$

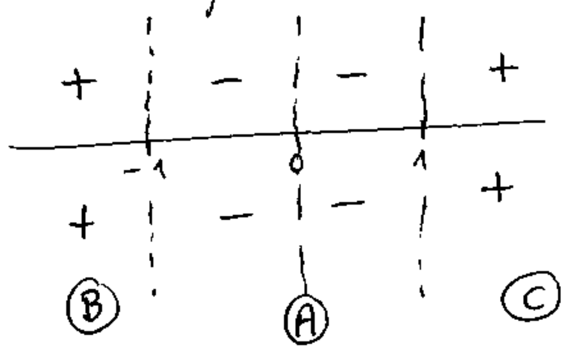
No se puede usar potencial porque y' depende de x e y.

$(0,0)$ es punto crítico

Bendixson $\rightsquigarrow$ Signo de $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y} = -1 - x^2 < 0 \quad \forall (x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Como el signo es constante no puede haber trayectorias cerradas.

Si nos saliera $-1 + x^2$:



Podemos afirmar que NO puede haber trayectorias cerradas que estén contenidas exclusivamente en A, B o C, tiene que intersecar a 2 mínimo (si es que existe)

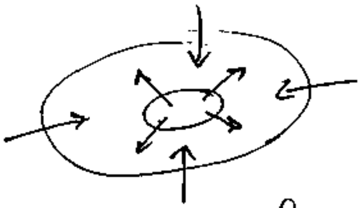
Ejemplo b: $\begin{cases} x' = y + x^3(2 - e^{x^2+y^2}) \\ y' = -x + y^3(2 - e^{x^2+y^2}) \end{cases}$

$(0,0)$ punto crítico. Si linealizamos es un centro.

Bendixson $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial E}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}$ tiene cambios de signo

Bendixson no nos sirve, tiene cambios de signo la derivada

Por tanto podría o no haber trayectorias cerradas.



Buscamos una región así

Pasamos a polares: $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = y/x \end{cases}$

$$2rr' = 2xx' + 2yy'$$

$$rr' = x\left(y + x^3(2-e^{r^2})\right) + y\left(-x + y^3(2-e^{r^2})\right) =$$

$$= xy + x^4(2-e^{r^2}) - xy + y^4(2-e^{r^2}) =$$

$$= (x^4+y^4)(2-e^{r^2}) \underset{\substack{x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta}}{=} r^4(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^2\theta)(2-e^{r^2}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r' = r^3 \underbrace{(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^4\theta)}_{>0 \text{ no nos cambia el signo}} \underbrace{(2-e^{r^2})}_{\text{esto determina el signo}}$$

$\left.\begin{array}{l} r' < 0 \text{ para } r \text{ grande} \\ r' > 0 \text{ para } r \text{ pequeño} \end{array}\right\}$ En concreto, el valor límite es $\sqrt{\ln 2}$.

Por Poincaré-Bendixson hay trayectoria cerrada $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists$ sol. periódica.

Ejemplo c: $\begin{cases} x'' + x = \varepsilon x^2 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sistema}} \begin{cases} x' = y & x(0) = 1 \\ y' = -x + \varepsilon x^2 & y(0) = 0 \end{cases}$

Sistema conservativo

Como x' depende únicamente de y e y' depende únicamente de x podemos buscar energía:

$$E(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\varepsilon}{3} x^3 \right)}_{} \to \text{integral primera } H(x)$$

Si teníamos $\begin{matrix} x' = y \\ y' = H(x) \end{matrix} \longrightarrow E(x,y) = \frac{1}{2} y^2 - \int H(x)\, dx$

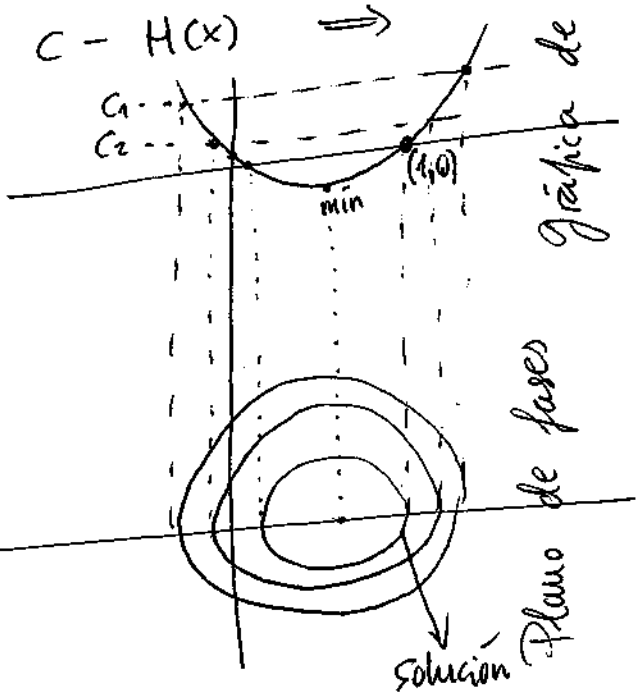
Las soluciones son $E(x,y) = C$:

$$\frac{1}{2} y^2 + H(x) = C \implies \frac{1}{2} y^2 = C - H(x) \implies$$

$$\implies y = \pm 2 \sqrt{C - H(x)}$$

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\varepsilon}{3} x^3 = x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3} x \right)$$

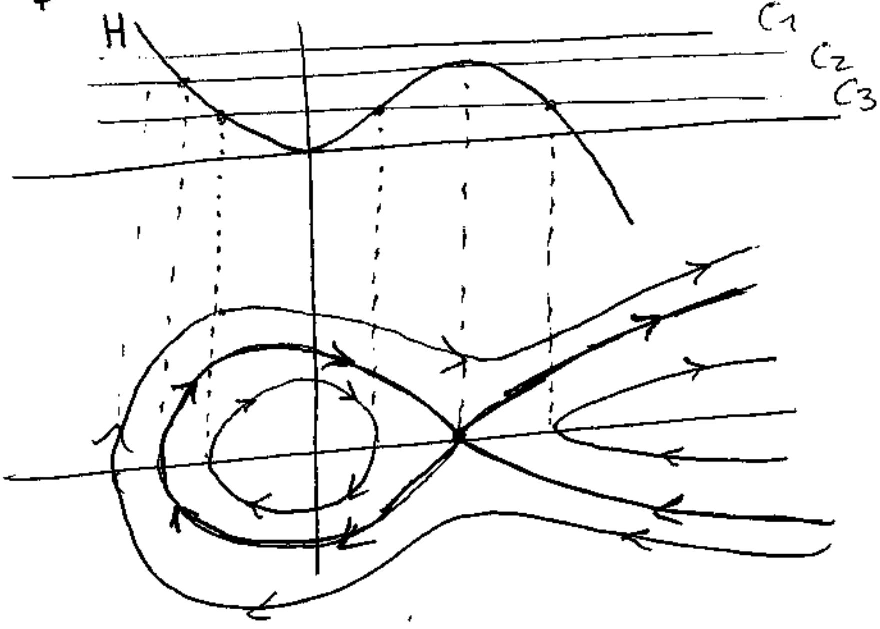
$$H(x) = 0 \iff \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \dfrac{3}{2\varepsilon} \end{cases}$$

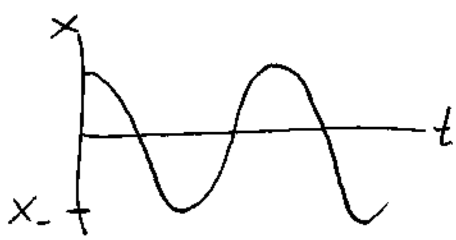


Dando varios C, podemos hallar todas las soluciones. Pero nos pedían la que pasaba por $(1,0)$

$X_m \equiv$ min de H

$X_+ \equiv 2^a$ sol. de $H(x) = H(1)$ (o el máximo)





La región acotada en la región roja delimita la zona donde hay trayectorias periódicas.

Ejemplo : $\begin{cases} x' = x(1-x^2-y^2) + xy \\ y' = -x^2 + y(1-x^2-y^2) \end{cases}$

- Puntos críticos
- Linealización
- Comportamiento global

Puntos críticos

$\begin{cases} x(1-x^2-y^2) + xy = 0 \\ -x^2 + y(1-x^2-y^2) = 0 \end{cases} \longrightarrow x(1-x^2-y^2+y) = 0$ $\begin{array}{l} \nearrow x = 0 \quad (A) \\ \searrow 1-x^2-y^2+y = 0 \quad (B) \end{array}$

(A) $x = 0 \Rightarrow y(1-y^2) = 0 \iff y = 0, 1, -1 \Longrightarrow (0,0), (0,1), (0,-1)$

(B) $1-x^2-y^2 = -y \Rightarrow -x^2-y^2 = 0$ imposible si $x \neq 0$

Linealización

$F(x,y) = x - x^3 - xy^2 + xy \longrightarrow \begin{array}{l} F_x = 1-3x^2-y^2+y \\ F_y = -2xy + x \end{array}$

$G(x,y) = -x^2 + y - x^2y - y^3 \longrightarrow \begin{array}{l} G_x = -2x - 2xy \\ G_y = 1-x^2-3y^2 \end{array}$

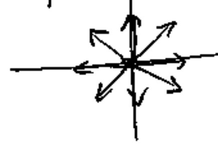
$\boxed{(0,0)}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Autovalor doble $\lambda = 1 \longrightarrow$ autovectores: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

nodo impropio inestable

Sistema linealizado $\longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Ae^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Be^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\Rightarrow$ trayectorias que salen en todas las direcciones

En el sist. global se conserva la inestabilidad, aunque no tiene por qué conservar la forma.



$\boxed{(0,-1)}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Autovalores $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ dos diferentes y neg

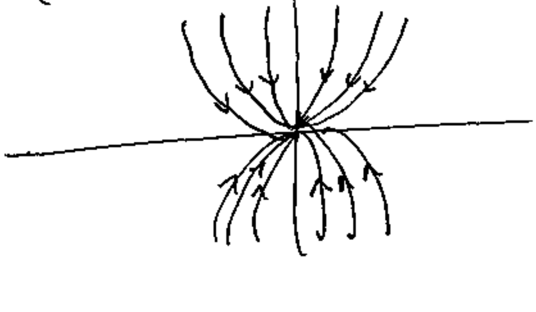
$\Longrightarrow$ nodo asint. estable

Autovector $-1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Autovector $-2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Ae^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Be^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-t} \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow[t \to \infty]{} e^{-t} A$$

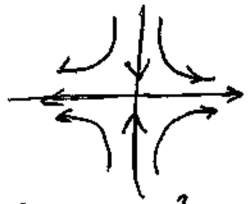
Se conserva en el sistema global



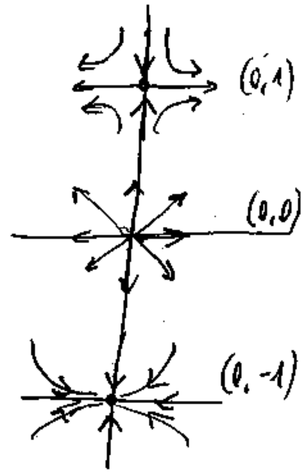
(0,1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Autovalor $\lambda_1 = 1$ con autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Autovalor $\lambda_2 = -2$ con autovector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ punto de silla



Inestable



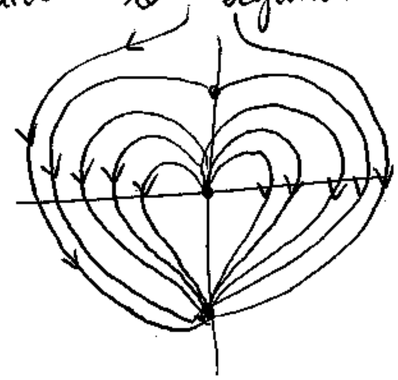
Pasamos ahora a polares: $r^2 = x^2 + y^2$

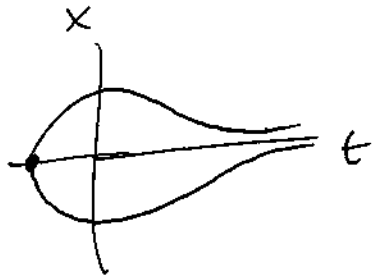
$$rr' = xx' + yy' = \cdots = r^2(1-r^2) \Rightarrow \boxed{r' = r(1-r^2)}$$

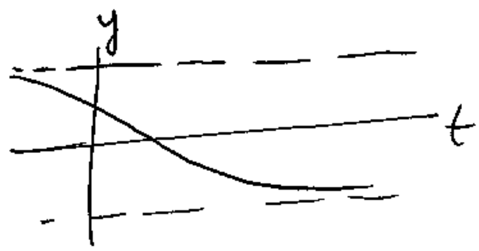
$$\tan\theta = y/x$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\,\theta' = \frac{y'x - x'y}{x^2} = \cdots = \frac{-r}{\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\theta' = -r\cos\theta}$$

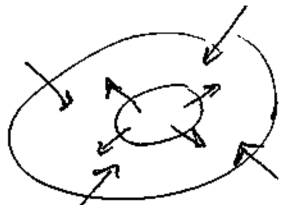
Concluimos: $r \equiv 1$ es sol. de la primera ecuación y $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ para la segunda.







Observación: $r' = r(1-r^2)$ $\begin{array}{ll} < 0 & \text{si } r > 1 \\ > 0 & \text{si } r < 1 \end{array}$



Poincaré-Bendixon: debería haber una trayectoria cerrada en esa región.

¿Contradicción? No, porque hay puntos críticos

Ejemplo 2 : $\begin{cases} x' = \left(x(1-x^2-y^2)-y\right)\left(y^2+(x^2-1)^2\right) \\ y' = \left(y(1-x^2-y^2)+x\right)\left(y^2+(x-1)^2\right) \end{cases}$

Puntos críticos:

$$\left(x(1-x^2-y^2)-y\right)\left(y^2+(x^2-1)^2\right)=0 \;\begin{cases} \nearrow\; x(1-x^2-y^2)-y=0 \quad (A) \\ \searrow\; y^2+(x^2-1)^2=0 \quad (B)\end{cases}$$

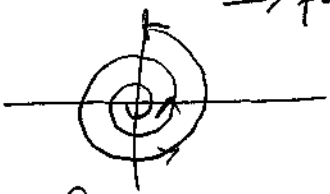
$(B) \Longrightarrow \begin{matrix} y=0 \\ x^2=1 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} (1,0) \\ (-1,0) \end{matrix} \qquad (A) \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow (0,0)$

Linealización $\begin{matrix} F(x,y) \rightsquigarrow F_x, F_y \\ G(x,y) \rightsquigarrow G_x, G_y \end{matrix}$

$\boxed{(0,0)}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow 0=(1-\lambda)^2+1=\lambda^2-2\lambda+2 \longrightarrow \lambda = 1\pm i$

$\Longrightarrow$ foco inestable

$\begin{matrix} x' = x-y \\ y' = x+y \end{matrix}$



$\boxed{(\pm 1,0)}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Polares: $\begin{cases} r' = r(1-r^2)\overbrace{\left(r^2\,\text{sen}^2\theta + (r^2\cos^2\theta-1)^2\right)}^{0 \,\shortparallel} \\ \theta' = \left(r^2\,\text{sen}^2\theta + (r^2\cos^2\theta-1)\right) \end{cases}$

$\boxed{r=1}$ solución

$\theta' = \text{sen}^2\theta + (\cos^2\theta - 1)^2 \quad \cdots$

Si $\theta = \theta(r)$ (TF Impl.)

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dt}{dr} \overset{\downarrow}{=} \frac{d\theta/dt}{dt/dr} = \frac{1}{r(1-r^2)}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r(1-r^2)} = \cdots = \frac{1}{r} - \frac{1/2}{1+r} + \frac{1/2}{1-r}$$

Integrando $\longrightarrow$ $\theta(r) = \theta_0 + \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1+r_0}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{|1+r|}{|1-r_0|}$

$$\theta(r) \xrightarrow[r\to 1]{} \infty$$

EJEMPLOS DE TRAYECTORIAS

① $x'' = f(x)$ (la 2^{a} Ley de Newton es un ejemplo)
$f \in C^1(\mathbb{R})$ (también valdría para $f \in C^1((a,b))$)

$y = x' \implies$ lo convertimos en un sistema

Ecuación de las trayectorias:

$$\frac{dx}{dt} = y(t) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = f(x(t))$$

Trayectoria "y = func. de x"

$$\frac{dy}{dx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } \frac{dx}{dt} \neq 0 \\ \parallel \\ y}}{=} \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f(x)}{y} \implies y\,dy = f(x)\,dx \implies$$

$$\implies \int y\,dy - \int f(x)\,dx = 0$$

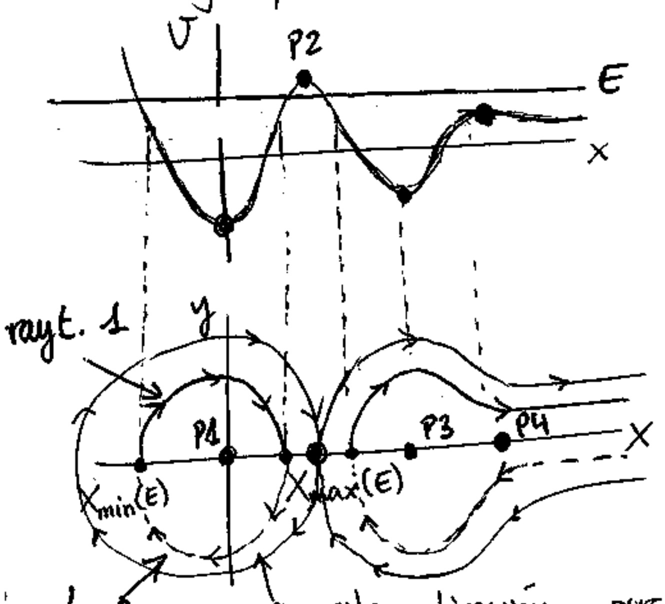
Si $U(x)$ es una primitiva de $-f(x)$ (es decir $U'(x) = -f(x)$):

$$\underbrace{\frac{y^2}{2}}_{\substack{\text{E cinética} \\ (\text{masa}=1)}} + \underbrace{U(x)}_{\substack{\text{energía} \\ \text{potencial}}} = cte = \underbrace{E}_{\text{energía}}$$

↳ sistema conservativo (ojo: En dimensión 1 todos lo son)

↳ define y implícitamente en función de x

Por ejemplo, U con el siguiente gráfico:



$$\frac{y^2}{2} + U(x) = E$$

$$y = \pm\sqrt{2(E - U(x))}$$

las x relevantes son aquellas que cumplen $\underline{U(x) \leq E}$ (si $U(x) > E$ no podemos tomar la raíz)

P1, P2, P3 son puntos críticos

en esta dirección porque $y' = -U'(x) = f(x)$. En X_{min} a la derecha $U(x)$ decrece $\implies y' > 0 \implies y$ crece.

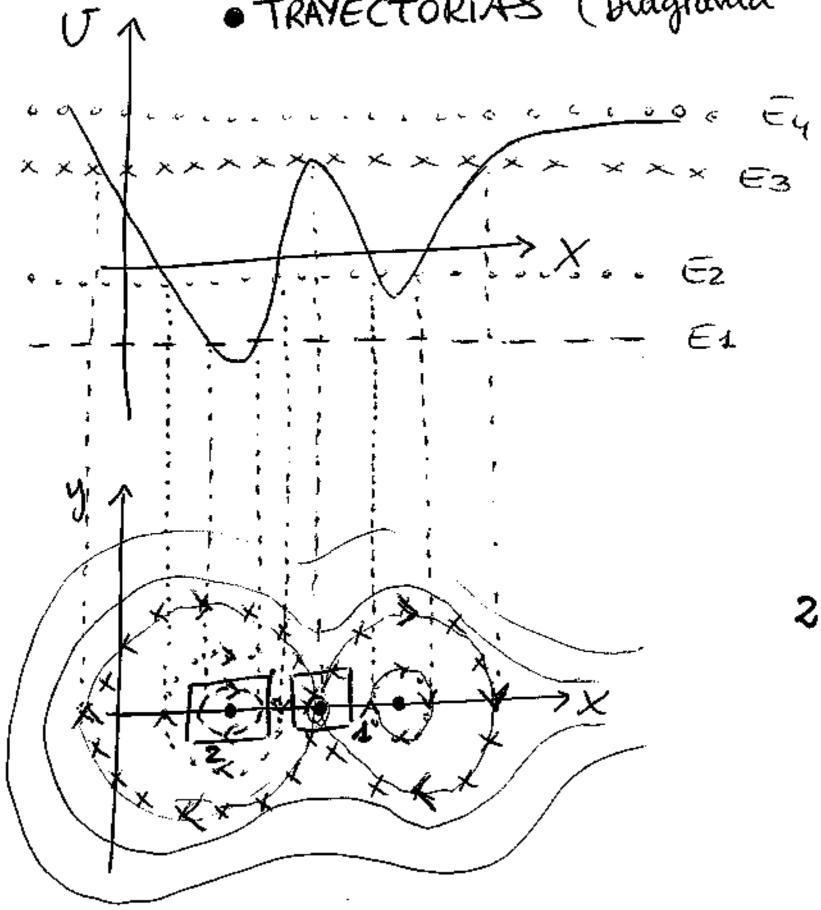
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\,U'(x)}{2\sqrt{2(E-U(x))}}$$

en X_{min}, X_{max} $2(E-U(x))=0 \implies$
$\implies$ las partes superior e inferior "pegan" bien.

PUNTOS CRÍTICOS:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= f(x) = -U'(x) \end{aligned} \quad \xrightarrow[y'=0]{x'=0} \quad \begin{cases} y = 0 \\ U'(x) = 0 \end{cases}$$

- TRAYECTORIAS (Diagrama de fases)



1

Puerto o punto de silla

2

Centro

COMENTARIOS: (Importantes)

① Una <u>integral primera</u> de un sistema es una función que es constante sobre cada solución/trayectoria.
Por ejemplo, $\frac{y^2}{2} + U(x)$ es una integral primera del sistema
$\begin{cases} x' = y \\ y' = -U'(x) \end{cases}$ En dimensión 2 corresponde (esencialmente) a una ecuación implícita para las trayectorias y se pueden encontrar intentando resolver la EDO de las trayectorias $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$ con $x' = f$, $y' = g$. En dimensiones más altas, una integral primera solo da una hipersuperficie en la que están las

trayectorias/soluciones.

Por ejemplo en $\mathbb{R}^3$:
$$x' = \cdots$$
$$y' = \cdots$$
$$z' = \cdots$$

$h(x,y,z)$ es integral primera $\iff h(x(t),y(t),z(t)) \equiv cte.$, e.d., la trayectoria está $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = cte\}$. Ese conjunto es una superficie regular en aquellos puntos en los que $\nabla h \neq 0$, por lo que se puede despejar una variable en términos de las otras dos.

(2) En el ejemplo aparecen trayectorias cerradas; veremos que corresponden a soluciones periódicas.

(3) También hemos visto que hay trayectorias que "convergen" a un punto crítico.

Veremos que si $x(t)$ es una solución (de $X' = F(X)$) y
$$X(t) \xrightarrow[\substack{t\to\infty \\ (t\to-\infty)}]{} p$$ entonces p es crítico.

Basta que existan $t_n \to \infty$ tal que $X(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} p$

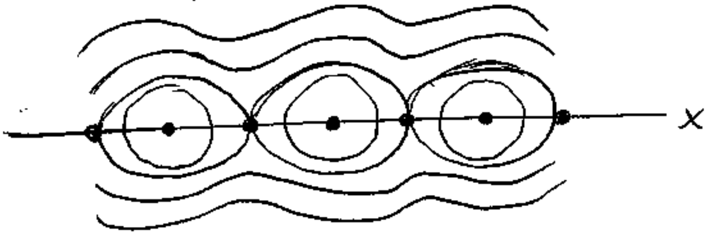
(4) Si "ampliamos" con un "super-zoom" zonas del diagrama de fases, fuera de un punto crítico se obtienen líneas rectas pero en un punto crítico puede haber un puerto o un centro. Esto nos va a llevar a estudiar los distintos tipos de un punto crítico.

Ejercicio: PÉNDULO SIMPLE

$$\theta'' = \frac{-g}{L}\,\text{sen}(\theta)$$

$$\begin{matrix} x = \theta \\ y = \theta' \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{-g}{L}\,\text{sen}(x) \end{cases}$$

El diagrama de fases es:



SISTEMAS CONSERVATIVOS EN DIMENSIÓN > 1

$$X'' = F(X)$$

DEFINICIÓN: Conservativo $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ $F = -\nabla U$

$F: \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $U: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ regular (C^2)

PROPOSICIÓN: $\underbrace{\frac{|X'(t)|^2}{2}}_{\text{en. cinética}} + \underbrace{U(X(t))}_{\text{en. potencial}}$ = es constante $\left(\begin{matrix}\text{e.d. } \frac{|y|^2}{2} + U(x) \\ \text{es una int. primera}\end{matrix}\right)$

Además, $|\vec{v}|^2 = \sum v_j^2$, la norma euclídea

demostración

$|v|^2 = v.v$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{|x'(t)|^2}{2}}_{\frac{x'.x'}{2}} + U(X(t))\Big) = \frac{\cancel{2}x'.x''}{\cancel{2}} + \nabla U(X(t)).X'(t) = X'\Big(X'' + \underbrace{\nabla U(X(t))}_{-F(X(t))}\Big) \overset{\text{solución}}{=} 0 \;\blacksquare$$

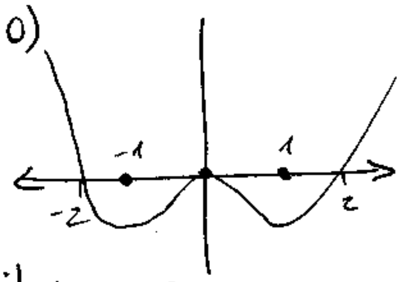
Ejemplo: $x'' = \underbrace{x - x^3}_{f(x)} = -U'(x)$ (ED)

$U(x) = \frac{-x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$ (par)

$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 = -U'(x) \end{cases} \xrightarrow{\text{puntos críticos}} \begin{cases} y = 0 \\ x(1-x^2) = 0, \text{ e.d., } x = 0 \wedge x = \pm 1 \end{cases}$

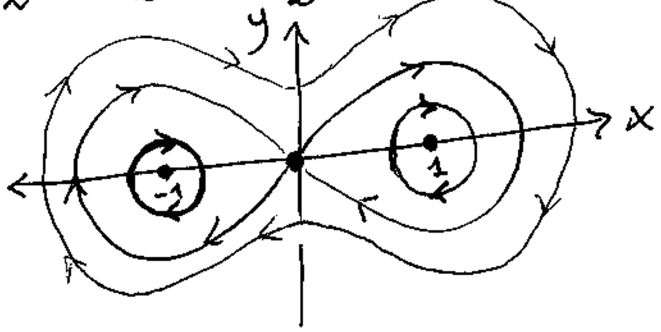
$\Longrightarrow$ puntos críticos: $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$

¿trayectorias?



$\frac{y^2}{2} + U(x)$ se conserva en las trayectorias, e.d., las trayectorias están descritas por:

$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} = \text{cte.}$



COMENTARIOS:

① La simétrica con respecto al eje x tiene que ver con reversibilidad en t, e.d., $x(t)$ solución de (ED) $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow \bar{x}(t) \overset{def}{=} x(-t)$ también es solución de (ED).

② $z = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ $\left(= \frac{y^2}{2} + U(x) \right)$

Las trayectorias son curvas de nivel.

PROPOSICIÓN: $X' = F(X)$, $F \in C^1(\Omega)$, Ω abto en $\mathbb{R}^d$.

Si $X(t)$ es una solución que da lugar a una trayectoria/curva cerrada entonces es periódica.

LINEALIZACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS Y CLASIFICACIÓN

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \qquad (x_0, y_0) \text{ punto crítico} \qquad \big(f(x_0,y_0) = 0 = g(x_0,y_0)\big)$$

TAYLOR: pto. crítico

$$f(x,y) = \overbrace{f(x_0,y_0)}^{0} + f_x(x_0,y_0)\overbrace{(x-x_0)}^{u} + f_y(x_0,y_0)\overbrace{(y-y_0)}^{v} + R(x,y)$$

donde (suponemos f es C^2) $R(x,y) = O\big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\big)$

$(x,y) \longrightarrow (u,v)$ (Si $x(t), y(t) \rightsquigarrow u(t), v(t)$)

$$\begin{aligned} u' &= au + bv + O(u^2+v^2) \\ v' &= cu + dv + O(u^2+v^2) \end{aligned} \qquad \text{donde } \begin{cases} a = f_x(x_0,y_0) \\ b = f_y(x_0,y_0) \\ c = g_x(x_0,y_0) \\ d = g_y(x_0,y_0) \end{cases}$$

lo mismo que hemos hecho pero con g

Ese sistema es: (aprox. si $|u| \ll 1$, $|v| \ll 1$)

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases} \longrightarrow \text{SISTEMA LINEALIZADO EN EL PUNTO CRÍTICO}$$

Vamos a suponer que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, e.d., el punto crítico es <u>no degenerado</u>.

Eso tiene como consecuencia que el punto crítico (x_0,y_0) es <u>aislado</u>, e.d., en un entorno de (x_0,y_0) no hay ningún otro pto. crítico

$(x,y) \xmapsto{H} (f(x,y), g(x,y))$ $\det(DH) \neq 0 \Longrightarrow H$ es invertible cerca de (x_0,y_0)

Está claro que $u=0$, $v=0$ es el único punto crítico del sistema lineal $\begin{cases} u' = au+bv \\ v' = cu+dv \end{cases}$ y vamos a estudiar como son sus trayectorias

VISTO:

(s) $\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}$ (x_0,y_0) punto crítico tal que $\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \neq 0$ en

(SL) $\begin{array}{l} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{array}$ $\begin{array}{l} f_x(x_0,y_0) = a \\ f_y(x_0,y_0) = b \end{array}$ $\begin{array}{l} g_x(x_0,y_0) = c \\ g_y(x_0,y_0) = d \end{array}$

PROPOSICIÓN: Las trayectorias de (S) cerca de (x_0,y_0) tienen e mismo aspecto que las de (SL) en (0,0). SALVO $\lambda_1=\lambda_2$ (re o λ_1, λ_2 imaginarios puros (e.d. $Re(\lambda_i)=0$).

Si λ_1, λ_2 podría pasar cualquier tipo de nodo.

Si $Re(\lambda_i)=0$ puede pasar a $\begin{cases} \text{centro} \\ \text{espiral} \end{cases}$ siempre que

f, g sean analíticas (por ej: polinomios, sen, cos ...)

$\hookrightarrow$ se pueden expresar como la suma de su serie de Taylor.

Ejemplo: Otra cosa que puede pasar en centros.

$$f(x,y) = \begin{cases} -y + x(x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x + y(x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

Está claro que son C^1.

i) (0,0) es punto crítico (f y g se anulan)

ii) El sist. lineal asociado es: $\begin{array}{l} x' = -y \\ y' = x \end{array}$

Observar que $(x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = O(x^2+y^2)$

i) El sistema en polares es:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \left(r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \right)$$

$$r' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\underbrace{(2xx' + 2yy')}_{\binom{x}{y}\cdot\binom{x'}{y'}} = \frac{1}{r}\Big(x\big(-y + xr^2 \operatorname{sen}(\tfrac{1}{r})\big) +$$

$$+ \; y\big(x + yr^2 \operatorname{sen}(1/r)\big)\Big) = \frac{1}{r}(x^2+y^2)\, r^2 \operatorname{sen}(1/r) = r^3 \operatorname{sen}(1/r)$$

Con esto basta, como veremos ...

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (si $x \neq 0$, cualquier arctan(·) ⇝ dos de ellas se diferencian en constantes)

irrelevante cuando derivamos

$$\theta' = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\cdot x' \right) \Rightarrow$$

$\frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \theta' = \frac{1}{x^2+y^2}(xy' - yx') \overset{\text{sustituimos } x', y'}{=} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

mult. por x^2 en num & den

$\binom{-y}{x}\cdot\binom{x'}{y'}$

iv) Si $r_n = \frac{1}{n\pi}$, $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{r_n}\right) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0 \quad n \in \mathbb{N}$

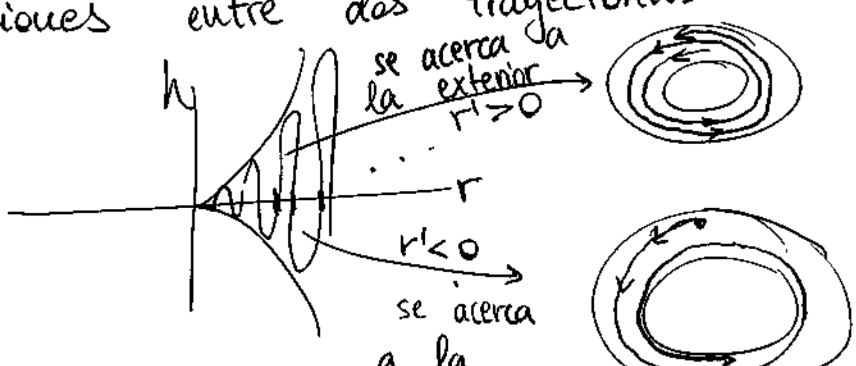
e.d. $r(t) = r_n \longrightarrow r' = 0$ es solución.

$\theta(t) = t \quad (\theta' = 1)$ sucesión de trayectorias cerradas Γ_n con

"$\Gamma_n \searrow (0,0)$"

v) ¿Cómo son las soluciones entre dos trayectorias cerradas consecutivas?

$$\begin{cases} r' = r^3 \operatorname{sen}(1/r) = h(r) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$



ESTABILIDAD DE PUNTOS CRÍTICOS

(S) $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ $\quad p = (x_0, y_0)$ punto crítico (e.d. $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) =$

"no-singular" $\longrightarrow \begin{vmatrix} f_x(p) & f_y(p) \\ g_x(p) & g_y(p) \end{vmatrix} \neq 0$

¿Estabilidad de (S) en p?

Para los casos en el que el sistema lineal asociado a (S) en p tiene el mismo aspecto que el de (S) podemos concluir estabilidad en los casos pertinentes.

$\left(e^{\lambda t} \underset{t \to \infty}{\nearrow} +\infty \text{ si } \lambda > 0,\ e^{\lambda t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \text{ si } \lambda < 0 \right)$

~~Si Re(λ_i) <~~

Resumen:

(i) Si $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad (i = 1,2) \implies$ estable (asintóticamente estable)
(caso λ_1, λ_2 reales está ahí)

al menos uno!

(ii) Si un autovalor tiene parte real > 0 (incluye el caso que sea real) entonces es inestable.

(iii) CASO MALO: $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0 \;\; {\scriptstyle i=1,2} \longrightarrow$ centro para (SL)

Lo que vamos a ver es un enfoque que mira directamente a (S) [VALE PARA TODOS LOS CASOS]. Enfoque debido a LYAPUNOV.

Idea: intentar encontrar una función $E(x,y)$ que se comporte como una "energía" en la que "p" es el punto de energía mínima, y tal que la "energía" se mantiene o decrece a lo largo de las trayectorias (cercanas a "p")

Recordar: $p=(x_0,y_0)$ pto. crítico para (S), f, g C^1 en entorno de p

DEFINICIÓN:

① E es DEFINIDA POSITIVA $\Longleftrightarrow$ $\exists r_0 > 0$ tal que

$$E : B(p, r_0) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \equiv \{ q \in \mathbb{R}^2 : \|q - p\| < r_0 \}$$

norma euclídea

y: i) E es C^1

ii) $E(p) = 0$

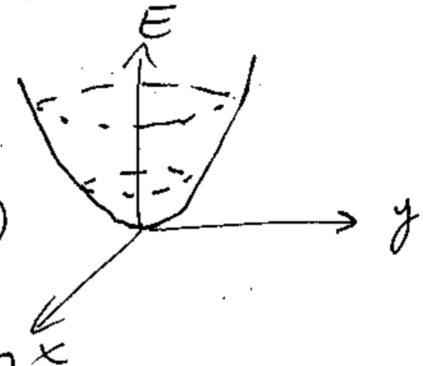
iii) $E(q) > 0$ si $q \neq p$

② E es semidefinida positiva $\Longleftrightarrow$ "lo mismo" con

iii) $E(q) \geq 0$ si $q \neq p$.

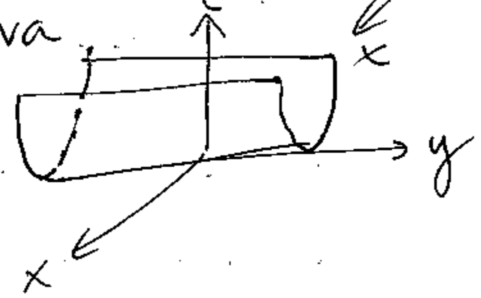
③ y ④ E es DEFINIDA (SEMIDEFINIDA) NEGATIVA $\Longleftrightarrow$ "lo mismo" pero $E(q) < 0$ $\big(E(q) \leq 0\big)$.

Ejemplo:



$E = x^2 + y^2 \longrightarrow$ definida positiva para $(0,0)$

$E = x^2 \longrightarrow$ semidefinida positiva para $(0,0)$



$$\underbrace{(x\ \ y)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{(*)}$$ es definida positiva si $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$ lo es.

Se puede ver fácilmente:

$(*)$ def. pos. sii los autovalores $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$ son ambos pos

<u>Otro ejemplo</u>:

$E = x^2 + \operatorname{sen}^2(y)$ definida positiva en $(0,0)$

<u>Comentario:</u> Las E que son def. positivas para p van a ser las "energías".

Pregunta: ¿en qué se convierte la idea de que la energía $\underbrace{\text{se mantiene o decrece}}_{(\star)}$, en las trayectorias?

$$e(t) \overset{\text{def.}}{=} E(\underbrace{x(t),\ y(t)}_{\uparrow \text{ solución de } (s)}) \qquad (\star) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}e(t) \leq 0$$

$$\frac{d}{dt}e(t) = E_x\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + E_y\big(x(t), y(t)\big)y'(t) =$$

$$= \big(E_x f + E_y g\big)\big(x(t), y(t)\big) \underset{??}{\leq} 0$$

Basta que $(E_x f + E_y g) \leq 0$ para cualquier punto (x,y) cerca de p.

PROPOSICIÓN (sobre la estabilidad):

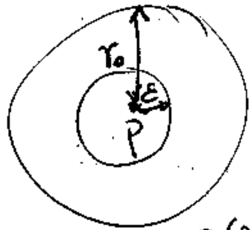
Si existe E definida positiva en p y además $E_x f + E_y g$ es semidefinida negativa en p ($E \in C^2$) entonces p es estable para (s), es decir, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $\|(x(t_0), y(t_0)) - p\| < \delta$, entonces $\|(x(t), y(t)) - p\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

demostración

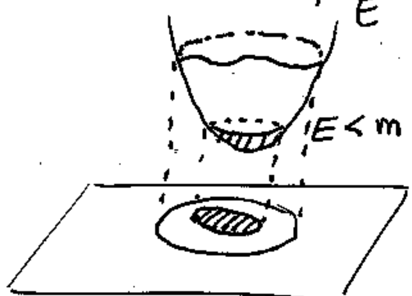
$E : B(p, r_0) \longrightarrow \mathbb{R}$

Dado $\varepsilon > 0$ ¿$\exists \delta$ como en el enunciado?

Podemos suponer $\varepsilon < r_0$



i) Sea $m = \min_{\partial B(p_0, \varepsilon)} E$ existe (por ser E continua y $\partial B(p_0, \varepsilon)$ compacto) y $m > 0$ pues E solo se anula en p y es mayor que cero fuera (en particular en $\partial B(p, \varepsilon)$).



ii) $\left.\begin{array}{l} E(p) = 0 \\ \text{cont.} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \delta > 0$ tal que

$E(q) < m$ si $\|q - p\| < \delta$.

iii) Si $(x(t_0), y(t_0)) \in B(p, \delta)$ entonces $(x(t), y(t)) \in B(p, \varepsilon) \ \forall t \geq t$

DEFINICIÓN: Una función E como la de la proposición se denomina FUNCIÓN DE LYAPUNOV (DÉBIL) para (s) en p.

PROPOSICIÓN: Si en las hipótesis del resultado anterior cambiamos $E_x f + E_y g$ semidefinida negativa por definida negativa, entonces p es asintóticamente estable, e.d., $\exists \delta_0$ tal que si $(x(t_0), y(t_0)) \in B(p, \delta_0)$ entonces $(x(t), y(t))$ converge a p cuando $t \to \infty$.

Razón

Tomamos ε_0 tal que las hipótesis sobre, $E_x f + E_y g$ se cumplen en $\overline{B}(p, \varepsilon_0)$. Por la proposición anterior $\exists \delta_0$ tal que $(x(t_0), y(t_0)) \in B(p, \delta_0) \Rightarrow (x(t), y(t)) \in B(p, \varepsilon_0)$.

Con $e(t)$ como antes, $e(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ pues de lo contrario pasaría lo siguiente:

- $e(t)$ decrece
- Si no converge a 0, entonces la trayectoria se queda en un anillo.

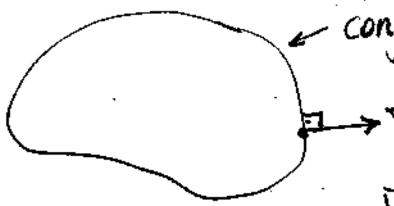
Como $E_x f + E_y g$ es continua, no se anula en el anillo, y es < 0 en él, entonces $\exists \gamma > 0$ tal que $E_x f + E_y g \leq -\gamma < 0$ en el anillo.

Entonces si $t > t_0$: $e(t) = e(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\frac{d}{dt} e(s)}_{\leq -\gamma} ds \leq$

$\leq e(t_0) - \gamma(t - t_0) \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$ contradicción con que $e(t) \geq 0$

DEFINICIÓN: Una E como en esta proposición se llama FUNCIÓN DE LYAPUNOV FUERTE.

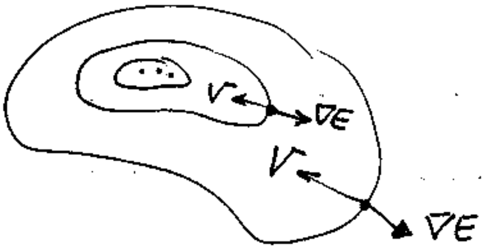
Interpretación geométrica



← conjunto de nvl de E $\quad E = h \quad \{(x,y) : E(x,y) = h\}$

$\rightarrow \nabla E$ perpendicular a la frontera

$$E_x f + E_y g = \underbrace{\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}}_{"V"} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}}_{\nabla E}$$



Si $V \cdot \nabla E < 0 \implies V$ apunta hacia el interior

Si en $\{E \leq h\}$ se cumplen las hipótesis de E def. positiva en p, y $E_x f + E_y g$ def. negativa en p, entonces cualquier solución a (S) que comience en $\{E \leq h\}$ converge a p ("es atraída por p"). Es decir, está en la "cuenca de atracción de p".

Ejercicio: Usando las mismas ideas (en especial $e(t) = e(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} e(s)\,ds$, donde $\frac{d}{dt} e(s) = E_x f + E_y g$) demostrar que si suponemos que E está definida en todo $\mathbb{R}^2$ y cumple las hipótesis de la 2ª prop. y además $E(q) \longrightarrow \infty$ cuando $\|q\| \to \infty$ entonces todas las trayectorias convergen a p.

(En las condiciones de la 1ª prop. $\longrightarrow$ cualquier trayectoria es acotada)

Ejemplo: Encontrar α tal que $x^2+\alpha y^2$ es una función de Lyapunov fuerte para el sistema $\begin{cases} x' = y - \text{sen}^3(x) \\ y' = -4x - \text{sen}^3(y) \end{cases}$ en el punto $(0,0)$.

Observar que $(0,0)$ es un punto crítico y el sist. linealizado tiene matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' = y \\ y' = -4x \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ autovalores $= \pm\sqrt{2}\, i \longrightarrow$ centro.

$\alpha > 0 \Longrightarrow x^2 + \alpha y^2$ definida positiva

$$E_x f + E_y g = 2x\left(y - \text{sen}^3(x)\right) + 2\alpha y\left(-4x + \text{sen}^3(y)\right) =$$

$$= \underbrace{(2-8\alpha)}_{\substack{\alpha \text{ tal que} \\ 2-8\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{4}}} xy - \underbrace{2x\,\underbrace{\text{sen}^3(x)}_{\approx x^3}}_{x^4} - \underbrace{2\alpha y\,\underbrace{\text{sen}^3(y)}_{\approx y^3}}_{y^4}$$

$$E_x f + E_y g = -2x^4\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^3 - \frac{1}{2}y^4\left(\frac{\text{sen}(y)}{y}\right)^3$$ necesitamos que esto sea $\leq$ que algo.

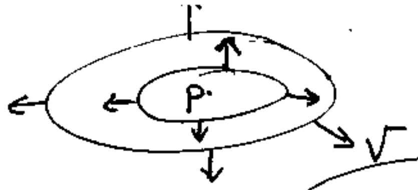
Pero $\frac{\text{sen}(u)}{u} \approx 1$ cerca de $u=0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow E_x f + E_y g \leq -\underset{\substack{\uparrow \\ c<0}}{c}\left(x^4+y^4\right)$$ definida negativa.

$$E = x^2 + \frac{y^2}{4} \quad \text{porque} \quad \alpha = \frac{1}{4}$$

La pregunta ahora es estimar el h más grande tal que el $E \leq h$, $E_x f + E_y g$ sea def. negativa.

Observaciones

① Si el comportamiento es que 

con $E = \text{cte}$.
el punto es inestable.

Esto es pedir demasiado

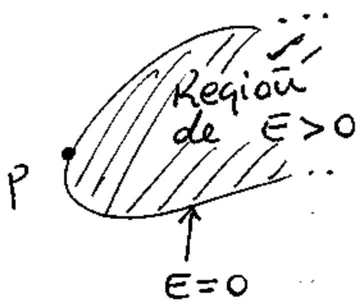
Hipótesis: E definida positiva en p

$E_x f + E_y g$ definida positiva en p

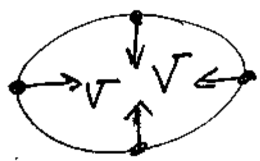
$\nabla E \cdot V > 0$

Bastaría: E C^1

$E_x f + E_y g > 0$ en R



$\Longrightarrow$ INESTABLE

② 

curva cerrada simple cualquiera tal que $V = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ apunta hacia adentro, entonces las trayectorias que comienzan dentro permanecen dentro (no se pueden escapar).

TRAYECTORIAS CERRADAS (es decir, soluciones periódicas)

(S) $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ $\quad f, g \in C^1$ en $\mathbb{R}^2$ (en una bola )

PROPOSICIÓN: (CRITERIO DE BENDIXSON)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, convexo y simplemente conexo.

Si $(f_x + g_y)(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$.

Entonces no existe ninguna trayectoria cerrada de (S) que este completamente contenida en Ω.

demostración (reducción al absurdo)

Supongamos que existe $\rightsquigarrow C_1$

i) $\displaystyle\int_R (f_x + g_y)\, dx\, dy \neq 0$

C_1 curva cerrada simple

Razón:
- $f_x + g_y$ continua
- Ω convexo
- $f_x + g_y$ no se anula en C_1.

Entonces $f_x + g_y > 0$ en Ω (ó < 0 en Ω).

$$\Longrightarrow \int_R (f_x + g_y)\, dx\, dy > 0 \quad (\text{ó } < 0).$$

ii) $$\int_C (f\, dy - g\, dx) \overset{\text{simpl. conexo}}{=} \pm \int_R (f_x + g_y)\, dx\, dy \neq 0, \text{ e.d.,}$$

$$\int_C (f\, dy - g\, dx) \neq 0.$$

$C = (x(t), y(t))$ sol. periódica periodo T.

iii) $$\int_C f\, dy - g\, dx = \int_0^T \Big(f(x(t),y(t)) \underbrace{y'(t)}_{\overset{\text{sol. (S)}}{=} g(x(t),y(t))} dt - g(x(t),y(t)) \underbrace{x'(t)}_{\overset{\text{sol. (S)}}{=} f(x(t),y(t))} dt \Big) =$$

$$= \int_0^T \underbrace{(fg - gf)}_{=0} = 0 \qquad \underline{\text{contradicción}}$$

Ejemplo: péndulo amortiguado

$$x'' = -\operatorname{sen}(x) - a x' \qquad a>0$$

Sistema: $\underbrace{x' = y}_{f} \qquad y' = \underbrace{-\operatorname{sen}(x) - ay}_{g}$

$f_x + g_y = -a < 0$ ✓ Ejercicio: comprobar que el ej. 11 lista 7 lo cumple.

Comentario: se puede dar una versión del criterio más general (pero igual de difícil de aplicar)

Si $h(x,y)$ no se anula, las trayectorias de $\begin{array}{l} x' = f \\ y' = g \end{array}$ y $\begin{array}{l} x' = hf \\ y' = hg \end{array}$ son las mismas. (la edo $\frac{dy}{dx} = \frac{hg}{hf} = g/f$)

Eso quiere decir que en las condiciones del criterio si $\exists h$ C^1 que no se anula en Ω y $(hf)_x + (hg)_y$ tampoco se anula, entonces (s) no tiene trayectorias cerradas contenidas en Ω.

PROPOSICIÓN (POINCARÉ – BENDIXON):

Sean $f, g \in C^1(\Omega)$, Ω dominio (o región) en $\mathbb{R}^2$ (abto., conexo) con $(s) := \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$

a) Si Ω es además simplemente conexo y C es una trayectoria cerrada contenida en Ω entonces C "encierra" un punto crítico de (s).

b) Sea $R \subset \Omega$ cerrado y acotado (e.d. compacto), tal que:

i) R no contiene puntos críticos de (s).

ii) Existe una trayectoria C que comienza en R y se mantiene en R. ($(x(t), y(t))$ solución de (s) tal que $(x(t), y(t)) \in$ con $t_0 \le t < \infty$).

Entonces ocurre una de las siguientes cosas:

- C es una trayectoria cerrada.
- C converge en espiral a una trayectoria cerrada

En cualquier caso, $\exists$ trayectoria cerrada.

<u>Observación</u>: forma habitual de <u>intentar</u> aplicar b):

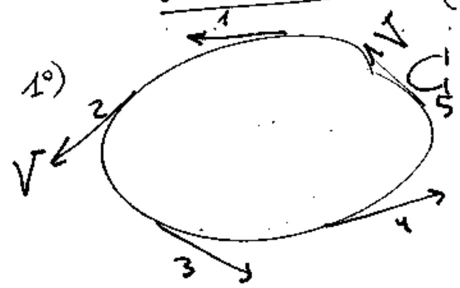
Buscar R tal que

$V = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ que V apunte hacia adentro.

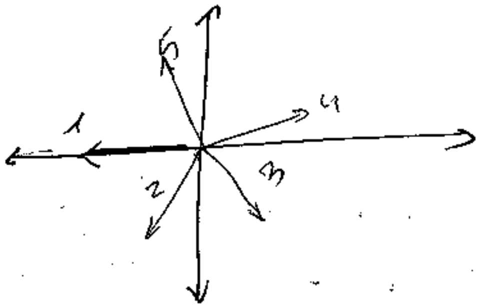
atrapa las trayectorias

<u>demostración</u> (no muy formal)

(A) 1°)

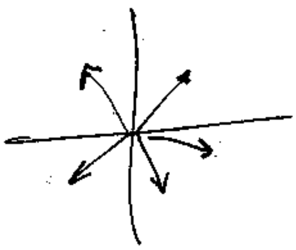


V tangente a la trayectoria de C porque es solución.



Acaba dando $\boxed{\text{una vuelta}}$ el vector tangente.

2°)



Sigue dando una vuelta si ◌ está cerca de C

Si no nos "topamos" con un punto crítico llegamos a esto ◎. V

Por continuidad ~~da~~ cero vuel

Conclusión, tiene que haber un punto crítico.

(B) No demostrable con nuestros conocimientos.

Ejemplos de Poincaré-Bendixon

i) $x' = 4x + 4y - x(x^2+y^2)$
$y' = -4x + 4y - y(x^2+y^2)$

Ejercicio: $(0,0)$ es el único punto crítico.

Tiene una trayectoria cerrada rodeando el $(0,0)$

Vamos a intentar curvas $x^2 + y^2 = r_0^2$ (e.d. círculos)

$\longrightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\qquad \underset{\substack{\shortparallel \\ xf+yg}}{\vec{v}\cdot\vec{V}} = \cdots = 4x^2 + 4y^2 - (x^2+y^2)^2 = 4r^2 + r^4$

con $r^2 = x^2 + y^2$

$\Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{V} = r^2(4-r^2)$ $\nearrow < 0$ si $r^2 > 4 \Rightarrow r > 2$
$\searrow > 0$ si $r^2 > 4 \Rightarrow r < 2$

elegido a ojo (cualquier cosa < 2)

$r_0 = 3/2 \longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{V} > 0 \longrightarrow \vec{V}$ apunta al exterior.

$r_0 = 5/2 \longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{V} < 0 \longrightarrow \vec{V}$ apunta al interior

Entonces existe una trayectoria cerrada en

$R = \{(x,y) : \frac{9}{4} < x^2 + y^2 < \frac{25}{4}\}$

Comentario: para esto NO se necesita P-B, se ve por el cálulo anterior que $r=2$ es una trayectoria cerrada, de hecho, $\vec{v}\cdot\vec{V} = 0$ en ella.

En polares el sistema es: $\begin{cases} r' = r(4-r^2) & \rightarrow r=2 \\ \theta' = 4 & \rightarrow \theta \text{ va de } \infty \text{ a } -\infty \end{cases}$

Recordatorio para pasar a polares:

$rr' = xx' + yy'$
$r^2\theta' = xy' - yx'$

(y sustit. por $\begin{matrix} x = r\cos \\ y = r\,\text{sen} \end{matrix}$ después)

(2) $x' = y + \frac{x}{4}(1 - 2(x^2+y^2))$

$y' = -x + \frac{y}{2}(1 - (x^2+y^2))$

Ejercicio: ver que $(0,0)$ es el único punto crítico

Demostrar que tiene una trayectoria (solución) cerrada, es decir, solución periódica.

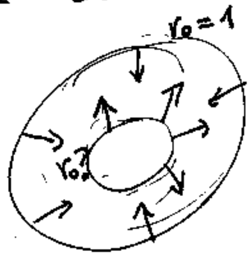
Probamos con círculos: $x^2+y^2 = r_0^2$

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $v \cdot V = xf + yg = \frac{x^2}{4}(1-2r^2) + \frac{y^2}{2}(1-r^2)$

$$G = \frac{r^2\cos^2\theta}{4}(1-2r^2) + \frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2}(1-r^2)$$

Si elegimos $r_0 > 1$, entonces $\frac{x^2}{4}\underbrace{(1-2r^2)}_{<0} + \frac{y^2}{2}\underbrace{(1-r^2)}_{<0} < 0$

pues si $x^2+y^2 = r_0^2 > 1$, no pueden anularse a la vez x e y, e.d., uno de los dos términos en $\frac{x^2}{4}(1-2r^2) + \frac{y^2}{2}(1-r^2)$ es < 0 (y el otro ≤ 0)



Ahora necesitamos $r_0 < 1$ (en el interior) tal que $v \cdot V > 0$ en $x^2+y^2=r_0^2$.

Con r_0 tal que $\overbrace{1-2r_0^2 > 0}^{\text{esto implica}}$ y $\overbrace{1-r_0^2 > 0}^{\text{esto}}$ $\Rightarrow r_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} -$

Hay una trayectoria cerrada en $R_\varepsilon = \{(x,y) : \frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{\sqrt{2}} +$

($\Rightarrow$ trayectoria cerrada en $R = \{(x,y) : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$

Ayer: $x' = y + \frac{x}{4}\left(1 - 2(x^2+y^2)\right)$

$y' = -x + \frac{y}{2}\left(1 - (x^2+y^2)\right)$

Trayectoria cerrada en $R = \left\{(x,y) : \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$

$(0,0)$ es el único punto crítico. i) ¿De qué tipo es?

SL) $\xrightarrow[\text{cerca del }(0,0)]{\text{como estamos}}$ $\begin{cases} x' = y + \frac{x}{4} \\ y' = -x + \frac{y}{2} \end{cases}$ (el resto de los términos son de grado ≥ 2)

Autovalores:

$\begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)+1 = 0 \implies \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{9}{8} = 0$

$\lambda = \dfrac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4\cdot 9/8}}{2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\quad -\quad} = \alpha \pm i\beta \qquad \alpha > 0$

$\longrightarrow$ espiral inestable

Recordemos: $r^2 = x^2+y^2$
$\theta = \arctan y/x$

ii) ¿Qué pasa dentro y fuera?

Derivando el recuerdo $\longrightarrow$ $\begin{matrix} rr' = xx' + yy' \\ r^2\theta' = xy' - yx' \end{matrix} \implies$

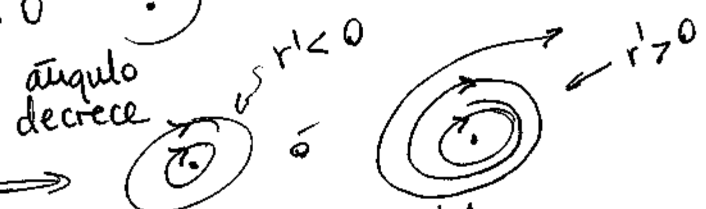
$$\implies \begin{cases} rr' = \cdots = \frac{x^2}{4}(1-2r^2) + \frac{y^2}{2}(1-r^2) = \frac{r^2\cos^2\theta}{4}(1-2r^2) + \\ \quad + \frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2}(1-r^2) \implies r' = \frac{r\cos^2\theta}{4}(1-2r^2) + \frac{r\operatorname{sen}^2\theta}{2}(1-r^2) \\ r^2\theta' = -(x^2+y^2) + \frac{xy}{2}(1-r^2) - \frac{xy}{4}(1-r^2) \implies \\ \quad \implies \theta' = -1 + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{4}\left(2(1-r^2) - (1-2r^2)\right) = -1 + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{4} = \\ \quad = -1 + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{8} \end{cases}$$

observación: a) de aquí se puede ver que no hay más puntos críticos porque θ' no se anula.

b) Como $\theta' \leq -7/8 \implies$ como $\theta' < 0$

Como $\theta' \leq -7/8 < 0 \implies$

$\implies \theta$ va de ∞ a $-\infty$. $\implies$



(*) Con polares los argumentos solo valen fuera del origen.

Si $r>1 \rightsquigarrow r'<0$
$1-r^2<0$
$1-2r^2<0$

Ejemplo

En polares: $\begin{cases} r' = r(1-r^2)\left[r^2\operatorname{sen}^2\theta + (r^2\cos^2\theta-1)^2\right] \\ \theta' = r^2\operatorname{sen}^2\theta + (r^2\cos^2\theta-1)^2 \end{cases}$

Puntos críticos (ignorando el $(0,0)$) corresponden a $\begin{cases} r'=0 \\ \theta'=0 \end{cases}$ $\hookrightarrow \underline{r>0}$

Si $r=1$: $F=0$

$G=0 \iff r^2\operatorname{sen}^2\theta + (r^2\cos^2\theta-1)^2 = 0 \iff$

$\iff \begin{cases} r\operatorname{sen}\theta = 0 \longrightarrow \theta = n\pi \implies \cos\theta = \pm 1 \\ r^2\cos^2\theta = 1 \implies r=1 \end{cases}$

$\implies$ puntos críticos $(-1,0),(0,1)$ (y el $(0,0)$)

Afirmación: $r=1$, $0<\theta<\pi$ es trayectoria

$r=1 \longrightarrow \underset{1-r^2}{r'=0} \longrightarrow$ se cumple la 1ª ecuación

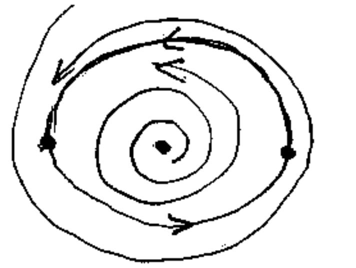
$\theta' \overset{r=1}{=} \operatorname{sen}^2\theta + (\cos^2\theta-1)^2 \longrightarrow$ ¿corresponde a una solución que va de 0 a π?

$\theta(t) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{cuando } t\searrow-\infty \\ \pi & \text{cuando } t\nearrow+\infty \end{cases}$

Ejemplo:

$$r' = r(1-r^2)\left(\overbrace{r^2\,\text{sen}^2\theta + (r^2\cos^2\theta - 1)^2}^{\theta'}\right)$$

$$\theta' = r^2\,\text{sen}^2(\theta) + (r^2\cos^2\theta - 1)^2$$



① En cartesianas (x,y):

$$x' = \left[x(1-(x^2+y^2)) - y\right]\left[y^2 + (x^2-1)^2\right]$$

$$y' = \left[y(1-(x^2+y^2)) + x\right]\left[y^2 + (x^2-1)^2\right]$$

② Puntos críticos: $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$

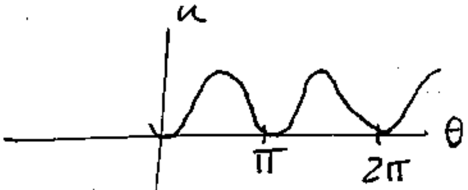
③ Trayectorias con $r(t) \equiv 1$.

i) $r(t) \equiv 1 \Longrightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{r'}} = r\underbrace{(1-r^2)}_{\substack{\parallel \\ 0}}(\cdots)$ se satisface

ii) $r(t) \equiv 1$, la ecuación para $\theta(t)$ es $\theta' = \text{sen}^2\theta + (\cos^2\theta - 1)^2$ (ECθ)

Con cualquier solución de esa ecuación obtenemos una trayectoria

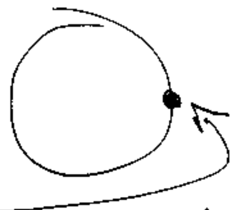
$$u = \text{sen}^2\theta + (\cos^2\theta - 1)^2$$



$$\text{sen}^2\theta + (\cos^2\theta - 1)^2 = 0 \iff \begin{cases} \text{sen}^2\theta = 0 \quad y \quad \cos^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \text{sen}\,\theta = 0$$

1º) $\theta(t) \equiv 0$ es solución

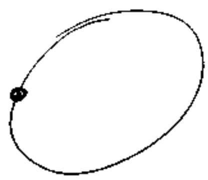
$r(t) \equiv 1$
$\theta(t) \equiv 0$ nos da de solución esta



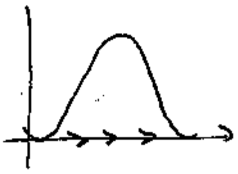
(la trayectoria es el pto. crítico $(1,0)$)

2º) $\theta(t) \equiv \pi$

$r(t) \equiv 1$
$\theta(t) \equiv \pi$ nos da el pto. equilibrio $(-1,0) \longrightarrow$



3º) $\theta_1(t)$ sol. de (ECθ) con $\theta_1 : (-\infty, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$



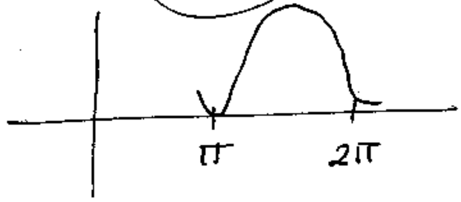
definida en todo $\mathbb{R}$ por el "resultado básico de prolongabilidad".

θ_1 crece (estrict.) $\left(\theta_1'(t) = \operatorname{sen}^2\theta_1(t) + (\cos^2\theta(t) - 1)^2 > \right.$

$\theta_1(-\infty) = 0 \qquad \theta_1(\infty) = \pi$

$r(t) \equiv 1$

$\theta(t) \equiv \theta_1(t)$ $\longrightarrow$



4º) Lo mismo con $\theta_2(t)$

$\theta_2(-\infty) = \pi, \quad \theta_2(\infty) = 2\pi$

iii) Las trayectorias exteriores al "policiclo" convergen en espiral al policiclo cuando $t \longrightarrow \infty$.

Razón: • necesitamos ver que $r(t) \to 1$ (si $r(0) > 1$)

• necesitamos también ver que $\theta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

Observación: $r^2\operatorname{sen}^2\theta + (r^2\cos^2\theta - 1)^2 > 0$ si $r > 1$

$\left(\text{Si } r^2\operatorname{sen}^2\theta = 0 \Rightarrow \cos^2 = 1 \Rightarrow r^2\cos^2\theta - 1 > 0\right)$

Consecuencia: Como $\theta'(t) = r^2\operatorname{sen}^2\theta(t) + (r^2\cos^2\theta(t) - 1)^2$ entonces $\theta(t)$ crece, y como $r' = r(\underbrace{1-r^2}_{\wedge\, 0})(\underbrace{\exp}_{\vee\, 0})$ entonces $r(t)$ decrece

Eso garantiza que $r(t)$ converge cuando $t \longrightarrow \infty$

$\theta(t)$ converge cuando $t \longrightarrow \infty$

Afirmación: $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$; $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \infty$

demostración: mientras $r(t) > 1$, se tiene $r'(t) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sigue decreciendo

La EDO de las trayectorias en polares es:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\theta'}{r'} = \frac{1}{r(1-r^2)}$$

Ejemplo: péndulo amortiguado

$x'' = -\operatorname{sen}(x) - ax'$ $\quad a>0$ pequeño $\qquad$ $a=0$ es el péndulo ordinario

$x' = y$

$y' = -\operatorname{sen}(x) - ay$

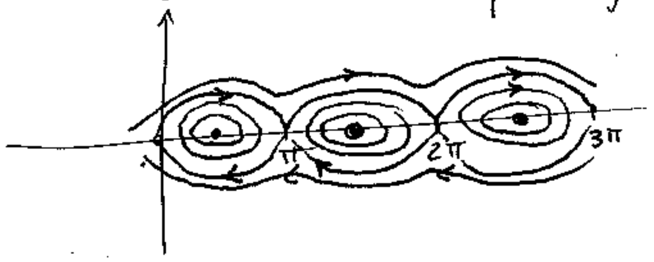
Recordatorio: $a=0$

$x'' = f(x) \longrightarrow U(x)$ tal que $U' = -f$

potencial

trayectorias: $\frac{y^2}{2} + U(x) = cte.$

péndulo $U = -\cos(x)$, por ejemplo puntos críticos $(n\pi, 0)$



Observación: $E(x,y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos(x)$ es una función de Lyapunov para $(0,0)$ $\quad (\rightsquigarrow (2k\pi, 0))$

1. Puntos críticos:

$y = 0$

$-\operatorname{sen}(x) - ay = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}(x) \Longrightarrow x = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{(n\pi, 0), \; n \in \mathbb{Z}}$$

Aproximación lineal cerca de $(n\pi, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -a \end{pmatrix}$$

$(-1)^{n+1}$: $-\cos(n\pi)$

• Si n es par: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \longrightarrow$ autovalores:

$(-\lambda)(-a-\lambda) + 1 = 0$

$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$ $\quad$ Si $a<2 \rightarrow \frac{-a \pm i\sqrt{4-a^2}}{2}$

(a pequeño) $\qquad$ espiral estable

• Si n es impar: $\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$ $\rightarrow$ uno $\oplus$, uno $\ominus$ $\Rightarrow$

$\Longrightarrow$ punto de silla

2. Consideramos: $E(x,y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos(x)$

$E(0,0) = E(2k\pi, 0) = 0$ y positiva cerca de estos puntos.

Sea $(x(t), y(t))$ una solución para (PA) $\rightarrow$ péndulo amortiguado

$e(t) \overset{def.}{=} E(x(t), y(t))$

$e'(t) = E_x x' + E_y y' = \underbrace{-a y(t)^2}_{\leq 0 \text{ y } < 0 \text{ si } y(t) \neq 0}$

3. Supongamos que $(x(t), y(t))$ no corresponde a una trayectoria de equilibrio $\begin{pmatrix} x(t) \equiv n\pi \\ y(t) \equiv 0 \end{pmatrix}$

Entonces $(x(t), y(t)) \neq (n\pi, 0)$ $\forall t$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(Razón: trayectorias disjuntas)

<u>Afirmación</u>: $e(t) \searrow$ para todo $t < \infty$.

Razón: si $y(t_0) = 0$ en algún instante, como $x(t_0) \neq n\pi$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$V = \begin{bmatrix} 0 \\ \underset{\neq 0}{-\operatorname{sen}(x(t_0))} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\uparrow \downarrow$ $y(t)$ vuelve a ser $\neq 0$ para todo $t_0 < t < t_0 + \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow e(t)$ vuelve a decrecer.

<u>Consecuencia</u> $y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ porque $e(t) \searrow$ y $\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e(t) \searrow c \Rightarrow \underset{-\alpha y(t)^2}{\underset{\shortparallel}{e'(t)}} \longrightarrow 0$.

4. $x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \hat{c}$ Razón. $e(t) = \frac{y(t)^2}{2} + 1 - \cos(x(t)) \searrow c$
$\frac{y(t)^2}{2} \searrow 0$

Entonces $\cos(x(t)) \xrightarrow[t \to \infty]{} 1 - c \Rightarrow x(t) \longrightarrow \hat{c}$.

5. $x'(t) = y(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$$y'(t) = -\underbrace{\operatorname{sen}(x(t))}_{\downarrow} - \underbrace{a y(t)}_{\downarrow\, t\to\infty}$$

$$-\operatorname{sen}(\hat{c}) \qquad\qquad 0$$

$$\operatorname{sen}(\hat{c}) = 0 \implies \hat{c} = n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$$

$$\implies (x(t), y(t)) \longrightarrow (n\pi, 0)$$