Sea el siguiente algoritmo:

$$\begin{cases} \xi = y_n + \frac{h}{12}\left(5f(t_n + \frac{h}{3}, \xi) - f(t_n + h, y_{n+1})\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left(f(t_n + h, y_{n+1}) + 3f(t_n + \frac{h}{3}, \xi)\right) \end{cases}$$

① Se aprecia que el Runge-Kutta es claramente implícito, ya que y_{n+1} depende de la evaluación de f en el mismo punto y en los ξ.

Se ve también que es de dos pasos $(s=2)$ porque evalúa dos veces la f.

$$\xi_1 = y_n + h a_{11} f(t_n + hc_1, \xi_1) + h a_{12} f(t_n + hc_2, \xi_2)$$

$$\xi_2 = y_n + h a_{21} f(t_n + hc_1, \xi_1) + h a_{22} f(t_n + hc_2, \xi_2)$$

Comprobando en el algoritmo del enunciado, se aprecia que $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = y_{n+1}$

$a_{11} = \frac{5}{12}$ $\quad a_{12} = \frac{-1}{12}$ $\quad a_{22} = 1/4$ $\quad a_{21} = 3/4$ $\quad c_1 = 1/3$ $\quad c_2 = 1$

También sabemos que $y_{n+1} = y_n + h b_1 f(t_n + hc_1, \overset{\xi_1}{\xi}) + h b_2 f(t_n + hc_2, \overset{\xi_2}{y_{n+1}})$

Usando la segunda ecuación, obtenemos $b_1 = 3/4$ y $b_2 = 1/4$

Luego el tablero de Butcher es de la forma: $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^t \end{array}$ es decir:

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

Si fuese explícito, el único elemento no nulo de la matriz sería el a_{21} y c_1 sería 0.

② La condición suma (CS) viene dada por: $\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i \quad i = 1, \dots, s$

Aplicada a este algoritmo se tiene:

$$a_{11} + a_{12} = c_1 \Rightarrow 5/12 - 1/12 = 4/12 = 1/3 = c_1 \checkmark$$

$$a_{21} + a_{22} = c_2 \Rightarrow 3/4 + 1/4 = 1 = c_2 \checkmark$$

Por lo tanto, el algoritmo satisface la condición suma.

③ Para identificar el orden de convergencia, se aplican las condiciones de orden para ver cuáles se cumplen y cuáles no.

<u>Condición de orden 1:</u>

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1 \Rightarrow b_1 + b_2 = 3/4 + 1/4 = 1 \checkmark$$

Es al menos de orden 1.

<u>Condición de orden 2:</u>

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{s} b_i c_i = b_1 c_1 + b_2 c_2 = 3/4 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \checkmark$$

Es al menos de orden 2.

<u>Condiciones de orden 3:</u>

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 \cdot (1/4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$\frac{1}{6} = \sum_{i,j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j = \sum_{i=1}^{2} (b_i a_{i1} c_1 + b_i a_{i2} c_2) = b_1 a_{11} c_1 + b_1 a_{12} c_2 + b_2 a_{21} c_1 + b_2 a_{22} c_2 =$$

$$= 3/4 \cdot 5/12 \cdot 1/3 + 3/4 \cdot (-1/12) \cdot 1 + 1/4 \cdot 3/4 \cdot 1/3 + 1/4 \cdot 1/4 \cdot 1 = \frac{5}{48} - \cancel{\frac{1}{16}} + \cancel{\frac{1}{16}} + \frac{1}{16}$$

$$= 1/6 \checkmark$$

Es al menos de orden 3.

<u>Condiciones de orden 4:</u>

$$\frac{1}{4} = \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^3 = b_1 c_1^3 + b_2 c_2^3 = 3/4 \cdot (1/3)^3 + 1/4 \cdot 1^3 = \frac{5}{18} \neq \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, el método es de <u>orden 3</u>.

$$\begin{cases} z = y_n + \frac{h}{3} f(t_n + \frac{h}{3}, z) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left(f(t_n+h, y_n + h f(t_n + \frac{h}{3}, z)) + 3 f(t_n + \frac{h}{3}, z)\right) \end{cases}$$

$$= y_n + h\left[\frac{1}{4} f(t_n+h, y_n + h f(t_n + \frac{h}{3}, z)) + \frac{3}{4} f(t_n + \frac{h}{3}, z)\right]$$

Sabemos que $y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{s} b_j k_j$. En este caso. $k_1 = f(t_n + \frac{h}{3}, z)$

$k_2 = f(t_n + h, y_n + h f(t_n + \frac{h}{3}, z))$

$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{4} k_2 + \frac{3}{4} k_1 \right]$ ⤳ $\boxed{b_1 = 3/4}$ $\boxed{b_2 = \frac{1}{4}}$

+ $k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j)$.

$k_1 = f(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3} f(t_n + \frac{h}{3}, z)) = f(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3} k_1)$ ⤳ $\boxed{c_1 = \frac{1}{3}}$ $\boxed{a_{11} = 1/3}$ $\boxed{a_{12} = 0}$

$k_2 : f(t_n + h, y_n + h f(t_n + \frac{h}{3}, z)) = f(t_n + h, y_n + h k_1)$ ⤳ $\boxed{c_2 = 1}$ $\boxed{a_{21} = 1}$ $\boxed{a_{22} = 0}$

Tablero de Butcher ⤳

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

⤳ Es IMPLÍCITO porque $c_1 \neq 0$ y $a_{11} \neq 0$.

2 ⤳ C. Suma.

(CS) $\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = c_i$ para $i = 1, 2$.

$\underline{1/3} = c_1$ y $\sum_{j=1}^{2} a_{1j} = a_{11} + a_{12} = 1/3 + 0 = \underline{1/3}$ ✓.

$c_2 = 1$ y $\sum_{j=1}^{2} a_{2j} = a_{21} + a_{22} = 1 + 0 = 1$ ✓.

3

+ Orden 1 : $b_1 + b_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓.

+ Orden 2 : $\sum_{i=1}^{2} b_i c_i = b_1 c_1 + b_2 \cdot c_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1/2$ ✓.

+ Orden 3 : $\sum_{i=1}^{2} b_i c_i^2 = b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ✓

$\sum_{i,j=1}^{2} b_i a_{ij} c_j = b_1 a_{11} c_1 + b_1 a_{12} c_2 + b_2 a_{21} c_1 + b_2 a_{22} c_2 =$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \cancel{\frac{3}{4} \cdot 0 \cdot 1} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{4} \cdot 0 \cdot 1} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ ✓

• <u>Orden 4.</u> $\sum_{i=1}^{2} b_i c_i^3 = b_1 c_1^3 + b_2 c_2^3 = \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{27}_9} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{1+9}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \neq \frac{1}{4}.$ X

Es de $\boxed{\text{ORDEN } 3}$

$\xi = y_n + \frac{h}{3}\left(f(t_n, \xi) - f(t_n+h, y_{n+1})\right)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, \xi) + 3f(t_n+h, y_{n+1})\right)$

1) Tablero de Butcher. ¿Explícito o implícito?

2) Ver si satisface condición suma

3) Identificar orden

Se define el método Runge-Kutta

$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{2} a_{ij} k_j) \quad i=1,2$

$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{2} b_i k_i$

Por tanto

$k_1 = f(t_n, \xi) \Rightarrow \underline{c_1 = 0}$

$k_2 = f(t_n + h, y_{n+1}) \Rightarrow \underline{c_2 = 1}.$

$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{3}{2}k_2\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b_1 = 1/2 \\ b_2 = 3/2 \end{array}}$

$k_1 = f(t_n, \xi) = f(t_n, y_n + h\left(\frac{1}{3}f(t_n, \xi) - \frac{1}{3}f(t_n, y_{n+1})\right))$

$= f(t_n, y_n + h(1/3\, k_1 - 1/3\, k_2)) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_{11} = 1/3 \\ a_{12} = -1/3 \end{array}}$

$k_2 = f(t_n+h, y_{n+1}) = f(t_n+h, y_n + h(1/2 f(t_n, \xi) + \frac{3}{2} f(t_n+h, y_{n+1})))$

$= f(t_n+h, y_n + h(1/2\, k_1 + \frac{3}{2}k_2)) \Rightarrow a_{21} = 1/2$

$a_{22} = \frac{3}{2}$

Tablero de Butcher

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array} = \begin{array}{c|cc} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \\ \hline & 1/2 & 3/2 \end{array}$$

NO es explícito porque $a_{11}, a_{12}, a_{22} \neq 0$

$\Rightarrow$ Es implícito

2)
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \\ \hline & 1/2 & 3/2 \end{array}$$
← Tablero de Butcher

Condición suma $i=1,2$ ¿ $\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = c_i$?

$i=1 \rightarrow a_{11} + a_{12} = 1/3 - 1/3 = 0 = c_1$
$i=2 \rightarrow a_{21} + a_{22} = 1/2 + 3/2 = 2 \neq 1 = c_2$
} No se cumple la condición suma.

3) Para hallar el orden de convergencia, tenemos que ver que cumple todas las condiciones hasta orden p.

Condición orden 1 → ¿ $\sum_{i=1}^{2} b_i = 1$?

$\sum_{i=1}^{2} b_i = b_1 + b_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \neq 1$ ← NO tiene orden 1

El método no es convergente.

TAREA 6:

Considera el siguiente algoritmo:

$$\begin{cases} \xi = y_n + \frac{h}{3}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + \frac{2h}{3}, \xi)\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left(f(t_n, y_n) + 3f(t_n + \frac{2h}{3}, \xi)\right) \end{cases}$$

I) Identifica su tablero de Butcher. ¿Es explícito o implícito?

II) Ver si se satisface la condición suma

III) Identificar su orden viendo qué condiciones cumple y cuál no.

I) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left[f(t_n, y_n) + 3f\left(t_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{h}{3}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + \frac{2h}{3}, \xi)\right)\right)\right]$

Definimos las etapas así:

$k_1 = f(t_n, y_n)$

$$k_2 = f(t_n + \frac{2h}{3}, \xi) = f\left(t_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{h}{3}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + \frac{2h}{3}, \xi)\right)\right) =$$
$$= f\left(t_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{h}{3}(k_1 + k_2)\right)$$

Reescribimos el método:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2\right)$$

Hallamos c, b y A para completar el tablero de Butcher $\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^t \end{array}$:

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Vemos que $c_1 = 0$ pero la matriz A no es triangular inferior con diagonal nula, luego el método es implícito.

Además, k_2 depende de sí mismo, esto no ocurre en un método explícito.

II) La condición suma dice $\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = c_i$, con $i=1,2$

Tenemos que comprobar:

$$a_{11} + a_{12} \overset{?}{=} c_1 \longrightarrow 0+0=0 \checkmark$$

$$a_{21} + a_{22} \overset{?}{=} c_2 \longrightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \checkmark$$

$\Rightarrow$ Verifica la condición suma (CS).

III) Gracias a que verifica la condición suma, el número de condiciones de orden que tenemos que probar es menor:

$$\sum_{i=1}^{2} b_i = b_1 + b_2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1 \checkmark \Longrightarrow \text{Al menos orden 1}$$

$$\sum_{i=1}^{2} b_i c_i = b_1c_1 + b_2c_2 = \cancel{\frac{1}{4}}\cdot \overset{0}{0} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} = \frac{1}{2} \checkmark \Rightarrow \text{Al menos orden 2}$$

$$\sum_{i=1}^{2} b_i c_i^2 = b_1c_1^2 + b_2c_2^2 = \cancel{\frac{1}{4}}\cdot \overset{0}{0^2} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}_3} = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_i a_{ij} c_j = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{6} \checkmark$$

$\Rightarrow$ Al menos orden 3

$$\sum_{i=1}^{2} b_i c_i^3 = b_1c_1^3 + b_2c_2^3 = \frac{1}{4}\cdot 0^3 + \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{8}^2}{\cancel{27}_9} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{4} \times$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_i a_{ij} c_j^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4/9 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{9} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{12} \times$$

$\Rightarrow$ No es de orden 4

Quedan 2 condiciones por probar, pero ya vemos que no es de orden 4. (No verifica ninguna de las condiciones de orden 4).

Conclusión: El método es un R-K implícito convergente de orden 3.
Es un ejemplo en el que el orden es mayor que el nº etapas.