Variable Compleja I   CURSO 2019-20

(3^o de Matemáticas y 4^o de Doble Grado Matemáticas-Informática)

HOJA 2 DE PROBLEMAS

Conjuntos en el plano y los números complejos

17) ¿Cuando son colineales tres puntos z_1, z_2, z_3, distintos dos a dos? Encuentre una condición analítica sencilla.

18) Este ejercicio recoge algunas relaciones entre los números complejos y las rectas en el plano.

a) Compruebe que la ecuación $\mathrm{Re}(az+b) = 0$, con $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$, define una recta en el plano y que, recíprocamente, cada recta viene descrita por una ecuación de este tipo.

b) Encuentre los números a, b para que la recta pase por dos puntos dados z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

c) Demuestre que las rectas determinadas por las ecuaciones $\mathrm{Re}(az+b) = 0$ y $\mathrm{Re}(cz+d) = 0$, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $\mathrm{Re}(a\overline{c}) = 0$.

d) Demuestre que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados z_1 y z_2, puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

19) Resuelva las siguientes ecuaciones (donde $z \in \mathbb{C}$):

a) $(z+1)^4 + i = 0$;   **b)** $\mathrm{Re}(z^2+5) = 0$;   **c)** $\mathrm{Re}(z+5) = \mathrm{Im}(z-i)$.

20) Describa el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:

a) $|z-2| - |z+2| > 3$,   **b)** $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z < 1$,   **c)** $|2z| > |1+z^2|$,   **d)** $\mathrm{Im}\, \dfrac{1}{z+i} = 0$.

21) Determine las ecuaciones complejas:

a) de la parábola con foco i y directriz $\mathrm{Im}\, z = -1$.

b) de la elipse con focos ± 1 que pasa por i.

c) de la hipérbola con focos ± 1 que pasa por $1+i$.

22) Dibuje el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

a) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = 0$;   **b)** $\left|z^2 - 4z + 4\right| = 4$;   **c)** $\left|z^2 - 2z - 1\right| = 2$.

23) Halle razonadamente el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto de números reales (y explique, en ambos casos, si se alcanzan el máximo y/o el mínimo):

a) $\{|z^{12} - a| : z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, donde $a \in \mathbb{C}$ es un número fijo.

b) $\{\mathrm{Re}(iz^4 + 1) : |z| < \sqrt{2}\}$.

24) Demuestre que, dados $a, c \in \mathbb{C}$, la condición necesaria y suficiente para que exista $z \in \mathbb{C}$ que verifique $|z+a| + |z-a| = 2|c|$ es que sea $|a| \leq |c|$.
Ayuda: Si $\lambda > 0$, el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z+a| + |z-a| = 2\lambda\}$ es una elipse si $\lambda > |a|$, un segmento si $\lambda = |a|$ y el conjunto vacío si $\lambda < |a|$.

25)* Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que $\{z_1, z_2, z_3\}$ sean los vértices de un triángulo equilátero es que

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

Ayuda: Considere los puntos $w_1 = z_2 - z_1$, $w_2 = z_3 - z_2$, $w_3 = z_1 - z_3$.

26) Dados dos vértices, z_1 y z_2, de un triángulo equilátero, calcule el tercer vértice, z_3, de dos maneras distintas.

Topología del plano y del plano extendido. La esfera de Riemann

27) Demuestre que la sucesión $(z^n)_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite para ningún número $z \neq 1$ con $|z| = 1$.

28) Decida razonadamente cuál de las siguientes sucesiones tienen límite (finito o infinito):

$$z_n = \left(\frac{1-2i}{3}\right)^n, \qquad w_n = n^{5/4} \operatorname{sen}\frac{1}{n} + i \operatorname{sen} n, \qquad \zeta_n = \left(\frac{4-3i}{5}\right)^n + \frac{1}{(3-i)^n}.$$

29) Sea $P: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$ la proyección estereográfica, que asocia a cada punto Z de la esfera unidad $\mathbb{S}^2$ (conocida también como *esfera de Riemann*) distinto de $N = (0,0,1)$ con el único punto $z \in \mathbb{C}$ (identificado con $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$) tal que N, Z y z están alineados.

a) Halle las imágenes por la transformación inversa P^{-1} (en la esfera de Riemann) de los conjuntos definidos por las siguientes desigualdades:

i) $\operatorname{Im} z = 0$, **ii)** $\operatorname{Re} z < 1$, **iii)** $|z| < 1$, **iv)** $|z| > 2$.

b) Demuestre que P transforma las circunferencias sobre la esfera en circunferencias o rectas del plano.

c) ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas?

30) En el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definemos la *métrica cordal* como sigue: dados dos puntos z, $w \in \hat{\mathbb{C}}$, sean $P = (x_1, x_2, x_3)$ y $Q = (y_1, y_2, y_3)$ los puntos correspondientes en la esfera de Riemann; definamos entonces la distancia $d(z, w)$ como la distancia euclídea entre P y Q en $\mathbb{R}^3$. Se pide demostrar lo siguiente.

a) $d(z, w) = \dfrac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$, para z, $w \in \mathbb{C}$.

b) $d(z, \infty) = \dfrac{2}{\sqrt{(1+|z|^2)}}$, para $z \in \mathbb{C}$.

c) Aunque la distancia d define la misma topología en $\mathbb{C}$ que la métrica habitual, $(\mathbb{C}, d)$ no es un espacio métrico completo. (Se pide dar un ejemplo de una sucesión de Cauchy explícita que no sea convergente en dicha métrica.)

31) Dado un número c, consideramos la sucesión z_n definida por la siguiente recurrencia:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad z_0 = 0$$

a) Pruebe que si $|c| > 2$, entonces $z_n \to \infty$.

Ayuda: Verifique por inducción que si definimos $R = |c| - 1$, entonces $|z_n| \geq |c| R^{n-1}$ para $n \geq 1$.

b)* Demuestre que si, para algún k, $|z_k| > 2$, entonces $z_n \to \infty$.

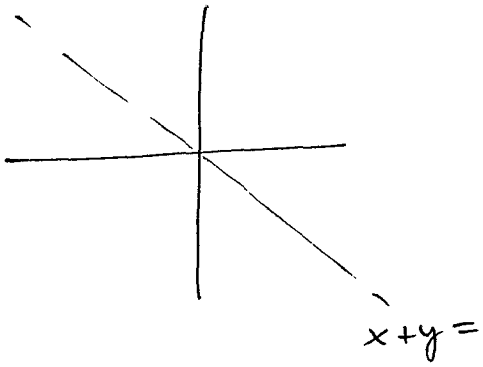
Nota: El conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$, estudiado en la dinámica compleja, es el conjunto de los $c \in \mathbb{C}$ para los que la correspondiente sucesión z_n no tiende a ∞. El apartado (a) demuestra que $\mathcal{M} \subset \overline{D}(0, 2)$.

22.

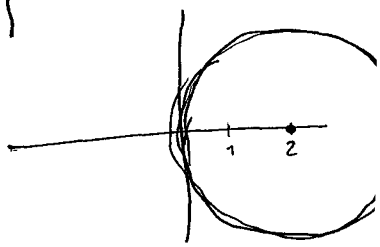
a) $\left\{ \mathrm{Re}\left(\frac{z}{1+i}\right) = 0 \right\}$, $\quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$;

$$\frac{1}{1+i} z = \frac{1}{2}(1-i)z = \frac{1}{2}(1-i)(x+iy) = \frac{1}{2}\Big((x+y) + i(-x+y)\Big)$$

$$\Rightarrow \left\{ \mathrm{Re}\left(\tfrac{z}{1+i}\right) = 0 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 0 \right\}$$

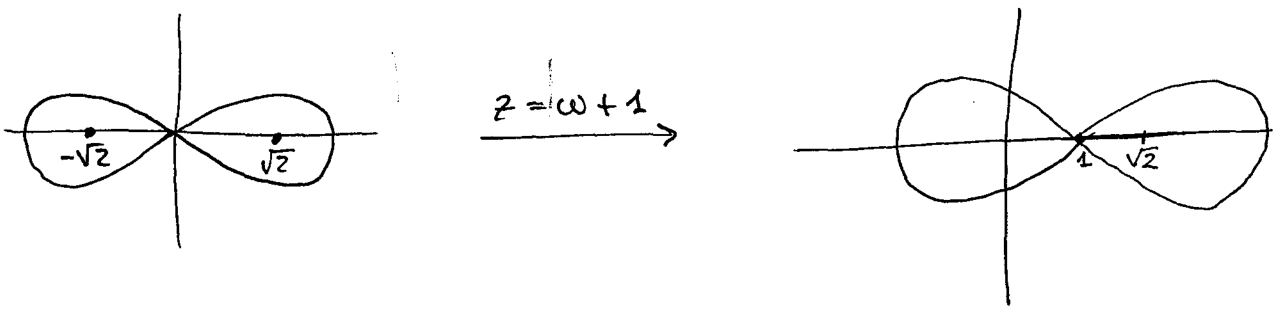


b) $\left\{ |z^2 - 4z + 4| = 4 \right\} = \left\{ |z-2|^2 = 4 \right\} = \left\{ |z-2| = 2 \right\}$



c) $\left\{ |z^2 - 2\cancel{z} - 1| = 2 \right\} = \left\{ |(z-1)^2 - 2| = 2 \right\}$

Si ~~ω=z-1~~ $\omega = z-1$, $\left\{ ||\omega^2 - 2| = 2 \right\} = \left\{ |\omega - \sqrt{2}||\omega + \sqrt{2}| = 0 \right\}$



23.

a) $\{|z^{12}-a| : z\in\mathbb{C},\ |z|\leq 1\}$ $\quad a\in\mathbb{C}$ nº fijo

$f(z)=|z^{12}-a|$, $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua

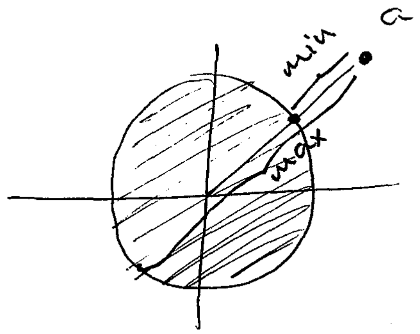
$\overline{D}(0,1)$ es compacto $\rightarrow$ se alcanza un máximo y un mínimo

El disco no se "va a mover" al elevar a 12, e.d.,

$g(z)=z^{12} \Rightarrow g(\overline{D}(0,1))=\overline{D}(0,1)$

Si $|z|\leq 1 \Rightarrow |z|^{12}\leq 1 \Rightarrow g(z)\subseteq\overline{D}(0,1) \Rightarrow g(\overline{D}(0,1))\subseteq\overline{D}(0,1)$

Si $\omega\in\overline{D}(0,1)$ $\exists z\in\overline{D}(0,1)$ tal que $z^{12}=\omega \Rightarrow \overline{D}(0,1)\subseteq g(\overline{D}(0,1))$



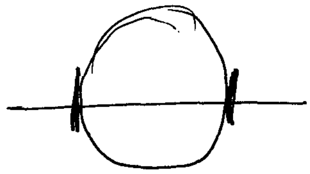
$|a|+1=\max\{|z-a| : z\in\overline{D}(0,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} |a|-1 \text{ si } |a|\geq 1 \\ 0 \text{ si } |a|<1 \end{array}\right\} = \min\{|z-a| : z\in\overline{D}(0,1)\}$$

$$\| $$

$\max\{0,|a|-1\}$

b) $\{\operatorname{Re}(iz^4+1) : |z|<\sqrt{2}\}$



ínfimo $=-4$
supremo $=4$

$\boxed{24.}$

$$|a| \leq |c| \Longleftrightarrow \exists z \;/\; |z+a| + |z-a| = 2|c|$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Quiero ver que $2|a| \leq 2|c|$

$$2|a| = |a+a| = |a+z-z+a| \leq |a+z| + |a-z| = \underbrace{|a+z| + |z-a|}_{=2|c|}$$

Suponemos $|a| \leq |c| \longrightarrow$ caso 1: $a = 0$

tomamos $z = c$

$\Updownarrow$

$t|a| = |c|$, $t \geq 1$ caso 2: $a \neq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $|a| \leq |c| \Leftrightarrow |c| = t|a|$ $t \geq 1$

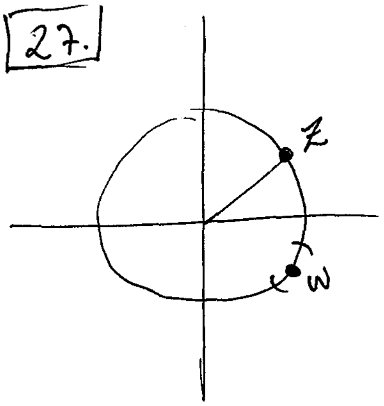
Probamos $z = ta$

$$|z+a| + |z-a| = |ta+a| + |ta-a| = (t+1)|a| + (t-1)|a| =$$

$$= 2(t|a|) = 2|c|$$

∎

27.



Si $\{z^n\} \longrightarrow w$, con $|z| = 1$, necesariamente $|w| = 1$.

$\{z^{n+1}\} \longrightarrow w$

Construimos nueva sucesión $\left\{\frac{z^{n+1}}{z^n}\right\}$, que tiene límite porque $\{z^{n+1}\}$ y $\{z^n\}$ tienen límite y $\{z^n\} \not\longrightarrow 0$.

Entonces $\left\{\frac{z^{n+1}}{z^n}\right\} \longrightarrow \frac{w}{w} = 1$

$\left\{\frac{z^{n+1}}{z^n}\right\} = \{z\} \longrightarrow z$

SUCESIÓN CONSTANTEM. z

no puede tener dos límites

Por hip. $z \neq 1 \Longrightarrow$ contradicción ∎

28. a) $z_n = \left(\frac{1-2i}{3}\right)^n$

Vemos $|z_n| = \frac{\sqrt{5}}{3} \Longrightarrow \left(\frac{1-2i}{3}\right)^n \longrightarrow 0$ porque $\left|\frac{1-2i}{3}\right| = \frac{\sqrt{5}}{3} <$

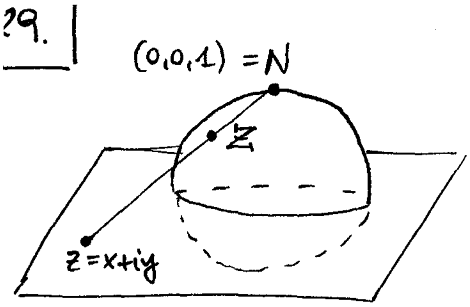
b) $w_n = n^{5/4} \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{n} + i \operatorname{sen} n = \underbrace{\underbrace{n^{1/4}}_{\to\infty} \; \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}}_{\to 1}}_{\to\infty} + i \operatorname{sen} n \longrightarrow \infty$

c) $\xi_n = \underbrace{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^n}_{\text{no converge porque mód}=1 \text{ y } \neq 1.} + \underbrace{\frac{1}{(3-i)^n}}_{\to 0}$

ξ_n no converge

(es importante que la segunda parte converja, pero si no, podría anularse con la primera).

29.



$$Z = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\;}{|z|^2+1}, \frac{\;}{|z|^2+1}, \frac{\;}{|z|^2+1} \right)$$

$$z = \frac{x_1 + x_2 i}{1 - x_3}$$

1)

i) $Im(z) = 0$

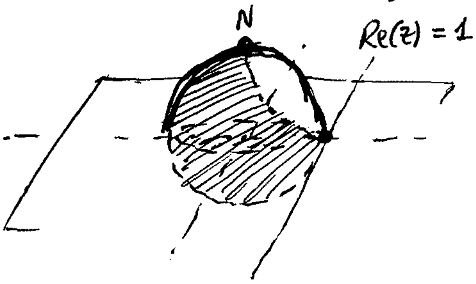
$R \equiv$ plano que contiene a $N = (0,0,1)$ y la recta $\{(t,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$

Buscamos $P^{-1}(Im(z) = 0) = R \cap S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 1\}$

ii) $Re(z) < 1$

Consideramos $Re(z) = 1$, que es una recta

$P^{-1}(\{Re(z) = 1\}) = H \cap S^2$ con $H :=$ plano que contiene la recta $Re(z) = 1$ y $N = (0,0,1)$



iii) iv) Parecidos

3) $R = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\}$

caso 1 : $N \in R \iff a_3 = b \rightarrow z \in P(R \cap S^2) \Rightarrow z \in P(Z_1)$, $Z_1 \in R$

$Z_1 = P^{-1}(z)$

caso 2 : $N \notin R \iff a_3 \neq b$

$\rightarrow a = (a_1, a_2, a_3)$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$

$R = \{ax = b\}$

$ax \leq \|a\| \cdot \|x\|$ $\quad \|x\| = 1$

Si $x \in S^2$ (como sucede con $P^{-1}(z)$)

$a.x \leq \|a\|$

continuaremos...

$$\frac{2x a_1}{x^2+y^2+1} + \frac{2y a_2}{x^2+y^2+1} + \frac{(x^2+y^2-1) a_3}{x^2+y^2+1} = b$$

$$2x a_1 + 2y a_2 + (\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 1) a_3 = (\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 1) a_3$$

$$2x a_1 + 2y a_2 = 2a_3$$

$$\boxed{a_1 x + a_2 y = a_3}$$ ecuación recta ✓

CONTINUACION 29

$a = (a_1, a_2, a_3)$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$ $\quad R = \{a.x = b\}$

$a.x \leq \|a\| . \|x\|$

Si $x \in S^2 \Rightarrow \|x\| = 1$ (como sucede con $p^{-1}(z)$)

$a.x \leq \|a\|$

Si $x \in R \Rightarrow a.x = b \Rightarrow b \leq \|a\|$

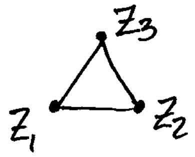
$b^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$$\left.\begin{array}{l} b^2 - a_3^2 \leq a_1^2 + a_2^2 \\ \quad \parallel \\ (b-a_3)(b+a_3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{b^2 - a_3^2}{(a_3-b)^2} \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_3-b)^2}$$

$$\frac{b^2 - a_3^2}{(a_3-b)^2} = -\frac{b+a_3}{a_3-b}$$

$$\Longrightarrow \boxed{0 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_3-b)^2} + \frac{b+a_3}{a_3-b}}$$

$\boxed{25.}$



$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2z_1^2 + 2z_2^2 + 2z_3^2 - 2z_1z_2 - 2z_2z_3 - 2z_3z_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(z_1 - z_2)}_{\overset{\shortparallel}{w_1}}{}^2 + \underbrace{(z_2 - z_3)}_{\overset{\shortparallel}{w_2}}{}^2 + \underbrace{(z_3 - z_1)}_{w_3}{}^2 = 0$$

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0$$

además

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Fácil trivial

$\boxed{\Rightarrow}$ $w_3 = -(w_1 + w_2)$

$$w_1^2 + w_2^2 + (w_1 + w_2)^2 = 0$$

$$2w_1^2 + 2w_2^2 + 2w_1w_2 = 0 \qquad \text{dividimos por } w_2^2$$

$$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 + \frac{w_1}{w_2} + 1 = 0 \qquad \frac{w_1}{w_2} = a$$

$$a^2 + a + 1 = 0$$

Esto lo cumple las raíces cúbicas de 1

$$a = \frac{w_1}{w_2} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ ó } e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

Si hacemos ~~tes~~ lo mismo para $\frac{w_2}{w_3}$ ...

$$\ldots \quad w_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} w_2$$