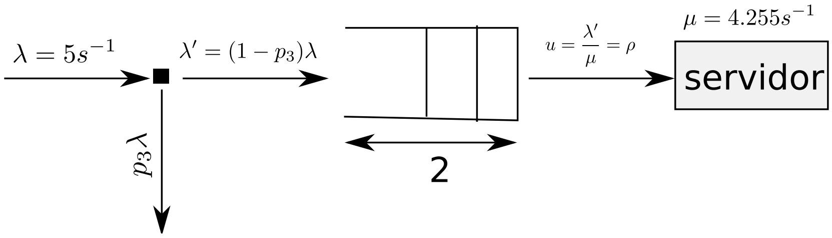

Figure 1: Modelo M/M/1/3

1 Ejercicio 2-16

El tiempo que emplea un determinado servidor de control de accesos de una red en procesar una solicitud de autenticación de un usuario se puede considerar como una variable aleatoria con distribución exponencial de valor esperado 235 ms. Debido a su construcción, tiene una cola de espera limitada, de modo que rechaza cualquier nueva solicitud que reciba cuando ya se encuentra procesando una y hay otras dos en espera. Si se supone que el número de clientes del servidor es muy grande, y que las peticiones que realizan siguen un ritmo de Poisson con una tasa de 5 peticiones por segundo, calcular la probabilidad de que se rechace una solicitud, la ocupación media del servidor y el tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones que son procesadas.

- Tiempo de servicio exponencial con valor esperado 0.235s $\rightarrow T_s = 0.235 \rightarrow \mu = \frac{1}{T_s} = 4.255$ peticiones/s.
- Cola de espera limitada, de modo que rechaza cualquier nueva solicitud que reciba cuando ya se encuentra procesando una y hay otras dos en espera $\rightarrow$ Cola de tamaño 2 y 1 servidor $\rightarrow$ Capacidad máxima de clientes que puede contener el sistema.
- Las peticiones que srealizan siguen un ritmo de Poisson con tasa de 5 peticiones por segundo $\rightarrow$ Tiempo entre llegadas exponencial con tasa de llegadas $\lambda = 5$ peticiones/segundo.

Por tanto, se tarda de un modelo **M/M/1/3** de acuerdo a la Figura 1.

1.1 Probabilidad de rechazar solicitud

La probabilidad de rechazar una solicitud viene dada por la probabilidad de que haya actualmente 3 clientes en el sistema (1 siendo servido y 2 en cola). Por tanto, la probabilidad de rechazo viene dada por p_3.

Podemos calcularla de acuerdo a la expresión de la distribución estacionaria de Markov para el modelo M/M/1/K:

$$p_3 = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3$$

Conocemos λ y μ pero necesitamos calcular p_0. Usamos la expresión para p_0 derivada del segundo axioma de probabilidad:

$$p_0 = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} = \frac{1-\frac{5}{4.255}}{1-\left(\frac{5}{4.255}\right)^4} \approx 0.193$$

Con este valor de p_0 podemos calcular p_3 como sigue:

$$p_3 = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 = 0.193 \cdot \left(\frac{5}{4.255}\right)^3 \approx 0.313$$

Notad que entonces la tasa efectiva de llegadas sería $\lambda' = \lambda \cdot (1 - p_3) = 5 \cdot (1 - 0.313) = 3.435$ que es menor que la tasa de servicio μ.

1.2 Ocupación media del servidor

La ocupación media del servidor vendrá dada por ρ, la cual podemos calcular mediante la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}\left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}\right] = \frac{5}{4.255}\left[\frac{1-\left(\frac{5}{4.255}\right)^3}{1-\left(\frac{5}{4.255}\right)^4}\right] \approx 0.807$$

Otra forma de calcular ρ es obtenerlo a partir de la tasa efectiva de llegadas, λ', procedente del apartado anterior:

$$\rho = \frac{\lambda'}{\mu} = \frac{3.435}{4.255} \approx 0.807$$

Es decir, el servidor se encuentra ocupado el 80.7% del tiempo.

1.3 Tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones que son procesadas

El tiempo medio de estancia en el sistema de las peticiones que son procesadas viene dado por W.

Para calcular W podemos seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el número medio de clientes en el sistema L.
2. Obtener W a partir de L usando el Teorema de Little.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\left[\frac{1-(K+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K + K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}\right] = \\ &= \frac{\frac{5}{4.255}}{1-\frac{5}{4.255}}\left[\frac{1-4\left(\frac{5}{4.255}\right)^3+3\left(\frac{5}{4.255}\right)^4}{1-\left(\frac{5}{4.255}\right)^4}\right] \approx 1.705 \textit{ clientes} \end{aligned}$$

Ahora calculamos el tiempo medio de estancia en el sistema (latencia) en función de L y la tasa **efectiva** de llegadas (IMPORTANTE: el Teorema de Little se calcula sobre la tasa efectiva de llegadas):

$$W = \frac{L}{\lambda'} = \frac{1.705}{3.435} \approx 0.496\ segundos$$