# ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 6: Espacio dual.

**1.** Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal definida por $T(p(x)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\, dt$. Calcula las coordenadas de $T$ respecto de la base dual de $\{1, x, x^2, x^3\}$.

**2.** Encuentra una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, respecto de la cual $v_1^*$ (el dual de $v_1$ respecto de $\mathcal{B}$) coincida con la aplicación lineal $f(x, y, z) = x - y$.

**3.** Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, 0, d)$$

(i) Encuentra bases de $\mathrm{Ker}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$. Comprueba la fórmula de la dimensión.

(ii) Sea $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ la base dual de $\{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ y $f^*$ la aplicación dual. Calcula $f^*(v_3^*)$.

(iii) Calcula la matriz de $f^*$ respecto de las bases canónicas.

(iv) Describir el núcleo de $f^*$ y el anulador de $\mathrm{Im}(f)$.

(v) Describir el anulador de $\mathrm{Ker}(f)$ y la imagen de $f^*$.

**4.** Sea $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(p(x)) = (p(0), p'(0))$. Calcula:

(i) La matriz de $f$ respecto de las bases canónicas y la de $f^*$ respecto de sus duales.

(ii) La matriz de $f$ respecto de las bases $\mathcal{B}_1 = \left\{1 + x, 1, x^2\right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1)\}$ y la de $f^*$ respecto de sus duales.

**5.** Sean $f : V \to W$ y $g : W \to T$ dos aplicaciones lineales.

(i) Demuestra que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(ii) Si $f$ es biyectiva, demuestra que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

(iii) Sea $M$ una matriz invertible de orden $n$. Demuestra que $(M^{-1})^t = (M^t)^{-1}$.

(iv) Demuestra que $\det f = \det f^*$.

**6.** Expresa cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^n$ como conjunto de soluciones de un sistema lineal adecuado.

(i) $V = \langle v_1 = (1, -1, 2)\,, v_2 = (2, 1, -1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$;

(ii) $E = \langle v_1 = (1, 1, 1, 3)\,, v_2 = (1, 1, 3, 2), v_3 = (1, 3, 2, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^4$;

(iii) $F = \langle v_1 = (3,1,1,1)\,, v_2 = (2,3,1,1), v_3 = (1,2,3,1)\rangle \subset \mathbb{R}^4$;

(iv) $E \cap F \subset \mathbb{R}^4$;

(v) $G = \langle v_1 = (1,1,1,1,2)\,, v_2 = (1,1,1,2,2), v_3 = (1,1,2,2,2)\rangle \subset \mathbb{R}^5$;

(vi) $H = \langle v_1 = (2,1,1,1,1)\,, v_2 = (2,2,1,1,1), v_3 = (2,2,2,1,1)\rangle \subset \mathbb{R}^5$;

(vii) $G \cap H \subset \mathbb{R}^5$.

$\boxed{1.}$ $T: \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad T \in (\mathbb{R}_3[x])^*$

$$T(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$$

Coordenadas de $T$ según base dual de $\{e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2,\ e_4 = x^3\}$

$$T = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \alpha_3 e_3^* + \alpha_4 e_4^* \qquad e_j^*(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j\neq k \end{cases}$$

$$T(e_k) = \alpha e_1^*(e_k) + \alpha_2 e_2^*(e_k) + \alpha_3 e_3^*(e_k) + \alpha_4 e_4^*(e_k)$$

Sólo sobrevive cuando $k = 1, 2, 3, 4$

$$T(e_k) = \alpha_k \underbrace{e_k^*(e_k)}_{1} = \alpha_k$$

$\alpha_1 = T(e_1) = \int_{-1}^{1} dx = 2$ ; $\qquad \alpha_3 = T(e_3) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$ ;

$\alpha_2 = T(e_2) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ ; $\qquad \alpha_4 = T(e_4) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$ ;

$\boxed{2.}$ En $\mathbb{R}^3$ una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $V_1^*$ coincida con la aplicación $f(x,y,z) = x - y$.

$$\boxed{V_1^* = f}$$

Entonces:

$f(V_1) = V_1^*(V_1)$ por el enunciado y $V_1^*(V_1) = 1$ por definición
$f(V_2) = V_1^*(V_2)$ " " " " $V_1^*(V_2) = 0$ " "
$f(V_3) = V_1^*(V_3)$ " " " " $V_1^*(V_3) = 0$ " "

También sabemos que $\{V_1, V_2, V_3\}$ son l. independientes

$f(V_2) = 0 \wedge f(V_3) = 0 \Rightarrow V_2, V_3 \in \operatorname{Ker} f \longleftarrow$ tiene $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

$V_2, V_3$ son base de $\operatorname{Ker} f \Rightarrow$ como $f(x,y,z) = x - y$ podemos escoger $V_2 = (1,1,0)$ y $V_3 = (0,0,1)$ como base de $\operatorname{Ker} f$.

$V_1 \notin \operatorname{Ker} f$. Si tomo $V_1 \notin \operatorname{Ker} f$, entonces $\{V_1, V_2, V_3\}$ son indep. (gratis)

Ponemos $\tilde{V}_1 = (3,0,0) \notin \operatorname{Ker} f$, entonces $f(\tilde{V}_1) = 3$. Para corregir ponemos $V_1 = \frac{\tilde{V}_1}{f(\tilde{V}_1)} \Rightarrow f(V_1) = 1$

# $\boxed{\text{HOJA 6}}$: ESPACIO DUAL

$\boxed{5.}$ $f: V \to W$ y $g: W \to T$ dos aplicaciones lineales

i) Demuestra que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & W \arrow[r, "g"] & T \end{tikzcd}$$

Demostración gráfica

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$$

$$\begin{tikzcd} V^* & W^* \arrow[l, "f^*"'] & T^* \arrow[l, "g^*"'] \arrow[ll, bend left, "f^* \circ g^*"] \end{tikzcd}$$

$$W^* \xrightarrow{f^*} V^* \qquad T^* \xrightarrow{g^*} W^*$$

$$f^*(\varphi)(v) = \varphi(f(v)) \qquad g^*(\psi)(w) = \psi(g(w))$$

$$(g \circ f)^*(\alpha) = f^*(g^*(\alpha)) \Rightarrow \left[(g \circ f)^*(\alpha)\right](v) = f^*(g^*(\alpha))(v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(g \circ f(v)) = g^*(\alpha)[f(v)] \Rightarrow \alpha(g(f(v))) = \alpha(g(f(v)))$$

$\boxed{3.}$ $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (*) $\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, 0, d)$

i) Bases de Kerf e Imf. Comprueba la fórmula de la dimensión

<u>Kerf:</u>

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0,0,0) \Rightarrow (a+b, 0, d) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>Imf:</u>

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = (1,0,0) \\ f(e_2) = (1,0,0) \\ f(e_3) = (0,0,0) \\ f(e_4) = (0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \{ w_1 = (1,0,0), w_2 = (0,0,1) \}$$

<u>Fórmula de las dimensiones</u>

$$\underset{4}{\underset{\parallel}{\dim M_2(\mathbb{R})}} = \underset{2}{\underset{\parallel}{\dim \operatorname{Ker} f}} + \underset{2}{\underset{\parallel}{\dim \operatorname{Im} f}}$$

ii) $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ base dual de $\{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ y $f^*$ la aplicación dual. Calcula $f^*(v_3^*)$.

$f^*(v_3^*)$ tiene sentido porque $f^*: (\mathbb{R}^3)^* \longrightarrow (M_2(\mathbb{R}))^*$

$f^*: (\mathbb{R}^3)^* \longrightarrow (M_2(\mathbb{R}))^*$

$v_3^* \in (\mathbb{R}_3)^* \Rightarrow f^*(v_3^*) \in (M_2(\mathbb{R}))^*$

$$[f^*(v_3^*)]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = v_3^*\left(f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = v_3^*((a+b, 0, d)) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = a+b \\ \lambda_2 = -d \\ \lambda_3 = d \end{array} \Rightarrow v_3^*((a+b, 0, d)) =$$

$$= v_3^*((a+b,0,0) + (-d,-d,0) + (d,d,d)) = \underline{\underline{d}}$$

$$[f^*(e_1^*)]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e_1^*\left(f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = e_1^*(a+b, 0, d) = a+b = (\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$[f^*(e_2^*)]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e_2^*\left(f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = e_2^*(a+b, 0, d) = 0$$

$$[f^*(e_3^*)]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e_3^*\left(f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = e_3^*(a+b, 0, d) = d$$

$$\text{Matriz de } f^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(f^*) = M(f)^t$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) Describir el núcleo de $f^*$ y el anulador de $\mathrm{Im}(f) \longrightarrow (\mathrm{Im}(f))^\circ$

$$\underline{\mathrm{Im} f} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=W_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=W_2} \right\rangle \Rightarrow (\mathrm{Im} f)^\circ = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* : \mathrm{Ker}\,\varphi \supset \mathrm{Im} f\}$$

$$\varphi = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \alpha_3 e_3^*$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \varphi(W_1) = \alpha_1 . 1 + \alpha_2 . 0 + \alpha_3 . 0 \\ 0 = \varphi(W_2) = \alpha_1 . 0 + \alpha_2 . 0 + \alpha_3 . 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array} \quad \alpha_2 \text{ libre}$$

Base : $(0, 1, 0) \Rightarrow \{e_2^*\}$ base de $(\mathrm{Im} f)^\circ$

$\mathrm{Ker} f^*$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \quad \mathrm{Ker} f^* : \text{Base } \{e_2^*\}$$

v) Descubrir el anulador de $\ker(f)$ y la imagen de $f^*$.

$$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Im} f^* = \langle \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*, \varepsilon_4^* \rangle$$

Sabemos que $\operatorname{Im} f^* = (\ker f)^\circ$

$\boxed{6.}$ Expresa como solución de un sistema de ecuaciones

i) $V = \{ v_1 = (1,-1,2),\ v_2 = (2,1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , $\operatorname{Im} f = V$

¿Por qué tenemos que calcular $V^\circ$?
las operaciones son funcionales

$$V^\circ = \{ \varphi \in (\mathbb{R}^3)^* : \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in V \}$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$$

$V^\circ = (\operatorname{Im} f)^\circ = \ker f^* \longrightarrow M(f^*) = M(f)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$ Gau

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dots$$

Solución $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ base de $\ker f^*$ (coordenadas según base canónic

$V \equiv$ soluciones de $\{ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \}$

2. ii) Si $f$ es biyectiva, demuestra que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$

Si $f$ es invertible: $(f^{-1} \circ f)^* = f^* \circ (f^{-1})^* = id^*$

$id_V : V \longrightarrow V$

$(id_{V^*}) : V^* \longrightarrow V^*$

$(id_V)^* (\varphi) = \varphi \circ id_V = \varphi$

$\Rightarrow (id_V)^* = id_{V^*}$

ESPACIO DUAL RESUMEN

$\bar{V}$ y $\bar{W}$ espacios vectoriales ; $f: \bar{V} \longrightarrow \bar{W}$ lineal

$\underbrace{L(V, W)}_{\downarrow} = \{ f: V \longrightarrow \bar{W} \text{ lineales} \}$ conjunto de aplicaciones lineales que van de $V$ a $\bar{W}$.

esto es otro espacio vectorial

Si $\dim \bar{V} = n$ y $\dim \bar{W} = m \Rightarrow L(\bar{V}, \bar{W}) \underset{\text{isomorfo}}{\cong} M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Es interesante mirar el caso en que $\bar{W} = \mathbb{R} \Rightarrow$

espacio llegada ; cuerpo $\mathbb{K}$

$\Rightarrow L(\bar{V}, \mathbb{R}) \cong M_{1\times n}(\mathbb{R}) \longleftarrow$ son vectores fila

$\dim \underbrace{L(\bar{V}, \mathbb{R})}_{\text{vectores fila}} = \dim \bar{V} \leftarrow$ vectores columna

Entones ESPACIO DUAL es: $\bar{V}^* \equiv L(\bar{V}, \mathbb{R}) \equiv$ conjunto de aplicacione que van de $\bar{V}$ al cuerpo

Los elementos de $\bar{V}$ se llaman vectores $v \in \bar{V} \rightarrow v = \sum \lambda_i v_i \cong \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Los elementos de $\bar{V}^*$ se llaman funcionales $\varphi \in \bar{V}^*$ $\quad \varphi(v) = \sum \lambda_i \underbrace{\varphi(v_i)}$

coordenadas de $\varphi$ según $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$

---

A) $v = \sum \lambda_i v_i \rightarrow \{v_i\}\ i = 1, \dots, n$ son base

una aplicación $\lambda_i : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$v \longmapsto \lambda_i(v)$

es linea!

pertenece a $V^*$!

B) Ecuaciones lineales. $\boxed{a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0} \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal $\Rightarrow$

Un plano en $\mathbb{R}^3$: $\{ax + by + cz = d\}$ $\quad \Rightarrow \varphi$ está en el esp. dual $(\mathbb{R}^n)^*$

Una recta en $\mathbb{R}^2$: $\{ax + by = 0\}$ $\rightarrow$ pasa origen $\quad$ en álgebra lineal $d = 0$ para que pase por el origen

Una recta en $\mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{matrix} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{matrix}\right.$ $\quad$ LAS ECUACIONES LINEALES SON SIEMPRE $\varphi(v) = 0$, $\varphi \in \bar{V}^*$ $(\Leftrightarrow v \in \operatorname{Ker}\varphi)$

$n = \dim \bar{V} = \overset{n-1}{\dim \operatorname{Ker}\varphi} + \dim \operatorname{Im}\varphi = n - 1$

# BASES DUALES

$\{v_j\}$ base en $V$ $\rightsquigarrow$ ¿cómo generar una base en $V^*$?

$\{v_j^*\}$ definidos por $v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

$$\varphi \in V^* \to \varphi(v) = \varphi\left(\sum \lambda_j v_j\right) = \sum \lambda_j \underbrace{\varphi(v_j)}_{\text{están fijos}}$$

Se saca de la manga:

$$\psi = \sum \varphi(v_j)\, v_j^*$$

$$\psi(v) = \sum_j \varphi(v_j)\, v_j^*\left(\sum_k \lambda_k v_k\right) = \sum_{j,k} \lambda_k \varphi(v_j)\, v_j^*(v_k) = \boxed{\sum_j \lambda_j \varphi(v_j)}$$

$$\boxed{\varphi = \sum \underbrace{\varphi(v_j)}_{\text{coordenadas de } \varphi} v_j^*}$$

Otra forma de verlo:

$$\varphi = \sum \alpha_j v_j^* \longrightarrow \varphi(v_k) = \sum \alpha_j v_j^*(v_k) = \alpha_k$$

---

$$M_{B\,C_{\mathbb{R}}}(\varphi) = \underbrace{\big(\varphi(v_1),\ \varphi(v_2), \dots,\ \varphi(v_n)\big)}_{\text{las coordenadas de } \varphi \text{ según la base dua}}$$

$f: V \longrightarrow W$

$f^*: W^* \longrightarrow V^*$

$\psi \in W^* \; (\psi(w) \in \mathbb{R})$

$\boxed{f^*(\psi) := \psi \circ f}$

$f^*(\psi) \in V^*$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f^*(\psi)"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R} \\ & W \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$$\left[f^*(\psi)\right](v) = \psi(f(v))$$

$$\boxed{M(f^*) = (M(f))^t}$$

---

$\dim V = n$
$\dim W = m$

$$f \sim \begin{pmatrix} \xleftrightarrow{\;n\;} \\ m \updownarrow \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\wr \\ W^* \\ \psi}}{(\longleftarrow m \longrightarrow)} \; \underset{\substack{\wr \\ f}}{\begin{pmatrix} \xleftrightarrow{\;n\;} \\ m \updownarrow \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\wr \\ V^* \\ \psi \circ f}}{(\longleftarrow n \longrightarrow)}$$

$$\underset{\substack{M(f^*) \\ \shortparallel \\ M(f)^t}}{\begin{pmatrix} \xleftrightarrow{\;m\;} \\ n \updownarrow \end{pmatrix}} \; \underset{\psi}{\begin{pmatrix} \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{pmatrix}} = \underset{\psi \circ f}{\begin{pmatrix} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{pmatrix}}$$

$\boxed{1.}$ Inventado profesor

$$\varphi : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p(x) \longmapsto p'(1)$$

Base canónica: $C = \{1, x, x^2, x^3\}$

¿Coordenadas de $\varphi$ respecto de la base dual?

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(1) = 0 \\ \varphi(x) = 1 \\ \varphi(x^2) = 2 \\ \varphi(x^3) = 3 \end{array}\right\}$$ coordenadas de $\varphi$ respecto de la base dual.

$C = \{v_1 = 1, \; v_2 = x, \; v_3 = x^2, \; v_4 = x^3\}$

$C^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*\}$

$v_1^*(1) = 1 \; , \; v_1^*(x) = v_1^*(x^2) = v_1^*(x^3) = 0$

$$\boxed{v_1^*(a + bx + cx^2 + dx^3) = a}$$

$$\boxed{v_2^*(a + bx + cx^2 + dx^3) = b}$$

$$\boxed{v_3^*(a + bx + cx^2 + dx^3) = c}$$

$$\boxed{v_4^*(a + bx + cx^2 + dx^3) = d}$$

$$\boxed{\varphi = 0 . v_1^* + 1 . v_2^* + 2 . v_3^* + 3 . v_4^*}$$

Inventado profesor

$V = \langle (a, b, c, d) \ , \ (a', b', c', d') \rangle \subset \mathbb{R}^4$

Escribir como solución de sistema de ecuaciones

$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$ Gauss

NOTA:

$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$ que se satisfagan para todo vector de $V \iff$ se satisfacen para $V_1, V_2$.

$$\begin{cases} \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0 \\ \alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \delta d' = 0 \end{cases}$$