ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 4. Espacios Euclídeos y Unitarios IV. Aplicaciones ortogonales y unitarias.

1. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar habitual y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ es

$$M_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & -2 \\ 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Determina en qué caso f es ortogonal.

2. Encuentra las ecuaciones de la simetría (ortogonal) respecto al plano $2x + y + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Encuentra la expresión analítica de las siguientes aplicaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$:

a) La simetría respecto a la recta $2x + y = 0$.

b) El giro de ángulo $\pi/3$.

4. Decide de manera razonada si los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ son aplicaciones ortogonales con el producto escalar usual y en caso afirmativo clasifícalos e indica sus elementos geométricos:

a) $\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y; \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{array} \right.$

5. Calcular la matriz en la base cannica de $\mathbb{R}^3$ de:

a) La simetría respecto del plano $x = y$; parecido al 2

b) La simetría respecto al plano $2x + y + z = 0$; hecho ej. 2

c) Giro de amplitud $\pi/2$ con eje $u = (0, 1, 1)$, con la orientación dada por el vector u.

6. Decide de manera razonada si los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ son aplicaciones ortogonales con el producto escalar usual y en caso afirmativo clasifícalos e indica sus elementos geométricos:

a) $\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z; \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} x' = z \\ y' = -y \\ z' = -x. \end{array} \right.$

7. Usando el producto escalar usual en $\mathbb{C}^3$:

a) Encuentra la expresión en coordendas de la simetría ortogonal respecto a la recta $l = \{x - iz = 0, y = 0\}$. ¿Es unitaria? ¿Es autoadjunta?

b) Encuentra la expresión en coordendas de la proyección ortogonal sobre la recta $l = \{x - (1+i)z = 0,\ y = 0\}$. ¿Es autoadjunta?

8. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Decide de manera razonada el resultado de componer:

a) Dos rotaciones en V;

b) Dos simetrías en V;

c) Una rotación con una simetría.

9. Sea f la simetría respecto al eje $\langle (a, b, c) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Demuestra que para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $f(v) + v$ es o bien $\vec{0}$ o bien un vector propio de valor propio 1.

b) Usa el apartado anterior para calcular la matriz de f en función de a, b, c.

c) Usa el apartado anterior para hallar las ecuaciones de la rotación de ángulo π respecto al a recta intersección de los planos $3x - 4y = 0, z = 0$.

10. En $\mathbb{R}^3$ considera la simetría g respecto al plano de ecuación $ax + by + cz = 0$.

a) Demuestra que para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $g(v) - v$ es ortogonal al plano de simetría.

b) Calcula la matriz de g en función de a, b, c.

c) Halla las ecuaciones de la simetría respecto al plano $x + 2y - 3z = 0$.

11. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $f : V \to V$ una función que conserva el producto escalar, i.e., para todo par de vectores $u, v \in V$ se tiene que $\langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle$. Demuestra que f es necesariamente lineal. *Sugerencia: Basta probar que* $\|f(u+v) - f(u) - f(v)\|^2 = 0$ *y que* $\|f(\lambda u) - \lambda f(u)\|^2 = 0$ *para* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y para todo par de vectores* $u, v \in V$.

12. Sea V un espacio euclídeo (respectivamente, unitario) de dimensión n sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y sea

$$O(n, \mathbb{K}) := \{f : V \to V : f \text{ es ortogonal (respectivamente unitaria)}\}.$$

a) Demuestra que $O(n, \mathbb{K})$ es un conjunto no vacío;

b) Demuestra que $O(n, \mathbb{K})$ es un grupo con la composición (que recibe el nombre de *grupo ortogonal*);

c) Decide de manera razonada si $O(n, \mathbb{K})$ es un grupo abeliano;

d) Definimos

$$SO(n, \mathbb{K}) := \{f : V \to V : f \text{ es ortogonal (respectivamente unitaria): det(f)=1}\}.$$

Demuestra que $SO(n, \mathbb{K})$ es un subgrupo de $O(n, \mathbb{K})$ (recibe el nombre de *grupo ortogonal especial*).

13. Consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo α. Determina la adjunta de h. ¿Es h ortogonal?

14. Sea l una recta (un subespacio vectorial de dimensión 1) en $\mathbb{R}^2$ donde consideramos el producto escalar usual. Demuestra que la simetría ortogonal respecto a l es una aplicación ortogonal.

15. Sea $W \subset V$ un subespacio no nulo de un vectorial euclídeo o unitario de un espacio V de dimensión $n \geq 1$. Sea $f : V \to V$ la simetría respecto a W con dirección un cierto subespacio W'. Demuestra que f es una aplicación ortogonal (o unitaria) si y sólo si la simetría es ortogonal. (i.e., f es ortogonal -o unitaria- si y sólo si $W' = W^{\perp}$).

16. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Fijada una base B de V se define la traza de f como la traza de la matriz $M_B(f)$. Demuestra que la traza de f no depende de la base B fijada. *Sugerencia: Cualquier cambio de base es de la forma* $M_{BB'}^{-1} M_B(f) M_{BB'}$. *Ahora usa que para todo par de matrices cuadradas,* A, C, *de orden* n, *Traza*$(AC) =$ *Traza*(CA).

HOJA 4

$\boxed{1.}$ $\mathbb{R}^2$ φ usual

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $B' = \{(1,0), (1,1)\}$

$$M_{B'}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

¿f ORTOGONAL?

1ª estrategia

Calculamos $B = \{(1,0),(0,1)\}$ φ usual

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$¿\, M_B(f) \cdot M_B(f)^T = I_2\,?$ $\rightarrow$ Sí $\rightarrow$ f ortogonal

$\rightarrow$ No $\rightarrow$ f no es ortogonal

2ª estrategia

$u,v \in \mathbb{R}^2$ $[u]_{B'} = (a,b)$ y $[v]_{B'} = (c,d)$

$$\varphi(u,v) = (a,b)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\varphi(f(u), f(v)) = \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right]$$

miramos que sale lo mismo

$\boxed{2.}$ Encontrar las ecuaciones de la simetría S (ortogonal) respecto al plano $2x + y + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

$W = \{2x+y+z=0\} = \langle (1,-1,-1), (0,1,-1) \rangle$

$\parallel$

$W_2 = \mathrm{Ker}(S - Id)$ $\big(v \in W_2,\ (S-Id)(v) = 0,\ S(v) = Id(v) = 0\big)$

$W^{\perp} = W_1 = \{(x,y,z) / x - y - z = 0 \ \wedge\ y - z = 0\} = \langle (2,1,1) \rangle$

$\parallel$

$\mathrm{Ker}(S + Id)$

Método 1 (en coordenadas).

$S(u) \qquad u=(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \qquad ; \qquad u = w_1 + w_2$

$w_1 \in W_1 = \langle (2,1,1) \rangle$

$w_2 \in W_2 = \langle (1,-1,-1),(0,1,-1) \rangle$

$w_1 = \lambda(2,1,1)$

$w_2 = \mu_1(1,-1,1) + \mu_2(0,1,-1)$

$$\boxed{S(u) = w_2 - w_1} = \mu_1(1,-1,1) + \mu_2(0,1,-1) - \lambda(2,1,1)$$

$S(u) - u = -2w_1 \in W_1 = W_2^{\perp}$

$S(u) + u = 2w_2 \in W_2 = W_1^{\perp}$

i $\langle S(u) - u, (1,-1,-1) \rangle = 0$

i $\langle S(u) - u, (0,1,-1) \rangle = 0$

i $\langle S(u) + u, (2,1,1) \rangle = 0$

i) $\langle \mu_1(1,-1,-1) + \mu_2(0,1,-1) - \lambda(2,1,1) - (x,y,z), (1,-1,-1) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\mu_1 - x + y + z = 0 \Rightarrow \mu_1 = \frac{x-y-z}{3}$

ii) $\langle \mu_1(1,-1,-1) + \mu_2(0,1,-1) - \lambda(2,1,1) - (x,y,z), (0,1,-1) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\mu_2 - y + z = 0 \Rightarrow \mu_2 = \frac{y-z}{2}$

iii) $\langle \mu_1(1,-1,-1) + \mu_2(0,1,-1) + \lambda(2,1,1) + (x,y,z), (2,1,1) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6\lambda + 2x + y + z = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2x+y+z}{6}$

$$S(x,y,z) = \underbrace{\frac{-2x-y-z}{6}(2,1,1)}_{-W_1} + \underbrace{\frac{x-y-z}{3}(1,-1,-1) + \frac{y-z}{2}(0,1,-1)}_{W_2}$$

3. Expresión analítica de las siguientes aplicaciones ortogonales.

a) La simetría a la recta $2x+y=0$.

Buscamos S

$$W = \{2x+y=0\} = \operatorname{Ker}(S-Id) = \langle(-1,2)\rangle$$

$$W^{\perp} = \{(x,y) / -x+2y=0\} = \langle(2,1)\rangle$$

$$B' = \{(2,1), (-1,2)\}$$

$$M_{B'}(S) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{e_1, e_2\}$$

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{BB'}^{-1} = M_{B'B} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$M_B(S) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Giro de ángulo $\pi/3$

$$\begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\operatorname{sen} \pi/3 \\ \operatorname{sen} \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix}, \text{ en } B = \{e_1, e_2\}$$

Método 2 (analítica)

$$W_2 = W = \langle (1,-1,-1), (0,1,-1) \rangle$$

$$W_1 = W^{\perp} = \langle (2,1,1) \rangle$$

$$B' = \{(2,1,1), (1,-1,-1), (0,1,-1)\}$$

$$M_{B'}(S) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{BB'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B'B} = (M_{BB'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & -1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$M_B(S) = M_{BB'} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M_{BB'}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$S(1,0,0) = \frac{-1}{3}(2,1,1) + \frac{1}{3}(1,-1,-1) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

5. Calcular la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de:

c) Giro de amplitud $\pi/2$ con eje $u=(0,1,1)$, con la orientación dada por el vector u.

Buscamos una base ortonormal $B'=\{v_1, v_2, v_3\}$ donde:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad y \quad |M_{BB'}| > 0$$

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$G.S. \to B' = \left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \to \det(M_{BB'}) = 1$$

$$M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B'B} = (M_{BB'})^{-1} = (M_{BB'})^{T}$$ la matriz de cambio de base se corresponde a una aplicación ortogonal

ortonormales

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M_{B}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{4.}$ Decidir si son ortogonales y clasificarlas.

a) $f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \;,\; \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

f es ortogonal porque $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

$$\left(\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u,v\rangle\right)$$

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ f es un giro de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

b) $g(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \;,\; \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

aplicación ortogonal porque $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Podemos ver que es una simetría así: $M_B(g)^2 = Id$

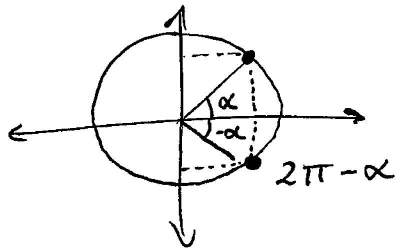
$$W = Ker(g - Id) = Ker\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{resolver}]{} y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}x$$

También se podía hacer así: como son lin. dep.:

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 0$ es la recta sobre la que se hace la simetría.

$\boxed{13.}$ $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ rotación α. Calcular $\tilde{h}$



$$M_B(h) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$M_B(\tilde{h}) = M_B(h)^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

¿qué ángulo β / $\begin{array}{l} \cos\alpha = \cos\beta \\ -\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \end{array}$ $\Rightarrow \beta = 2\pi - \alpha$

$\tilde{h}$ es el giro de ángulo $2\pi - \alpha$ ¿Es ortogonal? Sí

$\hookrightarrow$ lleva una base o.n en o.n

$\hookrightarrow M_B(h)^{-1} = M_B(h)^T$

$\boxed{16.}$ La traza y el determinante de una matriz $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ son invariantes de semejanza.

$A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ $A \sim B$ si $\exists M \in \overbrace{GL_{n\times n}(\mathbb{K})}^{\text{conjunto de matrices } \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ tal que } \det M \neq 0}$ tal que:

$$B = M^{-1} \cdot A \cdot M$$

$$\det(B) = \det(M)^{-1} \cdot \det(A) \cdot \det(M) = \det(A)$$

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(\underbrace{M^{-1}}_{D} \cdot \underbrace{A \cdot M}_{C}) = \operatorname{tr}(CD) = \operatorname{tr}(AMM^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$$

$\boxed{6.}$

a) $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

¿Es apl. ortogonal?
Sí, ya que $M_B(f) \cdot M_B(f)^T = I_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traza}(M_B(f)) = 1 \\ \det(f) = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Simetría (ortogonal) respecto a un plano}$$

$$\text{Ker}(M_B(f) - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \right\} =$$

$$= \langle (1,0,1), (1, \sqrt{2}, -1) \rangle$$

b) $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Es apl. ortogonal?
Sí, ya que $M_B(f) \cdot M_B(f)^T = I_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{traza}(M_B(f)) = -1 = -1 + 2\cos\alpha \\ \det = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Giro ángulo } \alpha + \text{Simetría ortogonal respecto al plano invariante por el giro.}$$

EJE DE GIRO $\equiv \text{Ker}(M_B(f) + Id) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \ \wedge \\ \wedge \ -x + z = 0 \end{array} \right\} =$

$$= \langle (0,1,0) \rangle = \langle e_2 \rangle$$

ÁNGULO DE GIRO $\Rightarrow -1 = -1 + 2\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \pm \pi/2$

$B' = \{e_2, e_3, e_1\}$ $\det(M_{BB'}) > 1 \Rightarrow B'$ está orientada respecto a B.

ambio de base

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\alpha = 1 \\ \alpha = \pm \pi/2 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = \pi/2$$

$\boxed{8.}$ Decidir de manera razonada el resultado de componer: $(V = \mathbb{R}^2)$

a) Dos rotaciones:

$$R_\alpha : \quad M_B(R_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_\beta : \quad M_B(R_\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\det(R_\alpha \circ R_\beta) = \underbrace{\det(R_\alpha)}_{1} \cdot \underbrace{\det(R_\beta)}_{1} = 1 \quad \text{(es otra rotación)}$$

$$M_B(R_\alpha) \cdot M_B(R_\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Rotación de la suma de los ángulos.

c) Una rotación y una simetría:

$R_\alpha, S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$R_\alpha \circ S \to \det(R_\alpha \circ S) = -1$

$S \circ R_\alpha \to \det(S \circ R_\alpha) = -1$

$\boxed{R_\alpha \circ S}$ Simetría $\perp$ respecto a $\langle u_1 \rangle$ $B = \{u_1, u_2\}$ o.n. positivamente orientada.

$$M_B(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_B(R_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$M_{R_\alpha \circ S} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

RECTA DE SIMETRÍA

$$\boxed{(\cos\alpha - 1)x + \operatorname{sen}\alpha \cdot y = 0}$$

$\boxed{S \circ R_\alpha}$

$$M_{S \circ R_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

RECTA DE SIMETRÍA

$$\boxed{(\cos\alpha - 1)x - \operatorname{sen}\alpha \cdot y = 0}$$

b) Dos simetrías.

$S_1, S_2 \qquad \det(S_1 \circ S_2) = \underset{-1}{\underset{\parallel}{\det(S_1)}} \cdot \underset{-1}{\underset{\parallel}{\det(S_2)}} = 1$ (rotación)

S_1 expresada en $B = \{u_1, u_2\}$ $u_1 \perp u_2$ o.n. $\qquad M_B(S_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

S_2 expresada en $B' = \{v_1, v_2\}$ $v_1 \perp v_2$ o.n. $\qquad M_{B'}(S_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ ya que } \begin{cases} v_1 = \cos\alpha\, u_1 + \operatorname{sen}\alpha\, u_2 \\ v_2 = -\operatorname{sen}\alpha\, u_1 + \operatorname{sen}\alpha\, u_2 \end{cases}$$

→ pq. B y B' son o.n

$$M_B(S_2) = M_{BB'} \cdot M_{B'}(S_2) \cdot M_{B'B} = M_{BB'} \cdot M_{B'}(S_2) \cdot M_{BB'}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

$$M_B(S_2) \cdot M_B(S_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ -\operatorname{sen}(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

ROTACIÓN

Fórmulas de interés

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\boxed{9.}$ Sea f la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la recta $\langle (a,b,c) \rangle$.

$$\left(Ker(f - Id_3) = \langle (a,b,c) \rangle \right)$$

a) $\forall v \in \mathbb{R}^3 \quad f(v) + v = \begin{cases} \bullet\ 0 \\ \bullet \text{ Es un } \underline{\text{vector propio}} \text{ asociado al valor propio } 1 \\ (v \in V \text{ es un vector propio para } \lambda \\ \text{si } v \neq 0 \text{ y } f(v) = \lambda v) \end{cases}$ $\in Ker(f-Id)$

$$w = f(v) + v$$

$$f(w) = f^2(v) + f(v) = v + f(v) = w \qquad f^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$$

b) Calcula $M_B(f)$ $\quad B = \{e_1, e_2, e_3\}$ en función de a, b y c.

$$f(v) + v \in ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \langle (a,b,c) \rangle$$

$i = 1,2,3 \quad f(e_i) + e_i = \lambda_i (a,b,c) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(e_1) = \lambda_1(a,b,c) - e_1 \\ f(e_2) = \lambda_2(a,b,c) - e_2 \\ f(e_3) = \lambda_3(a,b,c) - e_3 \end{cases}$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a - 1 & \lambda_2 a & \lambda_3 a \\ \lambda_1 b & \lambda_2 b - 1 & \lambda_3 b \\ \lambda_1 c & \lambda_2 c & \lambda_3 c - 1 \end{pmatrix}$$

c) Calcular la rotación de ángulo π respecto $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ z = 0 \end{cases} = \langle (4,3,0) \rangle$

$\shortparallel$

simetría respecto a $\langle (4,3,0) \rangle$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 4\lambda_1 - 1 & 4\lambda_2 & 4\lambda_3 \\ 3\lambda_1 & 3\lambda_2 - 1 & 3\lambda_3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad ¿\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3?$$

Sabemos que:

- $(4,3,0) \in Ker(M_B(f) - Id)$
- $Ker(M_B(f) + Id) =$

$= \langle (4,3,0) \rangle^{\perp} = \{4x + 3y = 0\} =$

$= \langle (0,0,1), (-3,4,0) \rangle$

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} 4\lambda_1-2 & 4\lambda_2 & 4\lambda_3 \\ 3\lambda_1 & 3\lambda_2-2 & 3\lambda_3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2em]
\begin{pmatrix} 4\lambda_1 & 4\lambda_2 & 4\lambda_3 \\ 3\lambda_1 & 3\lambda_2 & 3\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda_1 & 4\lambda_2 & 4\lambda_3 \\ 3\lambda_1 & 3\lambda_2 & 3\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
16\lambda_1 - 8 + 12\lambda_2 = 0 \\
\lambda_3 = 0 \\
-12\lambda_1 + 16\lambda_2 = 0
\end{cases}
\Rightarrow \lambda_1 = \frac{8}{25}, \quad \lambda_2 = \frac{6}{25}, \quad \lambda_3 = 0
$$

6. b) (HECHO POR ANA)

Suponemos que la base es ortonormal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_B(f)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$|M_B(f)| = -1$

$\rightarrow -Id$ X $\rightarrow$ no es la identidad

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ X $\rightarrow$ porq $M(f)$ no es simétrica $\Leftrightarrow$ no es autoadjunta

$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

este es el caso

$\Rightarrow$ Por lo tanto, el tipo de movimiento es una rotación compuesto con una simetría. Tenemos que dar:

$\rightarrow$ <u>Eje de rotación:</u> autovalor -1

$\operatorname{Ker}(f + Id)$

En este caso: $\operatorname{Ker}(f + Id) = \langle (0,1,0) \rangle$

$\rightarrow$ <u>Plano de simetría:</u> $\langle (0,1,0) \rangle^{\perp}$

En este caso $\langle (0,1,0) \rangle^{\perp} = \{y = 0\}$

$\rightarrow$ <u>Ángulo</u>

$\operatorname{Traza}(M(f)) = -1 + 2\cos\alpha = -1 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ó } \frac{3\pi}{2}}$$

Escogemos la orientación del eje de rotación dada, por ej., por el vector $\omega_1 = (0,1,0)$.

$\omega_2 \in \{y = 0\} \longrightarrow$ por ejemplo $\omega_2 = (1,0,0)$

plano de simetría

$f(\omega_2) = M_B(f) \cdot \omega_2$

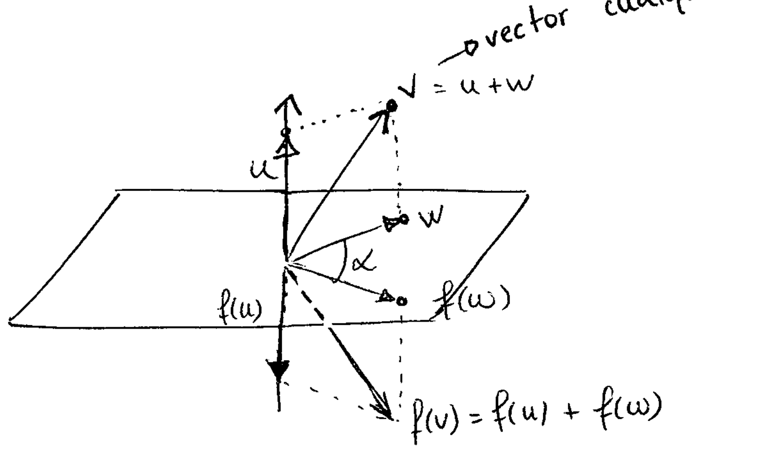
$$\begin{array}{ccc} [\omega_1]_B & [\omega_2]_B & \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ [f(\omega_2)]_B \end{array} \rightarrow \det(\ ) = \underline{\text{signo del seno}}$$

como $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$

$\operatorname{sen}\alpha > 0 \Rightarrow \boxed{\text{ángulo} = \frac{\pi}{2}}$

¿Qué significa que $M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$?

una base ortonormal adecuada



[8.] (ANA)

a) Dos rotaciones:

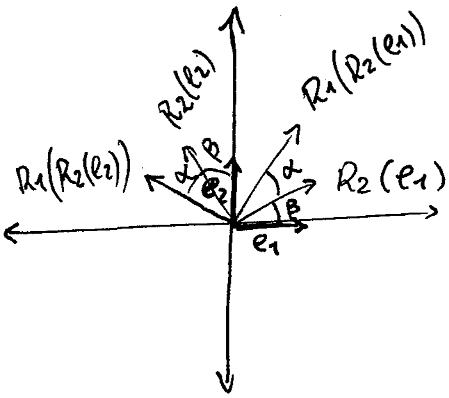
$R_1, R_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad R_1 \circ R_2$

$\alpha \quad \beta$

$$\det(R_1 \circ R_2) = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\det(R_1)}} \cdot \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\det(R_2)}} = 1$$

$\Rightarrow R_1 \circ R_2$ es una rotación.

$B = \{e_1, e_2\}$ o.n.



$$M_B(R_2) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\beta \\ \text{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$M_B(R_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$M_B(R_1) \cdot M_B(R_2) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\text{sen}(\alpha+\beta) \\ \text{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

c) Una rotación con una simetría:

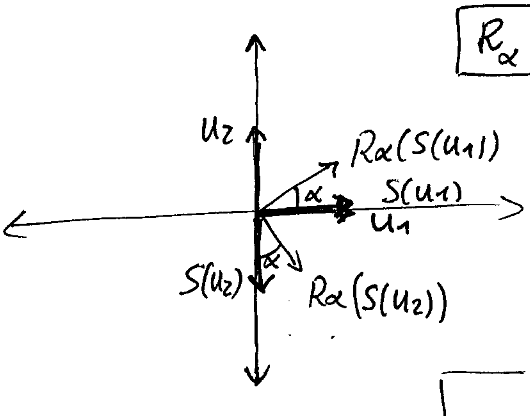
$R_\alpha, S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$R_\alpha \circ S \to \det(R_\alpha \circ S) = -1$

$S \circ R_\alpha \to \det(S \circ R_\alpha) = -1$

Simetría $\perp$ respecto a $\langle u_1 \rangle$ $\quad B = \{u_1, u_2\}$ o.n. positivamente orientada.

$\boxed{R_\alpha \circ S}$



$$M_B(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_B(R_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$M_{R_\alpha \circ S} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Recta de la simetría

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \text{sen}\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (\cos\alpha - 1)x + \text{sen}\alpha\, y = 0}$$

$\boxed{5.}$ c) (ANA)

Giro $\alpha = \pi/2$ $\quad \langle (0,1,1) \rangle$

$$B' = \left\{ u_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ u_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\langle (0,1,1) \rangle^{\perp} \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow \langle (0,1,-1) \rangle$$

$$\langle (0,1,-1) \rangle \Rightarrow y - z = 0$$

$$u_3 \perp u_2 \ \wedge \ u_3 \perp u_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightarrow (1,0,0) = u_3$$

Comprobamos que B' está positivamente orientada:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} < 0$$

$$B' = \left\{ u_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ u_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \ u_3 = (-1,0,0) \right\}$$

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\pi/2 \end{pmatrix}$$

Cambio de base

SIMETRÍAS EN ESPACIOS VECTORIALES

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

RESUMEN. Esto es para que tengáis una prueba por escrito del ejercicio 5 de la hoja 3 que el martes 24 de octubre comentamos por encima en clase.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Se dice que una aplicación lineal $S\colon V \to V$ es una simetría si $S^2 = \mathrm{Id}_V$, donde se entiende que S^2 es la composición de S consigo misma.

(a) *S es diagonalizable.* Notad que $S^2 = \mathrm{Id}_V$ implica que el polinomio mínimo de S divide a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Hay tres posibilidades: el polinomio mínimo de S es $x-1$ si, y sólo si, $S = \mathrm{Id}_V$; el polinomio mínimo de S es $x+1$ si, y sólo si, $S = -\mathrm{Id}_V$; y el polinomio mínimo x^2-1 factoriza como producto de factores simples. En el último caso, S es diagonalizable porque una aplicación lineales es diagonalizable si, y sólo si, su polinomio mínimo factoriza como producto de factores simples (esto debe estar en vuestros apuntes de Álgebra Lineal de primero). Además, las raíces del polinimio mínimo de S son los valores propios de S.

(b) *Demuestra que $V = \ker(S + \mathrm{Id}_V) \oplus \ker(S - \mathrm{Id}_V)$.* Este apartado es consecuencia directa del anterior. Podemos suponer que nuestra simetría S no es ni Id_V ni $-\mathrm{Id}_V$ pues en ambos casos el resultado es obvio. Por tanto, como el polinomio mínimo es $x^2 - 1$ sabemos que los valores propios de S son ± 1 y también sabemos que V se descompone como suma directa del subespacio propio $\ker(S+\mathrm{Id}_V)$ asociado al valor propio -1 y del subespacio propio $\ker(S-\mathrm{Id}_V)$ asociado al valor propio 1. El espacio $W_1 = \ker(S+\mathrm{Id}_V)$ es la dirección de la simetría y el espacio $W_2 = \ker(S - \mathrm{Id}_V)$ es el espacio sobre el que se realiza la simetría.

(c) *Observa que cada $u \in V$ se escribe de manera única como la suma de un vector en W_1 y otro en W_2, es decir, $u = w_1 + w_2$ donde $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$. Concluye que $S(u) = w_2 - w_1$.* Notad que $w_1 = \frac{u-S(u)}{2}$ y $w_2 = \frac{u+S(u)}{2}$ cumplen que $u = w_1 + w_2$. Además, como

$$(S + \mathrm{Id}_V)(\frac{u - S(u)}{2}) = \frac{S(u) - u}{2} + \frac{u - S(u)}{2} = 0$$

y

$$(S - \mathrm{Id}_V)(\frac{u + S(u)}{2}) = \frac{S(u) + u}{2} - \frac{u + S(u)}{2} = 0,$$

tenemos que $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ como queríamos. (La unicidad se sigue de $V = W_1 \oplus W_2$.) La conclusión $S(u) = w_2 - w_1$ se puede obtener directamente aplicando S a $u = w_1 + w_2$ o también notando que S restringida a W_1 actúa como menos la identidad y S restringida a W_2 actúa como la identidad.

(d) *Supongamos que es V un espacio vectorial euclídeo o unitario. Demuestra que una simetría es autoadjunta si, y sólo si, $W_1 \perp W_2$.* En este caso nuestro espacio vectorial V es real y complejo con producto escalar ϕ. Recordad que una aplicación lineal S es autoadjunta si, y sólo si, $\phi(S(u), v) = \phi(u, S(v))$ para todo $u, v \in V$. Sean $u, v \in V$, escribimos $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$ como en el apartado anterior. Entonces $\phi(u_2 - u_1, v_1 + v_2) = \phi(u_1 + u_2, v_2 - v_1)$ si, y sólo si (desarrollando y simplificando)

$$2(\phi(u_2, v_1) - \phi(u_1, v_2)) = 0.$$

Si $W_1 \perp W_2$ la anterior relación siempre se tiene porque el producto escalar de un vector de W_1 y de W_2 siempre es cero. Inversamente, si la relación anterior se tiene para todo $u, v \in V$, en particular se tiene que $\phi(u_2, v_1) = 0$ para todo $u_2 \in W_2$ y $v_1 \in W_1$ (tomando $u_1 = 0 = v_2$).

Lo importante es que si una aplicación lineal S cumple $S^2 = \mathrm{Id}_V$, entonces S es una simetría. Además el espacio sobre que el que se realiza la simetría es $W_2 = \ker(S - \mathrm{Id}_V)$. Se dice que la simetría es ortogonal si $W_1 \perp W_2$, es decir, si la dirección de la isometría es ortogonal al espacio sobre el que se realiza la simetría. Podéis probar que una simetría es una aplicación ortogonal si, y sólo si, la simetría es ortogonal en el sentido anterior. (De hecho, este es el ejercicio 15 de la hoja 4.)

7. Usando el producto escalar usual en $\mathbb{C}^3$, recordad

$$\langle (x,y,z),(t,r,s)\rangle = x\bar{t}+y\bar{r}+z\bar{s}.$$

$x,y,z,t,r,s\in\mathbb{C}$

a) Encuentra la expresión en coordenadas de la simetría ortogonal S_ℓ con respecto a la recta $\ell=\{x-iz=0,\ y=0\} = \langle(i,0,1)\rangle = W_2$

¿Es unitaria? ¿Es autoadjunta?

$$\ell=\langle(i,0,1)\rangle \overset{o.n.}{=} \langle(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})\rangle$$

$$\ell^\perp=\{(x,y,z)\mid -xi+z=0\}$$
$$=\langle(0,1,0),(1,0,i)\rangle \overset{o.n.}{=} \langle(0,1,0),(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2})\rangle$$
$$=W_1$$

$\mathcal{B}=\{(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),(0,1,0),(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2})\}$ es base o.n. de $\mathbb{C}^3$

Sabemos que $u\in\mathbb{C}^3$ se escribe como

$(x,y,z)=u=u_1+u_2$ donde $u_1\in W_1$ y $u_2\in W_2$

$$=\underbrace{\lambda(0,1,0)+\mu(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2})}_{W_1}+\underbrace{\delta(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})}_{W_2}$$

además $S_\ell(u)=u_2-u_1$

Queremos calcular λ,μ y δ en función de x,y,z (las coordenadas de u). Escribimos $S=S_\ell$ por comodidad.

$$\begin{cases} S(u)-u=-2u_1\in W_1=\ell^\perp \\ \Rightarrow \langle S(u)-u,(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})\rangle=0 \\ S(u)+u=2u_2\in W_2=\ell=(\ell^\perp)^\perp \\ \Rightarrow \langle S(u)+u,(0,1,0)\rangle=0 \\ \quad\langle S(u)+u,(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2})\rangle=0 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas --> desarrollar y resolver

$$\begin{cases} \langle S(u)-u,\ (i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\rangle = 0 \\ \langle S(u)+u,\ (0,1,0)\rangle = 0 \\ \langle S(u)+u,\ (1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2})\rangle = 0 \end{cases}$$

$S(u) = u_2 - u_1 = \delta(i/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) - \lambda(0,1,0) - \mu(1/\sqrt{2}, 0, i/\sqrt{2})$

$u = (x,y,z)$

$\langle \delta(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}) - \lambda(0,1,0) - \mu(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2}) - (x,y,z),\ (i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})\rangle$

$\underset{\text{B base o.n.}}{=} \delta + i/\sqrt{2}\,x - 1/\sqrt{2}\,z = 0$

$\langle \delta(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}) - \lambda(0,1,0) - \mu(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2}) + (x,y,z),\ (0,1,0)\rangle$

$\underset{\text{B base o.n.}}{=} -\lambda + y = 0$

$\langle \delta(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}) - \lambda(0,1,0) - \mu(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2}) + (x,y,z),\ (1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2})\rangle$

$\underset{\text{B base o.n.}}{=} -\mu + 1/\sqrt{2}\,x - i/\sqrt{2}\,z = 0$

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{z - ix}{\sqrt{2}} \\ \lambda = y \\ \mu = \dfrac{x - iz}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (x,y,z)$$

Por tanto, $S(u) = \dfrac{z-ix}{\sqrt{2}}(i/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}) - y(0,1,0) - \dfrac{x-iz}{\sqrt{2}}(1/\sqrt{2},0,i/\sqrt{2})$

$= (iz, -y, -ix)$

En la base estándar $\mathcal{C} = \{e, e_2\ e_3\}$

$$M_{\mathcal{C}}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De hecho si consideramos la base $\mathcal{C}' = \{e_2, e_1, e_3\}$

$$M_{\mathcal{C}'}(S) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ esta caja tiene pol. característico

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

así que $\quad M_{\mathcal{C}'}(S) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

la matriz de una simetría respecto a una recta

$\mathcal{C}$ es base o.n.

¿Es unitaria? $\quad M_{\mathcal{C}}(S)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{M_{\mathcal{C}}(S)}$

así que sí

¿Es autoadjunta? $\Leftrightarrow$ ¿ $S = \tilde{S}$ $\Longleftrightarrow$ $M_{\mathcal{C}}(S) = M_{\mathcal{C}}(\tilde{S})$
$= \left(\overline{M_{\mathcal{C}}(S)}\right)^T$

así que sí

<u>NOTA</u>: Noted que el ejercicio 5 de la hoja 3 está hecho para V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial cualquiera. Es decir, las conclusiones del ejercicio sirven tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$.
Así que no es extraño que nuestra simetría de $\mathbb{C}^3$ con matriz en la base estándar
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se puede escribir en otra base como $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

NOTA II El apartado b) es similar, sólo que pide calcular una proyección (de este tipo de ejercicios hicimos en la hoja 3). Simplemente notad que en este apartado no pregunta si la aplicación es unitaria ¿por qué? porque toda aplicación unitaria es biyectiva y las proyecciones no son biyectivas

$\det \neq 0$ $\qquad$ $\det = 0$