PROBLEMAS. HOJA 7. Sistemas Dinámicos, Caos.

1. Sea una ecuación dicreta unidimensional no-lineal $x_{n+1} = f(x_n)$. Supongamos que f es diferenciable y $\{x_0, \ldots, x_d\}$ es una tal que $g(x_d) = x_0$ y $g(x_i) = x_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, d-1$ (órbita periódica de periodo $d+1$). Llamamos a $g = f^{d+1}$. Demostrar que

   i) $\{x_0, \ldots, x_d\}$ son puntos fijos de g.

   ii) $g'(x_0) = \cdots = g'(x_d) = m$, ¿quién es m con respecto a f?

   iii) A este valor $g'(x_0) = m$ se le llama *multiplicador característico* de la órbita periódica y $\lambda = \ln |m|$ es el exponente característico o de Liapunov de la misma. Dependiendo del valor de λ qué tipo de punto crítico es la órbita periódica.

2. Consideremos la ecuación discreta paramétrica

$$x_{n+1} = f(a, x_n) = a - x_n^2, \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

   i) Identificar los puntos críticos $x(a)$. Analizar su estabilidad.

   ii) Representar en el plano los puntos $(a, x(a))$. Dibujar con línea continua el trazo de los atractores y con discontinua los repulsores, esto se conoce como *diagrama de bifurcación*.

   iii) Identificar los puntos de bifurcación del plano.

   Notar que uno de ellos verifica que $f(a, x(a)) = x(a)$ y $f'(x(a)) = 1$. Esto se conoce como *bifurcación tangente*.

3. Consideremos la ecuación discreta paramétrica

$$x_{n+1} = f(a, x_n) = ax_n - x_n^3, \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

   i) Identificar los puntos críticos $x(a)$. Analizar su estabilidad.

   ii) Dibujar el *diagrama de bifurcación* $(a, x(a))$.

   iii) Identificar los puntos de bifurcación del plano. Este caso de bifurcación se conoce como *horca* o *tridente*.

4. Sea el sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases} \tag{1}$$

   a) Supongamos $r < 1$. Probar que $L(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$ es una función de Lyapunov. Como consecuencia las soluciones del sistema de Lorenz tienden al origen.

   b) Cuando $r > 1$ ya no es cierto que todas las soluciones tienden al origen. Sin embargo, podemos decir que las soluciones que comienzan lejos del origen al menos se acercan. Sea

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2.$$

   Existe ν^* tal que cualquier solución de (1) que comience fuera del elipsoide $V = \nu^*$ finalmente entra en este elipsoide y luego queda atrapado en él para todo el tiempo futuro.