UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, 2018-2019

Ejercicios 34 a 40

34. A. Sea M un subconjunto conexo de un espacio métrico $(X\,,d)$.

1. Demostrar que $M_0 = M \cup \{p\}$ es conexo en $(X\,,d)$ siempre que p es un punto de acumulación de M.
2. Demostrar que si $M \subset \Omega \subseteq \overline{M}$ entonces Ω es conexo en $(X\,,d)$.

B. Considérense en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos

$$L = \big\{\,(x,0)\;:\;-1 \le x \le 0\,\big\}, \qquad S = \left\{\,\left(x\,,\sin\frac{1}{x}\right)\;:\;0 < x \le 1\,\right\}.$$

1. Demostrar que L y S son conexos en $\mathbb{R}^2$.
2. Demostrar que
$$S_0 = S \cup \{(0\,,0)\} \qquad \text{es conexo en } \mathbb{R}^2.$$
3. Demostrar que $M = L \cup S$ es conexo en $\mathbb{R}^2$.
4. Demostrar que M no es arco-conexo.

35. A. Sea $(X\,,d)$ un espacio métrico.

1. Demostrar que son equivalentes:
   a. $(X\,,d)$ es conexo.
   b. Todo $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, verifica $\partial M \neq \emptyset$.
2. Para cada $p \in X$, sea C_p la componente conexa de X que contiene a p. Demostrar que C_p es un subconjunto cerrado en $(X\,,d)$.
   En particular, toda componente conexa de X es un subconjunto cerrado en $(X\,,d)$.

B. Sean Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$ y M una componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Demostrar que $\mathbb{R}^n \setminus M$ es conexo.

36. A. Considérese el espacio métrico $(\mathbb{Q}\,,|\cdot|)$ para calcular, para cada $q \in \mathbb{Q}$, la componente conexa que contiene a q.

B. Decimos que un espacio métrico $(X\,,d)$ es *localmente conexo en* $p \in X$ cuando para cada abierto A con $p \in A$ existe G, abierto y conexo con $p \in G \subset A$. El espacio $(X\;d)$ se dice *localmente conexo* cuando es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

1. Comprobar que el conjunto

$$M = \{ (0\,,y) \,:\, -1 \le y \le 1 \} \cup \Big\{ \big(x\,,\sin\frac{1}{x}\big) \,:\, 0 < x \le 1 \Big\}$$

no es localmente conexo en ninguno de sus puntos $(0,y)\,, -1 \le y \le 1$. Demostrar también que M es conexo.

2. Demostrar que si $(X\,,d\,)$ es localmente conexo entonces también es localmente conexo todo subconjunto abierto de X.

3. Demostrar que son equivalentes:

   a. $(X\,,d\,)$ es localmente conexo.

   b. Toda componente conexa de un abierto es abierta.

37. A. Demostrar que no existe ninguna función $f \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad:

Existe $p \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $D_{\mathbf{u}} f(p) > 0$ *para todo vector* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\,, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

B. Dar un ejemplo de una función $f \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpla:

Existe un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\,, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *tal que* $D_{\mathbf{u}} f(p) > 0$ *para todo punto* $p \in \mathbb{R}^n$.

38. Sea $f \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Demostrar que si

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\, Df(x)\, \boldsymbol{\xi} > 0 \quad \text{para todo punto } x \in \mathbb{R}^n \text{ y todo vector } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

entonces f es inyectiva en $\mathbb{R}^n$.

39. Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, abierto y convexo y sea $f \,:\, \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en Ω. Demostrar que son equivalentes:

1. f es convexa en Ω.
2. $(\mathrm{Hess} f)_p$ es es semidefinida positiva para todo $p \in \Omega$.

40. Decimos que una función $f \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase C^2, *es armónica en* $\mathbb{R}^n$ cuando

$$\Delta f(x) = 0 \qquad \text{en todo} \quad x \in \Omega\,.$$

Considérese la clase de matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ e invertibles que son de la forma

$$\mathbf{A} = \lambda\, \mathbf{B}\,, \qquad \text{con } \lambda \neq 0 \text{ y } \mathbf{B} \text{ ortogonal.} \tag{9}$$

Considérese también el cambio lineal de variables dado por

$$x = \mathbf{A} y\,, \qquad g(y) = f(x)\,.$$

Demostrar:

1. $$D^2 g(y) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\, D^2 f(x)\, \mathbf{A}\,.$$

2. Si la función $f(x)$ es armónica y $\mathbf{A}$ satisface (9), entonces $g(y)$ es armónica.

3. Si una matriz $\mathbf{A}$ es tal que para toda $f(x)$ armónica la correspondiente $g(y)$ también es armónica, entonces $\mathbf{A}$ satisface (9).