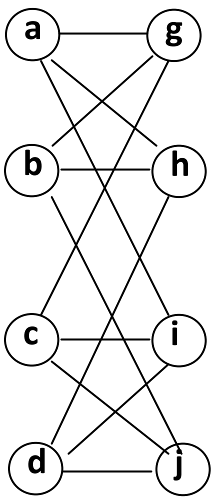
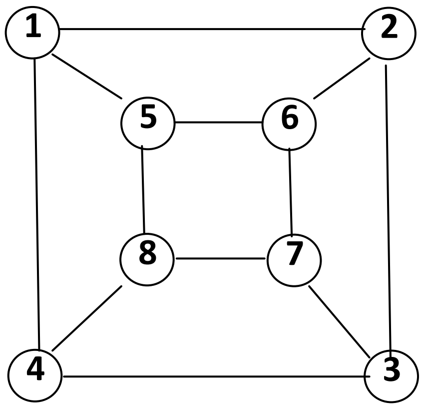
HOJA DE EJERCICIOS 4: Grafos y Árboles EDyL 2012-2013

[Fecha de publicación: 30 noviembre 2012]
[Fecha de entrega: 17 diciembre 2012, 10 horas]
[Resolución en clase : 17 diciembre 2012]

EJERCICIO 1: Determinar si los pares de grafos siguientes son o no isomorfos. Justificar las respuestas.

a) Grafo G Grafo H



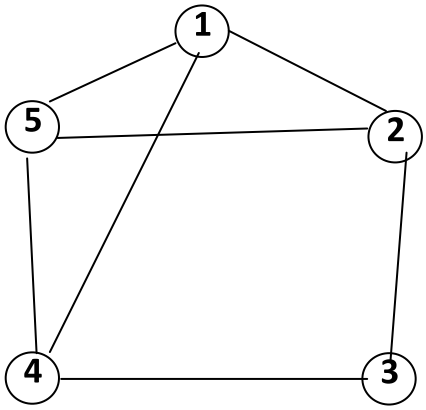


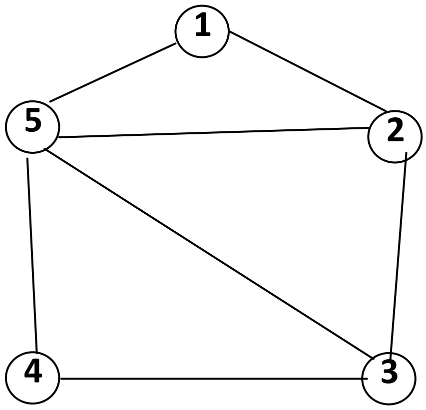
RESPUESTA: G y H son isomorfos. Una posible función es la siguiente:

f(a) = 1
f(b) = 6
f(c) = 8
f(d) = 3
f(g) = 5
f(h) = 2
f(i) = 4
f(j) = 7

También se puede verificar mediante las correspondientes matrices de adyacencia.

b) Grafo G Grafo H

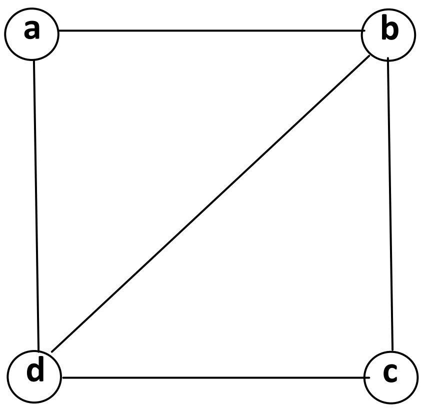


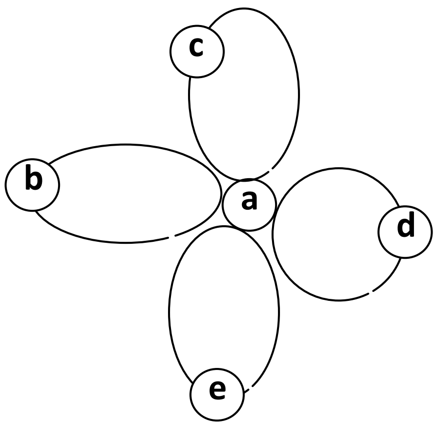


Estos dos grafos no son isomórficos ya que, aunque tienen el mismo número de vértices y de aristas, el grado de los vértices adyacentes en cada uno de los grafos no coincide.

EJERCICIO 2: Determinar la existencia de circuitos o caminos eulerianos en los grafos siguientes. Justificar las respuestas.

G1 **G2**



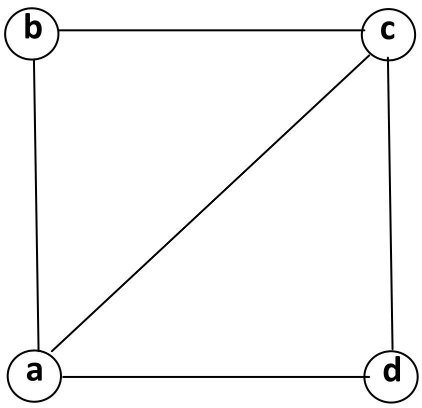


G1 contiene una trayectoria euleriana entre b y d: b-d-c-b-a-d

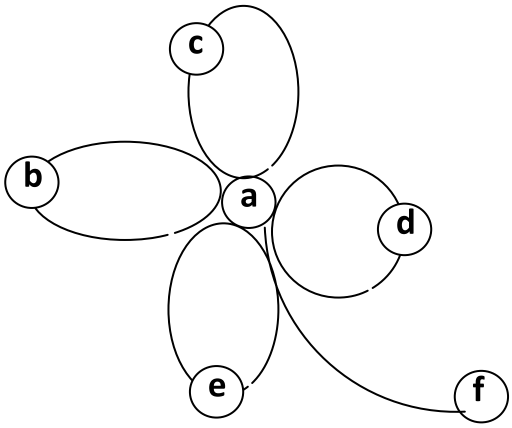
G2 contiene un circuito euleriano, por lo que es un grafo euleriano: a-b-a-c-a-d-a-e-a

EJERCICIO 3: Determinar la existencia de circuitos o caminos hamiltonianos en los grafos siguientes. Justificar las respuestas.

G1

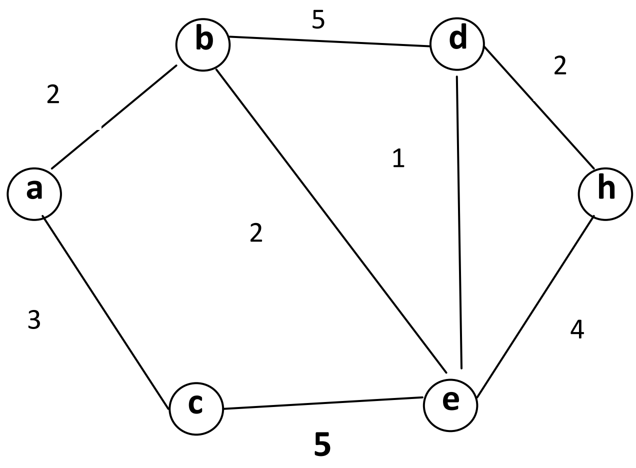


G2



G1 contiene un circuito hamiltoniano: a-b-c-d-a
G2 no contiene ni trayectorias ni circuitos hamiltonianos.

EJERCICIO 4: Utilizando el algoritmo de Warshall, determinar las distancias más cortas entre cada par de vértices del grafo, así como las trayectorias correspondientes.



SOLUCIÓN:

L0	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**h**
a	0	2	3	∞	∞	∞
b		0	∞	5	2	∞
c			0	∞	5	∞
d				0	1	2
e					0	4
h						0

L1 (a)	a	b	c	d	e	h
a	0	2(ab)	3(ac)	∞	∞	∞
b		0	5(bac)	5(bd)	2(be)	∞
c			0	∞	5(ce)	∞
d				0	1(de)	2(dh)
e					0	4(eh)
h						0

L2 (b)	A	b	c	d	e	h
a	0	2(ab)	3(ac)	7(abd)	4(abe)	∞
b		0	5(bac)	5(bd)	2(be)	∞
c			0	10(cabd)	5(ce)	∞
d				0	1(de)	2(dh)
e					0	4(eh)
h						0

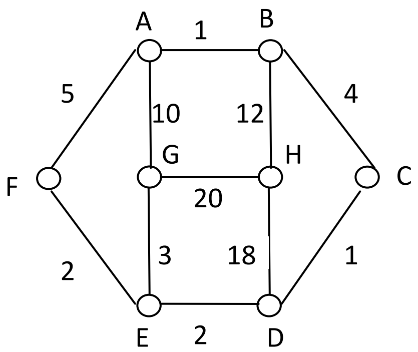
L3 (c)	A	b	c	d	e	h
a	0	2(ab)	3(ac)	7(abd)	4(abe)	∞
b		0	5(bac)	5(bd)	2(be)	7(bdh)
c			0	10(cabd)	5(ce)	∞
d				0	1(de)	2(dh)
e					0	4(eh)
h						0

L4 (d)	A	b	c	d	E	h
a	0	2(ab)	3(ac)	7(abd)	4(abe)	9(adh)
b		0	5(bac)	5(bd)	2(be)	7(bdh)
c			0	10(cabd)	5(ce)	12(cabdh)
d				0	1(de)	2(dh)
e					0	3(edh)
h						0

L5 (e)	A	b	c	d	E	H
a	0	2(ab)	3(ac)	5(abed)	4(abe)	7(abedh)
b		0	5(bac)	3(bed)	2(be)	5(bedh)
c			0	6(ced)	5(ce)	8(cedh)
d				0	1(de)	2(dh)
e					0	3(edh)
h						0

L6 (h)	A	b	c	d	E	H
a	0	2(ab)	3(ac)	5(abed)	4(abe)	7(abedh)
b		0	5(bac)	3(bed)	2(be)	5(bedh)
c			0	6(ced)	5(ce)	8(cedh)
d				0	1(de)	2(dh)
e					0	3(edh)
h						0

EJERCICIO 5: Dado el siguiente grafo, emplear el algoritmo de Dijkstra para encontrar la distancia más corta entre los nodos G y H, indicando a qué trayectoria corresponde. Utilizar tantas columnas de la tabla como sea necesario. En caso de elección entre varios nodos, <u>ha de elegirse por orden alfabético.</u> También ha de indicarse <u>si existe más de una trayectoria mínima posible, y porqué.</u>



SOLUCIÓN:

	L(0)	L(1)	L(2)	L(3)	L(4)	L(5)	L(6)	L(6)
A	∞	AG(10)	AG(10)	AG(10)	AF(10)	A*F(10)	-	-
B	∞	∞	∞	∞	∞	BC(10)	B*C(10)	-
C	∞	∞	∞	CD (6)	C*D (6)	-	-	-
D	∞	∞	D*E (5)	-	-	-	-	-
E	∞	E*G (3)	-	-	-	-	-	-
F	∞	∞	FE (5)	F*E (5)	-	-	-	-
G	(0)	-	-	-	-	-	-	-
H	∞	HG(20)	HG(20)	HG(20)	HG(20)	HG(20)	HG(20)	HG(20)

La distancia más corta entre G y H es 20, y la trayectoria elegida: G-H.

EJERCICIO 6: Hallar un árbol extendido mínimo para el grafo anterior utilizando el algoritmo de Kruskal, eligiendo el orden alfabético de los nodos de cada arista en caso de existir varias opciones. Representar el árbol obtenido e indicar cuál es su peso.

SOLUCIÓN:

Aristas por orden creciente de peso:

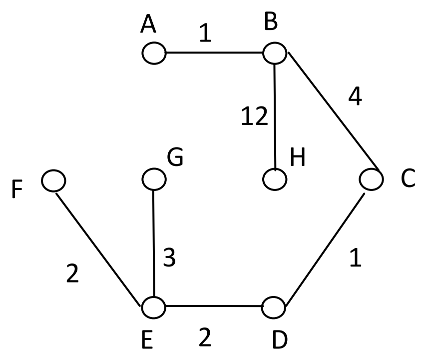
arista 1	A-B: 1
arista 2	C-D: 1
arista 3	D-E: 2
arista 4	E-F: 2
arista 5	E-G: 3
arista 6	B-C: 4
arista 7	A-F: 5
arista 8	A-G: 10
arista 9	B-H: 12
arista 10	D-H: 18
arista 11	G-H: 20

El orden en el que incluyen aristas y nodos es el siguiente:

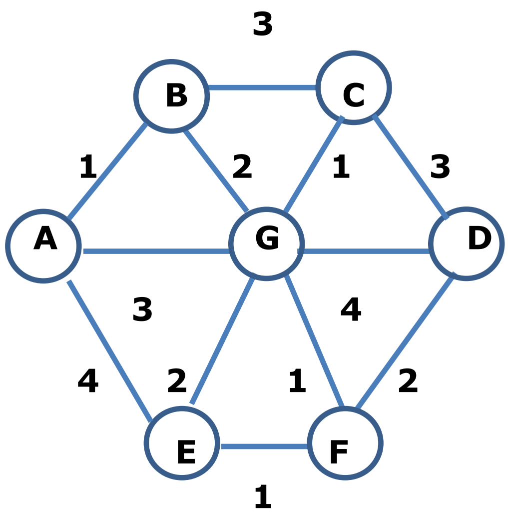
1) Incluir A-B (arista 1), se acceden A y B
2) Incluir C-D (arista 2), se acceden C y D
3) Incluir D-E (arista 3), se accede E (D ya se había accedido)
4) Incluir E-F (arista 4), se accede F
5) Incluir E-G (arista 5), se accede G
6) Incluir B-C (arista 5), se conectan B y C, aunque no se accede ningún nuevo nodo
7) Descartar A-F (arista 6), porque se crearía un ciclo.
8) Descartar A-G (arista 7), porque se crearía un ciclo.
9) Incluir B-H (arista 8), se incluye H

El algoritmo concluye habiéndose accedido ya a todos los nodos, y el resto de las aristas NO se consideran.

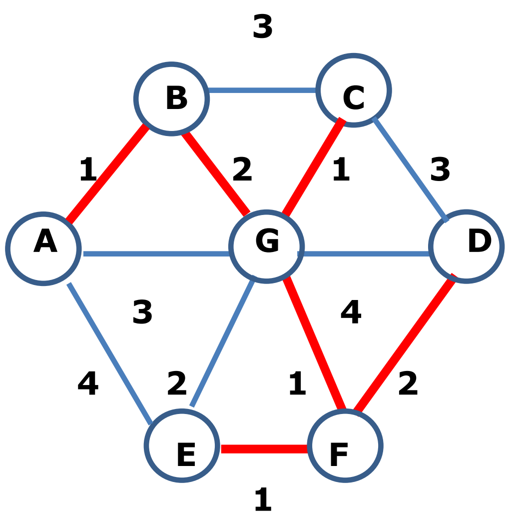
El árbol resultante se representa a continuación, y su peso es 25.



EJERCICIO 7: Hallar un árbol extendido mínimo para el grafo del ejercicio anterior utilizando el algoritmo de Prim, eligiendo el orden alfabético de los nodos de cada arista en caso de existir varias opciones. Representar el árbol obtenido e indicar cuál es su peso.



SOLUCIÓN:



Selección:

AB (1) Selecciona Vértices={A, B}

Posibilidades (adyacentes a A o B):

BG (2) Selecciona (adyacente a B) Vértices={A, B, G}

AG (3)

BC (3)

AE (4)

Posibilidades (adyacentes a A, B o G):

CG (1) Selecciona (adyacente a G) Vértices={A, B, C, G}

FG (1)

EG (2)

AG (3)

BC (3)

AE (4)

DG (4)

Posibilidades (adyacentes a A, B, C o G):

FG (1) Selecciona (adyacente a G) Vértices={A, B, C, F, G}

EG (2)

AG (3)

BC (3)

CD (4)

AE (4)

DG (4)

Posibilidades (adyacentes a A, B, C, F o G):

EF (1) Selecciona (adyacente a F) Vértices={A, B, C, E, F, G}

DF (2)

EG (2)

AG (3)

BC (3)

CD (4)

AE (4)

DG (4)

Posibilidades (adyacentes a A, B, C, E, F o G):

DF (2) Selecciona (adyacente a F) Vértices={A, B, C, D, E, F, G}

EG (2)

AG (3)

BC (3)

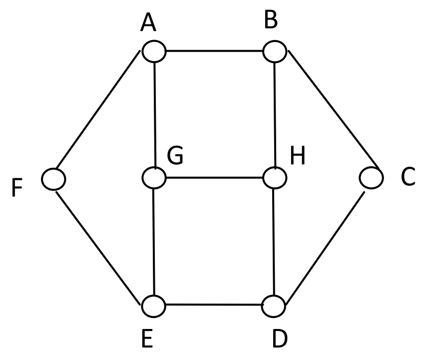
CD (4)

AE (4)

DG (4)

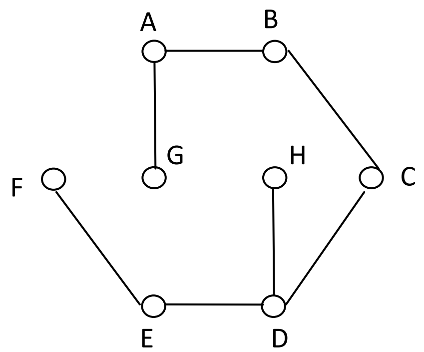
Peso = 8

EJERCICIO 8: Dado el siguiente grafo, emplear el algoritmo de Búsqueda en Profundidad para descubrir todos los nodos accesibles desde G. Incluir las etiquetas de tiempo inicial y final de exploración para cada nodo accedido. Representar el árbol resultante. En caso de encontrarse accesibles varios nodos, ha de elegirse por orden alfabético.



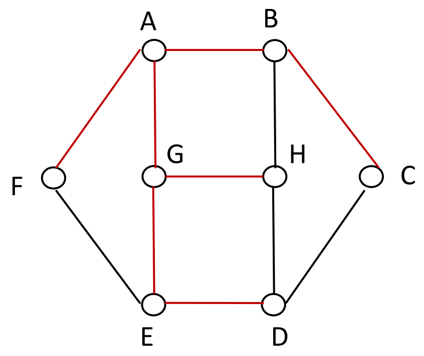
SOLUCIÓN:

G(1/16), A(2/15), B(3/14), C(4/13), D(5/12), E(6/9), F(7/8), H(10/11)



EJERCICIO 9: Para el grafo anterior, emplear el algoritmo de Búsqueda en Anchura para descubrir todos los nodos accesibles desde G. En caso de encontrarse accesibles varios nodos, ha de elegirse por orden alfabético.

SOLUCIÓN:



G -> A E H

A -> B F

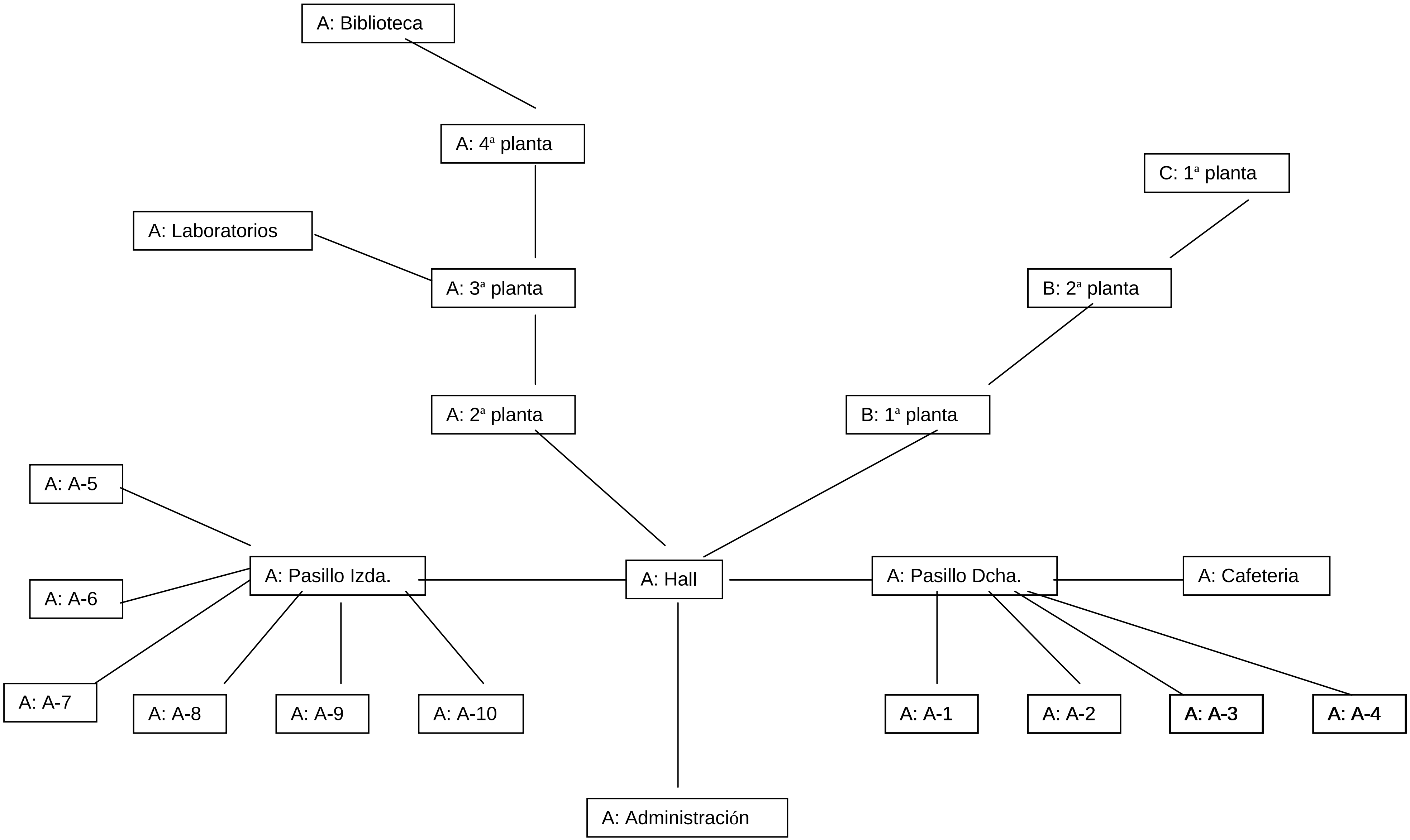
E -> D

H no continúa, porque se haría un circuito.

B-> C

EJERCICIO 10: Se pretende crear un grafo de la EPS con el objetivo de que los nuevos estudiantes se familiaricen lo antes posible con los distintos lugares. En el grafo, se deberá indicar cómo acceder a: las aulas, la cafetería, Administración, la Biblioteca y los laboratorios del Edificio A, así como a los edificios B y C.

Se supone que los nuevos estudiantes saben cómo llegar al Hall del Edificio, sea cuál sea el medio de transporte que hayan utilizado para llegar a la UAM.


A: Biblioteca
A: 4ª planta
C: 1ª planta
A: Laboratorios
A: 3ª planta
B: 2ª planta
A: 2ª planta
B: 1ª planta
A: A-5
A: Pasillo Izda.
A: Hall
A: Pasillo Dcha.
A: Cafeteria
A: A-6
A: A-7
A: A-8
A: A-9
A: A-10
A: A-1
A: A-2
A: A-3
A: A-4
A: Administración