Ej. 1.- Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ como sigue: $a_1 = 1$ y, de forma recurrente, $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$, $\forall\, n \geq 1$.

a) Demostrar la identidad $\quad a_{n+2} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{a_n}}$, $\quad \forall\, n \geq 1$.

b) Probar que la subsucesión de términos impares $\{a_{2k-1}\}_{k\geq 1}$ es creciente y está acotada por 2 y la de términos pares $\{a_{2k}\}_{k\geq 1}$ es decreciente y positiva.

c) Deducir de lo anterior que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es convergente y encontrar el valor de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ej. 2.- a) Enunciar el Teorema del Valor Medio en cualquiera de sus versiones.

b) Demostrar que la ecuación $2x - 1 - \operatorname{sen} x = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Ej. 3.- a) Enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo.

b) Encontrar el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor del punto $x_0 = \pi$ de la función

$$F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{1}{1+\sin t}\, dt.$$

Ej. 4.- Calcular el valor de las siguientes integrales:

$$(A) \quad \int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)}\, dx; \qquad\qquad (B) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^3} x^2\, dx.$$

*****

Ej. 5.- (*Opcional, solo para optar a la Matrícula de Honor*) Decidir razonadamente si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

(1) Si una función f es derivable en un punto x_0 y su derivada $f'(x_0)$ es estrictamente positiva, entonces existe un $\delta > 0$ tal que f es creciente en el intervalo $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$.

(2) Si una sucesión $\{x_n\}_n$ es convergente con límite $\ell \in \mathbb{R}$ entonces la sucesión $\{|x_n|\}_n$ es convergente con límite $|\ell|$.

SOL Ej. 1:

a) Directamente a partir de la fórmula de recurrencia, $\quad a_{n+2} = 1 + \dfrac{1}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{a_n}}, \quad \forall n \geq 1.$

b) La fórmula anterior nos da una relación directa entre los términos a_n y a_{n+2}. En particular,

- si $a_n > a_{n-2} > 0$, entonces $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_{n-2}}$, luego $\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}} > \frac{1}{1+\frac{1}{a_{n-2}}}$ y se deduce $a_{n+2} > 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_{n-2}}} = a_n$, es decir $a_{n+2} > a_n$;
- si, por el contrario, $0 < a_n < a_{n-2}$ entonces $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n-2}}$, luego $\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}} < \frac{1}{1+\frac{1}{a_{n-2}}}$ y se deduce $a_{n+2} < 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_{n-2}}} = a_n$, es decir $a_{n+2} < a_n$.

Calculamos los valores de los primeros términos de la sucesión: $a_2 = 1+1 = 2$, $a_3 = 1+1/2 = 3/2$ y $a_4 = 1 + 2/3 = 5/3$. Como $a_1 = 1 < a_3$, el argumento anterior nos dice que $a_1 < a_3 < a_5 < a_7 < a_9 < \cdots$, es decir, la subsucesión de términos impares es creciente, mientras que como $a_2 > a_4$ se sigue que $a_2 > a_4 > a_6 > a_8 > a_{10} > \cdots$, es decir, la subsucesión de términos pares es decreciente (y obviamente positiva porque la suma de números positivos lo es).

Falta ver que los términos impares está acotados superiormente por el valor 2. Lo hacemos por inducción con el caso inicial, $a_1 = 1 < 2$, cierto por definición. Suponiendo ahora que $a_{2k-1} < 2$ para cierto k queremos verlo para el siguiente, es decir $a_{2k+1} < 2$. Usando la fórmula del apartado a)

$$a_{2k+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_{2k-1}}} < 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + 2/3 < 2.$$

NOTA: el mismo argumento muestra que $1 = a_1 < a_3 < \cdots < a_{2k+1} < \cdots < a_{2n} < \cdots < a_4 < a_2 = 2$.

c) Las dos subsucesiones son monótonas y acotadas, luego tienen límite. Llamemos L_1 y L_2, respectivamente, a dichos límites. Por lo anterior, se tiene $1 \leq L_1, L_2 \leq 2$ y además deben satisfacer la relación dada en el apartado a), es decir

$$L = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{L}} \quad \Longrightarrow \quad L = 1 + \frac{L}{L+1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Descartando la raíz negativa, deducimos que $L_1 = L_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por tanto el límite de $\{a_n\}_n$ también existe y vale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$..

SOL Ej. 2:

a) Para el Teorema del Valor Medio ver las notas de clase.

b) La función $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen} x$ es continua y cumple $f(-\pi) = -2\pi - 1 < 0$ y $f(\pi) = 2\pi - 1 > 0$. El Teorema de los Valores Intermedios nos dice que existe al menos un punto x_0 en el intervalo $[-\pi, \pi]$ donde f se anula.

Por otro lado, f es derivable y, si tuviera dos puntos distintos x_0 y x_1 con $f(x_0) = f(x_1) = 0$, entonces por el Teorema de Rolle debería existir un punto t entre x_0 y x_1 con $f'(t) = 0$. Sin embargo, $f'(t) = 2 - \cos t$ no se anula nunca (ya que $\cos t \leq 1 < 2, \forall t$). Luego f tiene solo una raíz tal y como dice el enunciado.

SOL Ej. 3:

a) Para el Teorema Fundamental del Cálculo ver las notas de clase.

b) La función $f(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$ es derivable de cualquier orden en un intervalo alrededor de π donde el denominador de la fracción no se anule; por ejemplo en $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Además, por el TFC,se tiene $F'(x) = f(x)$ y por tanto F es derivable de cualquier orden en ese mismo intervalo.

Por definición, el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor del punto $x_0 = \pi$ de la función F viene dado por

$$P_3(x) = F(\pi) + F'(\pi)(x-\pi) + \frac{F''(\pi)}{2}(x-\pi)^2 + \frac{F'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3.$$

Para terminar, basta con calcular los coeficientes $F(\pi), F'(\pi), F''(\pi), F'''(\pi)$:

$F(\pi) = \displaystyle\int_\pi^\pi \cdots = 0.$

$F'(\pi) = f(\pi) = 1.$

$F''(x) = \dfrac{-\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} \implies F''(\pi) = 1.$

$F'''(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x(1+\operatorname{sen} x)^2 + 2\cos^2 x(1+\operatorname{sen} x)}{(1+\operatorname{sen} x)^4} \implies F'''(\pi) = 2.$

SOL Ej. 4:

Para (A) usamos el método de las fracciones simples:

En primer lugar $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)} = \dfrac{x^2 \pm x + 1}{x^2+x} = 1 + \dfrac{-x+1}{x^2+x}.$

Por otro, $\dfrac{-x+1}{x^2+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$ con A y B satisfaciendo $A(x+1) + Bx = -x+1$.

Luego $A = 1$ y $B = -2$. De esta forma,

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)}dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}\right) dx = \Big(x + \log x - 2\log(x+1)\Big)\Big|_1^2 = 1 + \log\frac{8}{9}.$$

Para (B) usamos la definición de integral impropia como el valor del límite $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^3} x^2\, dx$, y el cambio de variables $y = x^3$, lo que deja $dy = 3x^2 dx$ y por tanto $x^2 dx = \frac{1}{3}dy$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^3} x^2\, dx &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^3} x^2\, dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3} \int_0^{R^3} e^{-y}\, dy \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3}\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^{R^3} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - e^{-R^3}\right) = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

SOL Ej. 5:

(1) FALSO: Consideremos una función convexa creciente (por ejemplo $F(x) = e^x$) y su recta tangente en un punto x_0 donde la derivada de F no se anule (por ejemplo $G(x) = 1 + x$, en el punto $x_0 = 0$). Entonces, cualquier función f que cumpla $G(x) \leq f(x) \leq F(x)$ tiene derivada $f'(x_0) = F'(x_0) = G'(x_0) > 0$ (ver ejercicio 8 de la hoja 5). Ahora, si elegimos una f "oscilatoria", de manera que "suba" y "baje" alternadamente de F a G, no será por tanto creciente pero tendrá sin embargo la condición indicada. .

(2) CIERTO: basta observar que la función $f(x) = |x|$ es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Por tanto, si una sucesión $\{x_n\}_n$ es convergente con límite $\ell \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\ell) = |\ell|.$$