HOJA 2 – ENTEROS BASE B

1.

i)

$$\begin{array}{r} 212_{(3)} \\ 122_{(3)} \\ \hline 1201 \\ 1201 \\ 212 \\ \hline 110111_{(3)} \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{r|l} 40122_{(7)} & 126_{(7)} \\ \cline{2-2} 255 & 26 \\ \cline{1-1} 1132 & \\ 1131 & \\ \cline{1-1} 00012 & \end{array}$$

iii)

$$\begin{array}{r} 101101_{(2)} \\ 11001_{(2)} \\ \hline 101101 \\ 10110100 \\ 101101 \\ \hline 10001100101 \end{array}$$

iv)

$$\begin{array}{r|l} 100111001_{(2)} & 1011_{(2)} \\ \cline{2-2} 1011 & 1101 \\ \cline{1-1} 010000 & \\ 1011 & \\ \cline{1-1} 0010101 & \\ 1011 & \\ \cline{1-1} 01010 & \end{array}$$

2.

a) base 10

i) $m = (a_n\ a_{n-1} \cdots a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$

$= (a_n\ a_{n-1} \cdots a_4\ a_3) \cdot 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$

$10^3 \equiv 0 \pmod 8 \implies (a_n\ a_{n-1} \cdots a_4\ a_3) 10^3 \equiv 0 \pmod 8$

Por lo tanto, m es múltiplo de $8 \iff a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ lo es

$\iff (a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ lo es.

ii) $m = (a_n\ a_{n-1} \cdots a_1\ a_0)_{10} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 =$

$= a_n((10^n - 1) + 1) + a_{n-1}((10^{n-1} - 1) + 1) + \cdots + a_2(99 + 1) +$

$+ a_1(9+1) + a_0 =$

$= (10^n - 1) a_n + a_n + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + a_{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 99 +$

$+ a_2 + a_1 \cdot 9 + a_1 + a_0 =$

$$= \Big[\underbrace{(10^n-1)}_{\text{nº donde sus } n \text{ cifras son } 9\text{'s}} a_n + \underbrace{(10^{n-1}-1)}_{\text{nº donde sus } (n-1) \text{ cifras son } 9\text{'s}} a_{n-1} + \cdots + 999.a_3 + 99a_2 + 9a_1 + a_0\Big] +$$

$+ \left[a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0\right] =$

nº donde sus n cifras son 1's → nº donde sus $(n-1)$ cifras son 1's

$$= \underbrace{9\left[\gamma_n a_n + \gamma_{n-1} a_{n-1} + \cdots + 111.a_3 + 11a_2 + 1a_1 + a_0\right]}_{\equiv\, T_1} +$$

$$+ \underbrace{\left[a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0\right]}_{\equiv\, T_2}$$

Como T_1 es múltiplo de 9, m será múltiplo de 9 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ T_2 lo es, e.d., si la suma de sus coeficientes lo es.

iii) Nos fijamos en que:

$$10 \equiv -1 \pmod{11} \quad ; \quad 100 = 10^2 \equiv 1 \pmod{11} \; ;$$
$$1000 = 10^3 \equiv -1 \pmod{11} \; ; \quad 10^4 \equiv 1 \pmod{11}$$

En general: $10^n \equiv$ $\nearrow$ $1 \pmod{11}$ si n par
$\searrow$ $-1 \pmod{11}$ si n impar.

$\Rightarrow a_n 10^n \equiv$ $\nearrow$ $a_n \pmod{11}$ si n par
$\searrow$ $-a_n \pmod{11}$ si n impar

$$\Rightarrow m = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots \pm a_n \pmod{11}$$

$\Rightarrow m$ será múltiplo de 11 $\Leftrightarrow$ la suma alternada de sus coef's lo es.

b) base 21

i) $m = b_n 21^n + b_{n-1} 21^{n-1} + \cdots + b_3 21^3 + b_2 21^2 + b_1 21 + b_0 =$
$= (b_n \, b_{n-1} \cdots b_3 \, b_2) . 21^2 + b_1 21 + b_0$

Como $21^2 = (7.3)^2 = 7^2 . 3^2 = 49 . 9 \Rightarrow (b_n \, b_{n-1} \cdots b_3 \, b_2) . 21^2$ es múltiplo de 49 $\Rightarrow m$ múltiplo de 49 $\Leftrightarrow (b_1 \, b_0)_{21}$ lo e ii)

$$m = b_n 21^n + b_{n-1} 21^{n-1} + \cdots + b_2 21^2 + b_1 21 + b_0 =$$

$$= b_n\left((21^n - 1) + 1\right) + b_{n-1}\left((21^{n-1} - 1) + 1\right) + \cdots + b_2\left((21^2 - 1) + 1\right) +$$

$$+ b_1(20 + 1) + b_0 =$$

$$= (21^n - 1)b_n + b_n + (21^{n-1} - 1)b_{n-1} + b_{n-1} + (21^2 - 1)b_2 + b_2 +$$

$$+ 20b_1 + b_1 + b_0 =$$

$$= \underbrace{\left[(21^n - 1)b_n + (21^{n-1} - 1)b_{n-1} + \cdots + (21^2 - 1)b_2 + 20b_1\right]}_{\parallel\atop T_1} +$$

$$+ \underbrace{\left[b_n + b_{n-1} + \cdots + b_2 + b_1 + b_0\right]}_{\parallel\atop T_2}$$

Como T_1 es múltiplo de 20 $\Rightarrow$ m múltiplo de 20 $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ T_2 lo es $\Leftrightarrow$ la suma de sus coef's lo es.

iii) $21 \equiv -1 \pmod{22}$; $21^2 \equiv 1 \pmod{22}$; ...

En general: $21^n \equiv$ $\begin{cases} 1 \pmod{22} & \text{si } n \text{ par} \\ -1 \pmod{22} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

$\Rightarrow b_n 21^n \equiv$ $\begin{cases} 1 \pmod{22} & \text{si } n \text{ par} \\ -1 \pmod{22} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

$$m = b_n 21^n + b_{n-1} 21^{n-1} + \cdots + b_2 21^2 + b_1 21 + b_0 \equiv$$
$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots \pm b_n \pmod{22}$$

$\Rightarrow$ m será múltiplo de 22 $\Leftrightarrow$ la suma alternada de sus coef's lo es.

c) $(1222)_3 = 1.3^3 + 2.3^2 + 2.3 + 2 = 53_{(10)}$

$53 = 5.9 + 8 \Rightarrow (1222)_3 = (58)_9$

$\boxed{3.}$

i) $b^k - 1 = (b-1)b^{k-1} + (b-1)b^{k-2} + \cdots + (b-1)b + (b-1) =$

$= (b-1, b-1, b-1, \dots, b-1)_b$ (K coordenadas)

ii) $\boxed{\Rightarrow}$ m tiene longitud $k \Leftrightarrow (a_{k-1} \neq 0) \wedge (a_j = 0 \ \forall j \geq k)$

Como $(b-1)b^{k-1} + \cdots + (b-1)b + (b-1)$ es el mayor número menor que b^k en base b (apartado i) $\Rightarrow$

$\Rightarrow m \leq b^k$

Análogo para m con longitud $l < k$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Si $m < b^k$, m es como mucho:

$m = (b-1)b^{k-1} + \cdots + (b-1)b + (b-1)$ por el apartado i

Como $a_{k-1} \neq 0$ y $a_j = 0 \ \forall j \geq k \Rightarrow m$ tiene longitud $\leq l$

iii) $\boxed{\Rightarrow}$ m tiene longitud k. Ya sabemos que $m < b^k$ por el apartado ii). Ahora, por def. de longitud en base b, m tiene longitud $k \Leftrightarrow [(a_{k-1} \neq 0) \wedge (a_j = 0 \ \forall j \geq k)]$, por lo que m es, como mínimo, $1 . b^{k-1} \Rightarrow m \geq b^{k-1}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $b^{k-1} \leq m < b^k \Rightarrow a_{k-1} \neq 0$ y $0 = a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots$

$\Rightarrow$ por def. de longitud en base b, m tiene longitud k.

4. $n = a_{k-1}b^{k-1} + a_{k-2}b^{k-2} + \cdots + a_1 b + a_0 \quad (0 \leq a_i \leq b-1)$

longitud k $(a_{k-1} \neq 0)$

i) Como $b^{k-1} - 1 = (b-1)b^{k-2} + (b-1)b^{k-3} + \cdots + (b-1)b + (b-1)$

$\Rightarrow (b-1)b^{k-2} + (b-1)b^{k-3} + \cdots + (b-1)b + (b-1) < b^{k-1}$

Esto último más el apartado i) del ejercicio 3 nos permite asegurar que no hay múltiplos de b^{k-1} entre sus coeficientes anteriores, por lo tanto, el número máximo de múltiplos de b^{k-1} es a_{k-1} (de otra forma se podría formar otro grupo de b^{k-1} y a_{k-1} se incrementaría).

ii) $n = a_{k-1}b^{k-1} + a_{k-2}b^{k-2} + \cdots + a_1 b + a_0 =$

$= a_{k-1}b^{k-2} \cdot b + a_{k-2}b^{k-2} + \cdots + a_1 b + a_0 =$

$= (a_{k-1}b + a_{k-2})b^{k-2} + \cdots + a_1 b + a_0$

Por el apartado i) de este ejercicio podemos asegurar que el número máximo de múltiplos de b^{k-2} es $a_{k-1}b + a_{k-2}$.

iii) $\frac{n}{b^{k-2}} = \frac{a_{k-1}b^{k-1}}{b^{k-2}} + \frac{a_{k-2}b^{k-2}}{b^{k-2}} + \frac{a_{k-3}b^{k-3}}{b^{k-2}} + \cdots + \frac{a_1 b}{b^{k-2}} + \frac{a_0}{b^{k-2}} =$

$= a_{k-1}b + a_{k-2} + a_{k-3}\underbrace{\frac{1}{b}}_{<1} + a_{k-4} \cdot \underbrace{\frac{1}{b^2}}_{<1} + \cdots + a_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{b^{k-3}}}_{<1} + a_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{b^{k-2}}}_{<1}$

$\Rightarrow \left[\frac{n}{b^{k-2}}\right] = a_{k-1}b + a_{k-2}$

iv) $n = \left[\frac{n}{b^i}\right] b^i + r$

apartado iii (en general)

$$\left[\frac{n}{b^i}\right] = a_{k-1} b^{k-1-i} + a_{k-2} b^{k-2-i} + \cdots + a_{i+1} b + a_i$$

$$r = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_{i-1} b^{i-1}$$

$\boxed{5.}$ Como $n!$ es el producto de todos los enteros desde 1 a n, tenemos al menos un factor de p en $n!$ por cada múltiplo de p en $\{1,2,\ldots,n\}$, que hay un total de $\left[\frac{n}{p}\right]$ por el ej. 4 apart. i). Adicionalmente, cada múltiplo de p^2 contribuye con otro factor de p, cada múltiplo de p^3 contribuye con otro, etc.

Sumando todo obtenemos $\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^s}\right] + \cdots$

A partir de $s = k+1$ los sumandos son nulos.

Por lo tanto, hemos contado todas las apariciones de p como factor en $n!$ y entonces la potencia máxima de p que divide a $n!$ es p^α. ∎