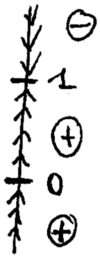
HOJA 2

1.

a) $\dfrac{du}{dt} = |u|(1-u) = f(t,u)$



$1 \rightarrow$ punto estable

$0 \rightarrow$ punto inestable

Puntos críticos: donde se anula $u' = \dfrac{du}{dt}$

Se anula en $u=0$, $u=1$.

Existencia de asíntotas:

$\parallel$

es lo mismo que preguntar si hay unicidad.

aquí también se puede ver el crecim. /decrecim.

No es C^1 (el valor absoluto) pero el valor absoluto es localmente lipschitz:

$$g(u) = |u|$$

$$\big||u_1| - |u_2|\big| \leq |u_1 - u_2|$$

$\circledast$ $f(u)$ es Lipschitz si $\exists L : |f(u_1) - f(u_2)| \leq L|u_1 - u_2|$ $\forall u_1, u_2$ en el ~~interalo~~ entorno

$\Rightarrow$ Como $f(u) = |u|(1-u)$ es localmente Lipschitz (en la variable u)
$\hookrightarrow$ dependiente

tengo existencia y unicidad local.

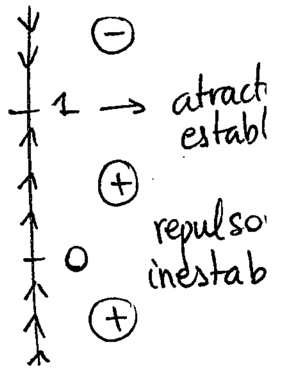
$\circledast$ Observación: $f \in C^1 \Rightarrow f$ es lipschitz localmente.

$$|f(u_1) - f(u_2)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T.V.M.}}}{\leq} |f'(\xi)|\,|u_1 - u_2| \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ es } C^1(K)}}{\leq} L|u_1 - u_2|$$

K compacto $\Rightarrow$ derivada acotada

$\Rightarrow$ $u=1$ y $u=0$ son asíntotas, debido a la unicidad.

b) $\frac{du}{dt} = u^2(1-u) = f(u)$



Puntos críticos : $u=0$, $u=1$

Como f es C^∞ entonces en particular es C^1 y localmente Lipschitz con respecto a la variable u $\Rightarrow$ existencia y unicidad local

$\Rightarrow$ $u=0$, $u=1$ son asíntotas

$\boxed{2.}$ Sea f continua y supongamos que todo P.V.I. para $x' = f(x)$ tiene solución única.

a) Demostrar que $x(t)$ no constante es estrictamente monótona.

Supongamos que $x(t)$ no es estrictamente monótona. Entonces existe c tal que $\underset{f(c)}{\underbrace{x'(c)}} = 0$.

Entonces $\underbrace{\tilde{x}(t)}_{\text{función constante}} = \underbrace{x(c)}_{\text{constante}}$ cumple $\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x(c) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Utilizando la unicidad del P.V.I. $\Rightarrow \tilde{x}(t) = x(c)$ es solución.

Hemos demostrado el contrarecíproco.

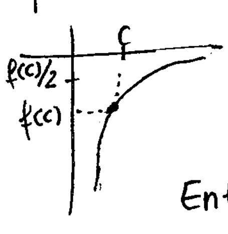
b) Demostrar que si $x(t)$ es una solución tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$ entonces $u(t) \equiv c$ también es solución. Por lo tanto, si $f(c) =$

Tengo que ver que $\overset{= x(t)}{u(t)} = c$ es solución
↳ (e.d., probar que $x'(t) = f(x(t)) = $

entonces $u(t) = c$ cumple $x' = f(x(t))$.

CASO 1
- Si $f(c) > 0$, como f es continua $\exists \delta > 0$ si $|x(t) - c| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > \frac{f(c)}{2}$

CASO 2
- Si $f(c) < 0$, $\exists \delta > 0 : |x(t) - c| < \delta$, entonces $f(x) < \frac{f(c)}{2}$



Supongamos que estamos en el caso 1 (análog caso 2)

$\lim_{t\to\infty} x(t) = c$, $\forall \delta > 0\ \exists T : \forall t \geq T\ |x(t) - c| < \delta$

Entonces, para $\delta > 0$, $\exists T\ \forall t \geq T$, $f(x) > \frac{f(c)}{2}$

5. Resolver:

a) $x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) y' = y \operatorname{sen}\left(y/x\right) + x$

$\boxed{\begin{array}{l} f(x,y) \text{ es homogénea de grado } 0 \text{ si:} \\ f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y) = f\left(x \cdot 1, x\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \end{array}}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) y' = \frac{y}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + 1$

Cambio de variable: $z = \frac{y}{x} \longrightarrow y = zx \longrightarrow y' = z + xz'$

$\operatorname{sen}(z)(z + xz') = z \operatorname{sen}(z) + 1 \Rightarrow z + xz' = \frac{z \operatorname{sen}(z) + 1}{\operatorname{sen}(z)} \Rightarrow$

$\Rightarrow z' = \frac{z \operatorname{sen}(z) + 1}{x \operatorname{sen}(z)} - \frac{z}{x} \Rightarrow z' = \frac{1}{x \operatorname{sen}(z)} \Rightarrow \operatorname{sen}(z)\, dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \operatorname{sen}(z)\, dz = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow -\cos(z) = \log|x| + c \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(z) = \log\left(\frac{1}{|x|}\right) + \tilde{c} \Rightarrow z = \arccos\left(\log\left(\frac{1}{|x|}\right) + \tilde{c}\right)$

8) Resolver:

a) $\begin{cases} x(2x^2+y^2) + y(x^2+2y^2)y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \underbrace{x(2x^2+y^2)}_{M}dx + \underbrace{y(x^2+2y^2)}_{N}dy = 0$

$\boxed{M_y = N_x}$ condición exactitud

Busco $F(x,y) = C$ que sea C^2 tal que $F_x(x,y) + F_y(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy = 0 \Rightarrow M = F_x, \; N = F_y$

Como buscamos $F \in C^2$, $M_y = F_{xy}$, $N_x = F_{yx} \Rightarrow M_y = N_x$

$\left.\begin{array}{l} N_x = y \cdot 2x \\ M_y = x \cdot 2y \end{array}\right\} \Rightarrow N_x = M_y \Rightarrow$ ecuación exacta

$F(x,y) = \int F_x(x,y)\,dx + G(y) = \int (2x^3 + xy^2)\,dx + G(y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + G(y)$

Se tiene que cumplir que $F_y(x,y) = N$.

$F_y(x,y) = x^2y + G'(y) = x^2y + 2y^3 \Leftrightarrow G'(y) = 2y^3 \Leftrightarrow G(y) = \frac{y^4}{2} + C$

SOLUCIÓN GENERAL

$F(x,y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} = C$

Como $y(0) = 1 \rightarrow$ sustituimos $\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}$

$\Rightarrow C = \frac{1}{2}$ SOLUCIÓN PARTICULAR

$$\int_T \underbrace{x'(s)}_{f(x(s))} ds \; \ldots \; \int_T$$

$$= x(T) + \frac{f(c)}{2}(t-T) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$

Contradicción con $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} c$ (Por lo tanto, $f(c)$ no puede ser > 0).

Similar lo que ocurre para $f(c) < 0$.

$\Rightarrow f(c) = 0 \Rightarrow \underset{x(t)}{\overset{\parallel}{u(t)}}$ solución.

$\boxed{3.}$ Probar que el cambio $z = ax + by + c$ transforma la ecuación $y' = f(ax+by+c)$ en otra de variables separables. Aplicar para resolver $y' = (x+y)^2$.

$$z = ax + by + c \quad , \quad y = y(x)$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = a + by' = a + b\frac{dy}{dx}$$

Como $y' = f(ax+by+c) = f(z) \Rightarrow z' = a + bf(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + bf(z)$

$\Rightarrow \frac{dz}{a+bf(z)} = dx \Rightarrow$ variables separables

Para resolver $y' = (x+y)^2$: cambio $z = x+y \Rightarrow z' = 1 + y'$

$$z' - 1 = (x+y)^2 = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{1}{z^2+1} dz = \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}(z) = x + C \Rightarrow z = \tan(x+c) \Rightarrow x + y = \tan(x+c)$$

$$\Rightarrow y = \operatorname{tg}(x+c) - x$$

11. Hallar un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x+y^2)$ para la ecuación $3y^2 - x + 2y(y^2-3x)y' = 0$. Calcular la solución general de la ecuación.

$M = 3y^2 - x \longrightarrow M_y = 6y$ No coinciden, necesitamos el método

$N = 2y(y^2-3x) \longrightarrow N_x = -6y$ de los factores integrantes

$\mu = \mu(x+y^2) = \mu(z)$ $\quad z = x+y^2$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial z}, \qquad \frac{d\mu}{dz} = \mu'(z)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{\partial \mu}{\partial z}, \qquad \frac{d\mu}{dz} = \mu'(z)$$

$M^* = \mu\cdot(3y^2-x) \longrightarrow M^*_y = \frac{d\mu}{dy}(3y^2-x) + 6\mu y = 2y\mu'(z)(3y^2-x) + 6y\mu$

$N^* = \mu\cdot 2y(y^2-3x) \longrightarrow N^*_x = \frac{d\mu}{dx}\cdot 2y(y^2-3x) - 6y\mu = \mu'(z)\cdot 2y(y^2-3x) - 6\mu y$

Como queremos que $N^*_x = M^*_y$:

$\mu'\cdot 2y(3y^2-x) + 6y\mu = \mu'\cdot 2y(y^2-3x) - 6y\mu \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 0 = 2y\mu'\cdot(3y^2-x+3x-y^2) + 12\mu = \mu'\cdot 2y(2y^2+2x) + 12y\mu$

$\Longrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{-12y}{4y(y^2+x)} = \frac{-3}{y^2+x} = \frac{-3}{z}$

$\Longrightarrow \int\frac{d\mu}{\mu} = \int\frac{-3}{z}dz \Longrightarrow \log|\mu| = -3\log|z| + C = \log\left(\frac{1}{|z|^3}\right) + C \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \mu = \frac{K}{z^3} \Longrightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{(x+y^2)^3}}$ ← $K=1$ (nos vale cualquiera)

Ahora utilizaremos el mismo método de ecuaciones exactas:

$$\frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}dx + \frac{2y(y^2-3x)}{(x+y^2)^3}dy = 0$$

¿cómo se integra esto?

$$F(x,y) = \int\frac{3y^2-x}{(x+y^2)^3}dx + G(y) = 3y^2\int\frac{1}{(x+y^2)^3}dx - \int\frac{x}{(x+y^2)^3}dx + G(y) =$$

$$\overset{?}{=} \frac{x-y^2}{(x+y^2)^2} + G(y)$$

Ahora como $F_y = N = \frac{2y(y^2-3x)}{(x+y^2)^3} = \frac{d}{dy}\left[\frac{x-y^2}{(x+y^2)^2} + G(y)\right] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3} + G'(y) = \frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3} \Longrightarrow G'(y) = 0 \Longrightarrow G(y) = K$

$\Longrightarrow \boxed{F(x,y) = \frac{2y^3-6xy}{(x+y^2)^3} = \tilde{K}}$

$\boxed{12.}$ a) $\underbrace{(x+y)}_{M}dx + \underbrace{dy}_{N} = 0$

$M_y = 1$
$N_x = 0$ ¿factor integrante?

$$\underbrace{\mu(x+y)}_{M^*}dx + \underbrace{\mu}_{N^*}dy = 0$$

$$M_y^* = \frac{\partial\mu}{\partial y}(x+y) + \mu \quad ; \quad N_x^* = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

Entonces queremos $M_y^* = N_x^* \Rightarrow \frac{\partial\mu}{\partial y}(x+y) + \mu = \frac{\partial\mu}{\partial x}$

Podemos intentar simplificar poniendo $\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\partial\mu}{\partial x}$ (SOLO DEPENDE DE X ✓)

$\Rightarrow \boxed{\mu = e^x}$ Resolvemos igual que una ecuación exacta:

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$\underbrace{e^x(x+y)}_{M}dx + \underbrace{e^x}_{N}dy$

$M_y = e^x$
$N_x = e^x$ ✓

$$\Rightarrow \int e^x(x+y)\,dx = \int ye^x dx + \int xe^x dx = ye^x + \int xe^x dx =$$

$$= ye^x + xe^x - \int e^x dx = ye^x + xe^x - e^x + G(y)$$

$$F_y = N \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(ye^x + xe^x - e^x + G(y)\right) = e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x + G'(y) = e^x \Rightarrow G'(y) = 0 \Rightarrow G(y) = K$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = ye^x + xe^x - e^x = C}$$

b) $1 + \left(1 + (x+y)\tan y\right) y' = 0$

$$1 + \left(1 + (x+y)\tan y\right)\frac{dy}{dx} = 0 \implies \underbrace{1}_{M}.dx + \underbrace{\left(1 + (x+y)\tan y\right)}_{N} dy = 0$$

$M_y = 0$

$N_x = \tan y$

¿Factor integrante? $\underbrace{\mu}_{M^*} dx + \underbrace{\mu\left(1 + (x+y)\tan y\right)}_{N^*} dy = 0$

$$M_y^* = \frac{d\mu}{dy} \quad ; \quad N_x^* = \frac{d\mu}{dx}\left(1 + (x+y)\tan y\right) + \mu \tan y$$

Queremos $M_y^* = N_x^* \implies \frac{d\mu}{dy} = \frac{d\mu}{dx}\left(1 + (x+y)\tan y\right) + \mu\tan y$

Podemos hacer $\frac{d\mu}{dx} = 0$ ya que lo que nos queda no depende de x

$$\frac{d\mu}{dy} = \mu \tan y \implies \frac{d\mu}{\mu} = \tan y \, dy \implies \int \frac{d\mu}{\mu} = \int \tan y \, dy \implies$$

$$\implies \log|\mu| = \int \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} dy \implies \log(\mu) = -\log(\cos y) \implies \boxed{\mu = \frac{1}{\cos y}}$$

Entonces: $\frac{1}{\cos y} dx + \frac{1}{\cos y}\left(1 + (x+y)\tan y\right)$

$$\int \frac{1}{\cos y} dx = \frac{x}{\cos y} + G(y)$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{\cos y} + G(y)\right) = \frac{1}{\cos y}\left(1 + (x+y)\tan y\right) = \frac{1}{\cos y} + \frac{x\tan y}{\cos y} + \frac{y\tan y}{\cos y}$$

$$\implies \frac{x \operatorname{sen} y}{\cos^2 y} + G'(y) = \frac{x\tan y}{\cos y} + G'(y) = \frac{1}{\cos y} + \frac{x\tan y}{\cos y} + \frac{y \tan y}{\cos y}$$

$$\implies G'(y) = \frac{1}{\cos y} + \frac{y\tan y}{\cos y} \implies G(y) = \int \frac{1}{\cos y} dy + \int \frac{y \operatorname{sen} y}{\cos^2 y} dy$$

¿y esta integral? ?

e) $\underbrace{y}_{M}dx + \underbrace{(x-3x^2y^2)}_{N}dy = 0$

$M_y = 1$; $N_x = 1-6xy^2$ ¿factor integrante?

$M^* = \mu y$; $N^* = \mu(x-3x^2y^2)$

$M_y^* = \frac{d\mu}{dy}y + \mu$; $N_x^* = \frac{d\mu}{dx}(x-3x^2y^2) + \mu(1-6xy^2)$

Queremos $M_y^* = N_x^* \Longrightarrow \frac{d\mu}{dy}y + \mu = \frac{d\mu}{dx}(x-3x^2y^2) + \mu(1-6xy^2)$

Parece que es más razonable $z = xy$:

$\mu = \mu(xy)$ $\to \mu_x = \mu'\cdot y$, $\to \mu_y = \mu'\cdot x$

$\Rightarrow \mu'\cancel{xy} + \cancel{\mu} = \mu' y(\cancel{x} - 3x^2y^2) + \mu(\cancel{1} - 6xy^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -3x^2y^3\mu' - 6xy^2\mu \underset{\text{sup. } y\neq 0}{\Rightarrow} 0 = -3x^2y^2\mu' - 6xy\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2y^2\mu' = -6xy\mu \underset{z=xy}{\Rightarrow} 3z^2\mu' = -6z\mu \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{-6z}{3z^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\frac{\mu'}{\mu} = \int\frac{-2}{z} \Rightarrow \log(\mu) = -2\log(z) \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2}}$

Entonces: $\frac{1}{x^2y^2}y\,dx + \frac{1}{x^2y^2}(x-3x^2y^2)$

$\int\frac{1}{yx^2}dx = \frac{1}{y}\int\frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{xy} + G(y)$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{-1}{xy} + G(y)\right) = \frac{x-3x^2y^2}{x^2y^2} \Rightarrow \frac{1}{xy^2} + G'(y) = \frac{1-3xy^2}{xy^2}$

$\Rightarrow G'(y) = -\frac{3xy^2}{xy^2} = -3 \Rightarrow G(y) = \int -3dy = -3y$

$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = \frac{-1}{xy} - 3y = C}$

14.1 a) $x' + x = 2te^{-t} + t^2$

Solución general $x = x_h + x_p$, donde x_h es solución de la homogénea y x_p es solución particular.

$x' + x = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = -x \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -dt \Leftrightarrow \log(x) = -t + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x_h = Ke^{-t}}$ SOLUCIÓN HOMOGÉNEA

$x_h(t) = K(t)\, e^{-t}$ Método variación de las constantes

Para hallar $x_p(t)$ hay dos caminos (principalmente):
- Variación de las constantes: $x_p(t) = K(t)\, e^{-t}$
- Coef. indeterminados: probar con $x_p(t)$ determinadas

Var. constantes: $x_p(t) = K(t)\, e^{-t}$

$x_p'(t) = K'(t)\, e^{-t} - K(t)\, e^{-t}$

$x_p' + x_p = 2te^{-t} + t^2 \Leftrightarrow K'(t)e^{-t} - \cancel{K(t)e^{-t}} + \cancel{K(t)e^{-t}} = 2te^{-t} + t^2$

$K'(t) = 2t + t^2e^t \Rightarrow \int dK = \int (2t + t^2e^t)\, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow K(t) = t^2 + \int t^2e^t dt = t^2 + t^2e^t - 2\int e^t t\, dt =$

$\begin{cases} u = t^2 \to du = 2t \\ dv = e^t \to v = e^t \end{cases}$

$= t^2(1 + e^t) - 2\left(te^t - \int e^t dt\right) = t^2 + t^2e^t - 2te^t + 2e^t$

$u = t \to du = dt$
$dv = e^t \to v = e^t$

Entonces: $x_p(t) = K(t)\, e^{-t} = t^2e^{-t} + (t^2 - 2t + 2)$

Solución general: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = (K + t^2)\, e^{-t} + t^2 - 2t + 2$

f) $(x\log x)\, y' + y = 3x^3$

$$y' + \frac{y}{x\log x} = \frac{3x^3}{x\log x} \Longrightarrow y = y_h + y_p$$

Ec. homogénea: $y' = \dfrac{-y}{x\log x} \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{-1}{x\log x}\, dx \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \log(y) = -\log(\log(x)) + C \Longrightarrow \boxed{y_h = \frac{K}{\log(x)}}$$

Var. constantes: $y_h(x) = \dfrac{K(x)}{\log(x)}$

$$y_p = \frac{K(x)}{\log(x)} \quad ; \quad y_p' = \frac{K'(x)\log(x) - K(x)\cdot\frac{1}{x}}{\log^2(x)} = \frac{K'(x)\log x - K(x)}{x\log^2(x)}$$

$$y_p' + \frac{y}{x\log x} = \frac{3x^3}{x\log x} \Longrightarrow \frac{K'(x)}{\log x} - \cancel{\frac{K(x)}{x\log^2 x}} + \cancel{\frac{K(x)}{x\log^2 x}} = \frac{3x^3}{x\log x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow K'(x) = 3x^2 \Longrightarrow K(x) = \int 3x^2\, dx = x^3 + \tilde{K}$$

Entonces: $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{\log(x)} = \dfrac{x^3}{\log(x)}$

Solución general: $\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \dfrac{K}{\log(x)} + \dfrac{x^3}{\log(x)} = \dfrac{x^3 + K}{\log(x)}}$