ALEJANDRO SANTORUM VARELA TAREA 4 EXTRA - MNEDO

En la tarea 2 hemos calculado la expresión de $\phi_f(t_n, y_n; h)$:

$$\phi_f(t_n, y_n; h) = f(t_n + (1-\theta)h,\ y_n + (1-\theta)h\,\phi_f(t_n, y_n; h))$$

Comprobemos las tres propiedades de las hipótesis H_{MN}:

i) ϕ_f es continua: esto es directo, ya que $f(t,y)$ es continua.

ii) $\exists h_0, L : \|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| \leq L\|y_n - \hat{y}_n\|$ si $0<h<h_0$

$\|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| = \| f(t_n + (1-\theta)h, y_n + (1-\theta)h\,\phi_f(t_n, y_n; h)) -$

$- f(t_n + (1-\theta)h, \hat{y}_n + (1-\theta)h\,\phi_f(t_n, \hat{y}_n; h))\| \leq$ ← f es Lipschutz con resp. 2ª variable

$\leq L_f \| y_n + (1-\theta)h\,\phi_f(t_n, y_n; h) - \hat{y}_n - (1-\theta)h\,\phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| \leq$ des. triang.

$\leq L_f\left(\|y_n - \hat{y}_n\| + (1-\theta)h\,\|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\|\right) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [1 - L_f(1-\theta)h]\,\|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi(t_n, \hat{y}_n; h)\| \leq L_f\|y_n - \hat{y}_n\| \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \|\phi_f(t_n, y_n; h) - \phi_f(t_n, \hat{y}_n; h)\| \leq \underbrace{\boxed{[1 - L_f(1-\theta)h]^{-1} L_f}}_{\boxed{\shortparallel \\ L > 0}} \|y_n - \hat{y}_n\|$$

Además, necesitamos que $1 - L_f(1-\theta)h > 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 1 > L(1-\theta)h \Longrightarrow h < \boxed{(L(1-\theta))^{-1} = h_0}$ ∎

iii) Si $f = 0 \Longrightarrow \phi_f = 0$: trivial, ya que $\phi_f = f$. ∎

Escaneado con CamScanner