ALEJANDRO SANTORUM VARELA TAREA 2 - MNEDO

$$y_{n+2} = \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h f_{n+2}$$

$$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{n+j} = \frac{2}{3} h f_{n+2} \quad \text{con} \begin{cases} \alpha_0 = 1/3 \\ \alpha_1 = -4/3 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Intentamos calcular $\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h)$:

$$f_{n+2} = f(x_{n+2}, y_{n+2})$$

$$x_{n+2} = x_n + 2h \quad \text{(paso equidistante)}$$

$$y_{n+2} = \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h \phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{2} \alpha_j y_{n+j} = y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} h f\Big(x_n + 2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h \phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h)\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h) = \frac{2}{3} h f\Big(x_n + 2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h \phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h)\Big)}$$

Veamos que esta ecuación tiene solución única para h suficientemente pequeño. El valor de la func. de incremento es un pto. fijo de la forma:

$$F(\phi) = \frac{2}{3} h f\Big(x_n + 2h, \frac{4}{3} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} h \phi\Big)$$

Considerando que f es Lipschitz con respecto a su segunda variable, con cierta constante L, tenemos:

$\|F(\phi) - F(\hat{\phi})\| = \frac{2hL}{3} \|\phi - \hat{\phi}\|$. Si $\frac{2hL}{3} < 1$ la aplicación F es contractiva, y por consiguiente, un único pto. fijo (Tma. de Banach). En resumen, $\phi_f(x_n, y_n, y_{n+1}; h)$ está bien definida para todo $h < \frac{3}{2L}$.