HOJA DE EJERCICIOS 1: Lógica proposicional   EDyL 2011-2012

[Fecha de publicación: 2011/09/xx]
[Fecha de entrega: 2011/10/03, 10:00]
[Resolución en clase: 2011/10/03]

Ejercicio 1: Utilizando tablas de verdad, determinar
(1) el número de interpretaciones posibles
(2) el número de interpretaciones que son modelo
de las siguientes fórmulas

	Nº de interpretaciones	Nº de modelos
p ⇒ (p ⇔ q) ≡ ¬p∨q	4	3
((p ⇒ q) ∧ ¬p) ⇒ ¬q ≡ p∨¬q	4	3
(p ∨ q) ∧ (p ∨ ¬q) ∧ (¬p ∨ q) ∧ (¬p ∨ ¬q)	4	0

Átomos					FBF		FNC		
P	Q		(p⇔q)		p⇒(p⇔q) ≡ ¬p∨(p⇔q)		¬p∨q		
F	F		V		V		V		Modelo
F	V		F		V		V		Modelo
V	F		F		F		F		
V	V		V		V		V		Modelo

Átomos						FBF		FNC equivalente		
p	q		(p⇒q) ≡ ¬p∨q	(p⇒q) ∧¬p		((p⇒q)∧¬p)⇒¬q≡ ¬((p⇒q)∧¬p)∨¬q		p∨¬q		
F	F		V	V		V		V		Modelo
F	V		V	V		F		F		

V	F		F	F		V		V		Modelo
V	V		V	F		V		V		Modelo

Átomos								FBF		
p	Q		pvq	pv¬q	¬pvq	¬pv¬q		(pvq)∧(pv¬q)∧ (¬pvq)∧(¬pv¬q)		
F	F		F	V	V	V		F		
F	V		V	F	V	V		F		
V	F		V	V	F	V		F		
V	V		V	V	V	F		F		

Ejercicio 2: Determina si las siguientes fórmulas bien formadas de la lógica proposicional

a) $((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge \neg(Q \vee R)) \rightarrow \neg P$
b) $((P\vee Q)\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\vee(Q\vee P))$

son i) tautología.
ii) satisfactible pero no tautología. En este caso, proporciona una interpretación que sea modelo y otra interpretación que no sea modelo.
iii) insatisfactible.
Justifa las respuestas dadas.

SOLUTION:

a) $((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge \neg(Q \vee R)) \rightarrow \neg P$

TAUTOLOGY

$((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge \neg(Q \vee R)) \rightarrow \neg P$ ≡ [Elimination of implication]
$\neg ((\neg P \vee (Q \vee R)) \wedge \neg(Q \vee R)) \vee \neg P$ ≡ [Reduce the scope of negation]
$\neg (\neg P \vee Q \vee R) \vee Q \vee R \vee \neg P$ ≡ [Reduce the scope of negation]
$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee Q \vee R \vee \neg P$ ≡ [Distributive law]
$(P \vee Q \vee R \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q \vee R \vee \neg P) \wedge (\neg R \vee Q \vee R \vee \neg P)$
≡ [mates in all clauses]
T

a) $((P\vee Q)\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\vee(Q\vee P))$

SATISFIABLE

$((P\vee Q)\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\vee(Q\vee P))$ ≡ [Elimination of implication]
$(\neg (P\vee Q) \vee\neg R)\wedge(\neg R\vee Q\vee P)$ ≡ [Reduce the scope of negation]
$((\neg P\wedge\neg Q) \vee\neg R)\wedge(\neg R\vee Q\vee P)$ ≡ [Distributive law]
$(\neg P \vee\neg R)\wedge (\neg Q \vee\neg R) \wedge (\neg R\vee Q\vee P)$ ≡ [Distributive law]

Interpretation ((P False) (Q False) (R False) is a model

Interpretation ((P True) (Q True) (R True) is not a model

Ejercicio 3: Transforma las siguientes FBFs a forma normal conjuntiva. Una vez en FNC, determina cuáles son UNSAT, tautologías o SAT sin ser tautología. No se permite usar tablas de verdad.

> Metateorema 1: Una cláusula es tautología ssi en la disyunción hay un par de literales que involucran al mismo átomo, y uno es un literal positivo y el otro, un literal negativo.
>
> Metateorema 2: Una FNC (conjunción de cláusulas) es tautología ssi todas las cláusulas en la conjunción son tautologías.

$p\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$ $\equiv \neg p\vee((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)) \equiv \neg p\vee((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)) \equiv \neg p\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q) \equiv \neg p\vee q$ La FBF es SAT, pero no tautología. • La FNC no es una tautología • La FNC no es UNSAT, ya que una disyunción de dos literales siempre tiene 3 interpretaciones que son modelo
$((p \Rightarrow q) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg q$ $\equiv \neg((\neg p\vee q)\wedge\neg p)\vee\neg q \equiv \neg(\neg p\vee q)\vee p\vee\neg q \equiv (p\wedge\neg q)\vee p\vee\neg q \equiv (p\vee\neg q)\wedge(\neg q\vee p) \equiv p\vee\neg q$ La FBF es SAT, pero no tautología. • La FNC no es una tautología • La FNC no es UNSAT, ya que una disyunción de dos literales siempre tiene 3 interpretaciones que son modelo

$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Está en FNC y es UNSAT

Ejercicio 4. [R+N, exercise 7.9] Considera el texto

> "si el unicornio es mítico, es inmortal, pero si no es mítico, entonces es un mamífero mortal. Si el unicornio es o inmortal o un mamífero, entonces tiene cuernos. El unicornio es mágico si tiene cuernos"

A partir de este texto, ¿s e puede determinar si el unicornio es mítico? ¿si es mágico? ¿si tiene cuernos?

Solution:

(1) Define the atoms

Atom	Elementary statement about the world
A	The unicorn is mythical
B	The unicorn is immortal
C	The unicorn is a mammal
D	The univorn is magical
E	The unicorn is horned

(2) Build the knowledge base Δ

wff	Known world facts (True in our world)
$A \Rightarrow B$	If the unicorn is mythical, then it is immortal
$\neg A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$	if it is not mythical, then it is a mortal mammal
$(B \vee C) \Rightarrow E$	If the unicorn is either immortal or a mammal, then it is horned
$E \Rightarrow D$	The unicorn is magical if it is horned."

Convert wff's in Δ to CNF

Wff	wff in CNF
$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
$\neg A \Rightarrow (\neg B \wedge C)$	$(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$
$(B \vee C) \Rightarrow E$	$(\neg B \vee E) \wedge (\neg C \vee E)$
$E \Rightarrow D$	$\neg E \vee D$

(3) Apply inference with sound inference rules

Δ
(1) $\neg A \vee B$
(2) $A \vee \neg B$
(3) $A \vee C$
(4) $\neg B \vee E$
(5) $\neg C \vee E$
(6) $\neg E \vee D$

Theorem	Inference rule applied
(7) $B \vee C$	(1)+(3) [Resolution]
(8) $B \vee E$	(5)+(7) [Resolution]
(9) E	(4)+(8) [Resolution + elimination of repeated literals]
(10) D	(6)+(9) [Resolution]

Since $\Delta \vdash E$, and the inference rules are sound, then $\Delta \models E$, which means that if the KB Δ has value *True* then E (The unicorn is horned) also has *True.*

Since $\Delta \vdash D$, and the inference rules are sound, then $\Delta \models D$, which means that if the KB Δ has value *True* then D (The unicorn is magical) also has *True.*

We conclude that the unicorn is magical and horned.
Nothing can be said on whether the unicorn is mythical.

Ejercicio 5. En el país de los verosus (que siempre dicen la verdad) y los falacius (que mienten siempre), responde a los siguientes acertijos mediante inferencia (no pueden usarse tablas de verdad, razonamiento semiformal o razonamiento basado en casos).

a. En ese país remoto aparentemente se esconde un Tesoro. Un extranjero le pregunta a uno de los habitantes acerca de este hecho. La criatura responde: "*Si soy honesto, hay un tesoro*".
   i. ¿Puedes decir si hay un tesoro?
   ii. ¿Puedes decir si es honesta la criatura?
b. Cuál es la respuesta a las preguntas anteriores si la criatura responde: "*Hay un Tesoro sólo si yo soy honesto*".

SOLUCIÓN

(a) Apparently, a treasure is hidden in this remote country. A foreigner asks one of the inhabitants whether this is the case. The creature replies "if I am an honest one, there is a treasure". Is there a treasure? Is the person an honest one?

A = "The creature is verosus"
Tr = "There is a treasure"

$A \Leftrightarrow [A \Rightarrow Tr]$

$\equiv [A \Rightarrow [A \Rightarrow Tr]] \wedge [[A \Rightarrow Tr] \Rightarrow A]$

$\equiv [\neg A \vee [\neg A \vee Tr]] \wedge [\neg[\neg A \vee Tr] \vee A] \equiv$

$\equiv [\neg A \vee Tr] \wedge [[\neg\neg A \wedge \neg Tr] \vee A] \equiv$

$\equiv [\neg A \vee Tr] \wedge [[A \wedge \neg Tr] \vee A] \equiv$

$\equiv [\neg A \vee Tr] \wedge A \wedge [\neg Tr \vee A]$

[1] $\neg A \vee Tr$
[2] A
[3] $\neg Tr \vee A$
[4] = [1]+[2] $\equiv Tr$

There is a treasure.
The creature is verosus.

(a) What is the answer to these questions if the creature replies "there is a treasure only if I am an honest one".

A = "The creature is verosus"
Tr = "There is a treasure"

$A \Leftrightarrow [Tr \Rightarrow A]$

$\equiv [A \Rightarrow [Tr \Rightarrow A]] \wedge [[Tr \Rightarrow A] \Rightarrow A]$

$\equiv [\neg A \vee [\neg Tr \vee A]] \wedge [\neg[\neg Tr \vee A] \vee A] \equiv$

$\equiv [\neg A \vee \neg Tr \vee A] \wedge [[\neg\neg Tr \wedge \neg A] \vee A] \equiv$

$\equiv [[Tr \wedge \neg A] \vee A] \equiv$

$\equiv [Tr \vee A]$

We do not know whether there is a treasure.
We do not know whether the creature is verosius or falacius.

Ejercicio 6. ¿Es la siguiente afirmación correcta?

a) Falso $\models$ w, para cualquier fbf w

Respuesta:
La afirmación es correcta y se puede demostrar por inferencia de muchas maneras. Por ejemplo

Falso $\equiv$ (w $\wedge$ ($\neg$w)) $\vdash_{\textit{And elimination}}$ w
q.e.d.

También se puede utilizar directamente la definición y, dado que no existe ninguna interpretación que sea modelo de Falso, es trivial afirmar que todas las interpretaciones que son modelo de Falso, es decir ninguna, son modelos de w.

b) Sea Δ una base de conocimiento (colección de fbfs) y w una fbf
En los casos en los que
$\Delta \not\models$ w (w no es consecuencia lógica de Δ)
puede ocurrir
$\Delta \not\models \neg$w ($\neg$w tampoco es consecuencia lógica de Δ)

Respuesta:
La afirmación es correcta. Por ejemplo, si Δ es una base de conocimiento vacía
$\Delta \not\models$ w
$\Delta \not\models \neg$w
Donde w es una fbf que no es tautología.