UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en CC. MATEMÁTICAS, 2018-2019

Ejercicios 27 a 33

27. Dada $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideramos la sucesión de sumas parciales cuyo término general es

$$\mathbf{S}_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\mathbf{X}^n .$$

1. Demostrar que esta sucesión $\{\mathbf{S}_N\}_N$ es una sucesión de Cauchy.

   Su límite permite definir la función *exponencial de la matriz* $\mathbf{X}$,

   (7) $$\exp \mathbf{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{X}^n .$$

2. Calcular $\exp \mathbf{0}$ y $\exp \mathbf{I}$.
3. Demostrar que toda norma de matrices verifica
   $$\|\exp \mathbf{X}\| \le \mathrm{e}^{\|\mathbf{X}\|} .$$
4. Demostrar
   $$\exp(\mathbf{I}+\mathbf{X}) = \exp \mathbf{I} \cdot \exp \mathbf{X} .$$
5. Calcular $(d\exp)_{\mathbf{I}}$, esto es, la diferencial en $\mathbf{I}$ de la función que lleva $\mathbf{X}$ a $\exp \mathbf{X}$. Calcular también $(d\exp)_{\mathbf{0}}$.

28. A. Supongamos que

$$f : \mathbb{R}^{k\times k} \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k}$$

es diferenciable en todo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Calcular $(dg)_{\mathbf{A}}$, siendo $g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\, f(\mathbf{X})$.

B. Utilizar el Principio de Inducción y el apartado anterior para calcular $(df)_{\mathbf{A}}$ cuando

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^n ,$$

siendo $n \in \mathbb{N}$.

C. Calcular una expresión para $(d\exp)_{\mathbf{A}}\mathbf{X}$. ¡Atención! no se pide el estudio de la convergencia de las series que intervienen en el cálculo.

D. Comprobar que $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ implica

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{X}} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}}\, \mathrm{e}^{\mathbf{X}}$$

en la definición de exp en (7) y

$$(d\exp)_{\mathbf{A}}\mathbf{X} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}}\mathbf{X} = \mathbf{X}\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}}\,.$$

en la expresión obtenida en el apartado anterior.

29. Considérese la función $f(x)$ definida en los $x = (x_1\,, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^3\,x_2}{x_1^4 + x_2^2}\,, & x \neq 0\,, \\[2ex] 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

A. Demostrar que f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}^2$.

B. 1. Demostrar que para todo vector $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^2$ existe $D_{\mathbf{u}}f(0)$, la derivada en 0 de f según $\mathbf{u}$, y calcularla. Demostrar que la función

$$\mathbf{u} \longrightarrow D_{\mathbf{u}}f(0)$$

es lineal.

2. Demostrar que f no es diferenciable en 0.

C. Demostrar que f es diferenciable en todo $a \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$. Calcular $(df)_a$, cada $D_{\mathbf{u}}f(a)$ y la matriz jacobiana $Df(a)$.

30. Considérese la función $f(x)$ definida en los $x = (x_1\,, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)\,\sin\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,, & x \neq 0\,, \\[2ex] 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

A. Demostrar que f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}^2$.

B. 1. Demostrar que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ existen en todo $x \in \mathbb{R}^2$.

2. Estudiar la continuidad de estas dos funciones en 0.

C. 1. Demostrar que f es diferenciable en 0.

2. Demostrar que f es diferenciable en todo $x \in \mathbb{R}^2$.

31. Dada una función continua $\varphi \,:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, considérese la función

$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida

$$f(x) = \varphi(x)\,\sin x_1\,, \qquad x = (x_1\,, x_2)\,.$$

1. Demostrar que f es diferenciable en 0, incluso si φ no lo es.
2. Calcular, para cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, el valor de $(df)_0 \mathbf{u}$.

32. Demostrar que en cada uno de los casos siguientes la función f es de clase C^1. Calcular su diferencial en cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Dadas $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, se define f mediante
$$f(x,y) = \int_0^x g(t,0)\, dt + \int_0^y h(x,t)\, dt\,.$$
2. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua,
$$f(x,y) = \int_a^{x+y} g(t)\, dt\,.$$
3. Con a y g como en el apartado anterior,
$$f(x,y) = \int_a^{x \sin y} g(t)\, dt\,.$$

33. *El Teorema de* Euler *para funciones homogéneas.* Sea f una función definida en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Se dice que f es *homogénea de grado p en Ω* cuando
$$f(\lambda\, x) = \lambda^p f(x)$$
se verifica para todos los $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \Omega$ tales que $\lambda\, x \in \Omega$.

1. Demostrar que si f es homogénea de grado p en Ω y es diferenciable en x entonces
$$\langle\, x\,,\, \nabla f(x) \rangle = p\, f(x)\,. \tag{8}$$
2. Demostrar que si f es diferenciable en Ω y satisface (8) en todo $x \in \Omega$ entonces f es homogénea de grado p en Ω.