EXAMEN CALCULO, PARCIAL 1

$\boxed{\sum (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n+1}\right)}$ $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{n}{n+1} \neq 0$

$\boxed{\sum 7^{-n} \frac{n^2+1}{n^2}}$ $\sqrt[n]{7^{-n} \frac{n^2+1}{n^2}} = 7^{-1} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^2}}}_{\to 1} \longrightarrow \frac{1}{7} < 1$ Conve

$\boxed{\sum \frac{3n}{n^3+2n+1}}$ Comparación con $\frac{3}{n^2} \longrightarrow$ ~~diverg~~ converge

---

$a_1 = 1$ $\quad a_n = \sqrt{2a_{n-1} + 2}$ $\quad n \geq 2$

1. $\{a_n\}$ creciente
2. $\forall n \quad a_n \leq 10$
3. a_n convergente
4. Calcular su límite

1 Inducción

i) $a_1 \leq a_2$; $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2.1+2} = 2$ ✓

ii) Si $a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$

Suponemos $a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow \sqrt{2a_{n-1}+2} \leq \sqrt{2a_n+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$ ✓

Análogamente para 2.

3 Por teoría

- Definición límite
- Demostrar que si una sucesión $\{b_n\}$ tiene por límite -2 existe un n_0 tal que $b_n \leq -1 \quad \forall n \geq n_0$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; |b_n - (-2)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon, -\varepsilon < b_n + 2 < \varepsilon, \; \forall n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; -2-\varepsilon < b_n < -2+\varepsilon, \; \forall n \geq n_\varepsilon.$

entonces para $\varepsilon = 1 \; \exists n_\varepsilon \quad -3 < \boxed{b_n < -1} \; \forall n \geq n_\varepsilon$.

$b_n = \frac{2n^3 - 6}{n^3+1} \longrightarrow 2$ $\quad$ ¿$N \in \mathbb{N}$?

$|b_n - 2| < 10^{-6} \quad \forall n \geq N$

$\left|\frac{2n^3-6}{n^3+1} - 2\right| = \left|\frac{2n^3 - 6 - 2n^3 - 2}{n^3+1}\right| = \left|\frac{-8}{n^3+1}\right| = \frac{8}{n^3+1}$

HOJA 1 DE EJERCICIOS PARA ENTREGAR

Alejandro Santorum Varela

4,7/5

$\boxed{1.}$ a) $\boxed{n^2 \leq 2^n} \equiv P(n)$; $\boxed{n \geq 4}$

1,9

EXPLÍCALO MÁS! "Para probar $P(n)$ $\forall n \geq 4$ por inducción, primero probamos":

A) $P(4)$: $4^2 \leq 2^4 \Rightarrow 16 \leq 16$ ✓

B) Suponiendo $P(n)$ cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar la veracidad de $P(n+1)$.

$2^n \geq n^2$ (H.I.) ✓ $\Rightarrow$ por lo tanto, basta con probar: $(n+1)^2 \leq 2n^2$

$(n+1)^2 \leq 2^{n+1} \Rightarrow (n+1)^2 \leq 2 \cdot 2^n$

$$(n+1)^2 \leq 2n^2 \Rightarrow \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq 2$$

Como $n \geq 4$; $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$; bastaría con demostrar que:

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 \leq 2 \Rightarrow (1'25)^2 \leq 2 \quad ✓$$

Por lo que queda demostrado $P(n+1)$, con lo que $P(n)$ también se cumple para todo n natural ; $n \geq 4$. ✓

b) $\boxed{2^n < n!} \equiv P(n)$; $\boxed{n \geq 4}$

0,9

A) $P(4)$: $2^4 < 4! \Rightarrow 16 < 24$ ✓

B) Suponiendo $P(n)$ cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ también es cierto.

$2^n < n!$ (H.I) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ por lo que llegaría con demostrar: $2 \cdot n! < (n+1)!$

$2^{n+1} < (n+1)! \Rightarrow 2 \cdot 2^n < (n+1)!$

$2 \cdot n! < (n+1)! \Rightarrow 2 \cdot \cancel{n!} < (n+1) \cdot \cancel{n!}$

$2 \cdot \cancel{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1} < (n+1) \cdot \cancel{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1}$

$2 < n+1$; Como $n \geq 4$; $2 < 4+1 < 5+1 < 6+1 \ldots$?? ✓

$n > 1$

Por consiguiente, ~~acabamos~~ de demostrar que $P(n+1)$ se cumple para $n \geq 4$, por lo que $P(n)$ también.

$n=0$ puntos $\Rightarrow 0$ rectas

1) $n=1$ punto $\Rightarrow$ añades $n-1$ rectas $= 1-1 = 0$ rectas } 1 recta

$n=2$ puntos $\Rightarrow$ añades $n-1$ rectas $= 2-1 = 1$ recta } 3 rectas

$n=3$ puntos $\Rightarrow$ añades $n-1$ rectas $= 3-1 = 2$ rectas } 6 rectas

$n=4$ puntos $\Rightarrow$ añades $n-1$ rectas $\Rightarrow 4-1=3$ rectas

¿POR QUÉ?

HAY QUE EXPLICAR ESTO

⋮

$$(*) \quad \boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) \equiv P(n)}$$

A) Parte izda. $(*)$ para $P(2) = 2-1 = 1$

Parte dcha. $(*)$ para $P(2) = \frac{1}{2}\cdot 2(2-1) = 1$ ✓

B) Suponiendo $P(n)$ cierto (hipótesis de inducción), vamos a demostrar que $P(n+1)$ también es cierto.

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+(n-1)}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}n(n-1)} \ (\text{H.I.})} + n = \frac{1}{2}(n+1)\,n$$

$$\frac{1}{2}\cancel{n}(n-1) + \cancel{n} = \frac{1}{2}(n+1)\cancel{n}$$

$$\frac{1}{2}(n-1) + 1 = \frac{1}{2}(n+1) \Rightarrow \frac{1}{2}n - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{1} = \frac{1}{2}n + \cancel{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n \quad ✓$$

Por lo tanto, queda demostrado que $P(n+1)$ es cierto, lo que afirma la veracidad de $P(n)$.

$\boxed{2.}$

Alejandro Santorum Varela

a) (1) $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \,,\ x^2 > 4\}$

$x > \sqrt{4} = \pm 2$

$\boxed{\begin{array}{l} x > \pm 2 \\ x > 0 \end{array}}$

$\Downarrow$

$A = (2, \infty)$ ✓

$\boxed{\inf A = 2}$

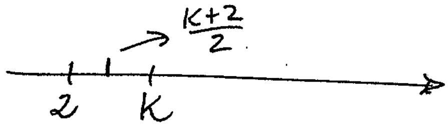
- 2 es cota inferior:

  $\forall x \in A \Rightarrow x \geq 2$ ✓

- 2 es la mayor cota inferior

  Demostración:

  Supongamos $\exists K > 2$ tal que $\forall x \in A,\ x \geq K$



MUY BIEN!

$2 < \frac{2+K}{2} < K \Rightarrow \exists x \in A, x < K \Rightarrow$ CONTRADICCIÓN

No es mínimo porque $2 \notin A$, ya que x es mayor estricto que 2.

$\boxed{\text{No tiene SUPREMO}}$

Demostración:

Supongamos K supremo $\in A$.

K+1 es mayor que K y también está en el conjunto $(2, \infty)$; por lo que llegamos a una contradicción. ✓✓

b) 0,8

$$B = \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}$$

$n=1: \quad \frac{1}{2.1+1} = \frac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$$

$n=2: \quad \frac{2}{2.2+1} = \frac{2}{5}$

$n=3: \quad \frac{3}{2.3+1} = \frac{3}{7}$

$$\boxed{\inf B = \frac{1}{3}}$$

- $\frac{1}{3}$ es cota inferior

  $\forall x \in B \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x$ ¿POR QUÉ?

- $\frac{1}{3}$ es la mayor cota inferior.

  Demostración:
  Supongamos que $\exists K > \frac{1}{3}$ que $\forall b \in B,\ b \geq K$.
  Sin embargo, escogiendo $b = \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3} \in B$, resulta que $b = \frac{1}{3} < K$ por lo que llegamos a una contradicción. ✓

- $\frac{1}{3}$ es mínimo ya que $\frac{1}{3} \in B$ y $\forall x \in B\ \frac{1}{3} \leq x$. ✓

$$\boxed{\sup B = \frac{1}{2}}$$

- $\frac{1}{2}$ es cota superior

  $\forall x \in B \Rightarrow \frac{1}{2} \geq x$ ¿POR QUÉ?

- $\frac{1}{2}$ es la menor cota superior

  Demostración: supongamos $\sup B = \frac{1}{2}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in B$ tal que $\frac{1}{2} - \varepsilon < x_\varepsilon$; como $x_\varepsilon \in B$ se puede representar: $\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{n_\varepsilon}{2n_\varepsilon + 1} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{2} - \frac{n_\varepsilon}{2n_\varepsilon+1} \Rightarrow \varepsilon > \frac{\cancel{2n_\varepsilon} + 1 - \cancel{2n_\varepsilon}}{4n_\varepsilon + 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{\underbrace{4n_\varepsilon + 2}}$ $\Rightarrow \boxed{\varepsilon > \frac{1}{n_0}}$ CIERTO POR EL LEMA:

$4n_\varepsilon + 2 \in \mathbb{N}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ BIEN!

Alejandro Santorum Varela

muy bien!

(5/5)

2º ENTREGA CÁLCULO I

1. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2$ con la definición de ε.

1

Definición de límite:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ quiere decir que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ tal que

$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$ ✓✓

Por lo tanto, vamos a demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2$

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+1} - 2\right| = \left|\frac{2n^2+3-2(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \left|\frac{\cancel{2n^2}+3-\cancel{2n^2}-2}{n^2+1}\right| = \left|\frac{1}{n^2+1}\right|$$

Como $n^2+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n}$; por lo tanto:

$$\left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Ahora bien, $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \quad \forall n > n_\varepsilon$ ✓ entonces:

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow \boxed{n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}}$$

2. $a_1 = 1$ $\quad a_n = \frac{2a_{n-1}+3}{4}$ — Demostrar su convergencia — Hallar su límite.

a) Si una sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces esa sucesión es convergente. ✓✓

• DEMOSTRACIÓN DE QUE $\{a_n\}$ ES CRECIENTE (POR INDUCCIÓN):

- caso base

$a_1 < a_2$; $1 < \frac{2.1+3}{4} = \frac{5}{4}$ ✓ ✓

- Suponemos que $\boxed{P(n) \equiv a_n < a_{n+1}}$ es cierto, entonces intentaremos probar que $a_{n+1} < a_{n+2}$ y, por lo tanto, $\{a_n\}$ sería monótona creciente.

$a_n < a_{n+1}$ (hipótesis de inducción) $\Rightarrow a_n + 3 < a_{n+1} + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_n + 3 < 2a_{n+1} + 3 \Rightarrow \underbrace{\frac{2a_n+3}{4}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\frac{2a_{n+1}+3}{4}}_{a_{n+2}}$

Por lo tanto, concluimos con que $a_{n+1} < a_{n+2}$, que es lo que queríamos probar.

$\{a_n\}$ es monótona creciente. ✓ MUY BIEN!

• DEMOSTRACIÓN DE QUE $\{a_n\}$ ES ACOTADA SUPERIORMENTE (por inducción):

- caso base

$a_1 < 2 \Rightarrow 1 < 2$ ✓

- Suponemos que $P(n) \equiv \boxed{a_n < 2}$ e intentamos demostrar que $P(n+1)$ también es menor que dos, por lo que la sucesión estaría acotada.

$\frac{2a_n+3}{4} < 2$; como $a_n < 2$ (hipótesis de inducción), bastaría ver que $\frac{2.2+3}{4} < 2 \Rightarrow \frac{7}{4} < 2$ ✓ Por lo que $\{a_n\}$ es acotada.

En conclusión, $\{a_n\}$ es convergente. ✓✓

b) Sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = \ell$ hallaremos el límite de $\{a_n\}$.

$a_n = \frac{2a_{n-1}+3}{4} \Rightarrow \ell = \frac{2\ell+3}{4} \Rightarrow 4\ell = 2\ell + 3 \Rightarrow 2\ell = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ell = \frac{3}{2}}$

MUY BIEN EXPLICADO!

3. Estudiar convergendeucia de la serie $\sum \binom{2n+1}{n+1}^{\alpha}$ según $\alpha \in \mathbb{R}$

①

$$\sum \binom{2n+1}{n+1}^{\alpha} = \sum \left(\frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,(\cancel{2n+1-n-1})!} \right)^{\alpha} = \sum \left(\frac{(2n+1)!}{n!\,(n+1)!} \right)^{\alpha}$$

Utilizamos el criterio del cociente:

MUY BIEN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{(2n+2+1)!}{(n+1)!\,(n+2)!}\right]^{\alpha}}{\left[\frac{(2n+1)!}{n!\,(n+1)!}\right]^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{(2n+3)!}{(n+1)!\,(n+2)!}}{\frac{(2n+1)!}{n!\,(n+1)!}} \right]^{\alpha} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n+3)!\,\cancel{(n+1)!}\,\cancel{n!}}{\cancel{(2n+1)!}\,\cancel{(n+1)!}\,(n+2)!} \right]^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+1)(n+2)} \right]^{\alpha} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2\cancel{(n+1)}(2n+3)}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \right]^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+6}{n+2} \right)^{\alpha} = 4^{\alpha}$$

Por el criterio del cociente sabemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} \text{si } l<1 \Rightarrow \sum a_n \text{ Converge} \\ \text{si } l=1 \Rightarrow \sum a_n \text{ puede converger o diverger} \\ \text{si } l>1 \Rightarrow \sum a_n \text{ Diverge} \end{cases}$$

Con esta información podemos deducir que si α es positivo, el límite siempre va ser mayor que 1, por lo que $\sum a_n$ diverge.

Si α es negativo, el límite sería menor que 1 y por consiguiente convergería.

Si ~~≠~~ $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ el límite sería 1, por lo que lo tendríamos que analizar más afondo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n+1}{n+1}^{0} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \Rightarrow$$ Sería una suma de unos infinita por lo que $\sum a_n$ diverge

ALEJANDRO SANTORUM VARELA 44090946-S 3ª ENTREGA:

5/5

$\boxed{1.}$ $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ tal que $m, n > n_\varepsilon$, entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$

Tomemos un $\varepsilon > 0$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$.

$$\left|\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m}\right| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{m}\right)\right| = \left|\cancel{1} + \frac{1}{n} - \cancel{1} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

Como hemos dicho $n<m$, entonces $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$:

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

Y como $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ entonces se cumplirá la condición si: $\frac{1}{n} <$

Es decir, $\{a_n\}$ será de Cauchy si $m > n > \frac{1}{\varepsilon} = n_\varepsilon$

$\boxed{2.}$ $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0}$

Sabemos por la definición que si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

En este ejercicio en concreto tenemos:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1} - 0\right| < \varepsilon$

Entonces:

$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ Como $x+1 > x \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < \left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{|x-1|}{|x|} \overset{|x-1|<\delta}{<} \frac{\delta}{|x|}$$

tenemos que para $|x| > 1$:

$$\frac{\delta}{1} = \delta$$

Por lo tanto, tomando $\delta = \varepsilon$ obtenemos finalmente:

$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < \varepsilon$ por lo que queda demostrado que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0.$$

3. (2) Es sabido que para dos series de números reales $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, onde al menos una de las dos es <u>absolutamente convergente</u>, su producto $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$, para el cual $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, también converge.

No obstante, el producto de dos series condicionalmente convergentes puede diverger, que es lo que demostraremos a continuación.

En primer lugar, reescribiremos C_n llamando $j=n-k$:

$\boxed{j=n-k} \Longrightarrow k=n-j \Rightarrow k+j=n$

$$C_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j$$

Para el contraejemplo que ~~mostraremos~~ a continuación efectuaremos el producto de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ por ella misma $\left(\sum a_n = \sum b_n\right)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{D_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{E_n}$$

- Las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{N} D_n$ son acotadas:

$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n = +1-1+1-1+1-1+1-1\ldots$ En N el resultado podrá ser 0 ó -1, por lo que queda demostrado que las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{N} D_n$ son acotadas

- $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 0$$

- $\{E_n\}$ monótona decreciente: demostración por inducción.

- caso base: $E_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$; $E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $E_1 > E_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$

- Suponemos que $E_{n-1} > E_n$, y demostraremos que $E_n > E_{n+1}$:

$E_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-1+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $E_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; por hipótesis de inducción

$$E_{n-1} > E_n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{E_n} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1+1}}}_{E_{n+1}} \Rightarrow E_n > E_{n+1}$$

Queda demostrado que $\{E_n\}$ es monótona decreciente.

Alejandro Santorum

CONTINUACIÓN 3

Por lo tanto, por el Criterio de convergencia de Leibniz, podemos afirmar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ es condicionalmente convergente, lo que muestra que vamos bien encaminados. (*)

Ahora hacemos el producto por ella misma $(\sum a_n = \sum b_n)$:

$$C_n = \sum_{k+j=n} \frac{(-1)^k \; (-1)^j}{\sqrt{k+1} \; \sqrt{j+1}}$$; recordamos que $j = n-k$

$$C_n = (-1) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$; sabiendo que para todo par de nºs reales A, B se verifica:

$$AB = \frac{1}{4} \cdot \left[(A+B)^2 - (A-B)^2 \right]$$

podemos afirmar:

¿NO HUBIESE SIDO MÁS FÁCIL ACOTAR SABIENDO QUE $0 \leq k \leq n$

$$(k+1)(n-k+1) = \frac{1}{4}\left((n+2)^2 - (n-2k)^2\right) \leq \frac{1}{4}(n+2)^2$$

Lo que implica:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq (n+1)\frac{2}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2}$$

Esto tiende a 2 cuando n tiende a ∞.

Es decir, $\lim_{n \to \infty} C_n \neq 0$ por lo que la serie de producto a_n por b_n (en este ejemplo en concreto $a_n = b_n$) no es divergente, lo que viene a significar que diverge.

qed.

(*) Por otra parte, $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$ tiende a uno cuando n tiende a infinito, lo cual implica por el criterio de comparación por cociente con $\frac{1}{\sqrt{n}}$ que la serie no es absolutamente convergente.

ALEJANDRO SANTORUM VARELA 4ª ENTREGA 5/5

1. Demuestra que la ecuación $x^{180} + \frac{84}{1+x^2+\cos^2 x} = 119$ tiene al menos dos soluciones.

2 MUY BUEN EJERCICIO

$$\boxed{f(x) = x^{180} + \frac{84}{1+x^2+\cos^2 x} - 119}$$

f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas menos en los posibles puntos en los que se anule el denominador: $1+x^2+\cos^2 x = 0$?

Ahora bien, $1+x^2+\cos^2 x$ nunca se anula; de hecho, su imagen no adopta nunca valores negativos ya que $x^2 \geq 0$ y $\cos^2 x \in [-1, 1]$ $\forall x$.

En el caso de que $x^2 = 0 \Rightarrow \cos^2 0 = 1 \Rightarrow 1 + 0 + \cos^2 0 = 2 >$

Por otro lado si $\cos^2 x = -1$, este -1 se anularía con el $+1$ y $x^2 > 0$ (mayor estricto), por lo que $1+x^2+\cos^2 x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. MUY BIEN

En conclusión, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Analizamos ahora la función en unos puntos:

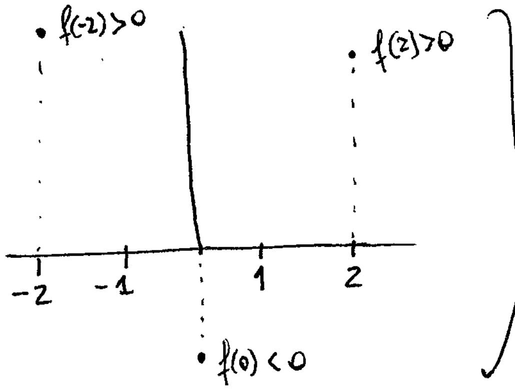
$$f(0) = 0 + \frac{84}{1+0+1} - 119 = 42 - 119 < 0$$

$$f(-2) = (-2)^{180} + \frac{84}{1+4+\cos^2(-2)} - 119 > 0$$

debido a que -2 está elevado a una potencia par y el resultado desta es un nº extremadamente grande

$$f(2) = 2^{180} + \frac{84}{1+4+\cos^2(2)} - 119 > 0$$

también positivo por las mismas razones expuestas arriba. 2^{180} es un nº enorme.



$\Rightarrow$ Por el Teorema de Bolzano podemos afirmar que $f(x)$ tiene al menos una solución en $(-2, 0)$ y al menos otra en $(0, 2)$ ya que $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Podría anularse en más sitios que en estos intervalos.

MUY BIEN HECHO!

$\boxed{2.}$ Escribir un número dado $a>0$ como producto de dos factores positivos cuya suma sea mínima. DATOS: $a>0$; $x>0$; $y>0$

1)

$$\boxed{a = xy} \Rightarrow y = \frac{a}{x}$$

$$S = x + y \Rightarrow S(x) = x + \frac{a}{x}$$

$$S'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} \; ; \; S'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - a}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - a = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{a}} \rightarrow \text{solución positiva ya que } x>0$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{\cancel{a}\sqrt{a}}{\cancel{a}} = \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{a}} \quad y>0$$

$$S''(x) = -\left(-\frac{2ax}{x^4}\right) = \frac{2a}{x^3}, \text{ como } a>0 \text{ y } x>0 \Rightarrow S''(x)>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{a} \text{ es un mínimo}}$$

$$\boxed{a = \sqrt{a}\sqrt{a}} \quad \boxed{S = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}}$$

MUY BIEN

$\boxed{3.}$ Dada la función $f(x) = 5\,\text{sen}\,x + 3\cos x$, halla $f^{(117)}(\pi)$.

1) Calculemos algunas derivadas:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 5\,\text{sen}\,x + 3\cos x \\ f'(x) &= 5\cos x - 3\,\text{sen}\,x \\ f''(x) &= -5\,\text{sen}\,x - 3\cos x \\ f'''(x) &= -5\cos x + 3\,\text{sen}\,x \\ f^{IV}(x) &= 5\,\text{sen}\,x + 3\cos x \end{aligned}\right\}$$

Podemos observar que tras cuatro derivaciones la función adopta la misma forma, por lo que dividiremos 117 entre 4 y observaremos el resto:

$$\begin{array}{r|l} 117 & 4 \\ 37 & 29 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow f^{(116)}(x) = 5\,\text{sen}\,x + 3\cos x$$

$$\boxed{f^{(117)}(x) = f'^{(116)}(x) = 5\cos x - 3\,\text{sen}\,x}$$

$$f^{(117)}(\pi) = 5\cos\pi - 3\,\text{sen}\,\pi = 5\cdot(-1) - 0 = -5$$

$$\boxed{f^{(117)}(\pi) = -5}$$

ALEJANDRO SANTORUM VARELA 5ª ENTREGA CÁLC. I 14/12/2016

1) $\boxed{1.}$ Usa el Teorema del Valor Medio para probar la siguiente desigualdad para todo $x>0$:

5/5

MUY BIEN !

$$\boxed{\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x}$$

- Primera desigualdad: $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x \quad \forall x>0$

Consideremos la función: $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan x < 0$ en $[0,x]$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\cancel{(1+x^2)} - 2x^2 - \cancel{(1+x^2)}}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

Por el T.V.M. sabemos: $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow$ Como $f(0)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = xf'(c) \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} - \arctan x = xf'(c) = x \cdot \frac{-2c^2}{(1+c^2)^2}$$

Como $x>0$ y $\frac{-2c^2}{(1+c^2)^2} < 0 \Rightarrow x\frac{-2c^2}{(1+c^2)^2} < 0 \quad \forall c \in [0,x]$.

Queda demostrada la 1ª desigualdad

- Segunda desigualdad: $\arctan x < x \quad \forall x>0$

Consideremos la función: $f(x) = \arctan x - x < 0$ en $[0,x]$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - x^2}{1+x^2} = \frac{-x^2}{1+x^2}$$

Por el T.V.M. sabemos: $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow$ Como $f(0)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = xf'(c) \Rightarrow \arctan x - x = xf'(c) = x \cdot \frac{-c^2}{1+c^2}$$

Como $x>0$ y $\frac{-c^2}{1+c^2} < 0 \Rightarrow x\frac{-c^2}{1+c^2} < 0 \quad \forall c \in [0,x]$.

Queda demostrada la 2ª desigualdad.

Queda demostrado por el T.V.M.:

$$\boxed{\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad \forall x>0}$$

3. Usando el Polinomio de Taylor, halla sen(1) con error menor a 10^{-5}

$$\operatorname{sen} 1 = f(0) + f'(0)\cdot 1 + \frac{f''(0)\cdot 1^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)\cdot 1^n}{n!} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)\, 1^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{ERROR}}$$

Resto:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(c)\cdot 1^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{1\cdot 1^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-5} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{10^5} =$$

$$\Rightarrow \boxed{(n+1)! > 10^5}$$

- Para $n=7 \Rightarrow ¿8! > 10^5?$

$$\frac{8!}{10^5} = \frac{2.3.2.\cancel{2}.\cancel{5}.\cancel{2}.3.7.\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{2}}{\cancel{2}.5.\cancel{2}.5.\cancel{2}.5.\cancel{2}.5.\cancel{2}.\cancel{5}} = \frac{4.9.7}{5^4} = \frac{252}{625} < 1 \Rightarrow 10^5 > 8!$$

- Para $n=8 \Rightarrow ¿9! > 10^5?$

$$\frac{9!}{10^5} = \frac{\cancel{2}.3.\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{5}.\cancel{2}.3.7.\cancel{2}.2.2.3.3}{\cancel{2}.\cancel{5}.\cancel{2}.5.\cancel{2}.5.\cancel{2}.5.\cancel{2}.5} = \frac{2^2.3^4.7}{5^4} = \frac{2268}{625} > 1 \Rightarrow 9! > 10^5$$

Tenemos que calcular el Polinomio de Taylor para $n=8$ (como mínimo)

$$\operatorname{sen}(1) \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{7! - 840 + 42 - 1}{7!} = \frac{7! - 789}{7!} =$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}(1) \approx 1 - \frac{789}{7!}}$$

ERROR MENOR QUE 10^{-5}

$\boxed{3.}$ Calcula el siguiente límite:

2

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x}{(\log(1+x))^4}}$$

Sustituyendo por 0 resulta una indeterminación $\frac{0}{0}$, la cual no es viable resolver por L'Hôpital debido a su complejidad.

Procedemos entonces a resolver el límite utilizando el Polinomio de Taylor:

Sabemos lo siguiente:

$$\begin{cases} \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \\ \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots \\ \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x}{(\log(1+x))^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right) - \cancel{1} + \frac{1}{2} x \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)}{\left(x + O(x^2)\right)^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{-\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^4}{4!} + \overbrace{O(x^6)}^{\text{tiende a } 0} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{2.3!} + \overbrace{\frac{x\,O(x^5)}{2}}^{\text{tiende a } 0}}{x^4\left(1 + \underbrace{O(x^2)}_{\text{tiende a } 0}\right)^4} =$$

MUY BIEN!!

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{12}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\cancel{x^4}}{24}}{\cancel{x^4}} = \boxed{\frac{-1}{24}}$$