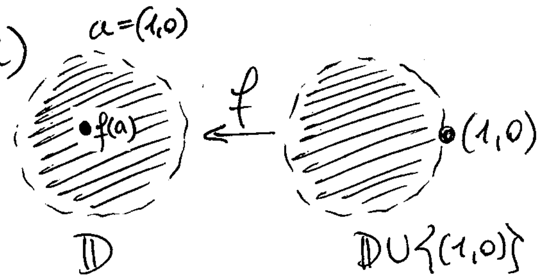
HOJA 7 | EJERCICIOS HOMOTOPÍAS

1. Sea $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ es el disco unidad abierto en $\mathbb{R}^2$ con la top. usual.

i) Probar que $\mathbb{D}$ y $\mathbb{D} \cup \{(1,0)\}$ no son homeomorfos.

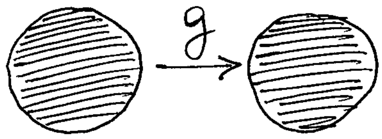
ii) Considerar $\overline{\mathbb{D}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Demuestra que un homeomorfismo $f: \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \overline{\mathbb{D}}$ envía la frontera de $\overline{\mathbb{D}}$ en la frontera y el interior de $\overline{\mathbb{D}}$ en el interior.

i) 

Si fueran homeomorfos, también lo serían si quitamos $(1,0)$ de $\mathbb{D} \cup \{(1,0)\}$ y $f((1,0))$ de $\mathbb{D}$.

Sin embargo: $\pi_1(\mathbb{D} \setminus f(a), x_0) \cong \mathbb{Z}$ y

$$\pi_1(\mathbb{D} \cup \{(1,0)\} \setminus (1,0), x_0) \cong \pi_1(\mathbb{D}, x_0) \cong \{1\} = \{Id\} = \{C_{x_0}\}$$
(grupo trivial)

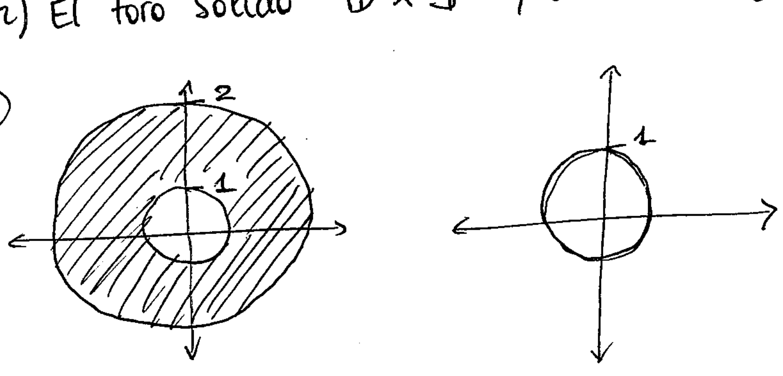
ii) 

Si un punto de la frontera fuese al interior mediante g llegaríamos a la

2. Haya el grupo fundamental de:

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ y de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4\}$

ii) El toro sólido $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$, con $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$

i) 

Sea $X = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ y $A = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\} = \mathbb{S}^1$

A es un retracto de X, es decir, existe $f: X \longrightarrow A$ tal que $f|_A = id$.

$$f: X \longrightarrow A$$
$$p \longmapsto \frac{p}{\|p\|}$$

Por lo que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) = \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$

Con la misma estrategia podemos hacerlo con X_2:

$X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$

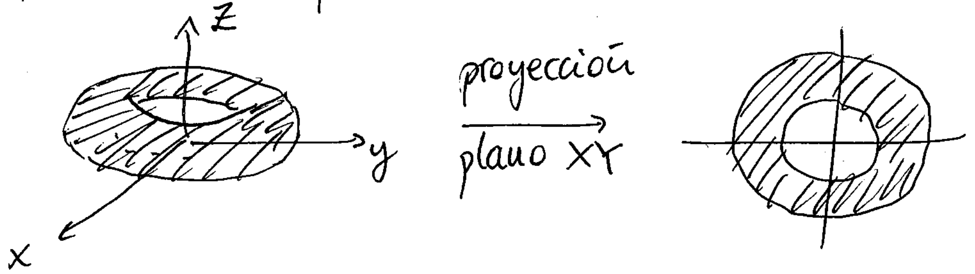
Sea $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ (circunferencia de radio 2)

Sabemos que $A_2 \simeq S^1$.

Existe $g : X_2 \longrightarrow A_2$ tal que g es un retracto de X_2 en A_2

$$\begin{aligned} g : X_2 &\longrightarrow A_2 \\ a &\longmapsto 2 \cdot \frac{a}{\|a\|} \end{aligned} \Rightarrow \pi_1(X_2, x_0) \cong \pi_1(A_2, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$$

ii) El toro sólido en $\mathbb{R}^3$ es como un "donut relleno".
Si escogemos $f = \pi_{xy}$ (proyección en el plano XY) obtenemos similar al primero del apartado i:



Por lo tanto, como hemos visto, su grupo fund. es $\mathbb{Z}$.

TEORÍA: RETRACTO DE DEFORMACIÓN FUERTE

X esp. top., $A \subset X$, $f : X \longrightarrow A$ cont. $f|_A = id$, f es una retracción de X en A, ó A es un retracto de X.

Si además f es homótopa(*) a $id_A \Longrightarrow f$ se dice RETRACCIÓN FUERTE y a A se le llama retracto de deformación fuerte de X.

Además, $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(A, a)$

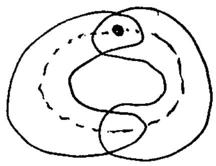
(*) $\left(\exists H : X \times [0,1] \longrightarrow X,\quad (\cdot, 0) \longmapsto id_X,\quad (\cdot, 1) \longmapsto f, \quad H(a,t) = a \quad \forall a \in A \right)$

su grupo fund. es el trivial

$\boxed{3.}$ Verdadero o falso:

i) A y D simplemente conexos con $A \cap D \neq \emptyset$, entonces $A \cup D$ también.

Falso.



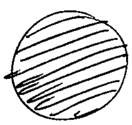
ii) Si X homeomorfo a la frontera de $[0,1] \times [0,1] \Rightarrow \Pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

Verdadero.
Usamos la retracción por modularización. También podemos saber que $\square \simeq \bigcirc$, y por lo tanto $\Pi_1(\square, x_0) \cong \Pi_1(\bigcirc, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

iii) Si $\Pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow X \simeq S^1$.

Falso. $\Pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, x_0) \cong \mathbb{Z}$ pero $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \not\simeq S^1$.

iv) Si A y D son retractos de def. fuerte de esp. homeomorfos, entonces A y D son homeomorfos.



$\mathbb{R}$

$B_{\mathbb{R}^2}(0,1) \xrightarrow{\text{retracto}} \bullet$

$\cancel{\mathbb{R}}$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{(como la proyección en } x)]{\text{retracto}} \mathbb{R}$

OTRA HOJA SOBRE HOMOTOPIAS

$\boxed{1.}$ Encontrar dos espacios que tengan el mismo grupo fundamental pero que no sean homeomorfos.

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ tienen el mismo grupo fundamental pero $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ (a $\mathbb{R}$ le quitas un punto y te quedan dos arcocomponentes, en $\mathbb{R}^2 \setminus f(p)$ sigue habiendo solo una).

$\boxed{3.}$ Halla los grupos fund. de:

a) $X_1 = \mathbb{R} \times S^1 \times \overbrace{\left(S^2 \setminus \{(0,0,1)\}\right)}^{\cong X_{1,3}}$

$\pi_1(X_1) \simeq \pi_1(\mathbb{R}, x_0) \times \pi_1(S^1, x_0) \times \pi_1(X_{1,3}, x_0) \cong \{1\} \times \mathbb{Z} \times \{1\} \cong \mathbb{Z}$

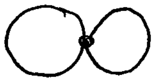
b) $X_2 = \{x^2+y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2 \implies \pi_1(X_2, x_0) \cong \{1\}$

c) $X_3 = \{x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \implies \pi_1(X_3, x_0) \cong \{1\}$

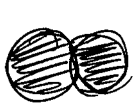
d) $X_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : -1 < y < 1\} \implies \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cong \mathbb{Z}$

e) $X_5 = \mathbb{R}^2 \times \underbrace{\left(S^2 \setminus \{PN\}\right)}_{\cong \mathbb{R}^2} \implies \pi_1(X_5, x_0) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^4, x_0) \cong \{1\}$

f) $X_6 = \mathbb{R}^4 \implies \pi_1(\mathbb{R}^4, x_0) \cong \{1\}$

g) $X_7 =$  $= \{(x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x+1)^2 + y^2 = 1\}$

$\pi_1(X_7, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \equiv$ "alfabeto de dos letras sin reglas de simplificación"

h) $X_8 =$  $= \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$

$\pi_1(X_8, x_0) \cong \{1\}$