1. **Definir espacio de medida *completo.* Dado $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida, ¿cómo extenderías la medida a una medida completa? Enuncia el teorema de completación. Demuestra que la extensión a una medida completa es única.**

Un espacio de medida es completo si para todo conjunto de medida nula, cualquiera de sus subconjuntos pertenece a la σ-álgebra y tiene medida nula.

Para extender una medida a una medida completa, añadiría a la σ-álgebra todos los subconjuntos de un conjunto de medida nula de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}' = \{A \cup M : A \in \mathcal{F} \text{ y } M \subset N \; con \; \mu(N) = 0\}$$

Y la medida completada se define como: $\mu'(A \cup M) = \mu(A)$

Teorema de completación: dado un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$, existe una única medida completa μ' que la extiende, es decir, $\mu'|_{\mathcal{F}} = \mu$.

Demostración:

Sean μ', ν' dos extensiones de la misma medida:

$$\left.\begin{cases} \mu'(A \cup M) \overset{por\ def.}{=} \mu'(A) \overset{A \in \mathcal{F}}{=} \nu'(A) \overset{monotonicidad}{\leq} \nu'(A \cup M) \\ \nu'(A \cup M) \overset{subaditividad}{\leq} \nu'(A) \cup \nu'(M) \overset{(*)}{=} \nu'(A) \overset{A \in \mathcal{F}}{=} \mu'(A) \overset{por\ def.}{=} \mu'(A \cup M) \end{cases}\right\} \Rightarrow \mu' = \nu'$$

$$(*) \;\; M \subset N \; con \; \mu(N) = 0, N \in \mathcal{F} \Rightarrow \nu'(N) = 0 \Rightarrow \nu'(M) = 0$$

2. **Un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es semifinito si para cualquier $F \in \mathcal{F}$, $\mu(\mathcal{F}) = \infty$ contiene un subconjunto $E \subset F$, $0 < \mu(E) < \infty$.**
   a. **Demostrar que un espacio σ-finito es semifinito.**
   Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio σ-finito. Entonces, $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ tal que $X = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo n. Sea $E \subset X, \mu(E) = \infty$. Dado que $X = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$, $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)$ con $\mu(A_n \cap E) < \infty$ para todo n. Como $\mu(E) = \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E) = \infty$, para algún n, $A_n \cap E \subset E, 0 < \mu(A_n \cap E) < \infty$.

   b. **Encontrar un ejemplo de un espacio semifinito que no sea σ-finito.**
   Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida con $X = \mathbb{R}, \mathcal{F}$ la σ-álgebra generada por los conjuntos finitos y μ la medida de contar. Los únicos conjuntos de medida finita son los subconjuntos finitos. Si fuese σ-finito, existirían $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, $\mu(A_n) < \infty$ tal que $\mathbb{R} = \biguplus_{n=1}^{\infty} A_n$, pero $\mathbb{R}$ no es numerable y la unión es como mucho numerable. Pero sí es un espacio semifinito, porque para todo $E \subset X, \mu(E) = \infty$ significa que tiene infinitos elementos. Sea $x \in E$, entonces $\{x\} \subset E, 0 < \mu(\{x\}) = 1 < \infty$.

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 \cos(x^n)\, dx$

Por el teorema de convergencia monótona:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \cos(x^n)\, dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} \cos(x^n)\, dx = \int_0^1 1\, dx = 1$$

Si $x \in [0,1]$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} \cos(x^n) = 1$ en casi todo punto.

4. **Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

   a. **Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$. Sean μ y ν dos medidas que coinciden en el álgebra $\mathcal{A}$. Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces $\mu(A) = \nu(A)$.**

   Sea $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. $B_n \in \mathcal{A}$ por ser el álgebra cerrada por uniones finitas y diferencias. $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \nu(B_i) = \nu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$, por ser los B_n disjuntos. Finalmente, tomando límites $\mu(A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) = \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \nu(A)$

   b. **Dado $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$ y f función medible y (¿estrictamente?) positiva. Si $\int_A \mathrm{f} < \infty$ entonces $\mu(A) < \infty$.**

   $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = [e^{-x}]_{x=0}^{\infty} = 1 < \infty$, pero $m([0, \infty]) = \infty$.

5. **Demostrar la siguiente identidad:**

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} \log x^{-1}}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{p+n-1} = \frac{x^{p-1}}{1-x} \to \int_0^1 \frac{x^{p-1} \log x^{-1}}{1-x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{p+n-1} \log x^{-1} \, dx \overset{(*)}{=}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{p+n-1} \log x^{-1} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\frac{x^{p+n}}{p+n} \log x^{-1} \right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{x^{p+n-1}}{p+n} dx \right) \overset{(**)}{=}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\frac{x^{p+n}}{(p+n)^2} \right]_{x=0}^{x=1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}$$

(*) Se puede sacar el sumatorio fuera de la integral por el teorema de la convergencia monótona: $\frac{x^{p-1} \log x^{-1}}{1-x} \geq 0$ y es medible por ser continua.

(**) $\left[\frac{x^{p+n}}{p+n} \log x^{-1} \right]_0^1 = \frac{1^{p+n}}{p+n} \log 1 - \lim_{x \to 0} \frac{x^{p+n}}{p+n} \log x^{-1} = 0 - 0 = 0$

6. **Sea f una función Lebesgue integrable en el intervalo $[0, b]$. Se define g(x) como**

$$g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} dt$$

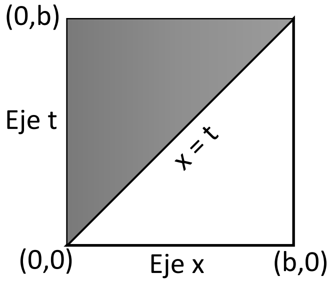
Demostrar que g(x) es integrable en $[0, b]$ y que se cumple la siguiente identidad:

$$\int_0^b g(x) dx = \int_0^b f(t) dt$$

f es integrable en [0, b] y 1/t es integrable en casi todo punto del intervalo [0,b] (es integrable en (0, b])

$$\int_0^b |g(x)| \, dx = \int_0^b \int_x^b \frac{|f(t)|}{t} dt dx$$

f(t) y 1/t son funciones medibles por lo que se puede usar el teorema de Fubini-Tonelli para intercambiar el orden de integración. Se integra en el intervalo sombreado:



Si $x \in [0, b]$, entonces $t \in [x, b]$.

Cambiando el orden de integración:

Si $t \in [0, b]$, entonces $x \in [0, t]$.

$$\int_0^b |g(x)|\, dx = \int_0^b \int_x^b \frac{|f(t)|}{t} dtdx \overset{Tonelli}{\cong} \int_0^b \int_0^t \frac{|f(t)|}{t} dxdt = \int_0^b \frac{|f(t)|}{t} \int_0^t 1\, dxdt =$$

$$= \int_0^b \frac{|f(t)|}{t} t\, dt = \int_0^b |f(t)|\, dt < \infty, porque\ f\ es\ integrable\ en\ [0, b]$$

Como g es integrable, se puede aplicar el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración igual que antes:

$$\int_0^b g(x)\, dx = \int_0^b \int_x^b \frac{f(t)}{t} dtdx \overset{Fubini}{\cong} \int_0^b \int_0^t \frac{f(t)}{t} dxdt = \int_0^b \frac{f(t)}{t} \int_0^t 1\, dxdt =$$

$$= \int_0^b \frac{f(t)}{t} t\, dt = \int_0^b f(t)\, dt$$