UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día 19 de abril de 2018. Examen parcial.

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

1.1 (1)	1.2 (1.5)	1.3 (0.5)	2.1 (1)	2.2 (1)	2.3 (2)	2.4 (1)	2.5 (1)	2.6 (1)	Total (10)

1. PROBLEMA (3 puntos).

Una empresa tiene un servidor que recibe tráfico Poisson con una media de 2 peticiones por segundo. El servidor tiene una cola de espera de tamaño infinito y se ha observado que la CPU del servidor, con una probabilidad del 25%, tardará 500ms en procesar una solicitud de servicio, y con el 75% de la probabilidad, tardará 250ms.

1.1 (1 puntos) Justificar razonadamente un modelo de colas válido para describir el escenario planteado. No se considerarán respuestas sin razonar.

Se trata de un sistema **M/G/1** debido a que:

- El tiempo entre llegadas está distribuido de forma exponencial.
- Solo hay un servidor.
- El tiempo de servicio sigue una distribución arbitraria.
- El tamaño de la cola se puede considerar infinito.

1.2 (1.5 puntos) Calcular el número medio de clientes que hay en el sistema.

Usamos las fórmulas del modelo M/G/1

E[S]=0.25 · 0.5 + 0.75 · 0.25= 0.3125 segundos

$$\mathrm{E}[S^2] = 0.25 * 0.5^2 + 0.75 * 0.25^2 = 0.109\ segundos^2$$

$$\mu = \frac{1}{0.3125} = 3.2\ s^{-1}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3.2} = 0.625$$

$$L = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)} + \rho = 2^2 \cdot \frac{0.109}{2(1-0.625)} + 0.625 = 1.2063\ clientes$$

1.3 (0.5 puntos) Calcular el tiempo medio de respuesta del servidor.

Usamos Little:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1.2063}{2} = 0.60315\ segundos$$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos .... Nombre ....

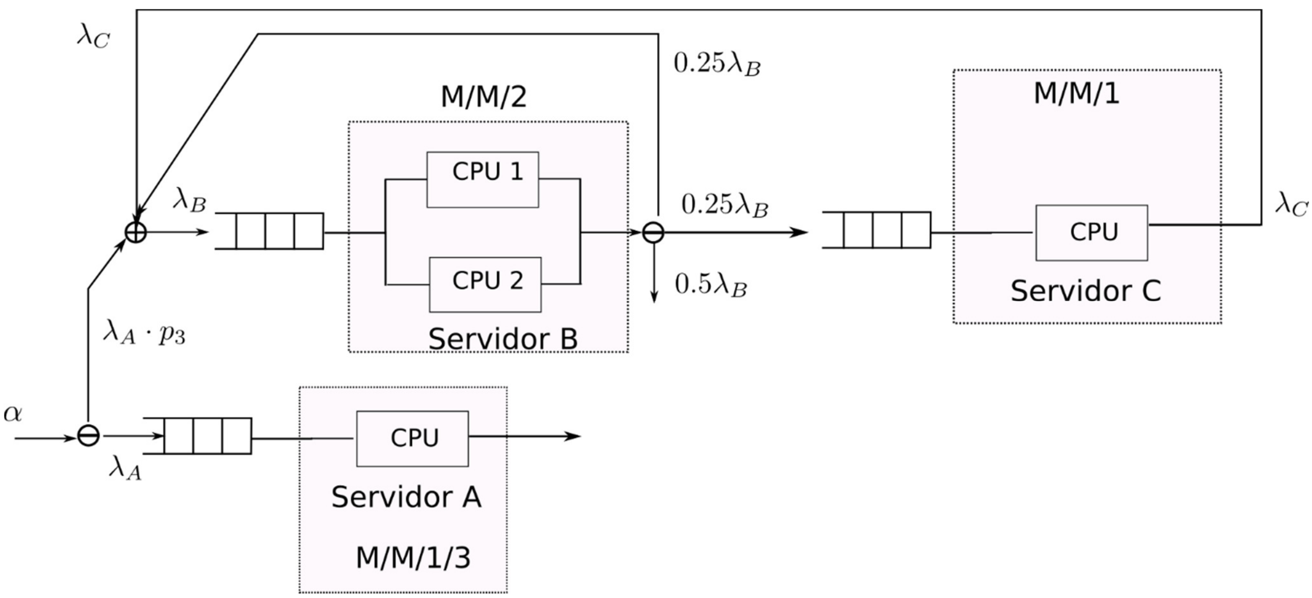
Ejercicio del día 19 de abril de 2018. Examen parcial.

2. PROBLEMA (7 puntos).

Una empresa presta un servicio. Las solicitudes de los clientes son recibidas inicialmente por un **servidor A**. Este servidor cuenta con una cola de espera de tamaño finito que solo admite **2 solicitudes** de servicio. El tiempo medio de servicio de este servidor es de **250ms**. Las solicitudes de servicio que son rechazadas por este servidor se redirigen a un **servidor B**. Las que son procesadas por A se dan por terminadas. El servidor B cuenta con 2 CPUs y una cola de espera de tamaño infinito. Cualquiera de las dos CPUs puede atender una solicitud de servicio que llegue a B. Su tiempo medio de servicio es de **250ms**. Tras ser procesadas por B, con una probabilidad del 50% las solicitudes se dan por terminadas. Por otro lado, con una probabilidad del 25% una solicitud de servicio procesada por B deberá realizar una invocación de servicio adicional en dicho servidor B. Finalmente, con un 25% de probabilidad las solicitudes de servicio procesadas por el servidor B necesitarán invocar un servicio en un **servidor C**. Este servidor tiene una cola de espera de tamaño infinito y una sola CPU que tarda en promedio **1000ms** en procesar las solicitudes recibidas. Todas las solicitudes de servicio procesadas por el servidor C necesitan invocar de nuevo una solicitud de servicio en el servidor B.

Considerar que el servidor A recibe tráfico Poisson con una media de **4 solicitudes por segundo**. Considerar que todos los tiempos de servicio están distribuidos de forma exponencial y que todos los servidores se encuentran en estado estacionario.

2.1 (1 puntos) Dibujar el diagrama de proceso del sistema completo, e indicar (no calcular) las tasas de llegada a la entrada de cada servidor (0,5 puntos). Dar una explicación razonada sobre qué modelo, según la notación de Kendall, será aplicable a cada una de sus componentes, indicando las suposiciones y teoremas utilizados (0,5 puntos).



El servidor A se puede describir usando un modelo M/M/1/3, ya que recibe tráfico Poisson (tiempos entre llegadas distribuidos de forma exponencial), el tiempo de servicio está distribuido de forma exponencial y la cola es finita de tamaño igual a 2. El servidor B y C se pueden describir usando un modelo M/M/2 y M/M/1 aplicando el teorema de Jackson. Esto es así porque el tráfico rechazado del servidor A es una partición aleatoria de un proceso Poisson, que es otro proceso Poisson; el primer servidor tiene 2 CPUs, mientras que el segundo tiene 1; todos los tiempos están distribuidos de forma

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura: SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo: 236 y 240

Apellidos ... Nombre ...

Ejercicio del día: 19 de abril de 2018. Examen parcial.

exponencial, las colas son infinitas, la red es una red de colas abierta ya que la probabilidad de salir de la red es estrictamente mayor que 0, y según nos han indicado en el enunciado todos los sistemas están en estado estacionario.

2.2 (1 puntos) Calcular la tasa de llegadas efectiva a la entrada de cada servidor.

Calculamos primero la tasa de llegadas efectiva al servidor A, y la proporción de tráfico que es rechazado. Tenemos en cuenta que $\alpha = 4s^{-1}$ y que $\mu_A = 4s^{-1}$. Luego ambos coinciden.

Para el servidor A:

$p_0 = \frac{1}{K+1} = \frac{1}{4} = 0.25$

$p_3 = p_0 \left(\frac{\alpha}{\mu_A}\right)^3 = 0.25$

Por lo que $\lambda_A = (1 - p_3)\alpha = 0.75 \cdot 4 = 3\ s^{-1}$

Por tanto:

$\lambda_B = p_3\alpha + 0.25\lambda_B + 0.25\lambda_B$

$\lambda_B = \frac{p_3\alpha}{0.5} = \frac{0.25 \cdot 4}{0.5} = 2\ s^{-1}$

$\lambda_C = 0.25\lambda_B = 0.5\ s^{-1}$

Comprobamos que en efecto cada servidor está en estado estacionario. Pues $\lambda_B < \mu_B$ y $\lambda_C < \mu_C$.

2.3 (2 puntos) Calcular el número medio de peticiones en todo el sistema (1.5 puntos). Justificar dicho cálculo (0.5 puntos).

Podemos ver el servidor M/M/1/3 y la red de colas formadas por los servidores M/M/2 y M/M1/ como independientes. Usamos el teorema de Jackson del que se deduce que el número total de peticiones es la suma de las peticiones en cada sub-sistema, cuyas probabilidades vendrían dadas por las fórmulas del modelo M/M/2 y M/M/1, respectivamente.

$$L_A = \frac{K}{2} = 1.5\ clientes$$

$$L_B = \frac{P_q}{1-\rho}\rho + c\rho = \frac{0.1}{0.75}0.25 + 2 \cdot 0.25 = 0.533$$

$$\rho = \frac{\lambda_B}{c\mu_B} = \frac{2}{2 \cdot 4} = 0.25$$

$$P_q = \frac{p_c}{1-\rho} = \frac{0.075}{0.75} = 0.1$$

$$p_c = \frac{p_0 c^c}{c!}\left(\frac{\lambda_B}{c\mu_B}\right)^c = 0.6 \cdot \frac{4}{2} 0.25^2 = 0.075$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right)^n + \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right)^c \frac{1}{c!\,(1-\rho)}\right]^{-1} = \left[1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2 \cdot 0.75}\right]^{-1} = 0.6$$

$$L_C = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda_C}{\mu_C - \lambda_C} = \frac{0.5}{1-0.5} = 1\ cliente$$

$$L_T = L_A + L_B + L_C = 1.5 + 0.533 + 1 = 3.033\ clientes$$

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Asignatura SISTEMAS INFORMÁTICOS II Grupo 236 y 240

Apellidos Nombre

Ejercicio del día 19 de abril de 2018. Examen parcial.

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

2.4 (1 puntos) Calcular justificadamente el tiempo medio de respuesta de todo el sistema.

Usamos Little:

$$W_T = \frac{L_T}{\alpha} = \frac{3.0333}{4} = 0.758$$

2.5 (1 puntos) Calcular justificadamente el tiempo medio de respuesta de las peticiones que son rechazadas por el servidor A.

Usamos Little:

$$W_T = \frac{L_B + L_C}{p_3 \alpha} = \frac{1.533}{0.25 \cdot 4} = 1.533\ segundos$$

2.6 (1 puntos) Calcular justificadamente la probabilidad de que la cola del servidor C exceda las 2 unidades.

Usamos la distribución estacionaria que podemos calcular usando el teorema de Jackson:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n$$
$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda_C}{\mu_C} = 1 - \frac{0.5}{1} = 0.5$$
$$p_1 = 0.5 \cdot 0.5^1 = 0.25$$
$$p_2 = 0.125$$
$$p_3 = 0.0625$$

La probabilidad es la de que en el sistema haya 4 o más unidades

$$1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - 0.5 - 0.25 - 0.125 - 0.625 = 0.0625$$

Formulario:

Modelo M/M/1

$$p_n = (1-\rho)(\rho)^n$$

$$\rho = \lambda / \mu$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$F_W(t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$$

Modelo M/M/c:

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} & (n < c) \\ p_0 \dfrac{c^c}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^n & (n \geq c) \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1}$$

$$P_q = \frac{p_c}{1-\rho} = E_c(c,u)$$

$$L = \frac{P_q \rho}{1-\rho} + c\rho$$

Modelo M/M/c/c:

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (0 \leq n \leq c)$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1}$$

Modelo M/G/1:

$$L = \frac{\lambda^2 \, \mathrm{E}\left[S^2\right]}{2(1-\rho)} + \rho$$

$$\rho = \lambda/\mu$$

Modelo M/M/1/K:

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad (0 \leq n \leq K)$$

$$p_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}\right] & (\lambda \neq \mu) \\ \dfrac{1}{K+1} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu}\left[\dfrac{1-(\lambda/\mu)^K}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}\right] & (\lambda \neq \mu) \\ \dfrac{K}{K+1} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \dfrac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}\left[\dfrac{1-(K+1)(\lambda/\mu)^k + K(\lambda/\mu)^{K+1}}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}\right] & (\lambda \neq \mu) \\ \dfrac{K}{2} & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

Modelo M/M/1//M

$$p_n = p_0 \binom{M}{n} n! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 \frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$\rho = 1 - p_0$$

$$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{\mu}{\lambda}\rho$$

Modelo M/M/c//M

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dbinom{M}{n}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & (0 \leq n < c) \\ p_0 \dbinom{M}{n} \dfrac{n!}{c^{n-c} c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & (c \leq n < M) \end{cases}$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \binom{M}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{M} \binom{M}{n} \frac{n!}{c^{n-c} c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

$$\rho = 1 - \sum_{n=0}^{c-1} p_n \frac{c-n}{c}$$

$$L = M - \frac{\lambda'}{\lambda} = M - \frac{c\mu}{\lambda}\rho$$