Hoja 4

Funciones vectoriales. Regla de la cadena. Plano tangente a una superficie

1.- Sea $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ con $u = \dfrac{x-y}{2}, v = \dfrac{x+y}{2}$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x,y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

2.- Sean $f(x,y) = x^2 + y$, $g(u) = (\operatorname{sen} 3u, \cos 8u)$ y $h(u) = f(g(u))$. Calcular dh/du en $u = 0$ tanto de forma directa como usando la regla de la cadena.

3.- Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$. Aplicar la regla de la cadena para la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{xy} \cos xy^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

4.- La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $F(t)$ en $f(x,y) = F(g(x,y))$. Calcúlese la matriz de $Df(x,y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$.

5.- Las ecuaciones $u = f(x,y)$, $x = x(s,t)$ e $y = y(s,t)$ definen u como función de las variables (s,t). Expresar las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, en términos de las diversas derivadas parciales de f, x e y. Resolver este mismo ejercicio en el caso particular en que $x(s,t) = s\,t$, $y(s,t) = \dfrac{s}{t}$.

6.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(2x+y)), \qquad g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3v^3, 2v - u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de $Df(x,y)$ y $Dg(u,v,w)$. Calcular la función compuesta $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$ y la matriz de $Dh(1,-1,1)$.

7.- Sean f una función diferenciable en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $g = (g_1, g_2)$ la función vectorial

$$g(u,v,w) = (u^2 + v^2 + w^2, u + v + w).$$

Considérese la función compuesta $h = f \circ g$ y demuéstrese que

$$\|\nabla h\|^2 = 4\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 g_1 + 4\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} g_2 + 3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

8.- (a) Hallar la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, siendo $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\,dt$, definida para $x > 0, y > 0$.

(b) Hallar el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$, donde

$$f(x,y) = \int_0^{x^3-2y} e^{t^2}\,dt, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

9.- Supongamos que la ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - k = 0$ define z como función de x e y, sea ésta $z = f(x,y)$. Hallar el valor de la constante k para el cual $f(0,e) = 2$ y calcular $\nabla f(0,e)$.

10.- Hállese la ecuación de los planos tangentes a la gráficas de la funciones:

(*a*) $f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,0)$.

(*b*) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

11.- Hállese la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 - y^2 - z = 0$ en el punto $(1, 1, 0)$.

12.- Si (a, b, c) es un punto de la superficie $z = x\,y$, las dos rectas

$$\left\{ \begin{array}{l} z = b\,x, \\ y = b, \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = a\,y, \\ x = a, \end{array} \right.$$

se cortan en (a, b, c) y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto (a, b, c) contiene a esas dos rectas.

13.- Hallar la ecuación de la única recta tangente a las dos superficies $x^2 + y^2 + 2\,z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1, 1, 1)$.

14.- Hallar una constante c tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$, los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.

15.- Calcular las derivadas direccionales de las funciones:

(a) $f(x, y, z) = 3\,x - 5\,y + 2\,z$ en el punto $(2, 2, 1)$ en la dirección de la normal exterior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, en la dirección de la normal exterior en dicho punto.

$$\boxed{\text{HOJA 4}}$$

$\boxed{1.}$ $F(x,y) = f\big(u(x,y),\, v(x,y)\big)$; $u = \dfrac{x-y}{2}$; $v = \dfrac{x+y}{2}$

$$F(x,y) = (f \circ T)(x,y) \quad ; \quad T(x,y) = (u,v) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

$$\nabla F(x,y) = \nabla (f \circ T)(x,y) \overset{RC}{=} \nabla f\big(T(x,y)\big) \cdot DT(x,y)$$

$$DT(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f\big(T(x,y)\big) = \nabla f\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3.}$ $u = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

calcular $u'(t)$.

$$u(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = (f \circ g)(t)$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to (x(t), y(t))$$
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g = u"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$Du(t) = Df(g(t)) \cdot Dg(t)$$

$$\circledast\ \underline{Dg(t)} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{Df(x,y)} = \left(y e^{xy} \cos(xy^2) - y^2 e^{xy} \operatorname{sen}(xy^2),\ x e^{xy} \cos(xy^2) - 2xy\, e^{xy} \operatorname{sen}(xy^2)\right)$$

$$Du(t) = \underbrace{Df(x,y)} \cdot \underbrace{(\underset{x(t)}{\cos(t)}, \underset{y(t)}{\operatorname{sen}(t)})} \cdot \underbrace{Dg(t)}_{\circledast}$$

4.1 f diferenciable en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y

$g = (g_1, g_2)$ dada por $g(u,v,w) = (\underbrace{u^2+v^2+w^2}_{g_1}, \underbrace{u+v+w}_{g_2})$

Consideremos $h = f \circ g$ y probar que

$$\|\nabla h\|^2 = 4(\partial_x f)^2 g_1 + 4(\partial_x f)(\partial_y f) g_2 + 3(\partial_y f)^2$$

Demostración

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h = f \circ g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\Delta h = \nabla f \circ g \cdot Dg = \nabla f \circ g \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v & 2w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g_1), \frac{\partial f}{\partial y}(g_2)\right) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v & 2w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g_1) 2u + \frac{\partial f}{\partial y}(g_2), f_x(g_1) 2v + f_y(g_2), f_x(g_1) 2w + f_y(g_2)\right)$$

$$\|\Delta h\|^2 = (2u f_x + f_y)^2 + (2v f_x + f_y)^2 + (2w f_x + f_y)^2 =$$

$$= 4(u^2+v^2+w^2) f_x^2 + 4(u, v, w) f_x f_y + 3 f_y^2 =$$

$$= 4 g_1 f_x^2 + 4 g_2 f_x f_y + 3 f_y^2$$

$\boxed{8.}$ a) Hallar $\partial_x f$, siendo $f(x,y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2} dt$, definida para $x,y>0$

$f = g \circ h$; $g(r) = \int_0^r e^{-t^2} dt$; $h(x,y) = \sqrt{xy}$

$$Df = Dg(h) \cdot Dh$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = g'(h) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} g'(h), \frac{\partial h}{\partial y} g'(h)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot g'(h) = \underbrace{\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}_{\frac{\partial h}{\partial x}} \cdot \underbrace{e^{-xy}}_{g'(h)}$$

b) hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$, donde $f(x,y) = \int_0^{x^3-2y} e^{t^2} dt$ $\quad x,y \in \mathbb{R}$

$f = g \circ h$, $g(z) = \int_0^z e^{t^2} dt$; $h(x,y) = x^3 - 2y$

$$\nabla f(x,y) = g'(h(x,y)) \cdot \nabla h(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = g'(-3) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(1,2) = e^{3^2} \cdot 3x^2\Big|_{x=1} = 3e^9$$

$\boxed{9.}$ $y^2 + xz + z^2 - e^z - K = 0$ se define z en función de x e y, $z = f(x,y)$. Hallar el valor de la constante K para el cual $f(0,e) = 2$.

$$y^2 + xz + z^2 - e^z = K \Rightarrow K = e^2 + 0 + 2^2 - e^2 = 4$$

Suponemos que existen derivadas parciales:

- Derivada con respecto a x:

$$y^2 + x f(0,e) + f(0,e)^2 - e^{f(0,e)} - 4 = 0$$

$$\overbrace{f(0,e)}^{2} + x\frac{\partial f(0,e)}{\partial x} + 2f(0,e)\cdot\frac{\partial f(0,e)}{\partial x} - e^{\overbrace{f(0,e)}^{2}}\cdot\frac{\partial f(0,e)}{\partial x} = 0$$

$$2 + (\underset{0}{\underset{\shortparallel}{x}} + 4)\frac{\partial f(0,e)}{\partial x} - e^2\cdot\frac{\partial f(0,e)}{\partial x} = 0$$

$$2 + 4\frac{\partial f(0,e)}{\partial x} - e^2\cdot\frac{\partial f(0,e)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(0,e)}{\partial x} = \frac{2}{e^2-4}$$

- Derivada con respecto a y:

$$y^2 + x f(0,e) + f(0,e)^2 - e^{f(0,e)} - 4 = 0$$

$$2y + x\frac{\partial f(0,e)}{\partial y} + 2f(0,e)\cdot\frac{\partial f(0,e)}{\partial y} - e^{f(0,e)}\cdot\frac{\partial f(0,e)}{\partial y} = 0$$

$$2e + 4\cdot\frac{\partial f(0,e)}{\partial y} - e^2\frac{\partial f(0,e)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(0,e)}{\partial y} = \frac{2e}{e^2-4}$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,e) = \left(\frac{2}{e^2-4}, \frac{2e}{e^2-4}\right)$$

$\boxed{10.}$ Hallar la ecuación de los planos tangentes a las gráficas de las funciones:

i) $f(x,y) = x^2 - y^2$ en $(1,1,0)$

Op. 1) $z = \nabla f(1,1) \cdot (x-1, y-1) = 2(x-1) - 2(y-1) \Rightarrow z = 2x - 2y$

Op. 2) $F(x,y,z) = z - x^2 + y^2 = 0$

$\nabla F(1,1,0) \cdot (x-1, y-1, z) = 0 \Rightarrow -2(x-1) + 2(y-1) + z = 0$

$\Rightarrow z = 2x - 2y$

ii) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

$z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

$z = z_0 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$

$z = z_0^2 + y_0^2 - 2x_0^2 - 2y_0^2 + 2x_0 x + 2y_0 y$

$\Pi_{tg} : 2x_0 x + 2y_0 y - z = x_0^2 + y_0^2$

(*) $\Pi_{tg} \parallel x = z \iff \vec{n_\pi} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall v \in \{x = z\}$

$$\left.\begin{array}{l} (2x_0, 2y_0, -1) \cdot (1,0,1) = 0 \\ (2x_0, 2y_0, -1) \cdot (1,1,1) = 0 \end{array}\right\} x_0 = 1/2, \quad y_0 = 0, \quad \begin{array}{l} z_0 = f(x_0, y_0) \\ z_0 = 1/4 \end{array}$$

(*) $\Pi_{tg} \parallel z = x \iff \vec{n_\pi} \parallel \vec{n}_{z=x} \iff \vec{n_\pi} = \alpha \vec{n}_{z=x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$z - x = 0$; $F(x,y,z) = x - y$

$\nabla F(x,y,z) = (1,0,-1) \perp x - y = 0$

$$(2x_0, 2y_0, -1) = \alpha = (1,0,-1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = 1/2 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 1/4 \end{array}\right.$$

12.1 Si $(a,b,c) \in z = xy$, las dos rectas

$$S_1 \begin{cases} z = bx \\ y = b \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} z = ay \\ x = a \end{cases}$$

se corten en (a,b,c) y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tg a esta superficie en (a,b,c) contiene a S_1 y S_2.

$(a,b,c) \in z = xy \Longleftrightarrow c = ab$. Sea $f(x,y) = z$

$$z = ab + \nabla f(a,b)\,(x-a, y-b) = ab + b(x-a) + a(y-b)$$

$$z = bx + ay - ab$$

Como:

$$\left.\begin{matrix} y_1 = b \\ z_1 = bx_1 \end{matrix}\right\} S_1$$

$$(I)\ z = bx + ay - ab$$

$$\left.\begin{matrix} z_2 = ay_2 \\ x_2 = a \end{matrix}\right\} S_2$$

Sea $P_1 \in S_1$, $P_1 = (x_0, b, bx_0)$. Veamos si cumple (I):

$$bx_0 = bx_0 + ab - ab \quad \checkmark$$

Sea $P_2 \in S_2$, $P_2 = (a, y_0', ay_0')$

$$ay_0' = ba + ay_0' - ab \quad \checkmark$$