DEFINICIONES LÓGICA PROPOSICIONAL

BASE DE CONOCIMIENTO: Conjunto de Fórmulas Bien Formadas (FBFs) que representan aserciones verdaderas sobre la situación en la que se encuentra el agente en el mundo real.

PROPOSICIÓN: Sentencia declarativa sobre algún aspecto del mundo real que tiene un valor de verdad definido (verdadero o falso).

PROPOSICIÓN ATÓMICA: proposición cuyo valor de verdad solo puede determinarse por contraste directo con el mundo real.

PROPOSICIÓN COMPUESTA: prop. atómicas + conectores lógicos.

ÁTOMOS:

ÁTOMOS LITERALES: V (verdadero), F (falso)

ÁTOMOS SIMBÓLICOS: representan proposiciones atómicas

EGLAS DE INFERENCIA: reglas tipográficas que únicamente manipulan símbolos (no utilizan el significado). Nos permiten generar nuevas BF's a partir de un conjunto dado.

NTERPRETACIÓN: una interpretación es una asignación de valores de erdad ("verdadero" o "falso") a los átomos involucrados en las FBFs le una base de conocimiento.

ara una b.d.c. con n átomos diferentes, el nº de interpretaciones es 2^n.

DELO: Una interpretación es un modelo de una base de conocimiento ada, si todas las FBFs de la b.d.c. tienen el valor de verdad para esa interpretación.

SATISFACIBLE (SAT): Una b.d.c. es satisfacible (SAT) si existe al menos una interpretación que es modelo de dicha b.d.c.

INSATISFACIBLE (UNSAT): Una b.d.c. es insatisfacible (contradicción) si no hay ninguna interpretación que sea modelo.

TAUTOLOGÍA: Una FBF es una tautología si todas las interpretaciones son modelo de dicha FBF.

PRUEBA: La secuencia de FBFs $\{W_1, W_2, \dots, W_{n-1}, W_n\}$ es una prueba (o deducción) de W_n a partir del conjunto Δ mediante el conjunto de reglas de inferencia R si y sólo si todas y cada una $W_1, \dots, W_n$ o bien están en Δ o pueden deducirse de $\{W_1, \dots, W_{n-1}\}$ mediante alguna regla de inferencia R

TEOREMA: W_n es un teorema de Δ con el conjunto de reglas de inferencia R si hay una prueba de W_n a partir de Δ mediante el conjunto de reglas de inferencia R.

$$\Delta \vdash_R W_n$$

CORRECCIÓN: R es correcto si $\Delta \vdash_R W \Rightarrow \Delta \models W$

COMPLETITUD: R es completo si $\Delta \models W \Rightarrow \Delta \vdash_R W$

CONSECUENCIA LÓGICA: $\Delta \models W$

Dado un conjunto de FBFs $\Delta = \{W_1, \dots, W_n\}$ y una FBF W

¿Cómo demostrar $\Delta \models W$?

1) Comprobando que los modelos de Δ son de W (tablas de verdad)
2) Demostrando que W es un teorema de Δ con R (inferencia)
3) Comprobando que $(W_1 \wedge W_2 \wedge \dots \wedge W_n) \Rightarrow W$ es una tautología (inferencia / tablas de verdad)

4) Prueba por contradicción: Sea $\alpha = \{\Delta, \neg W\} = \{W_1, \dots, W_n, \neg W\}$ es UNSAT (inferencia / tablas de verdad)

REGLAS DE EQUIVALENCIA

Dos FBFs distintas W_1, W_2 son equivalentes $(W_1 \equiv W_2)$ cuando tienen la misma tabla de verdad.

- Elemento neutro: $(W_1 \wedge V) \equiv W_1$; $(W_1 \vee F) \equiv W_1$
- Leyes de absorción: $(W_1 \wedge (W_1 \vee W_2)) \equiv W_1 \equiv (W_1 \vee (W_1 \wedge W_2))$
  $W_1 \vee (W_1 \wedge W_2) \equiv W_1 \equiv W_1 \wedge (W_1 \vee W_2)$
- Ley de contradicción: $(W_1 \wedge \neg W_1) \equiv F$; $(W_1 \vee \neg W_1) \equiv V$
- Leyes de dominación: $(W_1 \wedge F) \equiv F$; $(W_1 \vee V) \equiv V$
- Idempotencia: $(W_1 \wedge W_1) \equiv W_1$; $(W_1 \vee W_1) \equiv W_1$
- Doble negación: $\neg(\neg W_1) \equiv W_1$
- Leyes de DeMorgan: $\neg(W_1 \vee W_2) \equiv \neg W_1 \wedge \neg W_2$; $\neg(W_1 \wedge W_2) \equiv \neg W_1 \vee \neg W_2$
- Conmutatividad: $W_1 \vee W_2 \equiv W_2 \vee W_1$; $W_1 \wedge W_2 \equiv W_2 \wedge W_1$
- Leyes asociativas: $(W_1 \wedge W_2) \wedge W_3 \equiv W_1 \wedge (W_2 \wedge W_3) \equiv W_1 \wedge W_2 \wedge W_3$ (conjunción)
  $(W_1 \vee W_2) \vee W_3 \equiv W_1 \vee (W_2 \vee W_3) \equiv W_1 \vee W_2 \vee W_3$ (disyunción)
- Leyes distributivas: $W_1 \wedge (W_2 \vee W_3) \equiv (W_1 \wedge W_2) \vee (W_1 \wedge W_3)$
  $W_1 \vee (W_2 \wedge W_3) \equiv (W_1 \vee W_2) \wedge (W_1 \vee W_3)$
- Definición de condicionalidad: $W_1 \Rightarrow W_2 \equiv \neg W_1 \vee W_2$
- Contraposición: $W_1 \Rightarrow W_2 \equiv \neg W_2 \Rightarrow \neg W_1$

Definición de bicondicional: $W_1 \Leftrightarrow W_2 \equiv (W_1 \Rightarrow W_2) \wedge (W_2 \Rightarrow W_1)$

REGLAS DE INFERENCIA

Reglas de inferencia: reglas tipográficas que manipulan únicamente símbolos.

Reglas de inferencia correctas: reglas de inferencia en las que los modelos de conjunto de FBFs de partida son tambien modelos de las FBFs generadas.

* Las reglas de equivalencia son reglas de inferencia correctas

Conjunto de reglas de inferencia: (correcto pero no completo)

(1) MODUS PONENS: $\{W_1, W_1 \Rightarrow W_2\} \vdash_{M.P.} W_2$

(2) MODUS TOLLENS: $\{\neg W_2, W_1 \Rightarrow W_2\} \vdash_{M.T.} \neg W_1$

(3) INTRODUCCIÓN DE $\wedge$: $\{W_1, W_2\} \vdash_{\wedge\, INTRO} W_1 \wedge W_2$

(4) INTRODUCCIÓN DE $\vee$: $\{W_1, W_2\} \vdash_{\vee\, INTRO} W_1 \vee W_2$

(5) ELIMINACIÓN DE $\wedge$: $\{W_1 \wedge W_2\} \vdash_{\wedge\, ELIM} W_1$ (análogo W_2)

(6) CONMUTATIVIDAD DE $\wedge$: $\{W_1 \wedge W_2\} \vdash_{\wedge\, CONMUTA} W_2 \wedge W_1$

(7) ELIMINACIÓN DE $\neg\neg$ $\{\neg\neg W_1\} \vdash_{\neg\neg\, ELIM} W_1$

(8) RESOLUCIÓN: $\{K_1 = \{A \vee B \vee C\}, K_2 = \{\neg A \vee D \vee E\}\} \vdash_{RES\, A} \{K_3 = \{B \vee C \vee D \vee E$

CONVERSIÓN A FNC

Algoritmo que transforma una FBF de la lógica proposicional en una FBF equivalente:

1.- Eliminar las dobles implicaciones
2.- Eliminar las implicaciones
3.- Reducir el ámbito de la negación (De Morgan)
4.- Convertir a FNC utilizando las leyes asociativas y distributiva
5.- Simplificar las expresiones resultantes utilizando reglas de equivalencia

Resolución + Refutación es completo

LÓGICA DE PREDICADOS

TIPOS DE LÓGICA

- LÓGICA DE ORDEN CERO o "LÓGICA PROPOSICIONAL": Objetos, conectores lógicos
- LÓGICA DE PRIMER ORDEN o "LÓGICA DE PREDICADOS": Funciones, predicados, cuantificadores cuyos argumentos son variables cuyo dominio es un conjunto de objetos.
- LÓGICA DE SEGUNDO ORDEN: Funciones, predicados, cuantificadores cuyos argumentos pueden ser predicados
- LÓGICA DE ORDEN SUPERIOR: Funciones, predicados, cuantificadores cuyos argumentos pueden ser predicados de predicados.

REGLAS DE EQUIVALENCIA Y REGLAS DE INFERENCIA

REGLAS DE EQUIVALENCIA

- Reglas de equivalencia de la lógica proposicional
- Renombramiento: $\forall x \; W(x) \equiv \forall y \; W(y)$
- $\neg \forall x \; W(x) \equiv \exists x \; \neg W(x)$
- $\neg \exists x \; W(x) \equiv \forall x \; \neg W(x)$

REGLAS DE INFERENCIA

- Reglas de inferencia de la lógica proposicional
- Instanciación del universal (UI) [CORRECTA]

  $\forall x \; W(x) \vdash_{UI} W(A)$, donde A pertenece al dominio de x
- Generalización del existencial (GE) [CORRECTA]

  $W(A) \vdash_{EG} \exists x \; W(x)$, x es el símbolo cuyo dominio incluye a A.

SKOLEMIZACIÓN

Un <u>cuantificador existencial</u> (∃) puede ser eliminado de una FBF reemplazando cada ocurrencia de la variable cuantificada existencialmente por :

- Un <u>OBJETO DE SKOLEM</u> (constante), si no hay variables cuantificadas universalmente cuyo ámbito abarque el ámbito de la variable cuyo ∃ se está eliminando.

  Ej: $\exists x \; W(x) \xRightarrow{\text{Skolem}} W(SK_1)$

  SK es un objeto cuya identidad desconocemos pero que sabemos que existe.

- Una <u>FUNCIÓN DE SKOLEM</u> cuyos argumentos son las variables cuantificadas de manera universal cuyo ámbito abarque el ámbito de la variable cuyo ∃ se está eliminando.

  Ej: "Todas las personas tienen una altura"

  $$\forall p \left[\exists h \left(Altura(p,h) \right) \right]$$

  dominio de p: personas
  dominio de h: reales positivos

  $$\Downarrow \text{Skolem}$$

  $$\forall p \; Altura(p, a(p))$$

  a(p) es una función de Skolem, desconocida pero sabemos que existe, que toma como arg una persona y devuelve su altura.

<u>METATEOREMA 1</u>: La forma de Skolem de una FBF NO es equivalente a la FBF original

<u>METATEOREMA 2</u>: La forma de Skolem de un conjunto de FBFs es EQUIVALENTE INFERENCIALMENTE al conjunto original de FBFs

Es decir:

- Un conjunto de FBFs es SAT $\Longleftrightarrow$ Su forma de Skolem es SAT.
- Un conjunto de FBFs es UNSAT $\Longleftrightarrow$ Su forma de Skolem es UNSAT.

CONVERSIÓN A FNC EN LÓGICA DE PRIMER ORDEN

$\boxed{1.}$ Eliminar implicaciones $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$

$\boxed{2.}$ Reducir el ámbito de la negación $\neg$

- Leyes de De Morgan
- Eliminación de las dobles negaciones
- Combinación de $\neg$ con cuantificadores

$\boxed{3.}$ Estandarizar las variables de tal forma que las variables distintas tengan símbolos (nombres) diferentes.

$\boxed{4.}$ Skolemización, eliminando los cuantificadores existenciales reemplazando las variables correspondientes por constantes de Skolem o funciones de Skolem.

$\boxed{5.}$ Convertir a forma prenexa, desplazando todos los cuantificadores universales al principio de la FBF

$\boxed{6.}$ Eliminar cuantificadores universales

$\boxed{7.}$ Usar ley distributiva y reglas de equivalencia de la lógica proposicional para transformar la matriz a FNC

$\boxed{8.}$ Eliminar $\wedge$ para obtener un conjunto finito (Δ) de FBFs

SUSTITUCIÓN

Considérese la expresión W que contiene las variables $V_1, V_2, \dots, V_n$.

La SUSTITUCIÓN σ es un reemplazo simultáneo de variables en W por términos.

$$W = W(V_1, V_2, \dots, V_n)$$

$$\downarrow \; \sigma = \{V_1 := t_1,\; V_2 := t_2,\; \dots,\; V_n := t_n\}$$

$$W\sigma = W(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$W\sigma$ es una INSTANCIA de W.

OJO: el término t_i no puede contener a la variable V_i.

OJO: el término t_i es una INSTANCIACIÓN de la variable V_i.

UNIFICACIÓN

Se dice que la sustitución σ es el UNIFICADOR de un conjunto de FBFs $\Gamma = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ cuando cumple $W_1\sigma = W_2\sigma = \dots = W_n\sigma$
Este proceso se llama UNIFICACIÓN.
El resultado de la unificación es único, excepto posibles variantes alfabéticas.

La unificación es CORRECTA: dado que todas las variables están universalmente cuantificadas, la unificación es una forma particular de instanciación universal, que es una regla de inferencia correcta.

El conjunto de DISCREPANCIA de un conjunto no vacío de FBFs $\Gamma = \{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ es la primera expresión (la que está más a la izquierda) donde las FBFs en Γ no concuerdan.

ALGORITMO DE UNIFICACIÓN

unificador más general de Γ

Entrada: Γ Salida: $umg(\Gamma)$

1. $K=0$; $\Gamma_K = \Gamma$; $\sigma_K = \varepsilon$ (sustitución vacía)
2. Si Γ_K tiene 1 solo elemento, devolver σ_K.
3. $D_K \longleftarrow$ conjunto de discrepancia de Γ_K
4. Si D_K contiene:
   - un término t_K ← constante / variable / eval. función } referencia a un objeto
   - una variable V_K que NO ESTE en t_K

   entonces: $\sigma_{K+1} \longleftarrow \sigma_K \cdot \{V_K := t_K\}$

   $\Gamma_{K+1} \longleftarrow \Gamma_K \cdot \{V_K := t_K\}$ (eliminar FBFs repetidas)

   else: salir devolviendo fallo (Γ no es unificable)
5. $K = K{+}{+}$ e ir al paso 2.