Ejercicios 41 a 46

41. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que la función f es *convexa en* Ω cuando todos los $x, y \in \Omega$ y $0 \le t \le 1$ satisfacen

$$f\big((1-t)\,x + t\,y\big) \le (1-t)\,f(x) + t\,f(y)\,.$$

A. Considérese el conjunto

$$\Omega^+ = \big\{\,(x\,,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; x \in \Omega\,,\; f(x) \le t\,\big\}\,.$$

Demostrar que f es convexa en Ω si y solamente si el conjunto Ω^+ es convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$.

B. Pongamos, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$L_t = \big\{\,x \in \Omega :\; f(x) \le t\,\big\}\,.$$

1. Demostrar que el conjunto L_t es convexo siempre que f es convexa en Ω.
2. Mostrar un contraejemplo al recíproco de 1.

C. Supongamos que Ω es cerrado. Considérese la función

$$f(x) = \operatorname{dist}(x\,,\Omega)\,,$$

estudiada en los ejercicios 3 y 7.

Demostrar que f es convexa en Ω si y sólo si Ω es convexo.

42. En $\mathbb{R}^n$ decimos que un punto x es *combinación convexa de los puntos* $x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m$ cuando existen $t_1\,, t_2\,, \ldots\,, t_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} &x = t_1\,x_1 + t_2\,x_2 + \cdots + t_m\,x_m\,,\\ &0 \le t_j\,, \quad \text{para todo } j = 1\,,2\,,\ldots\,,m\,,\\ &1 = t_1 + t_2 = \cdots + t_m\,. \end{aligned} \tag{10}$$

A. Sean $x_1\,, x_2\,, x_3$ tres puntos no alineados de $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathcal{T}$ el triángulo de vértices $V = \{x_1\,, x_2\,, x_3\}$. Demostrar que todo punto de $\mathcal{T}$ es combinación convexa de los vértices en V.

B. Demostrar que todo x de la forma (10) se puede escribir como combinación convexa de x_1 y de un punto z que, a su vez, es combinación convexa de los $x_2, \dots, x_m$.

C. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que f es convexa si y sólo si para todo x de la forma (10) se verifica

$$f(x) \leq t_1\, f(x_1) + t_2\, f(x_2) + \cdots + t_m\, f(x_m)\,.$$

D. Sea $V = \{\, x_1\,, x_2\,, \dots, x_m \,\}$ y supongamos que f es convexa. Sea

$$M = \max\{\, f(x_j) \;:\; j = 1\,, 2\,, \dots, m \,\}\,.$$

Consideremos el conjunto

$$K = \{\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; x \text{ es combinación convexa de los puntos en } V \,\}\,.$$

Demostrar que K es convexo y que

$$f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \in K\,.$$

43. A.

1. Demostrar que para todos los $a\,, b \in \mathbb{R}$ satisfacen

$$2\,a\,b \leq a^2 + b^2\,, \qquad 4\,a\,b \leq (a+b)^2\,.$$

¿Cuándo se cumple la igualdad?

2. Demostrar que todos los $a > 0$ y $b > 0$ con $a + b = 1$ cumplen

$$\Big(a + \frac{1}{a}\Big)^2 + \Big(b + \frac{1}{b}\Big)^2 \geq \frac{25}{2}\,.$$

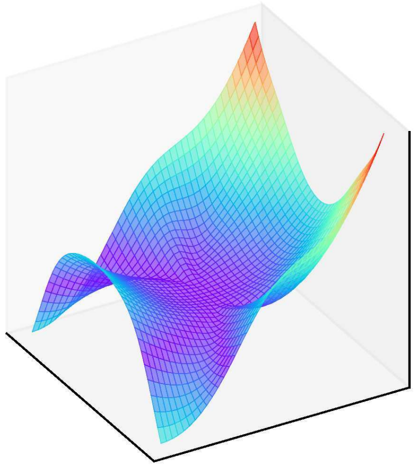
¿Cuáles son los valores de tales a y b para los que se alcanza la igualdad?

B. Considérese la función definida en los $x = (x_1\,, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2\,x_1^2\,x_2 - \frac{4\,x_1^6\,x_2^2}{(x_1^4 + x_2^2)^2}\,, \qquad \text{si } x \neq 0\,,$$

y $f(0) = 0$. Demostrar que:

1. f es continua en $\mathbb{R}^2$.
2. La restricción de f a cada recta que pasa por 0 tiene un mínimo local estricto en 0.
3. 0 no es un mínimo local para f.



44. Dada una función f de clase C^∞ en un entorno de 0 en $\mathbb{R}^n$, demostrar que existen funciones $g_i\,,g_{ij}$ también de clase C^∞ en un entorno U de 0 y tales que

$$f(x)-f(0)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,x_i\,,$$

$$f(x)-f(0)-(df)_0x=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,x_i\,x_j\,,$$

en todo $x\in U$.

45. Considérese la función

$$f(x\,,y)=(\cosh x\,\cos y\,,\,\sinh x\,\sin y)\,,$$

definida en

$$\Omega=\{\,(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;x>0\,\}\,.$$

1. Demostrar que f es local pero no globalmente invertible en Ω . Calcular $Jf(x\,,y)$.
2. Calcular los transformados mediante f de los conjuntos

   $$V_a=\{\,(a\,,y)\;:\;y\in\mathbb{R}\,\}\,,\qquad H_b=\{\,(x\,,b)\;:\;x>0\,\}\,,$$

   donde $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$.
3. Demostrar que f es inyectiva en

   $$\Omega_0=\{\,(x\,,\,,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;x>0\,,\;0<y<2\pi\,\}\,.$$

46. Para cada $n = 2\,,3\,,\ldots$ definimos funciones

$$\phi_n \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de forma recursiva mediante

$$\phi_2(r\,,\theta_1) = (r\,\cos\theta_1\,, r\,\sin\theta_1)$$

y, para los $n > 2$,

$$\phi_n(r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1}) = (x_1\,,x_2\,,\ldots\,,x_n)$$

donde

$$\begin{aligned} x_1 &= r\,\cos\theta_1\,, \\ (x_2\,,\ldots\,,x_n) &= \phi_{n-1}(r\,\sin\theta_1\,,\theta_2\,,\ldots\,,\theta_{n-1})\,. \end{aligned}$$

1. Comprobar que $r = \|x\|_2$ y que

$$\begin{aligned} x_1 &= r\,\cos\theta_1\,, \\ x_i &= r\,\cos\theta_i \prod_{j=1}^{i-1} \sin\theta_j\,, \qquad 2 \le i < n-1\,, \\ x_n &= r \prod_{j=1}^{n-1} \sin\theta_j\,, \end{aligned}$$

utilizando el Principio de Inducción.

2. Escribir la matriz $D\phi_n(r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1})$. Demostrar

$$J\phi_n(r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1}) = r\,(\sin\theta_1)^{n-2}\,J\phi_{n-1}(r\,,\theta_2\,,\ldots\,,\theta_{n-1})$$

y

$$J\phi_n(r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} (\sin\theta_j)^{n-j-1}\,.$$

3. Sean

$$\begin{aligned} \Omega_n = \Big\{ (r\,,\theta_1\,,\ldots\,,\theta_{n-1}) \,:\, r > 0\,, & \\ & 0 < \theta_j < \pi\,,\ 1 \le j < n-1\,, \\ & -\pi < \theta_{n-1} < \pi \Big\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \mathbb{R}^n \setminus \big\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_n = 0 \ \text{ y } \ x_{n-1} \le 0 \big\} \\ &= \big\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_n \ne 0 \ \text{ o } \ x_{n-1} > 0 \big\}\,. \end{aligned}$$

Utilizar el Principio de Inducción para demostrar que toda

$$\phi_n \,:\, \Omega_n \longrightarrow \Delta_n$$

es biyectiva.