Sección 2.1

---

1. Utilizar los iterantes de Picard para construir una aproximación numérica de la solución del problema de valor inicial

$$y'' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \tag{2.2}$$

Solución. Lo primero que hacemos es escribir el problema como un PVI para una EDO de primer orden en forma estándar. Para ello definimos $y^1 = y$, $y^2 = y'$, y se tiene que

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}' = f(x, y^1, y^2) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -y^1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}(0) = \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al aplicar el método de Euler a este problema obtenemos

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
y_1(x) &= \eta + \int_0^x f(s, y_0^1(s), y_0^2(s))\, ds = \eta + \int_0^x \begin{pmatrix} y_0^2(s) \\ -y_0^1(s) \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \\
y_2(x) &= \eta + \int_0^x f(s, y_1^1(s), y_1^2(s))\, ds = \eta + \int_0^x \begin{pmatrix} y_1^2(s) \\ -y_1^1(s) \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Iterando el argumento llegamos a

$$y_{2n}(x) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}, \quad y_{2n+1}(x) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{pmatrix}.$$

Pasando al límite (que es uniforme sobre compactos) obtenemos que

$$\begin{aligned} y(x) &= y^1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sen} x, \\ y'(x) &= y^2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x, \end{aligned}$$

que es, efectivamente, la solución de nuestro problema.

---

2. Si $f \in C^p([a,b] \times \mathbb{R}^d)$, podemos encontrar una solución aproximada del problema de valor inicial (PVI) utilizando la fórmula de Taylor de orden p alrededor de $x = a$, $y(x) \approx \sum_{j=0}^{p} y^{(j)}(a) \frac{(x-a)^j}{j!}$. Los valores de las derivadas $y^{(j)}(a)$ se pueden calcular derivando la EDO y usando la condición inicial. Utilizar este procedimiento para aproximar la solución del problema

$$y'(x) = -y^2(x),\ 0 \leq x \leq 1/2, \qquad y(0) = 1,$$

por un polinomio de orden p y estimar el error cometido.

Solución. Usando la EDO y la condición inicial obtenemos

$$\begin{aligned} &y'(x) = -y^2(x), && y'(0) = -1!, \\ &y''(x) = -2y(x)y'(x), && y''(0) = 2!, \\ &y'''(x) = -2y(x)y''(x) - 2(y'(x))^2, && y'''(0) = -3!, \\ &y^{(4)}(x) = -2y(x)y'''(x) - 6y'(x)y''(x), && y^{(4)}(0) = 4!, \\ &y^{(5)}(x) = -2y(x)y^{(4)}(x) - 8y'(x)y'''(x) - 6(y''(x))^2, && y^{(5)}(0) = -5!. \end{aligned}$$

Si continuamos derivando, observaremos que $y^{(k)}(0) = (-1)^k k!$[1]. Por consiguiente, este método dice, acertadamente, que la solución viene

[1]Ejercicio: demostrarlo por inducción. *Sugerencia.* Usar la fórmula de Leibniz para la derivación de un producto.

dada por

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}.$$

El error cometido al aproximar por $y_p(x) = \sum_{k=0}^{p} (-x)^k$ es

$$\texttt{error} = \left| \frac{1}{1+x} - y_p(x) \right| = \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} (-x)^k \right| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |x|^k \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p}.$$

---

3. *Método de las series de potencias*[2]. Si la solución y de una EDO se puede escribir como una serie de potencias, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se puede intentar usar la ecuación para obtener cada valor a_n a partir de los anteriores, $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Los primeros valores, necesarios para arrancar el procedimiento, se extraen de las condiciones iniciales. Usar este método para resolver el problema (2.2).

Solución. Supongamos que la solución se puede escribir como $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Si se pudiera derivar término a término dos veces, entonces

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Usando la ecuación tenemos que

$$0 = y''(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n \big) x^n,$$

de donde se obtiene la recurrencia

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0.$$

[2]Este método, introducido por Newton en su “Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum” (1671), es el primero que se usó para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ahora es fácil ver que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!}, \qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!}.$$

De aquí deducimos que

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Si ahora imponemos las condiciones iniciales obtenemos

$$0 = y(0) = a_0, \qquad 1 = y'(0) = a_1.$$

Concluimos por tanto que la solución es $y(x) = \operatorname{sen} x$.

---

4. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia[3], definidas todas ellas para $n \geq 0$:

   (a) $y_{n+1} - y_n = 2n + 3$, $y_0 = 1$;

   (b) $y_{n+1} - y_n = 3n^2 - n$, $y_0 = 3$;

   (c) $y_{n+1} - 2y_n = 5$, $y_0 = 1$;

   (d) $y_{n+1} - 2y_n = 2^n$, $y_0 = 1$;

   (e) $y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 3^n$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$;

   (f) $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = 7$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$;

   (g) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

[3] Para repasar todo lo que tiene que ver con este tema recomiendo leer el capítulo 8 del libro “Diez lecciones de cálculo numérico”, J. M. Sanz-Serna, Universidad de Valladolid. Secretariado de publicaciones e intercambio científico, 2010 (segunda edición).

Solución. En todos los casos se trata de una recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes. La solución general vendrá dada como la solución general de la recurrencia homogénea asociada, más una solución particular de la recurrencia completa.

(a) La recurrencia homogénea asociada, $y_{n+1} - y_n = 0$, tiene como polinomio característico $\lambda - 1$, cuya raíz es $\lambda = 1$. Las soluciones de la homogénea son por lo tanto las constantes. En cuanto a la solución particular de la recurrencia completa, intentamos una solución de la forma $y_n^p = n^2 + bn$ (no tiene sentido añadir un término de orden 0, ya que las constantes son soluciones de la ecuación homogénea). Imponiendo que sea solución obtenemos que

$$2n + 3 = y_{n+1}^p - y_n^p = (n+1)^2 + b(n+1) - (n^2 + bn) = 2n + (1+b),$$

y por tanto $b = 2$. Así pues, la solución general de la recurrencia completa es

$$y_n = c + n^2 + 2n.$$

La constante c se determina ahora usando el valor de arranque, $1 = y_0 = c$. En resumen, la solución pedida es

$$y_n = 1 + n^2 + 2n = (n+1)^2.$$

(b) La recurrencia homogénea asociada es la misma que la del apartado (a), y sus soluciones son las constantes. Para la solución particular de la recurrencia completa ensayamos $y_n^p = n^3 + an^2 + bn$. Si es solución,

$$\begin{aligned} 3n^2 - n &= y_{n+1}^p - y_n^p \\ &= (n+1)^3 + a(n+1)^2 + b(n+1) - (n^3 + an^2 + bn) \\ &= 3n^2 + (3+2a)n + (1+a+b), \end{aligned}$$

y por tanto $3 + 2a = 1$ y $1 + a + b = 0$. Por consiguiente, $a = -1$ y $b = 0$, y la solución general de la recurrencia completa es

$$y_n = c + n^3 - n^2.$$

Para determinar la constante c usamos el valor de arranque, $3 = y_0 = c$. En resumen, la solución pedida es

$$y_n = 3 + n^3 - n^2.$$

(c) En este caso el polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada, $\lambda - 2$, tiene raíz $\lambda = 2$. La solución general de la homogénea es por tanto $c \cdot 2^n$. En cuanto a la solución particular de la recurrencia completa, intentamos $y_n^p = C$. Se tiene que

$$5 = y_{n+1}^p - 2y_n^p = C - 2C = -C.$$

Concluimos que la solución general de la recurrencia completa es $y_n = c \cdot 2^n - 5$. Usando ahora el valor de arranque, $1 = y_0 = c - 5$, llegamos finalmente a la solución pedida,

$$y_n = 6 \cdot 2^n - 5.$$

(d) La recurrencia homogénea asociada es la misma que la del apartado (c). En cuanto a la solución particular de la recurrencia completa, ensayamos $y_n^p = Cn2^n$ (nótese que 2^n es solución de la ecuación homogénea). Se tiene que

$$2^n = y_{n+1}^p - 2y_n^p = C(n+1)2^{n+1} - 2Cn2^n = 2C2^n,$$

de donde $C = 1/2$. La solución general de la recurrencia completa es entonces $y_n = c \cdot 2^n + n2^{n-1}$. Usando el dato inicial, $1 = y_0 = c$, obtenemos finalmente que la solución pedida es

$$y_n = 2^n + n2^{n-1}.$$

(e) El polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada es $\lambda^2 + 3\lambda + 2$, cuyas raíces son -1 y -2. La solución general de la homogénea es por tanto $a(-1)^n + b(-2)^n$. En cuanto a una solución particular de la completa, ensayamos $y_n^p = C3^n$. Imponiendo que sea solución,

$$3^n = y_{n+2}^p + 3y_{n+1}^p + 2y_n^p = C3^n(9 + 9 + 2),$$

de donde $C = 1/20$. La solución general de la recurrencia completa es entonces

$$y_n = a(-1)^n + b(-2)^n + \frac{3^n}{20}.$$

Usando los valores de arranque,

$$0 = y_0 = a + b + \frac{1}{20}, \qquad 1 = y_1 = -a - 2b + \frac{3}{20},$$

concluimos que $a = 3/4$, $b = -4/5$.

(f) El polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada es $\lambda^2 + 4\lambda + 4$, cuya única raíz (doble) es -4. La solución general de la homogénea es por tanto $(-4)^n(a + bn)$. Como solución particular de la completa ensayamos $y_n^p = C$. Imponiendo que sea solución,

$$7 = y_{n+2}^p + 4y_{n+1}^p + 4y_n^p = 9C,$$

y por tanto $C = 7/9$. La solución general de la recurrencia completa es entonces

$$y_n = (-4)^n(a + bn) + \frac{7}{9}.$$

Usando los valores de arranque,

$$1 = y_0 = a + \frac{7}{9}, \qquad 2 = y_1 = -4(a + b) + \frac{7}{9},$$

concluimos que $a = 2/9$, $b = -13/18$.

(g) El polinomio característico de la recurrencia homogénea asociada es $\lambda^2 - 6\lambda + 9$, cuya única raíz (doble) es 3. La solución general de la homogénea es por tanto $3^n(a + bn)$. Como solución particular de la completa ensayamos $y_n^p = c2^n + dn^2 3^n$ (nótese que 3^n y $n3^n$ son soluciones de la recurrencia homogénea asociada). Imponiendo que sea solución,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n &= y_{n+2}^p - 6y_{n+1}^p + 9y_n^p \\ &= c2^n(4 - 12 + 9) + d3^n\big(9(n+2)^2 - 18(n+1)^2 + 9n^2\big) \\ &= c2^n + 18d3^n, \end{aligned}$$

de donde $c = 3$, $d = 7/18$. La solución general de la recurrencia completa es entonces

$$y_n = 3^n(a + bn + \frac{7}{18}n^2) + 3 \cdot 2^n.$$

Usando los valores de arranque,

$$1 = y_0 = a + 3, \qquad 4 = y_1 = 3(a + b + \frac{7}{18}) + 6,$$

concluimos que $a = -2$, $b = 17/18$.

---

5. El número a_n de euros de activo de una compañía se incrementa cada año cinco veces lo que se incrementó el año anterior. Si $a_0 = 3$ y $a_1 = 7$, calcular a_n.

Solución. De acuerdo con el enunciado, se tiene que

$$a_{n+1} - a_n = 5(a_n - a_{n-1}),$$

es decir, a_n es solución de la recurrencia lineal, homogénea, con coeficientes constantes

$$a_{n+1} - 6a_n + 5a_{n-1} = 0.$$

El polinomio característico de la recurrencia es $\lambda^2 - 6\lambda + 5$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Por consiguiente, la solución general de la recurrencia es $a_n = a \cdot 5^n + b$. Para determinar las constantes usamos los valores de arranque que nos han proporcionado, gracias a los cuales obtenemos que

$$3 = a_0 = a + b, \qquad 7 = a_1 = 5a + b.$$

Por lo tanto, $a = 1$ y $b = 2$, y llegamos finalmente a la fórmula

$$a_n = 5^n + 2.$$

Sección 2.2

---

1. Aplicamos el método de Euler con paso fijo $h = 1/N$ al PVI $y' = y$ en $[0, 1]$, $y(0) = 1$. Como valor de arranque tomamos $y_0 = 1$. Calcular la solución numérica, $\{y_n\}_{n=0}^N$ y demostrar que existe una constante C tal que $|y(x_n) - y_n| \leq Ch$.

Solución. La solución del problema es $y(x) = \mathrm{e}^x$, y la solución numérica $y_n = (1 + h)^n$. Para estimar la diferencia en los puntos de la malla usaremos los desarrollos de Taylor

$$\begin{aligned} &\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2(1+\xi)^2}, && 0 < \xi < h \leq 1, \\ &\mathrm{e}^{-x} = 1 - \mathrm{e}^{-\eta} x, && 0 < \eta < x. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$|y(x_n) - y_n| = |\mathrm{e}^{nh} - \mathrm{e}^{n\log(1+h)}| = \mathrm{e}^{nh}\left|1 - \mathrm{e}^{-\frac{nh^2}{2(1+\xi)^2}}\right| = \mathrm{e}^{nh}\mathrm{e}^{-\eta}\frac{nh^2}{2(1+\xi)^2}.$$

Dado que $nh \leq Nh = 1$, concluimos que $|y(x_n) - y_n| \leq \mathrm{e}h/2$.

---

2. Consideramos el PVI $y'' + y = 0$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Escribirlo como un problema de primer orden, y aplicarle entonces el método de Euler con paso fijo $h = 1/N$, suponiendo que no se comete ningún error en los valores de arranque. Demostrar que el máximo error cometido, $\max\limits_{n=0,\dots,N} |y(x_n) - y_n|$, es menor o igual que Ch para alguna constante C.

Solución. Sea $u = (u^1, u^2)^T$, con $u^1 = y$, $u^2 = y$. Se tiene que u es solución del PVI

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} u, \quad x \in [0, 1], \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución por el método de Euler satisface la recurrencia $u_{n+1} = (I+hA)u_n$, cuya solución es $u_n = (I+hA)^n u_0$. Para calcular la potencia n-ésima de $I+hA$ conviene diagonalizar esta matriz. Un sencillo cálculo muestra que los autovalores son $\lambda_\pm = 1 \pm \mathrm{i}h$, con autovectores asociados $v_\pm = (1, \pm\mathrm{i})^T$. Por consiguiente,

$$I + hA = P \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} P^{-1}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Así pues,

$$u_n = P \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} P^{-1} u_0.$$

Tomando valores de arranque exactos, $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} u_n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i}h)^n & 0 \\ 0 & (1-\mathrm{i}h)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{(1+\mathrm{i}h)^n + (1-\mathrm{i}h)^n}{2} \\ \mathrm{i}\dfrac{(1+\mathrm{i}h)^n - (1-\mathrm{i}h)^n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así,

$$y_n = u_n^1 = \frac{(1+\mathrm{i}h)^n + (1-\mathrm{i}h)^n}{2}.$$

En cuanto a la solución teórica, es fácil ver que $y(x) = \cos(x)$, y por tanto que $y(x_n) = \cos(nh) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}nh} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nh})/2$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |y(x_n) - y_n| &= \left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nh} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nh}}{2} - \frac{(1+\mathrm{i}h)^n + (1-\mathrm{i}h)^n}{2} \right| \\ &\le \left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nh} - \mathrm{e}^{n\log(1+\mathrm{i}h)}}{2} \right| + \left| \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nh} - \mathrm{e}^{n\log(1-\mathrm{i}h)}}{2} \right|. \end{aligned}$$

Llegados a este punto, usamos que

$$\log(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} z^j}{j} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1.$$

Así pues,

$$\log(1 \pm \mathrm{i}h) = \pm\mathrm{i}h + g_\pm(h), \qquad g_\pm(h) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}(\pm\mathrm{i}h)^j}{j} \text{ si } h < 1.$$

Nótese que

$$|g_\pm(h)| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{h^j}{j} \leq h^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_0^j}{j+2} = Ch^2 \text{ para todo } h \leq h_0 < 1.$$

Se tiene así que

$$\begin{aligned} |y(x_n) - y_n| &= \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}nh}\right|}{2} \left|1 - \mathrm{e}^{ng_+(h)}\right| + \frac{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nh}\right|}{2} \left|1 - \mathrm{e}^{ng_-(h)}\right| \\ &= \left|1 - \mathrm{e}^{ng_+(h)}\right| + \left|1 - \mathrm{e}^{ng_-(h)}\right|. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta ahora que

$$\mathrm{e}^z - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \text{ para todo } z \in \mathbb{C},$$

tenemos que, para todo $h \leq h_0 < 1$,

$$\begin{aligned} \left|1 - \mathrm{e}^{ng_\pm(h)}\right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|ng_\pm(h)|^j}{j!} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|nCh^2|^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\widehat{C}h|^j}{j!} \\ &\leq \widehat{C}h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\widehat{C}h_0|^j}{(j+1)!} = \widetilde{C}h, \end{aligned}$$

llegando finalmente al resultado deseado,

$$|y(x_n) - y_n| \leq Ch \quad \text{para todo } h \leq h_0 < 1.$$

---

3. Consideramos el problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y(x))$, $x \in [a, b]$, $y(a) = \eta$.

   (a) Supongamos que existe un vector columna c tal que $c^T f(x, y) = 0$. Demostrar que la solución del problema satisface la *ley de conservación lineal* $c^T y(x) = c^T \eta$ para todo $x \in [a, b]$.

(b) Demostrar que las soluciones obtenidas al aplicar el método de Euler a este PVI también satisfacen la misma ley de conservación lineal, $c^T y_n = c^T y_0$, $n = 0, \dots, N$.

Solución. (a) Usando la EDO se tiene que

$$\frac{d}{dx}(c^T y)(x) = c^T y'(x) = c^T f(x, y(x)) = 0.$$

Así pues, $c^T y(x) = c^T y(a) = c^T \eta$ para todo $x \in [a, b]$.

(b) Usando la recurrencia de Euler obtenemos que

$$c^T y_{n+1} = c^T y_n + h c^T f(x_n, y_n) = c^T y_n, \qquad n = 0, \dots, N-1,$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado.

Sección 2.3

1. Sea y la solución del problema (PVI) y sea y^I la función continua lineal a trozos que pasa por los puntos (x_n, y_n), $n = 0, \dots, N$, donde $\{y_n\}$ es una solución numérica del problema. Una medida alternativa del error cometido viene dada por $\max_{a \le x \le b} \|y(x) - y^I(x)\|_\infty$. Hallar una cota para esta cantidad en términos de $\max_{0 \le n \le N} \|y(x_n) - y_n\|$ y de h, suponiendo que $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^d)$.

Solución. Antes de empezar, conviene que repasemos la fórmula para el error de interpolación lineal con datos aproximados.

Supongamos que no conocemos $f(x_0)$ y $f(x_1)$ exactamente, sino sólo de forma aproximada, $f(x_0) = f_0 + \varepsilon_0$, $f(x_1) = f_1 + \varepsilon_1$. El error que se comete al aproximar $f(x)$ por la recta que interpola los datos aproximados f_0, f_1, es

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x) &= f(x) - \frac{(x_1 - x)f_0 + (x - x_0)f_1}{x_1 - x_0} \\ &= \underbrace{f(x) - \frac{(x_1 - x)f(x_0) + (x - x_0)f(x_1)}{x_1 - x_0}}_{E(x)} + \underbrace{\frac{(x_1 - x)\varepsilon_0 + (x - x_0)\varepsilon_1}{x_1 - x_0}}_{R(x)}.\end{aligned}$$

Si $x \in [x_0, x_1]$, el error de interpolación con datos exactos viene dado por

$$E(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\xi), \qquad \xi \in [x_0, x_1].$$

En cuanto al “error de redondeo”,

$$R(x) = \frac{(x_1 - x)\varepsilon_0 + (x - x_0)\varepsilon_1}{x_1 - x_0},$$

se trata de una función lineal, que alcanza su máximo en $[x_0, x_1]$ en uno de los extremos. Por consiguiente,

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |R(x)| = \max\{|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|\}.$$

Utilizamos esto ahora para estimar el error en la resolución del PVI. Se tiene que

$$\max_{x\in[x_n,x_{n+1}]} \|y(x) - y^I(x)\|_\infty \leq \max_{x\in[x_n,x_{n+1}]} |E(x)| + \max_{x\in[x_n,x_{n+1}]} |R(x)| =$$

$$\leq \frac{h^2}{2} \max_{x\in[x_n,x_{n+1}]} \|y''(x)\| + \max\{\|y(x_n) - y_n\|, \|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\|\}.$$

Concluimos que

$$\max_{a\leq x\leq b} \|y(x) - y^I(x)\|_\infty \leq \frac{h^2}{2} \max_{x\in[a,b]} \|y''(x)\| + \max_{0\leq n\leq N} \|y(x_n) - y_n\|.$$

---

2. Demostrar la fórmula (2.8).

Solución. La demostramos por inducción.

Para $n = 0$ la fórmula dice simplemente que $\|y(x_0)-y_0\| \leq \|y(x_0)-y_0\|$, lo que es trivialmente cierto.

Supongamos que la fórmula es cierta para n. Queremos ver que entonces también es cierta para $n + 1$. Para comprobarlo, partimos de la desigualdad ya demostrada

$$\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq (1 + Lh)\|y(x_n) - y_n\| + \max_{0\leq n\leq N-1} \|R_n\|.$$

Dado que $1 + Lh \leq \mathrm{e}^{Lh}$ y que $1 \leq \mathrm{e}^{L(x_{n+1}-x_0)}$, se tiene entonces que

$$\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq \mathrm{e}^{Lh}\|y(x_n) - y_n\| + \mathrm{e}^{L(x_{n+1}-x_0)}h \max_{0\leq n\leq N-1} \frac{\|R_n\|}{h}.$$

Usando la hipótesis de inducción se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
&\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \\
&\leq \mathrm{e}^{Lh+L(x_n-x_0)}\|y(x_0) - y_0\| + \mathrm{e}^{L(x_{n+1}-x_0)}(h + x_n - x_0) \max_{0\leq n\leq N-1} \frac{\|R_n\|}{h} \\
&= \mathrm{e}^{L(x_{n+1}-x_0)}\|y(x_0) - y_0\| + \mathrm{e}^{L(x_{n+1}-x_0)}(x_{n+1} - x_0) \max_{0\leq n\leq N-1} \frac{\|R_n\|}{h},
\end{aligned}$$

es decir, se tiene la estimación para $n + 1$.

---

3. Demostrar que la convergencia del método de Euler, aplicado a un problema "de cuadratura", $y'(x) = f(x)$, implica la convergencia de las sumas de Riemann $\sum_{n=0}^{N-1} hf(a + nh)$ cuando h tiende a cero al valor de la integral $\int_a^b f(x)\, dx$.

Solución. La función $A(x) = \int_a^x f(s)\, ds$ es solución del PVI de cuadratura $A'(x) = f(x)$, $A(a) = 0$. El método de Euler aplicado a este problema con malla $x_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$, $h = (b - a)/N$, produce la recurrencia

$$A_{n+1} = A_n + hf(x_n), \quad n = 0, \ldots, N, \qquad A_0 = 0,$$

cuya solución es $A_n = h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$. Usando ahora la convergencia del método de Euler concluimos que la cantidad

$$\left| \int_a^b f(s)\, ds - h \sum_{j=0}^{N-1} f(a + jh) \right| = |A(x_N) - A_N|$$

tiende a 0 cuando h tiende a cero.

Sección 2.4

---

1. Consideramos la ecuación escalar $y' = \arctan y$. Encontrar una cota para y'' e y''' en el intervalo $[0,1]$ sin hallar y explícitamente.

Solución. Derivando la ecuación obtenemos que $y'' = \frac{y'}{1+y^2}$. Así pues, $|y''| \le |y'| \le |\arctan y| \le \pi/2$.

Para estimar y''', derivamos nuevamente la ecuación. Se obtiene que

$$y''' = -\frac{2y(y')^2}{(1+y^2)^2} + \frac{y''}{1+y^2}.$$

Usamos ahora que $2|y| \le 1 + y^2$ para llegar a

$$|y'''| = \frac{2|y|(y')^2}{(1+y^2)^2} + \frac{|y''|}{1+y^2} \le \frac{(y')^2 + |y''|}{1+y^2} \le (y')^2 + |y''| \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}.$$

---

2. Demostrar las siguientes identidades:

   (a) $C \cdot O(h^k) = O(h^k)$ para cualquier constante C;

   (b) $O(h^k) \pm O(h^k) = O(h^k)$;

   (c) $O(h^k) + O(h^m) = O(h^{\text{mín}(k,m)})$;

   (d) $O(h^k) \cdot O(h^m) = O(h^{k+m})$;

   (e) $\int_0^h O(t^k)\, dt = O(h^{k+1})$;

   (f) $\dfrac{1}{1 + O(h^k)} = 1 + O(h^k)$.

Solución. (a) Se trata de ver que si $f(h) = O(h^k)$, entonces $Cf(h) = O(h^k)$. En efecto, por ser $f(h) = O(h^k)$, se tiene que existen constantes K y h_0 tales que $|f(h)| \le Kh^k$ para todo $h < h_0$. Por consiguiente, $|Cf(h)| \le CKh^k = \widetilde{K}h^k$ parat todo $h < h_0$, y por tanto $Cf(h) = O(h^k)$.

(b) Queremos ver que si $|f_1(h)| \leq C_1 h^k$ para todo $h < h_1$ y $|f_2(h)| \leq C_2 h^k$ para todo $h < h_2$, entonces existen constantes C y h_0 tales que $|(f_1 \pm f_2)(h)| \leq C h^k$ para todo $h < h_0$. Esto se demuestra trivialmente usando la desigualdad triangular y tomando $C = C_1 + C_2$ y $h_0 = \text{mín}\{h_1, h_2\}$.

(c) Podemos suponer que $h < 1$, lo que implica que $h^k, h^m \leq h^{\text{mín}(k,m)}$. Por consiguiente, si $|f_1(h)| \leq C_1 h^k$ para todo $h < h_1$ y $|f_2(h)| \leq C_2 h^m$ para todo $h < h_2$, se tiene que para todo $h < \text{mín}\{h_1, h_2, 1\}$ se verifica que

$$|(f_1 + f_2)(h)| \leq |f_1(h)| + |f_2(h)| \leq (C_1 + C_2) h^{\text{mín}(k,m)}.$$

(d) Nuevamente suponemos que $|f_1(h)| \leq C_1 h^k$ para todo $h < h_1$ y $|f_2(h)| \leq C_2 h^m$ para todo $h < h_2$. Se tiene entonces que

$$|(f_1 f_2)(h)| = |f_1(h)| \cdot |f_2(h)| \leq C_1 C_2 h^{k+m} \quad \text{para todo } h < \text{mín}\{h_1, h_2\}.$$

(e) Suponemos que $|f(h)| \leq C h^k$ para todo $h < h_0$. Por lo tanto

$$\left| \int_0^h f(t)\, dt \right| \leq \int_0^h |f(t)|\, dt \leq C \int_0^h t^k\, dt = C \frac{h^{k+1}}{k+1}.$$

(f) Suponemos una vez más que $|f(h)| \leq C h^k$ para todo $h < h_0$. Podemos suponer también que h_0 es tal que $C h_0^k \leq 1/2$, de tal forma que $|f(h)| \leq 1/2$ y $|1 + f(h)| \geq \big|1 - |f(h)|\big| \geq 1/2$. Ahora bien,

$$\frac{1}{1 + f(h)} = \frac{1 + f(h)}{1 + f(h)} - \frac{f(h)}{1 + f(h)},$$

y por otra parte

$$\left| \frac{f(h)}{1 + f(h)} \right| = \frac{|f(h)|}{|1 + f(h)|} \leq 2 C h^k,$$

con lo que se tiene el resultado deseado.

---

3. Sean $g_1(h) = 1 - h^2 + O(h^4)$ y $g_2(h) = 3 + h + O(h^2)$. Encontrar el mayor entero k tal que $g_1(h) g_2(h) = 3 + O(h^k)$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} &g_1(h)g_2(h) \\ &\quad = (1-h^2)(3+h) + (1-h^2)O(h^2) + O(h^4)(3+h) + O(h^4)O(h^2) \\ &\quad = 3 + h - 3h^2 - h^3 + O(h^2) = 3 + h + O(h^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_1(h)g_2(h) - 3 = O(h)$, pero no es cierto que $g_1(h) \cdot g_2(h) - 3 = O(h^k)$ para ningún k entero mayor que 1.

---

4. Calcular la solución teórica del problema de valor inicial

$$y'(x) = \text{mín}(y(x), 2), \quad 0 \le x \le 2, \qquad y(0) = 1,$$

y aproximarla mediante el método de Euler. Comprobar que la solución numérica converge a la teórica. ¿Es la convergencia de orden 1?

Solución. Se ve fácilmente que la solución teórica es

$$y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & 0 \le x \le \log 2, \\ 2(x - \log 2) + 2, & \log 2 \le x \le 2. \end{cases}$$

En cuanto a la solución numérica, está dada por

$$y_n = \begin{cases} (1+h)^n, & 0 \le n \le \bar{n}, \\ (1+h)^{\bar{n}} + (n - \bar{n})2h, & \bar{n} \le n \le N, \end{cases}$$

siendo $\bar{n}$ el primer valor de n para el cual $(1+h)^n \ge 2$, es decir

$$\bar{n} = \left\lceil \frac{\log 2}{\log(1+h)} \right\rceil.$$

A continuación se muestra un diagrama de eficiencia para las soluciones n

El lado derecho de la ecuación, $f(x,y) = \text{máx}\{y, 2\}$, es continuo y Lipschitz con respecto a y. Por tanto sabemos que las soluciones numéricas convergen a la teórica. Sin embargo, f no es C^1, por lo que no tenemos garantizado que la convergencia sea de orden 1. Sin embargo, veremos que si tiene este orden.

Si $n < \bar{n}$ y $x_n \leq \log 2$, la acotación deseada es consecuencia de la convergencia de orden 1 del método de Euler para el problema $y' = y$, $y(0) = 1$.

Para tratar los casos restantes observamos en primer lugar que

$$\begin{aligned}
\bar{n}h &= \log 2 \frac{h}{\log(1+h)} + h\left(\left\lceil \frac{\log 2}{\log(1+h)} \right\rceil - \frac{\log 2}{\log(1+h)}\right) \\
&= \log 2 + g(h),
\end{aligned}$$

con $0 < g(h) \leq Ch$ para una cierta constante $C > 0$. Esto es consecuencia directa de los desarrollos de Taylor de $\log(1+h)$ hasta segundo orden y de $1/(1-x)$ hasta primer orden.

Para $n \geq \bar{n}$, se tiene que $x_n = nh \geq \bar{n}h > log2$, y por tanto

$$\begin{aligned}
y(x_n) - y_n &= 2(x_n - \log 2) + 2 - (1+h)^{\bar{n}} - (n - \bar{n})2h \\
&= -2\log 2 + 2 - (1+h)^{\bar{n}} + \bar{n}2h.
\end{aligned}$$

Usando ahora que $\bar{n}h = \log 2 + O(h)$, y el desarrollo de $\log(1+h)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(1+h)^{\bar{n}} &= \mathrm{e}^{\bar{n}\log(1+h)} = \mathrm{e}^{\bar{n}h + \bar{n}O(h^2)} = \mathrm{e}^{\log 2 + O(h)} \\
&= 2\mathrm{e}^{O(h)} = 2(1 + O(h)) = 2 + O(h).
\end{aligned}$$

Concluimos que $y(x_n) - y_n = O(h)$ también en este caso.

Nos queda comprobar aquellos casos en que $n < \bar{n}$ y $x_n > \log 2$. En esta situación,

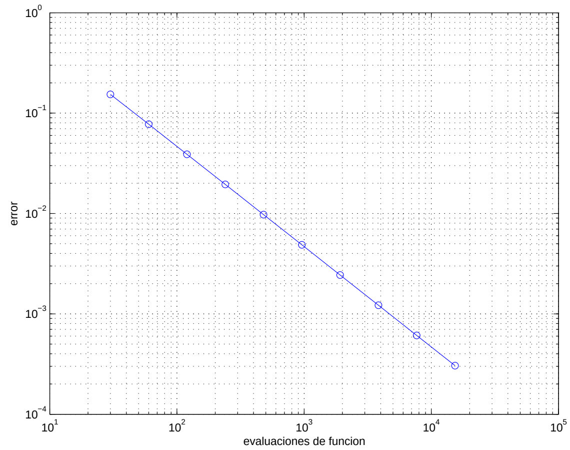
$$y(x_n) - y_n = 2(x_n - \log 2) + 2 - (1+h)^n.$$

Por otra parte,

$$\log 2 < x_n = nh < \bar{n}h = \log 2 + O(h),$$

lo que demuestra que $x_n = \log 2 + O(h)$. Razonando como en el caso anterior, se tiene que $(1+h)^n = 2+O(h)$, y obtenemos finalmente que también en este caso $y(x_n) - y_n = O(h)$.

Podemos ilustrar este resultado con el siguiente diagrama de eficiencia para el método de Euler aplicado a este problema.



Se ve claramente que el orden empírico es, como debe, 1.

---

5. Consideramos el problema de valor inicial $y'(x) = x(\operatorname{sen} y(x))^2$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 1$. Si se resuelve por el método de Euler con $y_0 = 1$, ¿qué valor de h habrá que tomar para garantizar un error menor que 10^{-3}?

Solución. La fórmula para el error en el método de Euler (2.9) nos dice en este caso que

$$|y(x_n) - y_n| \leq \mathrm{e}^L Ch, \qquad C = \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} |y''(x)|,$$

siendo L una constante de Lipschitz para $f(x,y) = x(\operatorname{sen} y)^2$ respecto de la variable y.

Comenzamos obteniendo una cota para la constante C. Por un lado tenemos que $|y'(x)| \leq |x| \leq 1$ para $x \in [0,1]$. Por otra parte, derivando la ecuación obtenemos que

$$y''(x) = (\operatorname{sen} y(x))^2 + 2x \operatorname{sen} y(x) \cos y(x) y'(x).$$

Por consiguiente, $|y''(x)| \leq 1 + 2|x|\,|y'(x)| \leq 3$ para $x \in [0,1]$.

Pasamos ahora al cálculo de L. Por el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\hat{y})| &= |x|\,|(\operatorname{sen} y)^2 - (\operatorname{sen} \hat{y})^2| \\ &= 2|x|\,|\operatorname{sen} \xi|\,|\cos \xi|\,|y - \hat{y}| \leq 2|y - \hat{y}|. \end{aligned}$$

Podemos tomar por tanto $L = 2$.

Juntando todo tenemos que

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{\mathrm{e}^2 3}{2} h.$$

Para garantizar un error menor que 10^{-3} basta por tanto con tomar

$$h \leq \frac{2 \cdot 10^{-3}}{3\mathrm{e}^2}.$$

Sección 2.5

1. La ecuación de (2.8) da para cada punto (x, y) la derivada de la solución que pasa por ese punto. Define de esta forma un *campo de pendientes*. Las soluciones tienen que ser tangentes en cada punto a este campo. Podemos representar el campo de pendientes dibujando en cada pundo (x, y) una flecha cuya pendiente sea $f(x, y)$.

   (a) Usar la función `quiver` de Matlab para dibujar el campo de pendientes de la ecuación que aparece en (2.8).

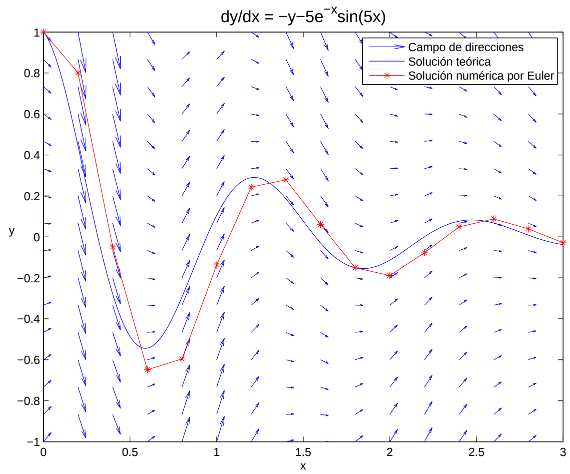
   (b) Superponer en el dibujo anterior la verdadera solución.

   (c) Superponer también la solución numérica obtenida con el método de Euler y longitud de paso $h = 0{,}5$, uniendo los puntos obtenidos por medio de líneas rectas.

Solución. El siguiente programa hace las tres cosas solicitadas.

```
function problema2_5_1

n = 16;
xpts = linspace(0,3,n); ypts = linspace(-1,1,n);
[x,y] = meshgrid(xpts,ypts);
px = ones(size(y)); py=-y-5*exp(-x).*sin(5*x);
quiver(x,y,px,py);
title('dy/dx = -y-5e^{-x}sin(5x)','FontSize',14)
xlabel('x'), ylabel('y','Rotation',0)
xlim([0 3]), ylim([-1 1]) % Ajuste de los limites de los ejes

hold on

x=linspace(0,3,3001);
plot(x,solee(x),'b')

x=linspace(0,3,16);
y=euler(@ejescalar,x,1);
plot(x,y,'r*-')

legend('Campo de direcciones','Solucion teorica','Solucion numerica por
    Euler')

hold off

function sol = solee(x)

sol = exp(-x).*cos(5*x);
```

El resultado de su ejecución se muestra en la siguiente figura.



---

2. La ecuación del péndulo simple, $\theta'' + \operatorname{sen}\theta = 0$, se puede escribir como un sistema de primer orden,

$$(y^1)' = y^2, \qquad (y^2)' = -\operatorname{sen}(y^1),$$

para las variables $y^1 = \theta$, $y^2 = \theta'$.

   (a) Utilizar el método de Euler con longitud de paso $h = 0{,}005$ para aproximar numéricamente en el intervalo $[0, 10]$ a las soluciones con datos iniciales $(1, 1)^T$, $(-5, 2)^T$ y $(5, -2)^T$.

   (b) Dibujar en el plano y^1–y^2 las curvas correspondientes a las soluciones calculadas en el apartado anterior, y superponer el campo de vectores asociado a la EDO. Obtendremos de esta forma un esbozo del *plano de fases* asociado a la EDO.

   (c) Demostrar que las soluciones de la ecuación del péndulo conservan la energía: la cantidad $E(t) = \frac{1}{2}\left(y^2(t)\right)^2 - \cos y^1(t)$ es constante para todo t.

   (d) Comprobar que la energía sólo se conserva de forma aproximada para las soluciones numéricas obtenidas por medio del método de Euler.

Solución. (c) Si calculamos la derivada de la energía obtenemos

$$\frac{dE}{dt}(t) = y^2(t)(y^2)'(t) + \operatorname{sen}(y^1(t))(y^1)'(t).$$

Usando la EDO tenemos entonces que

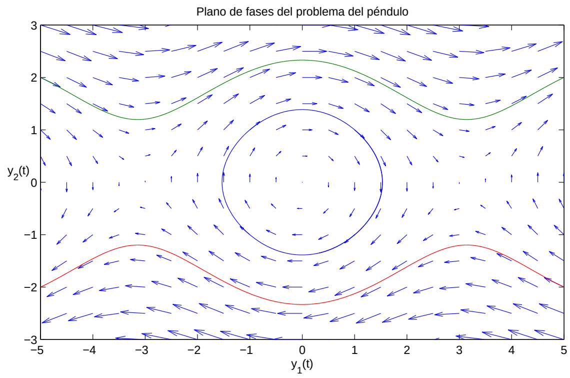
$$\frac{dE}{dt}(t) = -y^2(t)\operatorname{sen}(y^1(t)) + \operatorname{sen}(y^1(t))y^2(t) = 0,$$

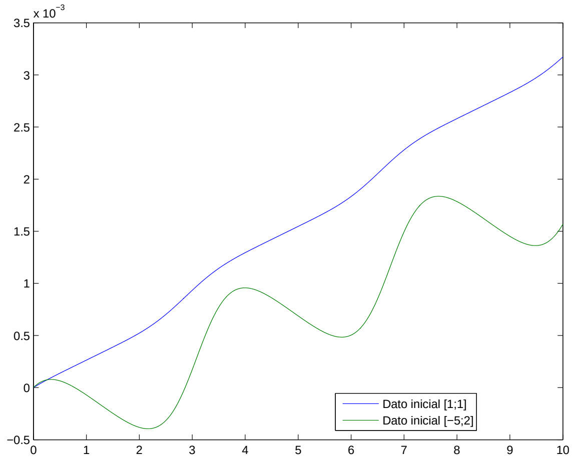
es decir, la energía se conserva.

El siguiente programa hace las cosas solicitadas en los apartados (a), (b) y (d). En particular se calcula la diferencia de la energía con la energía inicial en los tiempos de la malla numérica. Sólo se hace el cálculo para las curvas solucion correspondientes a los datos iniciales $(1,1)^T$ y $(-5,2)^T$. La solución yc con dato $(5,-2)$ es simplemente $-yb$, donde yb es la solución con dato inicial $(-5,2)^T$, y tiene por tanto la misma energía para cada tiempo que yb.

```
function problema2_5_2

figure(1)

[y1,y2] = meshgrid(-5:.5:5,-3:.5:3);
Dy1Dt = y2; Dy2Dt = -sin(y1);
quiver(y1,y2,Dy1Dt,Dy2Dt), hold on

t = 0:.0005:10;
ya0 = [1; 1]; yb0 = [-5; 2]; yc0 = [5; -2];
ya = euler(@pend,t,ya0);
yb = euler(@pend,t,yb0);
yc = euler(@pend,t,yc0);
plot(ya(1,:),ya(2,:),yb(1,:),yb(2,:),yc(1,:),yc(2,:))
axis equal, axis([-5 5 -3 3])
title('Plano de fases del problema del pendulo')
xlabel y_1(t), ylabel('y_2(t)','Rotation',0), hold off

figure(2)
title('Evolucion de la energia')
Ea=ya(2,:).^2/2-cos(ya(1,:));
Eb=yb(2,:).^2/2-cos(yb(1,:));
plot(t,Ea-Ea(1),t,Eb-Eb(1))
legend('Dato inicial [1;1]','Dato inicial [-5;2]','Location','Best')
hold off

function yprima = pend(t,y)
%PEND Pendulo simple

yprima = [y(2); -sin(y(1))];
```

El resultado de su ejecución se muestra en la siguientes figuras.





---

3. La función error, $\mathrm{erf}(x)$, se define usualmente por medio de una integral,

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\, dx,$$

pero también se puede definir como la solución de la ecuación diferencial

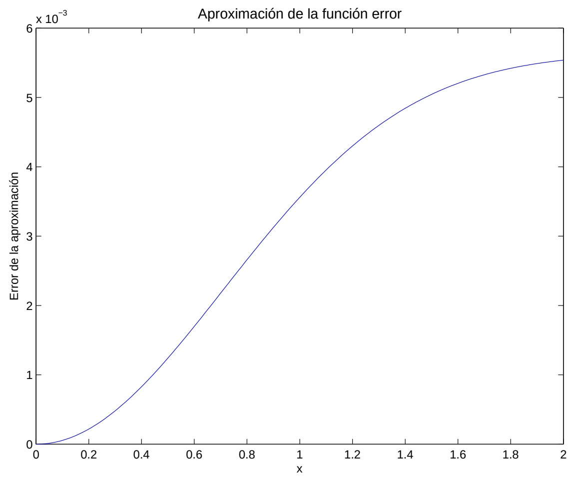
$$y'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}, \qquad y(0) = 0.$$

Usar el método de Euler con longitud de paso $h = 0,01$ para resolver esta ecuación diferencial en el intervalo $[0, 2]$. Comparar los resultados con los valores proporcionados por la función de Matlab `erf`.

Solución. La diferencia entre la el valor de la función error calculado mediante el método de Euler y el valor proporcionado por Matlab para cada uno de los nodos de la malla se calcula por medio del siguiente programa.

```
function problema2_5_3

x=linspace(0,2,201);
y=euler(@funcionerror,x,0);
plot(x,y-erf(x))
title('Aproximacion de la funcion error','FontSize',12)
xlabel('x'), ylabel('Error de la aproximacion')

function yprima=funcionerror(x,y)

yprima=2*exp(-x^2)/sqrt(pi);
```

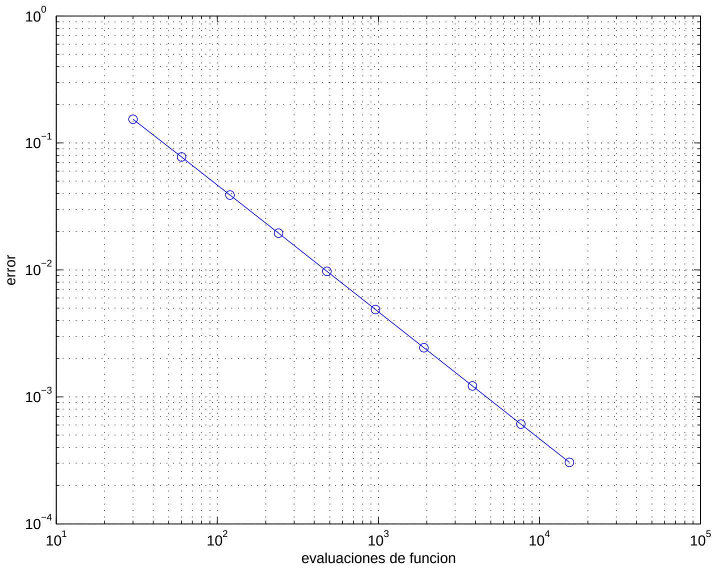
El resultado de su ejecución se muestra en la siguiente figura.



---

4. Estimar, a partir del diagrama de eficiencia de la figura 2.2, qué longitud de paso hay que tomar para conseguir que el máximo error cometido al aplicar el método de Euler al problema (2.8) sea 0,002. Comprobar que la cota (2.7) sobreestima el error para esta longitud de paso en varios órdenes de magnitud.

Solución. Mirando el diagrama de eficiencia vemos que el error 0,002 corresponde a unas 2400 evaluaciones de función. Por tanto, $h \approx 0{,}00125$.



El problema tiene constante de Lipschitz $L = 1$ (óptima) con respecto a y. En cuanto a la constante C, podemos calcularla exactamente, dado que conocemos $y(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos 5x$. En efecto, $y''(x) = \mathrm{e}^{-x}(10\,\mathrm{sen}\,5x - 24\cos 5x)$. Un sencillo cálculo muestra que y'' tiene un único punto crítico en $x = -\frac{1}{5}\arctan(37/70) < 0$, que está fuera del intervalo $[0,3]$. Por consiguiente, $|y''(x)|$ alcanza su máximo en uno de los extremos del intervalo, y se obtiene inmediatamente que $\max_{x\in[0,3]} |y''(x)| = |y''(0)| = 24$. Así, $C = 12$, y la cota (2.9) dice que

$$|y(x_n) - y_n| \le \mathrm{e}^3 3 \cdot 12 \cdot 0{,}00125 \approx 0{,}9,$$

una sobreestimación del error en un factor aproximadamente 450.

5. Consideramos un método de orden p que, para funciones f suficientemente regulares, admite un desarrollo asintótico para el error global,

$$y(x_n) - y_n = d(x_n)h^p + O(h^{p+1}), \qquad d \in C^2([a,b]).$$

Lo aplicamos a un problema con dos longitudes de paso distintas, h y h'. Demostrar que

$$p \approx \frac{\log(\texttt{error}(h)) - \log(\texttt{error}(h'))}{\log h - \log h'}.$$

Esto da una forma de determinar empíricamente el orden de un método. Como aplicación, determinar el orden empírico de un método que aplicado con longitudes de paso $h = 0,001$ y $h = 0,003$ produce errores $1,011 \cdot 10^{-8}$ y $2,699 \cdot 10^{-7}$ respectivamente.

Solución. Si $h \approx 0$, se tiene que

$$\texttt{error}(h) = \max_{0 \le n \le N} \|y(x_n) - y_n\| \approx \max_{0 \le n \le N} \|d(x_n)\| h^p \approx \max_{x \in [a,b]} \|d(x)\| h^p.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\texttt{error}(h)}{\texttt{error}(h')} \approx \frac{h^p}{(h')^p}.$$

Tomando logaritmos,

$$\log(\texttt{error}(h)) - \log(\texttt{error}(h')) \approx p(\log h - \log h'),$$

de donde se deduce inmediatamente la fórmula para el orden empírico.

Para el ejemplo que se nos da,

$$p \approx \frac{\log(1{,}011 \cdot 10^{-8}) - \log(2{,}699 \cdot 10^{-7})}{\log 0{,}001 - \log 0{,}003} \approx 3.$$

---

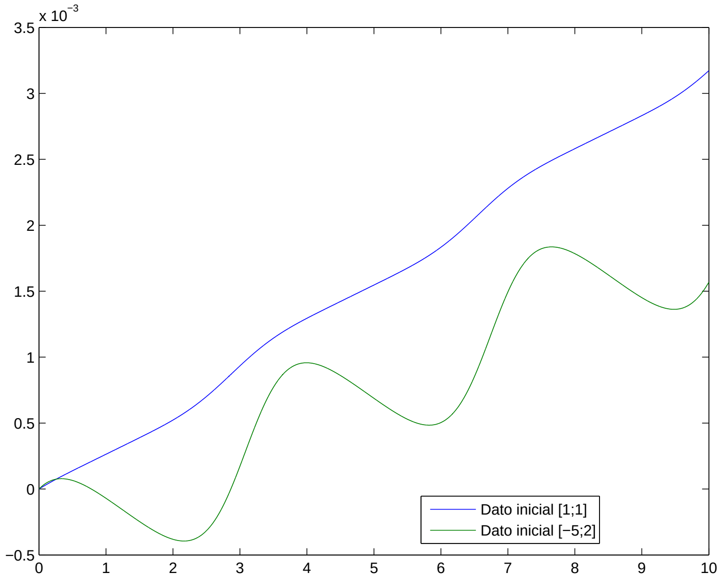
6. Elaborar un diagrama de eficiencia para el método de Euler aplicado al PVI
$$y'(x) = -\frac{xy(x)}{1-x^2}, \quad x \in [0,1], \qquad y(0) = 1,$$
cuya solución exacta es $y(x) = \sqrt{1-x^2}$. ¿Qué orden empírico se observa?

Solución. El diagrama de eficiencia se puede elaborar por medio del siguiente programa de Matlab.

```matlab
function problema2_5_6

% Diagramas de eficiencia para Euler aplicado al ejemplo escalar

eeuler=[];
feuler=[];

N=20;
for i=1:12
    x=linspace(0,1,N+1);
    y=euler(@ldproblema2_5_6,x,1);
    eeuler=[eeuler,max(abs(solproblema2_5_6(x)-y))];
    feuler=[feuler,N];
    N=2*N;
end
figure(1)
loglog(feuler,eeuler,'-o')
grid
xlabel('evaluaciones de funcion'), ylabel('error')

function yprima=ldproblema2_5_6(x,y)

yprima=-x*y/(1-x^2);

function sol = solproblema2_5_6(x)

sol=sqrt(1-x.^2);
```

El resultado de la ejecución del programa se representa a continuación.

Se observa un orden empírico 1/2. No hay contradicción con la teoría, pues el lado derecho no es $C^1([0,1])$. ¡Incluso es singular!


x 10^-3
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Dato inicial [1;1]
Dato inicial [−5;2]