SUMA DE SERIES

$$\left.\begin{array}{l} S_a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \\ S_b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{suma}} S_a + S_b = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-c)^n$$

PRODUCTO DE SERIES (Producto de Cauchy)

$$\left.\begin{array}{l} S_a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \\ S_b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \end{array}\right\}$$

Llamamos $C_n = \sum_{K=0}^{n} a_{n-K} b_K$

y entonces $S_a \cdot S_b = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-c)^n$

DIFERENCIACIÓN DE SERIES

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{K=0}^{\infty} (K+1) a_{K+1} (z-c)^K$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

$$E(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$E'(z) = E(z)$$

$$E(z+w) = E(z)E(w)$$

$$E(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

converg. unif. en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$; $e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$; $\operatorname{senh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

FUNCIONES ARMÓNICAS $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~C~~

tal que $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$ (ec. Laplace)

- Si $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica y $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface que $u + iv \in H(\Omega)$, se dice que v es la conjugada armónica de u.

Cálculo de v dada $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

1. Calculamos u_x e igualamos a v_y
2. Obtenemos v integrando u_x con respecto a y. Queda por determinar una constante en función de x
3. Calculamos $-v_x$, calculamos u_y e igualamos
4. Despejamos la const.(x) de la ecuación del pto. 3.

RADIO DE CONVERGENCIA $R = \left[\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \right]^{-1}$ (Cauchy-Hadamard)

- convergencia absoluta cuando $|z - c| < R$
convergencia uniforme en el $\underbrace{\text{disco } \overline{D}(c,r)}_{\text{compacto}} = \{z : |z - c| \leq r\}$ con $r < R$
diverge $|z - c| > R$

- Criterio cociente: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

FUNCIÓN LOGARITMO

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg z = \ln|z| + (\mathrm{Arg}\, z + 2\pi n)i \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z \quad \text{donde } \mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$$

- continua en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
- holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ $\boxed{(\log z)' = \frac{1}{z}}$

POTENCIAS COMPLEJAS O DE UN Nº COMPLEJO

$a, z \in \mathbb{C}$ $a \neq 0$ $\quad a^z = e^{(\log a) z} = e^{(\ln|a| + i\arg(a)) z}$

$$\boxed{(a^z)' = \left(e^{\log(a) z}\right)' = e^{(\log a) z} \cdot \log a = a^z \cdot \log a}$$

- La función raíz cuadrada se puede definir en el conocido Ω

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}(\log z)} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \quad \text{para } z = r e^{i\theta}$$

y es holomorfa también en Ω.

TEOREMA FUNCIÓN INVERSA

<u>Obs</u>: Sea $f = u + iv$ con u, v reales

$$|f'(c)|^2 = u_x^2(c) + v_x^2(c)$$

recuerda $\quad f'(c) = u_x(c) + i v_x(c)$

- Tma. FI 1: $f \in H(D)$, $g = f^{-1}$ y g holomorfa $\Rightarrow$

$$\Rightarrow g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

- Tma FI 2: $f \in H(D)$ y $c \in D$. Si $f'(c) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ entorno U_c t.q. $f|_{U_c}$ biyección entre U_c y $f(U_c)$

y su inversa local $g: f(U_c) \to U_c$ es también holomorfa

$$\Rightarrow g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \quad \forall w \in f(U_c)$$

PARAMETRIZACIONES CLÁSICAS

$$C_1 \equiv C(0;1) = e^{it} \quad t\in[0,2\pi) \quad = \quad \cos t + i\operatorname{sen} t \quad t\in[0,2\pi)$$

$$C_r \equiv C(0;r) = re^{it} \quad t\in[0,2\pi) \quad = \quad r(\cos t + i\operatorname{sen} t) \quad t\in[0,2\pi)$$

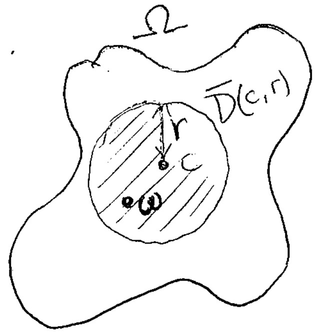
semic. superior $\quad e^{it} \quad t\in[0,\pi] \quad = \quad \cos t + i\operatorname{sen} t \quad t\in[0,\pi]$

INTEGRALES DE LÍNEA COMPLEJAS

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad C^1$ a trozos $\quad f$ continua en $\{\gamma\}$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

FÓRMULA INTEGRAL CAUCHY CIRCUNFERENCIAS



Ω dominio en el plano , $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ $\quad c\in\Omega$

$r>0$ t.q. $\overline{D(c,r)} = \{z\in\mathbb{C} : |z-c|\le r\} \subset \Omega$

$C = \{z\in\mathbb{C} : |z-c| = r\}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega - z} = f(z) \quad \forall z\in D(c,r) = \{z\in\mathbb{C} : |z-c|<r\}$$

FÓRMULA INTEGRAL CAUCHY DERIVADAS

Ω dominio en el plano, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, $c\in\Omega$. Sea $R = \operatorname{dist}(c,\partial\Omega)$

$0<r<R$; $C_r = \{z\in\mathbb{C} : |z-c| = r\}$ $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{n+1}}\,d\omega = f^{(n)}(z) \quad \forall z\in D(c,r) \quad \forall n\ge 0$$

SERIE DE TAYLOR : f holomorfa $\iff$ f analítica

f holomorfa : $\boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}}$

$\Rightarrow \boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n}$ serie de Taylor de f centrada en c
ÚNICA

CRECIMIENTO POLINOMIO

P pol. grado $n \Rightarrow \exists R>0, \exists M>0$ t.q. $|P(z)| \leq M|z|^n$
$\forall z : |z| \geq R$

ESTIMACIONES DE CAUCHY

f entera y si existen $\alpha>0, M>0, R>0$ tales que
$|f(z)| \leq M|z|^{\alpha}$ $\forall z : |z| \geq R \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ es un pol. de grado máximo $\lfloor \alpha \rfloor$

TEOREMA DE LIOUVILLE : Toda función entera y acotada es constante.

Entonces f entera y no constante $\Rightarrow$ no acotada
(podría estarlo por una función tal que $\rightarrow \infty$ cuando $|z| \to \infty$)

TMA. FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA : Todo pol. no constante tiene al menos 1 raíz compleja.

Variable Compleja I (CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Las convergencias puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones

Definición. Se dice que la sucesión de funciones (f_n) converge puntualmente a la función f en en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si para todo $z \in A$ la sucesión $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ de números complejos converge al número complejo $f(z)$ cuando $n \to \infty$; es decir, si

$$\forall z \in A \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon .$$

Decimos que la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente a la función f en en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ (y escribimos $f_n \rightrightarrows_A f$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, \forall z \in A \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon .$$

Es irrelevante si ponemos la desigualdad estricta ($< \varepsilon$) o no ($\leq \varepsilon$) porque es fácil comprobar que ambas definiciones son equivalentes. Por tanto, la formulación de convergencia uniforme con $\leq \varepsilon$ es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon .$$

En otras palabras, $f_n \rightrightarrows f$ en A si y sólo si $\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 1 *Demuestre que la sucesión de funciones complejas $f_n(z) = z^n$:*
(a) converge a cero puntualmente si $|z| < 1$;
(b) converge a 0 uniformemente en cualquier subconjunto compacto del disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
(c) no converge uniformemente en $\mathbb{D}$.
(d) diverge si $|z| \geq 1$ y $z \neq 1$.

SOLUCIÓN. (a) Sabemos de Cálculo I que si $q \in \mathbb{R}$ y $|q| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Por tanto, si $|z| < 1$, tomando como $q = |z|$, vemos que $|z^n| = |z|^n \to 0$, lo cual significa que $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.

(b) Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ (notación frecuente: $K \Subset \mathbb{D}$). Puesto que K es cerrado y acotado, es fácil ver (y lo hemos justificado con detalle en clase) que existe un número R, $0 < R < 1$, tal que para todo $z \in K$ se cumple $|z| \leq R$. Si $z \in K$ entonces $|z^n| = |z|^n \leq R^n$ así que

$$\sup_{z \in K} |z^n - 0| \leq R^n \to 0, \qquad n \to \infty .$$

Por lo tanto, $z^n \rightrightarrows 0$ en K.

(c) La sucesión $f_n(z) = z^n \to 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$ así que sólo tenemos que examinar si $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \to 0$ o no cuando $n \to \infty$. Por definición, el supremo de un conjunto es mayor o igual que cualquier valor del conjunto, así que, eligiendo $z = 1 - (1/n)$, vemos que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |z|^n \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n , \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \right) \geq \limsup_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} .$$

Se sigue que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \not\to 0$, así que la convergencia no es uniforme en $\mathbb{D}$.

(d) Sabemos de Cálculo I que $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ cuando $q \in \mathbb{R}$ y $q > 1$. Si $|z| > 1$ entonces $|z^n| = |z|^n \to +\infty$, lo cual significa por definición que $\lim_{n\to\infty} z^n = \infty$ (en el plano complejo extendido).

Queda por comprobar que z^n diverge si $|z| = 1$ y $z \neq 1$. Equivalentemente, veremos que $|z| = 1$ junto con la convergencia de z^n a un valor implica que $z = 1$. Hay, por lo menos, dos maneras de ver esto.

Una demostración, más larga pero instructiva (que se puede saltar en una primera lectura de estos apuntes) es como sigue. Sea $z = e^{it}$. Por la fórmula de A. de Moivre, $z^n = e^{int} = \cos nt + i \operatorname{sen} nt$. Si esta sucesión compleja converge, entonces también convergen las sucesiones reales $x_n = \cos nt$ e $y_n = \operatorname{sen} nt$. Veremos que esto sólo es posible cuando $e^{it} = 1$. Sean $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Entonces también $x = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$ e $y = \lim_{n\to\infty} y_{2n}$. Eso significa que

$$x_{2n} = \cos 2nt = 2\cos^2 nt - 1 = 2x_n^2 - 1, \qquad y_{2n} = \operatorname{sen} 2nt = 2 \operatorname{sen} nt \cos nt = 2x_n y_n .$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos que

$$x = 2x^2 - 1, \qquad y = 2xy.$$

De la segunda igualdad se sigue que o bien $y = 0$ o bien $x = 1/2$. Como el valor $x = 1/2$ no satisface la condición $x = 2x^2 - 1$, se sigue que $y = 0$. Puesto que la identidad básica $\cos^2 nt + \operatorname{sen}^2 nt = 1$ implica $x^2 + y^2 = 1$, concluimos que $x = 1$ ó $x = -1$. De nuevo, $x = -1$ incumple $x = 2x^2 - 1$, así que $x = 1$. Por lo tanto, hemos llegado a la conclusión de que $\cos nt \to 1$, $\operatorname{sen} nt \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Usando esta última conclusión y tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la fórmula

$$x_{n+1} = \cos(nt + t) = \cos nt \cos t - \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $1 = \cos t$, mientras que tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la fórmula

$$y_{n+1} = \operatorname{sen}(nt + t) = \operatorname{sen} nt \cos t + \cos nt \operatorname{sen} t$$

obtenemos $0 = \operatorname{sen} t$ y, por tanto, $z = e^{it} = 1$, que es lo que queríamos demostrar.

Otra demostración, mucho más breve, es la siguiente. Supongamos lo contrario: que para cierto z con $|z| = 1$ existe el límite $z_0 = \lim_{n\to\infty} z^n$. Entonces también $z_0 = \lim_{n\to\infty} z^{n+1}$. Puesto que $|z| = 1$, se sigue que $z^n \neq 0$ y $|z_0| = 1$ y, por tanto, $z_0 \neq 0$. Luego

$$z = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}}{z^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_0}{z_0} = 1 .$$

Conclusión: cuando $|z| = 1$, la sucesión z^n sólo puede ser convergente si $z = 1$, el caso trivial ya considerado antes. ■

Definición. La serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si converge la serie asociada de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Al igual que en Cálculo I (para las series de números reales), si una serie converge absolutamente entonces converge y su suma cumple $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Definición. Diremos que la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en $A \subset \mathbb{C}$ a la suma $S(z)$ si las sumas parciales $S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$ convergen uniformemente a $S(z)$ en $A \subset \mathbb{C}$.

Teorema. (*Criterio de Weierstrass*) Si para todo $n \in \mathbb{N}$ (o incluso para todo $n \geq N_0$ para un $N_0 \in \mathbb{N}$ fijo) y para todo $z \in A$ se cumple $|f_n(z)| \leq M_n$ y la serie de números positivos $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A y absolutamente para todo $z \in A$ y su suma satisface la desigualdad $\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$.

Observación. El criterio de Weierstrass sólo nos permite concluir que la serie converge pero no nos da ninguna información acerca del valor de la suma.

Ejercicio 2 *¿Para qué valores de z converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$? ¿Qué podemos afirmar acerca del tipo de convergencia para esos valores?*

SOLUCIÓN. Si la serie converge para un valor de z, entonces el término general $z^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Según el resultado del anterior ejercicio, para que esto ocurra se tiene que cumplir la condición $|z| < 1$. Veamos ahora que la serie converge en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

De hecho, veremos más: la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto K de $\mathbb{D}$. Las sumas parciales de la serie son conocidas y convergen puntualmente:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1-z}, \qquad N \to \infty.$$

Si fijamos un subconjunto compacto $K \Subset \mathbb{D}$, existe un número $r \in (0,1)$ tal que para todo $z \in K$ se cumple $|z| \leq r$. Entonces, por la desigualdad triangular inversa, $|1 - z| \geq 1 - |z| \geq 1 - r > 0$ y luego podemos estimar la diferencia de las sumas parciales y la suma de la serie:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^n - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} - \frac{1}{1-z}\right| = \left|\frac{z^{N+1}}{1-z}\right| \leq \frac{r^{N+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{N+1}}{1-r}.$$

La última cantidad tiende a cero cuando $N \to \infty$ (independientemente de $z \in K$ ya que r es fijo); es decir,

$$\sup_{z \in K}\left|\sum_{n=0}^{N} z^n - \frac{1}{1-z}\right| \leq \frac{r^{N+1}}{1-r} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Por definición, esto significa que las sumas parciales $\sum_{n=0}^{N} z^n$ convergen a $\frac{1}{1-z}$ uniformemente en K.

Proposición. Si $f_n \rightrightarrows_A f$ y las funciones f_n son todas continuas en el conjunto $A \subset \mathbb{C}$, entonces f también es continua en A. En particular, si las funciones f_n son todas continuas en el conjunto $A \subset \mathbb{C}$ y la serie funcional $\sum_n f_n(z)$ converge uniformemente en A a la suma $S(z)$, entonces S es también continua en A.

DEMOSTRACIÓN. Vista en clase (sencilla). ■

Ejercicio 3 *(a) Demuestre que la serie funcional compleja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

converge uniformemente en los subconjuntos compactos del disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

(b) ¿Es la suma de la serie una función continua en $\mathbb{D}$?

SOLUCIÓN. (a) Sea $K \Subset \mathbb{D}$; entonces existe $r \in (0,1)$ tal que $|z| \le r$ para todo $z \in K$ se cumple. Por la desigualdad triangular inversa, $|1-z^n| \ge 1-|z^n| \ge 1-r^n \ge 1-r > 0$ ya que $r^n \le r$ (puesto que $0 < r < 1$). Por tanto, tenemos la siguiente estimación para todo $z \in K$:

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| = \frac{|z|^n}{|1-z^n|} \le \frac{r^n}{|1-z^n|} \le \frac{r^n}{1-|z|^n} \le \frac{r^n}{1-r}$$

y la serie $\sum_n \frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}\sum_n r^n$ converge. El criterio de Weierstrass implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ converge uniformemente en K. (Obsérvese que era importante hacer una estimación donde no aparezca la n en el denominador de los términos de la serie numérica, para tener una serie más manejable y cuya convergencia se pueda establecer con facilidad.)

(b) Todos los términos de la serie son funciones racionales y el denominador $1-z^n \neq 0$, luego son funciones continuas en $\mathbb{D}$. En particular, también lo son en cada $K \Subset \mathbb{D}$. Puesto que la convergencia es uniforme en cada $K \Subset \mathbb{D}$, por la proposición enunciada antes, la suma de la serie es continua en cada $K \Subset \mathbb{D}$.

Esto fácilmente implica que la suma es continua en todo $\mathbb{D}$ pero hay que razonarlo cuidadosamente: debemos ver que para cada $z \in \mathbb{D}$, es continua en algún disco abierto $D(z;\delta)$. Podemos hacerlo como sigue: tomamos un disco $D(z;r) \subset \mathbb{D}$. Su frontera podría tener intersección con la frontera de $\mathbb{D}$ pero si consideramos un disco cerrado de radio más pequeño, por ejemplo, $\overline{D}(z;\delta/2)$, éste ya será un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ y, por lo que hemos demostrado, la suma de la serie es continua en $\overline{D}(z;\delta/2)$. Por tanto, también lo es en el disco abierto $D(z;\delta/2)$. Esto completa la demostración. ■

Ejercicio 4 *¿Para qué valores de z converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$?*

SOLUCIÓN. Después del cambio de variable

$$w = \frac{1+z}{1-z},$$

la serie se convierte en la serie geométrica de la variable w, que -después de los cálculos pertinentes- se puede volver a transformar en una función de z:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}} = \frac{1-z}{-2z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}.$$

Puesto que la serie geométrica sólo converge cuando $|w| < 1$, nuestra serie será convergente sólo para aquellos z que cumplan $|1+z| < |1-z|$. Es decir, cuando $|z-(-1)| < |z-1|$.

Podemos entender el conjunto (lugar geométrico) obtenido de dos maneras: geométrica y algebraica. Ambas son sencillas pero instructivas.

Geométricamente, dicho conjunto representa el lugar geométrico de los puntos que están más cerca de -1 que de 1, que es el semiplano izquierdo abierto.

Lo mismo se puede ver algebraicamente: el conjunto indicado es el conjunto de los puntos para los que $|1+z|^2 < |1-z|^2$. Haciendo uso de la fórmula habitual: $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w})$, vemos que esto es equivalente a

$$1 + |z|^2 + 2\mathrm{Re}\, z < 1 + |z|^2 - 2\mathrm{Re}\, z.$$

Esta desigualdad se reduce a $\mathrm{Re}\, z < 0$, lo cual significa que z está el semiplano izquierdo abierto. ■

Series de potencias

Definición. Sean $c \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$. La suma infinita $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ se denomina serie de potencias (centrada en $z = c$). Los números a_n son los coeficientes de la serie.

Mencionamos algunos ejemplos.

- Cada polinomio de z de grado N es una serie de potencias, donde $a_n = 0$ para todo $n > N$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \ldots$ es una serie de potencias centrada en el origen ($c = 0$).
- Por supuesto, la suma puede empezar desde otro valor de n, distinto de cero (considerando los coeficientes iniciales $a_k = 0$), por ejemplo,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)(n-2)}(z+2i)^n.$$

  En este caso, $c = -2i$ mientras que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

- Es importante observar que $\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n = \frac{1}{z-1} + 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \ldots$ no es una serie de potencias centrada en $c = 1$, debido a la presencia del término $(z-1)^{-1}$. (Advertencia: eso no significa que la suma no pueda escribirse como serie de potencias centrada en otro punto, pero éste es un asunto diferente que trataremos en otro capítulo.)

Para una serie de potencias, se plantean varias preguntas naturales: para qué valores de z converge, cómo converge, si representa una función continua o diferenciable, etc. Como veremos más adelante, las series de potencias representarán nuestro ejemplo principal de funciones holomorfas en discos abiertos.

A. Convergencia de series de potencias. Es obvio que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ converge (absolutamente) para $z = c$, siendo la suma a_0. ¿Converge para algún otro valor de z? Nuestra primera tarea es determinar esos valores, si los hubiera. La respuesta viene dada por el siguiente teorema fundamental que debemos al matemático noruego Niels H. Abel (1802–1829).

Teorema. (*Abel*) Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, existe un valor $R \in [0, +\infty]$ tal que la serie:

- converge absolutamente cuando $|z-c| < R$;

- converge uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \leq r\}$, donde $r < R$ (equivalentemente, converge uniformemente en cada subconjunto compacto $K \Subset D(c;R)$);

- diverge cuando $|z-c| > R$ (etendiendo que converge para todo z cuando $R = +\infty$).

El valor de R es único y viene dado por la *fórmula de Cauchy-Hadamard*:

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},}$$

entendiendo que $1/+\infty = 0$ y $1/0^+ = +\infty$. (Por supuesto, con frecuencia usaremos también la notación alternativa $\overline{\lim}$ para denotar al lim sup.)

Definición. El disco $D(c;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$ se denomina disco de convergencia de la serie de potencias y el valor R (finito o infinito) radio de convergencia. (Obviamente, es un verdadero disco sólo cuando $0 < R < +\infty$; cuando $R = 0$, la región de convergencia es sólo el punto c y, cuando $R = +\infty$, se trata de todo el plano.)

DEMOSTRACIÓN. Existen diferentes pruebas. Aquí daremos una bastante breve, distinta de la explicada en clase. Hay que discutir dos casos diferentes: $R = 0$ y $R > 0$.

Primero, consideremos el caso cuando $R = 0$. No existen puntos tales que $|z-c| < 0 = R$, así que sólo hay que demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ diverge para todo z con $|z-c| > 0$, es decir, para todo $z \neq c$. Sea z arbitrario con $z \neq c$. Puesto que, por hipótesis, $0 = R = 1/(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n})$, es decir, $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = +\infty$, se sigue que existen infinitos índices $k \in \mathbb{N}$ tales que $|a_k|^{1/k} > \frac{1}{|z-c|}$. Entonces para cada uno de esos valores de k tenemos que $|a_k(z-c)|^k| > \frac{1}{|z-c|^k} \cdot |z-c|^k = 1$. Por tanto, el término general, $a_n(z-c)^n$ de nuestra serie no puede tender a cero cuando $n \to \infty$, así que la serie diverge.

Consideremos ahora el caso $R > 0$. Para r arbitrario tal que $0 < r < R$, veamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ converge absoluta y uniformemente en el disco cerrado $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \leq r\}$, para $0 < r < R$. En primer lugar, existe ρ tal que $r < \rho < R$. Puesto que, por hipótesis, $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 1/R < 1/\rho$, por la definición del límite superior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{1/n} < 1/\rho$ para todo $n \geq N$. Entonces

$$|a_n(z-c)^n| = |a_n||z-c|^n < \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Puesto que $0 < r/\rho < 1$, la serie geométrica $\sum_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ converge. Por el criterio de Weierstrass, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-c)^n$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \leq r\}$. Puesto que esto se cumple para todo r con $0 < r < R$, se sigue que la serie de potencias converge absolutamente en todo el disco abierto $D(c;R)$.

Nos queda por comprobar que la serie diverge cuando $|z-c| > R$. Sea z un número arbitrario con esta propiedad y elijamos un valor r tal que $|z-c| > r > R$. Entonces $1/r < 1/R$ y, por la definición del límite superior, existe un conjunto infinito de índices $k \in \mathbb{N}$ tales que $|a_k|^{1/k} > 1/r$. Para cada uno de esos valores de k obtenemos que

$$|a_k(z-c)^k| > \left(\frac{|z-c|}{r}\right)^k \to \infty, \qquad k \to \infty,$$

lo cual significa que el término general de nuestra serie de potencias no tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie diverge. ■

Observación. 1. El teorema de Abel nos da una nueva perspectiva -más general- de las series de potencias reales, vistas en Cálculo I: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, con c, $a_n \in \mathbb{R}$. Esas series son, obviamente, un caso especial de las series de potencias complejas. Para $z \in \mathbb{C}$, convergen típicamente en un disco $D(c;R)$ pero, para $x \in \mathbb{R}$, convergen en un intervalo abierto $(c-R, c+R)$ de la recta real. Hay que darse cuenta de que $(c-R, c+R) = D(c;R) \cap \mathbb{R}$. Por tanto, el teorema aquí visto es una generalización del resultado visto en Cálculo I.

2. El teorema de Abel no indica nada acerca de la convergencia o divergencia en la circunferencia $|z-c| = R$ de centro c y radio R, ya que caben todas las posibilidades: convergencia en toda la circunferencia, divergencia en cada punto de la circunferencia, convergencia en algunos puntos de la circunferencia y divergencia en el resto. Veamos algunos ejemplos.

Ejercicio 5. *Discuta la convergencia de las series funcionales* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

SOLUCIÓN. Ambas son series de potencias centradas en el origen ($c = 0$) así que es aplicable el Teorema de Abel. En ambos casos, la fórmula de Cauchy-Hadamard implica fácilmente que $R = 1$ (en uno de ellos porque $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Por tanto, ambas series convergen absolutamente en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ y divergen para $|z| > 1$. Además, convergen uniformemente en cualquier disco $\{z : |z| \leq r\}$, $0 < r < 1$ (y, por tanto, en cualquier $K \Subset \mathbb{D}$).

Sin embargo, veremos que existe una gran diferencia en cuanto a la convergencia de ambas series en la circunferencia unidad $\{z : |z| = 1\}$. A saber, la primera diverge en todos los puntos de la circunferencia mientras que la segunda converge en todos (y, de hecho, converge uniformemente en toda la circunferencia y en todo el disco unidad cerrado).

La primera serie es la conocida serie geométrica (Ejercicio 2) cuyas sumas parciales son

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1-z} \to \frac{1}{1-z}, \qquad N \to \infty.$$

Aunque la suma $\dfrac{1}{1-z}$ tiene sentido para todo $z \neq 1$, la serie geométrica sólo coincide con ella en $\mathbb{D}$, el disco unidad abierto, y no puede ser convergente en ningún punto de la circunferencia unidad. En efecto, si $|z| = 1$, entonces o bien $z^n \to 1$ (si $z = 1$) o bien z^n diverge (en el caso contrario) por el Ejercicio 1. Por tanto, el término general de la serie, $z^n \not\to 0$ en la circunferencia cuando $n \to \infty$, luego la serie diverge allí.

Sin embargo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en todo el disco unidad cerrado $\{z : |z| \leq 1\}$ debido al Criterio de Weierstrass, ya que para $n \geq 1$ allí se tiene que $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge. ■

Existen otros ejemplos, más complicados que el Ejercicio 5 donde el comportamiento en el borde del disco de convergencia varía de un punto a otro. Sin embargo, muchos de ellos requieren más resultados teóricos de los que podemos dar en este curso (tal vez algunos se podrán ver en el curso optativo de Variable Compleja II). Para ver otro ejemplo relativamente elemental, necesitaremos primero recordar el siguiente resultado, conocido de los cursos de Cálculo.

Teorema. (Criterio de Abel-Dirichlet) Supongamos que la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ de números complejos y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ de números reales cumplen las siguientes condiciones:

(1) Las sumas parciales $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ forman una sucesión acotada;

(2) $(b_n)_n$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

No es difícil dar una demostración usando el Criterio de Cauchy pero la omitiremos aquí.

Ejercicio 6. *Supongamos que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ es 1 y que, además, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.*

(a) Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge en cada punto z con $|z| = 1$ salvo, posiblemente, en $z = 1$.

(b) Demuestre, dando un ejemplo concreto, que una serie de este tipo puede ser divergente en $z = 1$.

SOLUCIÓN. (a) Sea z fijo con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Podemos aplicar el Criterio de Abel-Dirichlet eligiendo $a_n = z^n$, puesto que

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1 + |z^{n+1}|}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}$$

y, por tanto, la sucesión (A_n) está acotada por un número fijo. Se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ converge para todo z con $|z| = 1$, $z \neq 1$.

(b) El ejemplo de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$, con $b_n = \frac{1}{n}$ (decreciente y convergente a cero) muestra que una serie con las características exigidas puede ser divergente para $z = 1$ (puesto que en ese punto se convierte en la conocida serie armónica). ■

El siguiente ejercicio nos muestra cómo tratar un caso de serie con "lagunas" (donde muchos términos son cero).

Ejercicio 7. *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty}(-2i)^n z^{n^3}$.

SOLUCIÓN. Observemos primero que el coeficiente a_k de la serie es no nulo si y sólo si $k = n^3$ y que en este caso $n = k^{1/3}$. Así obtenemos la siguiente fórmula para el coeficiente k-ésimo y su módulo:

$$a_k = \begin{cases} (-2i)^{k^{1/3}}, & \text{si } k = n^3, \\ 0, & \text{si } k \neq n^3. \end{cases} \qquad |a_k| = \begin{cases} 2^{k^{1/3}}, & \text{si } k = n^3, \\ 0, & \text{si } k \neq n^3. \end{cases}$$

Luego

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} 2^{(k^{1/3}/k)} = \lim_{k\to\infty} 2^{k^{-2/3}} = 2^0 = 1.$$

Finalmente, Aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard, obtenemos $R = 1$. ■

Una fórmula alternativa para el radio de convergencia. Recordemos el siguiente hecho conocido del cálculo elemental: para toda sucesión $(c_n)_n$ de números positivos se cumple la desigualdad

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Por tanto, si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$, las cuatro cantidades coinciden y $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$. Como consecuencia, en el caso cuando $a_n \neq 0$ para todo n (o para todo $n \geq N$) y cuando el límite del cociente existe, tenemos la siguiente fórmula alternativa (también llamada la fórmula del cociente) para el radio de convergencia.

Teorema. (*Fórmula de Hadamard*). Si $a_n \neq 0$ para todo $n \geq N$ y existe cualquiera de los límites que aparecen en la fórmula abajo (como límite finito o infinito), el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ es

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.}$$

Observación. Es importante notar que esta fórmula no es aplicable a las series que tienen una cantidad infinita de coeficientes nulos, como la del Ejercicio 7. Sin embargo, es muy eficaz para las series cuyos coeficientes contienen factoriales u otros términos que permitan cancelaciones, como las del Ejercicio 5 o la de nuestro siguiente ejemplo.

Ejercicio 8. *Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

SOLUCIÓN. Según la fórmula de Hadamard y después de la cancelación,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty.$$

Por tanto, la serie dada converge absolutamente en todo el plano complejo y uniformemente en cada disco cerrado, según el Teorema de Abel. Esta serie es muy importante en las Matemáticas y volveremos a hablar de ella en breve. ■

Observación. La fórmula de Hadamard que involucra los cocientes suele ser mucho más sencilla para las series de potencias cuyos coeficientes contienen factoriales. ¿Cómo trataríamos esas situaciones usando la fórmula de Cauchy-Hadamard (con la raíz n-ésima)? Podemos usar la *fórmula de Stirling*:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \to \infty,$$

conocida de los cursos de Cálculo y Probabilidad. De dicha fórmula se desprende que

$$(n!)^{1/n} \sim \sqrt[2n]{2\pi}\,\sqrt[2n]{n}\,\frac{n}{e}, \qquad n \to \infty,$$

lo cual ayuda a encontrar el $\overline{\lim}$ pertinente.

B. Operaciones algebraicas con series de potencias. Veremos ahora que dos series de potencias, centradas en el mismo punto, se pueden sumar y multiplicar, interpretando la suma y el producto de manera adecuada. El caso de la suma es más inmediato.

Proposición. Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ tienen radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ es, por lo menos, $R = \min\{R_a, R_b\}$ y, además, se cumple

por lo menos:

SUMA

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n} \qquad R = \min\{R_a, R_b\} \quad (1)$$

para todo $z \in D(c; R)$.

Observación. El enunciado dice "por lo menos" porque es posible que el radio de la serie para la suma sea más grande. Por ejemplo, cuando $R_a < +\infty$ y $b_n = -a_n$, tenemos $R_a = R_b$ (por la fórmula de Cauchy-Hadamard) pero la suma es la serie cuyos coeficientes son todos idénticamente nulos y, por tanto, converge en todo el plano.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar sólo el caso cuando $R_a \le R_b$ (y, por tanto, $R = R_a$), siendo el otro caso completamente análogo. En este caso, ambas series convergen en $D(c;R)$ y las sumas parciales claramente cumplen la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{N}|(a_n+b_n)(z-c)^n| \le \sum_{n=0}^{N}|a_n(z-c)^n| + \sum_{n=0}^{N}|b_n(z-c)^n| \le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n(z-c)^n| + \sum_{n=0}^{\infty}|b_n(z-c)^n|,$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $z \in D(c;R)$ (porque las dos series de potencias dadas convergen absolutamente en $D(c;R)$), lo cual demuestra que, para $z \in D(c;R)$ fijo, la serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty}|(a_n+b_n)(z-c)^n|$ converge (por los resultados elementales vistos en Cálculo I). Por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-c)^n$ converge absolutamente en $D(c;R)$.

Una vez establecida la convergencia de la serie correspondiente a la suma, tomando el límite cuando $N \to \infty$ en la igualdad obvia:

$$\sum_{n=0}^{N}(a_n+b_n)(z-c)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-c)^n + \sum_{n=0}^{N} b_n(z-c)^n,$$

se sigue (1). ■

Ejercicio 9. *Calcule la suma de las series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ *y determine el disco de convergencia.*

SOLUCIÓN. La segunda serie es, en efecto, una serie de potencias porque $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ (así que $a_n = (-1)^n$). Por la proposición anterior, la suma de nuestras series es

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)z^n = \sum_{k=0}^{\infty} 2z^{2k} = 2(1+z^2+z^4+z^6+\ldots),$$

ya que $1+(-1)^n = 0$ para n impar y $1+(-1)^n = 2$ cuando n es par: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. El radio de convergencia de esta nueva serie es, por lo menos, uno (por la proposición anterior) y es fácil establecer que es exactamente uno por la fórmula de Cauchy-Hadamard, con una cuenta muy parecida a la del Ejercicio 7.

Usando la fórmula para la suma de una serie geométrica, es fácil ver que la suma de la serie obtenida arriba es $\frac{2}{1-z^2}$, para los z con $|z| < 1$. ∎

El producto de dos series de potencias es más delicado. Existen varias maneras de definir algún tipo de "producto" de dos series de potencias (el de Cauchy, el de Hadamard - o la convolución- y otros) pero el que nos interesa es el producto de Cauchy de dos series, que se corresponde de manera natural con el producto de las funciones definidas por las series en cuestión.

El concepto de producto de Cauchy, de hecho, tiene sentido para dos series numéricas pero incluso este caso básico está motivado por las series de potencias. Además, una vez demostrado formalmente, ¡se aplica a ellas! El siguiente teorema se debe al matemático polaco-aleman Franz (Franciszek) Mertens (Prusia, 1840 - Viena, 1927).

Teorema. (Mertens). Si las series de números (reales o complejos) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen (al menos una de ellas absolutamente) y

$$\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k \left(= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots a_{n-1}b_1 + a_n b_0\right),}$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ también converge y

MULTIPLICACIÓN
$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.} \tag{2}$$

Observación. Antes de la demostración, veamos la motivación para esta definición, que proviene precisamente de las series de potencias. Si multiplicamos formalmente dos series de potencias de z (como si fueran polinomios, sin ocuparnos de su convergencia), agrupando los términos que contienen la misma pontencia z^n para cada $n \geq 0$, vemos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n + \ldots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots b_n z^n + \ldots) \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_2)z^2 + \ldots \\
&\quad + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots a_{n-1} b_1 + a_n b_0)z^n + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.
\end{aligned}$$

Poniendo ahora $z = 1$, obtenemos (2), al menos formalmente. Ahora queda por justificar la convergencia.

La demostración dada abajo se puede omitir en una primera lectura de estos apuntes, centrándose en las aplicaciones del resultado.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es la serie que converge absolutamente (siendo el otro caso totalmente análogo). Sean

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B.$$

Hemos de demostrar, con los c_n definidos como antes, que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$. Para simplificar la notación, definamos

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \qquad \beta_n = B_n - B.$$

Entonces, partiendo de la definición de los c_k y agrupando los términos que contienen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ respectivamente en la suma en la primera línea y agrupando los términos que contienen B en la penúltima, obtenemos

$$\begin{aligned}
C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_0b_2) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots a_{n-1}b_1 + a_0b_n) \\
&= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0 \\
&= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B + \beta_0) \\
&= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0 \\
&= A_nB + \gamma_n.
\end{aligned}$$

Puesto que $A_nB \to AB$ cuando $n \to \infty$, para demostrar que $C_n \to AB$, sólo queda demostrar que $\gamma_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ha llegado el momento de usar la hipótesis sobre la convergencia absoluta de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Sea $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Puesto que $B_n \to B$ cuando $n \to \infty$, sabemos que $\beta_n = B_n - B \to 0$. Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\beta_n| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Entonces, usando la desigualdad triangular, para $n > N$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &= |a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_1\beta_{n-1} + a_0\beta_n| \\
&\leq |a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_{n-N}\beta_N| + |a_{n-N+1}\beta_{N+1}| + \ldots + |a_0\beta_n| \\
&\leq |a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_{n-N}\beta_N| + \varepsilon|a_{n-N+1}| + \ldots + \varepsilon|a_0| \\
&\leq |a_n\beta_0| + |a_{n-1}\beta_1| + \ldots + |a_{n-N}\beta_N| + \varepsilon\alpha
\end{aligned}$$

Manteniendo N fijo y dejando que $n \to \infty$, obtenemos que $\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha$, ya que la suma de los primeros $N+1$ términos tiende a 0 (razón: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, luego $a_n \to 0$ y, por tanto, también $a_{n-1} \to 0, \ldots, a_{n-N} \to 0$, mientras que los β_j están acotados). Puesto que esto se cumple para $\varepsilon > 0$ arbitrario, se sigue que $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\gamma_n| \leq 0$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, QED. ■

Corolario. Si las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ tienen radios de convergencia R_a y R_b, respectivamente, y definimos

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k \left(= \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} \right),$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ tiene radio de convergencia $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ y, además, coincide con el *producto de Cauchy* de las series iniciales:

PRODUCTO DE CAUCHY

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n,} \quad \text{para todo } z \in D(c;R).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema de Mertens pero, en lugar de multiplicar dos series con términos a_n y b_n, respectivamente, multiplicamos dos series de potencias (ambas convergentes absolutamente en el disco $D(c;R)$) cuyos términos n-ésimos son $a_n(z-c)^n$ y $a_n(z-c)^n$, respectivamente. (Hace falta un poco de trabajo para agrupar los términos semejantes, como antes.) Esto implicará la convergencia de la serie producto de Cauchy, que es otra serie de potencias. Ahora es importante recordar que, puesto que la serie producto converge en el disco abierto $D(c;R)$, por el Teorema de Abel tiene que ser absolutamente convergente allí y el resultado se sigue. ■

Ejercicio 10. *Calcule el producto de Cauchy de las series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

SOLUCIÓN. Obsérvese que $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ y que nos conviene trabajar con la fórmula dada (empezando desde el índice 0).

Aplicando el Corolario del teorema de Mertens, en este caso concreto, $c = 0$, $a_n = 1$ y $b_n = n$ para todo $n \geq 0$. Luego

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

según una fórmula conocida de Conjuntos y Números y de Cálculo I que es fácil de demostrar por inducción o agrupando los términos de la suma. Por tanto,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} nz^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} z^n. \quad ■$$

C. Diferenciación de series de potencias. Resulta que las series de potencias se pueden derivar, esencialmente, de la misma forma que los polinomios, es decir, término a término. El resultado es como sigue.

Teorema. (Derivación de series de potencias) Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ tiene radio de convergencia R, $0 < R \leq +\infty$, entonces representa una función holomorfa en el disco abierto $D(c;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < R\}$ y se puede derivar allí término a término:

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(z-c)^k,} \tag{3}$$

siendo la derivada una nueva serie de potencias convergente en el mismo disco.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, veamos que la nueva serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que la inicial. Lo comprobamos usando la fórmula de Cauchy-Hadamard. Para ello, necesitaremos usar un par de reglas sencillas que no siempre se mencionan de forma explícita en el curso de Cálculo I.

Es fácil comprobar usando la definición del límite superior que, para una sucesión no negativa $(x_n)_n$ y otra positiva $(y_n)_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$, que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)^{y_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

En particular, esto es cierto para $y_n = \frac{n}{n-1}$. Recordemos también que, cuando $b_n, c_n > 0$ y existe $\lim_{n\to\infty} b_n$, se tiene que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(b_n c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} c_n .$$

Ahora es inmediato que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(n|a_n|)^{\frac{1}{n-1}} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(n^{1/n}|a_n|^{1/n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\left(n^{1/n}|a_n|^{1/n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{1/n}\cdot\overline{\lim}|a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

Una vez comprobado que ambas series consideradas convergen en el mismo disco, procedemos a demostrar (3). Basta ver que se cumple

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1}, \qquad \forall z \in D(c;R),$$

puesto que la segunda igualdad en (3) es simplemente un cambio de variable $k = n-1$ en la suma. Observemos que, escribiendo $w = z-c$, se tiene que $z \in D(c;R)$ si y sólo si $w \in D(0;R)$. A partir de la regla de la cadena, es claro que basta demostrar que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \qquad \forall w \in D(0;R).$$

Conviene introducir la notación

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \qquad g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}, \qquad |w| < R.$$

Demostraremos ahora por definición que

$$f'(w) = \lim_{h\to 0}\frac{f(w+h)-f(w)}{h} = g(w) \tag{4}$$

para w arbitrario con $|w| < R$. Fijemos un w así; sea $\delta = (R-|w|)/2 > 0$, también fijo. Nuestro objetivo es ver que, para cualquier h complejo tal que $0 < |h| < \delta$, se cumple que

$$\left|\frac{f(w+h)-f(w)}{h} - g(w)\right| \le A|h| \tag{5}$$

para cierto número positivo A y entonces (4) se seguirá.

Primero calculamos

$$\frac{f(w+h)-f(w)}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n\right) = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left((w+h)^n - w^n\right)\right) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\frac{(w+h)^n - w^n}{h}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(w+h)-f(w)}{h} - g(w) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\frac{(w+h)^n - w^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\left(\frac{(w+h)^n - w^n}{h} - n w^{n-1}\right). \tag{6}$$

Recordemos ahora que, debido a nuestra elección del número δ, tenemos $2\delta = R-|w|$ y, por tanto, $|w| = R-2\delta$. Además, cuando $|h| < \delta$, vemos que

$$|h|^{j-1} = |h|^{j-2}|h| < \delta^{j-2}|h|, \qquad \text{para } j \ge 2. \tag{7}$$

Finalmente, usando la fórmula del binomio (observando una cancelación), la desigualdad triangular para sumas finitas, la desigualdad (7) y, de nuevo, la fórmula del binomio, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{(w+h)^n-w^n}{h}-nw^{n-1}\right| &= \left|\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}w^{n-j}h^j-nw^{n-1}\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}w^{n-j}h^{j-1}-nw^{n-1}\right| \\
&= \left|\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}w^{n-j}h^{j-1}\right|\le\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}|w|^{n-j}|h|^{j-1} \\
&\le \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}(R-2\delta)^{n-j}\delta^{j-2}|h|=\frac{|h|}{\delta^2}\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}(R-2\delta)^{n-j}\delta^j \\
&< \frac{|h|}{\delta^2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(R-2\delta)^{n-j}\delta^j=\frac{1}{\delta^2}(R-\delta)^n|h|.
\end{aligned}
$$

Junto con (6), la última desigualdad (aplicada para cada $n\ge 2$) implica

$$
\left|\frac{f(w+h)-f(w)}{h}-g(w)\right|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|(R-\delta)^n}{\delta^2}|h|=A|h|,
$$

lo cual es la desigualdad deseada (5), ya que la suma $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|(R-\delta)^n$ es finita (y es un valor fijo). Lo es porque la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n$, por hipótesis, converge absolutamente para $|w|<R$ y, en particular, para $w=R-\delta$. Esto completa la demostración. ■

Observación. Como acabamos de ver, dada una serie de potencias $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$, la serie correspondiente a su derivada, $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-c)^{n-1}$, converge en el mismo disco. Por tanto, la operación se puede repetir tantas veces como se quiera para calcular las derivadas sucesivas. Volviendo a aplicar el teorema a la serie de f', obtenemos

$$
f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)(z-c)^{n-2}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}(k+2)(k+1)(z-c)^{k+1},\qquad \forall z\in D(c;R).
$$

En particular, $f''(c)=2a_2$. El proceso se puede repetir tantas veces cuantas se quiera.

Corolario. La serie de potencias $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ cuyo radio de convergencia es $R>0$ es diferenciable infinitas veces en el disco $D(c;R)$ y

$$
f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n n(n-1)\dots(n-k+1)(z-c)^{n-k},\qquad \forall k\in\mathbb{N},\ \forall z\in D(c;R).
$$

En particular, cuando $z=c$, todos los términos correspondientes a $k>n$ se anulan y se obtiene $f^{(k)}(c)=k!a_k$.

Ejercicio 11. *Calcule el radio de convergencia y la suma de las serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)z^n$.

SOLUCIÓN. Calculamos fácilmente el radio de convergencia, por ejemplo, por la fórmula de Hadamard:

$$
R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1.
$$

Recordemos que la serie geométrica también converge absolutamente en el disco unidad, siendo su suma $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$. Por tanto, se puede derivar término a término en el disco unidad, obteniendo:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}.$$

Derivando de nuevo, obtenemos

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\right)' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^{n-1}.$$

Finalmente, después de la multiplicación por z se obtiene

$$\frac{2z}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,z^n = 2z + 6z^2 + 12z^3 + 20z^4 + \dots$$

La convergencia de la última serie se justifica fácilmente, puesto que la multiplicación por z no cambia el radio de convergencia de la serie inicial; para ver este hecho, basta aplicar la fórmula de Cauchy-Hadamard a la nueva serie. ■

Algunas funciones elementales (exponencial y trigonométricas)

A. La función exponencial. Es una de las funciones más importantes en las matemáticas y ya hemos visto su versión real en Cálculo I. Esta función se puede extender a todo el plano complejo $\mathbb{C}$, manteniendo las propiedades básicas relativas a su diferenciación y a las reglas algebraicas. Es importante recalcar que se puede definir de varias maneras (que varían de un texto a otro) pero finalmente se puede comprobar, tal y como veremos en esta sección, que las distintas definiciones coinciden y, por tanto, son todas igualmente legítimas.

Definición. La *función exponencial compleja* E se define como $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Tal y como nos demuestra Ejercicio 8, la serie de potencias que define la función $E(z)$ es absolutamente convergente en todo el plano. Veremos a continuación que, efectivamente, $E(z)$ tiene diversas propiedades características de la función exponencial real. Es muy habitual usar también la notación e^z, cosa que haremos más adelante, una vez comprobadas las propiedades de $E(z)$; es decir, una vez que hayamos confirmado que "se merece" el nombre de función exponencial. Por ejemplo, dos propiedades típicas de la exponencial real son:

$$(e^x)' = e^x, \qquad e^x e^y = e^{x+y}, \qquad e^x \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nuestros siguientes ejemplos muestran que $E(z)$ tiene las mismas propiedades.

Ejercicio 12. *Compruebe que* $E'(z) = E(z)$.

SOLUCIÓN. Derivando la serie de potencias que define la función exponencial, obtenemos $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$E'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = E(z). \qquad ■$$

Ejercicio 13. *Demuestre que la función exponencial tiene la propiedad:*

$$E(z)E(w) = E(z+w) \qquad (e^z e^w = e^{z+w}).$$

Como caso particular $w = -z$, se obtiene que $E(z)E(-z) = 1$. Por tanto, $E(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

SOLUCIÓN. Procede aplicar el producto de Cauchy de series. Es importante observar que cada una de las expresiones $E(z)$ y $E(w)$ es una serie de potencias pero de dos variables distintas. Por tanto, no podemos aplicar el corolario de Mertens para el producto de Cauchy de dos series de potencias (de la misma variable); en su lugar, aplicaremos para z y w arbitarios pero fijos el producto de Cauchy de dos series numéricas, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, con $a_n = z^n/n!$ y $b_n = w^n/n!$ (la versión básica del Teorema de Mertens). Entonces los términos de la serie producto son

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!},$$

según la fórmula del binomio de Newton. Por lo tanto,

$$E(z)E(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = E(z+w).$$

El caso especial es inmediato: $E(z)E(-z) = E(0) = 1$, después de sustituir el valor $z = 0$ en la serie que define $E(z)$. La conclusión de que $E(z)$ no se anula es trivial. ■

Recordemos el siguiente resultado fundamental, demostrado en clase, que se enuncia en pocos libros de texto porque la mayoría prefiere evitar la discusión de las funciones $\mathbb{R}$-diferenciables (de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$), citando sólo algunas condiciones necesarias y otras suficientes.

Teorema. Sea Ω un dominio en el plano complejo $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función compleja, $f = u + iv$ y $z \in \Omega$. Entonces f es $\mathbb{C}$-diferenciable en z (es decir, existe $f'(z)$ si y sólo si f (vista como función de dos variables $f : (x, y) \mapsto (u, v)$) es $\mathbb{R}$-diferenciable en z y satisface en el punto z las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x(z) = v_y(z), \qquad u_y(z) = -v_x(z).$$

En este caso, $f'(z) = u_x(z) + i v_x(z)$.

Por tanto, f es holomorfa en Ω (tiene derivada en todos los puntos de Ω) si y sólo si es $\mathbb{R}$-diferenciable en todo punto de Ω y satisface las ecuaciones (C-R) en Ω.

Hemos definido la función exponencial a través de una serie compleja que generaliza la serie de potencias para la exponencial real. Por otra parte, también hemos insinuado que, combinando la fórmula de Euler con la exponencial real (es decir, multiplicando e^x por e^{yi}), deberíamos obtener otra fórmula para la función exponencial compleja. Uno de nuestros objetivos importantes es ver que las dos definiciones coinciden. El siguiente resultado fundamental lo confirma.

Teorema. Para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, se verifica la identidad $E(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. En otras palabras, $e^z = e^x e^{yi}$.

DEMOSTRACIÓN. Para la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$ es fácil comprobar que tiene las derivadas parciales continuas y, por tanto, es $\mathbb{R}$-diferenciable. También es inmediato que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \quad (= e^x \cos y), \qquad u_y = -v_x (= -e^x \operatorname{sen} y).$$

Por un teorema visto en clase, f es holomorfa en $\mathbb{C}$ (entera). Además, por la fórmula habitual, su derivada compleja es

$$f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y = f(z). \tag{8}$$

O sea, ambas $f(z)$ y $E(z)$ satisfacen la misma ecuación diferencial compleja $f' = f$. ¿Cuántas funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ existen con esta propiedad? Veámoslo.

Puesto que $E(z)$ es entera, por la Regla de la cadena, también lo es $E(-z)$, así que también lo es la función $h(z) = E(-z)f(z)$. Calculando su derivada, obtenemos

$$h'(z) = -E'(-z)f(z) + E(-z)f'(z) = -E(-z)f(z) + E(-z)f(z) \equiv 0,$$

teniendo en cuenta (8) y el Ejercicio 12.

Un teorema importante, visto en clase, nos dice que si una función holomorfa tiene derivada nula en un dominio plano, entonces es constante en ese dominio. La función h aquí considerada es una función entera (holomorfa en todo el plano), el plano es un dominio y $h' \equiv 0$ en $\mathbb{C}$. Por tanto, h es idénticamente constante en $\mathbb{C}$: existe $C \in \mathbb{C}$ tal que $E(-z)f(z) \equiv C$. Multiplicando ambos lados de la última igualdad por $E(z)$, por el resultado del Ejercicio 13, se sigue que $f(z) = CE(z)$. Finalmente, tomando $z = 0$ y teniendo en cuenta que $E(0) = 1 = f(0)$, se sigue que $C = 1$ y, por tanto, $f(z) = E(z)$, QED. ∎

Más adelante, veremos el siguiente notable hecho (basado en el Teorema de la unicidad para funciones holomorfas): toda función f holomorfa en el plano que para cada número real x satisface la igualdad $f(x) = e^x$, necesariamente es igual a la exponencial compleja E en todo el plano. Es otra manera de demostrar el teorema anterior pero, obviamente, supone un conocimiento teórico más avanzado del que tenemos de momento.

A partir de ahora, ya escribiremos siempre e^z en lugar de $E(z)$. Otra fórmula conocida de Cálculo I puede generalizarse también a los números complejos, proporcionándonos otra manera adicional de definir la función exponencial compleja.

Teorema. Para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. La convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto del plano.

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración consiste en usar la fórmula del binomio para desarrollar la expresión dentro del límite como suma desde 0 hasta n y expresar la función exponencial como suma infinita que se divide en dos, una desde 0 hasta n y otra para índices superiores, haciendo las estimaciones pertinentes, que requieren cierto trabajo. Véanse los apuntes adicionales del profesor J.P. Moreno. ∎

Ejercicio 14. *Calcule el radio de convergencia y la suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!}$.

SOLUCIÓN. El radio de convergencia de la primera serie podría calcularse como en el Ejercicio 7 (hay que tener en cuenta que muchos términos son nulos).

No obstante, existe un método alternativo para calcular el radio de convergencia (y para obtener más conclusiones). Después del cambio de variable $w = z^3$, la serie se convierte en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n!}$. Dado que el término general de esta nueva serie:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

contiene factoriales, es conveniente calcular el radio de convergencia usando la fórmula del cociente:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} == +\infty .$$

Puesto que la serie converge para cada $w = z^3$ finito, se sigue que la serie inicial también converge para todo z. Por lo tanto, su radio de convergencia es $+\infty$.

Podemos hacer más. Recordando la definición de la función exponencial, nuestra serie puede escribirse como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{3n}}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^3)^n}{n!} = -e^{-z^3},$$

de lo que también se deduce que converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier disco cerrado. ■

B. Algunas funciones trigonométricas complejas. Vamos a definir las extensiones al plano complejo de las funciones reales coseno y seno, vistas en Cálculo I. La motivación proviene de la fórmula de Euler: sumando y restando las igualdades

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \qquad e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$$

y despejando $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, obtenemos

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Por tanto, tiene sentido proponer la siguiente definición.

Definición. Las funciones complejas *coseno* y *seno* se definen, respectivamente, en términos de la función exponencial como sigue:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 15. *Desarrolle las funciones coseno y seno en series de potencias centradas en el origen y discuta su convergencia y sus derivadas.*

SOLUCIÓN. Partiendo del desarrollo conocido de la exponencial: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$, válido para todo z en el plano, evaluamos la misma serie en iz y $-iz$ respectivamente. Luego sumamos ambas series, según la proposición vista antes:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \left(i^n + (-i)^n \right) z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},$$

una fórmula cuyo caso especial con $z \in \mathbb{R}$ ya vimos en Cálculo. La última igualdad es tiene porque $i^n + (-i)^n = 0$ para n impar y para $n = 2k$ (par) se tiene $i^{2k} + (-i)^{2k} = 2(-1)^k$.

De manera similar, obtenemos

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Usando el teorema sobre diferenciación de series de potencias, una comprobación rutinaria muestra que se siguen cumpliendo las fórmulas conocidas para las funciones trigonométricas reales:

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z, \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 16 *Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Demuestre que las series complejas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\cos(nz), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}\operatorname{sen}(nz)$$

convergen absoluta y uniformemente en la banda horizontal cerrada

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \colon |\mathrm{Im} z| \le 1 - \varepsilon\}.$$

SOLUCIÓN. (Este es un ejercicio que podríamos haber visto en las primeras páginas de estos apuntes pero no lo hicimos porque nos faltaba la definición de las funciones trigonométricas complejas.) Conviene comenzar observando que las series no están escritas en forma de series de potencias y, por tanto, no podemos usar ningún teorema aplicable a éstas.

Cuando $z = x + iy \in \Omega_\varepsilon$, tenemos $|y| \le 1 - \varepsilon$ y, por tanto, $e^{\pm y} \le e^{1-\varepsilon}$. Luego (aplicando la definición de la función exponencial, la desigualdad triangular y esta última desigualdad para la función exponencial)

$$\begin{aligned} |e^{-n}\cos nz| &= \left| e^{-n} \cdot \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2} \right| = \frac{e^{-n}}{2} \cdot \left| e^{inx}e^{-ny} + e^{-inx}e^{ny} \right| \\ &\le \frac{e^{-n}}{2} \cdot \left(e^{-ny} + e^{ny}\right) \le \frac{e^{-n}}{2} \cdot 2 \cdot e^{n(1-\varepsilon)} = e^{-n\varepsilon}. \end{aligned}$$

La serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\varepsilon}$ es sumable, al ser una serie geométrica cuya razón es $q = e^{-\varepsilon} < 1$. El criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\cos nz$ converge absoluta y uniformemente en cada Ω_ε. ■

Definición. Las funciones complejas *tangente* y *cotangente* se definen, respectivamente, en términos de las funciones seno y coseno como sigue: $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ para aquellos z donde el cociente tiene sentido.

Un ejercicio útil e instructivo consiste en determinar los puntos donde las funciones tangente y cotangente no están definidas, es decir, determinar los ceros complejos de las funciones coseno y seno, respectivamente.

Ejercicio 17. *Resuelva la ecuación compleja* $\cos z = 0$.

SOLUCIÓN. Escribiendo $z = x + iy$ y usando la fórmula de Euler, de la definición del coseno complejo se obtiene

$$0 = e^{iz} + e^{-iz} = \cos x(e^y + e^{-y}) + i\left(e^{-y}\operatorname{sen} x - e^y \operatorname{sen} x\right).$$

Por tanto, $\cos x(e^y + e^{-y}) = 0$ y $e^{-y}\operatorname{sen} x - e^y \operatorname{sen} x = 0$. La exponencial real es siempre positiva, asi que $\cos x = 0$. Luego $\operatorname{sen} x \neq 0$, así que $e^{-y} = e^y$ y, por tanto, $y = 0$. Se sigue que los únicos ceros de la función compleja coseno son los ceros reales de la función coseno real, $z = \pi n + \frac{\pi}{2}$, para n entero. (Otro método de solución es posible y se verá en la siguiente entrega.) ■

Dejamos como ejercicio identificar los ceros de la función seno. ¿Qué respuesta cabe esperar?

Definición. Las funciones *coseno* y *seno hiperbólico* se definen, respectivamente, por las fórmulas análogas a las funciones reales: $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$, $\operatorname{senh} z = (e^z - e^{-z})/2$ para $z \in \mathbb{C}$.

Es fácil comprobar que $(\cosh z)' = \operatorname{senh} z$ y $(\operatorname{senh} z)' = \cosh z$, por ejemplo, usando la regla de la cadena. También es fácil comprobar que $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$ para todo z.

Desarrollo en serie de algunas funciones elementales

Ya hemos visto que toda serie de potencias nos da una función holomorfa. En una de las siguientes entregas de los apuntes, veremos que el recíproco es válido en cierto sentido: toda función holomorfa podrá escribirse como serie de potencias en cierto disco. Como preludio de este tema, veremos los desarrollos de algunas funciones elementales muy sencillas en series de potencias, usando las fórmulas ya conocidas.

Ejercicio 18. *Desarrolle en serie de potencias de z la función $\frac{e^z}{1-z}$ y determine su radio de convergencia.*

SOLUCIÓN. Evidentemente, $\frac{e^z}{1-z} = e^z \cdot \frac{1}{1-z}$. El primer factor se puede desarrollar en serie de potencias con radio de convergencia $R_a = +\infty$ y el segundo en serie de potencias con radio de convergencia $R_b = 1$. Por tanto, podemos multiplicar estas series, al menos en el disco unidad ($R = \min\{1, +\infty\} = 1$), obteniendo

$$e^z \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) z^n = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \frac{65}{24}z^4 + \dots,$$

una serie convergente para $|z| < 1$. ■

Ejercicio 19. *Desarrolle en serie de potencias de z la función $f(z) = \frac{z}{2+z}$ y determine su radio de convergencia.*

SOLUCIÓN. La idea es usar la fórmula ya conocida para la serie geométrica. Empezamos con unas manipulaciones algebraicas para ajustar la forma de la función f a la forma deseada:

$$f(z) = \frac{z}{2+z} = \frac{z}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{z}{2}\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}.$$

La función $\frac{1}{1-w}$ es igual a la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ cuando $|w| < 1$ (que ya sabemos cómo converge). Por tanto,

$$\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

cuando $|-\frac{z}{2}| < 1$, es decir, cuando $|z| < 2$. Como caso especial del corolario del Teorema de Mertens, cuando una de las series es un polinomio (o mediante un razonamiento directo, multiplicando una serie convergente por una función acotada), si multiplicamos esta serie por $z/2$, obtendremos una serie convergente en el mismo conjunto y en el mismo sentido (abstolutamente en el mismo disco y uniformemente en los discos cerrados más pequeños centrados en 0), asi que

$$f(z) = \frac{z}{2}\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} = \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

siendo la última serie convergente absolutamente para $|z| < 2$ y uniformemente para $|z| \le r < 2$. ■

Observación. Observamos de nuevo que la función f del Ejercicio 19 es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$. Sin embargo, la serie de potencias centrada en el origen que la representa sólo converge en el disco $D(0;2) = \{z : |z| < 2\}$. Se trata de un fenómeno recurrente que volveremos a ver más adelante porque algo parecido pasará con todas las funciones holomorfas. La razón es muy sencilla: $D(0;2)$ es el disco más grande centrado en el origen y contenido en $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20, con la ayuda de José Pedro Moreno

LA EXPONENCIAL COMO LÍMITE

La exponencial compleja $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, a semejanza a la exponencial real, satisface $e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ siendo la convergencia uniforme en $\{|z| \leq R < \infty\}$ $\forall R > 0$.

Para probarlo, empecemos fijando $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$. Queremos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$, $|z| \leq R$. La idea consiste en usar la fórmula del binomio para aproximar $\sum_{k=0}^{n_0} \frac{z^k}{k!}$ y luego estimar aparte las dos colas restantes.

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \cdot \frac{z^k}{k!}$$ siendo

$0 < \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \leq 1$ $\forall k = 0, \dots, n$. Entonces si $n \geq n_0$ y $|z| < R$,

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \sum_{k=0}^{n_0} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right) \frac{R^k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \cdot \frac{R^k}{k!}$$

de estos tres sumandos, el segundo y el tercero están acotados por $\varepsilon/3$, así que sólo hay que preocuparse del primero. Podemos encontrar $n_1 > n_0$ tal que $\left| 1 - \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \right| \frac{R^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3(n_0+1)}$ para cada $n \geq n_1$. Nótese que si k está fijo, $k \in \{0, \dots, n_0\}$ entonces $\lim_n \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \lim_n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1$

Variable Compleja I (CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Teorema de la función inversa. Las funciones logaritmo y potencias

Ya hemos definido varias funciones elementales que son enteras (es decir, holomorfas en todo el plano): los polinomios, la exponencial, las trigonométricas y las hiperbólicas. En este capítulo de los apuntes definiremos otras funciones holomorfas consideradas "elementales" pero cuya definición no va a ser tan automática ya que no van a ser enteras y, para definirlas, tendremos que hacer algo especial como, por ejemplo, restringir el dominio de definición de alguna manera. Veremos que, en cuanto consigamos que sean continuas, resultarán también ser holomorfas en los dominios de su definición. Nos referimos a la función logarítmica, a las raíces y otras potencias, así como a las funciones trigonométricas inversas.

El teorema de la función inversa nos mostrará cómo calcular la derivada de la función inversa de una función holomorfa en un dominio, en analogía con el teorema del mismo nombre visto en los cursos de Cálculo I (para las funciones de una variable real) y Análisis Matemático (para las funciones de varias variables reales). En particular, obtendremos las fórmulas para la derivada de la función raíz cuadrada (la inversa de la función $f(z) = z^2$) y de la función logaritmo (la inversa de la exponencial). Pero antes de llegar a ello, tenemos que recordar que la raíz de un número complejo no nulo no tiene un valor único y, como veremos, el logaritmo tendrá una cantidad infinita numerable de valores. El problema va a consistir en determinar cómo podemos definir esas funciones para que tengan valor único y sean, por ejemplo, continuas (una condición necesaria para que sean holomorfas). Veremos que el fondo del problema está en poder definir la función argumento (ya mencionada antes) como función continua. Es una función que no es holomorfa pero es fundamental en la definición de otras funciones elementales y holomorfas.

Logaritmos y potencias de números complejos

El logaritmo de un número complejo. En primer lugar, debemos definir el logaritmo de un número complejo. Parece razonable aceptar que $w = \log z$ si y sólo si $z = e^w$. Recordando que la función exponencial no se anula, el logaritmo sólo tendrá sentido para $z \neq 0$. Escribiendo

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \qquad w = x + yi,$$

vemos que $z = e^w$ es lo mismo que $e^x e^{yi} = re^{i\theta}$, lo cual es equivalente a $e^x = r$, $y - \theta = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, es decir, a $x = \ln r$, $y = \theta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, donde "ln" denota el logaritmo neperiano habitual de un número real y positivo. Finalmente, concluimos que el logaritmo de un número complejo $z \neq 0$ (expresado en forma polar) tiene una cantidad infinita (pero numerable) de valores y viene dado por la fórmula

$$\boxed{\log z = \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + (\operatorname{Arg} z + 2\pi n)i, \qquad n \in \mathbb{Z},} \tag{1}$$

siendo $\arg z$ (como en clase) cualquiera de los posibles valores del argumento y $\operatorname{Arg} z$ el valor principal del argumento, elegido habitualmente en el intervalo $(-\pi, \pi]$ u otro convenientemente elegido. Hemos usado dos notaciones distintas, ln y log, para distinguir entre el logaritmo neperiando de un número positivo (valor único) y el conjunto (infinito numerable) de valores del logaritmo complejo.

Ejercicio 1 *Calcule todos los valores de* $\log(3i)$.

SOLUCIÓN. La forma polar de $3i$ es $3i = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$, así que, por la fórmula (1), obtenemos

$$\log(3i) = \ln 3 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) i = \ln 3 + \pi\left(2n + \frac{1}{2}\right) i, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Proposición. Para todo $z \neq 0$ y para cualquiera de los valores de $\log z$, se cumple la identidad

$$\boxed{e^{\log z} = z.}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la fórmula (1) y recordando que $e^{2\pi ni} = 1$, vemos que

$$e^{\log z} = e^{\ln|z| + (\operatorname{Arg} z + 2\pi n)i} = e^{\ln|z|} e^{(\operatorname{Arg} z + 2\pi n)i} = |z| e^{(\operatorname{Arg} z)i} \cdot e^{2\pi ni} = z \cdot 1 = z.$$

No nos debe sorprender que, para un $z \neq 0$ dado, su logaritmo tenga infinitos valores mientras que $e^{\log z}$ tenga sólo uno porque aquí ayuda la periodicidad de la función exponencial: $e^{2\pi ni} = 1$. $\blacksquare$

Las ecuaciones para las funciones como seno y coseno complejas también están estrechamente relacionadas con los valores del logaritmo, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 2 *Encuentre todas las soluciones complejas de la ecuación* $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN. En la entrega anterior de los apuntes ya hemos resuelto alguna ecuación similar. Ahora mostraremos otro método de solución, que involucra los logaritmos. Partimos de la definición del seno:

$$\boxed{\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} = \frac{1}{2}.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $2ie^{iz}$, de aquí obtenemos otra ecuación equivalente

$$e^{2iz} - 1 = ie^{iz}.$$

Escribiendo $w = e^{iz}$, la última igualdad se reduce a la ecuación cuadrática $w^2 - iw - 1 = 0$ cuyas soluciones son

$$w = \frac{i + \sqrt{3}}{2}, \qquad w = \frac{i - \sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, tenemos dos posibilidades:

$$e^{iz} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}, \qquad e^{iz} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

Finalmente, tomando logaritmos obtenemos

$$iz = \frac{\pi}{6} i + 2\pi ni, \qquad iz = \frac{5\pi}{6} i + 2\pi ni, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

es decir,

$$z = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \qquad z = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Las potencias complejas o de un número complejo. Recordemos del curso de Cálculo I que, para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ se tiene la fórmula

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{(\ln a)\cdot x}.$$

Por tanto, para $a, z \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$ (necesario y suficiente para la existencia de $\log a$), parece razonable definir

$$\boxed{a^z = e^{(\log a)\cdot z} = e^{(\ln|a|+i\arg a)\cdot z},} \tag{2}$$

donde hemos calculado los valores de $\log a$ según la definición (1). Por tanto, las potencias complejas también tienen infinitos valores.

Ejercicio 3 *Para $z \in \mathbb{C}$, calcule todos los valores de $(3i)^z$.*

SOLUCIÓN. Según la fórmula (2) y usando el resultado del Ejercicio (1), obtenemos

$$(3i)^z = e^{\log(3i)\cdot z} = e^{(\ln 3+\pi(2n+\frac{1}{2})i)z}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 4 *Para $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, calcule todos los valores de $(2z)^z$.*

SOLUCIÓN. De nuevo usando la fórmula (2),

$$(2z)^z = e^{(\log(2z))\cdot z} = e^{(\ln|2z|+\arg(2z)i)z} = e^{(\ln|2z|+(\mathrm{Arg}(2z)+2\pi n)i)z}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

El siguiente ejemplo es importante para asegurarnos de que no existe contradicción entre las diferentes interpretaciones de las raíces de un número complejo.

Ejercicio 5 *Compruebe que, interpretando la raíz n-ésima de un número $z \neq 0$ como una potencia: $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$, aplicando la fórmula (2), el resultado que se obtiene concuerda con los valores de las raíces vistos en clase al principio del curso.*

SOLUCIÓN. Escribiendo $z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} = re^{i\theta}$, tenemos que $\arg z = \theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, la fórmula (2) nos da el siguiente resultado:

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i\arg z)} = e^{\frac{1}{n}\ln|z|}e^{\frac{1}{n}i\arg z} = |z|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i}{n}\arg z} = \sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\theta+2\pi k}{n}i}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Es obvio que se trata de la misma fórmula que ya vimos antes en clase para la raíz n-ésima. Al igual que antes, observamos que es suficiente tener en cuenta sólo los valores $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ puesto que para los demás valores de k no se obtienen valores nuevos de la raíz. $\blacksquare$

El logaritmo, las raíces y las potencias como funciones continuas

Como ya hemos visto, todos los valores del logaritmo, de las raíces y de las potencias complejas en general pueden expresarse en términos de $\arg z$ (que toma infintos valores) y, por tanto, en términos del valor principal del argumento, $\mathrm{Arg}\,z$, típicamente elegido en el intervalo $(-\pi,\pi]$. ¿Sería suficiente tomar $n = 0$ (o algún otro valor fijo n_0) en la fórmula (1) para definir el logaritmo correctamente y como una función continua en todo el plano menos en el origen? Veremos que no. El siguiente hecho será nuestro punto de partida.

Observación. La función $\operatorname{Arg} z$ no es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. El problema surge cuando nos acercamos a un punto (cualquiera) en el semieje real negativo, digamos $z = -r$, $r > 0$. Por ejemplo, consideremos lo que ocurre cuando nos acercamos a $-r$ a lo largo de la circunferencia

$$\{z : |z| = r\} = \{re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

de radio r centrada en el origen. Si nos acercamos al punto $-r$ a lo largo de esta circunferencia y "por arriba" (a través de un arco C^+ en el segundo cuadrante), donde el argumento principal toma valores entre $\pi/2$ y π), dejando que el argumento principal de z tienda a π, obtendremos

$$\lim_{z \to -r,\, z \in C^+} \operatorname{Arg} z = \lim_{\theta \to \pi^-} \theta = \pi .$$

(Conviene hacer un dibujo.) Sin embargo, cuando nos acercamos al punto $-r$ a lo largo de la misma circunferencia pero "desde abajo" (a través de un arco C^- en el tercer cuadrante, donde el argumento principal toma valores entre $-\pi/2$ y $-\pi$), dejando que el argumento principal de z tienda a $-\pi$, obtendremos

$$\lim_{z \to -r,\, z \in C^-} \operatorname{Arg} z = \lim_{\theta \to -\pi^+} \theta = -\pi .$$

Esto demuestra que no existe $\lim_{z \to -r} \operatorname{Arg} z$ y, por tanto, la función argumento principal no es continua en $-r$. Puesto que esto es así para $r > 0$ arbitrario, concluimos que no es continua en ningún punto del semieje real negativo.

Es bastante obvio que si, en lugar de $\operatorname{Arg} z$ tomamos otra determinación del valor del argumento como $\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0$, para un $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo, tendremos el mismo problema. Y si para unos valores de z definimos el valor del argumento como $\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0$ y para otros $\operatorname{Arg} z + 2\pi n_1$, con $n_0 \neq n_1$, también es fácil ver que tendremos discontinuidad en muchos puntos.

Logaritmo como función continua. Nos gustaría definir la función logaritmo complejo como $\log z = \ln|z| + (\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0)i$ para algún valor fijo n_0 (siendo la posibilidad más simple $n_0 = 0$). Pero, para que el logaritmo sea una función continua en un dominio, también lo tiene que ser su parte imaginaria, como ya vimos antes en clase, y su parte imaginaria es discontinua en todos los puntos del semieje real negativo. Por tanto, el logaritmo no se puede definir como función continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Existen dos formas razonables de solucionar este problema.

Una solución consiste en aceptar la idea de reducir el dominio de la función Arg y también de la función log excluyendo los reales negativos. Para que nos quede un dominio, debemos quitar un conjunto cerrado. Por tanto, lo más habitual es hacer un "corte" en el plano desde el origen hasta el infinito, eliminando el semieje cerrado $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. De esta manera, obtenemos la siguiente definición de la función $\log : \Omega \to \mathbb{C}$:

$$\boxed{\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}, \qquad \log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i\theta \qquad (z = re^{i\theta}) .}$$

Por supuesto, podemos variar esta definición, dando otro valor al argumento:

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}, \qquad \log z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2\pi n_0) = \ln r + i\theta + 2\pi n_0 i$$

para cierto $n_0 \in \mathbb{Z}$ fijo. Cada valor de n_0 elegido nos da una *determinación* (o *rama*) del logaritmo (y cada una de ellas es una función correctamente definida). En cada situación concreta, elegiremos sólo una determinación que nos convenga y ésta nos dará una función continua en el dominio Ω señalado arriba (plano con el corte a lo largo del semieje negativo). Lo más habitual es elegir la más simple, a la que daremos un nombre propio.

Definición. La *determinación principal* del logaritmo complejo en el dominio

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$$

viene dada por la fórmula

$$\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i\theta \qquad (z = re^{i\theta}).$$

Con frecuencia se escribe $\operatorname{Log} z$ para denotar esta determinación principal.

Conviene señalar que, si preferimos dar otros valores al argumento, por ejemplo, en el intervalo $[0, 2\pi)$, entonces hemos de hacer el corte a lo largo del semieje real positivo $\{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$, eliminando la discontinuidad que se tiene cuando se tiende a un punto de dicho semieje. Por supuesto, son posibles otros cortes en otras direcciones (oblicuas o verticales) o incluso -de forma mucho más complicada- a lo largo de otras curvas simples (sin autointersecciones) desde el origen hasta el punto en el infinito, reduciendo el plano a un dominio simplemente conexo que no contiene al origen pero no trataremos esas definiciones aquí.

Otra posible solución, de la que no hablaremos por falta de tiempo, consiste en ampliar el dominio de definición de la función logaritmo, lo cual nos llevaría a la idea de superficies de Riemann y las llamadas funciones multiforme. Véanse los libros recomendados de A. Fernández, de L.V. Ahlfors, por ejemplo. Hablando sin rigor, una superficie de Riemann se puede imaginar como la estructura de un aparcamiento con muchas plantas donde a lo largo del corte, subimos o bajamos a la siguiente planta.

Propiedades de la función logaritmo. Veremos que, una vez definida la función logaritmo en un dominio reducido (plano con un corte) como función continua, automáticamente será holomorfa en dicho dominio. Una explicación posible es la siguiente: dentro del dominio restringido Ω, el argumento principal $\operatorname{Arg} z$, elegido en el intervalo $(-\pi, \pi)$, puede expresarse mediante la fórmula vista en la primera hoja de problemas:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{si } x < 0 \text{ e } y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{si } x < 0 \text{ e } y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ e } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ e } y < 0, \end{cases}$$

Esta función es continua en Ω y, además, puede verse que en cada punto tiene las derivadas parciales iguales a las de $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Puesto que hemos definido el logaritmo en Ω como

$$\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{Arg} z,$$

es fácil calcular las derivadas parciales de $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ y $v(x, y) = \operatorname{Arg} z$ y ver que son continuas en Ω y satisfacen allí las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y, \qquad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x.$$

Esto demuestra que la función logaritmo es, de hecho, holomorfa (lo acabamos de ver para la determinación principal pero, como las demás determinaciones difieren de ella en una constante, tendrán también la misma derivada). Además nos permite hallar la fórmula para su derivada, que es la que cabía esperar:

$$\boxed{(\log z)' = u_x + i v_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yi}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}.} \implies (\log z)' = \frac{1}{z}$$

Un poco más adelante, veremos que el Teorema de la función inversa para las funciones holomorfas también nos permite deducir la holomorfía del logaritmo y nos dará otra forma de calcular su derivada.

Ejercicio 6 *¿Es cierto que la determinación principal de la función logaritmo tiene la misma propiedad que el logaritmo real:* $\log(zw) = \log z + \log w$*? ¿Podemos proponer alguna restricción adecuada para que la fórmula siga siendo válida?*

SOLUCIÓN. La respuesta en general es no. El problema surge si los argumentos de z y de w "suman demasiado" (π o más). Por ejemplo, si $z = i = e^{(\pi/2)i}$, $w = e^{(3\pi)/4i}$, entonces $zw = e^{(5\pi)/4i} = e^{-(3\pi)/4i}$ (¡hay que elegir el argumento principal en el intervalo $(-\pi,\pi)$!) y entonces

$$\log z = \log i = \frac{\pi}{2}i, \quad \log w = \frac{3\pi}{4}i, \quad \log(zw) = -\frac{3\pi}{4}i$$

y es obvio que

$$\log z + \log w = \frac{5\pi}{4}i \neq -\frac{3\pi}{4}i = \log(zw).$$

Si pedimos que $|\operatorname{Arg} z| < \pi/2$ y $|\operatorname{Arg} w| < \pi/2$ (es sólo una posibilidad pero es una condición muy habitual, ya que significa pedir que ambas z y w tengan parte real positiva), entonces $|\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w| < \pi/2 + \pi/2 = \pi$ y es fácil ver que la fórmula $\log(zw) = \log z + \log w$ será válida. ■

Las raíces y otras potencias. Una vez definida la función logaritmo en un dominio adecuado (con una determinación elegida), en el mismo dominio podemos definir las raíces y, en general, otras potencias arbitarias, como en la fórmula (1), siendo la determinación principal:

$$a^z = e^{(\log a)\cdot z} = e^{(\ln|a| + i \operatorname{Arg} a)\cdot z}.$$

Es fácil calcular la derivada de esta función usando la del logaritmo y la Regla de la cadena:

$$\boxed{(a^z)' = \left(e^{(\log a)\cdot z}\right)' = e^{(\log a)\cdot z}\log a = a^z \log a.} \Longrightarrow (a^z)' = a^z \log a$$

Las definiciones y los cálculos son similares para las funciones como z^a o, por ejemplo, $(2iz)^z$. En particular, el valor principal de la función raíz cuadrada se puede definir en el dominio ya conocido

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$$

por la fórmula

$$\boxed{\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}(\log z)} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \qquad \text{para } z = re^{i\theta}}$$

y es una función holomorfa en el mismo dominio Ω. Podemos aplicar el procedimiento descrito arriba para el logaritmo con el fin de comprobar que es holomorfa y calular su derivada pero también podemos verlo pasando a la siguiente sección.

Teorema de la función inversa

Al igual que en las hojas de problemas y en clase, usaremos la notación $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ para expresar que la función f es holomorfa en el dominio Ω (es decir, es $\mathbb{C}$-diferenciable en cada punto de Ω).

Relación entre el Jacobiano y la derivada compleja. A menudo identificamos una función holomorfa f en un dominio Ω en el plano, escrita como $f = u + iv$ con u y v reales, con la función correspondiente de dos variables $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Es fácil ver que existe una relación simple pero importante entre el Jacobiano de f (vista como función de dos variables) y su derivada compleja (como función holomorfa). En efecto, teniendo en cuenta que f ha de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann, vemos fácilmente que su Jacobiano en un punto $c \in \Omega$ viene dado por

$$\boxed{J_f(c) = \begin{vmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x(c) & v_x(c) \\ -v_x(c) & u_x(c) \end{vmatrix} = u_x^2(c) + v_x^2(c) = |f'(c)|^2,} \tag{3}$$

recordando que la derivada compleja de f en c es $\boxed{f'(c) = u_x(c) + iv_x(c).}$

Teorema de la función inversa. Dado un dominio Ω en el plano y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, si supiésemos que f tiene función inversa g y que ésta es también holomorfa, derivando la relación $g(f(z)) = z$, calcularíamos fácilmente: $g'(f(z))f'(z)) = 1$ y de allí obtendríamos la fórmula para la derivada de g, análoga a la que conocemos del teorema de la función inversa de Cálculo: $g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z))}$, es decir,

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}.$$

Pero, ¿cómo sabemos cuándo y dónde existe la inversa g y cómo podemos deducir que es holomorfa? En esta sección abordaremos esta cuestión usando nuestros conocimientos de cálculo multivariable y de variable compleja.

Teorema. (*Teorema de la función inversa para funciones holomorfas*). Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $c \in \Omega$. Si $f'(c) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto U_c del punto c tal que la restricción $f|_{U_c}$ de f a U_c es una función biyectiva entre U_c y $f(U_c)$ y su función inversa (local) $g = (f|_{U_c})^{-1} : f(U_c) \to U_c$ es también holomorfa. En este caso, tenemos la fórmula

$$\boxed{g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \qquad \forall w \in f(U_c).}$$

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis $f'(c) \neq 0$, junto con la fórmula (3), nos dice que el Jacobiano de f en el punto c es distinto de cero. El Teorema de la función inversa de cálculo multivariable (visto en el curso de Análisis Matemático) implica la existencia de un entorno abierto U_c del punto c tal que la restricción $f|_{U_c}$ de f a U_c es una función biyectiva, el Jacobiano de $f|_{U_c}$ es distinto de cero en todo U_c y, además, su función inversa (local) $g = (f|_{U_c})^{-1} : f(U_c) \to U_c$ es también $\mathbb{R}$-diferenciable. También por el Teorema de la función inversa, la matriz Jacobiana de $f|_{U_c}$ es la matriz inversa de la Jacobiana de f en el mismo entorno. Escribiendo $g = U + iV$, con U y V sus partes real e imaginaria, respectivamente y usando la fórmula (3), para todo $z \in U_c$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} U_x(f(z)) & U_y(f(z)) \\ V_x(f(z)) & V_y(f(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \begin{pmatrix} v_y(z) & -u_y(z) \\ -v_x(z) & u_x(z) \end{pmatrix}.$$

Usando una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para u y v, de aquí se deduce fácilmente que

$$U_x(f(z)) = \frac{1}{|f'(z)|^2} v_y(z) = \frac{1}{|f'(z)|^2} u_x(z) = V_y(f(z)),$$

lo cual es una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para U y V. La otra se comprueba de forma análoga. Esto demuestra que g es holomorfa en $f(U_c)$, ya que es $\mathbb{R}$-diferenciable allí y cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Por último, calculamos la fórmula para la derivada mediante el cálculo mostrado antes, al comienzo de la sección, derivando $g(f(z)) = z$ en U_c. ■

Corolario. Las funciones logaritmo y raíz n-ésima, definidas como antes, son holomorfas en su dominio de definición indicado antes y sus derivadas vienen dadas por las fórmulas

$$\boxed{(\log z)' = \frac{1}{z}, \qquad (\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{nz^{1-1/n}}.}$$

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos visto cómo se pueden definir tanto el logaritmo como la raíz n-ésima para que sean continuas en un dominio adecuado. La primera es, por construcción, la inversa local de la función exponencial y la segunda, la inversa de la función z^n. (De hecho, ni siquiera es necesario comprobar que es la inversa global, basta trabajar con la inversa en un entorno.) Entonces la derivada se puede calcular en cada punto y se puede comprobar que las fórmulas propuestas son las correctas.

En el caso de la exponencial y el logaritmo, escribimos

$$f(z) = e^z, \quad f'(z) = e^z = f(z), \qquad g(z) = \log w.$$

Por el Teorema de la función inversa, obtenemos

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{f(g(w))} = \frac{1}{w}.$$

Cambiando la letra w por z, obtenemos la fórmula del enunciado.

En el caso de la potencia y la ráiz n-ésimas, tenemos

$$f(z) = z^n, \quad g(w) = \sqrt[n]{w}, \qquad f'(z) = nz^{n-1}.$$

y, por tanto,

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{ng(w)^{n-1}} = \frac{1}{nw^{(n-1)/n}}.$$

De nuevo, cambiando w por z, obtenemos la fórmula del enunciado. ■

Ejercicio 7 *Examinar la invertibilidad de la función coseno.*

SOLUCIÓN. Para $f(z) = \cos z$, sabemos que $f'(z) = -\operatorname{sen} z$. Es fácil ver (véase la entrega anterior de los apuntes) que el seno complejo tiene los mismos ceros que el seno real: $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, si tenemos un punto $z \neq \pi n$ para $n \in \mathbb{Z}$, tendremos $f'(z) \neq 0$ en ese punto y, por tanto, al menos en un entorno del punto existirá la función inversa (local) del coseno, a la que (por supuesto) llamaremos *arco coseno* y denotaremos arccos: es decir, $g(w) = \arccos w$ si $f(z) = \cos z = w$. Por la fórmula del Teorema de la función inversa, obtenemos

$$(\arccos w)' = \frac{1}{-\operatorname{sen} g(w)} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 g(w)}} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{1}{i\sqrt{w^2-1}} = -\frac{i}{\sqrt{w^2-1}},$$

parecido a la fórmula para las funciones de una variable pero eligiendo el signo del seno de forma diferente y usando el valor principal $\sqrt{-1} = i$. ■

¿Cómo determinaríamos una fórmula explícita para $\arccos z$? Podemos aplicar el método empleado en el Ejercicio 2, obteniendo la siguiente fórmula: $\arccos z = -i\log(z + \sqrt{z^2-1})$ en un dominio adecuadamente elegido. Nótese que su derivada coincide con la hallada en el Ejercicio 7.

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20

Variable Compleja I (CURSO 2019-20, Universidad Autónoma de Madrid)

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Integrales de línea complejas: detalles preliminares

En esta entrega de apuntes repasaremos los conceptos básicos relativos a las curvas en el plano y definiremos las integrales de línea en forma compleja, que representarán una generalización de las integrales de línea (o a lo largo de curvas) vistas antes. Aprenderemos a estimar el valor de la integral a lo largo de una curva, una destreza básica que será esencial en varias demostraciones y soluciones de ejercicios en las posteriores entregas de apuntes y problemas. Conviene observar que normalmente no supondremos que las funciones consideradas sean holomorfas; la continuidad es suficiente para desarrollar el concepto de integral de línea. Lo que se verá después es que las funciones holomorfas nos darán unos resultados de integración espectaculares.

Antes de comenzar, necesitamos aclarar algunos detalles técnicos que se necesitarán a menudo.

La derivada de una función compleja de una variable real. Una función compleja de una variable real es una función de la forma $F = u + iv$, donde $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}$ son funciones derivables. Su derivada viene dada por $\boxed{F'(t) = u'(t) + iv'(t),\ t \in (a, b).}$

Ejemplo 1. *La derivada de la función $F(t) = e^{it}$, que aparece en la fórmula de Euler, viene dada por*

$$\left(e^{it}\right)' = (\cos t + i \operatorname{sen} t)' = -\operatorname{sen} t + i \cos t = i(\cos t + i \operatorname{sen} t) = ie^{it}, \qquad t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

Alternativamente, podemos derivar e^{it} observando que es la restricción de la función exponencial compleja al eje real, usando la fórmula para la derivada de la función exponencial compleja y la regla de la cadena: por tanto, primero constatamos que $\frac{d}{dz}\left(e^{iz}\right) = ie^{iz}$ y después, como caso especial, para $z = t \in \mathbb{R}$ se sigue que $\frac{d}{dt}\left(e^{it}\right) = ie^{it}$.

Repaso de curvas planas

Parametrizaciones (caminos), curvas y trazas. Este material es muy básico y ya es conocido de otras asignaturas pero se incluye de forma detallada, con el fin de repasar las definiciones y propiedades básicas y también para acostumbrarse a la notación compleja, que es nueva.

Definición. Una parametrización en el plano es una función continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, donde $-\infty < a < b < +\infty$. (A veces también usaremos la palabra camino.)

En Cálculo II, en Geometría de curvas y superficies y en Topología, entre otras asignaturas, ya vimos muchos ejemplos y propiedades de parametrizaciones, con $\mathbb{R}^2$ en lugar de $\mathbb{C}$. Como ya sabemos, es habitual hacer la identificación entre ambos conjuntos mediante la biyección natural $(x, y) \mapsto z = x + yi$. Por tanto, se trata del mismo concepto ya visto antes, sólo que ahora usaremos la notación compleja, escribiendo $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ en lugar de $(x(t), y(t))$, para $t \in [a, b]$, y nos conviene acostumbrarnos a ello.

Definición. Se dice que una parametrización $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es equivalente a otra, $\Gamma : [c, d] \to \mathbb{C}$ si existe una función $\alpha : [a, b] \to [c, d]$, estrictamente creciente y suprayectiva (y, por tanto, biyectiva) tal que $\gamma = \Gamma \circ \alpha$.

Es muy fácil ver que esta relación es una relación de equivalencia en la clase de todas las parametrizaciones.

Definición. Una curva es una clase de equivalencia respeto a esta relación.

Cada curva puede representarse mediante muchas parametrizaciones distintas. Como es habitual, podemos tomar como representante de una clase cualquiera de los caminos equivalentes que la componen. Si en lugar de una parametrización elegimos otra, se suele decir que hemos reparametrizado la curva y se suele referir a la función α como a un cambio de parámetro.

Es un abuso de terminología muy habitual decir que una función continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una curva, en lugar de decir que es una parametrización (o camino) que representa la curva, que es su clase de equivalencia. Lo evitaremos cuando sea posible pero, puesto que simplifica el lenguaje, a veces lo emplearemos en estos apuntes. Debería quedar claro por el contexto cuándo nos referimos a una curva y cuándo a una parametrización.

Es importante destacar que la terminología aquí no es universal y algunos textos incluso usan la palabra "camino" como sinónimo de "curva".

Ejemplo 2. *Las parametrizaciones* $\gamma(t) = r\,e^{it} = r\cos t + i\,r\,\mathrm{sen}\,t$, $t \in [0,2\pi]$ *y* $\Gamma(t) = r\,e^{2it} = r\cos 2t + i\,r\,\mathrm{sen}\,2t$, $t \in [0,\pi]$ *son equivalentes, con* $[a,b] = [0,2\pi]$, $[c,d] = [0,\pi]$ *y la función creciente y suprayectiva* $\alpha(t) = t/2$, $\alpha : [0,2\pi] \to [0,\pi]$ *en la definición anterior. Ambas parametrizaciones representan la misma curva, que nos imaginamos como el movimiento de una partícula con velocidad uniforme que recorre la circunferencia de radio* r *centrada en el origen* $\{z : |z| = r\}$ *(ya que* $|\gamma(t)| = r$*), completamente y una sola vez, en el sentido positivo (contrario al sentido de las manillas de reloj) empezando en el punto* $\gamma(0) = r$ *y terminando en el mismo punto.*

Para dos representaciones cualesquiera de la misma curva, digamos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\Gamma : [c,d] \to \mathbb{C}$, con $\gamma = \Gamma \circ \alpha$ y $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ estrictamente creciente y suprayectiva, es evidente de la definición de la equivalencia que $\gamma([a,b]) = \Gamma([c,d])$. Por tanto, es correcto definir el siguiente concepto, ya que no depende de la parametrización de la curva.

Definición. La traza de una curva es el conjunto $\{\gamma\} = \gamma([a,b])$, para cualquier parametrización $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de la curva. El punto $\gamma(a)$ se denomina el punto inicial de la curva y $\gamma(b)$, el punto final.

A veces también se abusa de terminología, diciendo "curva" cuando realmente nos referimos a la traza. Evitaremos hacerlo en la medida de lo posible aunque a veces resulta más cómodo decirlo.

Ejemplo 3. *Con frecuencia decimos que la circunferencia* $C(0,r) = \{z : |z| = r\}$ *(*$r > 0$ *fijo) es una curva cuando, en realidad, es la traza de la curva* γ *dada por la función* $\gamma(t) = r\,e^{it} = r\cos t + i\,r\,\mathrm{sen}\,t \cong (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, $t \in [0,2\pi]$. *Es decir, lo que realmente tenemos es que* $C(0,r) = \{\gamma\}$. *(Sin especificar la función* γ*, no sabemos cómo se recorre la traza en el tiempo.)*

Es claro que $\gamma_1(t) = r\,e^{-it} = r\cos t - i\,r\,\mathrm{sen}\,t \cong (r\cos t, -r\,\mathrm{sen}\,t)$, $t \in [0,2\pi]$, *es otra curva diferente (porque no es la misma función) pero tiene la misma traza que* γ: $C(0,r) = \{\gamma_1\}$. *La función* γ *describe el movimiento (de velocidad uniforme) a lo largo de la circunferencia de radio* r *centrada en el origen en el sentido positivo mientras que* γ_1 *describe el movimiento(de velocidad uniforme) a lo largo de la misma circunferencia pero en el sentido negativo (el de las manillas de reloj).*

Curvas rectificables y suaves a trozos. Sólo con la hipótesis $\gamma \in C[a,b]$ no podemos siempre obtener lo que se corresponde intuitivamente con nuestra noción de curva. Existen, por ejemplo, curvas tales que $\gamma([a,b])$ es un cuadrado u otros conjuntos similares (típicamente llamadas *curvas de Peano*). Para evitar esos fenómenos "patológicos", es habitual pedir más condiciones que una curva ha de cumplir. Puede pedirse que γ tenga derivada en todos los puntos de $[a,b]$ salvo en un conjunto finito de puntos, aunque eso no evita todos los problemas posibles (porque la derivada podría no estar acotada cerca de algunos puntos). Alternativamente,

Ejemplo 5. *La siguiente integral de Riemann compleja surge con cierta frecuencia:*

$$\int_0^{\pi} ie^{-it}\,dt = (-e^{-it})\big|_0^{\pi} = 1-(-1) = 2.$$

Esto se puede justificar como en el Ejemplo 1. Derivando, obtenemos

$$\left(-e^{-it}\right)' = -(\cos t - i\,\mathrm{sen}\,t)' = \mathrm{sen}\,t + i\cos t = i(\cos t - i\,\mathrm{sen}\,t) = ie^{-it},$$

lo cual nos da la función primitiva de ie^{-it}: $\int ie^{-it}\,dt = -e^{-it}+C$. El cálculo de la integral definida queda justificado por el Teorema fundamental del cálculo. Por supuesto, también podemos escribir $ie^{-it} = \mathrm{sen}\,t + i\cos t$ y después integrar cada término.

Integrales de línea complejas. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una curva C^1 a trozos y f es una función compleja, continua en $\{\gamma\}$, la traza de γ, definiremos la integral de f a lo largo de γ como

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt,}$$

entendiendo la multiplicación dentro de la integral como la multiplicación en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Puesto que γ es C^1 a trozos, la interpretación en términos de la integral de Riemann será

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt,$$

siendo $t_1,\dots,t_n$ los puntos de discontinuidad de la derivada γ'.

Ejemplo 6. *Sea $f(z) = \frac{1}{z^2}$ y $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ la curva dada por $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t$ (la semicircunferencia superior de la circunferencia unidad, desde $z=1$ hasta $z=-1$, trazada en el sentido positivo. Puesto que f es holomorfa en el plano agujereado $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, en particular es continua en la traza de γ: $\{\gamma\} = \{z\in\mathbb{C} : |z| = 1, \mathrm{Im}\,z \ge 0\}$. Por tanto, existe la integral $\int_\gamma f(z)\,dz$. Además, no es difícil calcularla como sigue.*

Formalmente, para $z\in\{\gamma\}$, escribimos $z = e^{it}$, $0\le t\le\pi$, derivamos z respecto a t: $dz = ie^{it}\,dt$ (tal y como hemos establecido en el Ejemplo 1) y luego calculamos

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = \int_0^{\pi}\frac{1}{e^{2it}}ie^{it}\,dt = \int_0^{\pi} ie^{-it}\,dt = (-e^{-it})\big|_0^{\pi} = 2.$$

Recuérdese que en el Ejemplo 5 ya hemos justificado el cálculo de la primitiva de ie^{-it} y la evaluación de la integral de Riemann en la fórmula anterior.

Propiedades básicas de las integrales de línea

Veremos que las integrales de línea complejas tienen, esencialmente, las mismas propiedades que las integrales de línea reales vistas en los cursos previos. ¿Por qué ocurre esto? Porque, escribiendo $f(z) = u(z) + iv(z)$,

$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, tenemos que $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ y, por tanto, multiplicando dentro de la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \big(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,dt \\
&= \int_a^b \big(u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t)\big)\,dt + i\int_a^b \big(u(\gamma(t))y'(t) + v(\gamma(t))x'(t)\big)\,dt \\
&= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma u\,dy + v\,dx,
\end{aligned}$$

así que toda integral de línea compleja es una combinación lineal compleja de dos integrales de líneas reales (vistas antes en Cálculo II y en Análisis Matemático). De ahí que se preserven muchas propiedades de las integrales de línea vistas anteriormente. Aún así, indicaremos algunas demostrarciones pertinentes en lugar de simplemente dar un listado de propiedades.

Una propiedad básica de las integrales de línea es la $\mathbb{C}$-linealidad, algo natural para una integral compleja. La prueba se sigue directamente de la definición.

Proposición 2. *Si γ es una curva C^1 a trozos, f y g dos funciones continuas en su traza $\{\gamma\}$ y λ, $\mu \in \mathbb{C}$ dos constantes, entonces*

$$\int_\gamma \big(\lambda f(z) + \mu g(z)\big)\,dz = \lambda\int_\gamma f(z)\,dz + \mu\int_\gamma g(z)\,dz.$$

Otra propiedad que cabe esperar es la independencia de la parametrización.

Proposición 3. *Si γ y Γ son dos parametrizaciones equivalentes de una misma curva C^1 a trozos, f una función continua en su traza $\{\gamma\} = \{\Gamma\}$, entonces*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando primero la definición, luego la relación $\gamma = \Gamma\circ\alpha$, con $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ estrictamente creciente, suprayectiva y C^1 a trozos, después el cambio de variable $\alpha(t) = s$, $ds = \alpha'(t)\,dt$, obtenemos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\Gamma(\alpha(t)))\Gamma'(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \int_c^d f(\Gamma(s))\Gamma'(s)\,ds = \int_\Gamma f(z)\,dz. \quad \blacksquare$$

Definición. Dada una curva, representada por un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, la curva con orientación opuesta es la curva representada por la parametrización

$$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma^-(t) = \gamma(b + a - t).$$

Debe notarse que las parametrizaciones γ y γ^- no son equivalentes en el sentido de la definición vista antes. Aunque es fácil ver que las trazas son la misma: $\{\gamma^-\} = \{\gamma\}$, intuitivamente, γ^- se recorre en el sentido opuesto, empezando en $\gamma(b)$ (para $t = a$) y terminando en $\gamma(a)$ (para $t = b$). Teniendo en cuenta que $e^{i(2\pi - t)} = e^{-it}$ y comparando las parametrizaciones γ y γ_1 del Ejemplo 3, es fácil ver que, de hecho, $\gamma_1 = \gamma^-$.

La siguiente fórmula es la típica propiedad relativa al cambio de orientación: cuando la curva se recorre en el sentido contrario, cambia el signo de la integral.

puede pedirse que la curva sea rectificable (o de longitud finita), lo cual intuitivamente viene a decir que se puede aproximar bien por líneas poligonales, tal y como sugiere la siguiente definición.

Definición. Se dice que una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es rectificable (o que tiene longitud finita) si

$$\ell(\gamma) = \sup_P \sum_{k=0}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < +\infty, \tag{1}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_{n-1} < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$. El número $\ell(\gamma)$ se denomina longitud de la curva γ.

Una función que cumple la condición del supremo finito arriba se dice que es de *variación acotada* pero aquí no discutiremos esta clase de funciones (muy importantes, por cierto) en detalle. (Para las personas con cierto interés en Análisis real y Análisis funcional, mencionamos sólo que el espacio lineal de funciones de variación acotada en $[a,b]$ está estrechamente relacionado con el espacio dual de las funciones continuas $C[a,b]$, debido a uno de los teoremas de representación de Riesz.)

En esta asignatura nos contentaremos con alguna propiedad más fuerte que la propiedad de ser rectificable pero de suficiente utilidad para nuestro propósito. Por ejemplo, en numerosos contextos se considera el concepto de una curva suave (o curva C^1): $\gamma \in C^1[a,b]$, es decir, $\gamma' \in C[a,b]$. Es suficiente considerar una condición más general.

Definición. Se dice γ es una curva suave a trozos (o C^1 a trozos) si $\gamma \in C[a,b]$ y, además, satisface las siguientes condiciones:

- $\gamma'(t)$ existe (como valor finito) en todo $t \in [a,b]$, salvo posiblemente en un conjunto finito de puntos $\{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subset (a,b)$ (y, posiblemente, en los propios extremos a y b);
- γ' es continua en cada uno de los intervalos abiertos (a,t_1), (t_1,t_2),...,(t_{m-1},t_m),(t_m,b);
- existen todos los límites laterales (finitos) $\lim_{t\to t_k^-} \gamma'(t)$ y $\lim_{t\to t_k^+} \gamma'(t)$, para $k \in \{1,2,\dots,m\}$, además de $\lim_{t\to a+} \gamma'(t)$ y $\lim_{t\to b-} \gamma'(t)$.

A partir de la definición (1), puede demostrarse el siguiente resultado conocido de otras asignaturas.

Proposición 1. *Toda curva suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es rectificable y su longitud viene dada por la fórmula*

$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.} \tag{2}$$

Más generalmente, toda curva suave a trozos es rectificable y (suponiendo las mismas condiciones que las indicadas arriba), su longitud es

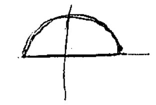
$$\ell(\gamma) = \int_a^{t_1} |\gamma'(t)|\,dt + \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)|\,dt + \dots + \int_{t_{m-1}}^{t_m} |\gamma'(t)|\,dt + \int_{t_m}^{b} |\gamma'(t)|\,dt,$$

Cuando γ no es suave pero es suave a trozos, es obvio de las condiciones impuestas sobre γ implican que cada una de las integrales en el lado derecho de la última igualdad es finita.

Es importante observar que, al considerar dos parametrizaciones equivalentes, γ y Γ, de la misma curva que es o bien suave o bien C^1 a trozos, siempre podemos suponer que la función α (cambio de parámetro) es también una función suave o C^1 a trozos. Entonces es fácil ver que la longitud es la misma para cualquier otra parametrización de una curva suave; en efecto, la fórmula adquiere la misma forma después de un cambio monótono de variable.

Ejemplo 4. *Una curva suave a trozos que consideraremos con frecuencia es la siguiente:* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, *donde*

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, & si\, 0 \le t \le \pi, \\ \frac{2t}{\pi} - 3, & si\, \pi \le t \le 2\pi, \end{cases},$$



la semicircunferencia superior de la circunferencia unidad, desde $z = 1$ *hasta* $z = -1$, *unida con el segmento* $[-1, 1]$ *y trazada en el sentido positivo. Obsérvese que* $\gamma(\pi) = -1$ *según ambas fórmulas, luego* γ *está bien definida y es continua. Para el cálculo de* γ', *véase el Ejemplo 1. Es claro que* γ' *es discontinua en* $t = \pi$ *ya que* $\gamma'(\pi^-) = -i$, $\gamma'(\pi^+) = 2/\pi$. *Por tanto, no es una curva suave (intuitivamente, no tiene tangente y tiene una "esquina" en* $z = -1$*) pero sí es suave a trozos.*

La longitud de la curva es, obviamente, $\pi + 2$ *(debido a las consideraciones geométricas elementales) y la fórmula* (2) *lo confirma:*

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{\pi} |ie^{it}|\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2}{\pi}\, dt = \pi + 2.$$

Definición. Se dice que una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es simple si $a < s < t < b$ implica $\gamma(s) \neq \gamma(t)$. Se dice que es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

En la definición de arriba hemos usado la palabra "curva" en lugar de "parametrización" (cometiendo el típico abuso de terminología) pero es fácil ver si las condiciones exigidas se piden para una parametrización de la curva, también se cumplen para cualquier otra parametrización equivalente a ella.

La idea intuitiva de una curva cerrada es que acaba donde empieza. Una curva simple no tiene autointersecciones; es decir, es imposible que pase por el mismo punto intermedio dos veces (pero sí pueden coincidir su punto inicial, $\gamma(a)$ y su punto final, $\gamma(b)$). Obsérvese que una propiedad no excluye a la otra. Por ejemplo, una circunferencia (recorrida sólo una vez, como en el Ejemplo 3) es una curva simple y cerrada.

Definición. Usaremos con frecuencia la palabra contorno para referirnos a una curva C^1 a trozos, simple y cerrada.

La curva del Ejemplo 4 es C^1 a trozos, simple y cerrada puesto que $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 1$.

Según el teorema de Jordan, si γ es un contorno, entonces $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ es un conjunto abierto con dos componentes conexas: un dominio acotado y otro dominio no acotado. El dominio acotado por γ se denomina el dominio interior y el no acotado, dominio exterior. En el Ejemplo 4, el dominio interior a γ es un semidisco abierto.

Integrales de línea en forma compleja

A partir de ahora, consideraremos una versión de las integrales de línea, algo más general que las ya vistas en Cálculo II y Análisis Matemático, esta vez con valores complejos. Antes de definirlos, repasemos más detalles técnicos relevantes.

La integral de Riemann de una función compleja. Si $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una función continua, escrita como $F = u + iv$, donde $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$, es natural definir la integral de Riemann compleja $\int_a^b F(t)\, dt$ como

$$\int_a^b F(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt.$$

Podemos calcular este tipo de integrales, esencialmente, de forma habitual, usando nuestros conocimientos de Cálculo aunque a veces es también necesario utilizar algunos conocimientos de Variable compleja que ya hemos adquirido.

Proposición 4. *Si γ y γ^- son dos curvas C^1 a trozos con orientaciones opuestas y f una función continua en su traza $\{\gamma\} = \{\gamma^-\}$, entonces*

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue directamente de la definición de la integral de línea, empleando el simple cambio de variable $s = b + a - t$. ■

En Topología ya hemos definido la suma de dos curvas.

Definición. Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\Gamma : [c,d] \to \mathbb{C}$ dos curvas tales que $\gamma(b) = \Gamma(c)$. La suma $\gamma + \Gamma$ se define como la curva dada por

$$\gamma + \Gamma : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}, \qquad (\gamma+\Gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{si } a \le t \le b, \\ \Gamma(t+c-b), & \text{si } b \le t \le b+d-c, \end{cases}.$$

Intuitivamente, donde termina γ, empieza Γ. Las dos juntas forman $\gamma + \Gamma$. La curva del Ejemplo 4 es un claro ejemplo de suma de dos curvas suaves.

Proposición 5. *Si γ y Γ son dos curvas C^1 y f una función continua en la traza $\{\gamma + \Gamma\}$, entonces*

$$\int_{\gamma+\Gamma} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma f(z)\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. La comprobación es directa, separando la integral en dos y aplicando el cambio de variable $s = t + c - b$ en la segunda integral:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma+\Gamma} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt + \int_b^{b+d-c} f(\Gamma(t+c-b))\Gamma'(t+c-b)\,dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt + \int_c^d f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,dt \\ &= \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma f(z)\,dz. \qquad ■ \end{aligned}$$

Mencionamos que la suma de curvas se puede considerar como un concepto formal incluso cuando las curvas tienen trazas disjuntas. La Proposición 5 sigue siendo válida en esos casos.

Estimaciones de integrales de línea. Aplicaciones

Las estimaciones que daremos a continuación continúan la lista de propiedades básicas de las integrales de línea pero, en cierto modo, tienen entidad propia, debido a sus aplicaciones que también cubriremos en esta sección y que volveremos a usar en las posteriores entregas de apuntes.

El siguiente resultado preliminar es una generalización de la conocida desigualdad para las integrales de funciones reales y su valor absoluto. No obstante, es importante notar que no se puede deducir directamente de ella sin hacer un trabajo equivalente al de la demostración (obsérvese con cuidado la segunda formulación de la desigualdad -con raíces- para ver que es muy diferente).

Lema 1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt. \tag{3}$$

En otras palabras, si $f = u + iv$, con u y v funciones reales, entonces

$$\sqrt{\left(\int_a^b u(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b v(t)\,dt\right)^2} \le \int_a^b \sqrt{u(t)^2+v(t)^2}\,dt.$$

DEMOSTRACIÓN. Distinguimos entre dos casos. Si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, la desigualdad es trivialmente cierta. Por tanto, nos podemos centrar en el caso restante: $\int_a^b f(t)\,dt \neq 0$, lo cual significa que es un número complejo que tiene argumento. Sean

$$\theta = \operatorname{Arg}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right), \qquad g(t) = e^{-i\theta} f(t), \quad a \le t \le b.$$

Recordando que para cualquier número complejo $z \neq 0$ se cumple la igualdad $|z| = e^{-i\operatorname{Arg} z} z$ (directamente de su representación polar), vemos que

$$0 < \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt.$$

Así que cada una de las integrales en la última igualdad es un número real y positivo y, por consiguiente, coincide con su parte real:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \operatorname{Re}\left(\int_a^b g(t)\,dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt \le \int_a^b |g(t)|\,dt = \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

En la segunda igualdad hemos usado el hecho obvio de que

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b (U(t) + iV(t))\,dt\right) = \int_a^b U(t)\,dt$$

y en la desigualdad siguiente, la conocida desigualdad $\operatorname{Re} g(t) \le |g(t)|$, para cada $t \in [a,b]$. El lema queda probado. ■

En lo que sigue, γ será una curva C^1 a trozos, parametrizada de la siguiente manera: $z = \gamma(t)$, $a \le t \le b$. No pedimos que sea simple y cerrada (lo que se suele llamar un contorno) pero, por supuesto, tampoco excluimos esos casos. Ya hemos definido que $dz = \gamma'(t)\,dt$ y ahora usaremos la siguiente notación:

$$|dz| = |\gamma'(t)|\,dt.$$

En las asignaturas previas probablemente no se hayan tratado las formas diferenciales de manera rigurosa pero la igualdad anterior es completamente natural dado que, para $z = \gamma(t)$, tenemos que $|\frac{dz}{dt}| = |\gamma'(t)|$. Entenderemos, por tanto, que

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

(Esta notación se usará con frecuencia en los apuntes posteriores.) Obviamente, en el caso particular $f \equiv 1$, obtenemos

$$\int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \ell(\gamma),$$

la longitud de la curva γ. Con esta notación, tenemos la siguiente estimación básica para las integrales de línea.

Proposición 6. *Si γ es una curva C^1 a trozos, f una función continua en su traza $\{\gamma\}$, entonces*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz|. \tag{4}$$

En particular, si M es una constante tal que $|f(z)| \le M$ para todo $z \in \gamma$ (por ejemplo, $M = \max_{z\in\gamma} |f(z)|$), entonces

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M \int_\gamma |dz| = M \cdot \ell(\gamma).$$

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad (4) se sigue en virtud del Lema 2 de

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |f(z)|\,|dz|.$$

La otra desigualdad es inmediata. ∎

Utilizaremos la Proposición 6 con frecuencia. Comenzaremos con un ejemplo muy simple. Es importante observar que la acotación conseguida abajo no es única y tampoco se afirma que sea la más precisa posible.

Ejemplo 7. *Sea γ el segmento vertical $[1-i, 1+i]$, recorrido desde abajo hacia arriba. Vamos a dar una posible estimación del valor de $\left|\int_\gamma e^{-z}\,dz\right|$.*

Por supuesto, podemos parametrizar el segmento, por ejemplo, $z = \gamma(t) = 1 + it$, $-1 \le t \le 1$, pero no es necesario hacer cálculos. Observando que para todo z así se tiene que $|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} = e^{-1}$, según la estimación básica (4), obtenemos

$$\left|\int_\gamma e^{-z}\,dz\right| \le \int_\gamma |e^{-z}|\,|dz| = e^{-1}\ell(\gamma) = \frac{2}{e}.$$

Asimismo, la estimación básica (4) puede utilizarse en otras situaciones, por ejemplo, cuando integramos sobre un contorno que es un arco circular de radio R, a veces se puede usar para demostrar que la integral $\int_\gamma f(z)\,dz \to 0$ cuando $R \to +\infty$. Esta observación es fundamental en los cálculos de distintas integrales reales impropias por métodos de variable compleja. Hablaremos de ello en el capítulo de los residuos, en una entrega posterior de apuntes. He aquí un primer ejemplo que se puede generalizar fácilmente.

Ejercicio 1. *Sea C_R la semi-circunferencia de radio R en el semiplano superior, centrada en el origen, recorrida desde R hasta $-R$. Demuestre que*

$$\int_{C_R} \frac{z+3}{(z^2+1)^2}\,dz \to 0, \qquad R \to +\infty.$$

SOLUCIÓN. Necesitamos una cota superior, M, para la función $1/(z^2+1)^2$ en C_R. Por tanto, debemos acotar el denominador $(z^2+1)^2$ inferiormente.

Cuando z pertenece a la semi-circunferencia C_R, cumple la condición $|z| = R$. Aplicando una de las formas de la desigualdad triangular: $|a-b| \ge |a| - |b|$, con $a = z^2$, $b = -1$, obtenemos que

$$|z^2+1| \ge |z^2| - 1 = R^2 - 1 > 0.$$

Por lo tanto, $\dfrac{1}{|z^2+1|^2} \le \dfrac{1}{(R^2-1)^2}$ y luego

$$\left|\frac{z+3}{(z^2+1)^2}\right| \le \frac{|z|+3}{|z^2+1|^2} \le \frac{R+3}{(R^2-1)^2}.$$

Finalmente,
$$\left|\int_{C_R} \frac{z+3}{(z^2+1)^2}\,dz\right| \le \int_{C_R} \frac{R+3}{(R^2-1)^2}|dz| = \frac{R+3}{(R^2-1)^2}\,\ell(C_R) = \frac{\pi R(R+3)}{(R^2-1)^2}\,.$$
Puesto que $\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R(R+3)}{(R^2-1)^2} = 0$, se sigue que $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = 0$. ■

El siguiente resultado generaliza el Ejercicio 1 y será útil en las próximas entregas de apuntes.

(*) **Lema 2.** *Si P y Q son dos polinomios tales que* $\operatorname{gr} Q \ge \operatorname{gr} P + 2$, *entonces*
$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,,$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es similar: si $\operatorname{gr} P = m$, $\operatorname{gr} Q = n$, para $|z| = R$ suficientemente grande tendremos que $|P(z)| \le CR^m$ para cierta constante C, mientras que $|Q(z)| \ge KR^n$ para otra constante $K > 0$ (siendo el término principal dominante, como en la prueba de que $\lim_{z\to\infty} Q(z) = \infty$, vista en clase). Luego
$$\left|\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| \le \frac{CR^m}{KR^n}\pi R = \frac{\pi C}{KR^{n-m-1}} \to 0\,, \qquad R \to +\infty\,,$$
puesto que, por hipótesis, $m - n - 1 \ge 1$. ■

El siguiente resultado será importante en diversas aplicaciones. Lo que nos dice es que, una vez más, en este contexto también la convergencia uniforme permite intercambiar la integral y el límite.

(*) **Teorema 1.** *Sea γ una curva suave a trozos y $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones (reales o complejas) continuas en la traza $\{\gamma\}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ en $\{\gamma\}$. Entonces*
$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Puesto que $f_n \rightrightarrows f$ en $\{\gamma\}$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $z \in \{\gamma\}$ y para todo $n \ge N_0$ se tiene
$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)}\,.$$
Usando la Proposición 6, vemos que
$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma \big(f_n(z) - f(z)\big)\,dz\right| \le \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,|dz| < \frac{\varepsilon}{\ell(\gamma)} \cdot \ell(\gamma) = \varepsilon$$
para todo $n \ge N_0$, lo cual demuestra el teorema. ■

El siguiente corolario es inmediato y muy útil.

Corolario 1. *Sea γ una curva suave a trozos y supongamos que la serie funcional $\sum_{n=1}^\infty f_n$ de funciones continuas converge uniformemente en la traza $\{\gamma\}$. Entonces*
$$\int_\gamma \sum_{n=1}^\infty f_n(z)\,dz = \sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n(z)\,dz\,.$$

En la siguiente entrega de apuntes, usaremos este corolario en la demostración de alguna de las distintas versiones de la Fórmula integral de Cauchy, uno de los teoremas centrales de este curso.

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20

Apuntes detallados, con ejemplos y ejercicios resueltos

Fórmula integral de Cauchy. Holomorfía y analiticidad y otras aplicaciones

El uso de las integrales de línea es fundamental en Variable compleja porque nos permite formular dos de sus teoremas centrales. Uno de ellos es la fórmula integral de Cauchy, que nos mostrará cómo calcular el valor de una función holomorfa si conocemos sólo los valores que toma en una curva cerrada (típicamente suave a trozos). El otro es el teorema integral de Cauchy, según el cual la integral de una función holomorfa a lo largo de una curva cerrada (y, de nuevo, suave a trozos) será igual a cero, siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones topológicas relativas a la función y a la curva en cuestión. Como ya veremos más adelante, existen diferentes versiones de ambos teoremas.

Estos dos resultados tienen implicaciones de enorme importancia en el campo de Variable compleja. Por ejemplo, nos ayudarán a calcular numerosas integrales, incluidas varias integrales impropias vistas en otros cursos y que podrían ser complicadas de evaluar por métodos elementales. También nos permitirán deducir numerosos teoremas cualitativos acerca del comportamiento de las funciones holomorfas que serán de nuevo unos fenómenos típicos de variable compleja, sin análogo en otros contextos en Análisis matemático.

Incluso la versión más simple de la fórmula integral de Cauchy, formulada para las circunferencias, nos bastará en esta entrega de apuntes para deducir un resultado fundamental que ya anticipamos en clase: toda función holomorfa es analítica. Dicho de manera más precisa, puede escribirse como serie de potencias en cada disco contenido en el dominio donde la función es holomorfa. Una vez fijado el centro, veremos que esa serie (de Taylor) es única. Esto tendrá varias consecuencias importantes como las llamadas estimaciones de Cauchy para las funciones enteras, de las que es un caso especial el teorema de Liouville. Dichas estimaciones nos ayudan a entender mejor cómo pueden crecer las funciones enteras y qué imágenes pueden tener.

Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias

Motivación de la fórmula integral de Cauchy. Uno de los ejercicios de las hojas nos dice que, si f es una función compleja, continua en el disco abierto $D(a;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$, $0 < \varepsilon < R$ y C_ε es la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \varepsilon\}$, orientada positivamente (por ejemplo, parametrizada como $C_\varepsilon(t) = c + \varepsilon e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$) entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a).$$

Si en lugar de suponer la continuidad de f suponemos que es holomorfa en $D(a;R)$, resultará que, de hecho,

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a),}$$

para todo ε con $0 < \varepsilon < R$, una afirmación mucho más fuerte. Esta igualdad constituye un caso especial de la fórmula integral de Cauchy. Veremos en breve que la afirmación sigue siendo cierta para cualquier otro punto a en el interior de la circunferencia C_ε en lugar del centro. Después veremos incluso que la circunferencia se puede sustituir por cualquier otra curva simple y cerrada γ en cuyo interior se encuentra el punto a. Finalmente, veremos que el resultado sigue siendo cierto para cualquier dominio simplemente conexo en lugar del disco $D(a;R)$, siempre y cuando la curva γ esté contenida en el dominio junto con su dominio interior (para la definición del dominio interior a una curva de Jordan, véase la parte final de la entrega anterior de los apuntes). Por supuesto, cuanto más general sea la afirmación, más difícil será demostrarla y habrá más consideraciones topológicas a tener en cuenta.

Procede hacer un comentario técnico. Como en otras muchas situaciones en Análisis, con frecuencia cambiamos la letra usada para la variable de integración, de manera que también escribiremos, por ejemplo,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-a}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta .$$

Cuando se quiere hacer énfasis en el hecho de que el punto a no es fijo sino que nos interesa variarlo en el interior de la circunferencia para tener una función de z, también escribiremos la fórmula como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}dw .$$

Cambios de notación de este tipo también serán frecuentes en estos apuntes, según nos convenga.

Observaciones sobre los discos contenidos en un dominio. Recordemos que un dominio es un conjunto abierto y conexo en el plano. Algunas de las letras más habituales para denotar un dominio son Ω y D. Un teorema visto en clase afirma que cada dominio en el plano es conexo por líneas poligonales con todos los lados paralelos a alguno de los ejes (es decir, todos horizontales o verticales).

En todo este capítulo debemos tener presentes algunas consideraciones métrico-geométricas muy sencillas que detallamos a continuación. Recordemos que la distancia de un punto z a un conjunto A en el plano se define como

$$\operatorname{dist}(z,A) = \inf\{|z-w| : w \in A\} .$$

Obviamente, el valor de $\operatorname{dist}(z,A)$ es no negativo. Si $A = \emptyset$, entendemos que $\operatorname{dist}(z,A) = +\infty$. Si $A \neq \emptyset$, entonces la distancia es finita: si $w_0 \in A$, entonces $\operatorname{dist}(z,A) \le |z-w_0|$, por la definición del ínfimo.

Proposición 1. *Si $A \neq \emptyset$ es un conjunto cerrado, el ínfimo* $\operatorname{dist}(z,A)$ *se alcanza para todo $z \in \mathbb{C}$:*

$$\operatorname{dist}(z,A) = \min\{|z-w| : w \in A\} .$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, de la definición del ínfimo se deduce que existe una sucesión $(w_n)_{n=1}^\infty$ en A tal que la sucesión numérica $(|z-w_n|)_{n=1}^\infty$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty}|z-w_n| = \operatorname{dist}(z,A)$. De ahí se sigue que la sucesión compleja $(z-w_n)_{n=1}^\infty$ es acotada y, por tanto, también lo es $(w_n)_{n=1}^\infty$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $(w_{n_k})_{k=1}^\infty$ que converge a un punto w cuando $k\to\infty$. Puesto que A es cerrado, por hipótesis, $w \in A$. Entonces

$$|z-w| = \lim_{k\to\infty}|z-w_{n_k}| = \lim_{n\to\infty}|z-w_n| = \operatorname{dist}(z,A),$$

así que el ínfimo se alcanza, al menos, en el punto $w \in A$. (Podría alcanzarse en varios puntos; conviene buscar ejemplos concretos.) ■

Proposición 2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $\Omega \neq \emptyset$, un punto $z \in \Omega$ y un número $r > 0$. Entonces el disco abierto $D(z;r) \subset \Omega$ si y sólo si $r \le$* $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Cuando $\Omega = \mathbb{C}$, entonces $\partial\Omega = \emptyset$ y $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) = +\infty$, así que no hay nada que demostrar (para todo radio $r > 0$ y finito, $D(z;r) \subset \Omega$ mientras que, formalmente, entendemos que $D(z;+\infty) = \mathbb{C}$).

Cuando $\Omega \neq \emptyset$ es un dominio distinto del plano, su borde (frontera) $\partial\Omega$ es un conjunto cerrado y no vacío. Por tanto, $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ es un número finito y se alcanza, según la Proposición 1. Además, el número $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ es estrictamente positivo porque Ω, por ser abierto, contiene un disco centrado en z y de radio positivo, digamos δ, luego $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) \geq \delta > 0$). Es inmediato que $D(z;R) \subset \Omega$ y, por tanto, para todo r con $0 < r \leq R$ tenemos que $D(z;r) \subset \Omega$, mientras que, para $\rho > R$, es imposible que $D(z;\rho) \subset \Omega$, por la definición de la distancia. ■

La Proposición 2 será importante tanto a la hora de desarrollar una función holomorfa en serie en ciertos discos en un dominio como para tener claro para qué circunferencias tiene sentido formular la versión básica de la fórmula integral de Cauchy que daremos a continuación.

A estas alturas ya debería ser obvio que, dado un punto z en un dominio $\Omega/$, una cirfunferencia centrada en z y de radio $r > 0$ está contenida en Ω (equivalentemente, $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \leq r\} \subset \Omega$) si y sólo si $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega) > r$.

(*) **Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias**. Para deducir el primer resultado importante de este capítulo, usaremos la regla de Leibniz para la diferenciación dentro del signo de la integral para una integral con parámetro.

Lema 1 *(Regla de Leibniz). Sea $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ una función continua, $-\infty < a < b < +\infty$, $-\infty < c < d < +\infty$.*

(a) Si la función $g : [c,d] \to \mathbb{C}$ viene dada por $g(t) = \int_a^b \varphi(s,t)\,ds$, entonces $g \in C[c,d]$.

(b) Si, además, la derivada parcial $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ existe y es continua en $[a,b] \times [c,d]$, entonces $g \in C^1[c,d]$ y

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial t}\,ds, \qquad \forall t \in [c,d].$$

No daremos ninguna demostración de esta regla, puesto que se suele probar en Teoría de la medida para funciones con valores reales y que la versión compleja se sigue inmediatamente escribiendo $\varphi = u + vi$ y aplicando la versión real a las partes real e imaginaria por separado.

Cuando el integrando de una integral de línea no es necesariamente holomorfo pero es una fracción con denominador lineal, con frecuencia es útil el siguiente importante resultado, que es la versión básica de la Fórmula integral de Cauchy. Entre otras cosas, la fórmula nos dice lo siguiente: dada una función holomorfa en un disco, basta conocer sus valores sólo en una circunferencia dentro del disco para recuperar los valores de la función en cualquier punto dentro de dicha circunferencia.

Recomendación. Como veremos, incluso la demostración de esta versión sencilla de la fórmula es no trivial ya que es algo técnica y larga aunque instructiva. En una primera lectura de estos apuntes, se puede omitir la demostración, centrándose en el enunciado y en las aplicaciones.

(*) **Teorema 1** *(Fórmula integral de Cauchy para las circunferencias). Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $c \in \Omega$, $r > 0$ tal que $\overline{D}(c;r) = \{z : |z-c| \leq r\} \subset \Omega$ y sea $C = \{z : |z-c| = r\}$ la circunferencia de radio r, centrada en el punto c y con orientación positiva. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z), \tag{1}$$

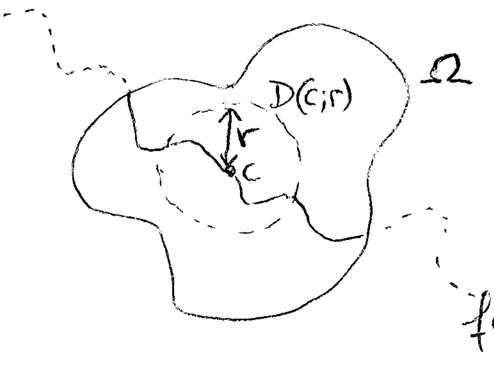
para todo $z \in D(c;r)$.

DEMOSTRACIÓN. Dividiremos la demostración en dos pasos principales.

(1) Demostraremos primero el caso especial cuando $f \equiv 1$ en Ω, deduciendo la fórmula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{w-z}\,dw = 1. \tag{2}$$

Incluso este caso requiere cierto trabajo cuando $z \neq c$, siendo el caso $z = c$ un ejercicio rutinario usando la definición de la integral de línea. Veamos el caso de z arbitrario. Puesto que $|z-c| < r$, que es lo mismo que



$f \in H(\Omega)$; $\overline{D}(c;r) \subset \Omega$; $C = \{z : |z-r| = 1$

$c \in \Omega$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega - z} = f(z) \quad \forall z \in D(c;r)$

$|\frac{z-c}{r}| < 1$, existe ζ con $|\zeta| = 1$ tal que $\frac{z-c}{r} = \zeta$. Por tanto, $z = c + r\zeta$. Parametrizando la circunferencia como sigue: $w = c + re^{is}$, con $0 \leq s \leq 2\pi$, para $w \in C$, el lado izquierdo de la fórmula (2) se convierte en

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{is}}{(c+re^{is})-(c+r\zeta)}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-\zeta}\,ds,$$

así que nuestra tarea se reduce a comprobar que la última integral es igual a uno. Para ello, recurriremos al siguiente procedimiento. Definamos la siguiente función de dos variables reales, muy similar al integrando:

$$\varphi(s,t) = \frac{e^{is}}{e^{is}-t\zeta}, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

así como la función

$$g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t)\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-t\zeta}\,ds, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Es inmediato que $\varphi \in C([0,2\pi] \times [0,1])$ puesto que el numerador y el denominador son ambos funciones continuas y el denominador no se anula, debido a la desigualdad triangular inversa:

$$|e^{is} - t\zeta| \geq |e^{is}| - |t\zeta| = 1 - t|\zeta| \geq 1 - |\zeta| > 0.$$

Un cálculo directo (usando la regla de la cadena) muestra que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{e^{is}\zeta}{(e^{is}-t\zeta)^2}, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Es claro que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} \in C([0,2\pi] \times [0,1])$, por las razones ya mencionadas arriba. Debido al Lema 1, $g \in C^1[0,1]$ y

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}\zeta}{(e^{is}-t\zeta)^2}\,ds, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi,$$

Si, para $t \in [0,1]$ arbitrario pero fijo, consideramos la función

$$\Phi(s) = \frac{i\zeta}{e^{is}-t\zeta}, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi,$$

vemos inmediatamente que

$$\Phi'(s) = \frac{e^{is}\zeta}{(e^{is}-t\zeta)^2}, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Por el Teorema fundamental del Cálculo y la fórmula para g' de arriba, se sigue que

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \Phi'(s)\,ds = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = \frac{i\zeta}{1-t\zeta} - \frac{i\zeta}{1-t\zeta} = 0,$$

así que la función g es constante. Puesto que, trivialmente, $g(0) = \int_0^{2\pi} ds = 2\pi$, se sigue que también

$$2\pi = g(1) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-\zeta}\,ds, \tag{3}$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar. El caso especial queda probado.

(2) En el caso general, aplicaremos un procedimiento muy similar pero en un momento de la prueba usaremos el caso especial ya probado. De nuevo, escribiremos $z = c + r\zeta$, para cierto ζ con $|\zeta| < 1$. También parametrizaremos la circunferencia C como antes: $w = c + re^{is}$, con $0 \leq s \leq 2\pi$, para $w \in C$. El lado izquierdo de (1) se convierte en

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(c+re^{is})}{(c+re^{is})-(c+r\zeta)}\,ire^{is}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(c+re^{is})e^{is}}{e^{is}-\zeta}\,ds.$$

Por tanto, hemos de demostrar que

$$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{is})e^{is}}{e^{is} - \zeta}\, ds, \tag{4}$$

Esto sugiere que consideremos la siguiente función de dos variables reales:

$$\varphi(s,t) = \frac{f\left(c + r\zeta + tr(e^{is} - \zeta)\right) e^{is}}{e^{is} - \zeta}, \qquad 0 \le s \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 1,$$

y la función asociada

$$g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t)\, ds, \qquad 0 \le s \le 2\pi.$$

Primero, tenemos que comprobar que tiene sentido evaluar f en el punto $c + re^{is} + tr(e^{is} - \zeta)$. De la desigualdad

$$|(c + r\zeta + tr(e^{is} - \zeta) - c| = r|\zeta + t(e^{is} - \zeta)| = r|te^{is} + (1-t)\zeta| \le r(t + (1-t)|\zeta|) < r(t + (1-t)) = r,$$

se desprende que $c + re^{is} + tr(e^{is} - \zeta \in D(c;r)$ y, por tanto, podemos evaluar f en dicho punto.

De nuevo, la desigualdad triangular inversa nos ayuda a ver que $\varphi \in C([0,2\pi] \times [0,1])$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in C([0,2\pi] \times [0,1])$.

Ahora, usando de nuevo el Lema 1, concluimos que $g \in C^1[0,1]$ y

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{r(e^{is} - \zeta) f'\left(c + r\zeta + tr(e^{is} - \zeta)\right) e^{is}}{e^{is} - \zeta} ds = \int_0^{2\pi} rf'\left(c + r\zeta + tr(e^{is} - \zeta)\right) e^{is}\, ds,$$

Si ahora definimos

$$\Phi(s) = \frac{-i}{t} f\left(c + r\zeta + tr(e^{is} - \zeta)\right), \qquad 0 \le s \le 2\pi,$$

para t fijo y $\neq 0$, se sigue que

$$\Phi'(s) = rf'\left(c + r\zeta + tr(e^{is} - \zeta)\right) e^{is}, \qquad 0 \le s \le 2\pi,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_0^{2\pi} rf'\left(c + r\zeta + tr(e^{is} - \zeta)\right) e^{is}\, ds = \int_0^{2\pi} \Phi'(s)\, ds = \Phi(2\pi) - \Phi(0) \\ &= \frac{-i}{t} f(c + r\zeta + tr(1 - \zeta)) + \frac{i}{t} f(c + r\zeta + tr(1 - \zeta)) = 0. \end{aligned}$$

Se sigue que g es constante y puesto que

$$g(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,0)\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{f(c + r\zeta) e^{is}}{e^{is} - \zeta} ds = f(c + r\zeta) \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - \zeta} ds = 2\pi f(c + r\zeta) = 2\pi f(z),$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado el caso especial (1) demostrado antes, en concreto, la fórmula (3). Finalmente, dado que g es constante, obtenemos que también

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{is})e^{is}}{e^{is} - \zeta} ds = \int_0^{2\pi} \varphi(s,1)\, ds = g(1) = g(0) = 2\pi f(z),$$

lo cual demuestra la igualdad deseada (4) y completa la prueba del teorema. ■

Por supuesto, muchas veces escribiremos la fórmula (1) en el Teorema 1 en la forma

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a), \qquad a \in D(c;r),}$$

cambia w por z y z por a (mejor notación)

con las variables cambiadas, sobre todo cuando la integral de línea ya venga escrita con la variable de integración z. Veremos ahora algunos ejemplos del uso de esta versión básica de la Fórmula integral de Cauchy.

fácil **Ejemplo 1**. *Sea γ la circunferencia unidad, orientada positivamente. Denotemos por γ^- a la misma circunferencia pero con orientación negativa. Entonces*

$$\int_{\gamma^-} \frac{\cos(\pi z)}{z+\frac{1}{3}}\,dz = -\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z-(-\frac{1}{3})}\,dz = -2\pi i\cdot\cos(-\frac{\pi}{3}) = -\pi i.$$

La primera igualdad es consecuencia directa de la fórmula para el cambio de orientación vista en los apuntes sobre integrales de línea. La segunda se obtiene aplicando la Fórmula integral de Cauchy al punto $a=-\frac{1}{3}$ situado en el interior de la circunferencia unidad, a la función $f(z)=\cos z$, que es holomorfa en todo el plano (entera) y a cualquier dominio que contenga al disco unidad cerrado; por ejemplo, podemos elegir tanto $\Omega = D(0;R)$ con $R>1$ como $\Omega=\{z : \operatorname{Re} z > -2\}$, entre otros. La tercera igualdad se tiene porque, como ya sabemos, $\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$.

Veamos ahora un ejercicio aparentemente más complicado pero, de hecho, sencillo.

factorización **Ejercicio 1**. *Para la misma circunferencia γ que en el Ejemplo 1 (con orientación positiva), calcule la integral*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-3z}\,dz.$$

SOLUCIÓN. El denominador $z^2-3z=z(z-3)$ se anula en dos puntos: en $z=0$ y en $z=3$ pero sólo uno de ellos, $z=0$, está en el dominio interior a la circunferencia γ, que es el disco unidad $\mathbb{D}$. Por tanto, debemos definir $f(z)=\frac{\cos z}{z-3}$ para tener el integrando escrito en una forma conveniente para la aplicación de la Fórmula integral de Cauchy (en este caso, con $c=0$):

$$\frac{\cos z}{z^2-3z} = \frac{f(z)}{z}.$$

Para poder aplicar el teorema, necesitamos además un dominio Ω que cumpla dos condiciones a la vez: que f sea holomorfa en Ω (por tanto, $3\notin\Omega$ será necesario) y que el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}}=\mathbb{D}\cup\gamma\subset\Omega$. Podemos elegir, por ejemplo, $\Omega=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z<2\}$. Por la Fórmula Integral de Cauchy, obtenemos que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2-3z}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) = -\frac{2\pi i}{3}. \quad \blacksquare$$

El siguiente ejercicio requiere algo de trabajo técnico adicional.

descomp. frac. simples **Ejercicio 2**. *Sea γ es la circunferencia unidad $\{z : |z|=1\}$ con orientación positiva. Evalúe la integral*

$$I=\int_\gamma \frac{2\,dz}{4z^2-1},$$

usando la fórmula integral de Cauchy.

SOLUCIÓN. En este caso, el denominador se anula en dos puntos diferentes: $z=1/2$ y $z=-1/2$ y ambos están dentro de la circunferencia unidad. Por tanto, aunque es muy fácil factorizar el denominador:

$$\frac{2}{4z^2-1} = \frac{2}{(2z-1)(2z+1)},$$

no podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy directamente, ni a la función $f(z)=\frac{2}{2z+1}$ ni a $f(z)=\frac{2}{2z-1}$, porque ninguna de ellas es holomorfa en ningún disco que contenga a la circunferencia γ. El problema está en que la primera no es holomorfa en $z=-1/2$, mientras que la segunda no lo es en $z=1/2$. Entonces, ¿cómo podemos aplicar la fórmula de Cauchy? Podemos hacerlo después de un paso previo, que consiste en descomponer la función f en fracciones simples, aplicando luego la fórmula integral de Cauchy a cada una de ellas por separado. Empezamos escribiendo

$$f(z) = \frac{2}{(2z-1)(2z+1)} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{2z+1}.$$

De aquí se obtiene

$$2 = (2z+1)A + (2z-1)B = (2A+2B)z + (A-B).$$

Por tanto, tenemos

$$A+B=0, \qquad A-B=2.$$

Resolviendo este sistema lineal (muy fácil), obtenemos que $A=1$, $B=-1$ y, por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{2z+1},$$

lo cual nos será más cómodo escribir como

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1/2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1/2}$$

para poder aplicar la fórmula integral de Cauchy. Recordemos que se necesita una función de la forma $z-a$ en el denominador. Observando que tanto el punto $z=1/2$ como $z=-1/2$ se encuentran en el interior de γ, ya podemos calcular directamente:

$$\int_\gamma \frac{2}{4z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-1/2}\,dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z+1/2}\,dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

donde cada integral se ha calculado por separado, aplicando la Fórmula integral de Cauchy a la función constante $f \equiv 1$ en el numerador. ■

En una de las siguientes entregas de los apuntes, resolveremos este mismo problema usando el llamado Teorema de los residuos.

Holomorfía y analiticidad

Recordemos que una función f es holomorfa en un dominio Ω si tiene derivada $f'(z)$ en todos los puntos z de Ω. Seguiremos usando la notación $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ para expresar que la función f es holomorfa en Ω.

Como es habitual en Análisis Matemático, una función se denomina analítica en Ω si en cada disco $D(c,r)$ contenido en Ω se puede escribir como serie de potencias: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ (en este caso, una serie compleja). Recordemos que, debido a la Proposición 2, se cumple que $D(c,r) \subset \Omega$ si y sólo si $r \leq \operatorname{dist}(c, \partial\Omega)$. Sabemos de clase que una serie de potencias se puede derivar tantas veces cuantas se quiera, obteniendo cada vez otra serie de potencias convergente en el mismo disco. Por lo tanto, toda función analítica en un disco es también holomorfa en el mismo disco.

Holomorfía implica analiticidad. Aparentemente, la propiedad de ser analítica es mucho más fuerte que la propiedad de ser holomorfa. No obstante, ahora ya hemos llegado a uno de los puntos centrales de este curso donde veremos que toda función holomorfa en Ω es, de hecho, analítica en cualquier disco contenido en Ω. Por lo tanto, los dos conceptos, analítica y holomorfa, son equivalentes, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $c \in \Omega$ un punto tal que $\operatorname{dist}(c, \partial\Omega) = R$. Entonces f es puede escribir como función analítica en el disco $D(c;R)$. En otras palabras, puede desarrollarse en serie de potencias centrada en c y convergente en $D(c;R)$:*

Resumen: analiticidad ≡ holomorfía

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

siendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw$$

para $0 < r < R$ y C_r la circunferencia centrada en c, de radio r y con orientación positiva (por ejemplo, parametrizada como $C_r(t) = c + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$).

En particular, una función holomorfa tiene derivadas de todos los órdenes en cada punto de Ω, siendo

$$f^{(n)}(c) = n!\, a_n, \qquad \forall c \in \Omega, \quad \forall n \ge 0.$$

Además, se tiene la siguiente fórmula integral de Cauchy para la derivada n-ésima de la función f en el punto c:

$$f^{(n)}(c) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw, \qquad \forall n \ge 0. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 < r < R$. Entonces, por hipótesis, $\overline{D}(c;r) \subset D(c;R) \subset \Omega$. Por el Teorema 1, sabemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

para todo $z \in D(c;r)$. Consideremos un valor fijo ρ tal que $0 < \rho < r$. Veamos que ocurre cuando $|z-c| \le \rho$. Puesto que entonces $|z-c| \le \rho < r = |w-c|$ para todo $x \in C_r$, obtenemos que $\left|\frac{z-c}{w-c}\right| \le \frac{\rho}{|w-c|} = \frac{\rho}{r} < 1$ y, por tanto,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-c)-(z-c)} = \frac{1}{w-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-c}{w-c}} = \frac{1}{w-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}.$$

La serie converge uniformemente en $\overline{D}(c;\rho)$, al ser geométrica con $\left|\frac{z-c}{w-c}\right| \le \frac{\rho}{r} < 1$. Finalmente, obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw \cdot (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

para todo $z \in \overline{D}(c;\rho)$, siendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw.$$

El intercambio de la integral y la serie está justificado por el último corolario de los apuntes sobre las integrales de línea complejas, debido a la convergencia uniforme. El desarrollo es válido para $|z-c| \le \rho$ con $\rho < r$ y, por tanto, tenemos convergencia absoluta de la serie de potencias en todo el disco $D(c;r)$. Puesto que esto es cierto para todo $r \in (0,R)$, la serie de potencias obtenida converge en todo $D(c;R)$. Por supuesto, la fórmula para a_n es válida sólo cuando $0 < r < R$.

Es importante observar que a_n no depende de z ya que esta variable no interviene en la integral que nos da el valor de a_n. Por el teorema de una entrega anterior de apuntes que nos dice que una serie de potencias se puede derivar término a término, sabemos que, de hecho, $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ y, por tanto, para un $c \in \Omega$ dado, el coeficiente a_n es único para cada $n \ge 0$. ■

Observación. Es evidente que si se tiene el desarrollo en serie de potencias de radio R como en el teorema, el mismo desarrollo es válido en cualquier disco de radio menor centrado en el mismo punto.

Definición. Con frecuencia llamaremos a la serie obtenida serie de Taylor de la función f centrada en c. También, a partir de ahora, usaremos los términos función holomorfa y función analítica indistintamente, puesto que la equivalencia entre estos conceptos ha quedado justificada.

La fórmula integral de Cauchy para las derivadas. El Teorema 2 nos permite recuperar el valor de la derivada de cualquier orden en el centro de una circunferencia a partir de los valores de la función en dicha circunferencia. Veamos un ejemplo concreto.

Ejercicio 3. *Si γ denota a la circunferencia unidad con orientación positiva, calcule la integral*

$$I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\, dz.$$

SOLUCIÓN. No podemos aplicar directamente la fórmula integral de Cauchy a la función $f(z) = \cos z/z$ en ningún disco que contenga al disco unidad cerrado. El problema está en que el punto $c = 0$ pertenece al interior de la circunferencia γ pero f no es holomorfa en $c = 0$. Sin embargo, podemos usar la fórmula integral de Cauchy para la derivada de la función $g(z) = \cos z$, que sí es holomorfa en todo el plano:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{z^2}\, dz = g'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0,$$

siendo $n = 1$ y $a = 0$ en la fórmula para la derivada n-ésima en la fórmula integral de Cauchy. ■

Es importante entender en relación con los resultados demostrados hasta ahora nos permiten lo siguiente:

- evaluar una función holomorfa en cualquier punto interior a una circunferencia, a partir de sus valores en dicha circunferencia (Teorema 1);
- evaluar la derivada (de cualquier orden) de la función, a partir de los mismos datos, pero sólo en el centro de la circunferencia (según el Teorema 2, fórmula (5).

No obstante, la fórmula para la derivada se puede extender a los demás puntos interiores a la circunferencia en cuestión aunque demostrar eso exige un esfuerzo adicional. De momento, sólo daremos el enunciado, dejando la demostración para la siguiente entrega de los apuntes.

Sea Ω un dominio en el plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $c \in \Omega$ un punto tal que $\operatorname{dist}(c, \partial\Omega) = R$. *Si $0 < r < R$ y C_r denota a la circunferencia centrada en c, de radio r y con orientación positiva, entonces*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw, \qquad \forall z \in D(c;r), \quad \forall n \geq 0.$$

Veamos un ejemplo del uso de esta versión más general de la fórmula de Cauchy para las derivadas.

Ejercicio 4. *Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ y γ la circunferencia unidad (centrada en el origen) con orientación positiva y sea $n \in \mathbb{N}$ (un número natural). Supongamos que f es una función analítica en el disco D y que cumple la igualdad*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2}\, dz = 0,$$

Calcule razonadamente el valor de $f'\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

SOLUCIÓN. Usando álgebra elemental, la condición

$$0 = \int_\gamma \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2}\, dz = \frac{1}{(n+1)^2}\int_\gamma \frac{f(z)}{\left(z-\frac{1}{n+1}\right)^2}\, dz$$

implica que

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{\left(z-\frac{1}{n+1}\right)^2}\, dz = 0.$$

Se cumplen las condiciones para aplicar la Fórmula integral de Cauchy para la derivada:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = f'(a), \qquad a\in\mathbb{D}.$$

En este caso, $a=\dfrac{1}{n+1}\in\mathbb{D}$ ya que $\left|\dfrac{1}{n+1}\right|<1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Esto significa que $f'\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$. ■

Unicidad de la serie de Taylor. Tal y como nos muestra el Teorema 2, debido a la fórmula $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, los coeficientes de la serie de Taylor (con el centro c prescrito) de una función analítica f son únicos. Usaremos este hecho con frecuencia para sacar conclusiones adicionales. Lo ilustramos mediante varios ejemplos.

En una entrega anterior de los apuntes hemos definido la función logaritmo en ciertos dominios simplemente conexos (el plano menos una semirrecta) y hemos calculado su derivada. Para conocer mejor la función, debemos desarrollarla también en serie de potencias. Como ya sabemos, el desarrollo será distinto para cada punto c que elijamos. A continuación daremos un ejemplo de cómo se puede obtener el desarrollo para $c=0$.

Ejercicio 5. *Desarrolle en serie de potencias centrada en el origen la función* $f(z)=-\log(1+z)$, *indicando el disco de convergencia.*

SOLUCIÓN. Para poder definir la función logaritmo como función holomorfa (analítica), necesitamos hacer un corte en el plano, excluyendo, por ejemplo, los valores reales no positivos. Por tanto, se ha de cumplir la condición $1+z\neq x$, para todo $x\in\mathbb{R}$, $x\le 0$, lo cual es equivalente a $z\neq x$, $x\le -1$. (Elegiremos la determinación principal de manera que $\log 1 = 0$.) Por tanto, tomamos como dominio de definición

$$\Omega = \mathbb{C}\setminus\{z=x\in\mathbb{R} : x\le -1\},$$

el plano menos el semieje $(-\infty,-1]$ del eje real. El disco más grande centrado en el origen contenido en Ω es, obviamente, el disco unidad, ya que la distancia del origen al borde de Ω es uno. Por tanto, podemos desarrollar f en serie de potencias de z (serie de Taylor) convergente en el disco unidad.

Calculamos ahora los coeficientes de la serie de Taylor, calculando las sucesivas derivadas de f:

$$f'(z)=-\frac{1}{1+z},\quad f''(z)=\frac{1}{(1+z)^2},\quad f'''(z)=-\frac{2}{(1+z)^3},\quad f^{(4)}(z)=\frac{3!}{(1+z)^4},\quad \dots$$

Inductivamente, obtenemos la fórmula

$$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+z)^n}, \qquad n\ge 1.$$

Por tanto, $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, para $n\ge 1$, así que los coeficientes de Taylor son:

$$a_0=0,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad n\ge 1,$$

y el desarrollo en serie es

$$-\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots, \qquad |z|<1. \quad ■$$

La unicidad del desarrollo en serie de Taylor también nos ayuda a determinar las funciones analíticas en ciertos discos (o en todo el plano) que cumplan ciertas condiciones, es decir, que sean soluciones de cierta ecuación funcional. Daremos un par de ejemplos. Tanto en las hojas de problemas como en los exámenes de los años anteriores encontraremos problemas de este tipo.

Ejercicio 6. *Encuentre razonadamente todas las funciones enteras f que satisfagan la ecuación funcional*

$$f(2z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

SOLUCIÓN. Por el teorema que dice que la holomorfía implica la analiticidad, sabemos que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, una serie de potencias convergente en todo el plano. Si f cumple la ecuación indicada, entonces (por una proposición vista antes sobre la suma de dos series de potencias)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n z^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^n}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} a_n z^n$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Por la unicidad de los coeficientes de Taylor, se sigue que para todo $n \geq 0$ tenemos

$$2^n a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} a_n.$$

Por tanto, si algún $a_n \neq 0$, se obtiene

$$2^n = \frac{1+(-1)^n}{2},$$

pero esto es imposible cuando $n \geq 1$ ya que entonces

$$\frac{1+(-1)^n}{2} \leq \frac{1+1}{2} < 2 \leq 2^n.$$

Se sigue que $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$, así que sólo el coeficiente a_0 puede ser no nulo, lo cual implica que $f \equiv cte$.

Es fácil comprobar que toda función constante efectivamente cumple la ecuación dada. Por tanto, las constantes son las únicas soluciones. ■

El desarrollo en serie de Taylor nos permite resolver ecuaciones funcionales también para otras funciones que no sean enteras.

Ejercicio 7. *Halle todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ que satisfagan la condición $f(z) = f(z^2)$, para todo $z \in \mathbb{D}$.*

SOLUCIÓN. Puesto que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, podemos escribir f como una serie de potencias convergente en $\mathbb{D}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

La condición $f(z) = f(z^2)$ nos dice que para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + +a_5 z^5 + a_6 z^6 + \ldots = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + +a_3 z^6 + a_4 z^8 + \ldots$$

Teniendo en cuenta la unicidad de la serie de Taylor y comparando los coeficientes a ambos lados de la última igualdad, se deduce que

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0, \qquad a_2 = a_1,\ a_4 = a_2,\ a_6 = a_3,\ a_8 = a_4, \ldots$$

y, por tanto, $a_k = 0$ para todo $k \geq 1$, luego $f \equiv cte$.

Recíprocamente, es evidente que todas las funcions constantes son analíticas en el disco unidad, así que todas cumplen las condiciones del problema. ■

Más adelante, veremos que este ejercicio admite una solución alternativa (basada en el Principio de los ceros aislados).

Teorema de Liouville. Estimaciones de Cauchy

Como es habitual, usaremos la notación $[\alpha]$ para denotar la *parte entera* de α, es decir, el único número entero n tal que $n \le \alpha < n+1$. Por ejemplo, $[\pi] = 3$ y $[-\sqrt{3}] = -2$.

Nota. En Informática, la función $a \mapsto [a]$ se suele llamar la *función suelo*) y se denota como $\lfloor a \rfloor$.

Antes ya vimos que las funciones enteras como la exponencial y el coseno no están acotadas. Veremos ahora que estas funciones no son ninguna excepción. Uno de los resultados importantes de este curso, el teorema de Liouville, nos enseñará que si una función entera está acotada, entonces es necesariamente constante. Obtendremos el teorema de Liouville como un caso especial del siguiente resultado, conocido como las estimaciones de Cauchy y relacionado con el crecimiento de los polinomios.

Es fácil ver (y ya lo hicimos antes en clase) cómo crece un polinomio cuando $z \to \infty$.

Proposición 3. *Sea P un polinomio de grado n. Entonces existen $R > 0$ y $M > 0$ tales que $|P(z)| \le M|z|^n$ para todo z tal que $|z| \ge R$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la desigualdad triangular. Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$ y $a_n \neq 0$. Tomemos $R = 1$ y

$$C = \text{máx}\{|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}.$$

Si $|z| \ge R = 1$, es inmediato que $|z|^n \ge |z|^{n-1} \ge \ldots \ge |z| \ge 1$ y entonces

$$|P(z)| \le |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \ldots + |a_1||z| + |a_0| \le C|z|^n + C|z|^n + \ldots + C|z|^n + C|z|^n = (n+1)C|z|^n,$$

así que basta elegir $M = (n+1)C$. ■

Las estimaciones de Cauchy formuladas abajo son, esencialmente, un recíproco de la Proposición 3 pues nos dicen que una función entera no puede crecer de la misma forma que un polinomio sin ser un polinomio. Estas estimaciones son una consecuencia directa de la fórmula integral de Cauchy, aplicada a una función entera.

Teorema 3 (*Estimaciones de Cauchy*). *Si f es una función entera y existen números $a > 0$, $M > 0$, $R > 0$ tales que $|f(z)| \le M|z|^\alpha$ para todo z con $|z| \ge R > 0$, entonces f es un polinomio de grado, como mucho, $[\alpha]$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que f es entera, por el Teorema 2 sabemos que se puede desarrollar en serie de potencias centrada en el origen: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, absolutamente convergente en todo el plano. Además,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw$$

para cualquier $r > 0$. Por hipótesis, $|f(z)| \le M|z|^\alpha$ para todo z con $|z| \ge R > 0$. Elijamos $r > R$ y estimemos el valor de $|a_n|$. Teniendo en cuenta que en la circunferencia C_r se tiene $|w| = r > R$, podemos usar la hipótesis sobre el crecimiento de f para estimar el valor de $|f|$ en C_r, aplicando también la estimación para las integrales de línea (Proposición 6 de la anterior entrega de apuntes):

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{C_r} |f(w)||dw| \le \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^{n+1}} M r^\alpha \ell(C_r) = \frac{1}{2\pi}\frac{M r^\alpha}{r^{n+1}} 2\pi r = M r^{\alpha-n}.$$

Puesto que la misma estimación se obtiene para cualquier $r > R$, tomando el límite cuando $r \to +\infty$, vemos que $M r^{\alpha-n} \to 0$, para cada $n > \alpha$. Por tanto, $a_n = 0$ cuando $n > \alpha$ y la serie de Taylor de f se reduce al polinomio $f(z) = \sum_{n=0}^{[\alpha]} a_n z^n$, QED. ■

Ejercicio 8 *Si f es una función entera que satisface la desigualdad*

$$|f(z)| \leq \frac{3104 \cdot |z|^{4,7}}{|z|^2+3}, \quad |z| \geq 1, \tag{6}$$

demuestre que sólo puede ser o una constante, o una función lineal o un polinomio cuadrático.

SOLUCIÓN. Observando que

$$\frac{|z|^2}{|z|^2+3} \leq 1$$

para todo z, se sigue que

$$|f(z)| \leq \frac{3104 \cdot |z|^{4,7}}{|z|^2+3} \leq 3104|z|^{2,7}, \quad |z| \geq 1.$$

Por las estimaciones de Cauchy, concluimos que f es un polinomio de grado, como mucho, $[2,7] = 2$. Por tanto, f tiene la forma $f(z) = Az^2 + Bz + C$. ∎

El caso $\alpha = 0$ en las estimaciones de Cauchy nos da el siguiente corolario inmediato.

Corolario 1 *(Teorema de Liouville). Toda función entera y acotada es constante.*

Observación. De hecho, es suficiente pedir que esté acotada en un entorno del infinito: $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ ya que la función continua $|f|$ está acotada en el disco compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$.

Ejercicio 9 *Identifique todas las funciones enteras que cumplan*

$$|f(z)| < |e^z| \qquad \textit{para todo} \quad z \in \mathbb{C}.$$

SOLUCIÓN. Puesto que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, podemos definir la función $g(z) = f(z)/e^z$. Esta función es entera y satisface la condición $|g(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{C}$. Por el Teorema de Liouville, $g \equiv cte = \lambda$; es decir, $f(z) = \lambda e^z$. Además, por la desigualdad para g, se sigue que $|\lambda| < 1$.

Recíprocamente, para toda función de la forma $f(z) = \lambda e^z$ con $|\lambda| < 1$, tomando los módulos, se deduce que cumple la condición $|f(z)| < |e^z|$ para todo z. ∎

Ejercicio 10 *Halle todas las funciones enteras con parte real positiva.*

SOLUCIÓN. Si f es entera, por la regla de la cadena también lo es e^{-f}. Recordando que $|e^{-f}| = e^{-\mathrm{Re} f} < 1$ y teniendo en cuenta nuestra hipótesis que $\mathrm{Re} f > 0$, concluimos por el Teorema de Liouville que e^{-f} es constante. Además, puesto que la exponencial no se anula, dicha constante debe ser no nula, digamos $e^{-f} \equiv A \neq 0$. Entonces la función $-f$ sólo puede tomar uno de los valores de $\log A$ que son una cantidad infinita numerable; es decir, $-f(z) = \ln A + 2\pi m i$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego (escribiendo $k = -m \in \mathbb{Z}$)

$$f(\mathbb{C}) = \{f(z) : z \in \mathbb{C}\} \subset \{-\ln A + 2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

¿Cuántos valores distintos de entre estos puede tomar f? Puesto que f es holomorfa, es continua; $\mathbb{C}$ es conexo, luego $f(\mathbb{C})$ es conexo (por un teorema visto en Topología). Se sigue que $f(\mathbb{C})$ no puede contener más de un punto del conjunto $\{-\ln A + 2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\}$ y, por tanto, existe un $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = -\ln A + 2\pi k_0 i$ para todo z, así que f es una función constante. Además, debe tener parte real positiva: $\mathrm{Re} f = -\ln A > 0$ (y, por tanto, $A < 1$). Es decir, $f(z) = C + 2\pi k_0 i$, con $C > 0$ una constante y $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Recíprocamente, si $f(z) \equiv C + 2\pi k_0 i$, para ciertos números $k_0 \in \mathbb{Z}$ y $C > 0$, es obvio que $\mathrm{Re} f > 0$. ■

Acabaremos esta entrega de apuntes demostrando una consecuencia muy importante del teorema de Liouville: el Teorema fundamental del álgebra, que se suele atribuir a Gauss. Lo enunciamos en Conjuntos y Números pero allí no tuvimos suficientes herramientas para probarlo. El resultado admite varias demostraciones pero cualquier prueba requiere conocimientos de técnicas avanzadas. Algunas demostraciones usan conocimientos de Análisis y otras de Topología. De hecho, varios matemáticos ya conjeturaban este resultado en el siglo XVII y algunos los más célebres dieron demostraciones erróneas en el siglo XVIII. Una prueba dada por Gauss en 1799 contenía un fallo topológico no trivial, corregido unos 120 años después por Ostrowski. Conviene darse cuenta de que hasta el año 1900 no se habían definido ni siquiera los espacios métricos y mucho menos los topológicos. La primera demostración correcta fue encontrada en 1806 por Argand (cuyo nombre lleva en algunos textos el sistema de coordenadas complejas que usamos en esta asignatura); el mismo Gauss dio dos demostraciones más en la primera mitad del siglo XIX y hasta la fecha se han encontrado numerosas pruebas usando técnicas muy diferentes. La demostración posiblemente más sencilla conocida es la que encontró Charles Fefferman (uno de los ganadores de la Medalla Fields) mientras terminaba sus estudios de grado a finales de los años 1960. Su demostración usa sólo ciertas propiedades analíticas de los polinomios. Es especialmente llamativa la simplicidad de la demostración que presentamos abajo pero, obviamente, ésta se basa en ciertos conocimientos avanzados que hemos adquirido después de un par de meses de trabajo.

Teorema 4 *(Teorema fundamental del álgebra). Todo polinomio no constante tiene, al menos, una raíz compleja.*

DEMOSTRACIÓN. Sea P un polinomio no constante. Supongamos lo contrario: que no tenga ceros. Entonces podemos definir (en todo el plano) la función $f = 1/P$, que es entera por la regla del cociente.

Por un teorema demostrado en clase, $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$. Entonces, por la definición del límite infinito en el infinito, existe $R > 0$ tal que $|P(z)| > 1$ para todo z con $|z| > R$. Por tanto, $|f(z)| < 1$, para todo z con $|z| > R$. Puesto que f es entera, por el Teorema de Liouville (véase la observación después del teorema) se sigue que f es constante. Luego también P es constante, lo cual es contrario a nuestra hipótesis inicial.

Finalmente, concluimos que P tiene que tener, al menos, un cero en el plano. ■

Preparado por Dragan Vukotić, coordinador de la asignatura en 2019-20