HOJA +

5. Decimos que $E: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una integral primera de $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$. Si E es $C^1(\Omega)$, no es constante en ningún abierto contenido en Ω y $E(x(t),y(t))$ es constante para cada solución del sistema. Calcular integrales primeras para

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^2+1 \end{pmatrix} = V(X)$

Busco $E(x,y)$ tal que $\frac{dE}{dt}(x(t),y(t)) = 0$, e.d.,

$$\frac{\partial E}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = 0 = \langle \nabla E, V(X)\rangle$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}\cdot y + \frac{\partial E}{\partial y}(x^2+1) = 0$$

Busco E tal que $\frac{\partial E}{\partial x} = x^2+1$, $\frac{\partial E}{\partial y} = -y$ ojo: Cambiando de signo

Es ec. exacta $\Rightarrow E(x,y) = \int(-y)dy + C(x) = \frac{-y^2}{2} + C(x)$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = C'(x) = x^2+1 \iff C(x) = \frac{x^3}{3}+x$$

$$\Rightarrow E(x,y) = \frac{-y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x$$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1+y) \\ -y(1+x) \end{pmatrix}$

Busco E: $\frac{\partial E}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial x}x(1+y) + \frac{\partial E}{\partial y}(-y(1+x)) = 0$$

ojo: Cambiando de signo

$\frac{\partial E}{\partial x} = y(1+x)$ $\qquad \frac{\partial E}{\partial y} = x(1+y)$ no es exacta

$\downarrow$ transformamos en exacta

opción 1: $y(1+x)dx + x(1+y)dy = 0$

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1+y}{y}dy = 0, \quad \forall x,y \neq 0$$

$\hookrightarrow$ resolver por exacta $\rightarrow E(x,y)$ definida para $x,y \neq 0$

opción 2: factor integrante

$\mu = \mu(x+y)$ $\quad \underbrace{\mu \cdot y \cdot (1+x)}_{M} dx + \underbrace{\mu \cdot x \cdot (1+y)}_{-N} dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Longleftrightarrow \mu_y \cdot y \cdot (1+x) + \mu \cdot (1+x) = \mu_x \cdot x(1+y) + \mu \cdot (1+y)$$

$$\Longleftrightarrow y\mu_y + xy\mu_y + \cancel{\mu} + \mu x = x\mu_x + xy\mu_x + \cancel{\mu} + \mu \cdot y$$

Si $\mu_x = \mu_y = \mu$ (a ojo), lo tendríamos.

$$\mu(x+y) = e^{x+y}$$

$$E(x,y) = \int e^{x+y} \cdot y(1+x)\, dx + C(y) = ye^{x+y} + y\int xe^{x+y} dx + C(y)$$

$$= ye^{x+y} + y\int xe^{x+y} dx + C(y) = ye^{x+y} + y\left(xe^{x+y} - e^{x+y}\right) + C(y)$$

$u = x \to du = dx$
$dv = e^{x+y} \to v = e^{x+y}$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = e^{x+y}(1+y)x \Longleftrightarrow \cancel{e^{x+y}} + \cancel{ye^{x+y}} + xe^{x+y} - \cancel{e^{x+y}} +$$

$$+ y\left(xe^{x+y} - \cancel{e^{x+y}}\right) + C'(y) = (x+xy)e^{x+y} + C'(y) =$$

$$= e^{x+y}(1+y)x \Longleftrightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = cte \quad \text{Tomo } C(y) = 0$$

$$\Rightarrow E(x,y) = \boxed{xye^{x+y}}$$

$\boxed{1.2}$ $\begin{cases} x' = -x - 2y + 3 = F \\ y' = 2x - y + 6 = G \end{cases}$

<u>Puntos críticos</u>

$$\begin{array}{r} -2(x+2y=3) \\ 2x - y = 6 \\ \hline -5y = 0 \end{array} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 3 \qquad \boxed{P = (3,0)}$$

<u>"Linealizamos" el sistema</u>:

$$F_x\Big|_{(3,0)} = -1 \quad F_y\Big|_{(3,0)} = -2 \quad G_x\Big|_{(3,0)} = 2 \quad G_y\Big|_{(3,0)} = -1$$

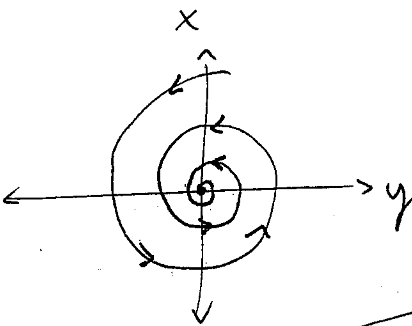
$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}' = -\tilde{x} - 2\tilde{y} \\ \tilde{y}' = 2\tilde{x} - \tilde{y} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \tilde{x} = x - 3 \\ \tilde{y} = y \end{array}$$

<u>Autovalores</u>

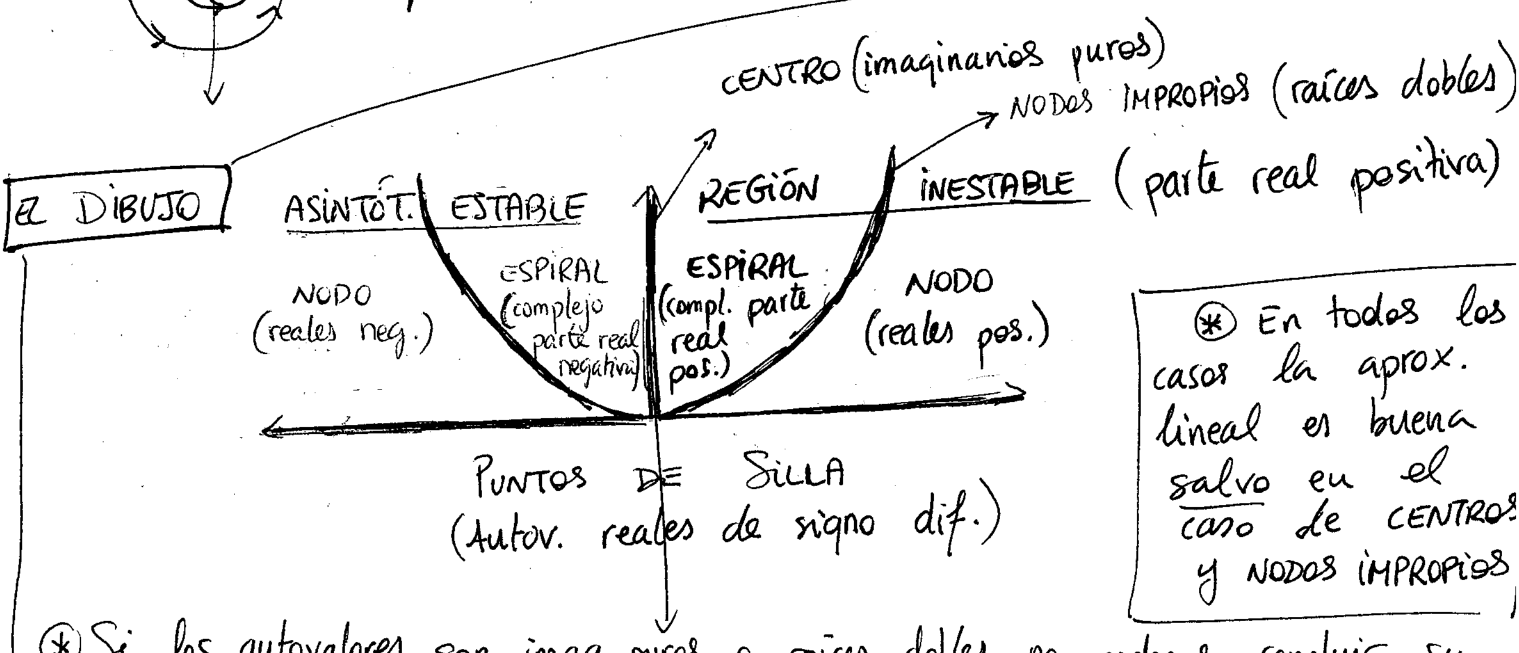
$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1+\lambda)^2 + 4 = 0 \iff 1+\lambda = \pm 2i \iff \boxed{\lambda = -1 \pm 2i}$$

ESPIRAL ASINTÓTICA ESTABLE

Recordatorio : $X = e^{\alpha t} \underbrace{\begin{pmatrix} \text{matriz} \\ \text{trigonométr.} \end{pmatrix}}_{\text{oscila}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ cuando $\lambda = \alpha + i\beta$



Para ver si es ⊚ ó ⊚ hay que mirar el campo de pendientes.



⊛ En todos los casos la aprox. lineal es buena <u>salvo</u> en el <u>caso</u> de CENTROS y NODOS IMPROPIOS

⊛ Si los autovalores son imag. puros o raíces dobles no podemos concluir su

2.

ESTUDIAR LOS PUNTOS CRÍTICOS DEL SISTEMA.

ap.2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(4-2x-y) \\ y(3-x-y) \end{pmatrix}$ (S)

$x(4-2x-y)=0 \iff x=0$ ó $2x+y=4$

$y(3-x-y)=0 \iff y=0$ ó $x+y=3$

Puntos: $(0,0)$, $(0,3)$, $(2,0)$, $(1,2)$

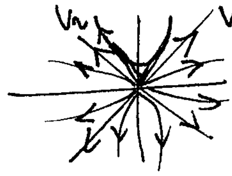
$F_x = 4-2x-y-2x$ $\qquad F_y = -x$

$G_x = -y$ $\qquad G_y = 3-x-2y$

$(0,0)$ $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to$ Autovalores: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$

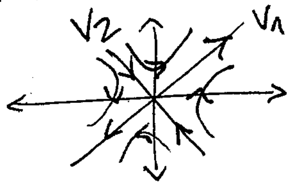
autovalores reales positivos y distintos $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ NODO INESTABLE $\Rightarrow$ $\Rightarrow (0,0)$ es también nodo inestable en (S)

$\bar{X} = C_1 e^{4t} V_1 + C_2 e^{3t} V_2$



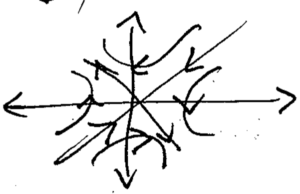
$(0,3)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \to$ Autovalores: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$

autovalores reales de signo distinto $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ PUNTO DE SILLA $\Rightarrow$ $\Rightarrow (0,3)$ es también un punto de silla en (S)



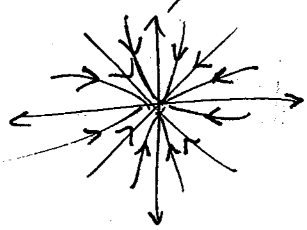
$(2,0)$ $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ Autovalores: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$

autovalores reales de signo distinto $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ PUNTO DE SILLA $\Rightarrow (2,0)$ es también un punto de silla en (S).



$(1,2)$ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \to$ Autovalores: $\lambda = -2 \pm \sqrt{2}$

autovalores reales negativos diferentes $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ NODO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE $\Rightarrow (1,2)$ es también un nodo asint. estable.



$\boxed{4.}$ Discutir según los valores de μ la estabilidad de $(0,0)$ para: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x-\mu(x^2-1)y \end{pmatrix}$

Si $\boxed{\mu = 0}$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$

$\iff \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i \implies (0,0)$ es un CENTRO

Si $\boxed{\mu \neq 0}$: $F_x\big|_{(0,0)} = 0 \qquad F_y\big|_{(0,0)} = 1$

$G_x\big|_{(0,0)} = (-1-2\mu x y)\big|_{(0,0)} = -1 \qquad G_y\big|_{(0,0)} = -\mu(x^2-1)\big|_{(0,0)} = \mu$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\mu\lambda + \lambda^2 + 1 = 0 \iff$

$\iff \lambda = \dfrac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$

<u>CASOS</u>:

- Si $\mu^2 > 4$ $\left(\mu \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)\right)$:

  Nótese que $0 < \mu^2 - 4 < \mu^2 \iff \sqrt{\mu^2-4} < \sqrt{\mu^2} = |\mu|$

  Esto me dice que si $\mu \in (2,\infty)$, entonces $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, y por lo tanto, $(0,0)$ es nodo inestable. Por otro lado, si $\mu \in (-\infty,-2)$, entonces $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, $(0,0)$ es nodo asintót. estable.

  Todo esto se traduce al caso no-linealizado.

- Si $\mu^2 < 4$ (las raíces son imaginarias) $\left(\mu \in (-2,2) \setminus \{0\}\right)$:

  Si $\mu \in (0,2)$, $(0,0)$ es una espiral inestable.

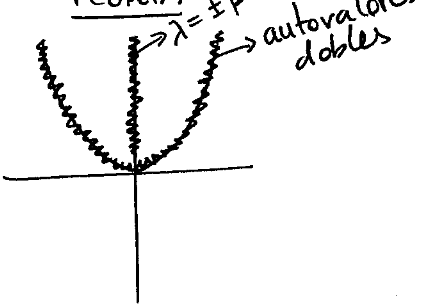
  Si $\mu \in (-2,0)$, $(0,0)$ es una espiral asintót. estable.

- Si $\mu^2 = 4$ (raíces dobles) $(\mu = \pm 2)$:

  $\mu = 2$ (doble) ó $\mu = -2$ (doble)

  Como el ejercicio solo pregunta por estabilidad, aunque es la zona crítica, se conserva la estabilidad. Si $\mu = 2$ (doble) $\rightarrow$ $\rightarrow$ punto inestable. Si $\mu = -2$ (doble) $\rightarrow$ punto crítico asint. estable

TEORÍA:



* FUNCIÓN DE LIAPUNOV: $E(x,y) \in C^1$

- $E(x_0,y_0) = 0$
- $E(x,y) > 0, \quad (x,y) \neq (x_0,y_0)$
- $\dfrac{d}{dt}E(x,y) = \dfrac{\partial E}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial E}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t} \leq 0$

$$\frac{dE}{dt}(x_0,y_0) = 0$$

TEOREMA DE LIAPUNOV: Si encontramos una función $E(x,y)$ con las propiedades anteriores:

a) Si $\dfrac{dE}{dt} < 0$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ es asintóticamente estable.

b) Si $\dfrac{dE}{dt}(x,y) \leq 0$, $(x,y) \neq (0,0)$, entonces (x_0,y_0) es estable.

$\boxed{\text{asintóticamente estable} \Rightarrow \text{estable}}$

TEOREMA DE CHETAEV: Si encontramos una función $E(x,y) \in C$ tal que $\mathcal{U} = \{(x,y) : E(x,y) > 0\}$ tiene al $(0,0)$ en su frontera.

(*) Tenemos $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$, donde $(0,0)$ es un pto. crít.

Si $\dfrac{dE}{dt}(x,y) > 0$, en $\mathcal{U} \cap B_r$. Entonces $(0,0)$ es inestable.

El T^{ma} de Liapunov y de Chetaev son excluyentes. Si se cumple uno no puede cumplirse el otro.

2. Estudiar los puntos críticos del sistema.

3) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-x^3 \\ x-y^3 \end{pmatrix}$ (SNL)

nuestros p
críticos so
↓ rea
siem

<u>Puntos críticos</u> $\begin{cases} y=-x^3 \\ x=y^3 \end{cases} \iff y=-(y^3)^3 \iff y(1+y^8)=0$

$\boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=0}$

$\Rightarrow \boxed{P=(0,0)}$

<u>Linealizamos</u> en entorno del punto crítico:

$F_x\big|_{(0,0)}=0 \qquad F_y\big|_{(0,0)}=-1 \qquad G_x\big|_{(0,0)}=1 \qquad G_y\big|_{(0,0)}=0$

<u>Autovalores</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \iff \lambda^2+1=0 \iff \lambda=\pm i$$

No podemos asegurar nada de la estabilidad del $(0,0)$ en el (SN

Intentamos buscar una <u>función de Liapunov</u>:

Busco $V(x,y)=ax^{2m}+by^{2n}$

$$\frac{dV}{dt}(x,y)=\frac{\partial V}{\partial x}\cdot x'+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot y' = 2amx^{2m-1}(-y-x^3)+2bny^{2n-1}(x-y^3)$$

$$=\underbrace{-2amx^{2m-1}y}-2amx^{2m+2}+\underbrace{2bny^{2n-1}x}-2bny^{2n+2}$$

necesitamos que se anulen estos términos para obtener una f. de Liapunov

Queremos que $\begin{cases} 2m-1=1 \iff m=1 \\ 2n-1=1 \iff n=1 \\ 2am=2bn \iff a=b \end{cases}$ Tomamos $a=b=1$.

$\Rightarrow \boxed{V(x,y)=x^2+y^2}$ cumple: $V(0,0)=0$, $V(x,y)>0$, $(x,y)\neq(0,0)$

$\left.\begin{array}{l} \frac{dV}{dt}<0, \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \frac{dV}{dt}(0,0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Liapunov: $(0,0)$ es asint. <u>estable</u>

4) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+x^3 \\ x+y^3 \end{pmatrix}$ (SNL)

Puntos críticos: $\begin{cases} y = x^3 \\ x = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow y = (-y^3)^3 = -y^9 \Leftrightarrow y(1+y^8) = 0$
$\Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$

$\boxed{P = (0,0)}$

Linealizamos el sistema:

$F_x\big|_{(0,0)} = 0 \quad F_y\big|_{(0,0)} = -1 \quad G_x\big|_{(0,0)} = 0 \quad G_y\big|_{(0,0)} = 0$

Autovaloren de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$ → No podemos decir nada de la estabilidad del SNL

Buscamos una función de Liapunov:

$V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$

$\frac{dV}{dt}(x,y) = 2am\,x^{2m-1}(-y+x^3) + 2bny^{2n-1}(x+y^3) =$

$= \underbrace{-2am\,x^{2m-1}y} + 2am\,x^{2m+2} + \underbrace{2bn\,y^{2n-1}x} + 2bny^{2n+2}$

Quiero que: $\begin{cases} 2m-1 = 1 \\ 2n-1 = 1 \\ 2am = 2bn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = n = 1 \\ a = b \end{cases}$ tomamos $a = b = 1$

Por tanto, $V(x,y) = x^2 + y^2$ cumple: solo ~~en~~ hace falta esto en un entorno del punto crítico, sin el punto crítico.

$V(0,0) = 0$, $V(x,y) > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$

$\frac{dV}{dt}(x,y) = 2x^4 + 2y^4 > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$

Por el T^{ma} de Chetaev, concluimos que $(0,0)$ es inestable.

OJO: $\boxed{V(x,y) = a(x-x_0)^{2m} + b(y-y_0)^{2n}}$ ← V general

$\boxed{7.}$ Hallar integral primera para $\begin{cases} x' = xy \\ y' = \log x \end{cases}$, $x > 0$

Busco E tal que $\frac{\partial E}{\partial x} xy + \frac{\partial E}{\partial y} \log x = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\log x \quad , \quad \frac{\partial E}{\partial y} = xy$$

$$-\log x \, dx + xy \, dy = 0 \implies \frac{-\log x}{x} dx + y \, dy = 0 \quad \text{exacta}$$

$$E(x,y) = \int y \, dy + C(x) = \frac{y^2}{2} + C(x)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{-\log x}{x} \iff C'(x) = \frac{-\log x}{x} \iff C(x) = \frac{-\log^2 x}{2}$$

$$\implies E(x,y) = y^2 - (\log x)^2 = C$$

$\boxed{1.1}$ $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 7 = F \\ y' = -x - 2y + 4 = G \end{cases}$

a) Determinar naturaleza de los puntos críticos y sus prop. de estabilidad.

b) En el caso de obtener punto de silla, determinar las direcciones de los ejes.

Puntos críticos: $x' = 0$ y $y' = 0$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -x - 2y = -4 \end{cases}$$

$$-y = -1 \iff \boxed{y = 1} \implies -x = 2 \longrightarrow \boxed{x = 2}$$

$$\boxed{P = (2,1)}$$

TEORÍA

- En clase: clasificar $(0,0)$ como punto crítico de $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Método de Linealización: aplicar Taylor a F y G cerca del punto crítico (x_0, y_0)

$$F(x,y) = \underbrace{F(x_0,y_0)}_{\overset{\shortparallel}{0} \leftarrow (x_0,y_0) \text{ punto crítico}} + \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}}_{=a} \cdot (x - x_0) + \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}}_{=b} \cdot (y - y_0) + \text{Error}$$

$$G(x,y) = G(x_0,y_0) + \underbrace{\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}}_{=c} \cdot (x - x_0) + \underbrace{\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}}_{=d} \cdot (y - y_0) + \text{Error}$$

Entonces: $\begin{cases} x' \approx a(x-x_0) + b(y-y_0) \\ y' \approx c(x-x_0) + d(y-y_0) \end{cases} \xrightarrow{\;} \begin{cases} \tilde{x}' = a\tilde{x} + b\tilde{y} \\ \tilde{y}' = c\tilde{x} + d\tilde{y} \end{cases}$

$\tilde{x} = x - x_0$ $\quad \tilde{y} = y - y_0$ $\quad \tilde{x}' = x'$ $\quad \tilde{y}' = y'$

En el ejercicio actual: $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 7 = F \\ y' = -x - 2y + 4 = G \end{cases}$

$$F_x\Big|_{(2,1)} = 2 \qquad F_y\Big|_{(2,1)} = 3 \qquad G_x\Big|_{(2,1)} = -1 \qquad G_y\Big|_{(2,1)} = -2$$

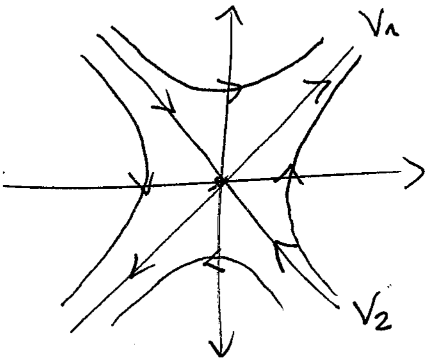
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = F \\ y' = G \end{cases} \xrightarrow[\text{linealizado}]{\text{sist.}} \begin{cases} \tilde{x}' = 2\tilde{x} + 3\tilde{y} \\ \tilde{y}' = -\tilde{x} - 2\tilde{y} \end{cases} \quad \text{con } \tilde{x} = x-2, \ \tilde{y} = y-1$$

<u>Autovalores:</u>

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 4 + 3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 = 1 \Longleftrightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$$

2 reales
signo diferente
PUNTO DE SILLA

Recordatorio: $X = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 = P e^{Jt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$



$V_1 :=$ autovector asociado al $\lambda = 1$
$V_2 :=$ autovector asociado al $\lambda = -1$

Calculamos los ejes:

$$(A - I)V_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ -1 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} u_1 + 3u_2 = 0 \\ u_1 = -3u_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$(A + I)V_2 = 0, \quad \begin{pmatrix} 2+1 & 3 \\ -1 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} 3u_1 + 3u_2 = 0 \\ u_1 = -u_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{8.}$ Usar el T^{ma} de Liapunov para estudiar la estabilidad del $(0,0)$ en los siguientes sistemas

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - \frac{1}{4}x^3 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy^4 \\ yx^4 \end{pmatrix}$ $\quad V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot y'$$

$$2am\,x^{2m-1} x' + 2bn y^{2n-1} y' = 2am\,x^{2m-1}(-xy^4) + 2bny^{2n-1}(yx^4) =$$

$$= -2am x^{2m} y^4 + 2bny^{2n} x^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m = 4 \longrightarrow m = 2 \\ 2n = 4 \longrightarrow n = 2 \\ |a| > |b| \quad a > b > 0 \end{cases} \Rightarrow V(x,y) = 2x^4 + y^4$$

Cumple: $\frac{\partial V}{\partial t} < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$ $\quad V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

V es Liapunov fuerte.

4) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - xy^4 \\ y - y^3x^2 \end{pmatrix}$ Probamos con $V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$

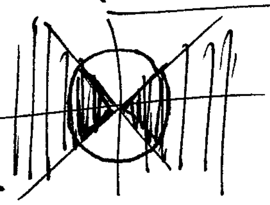
$$\frac{dV}{dt}(x,y) = 2amx^{2m-1}x' + 2bny^{2n-1}y' =$$

$$= 2amx^{2m-1}(x - xy^4) + 2bny^{2n-1}(y - y^3x^2) =$$

$$= 2amx^{2m} \underbrace{- 2amx^{2m}y^4} + 2bny^{2n} \underbrace{- 2bny^{2n+2}x^2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2m = 2 \Leftrightarrow m = 1 \\ 2n+2 = 4 \Leftrightarrow n = 1 \end{cases} \Longrightarrow x^2y^4(-2a - 2b) = 0 \Longleftrightarrow a = -b$$

$$\overset{a=1,\ b=-1}{\Longrightarrow} V(x,y) = x^2 - y^2 \ ; \ V(x,y) > 0 \Longleftrightarrow x^2 > y^2 \Longleftrightarrow \boxed{|x| > |y|}$$



$$\frac{dV}{dt} = 2x^2 - 2y^2 \ ; \ \frac{dV}{dt}(x,y) > 0 \Longleftrightarrow |x| > |y|$$

$\Longrightarrow$ Por el T^{ma} de Chetaev el $P = (0,0)$ es <u>inestable</u>.

$\boxed{12.}$ $x'' + \operatorname{sen} x = 0$

Llamo $x' = y$ y obtengo: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen} x \end{cases}$

<u>Puntos críticos</u>: $\begin{cases} y = 0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

<u>Linealizamos</u> el sistema:

$$F_x\big|_{(k\pi,0)} = 1 \qquad F_y\big|_{(k\pi,0)} = 1 \qquad G_x\big|_{(k\pi,0)} = -\cos x\big|_{(k\pi,0)} = -(-1)^k$$

$$G_y\big|_{(k\pi,0)} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -(-1)^k & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + (-1)^k = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-(-1)^k} \quad \begin{cases} \xrightarrow{k \text{ impar}} \lambda = \pm 1 \Longrightarrow (k\pi, 0) \text{ punto de silla} \\ \xrightarrow[k \text{ par}]{} \lambda = \pm i \Longrightarrow \text{buscamos f. de Liapunov o ver el T}^{\text{ma}} \text{ de Chetaev.} \end{cases}$$

b) Hallar ecuación de las trayectorias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} x}{y} \Longleftrightarrow y\,dy = -\operatorname{sen} x\,dx \Longleftrightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} - \cos x = c}$$

c) ¿Qué función de Liapunov podríamos utilizar?

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} - \cos x + C = \frac{y^2}{2} - \cos x + 1 \geq 0$$

Quiero que cumpla:

$V(K\pi, 0) = 0 \iff C = 1$

K par

$V(x,y) > 0, \quad (x,y) \neq (K\pi, 0)$

$\frac{dV}{dt}(x,y) = 0 \leftarrow$ V es una energía (integral primera)

$\Longrightarrow$ V es una función de Liapunov débil $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow (K\pi, 0)$ es estable.

COMENTARIOS DEL 17

~~Derivamos V: $\frac{\partial V}{\partial t}($~~

$$V(x,y) = \alpha(2x+y)^2 + \beta(x+y)^2$$

$\downarrow$ (...) muchas cuentas

$$V(x,y) = (2x+y)^2 + (x+y)^2$$

$\frac{\partial V}{\partial t} < 0, \quad (x,y) \neq (0,0) \Longrightarrow (0,0)$ es asintóticam. estable

$\boxed{13.}$ Comprobar que el sistema: $\begin{cases} x' = x(1-x^2-y^2/2) \\ y' = y\left(1-\frac{x^2}{2}-y^2\right) \end{cases}$ es un

sistema gradiente calcular el potencial y estudiar puntos críticos.

$\exists \Phi(x,y)$ tal que $\begin{cases} x' = \Phi_x \\ y' = \Phi_y \end{cases} \Longleftrightarrow \Phi_x dx + \Phi_y dy = 0$

$\Phi_{xy} \overset{?}{=} \Phi_{yx}$

$$\underbrace{x\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)}_{M}dx + \underbrace{y\left(1-\frac{x^2}{2}-y^2\right)}_{N}dy = 0$$

$$\Phi_{xy} = \Phi_{yx} \Longleftrightarrow \boxed{M_y = -xy = N_x}$$

$$\Phi(x,y) = \int x\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)dx + C(y) = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2y^2}{4}+C(y)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2y}{2} + C'(y) \overset{\text{igualamos a } y'}{=} y\left(1-\frac{x^2}{2}-y^2\right) \Longrightarrow C'(y) = y-y^3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C(y) = \frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Phi(x,y) = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2y^2}{4}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4} = c} \quad \text{Potencial}$$

Ahora calculamos puntos críticos:

$x\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow x=0$ ó $x^2+\frac{y^2}{2}=1$

$y\left(1-\frac{x^2}{2}-y^2\right) = 0 \Longleftrightarrow y=0$ ó $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

Combinando lo anterior: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Linealizamos para estudiar los puntos críticos:

$F_x(x,y) = 1-3x^2-\frac{y^2}{2}$ $\qquad$ $F_y(x,y) = -yx$

$G_x(x,y) = -yx$ $\qquad$ $G_y(x,y) = 1-\frac{x^2}{2}-3y^2$

$\boxed{(0,0)}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Inestable

$\boxed{(0,1)}$ $\boxed{(0,-1)}$ $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Punto de silla

$\boxed{(1,0)}$ $\boxed{(-1,0)}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ Punto de silla

$\boxed{\left(\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)}$ $\boxed{\left(-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}\right)}$

$\begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -4/3 \end{pmatrix} \longrightarrow$ autovalores $\begin{vmatrix} -4/3-\lambda & -2/3 \\ -2/3 & -4/3-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{3}+\lambda\right)^2 - \frac{4}{9} = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left(\frac{4}{3}+\lambda\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Longleftrightarrow \frac{4}{3}+\lambda = \pm 2/3 \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{-4}{3} \pm \frac{2}{3}} \Rightarrow$ Nodo asint. estable

$\boxed{\left(\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}\right)}$ $\boxed{\left(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)}$

$\begin{pmatrix} -4/3 & 2/3 \\ 2/3 & -4/3 \end{pmatrix} \longrightarrow$ autovalores $\begin{vmatrix} -4/3-\lambda & 2/3 \\ 2/3 & -4/3\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{3}+\lambda\right)^2 - \frac{4}{9} = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{-4}{3} \pm \frac{2}{3}}$

$\Longrightarrow$ Nodo asint. estable

Falta hacer el dibujo pero son muchos puntos.

$\boxed{14.}$ Probar que $\begin{cases} x' = -y + x(1-x^2-y^2) \\ y' = x + y(1-x^2-y^2) \end{cases}$ tiene al menos una solución periódica rodeando el origen. Estudiar la estabilidad de ese punto.

Puntos críticos: podemos calcular y ver que solo es el $(0,0)$ único punto crítico

Linealizamos en un entorno del $(0,0)$:

$F_x\big|_{(0,0)} = 1 \qquad F_y\big|_{(0,0)} = -1 \qquad G_x\big|_{(0,0)} = 1 \qquad G_y\big|_{(0,0)} = 1$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 \Longrightarrow \boxed{\lambda = 1 \pm i} \Longrightarrow$ Espiral inestable.

Pasamos a polares: $\begin{cases} y(t) = r(t)\,\mathrm{sen}(\theta(t)) \Rightarrow y' = r'\mathrm{sen}\theta + r\cos\theta\cdot\theta' \end{cases}$

Sustituimos:

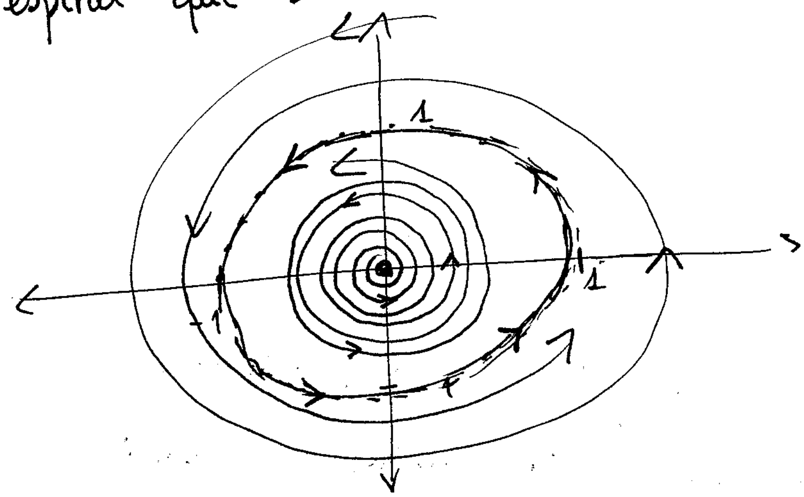
$$\begin{cases} r'\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\theta\,\theta' = -r\,\mathrm{sen}\theta + r\cos\theta\cdot(1-r^2) & [1] \\ r'\mathrm{sen}\theta + r\cos\theta\,\theta' = r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\theta\,(1-r^2) & [2] \end{cases}$$

$\cos\theta\cdot[1] + \mathrm{sen}\theta\cdot[2]$: $r' = r(1-r^2)$

$-\mathrm{sen}\theta\cdot[1] + \cos\theta\cdot[2]$: $r\theta' = r \Longrightarrow \theta' = 1 \Longrightarrow$ el ángulo crece con t y va en sentido antihorario

Las trayectorias las estudiamos con $r' = r(1-r^2)$

- $r' = 0$ si $r \neq 0$, $r = \pm 1 \Longrightarrow$ trayectoria periódica
  - en el pto. crítico
- $r' > 0$ si $0 < r < 1 \Longrightarrow$ el radio crece cuando $r \in (0,1)$
  $\Longrightarrow$ espiral que se "abre" (inestable)
  gira
- $r' < 0$ si $r > 1 \Longrightarrow$ el radio decrece cuando $r \in (1,\infty)$
  $\Longrightarrow$ espiral que se "cierra"



|16| $V(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ demostrar que el sistema

$\begin{cases} x' = x(x-a) \\ y' = y(y-b) \end{cases}$ tiene en el origen un punto crítico asintóticamente estable. Comprobar que toda trayectoria que entre en la región $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ $\underbrace{\text{tiende a } (0,0) \text{ cuando } t \to \infty.}$

↳ esto es la def. de ser asint. estable.

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - a$ $\qquad \frac{\partial G}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ $\qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y - b$

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & 0 \\ 0 & -b-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+a)(\lambda+b) = 0 \qquad \boxed{\begin{array}{l} \lambda = -a \\ \lambda = -b \end{array}}$$

La naturaleza del pto. crítico depende de a y b.

Si $a, b > 0 \implies$ Nodo asintóticamente estable

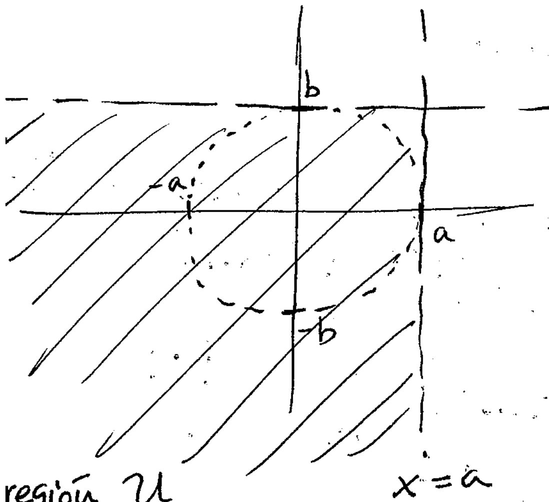
Si $a, b < 0 \implies$ Nodo inestable

Si $a.b < 0 \implies$ punto de silla

Ahora, vamos a olvidar lo hecho hasta ahora y vamos a utilizar lo que se nos dice en el enunciado.

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,y) = \frac{2x}{a^2}x' + \frac{2y}{b^2}y' = \frac{2x^2}{a^2}(x-a) + \frac{2y^2}{b^2}(y-b)$$

$\frac{\partial V}{\partial t} < 0$ en $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x < a, \ y < b\}$



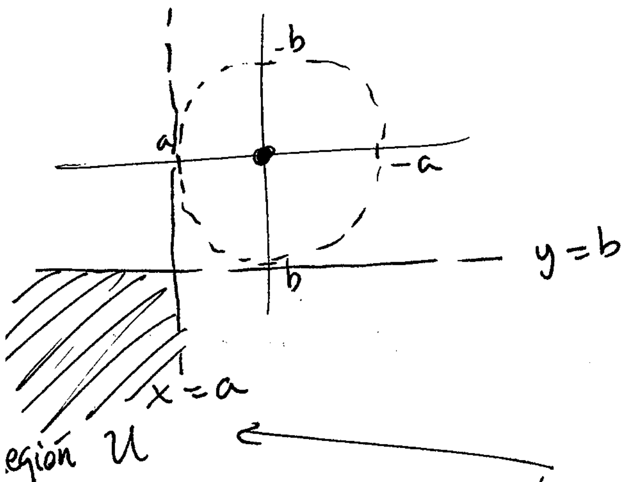
región $\mathcal{U}$

• Si $a, b > 0$ y $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$

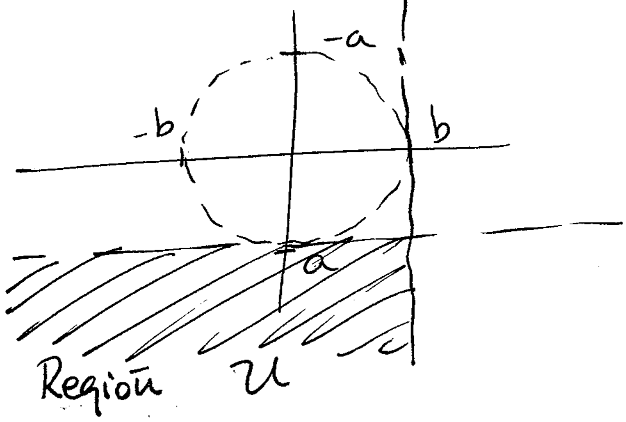
$\begin{array}{l} x^2 < a^2 \\ y^2 < b^2 \end{array} \iff \frac{x^2}{a^2} < 1, \ \frac{y^2}{b^2} < 1$

$\iff |x| < |a|, \ |y| < |b|$

• Si $a,b<0$



• Si $a<0$, $b>0$



Encontramos una región donde la derivada es positiva. Como Liapunov & Chetaev son complementa en estos dos casos, por Chetaev, podemos asegurar que hay inestabilidad.

$\boxed{10.}$ Estudiar puntos críticos y esbozar gráfica de $\begin{cases} x' = x(60-4x-3y) \\ y' = y(42-3x-2y) \end{cases}$

$x(60-4x-3y) = 0 \iff x = 0$ ó $60-4x-3y=0$

$y(42-3x-2y) = 0 \iff y = 0$ ó $42-3x-2y=0$

Puntos críticos: $(0,0)$, $(0,21)$, $(15,0)$, $(6,12)$

Linealizamos: $F_x = (60-4x-3y)-4x$ $\qquad G_x = -3y$

$F_y = -3x$ $\qquad G_y = (42-3x-2y)-2y$

$\boxed{(0,0)}$ $\begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix} \longrightarrow$ nodo inestable

$\boxed{(0,21)}$ $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -63 & -42 \end{pmatrix} \longrightarrow$ nodo asintóticamente estable.

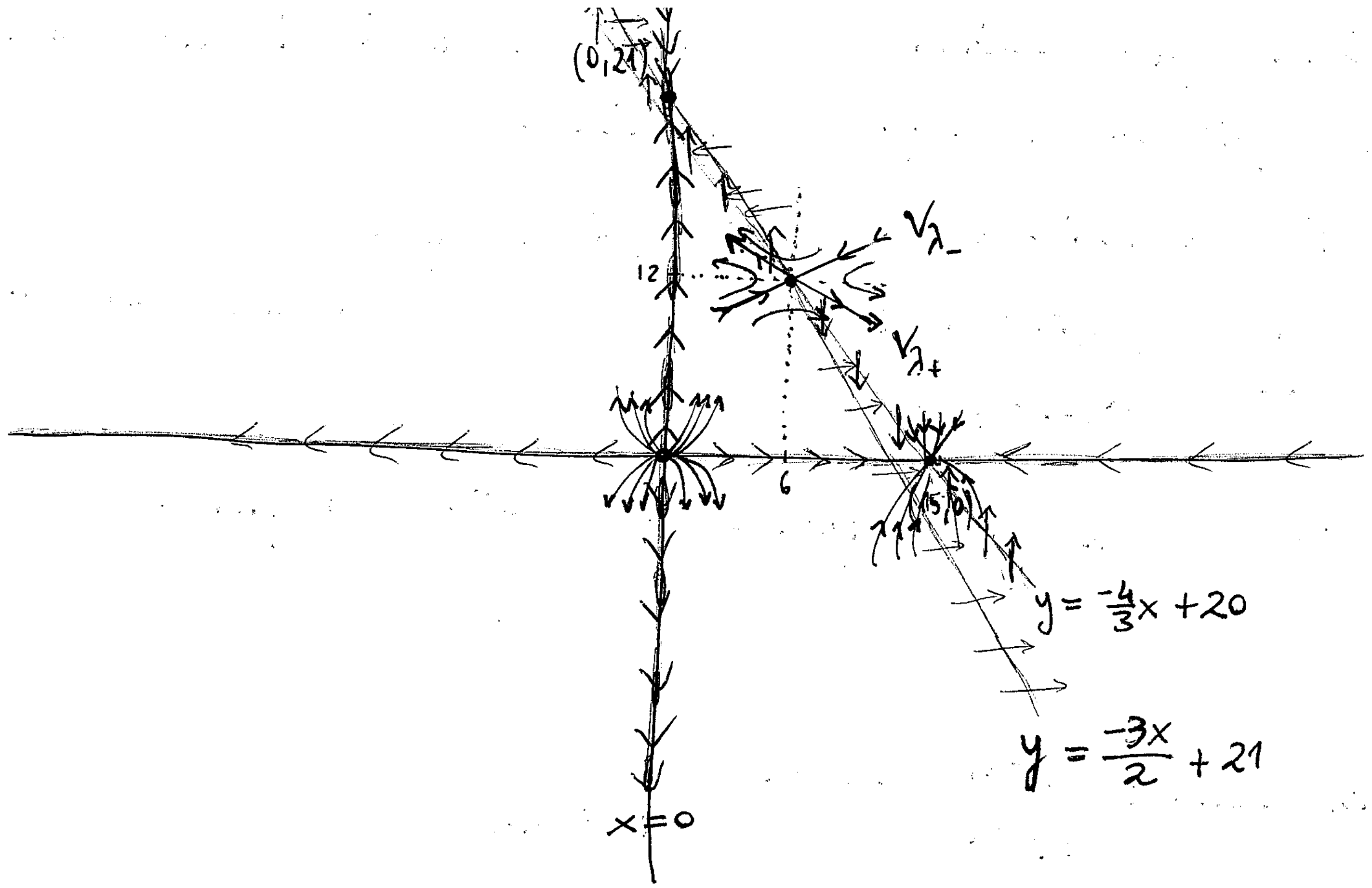
$\boxed{(15,0)}$ $\begin{pmatrix} -60 & -45 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Nodo asintóticamente estable.

$\boxed{(6,12)}$ $\begin{pmatrix} -24 & -18 \\ -36 & -24 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} -24-\lambda & -18 \\ -36 & -24-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 48\lambda - 72$ Punto de silla

$\lambda = \dfrac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 72}}{2}$

$\hookrightarrow$ autovectores: $V_{\lambda_+} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_{\lambda_-} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$



Campo de vectores (o de direcciones)

$$(dx, dy) = (x(60-4x-3y),\ y(42-3x-2y))$$

$$\text{pendiente} = m = \frac{y(42-3x-2y)}{x(60-4x-3y)}$$

$\boxed{m=\infty}$ sii $x=0$ ó $y = \frac{60-4x}{3} = \frac{-4x}{3} + 20$

Si $y(42-3x-2y) > 0$, entonces el campo de vectores sería "↑"

Esto ocurre sii $\begin{cases} y>0 \ \wedge \ y < \frac{-3x+42}{2} \\ \text{ó} \\ y<0 \ \wedge \ y > \frac{-3x+42}{2} = \frac{-3x}{2} + 21 \end{cases}$

$\boxed{m=0}$ sii $y(42-3x-2y) = 0 \iff y=0$ ó $y = \frac{-3x}{2} + 21$

Si $x(60-4x-3y) > 0$, los vectores en este caso serían "⟶"

Esto ocurre sii $\begin{cases} x>0 \ \wedge \ y < \frac{-4x}{3} + 20 \\ \text{ó} \\ x<0 \ \wedge \ y > \frac{-4x}{3} + 20 \end{cases}$

El dibujo de las direcciones del punto de silla (en rojo) debe ser interpretado localmente. Globalmente no se conservaría con exactitud la aproximación lineal.

Opciones para continuar y acabar el dibujo si hay dudas:

① Seguir con el campo de pendientes

② Ec trayectorias ⟵ resolverla (si se puede)
↖ en este caso no

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(42-3x-2y)}{x(60-4x-3y)}$$

③ En el caso de espirales o centros → polares

3. Describir el plano de fases 1. $\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = y \end{cases}$

Puntos críticos: $\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad P = (0,0)$

Linealizamos en un entorno de $(0,0)$:

$F_x\big|_{(0,0)} = 0 \qquad F_y\big|_{(0,0)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz asociada al sistema linealizado

$G_x\big|_{(0,0)} = 0 \qquad G_y\big|_{(0,0)} = 1$

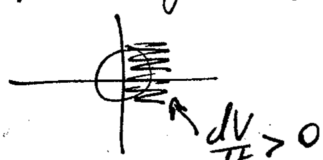
Autovalores: $0, 1$ → No sabemos nada

Buscamos una función de Liapunov:

$$V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' = 2amx^{2m-1}x^2 + 2bny^{2n-1}y =$$

$$= 2amx^{2m+1} + 2bny^{2n}$$

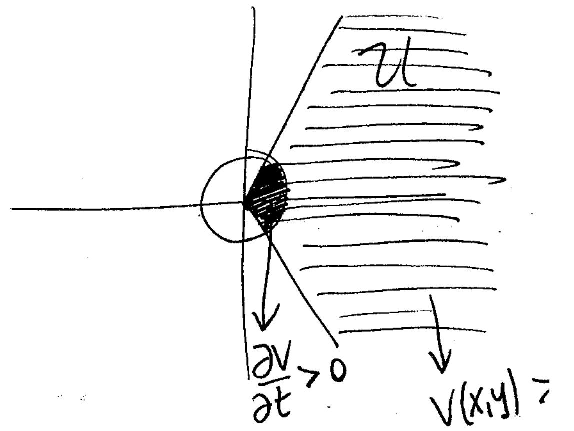


Siempre podemos encontrar una zona cerca del $(0,0)$ (donde $(0,0)$ está en la frontera) donde $\frac{dV}{dt} > 0$ → no podemos aplicar Liapunov → → aplicamos el t^{ma} de Chetaev.

Tomando $a=b=m=n=1$

$V(x,y) = x^2 + y^2$ es def. positiva

$\frac{dV}{dt} = 2x^3 + 2y^2 > 0 \longrightarrow x^3 > -y^2$



$\mathcal{U} = \{(x,y) \quad V(x,y) > 0\}$ con $(0,0) \in \partial \mathcal{U}$

En $\mathcal{U} \cap B_r : \frac{dV}{dt} > 0$

En este caso como $V(x,y) = x^2+y^2$ $\quad V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

Buscamos zona alrededor de $(0,0)$ tal que $\frac{\partial V}{\partial t} > 0$

$\Rightarrow$ En $\mathcal{U} \cap B_r$ $\quad \frac{dV}{dt} > 0 \Rightarrow$ Aplicando Chetaev $\Rightarrow$

$\Rightarrow (0,0)$ es un punto inestable.

Resolvemos la ecuación de las trayectorias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2} \iff \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \log|y| = \frac{1}{x} + c$$

suponemos $x=0$

$$\boxed{y = e^{-1/x} \cdot k}$$

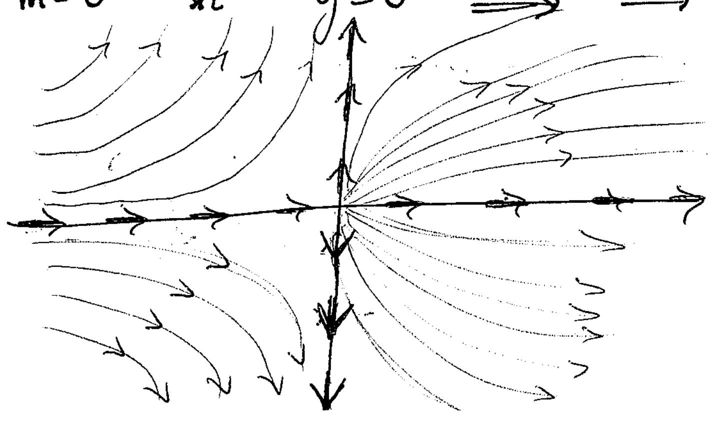
Nos vale para dibujar si no estamos en $x=0$

También podríamos calcular el campo de vectores:

$(dx, dy) = (x^2, y) \Rightarrow m = \frac{y}{x^2}$

- $m = \infty$ sii $x=0$ $\Rightarrow$ "$\uparrow$" sii $y>0$; "$\downarrow$" sii $y<0$

- $m=0$ sii $y=0 \Rightarrow$ "$\longrightarrow$" porque $x^2>0$



2. $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = y^2 - x^2 \end{cases}$

<u>Puntos críticos</u>: $\begin{cases} 2xy = 0 \iff x=0 \text{ ó } y=0 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$ $\quad P=(0,0)$

<u>Linealizamos</u> en un entorno del $(0,0)$

$F_x|_{(0,0)} = 0 \qquad F_y|_{(0,0)} = 0 \qquad G_x|_{(0,0)} = 0 \qquad G_y|_{(0,0)} = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ no sabemos nada

<u>Ec. trayectorias</u>: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-x^2}{2xy} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} \overset{x\neq 0}{=} \dfrac{(y/x)^2-1}{2\,(y/x)}$

Cambio $z = y/x \implies y(t) = z(t)x(t) \qquad y'(t) = z'(t)x + z\cdot x'(t)$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}\cdot x + z = \dfrac{z^2-1}{2z} \iff \boxed{\dfrac{dz}{dx}} = \dfrac{z^2-1-2z^2}{2z}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{-(z^2+1)}{2z}\cdot\dfrac{1}{x}$

$\implies \dfrac{2z}{1+z^2}\,dz = \dfrac{-1}{x}\,dx \implies \log(1+z^2) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right) + C$

$\iff 1+z^2 = \dfrac{K}{x} \iff 1 + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{K}{x} \iff x^2+y^2 = Kx \iff$

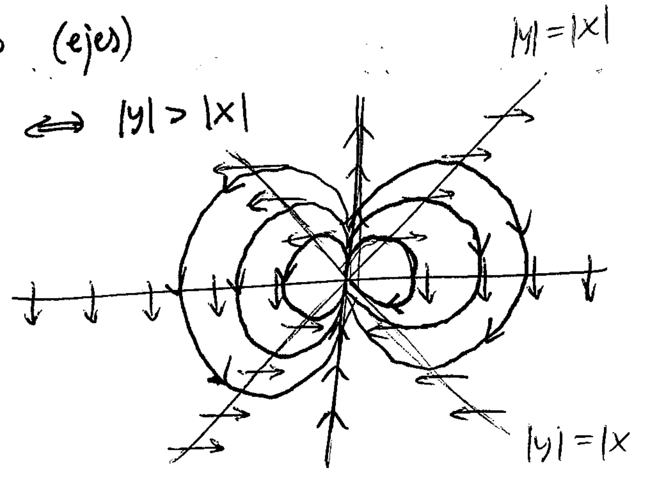
$\iff \boxed{\left(x-\dfrac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{K}{2}\right)^2}$ circunferencias de centro $(K/2, 0)$ y radio $K/2$.

<u>Campo de vectores</u>: $(dx, dy) = (2xy, y^2-x^2) \implies m = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$

- $m=0$ sii $y^2=x^2 \iff |y|=|x|$ $\rightrightarrows$ "$\rightarrow$" sii $xy>0$; "$\leftarrow$" sii $xy<0$
- $m=\infty$ sii $2xy=0 \iff x=0$ ó $y=0$ (ejes)

  los vectores serán "$\uparrow$" sii $y^2>x^2 \iff |y|>|x|$

  "$\downarrow$" sii $|y|<|x|$



18. Demostrar que la solución trivial $x(t) \equiv 0$ es asintótic. estable para:

a) $x'' + x' - \frac{(x')^3}{3} + x = 0$

Lo convertimos en un sistema

$$y = x' \longrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -y + \frac{y^3}{3} - x \end{cases}$$

Punto crítico

$P = (0,0)$ es el punto crítico que se corresponde con la solución $x(t) \equiv 0$.

Linealizamos: en un entorno de $(0,0)$

$$F_x|_{(0,0)} = 0 \qquad F_y|_{(0,0)} = 1$$
$$G_x|_{(0,0)} = -1 \qquad G_y|_{(0,0)} = -1$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalores: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda(1+\lambda) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \iff$

$$\iff \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Espiral asintót. estable

b) $x'' + x' \text{sen}^2(x') + x = 0$

$$y = x' \longrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -y\,\text{sen}(y^2) - x \end{cases}$$

Punto crítico $P = (0,0)$

Linealizamos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = \pm i \longrightarrow \text{sin información}$$

Función de Liapunov $V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial x}(-y\,\text{sen}(y^2) - x) = 2amx^{2m-1}y - 2bny^{2n-1}x -$$
$$- 2bny^{2n}\text{sen}(y^2)$$

Tomamos $a = b = m = n = 1$

$\implies -2y^2\text{sen}(y^2) \implies$ cerca del $0 \implies -2y^4 \leq 0 \quad \forall y \neq 0$

Pero $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ en $(x,0) \implies \frac{\partial V}{\partial t} \leq 0$ (Liapunov solo asegura estable)

Pasamos a coord. polares: $\begin{cases} r' = \text{[illegible]} \\ \theta' = -1 \end{cases}$ $\quad \underbrace{\underbrace{\quad\quad}_{\geqslant 0}}_{\geqslant 0 \text{ en un entorno}}$

$r' \leq 0$ en un entorno

$r' < 0$ si $0 < r < \sqrt{\pi}$, $\theta \neq K\pi$

↳ es asintóticamente estable