Tarea 2 - MAT467

Alejandro Villazón G.

1. Considere la función de covarianza estacionaria

$$C_0(h;\alpha,\nu) = \sigma^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu} K_\nu\left(\frac{h}{\alpha}\right).$$

Sea $\gamma(h) = \sigma^2 - C_0(h;\alpha,\nu)$. Encuentre $\tau > 0$ tal que el límite

$$\lim_{h^+\to 0} \frac{\gamma(h)}{h^\tau},$$

exista y sea distinto de 0.

Solución: Si $\nu \notin \mathbb{Z}$ entonces

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

donde I_ν corresponde a la función Bessel modificada de primera especie y orden ν, dada por:

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= \frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left[1 + \frac{x^2}{2(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Considere la fórmula de reflexión de Euler, válida para $z \notin \mathbb{Z}$, $\Gamma(1-z)\Gamma(z)\sin(\pi z) = \pi$. Luego,

$$\begin{aligned} C_0(h;\alpha,\nu) &= \sigma^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu} \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(h/\alpha) - I_\nu(h/\alpha)}{\sin(\nu\pi)} \\ &= \sigma^2 \frac{2^{-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)\sin(\nu\pi)}\left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu} \frac{(h/\alpha)^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}\left[1 + \frac{(h/\alpha)^2}{2(2-2\nu)} + \frac{(h/\alpha)^4}{2\cdot 4(2-2\nu)(4-2\nu)} + \cdots\right] \\ &\quad - \sigma^2 \frac{2^{-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)\sin(\nu\pi)}\left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu} \frac{(h/\alpha)^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\left[1 + \frac{(h/\alpha)^2}{2(2\nu+2)} + \frac{(h/\alpha)^4}{2\cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)} + \cdots\right] \\ &= \sigma^2\left[1 + \frac{(h/\alpha)^2}{2(2-2\nu)} + \frac{(h/\alpha)^4}{2\cdot 4(2-2\nu)(4-2\nu)} + \cdots\right] \\ &\quad - \sigma^2 \frac{\Gamma(1-\nu)}{4^\nu\Gamma(\nu+1)}\left[\left(\frac{h}{\alpha}\right)^{2\nu} + \frac{(h/\alpha)^{2+2\nu}}{2(2\nu+2)} + \frac{(h/\alpha)^{4+2\nu}}{2\cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos que,

$$\begin{aligned}\lim_{h^+\to 0}\frac{\gamma(h)}{h^\tau} = \lim_{h^+\to 0}\sigma^2\Bigg(&-\left[\frac{h^{2-\tau}}{2(2-2\nu)\alpha^2}+\frac{h^{4-\tau}}{2\cdot 4(2-2\nu)(4-2\nu)\alpha^4}+\cdots\right]\\ &+\frac{\Gamma(1-\nu)}{4^\nu\Gamma(\nu+1)}\left[\frac{h^{2\nu-\tau}}{\alpha^{2\nu}}+\frac{h^{2+2\nu-\tau}}{2(2\nu+2)\alpha^{2+2\nu}}+\frac{h^{4+2\nu-\tau}}{2\cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)\alpha^{4+2\nu}}+\cdots\right]\Bigg)\end{aligned}$$

Luego, dados los exponentes, tenemos que el límite existe y es no nulo, si y solo si,

$$(2-\tau=0\wedge 2\nu-\tau\geq 0)\vee(2-\tau\geq 0\wedge 2\nu-\tau=0)$$

Note que este resultado se extiende a $\nu\in\mathbb{Z}$, mediante la definición de la función modificada de Bessel de segunda especie para orden entero utilizando el límite.
Por lo tanto, si $0<\nu\leq 1$ el límite existe y es no nulo si $\tau=2\nu$, en cambio, si $\nu\geq 1$ el límite existe y es no nulo si $\tau=2$.

2. Determine cual de las siguiente funciones es una covarianza para un proceso Gaussiano definido en $\mathbb{R}$:

   (a) $\varphi_1(h)=\exp\{-|h|\}\cos(h)$,

   (b) $\varphi_2(h)=\exp\{-|h|\}(1-|h|)$,

   (c) $\varphi_3(h)=(1-h^2)$.

   Solución:

   (a) Calculemos la transformada inversa de Fourier de φ_1, denotada por f_1.

$$\begin{aligned}f_1(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega h)e^{-|h|}\cos(h)\mathrm{d}h\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(\omega h)e^{-h}\cos(h)\mathrm{d}h\\ &=\frac{1}{\pi}\Bigg(\frac{-e^{-h}}{\omega^4+4}\{\sin(h)[2\omega\sin(\omega h)+(\omega^2-2)\cos(\omega h)]\\ &\qquad+\cos(h)[(\omega^2+2)\cos(\omega h)-\omega^3\sin(\omega h)]\}\Bigg)\Bigg|_0^\infty\\ &=\frac{1}{\pi}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\end{aligned}$$

   donde hemos utilizado los siguientes cálculos,

$$\lim_{h\to\infty}\left|\frac{-e^{-h}}{\omega^4+4}\sin(h)[2\omega\sin(\omega h)+(\omega^2-2)\cos(\omega h)]\right|\leq\frac{2|\omega|+|\omega^2-2|}{\omega^4+4}\lim_{h\to\infty}e^{-h}=0$$

$$\lim_{h\to\infty}\left|\frac{-e^{-h}}{\omega^4+4}\cos(h)[(\omega^2+2)\cos(\omega h)-\omega^3\sin(\omega h)]\right|\leq\frac{\omega^2+2+|\omega|^3}{\omega^4+4}\lim_{h\to\infty}e^{-h}=0$$

   Por lo tanto, dado que $f_3\geq 0$, por resultado visto en clases, concluimos que φ_3 es una función de covarianza válida en $\mathbb{R}$.

(b) Calculemos la transformada inversa de Fourier de φ_2, denotada por f_2.

$$\begin{aligned}
f_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega h) e^{-|h|}(1-|h|)\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos(\omega h) e^{-h}(1-h)\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{\pi}\left((1-h)\frac{e^{-h}(\omega\sin(\omega h)-\cos(\omega h))}{\omega^2+1}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{e^{-h}(-2\omega\sin(\omega h)-(\omega^2-1)\cos(\omega h))}{(\omega^2+1)^2}\right)\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{\omega^2-1}{(\omega^2+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{2\omega^2}{(\omega^2+1)^2}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado los siguientes cálculos,

$$\lim_{h\to\infty}\left|(1-h)\frac{e^{-h}(\omega\sin(\omega h)-\cos(\omega h))}{\omega^2+1}\right| \le \frac{|\omega|+1}{\omega^2+1}\lim_{h\to\infty}|1-h|e^{-h} = 0$$

$$\lim_{h\to\infty}\left|\frac{e^{-h}(-2\omega\sin(\omega h)-(\omega^2-1)\cos(\omega h))}{(\omega^2+1)^2}\right| \le \frac{2|\omega|+|\omega^2-1|}{(\omega^2+1)^2}\lim_{h\to\infty} e^{-h} = 0$$

Por lo tanto, dado que $f_2 \ge 0$, por resultado visto en clases, concluimos que φ_2 es una función de covarianza válida.

(c) Dada la definición de función semi-definida positiva, mediante un contraejemplo, mostraremos que la función φ_3 no es semi-definida positiva en $\mathbb{R}$, y por ende, no es una función de covarianza. Considere $n = 2$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$, luego la matriz A asociada a φ_3, viene dada por,

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_3(x_1-x_1) & \varphi_3(x_1-x_2) \\ \varphi_3(x_2-x_1) & \varphi_3(x_2-x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notamos que los subdeterminantes de A son, $|A|_1 = 1 > 0$, $|A|_2 = -8 < 0$, lo que prueba que A no es semi-definida positiva, y por ende, φ_3 tampoco.

3. Sea X un campo aleatorio Gaussiano con función de medias $\mathbb{E}[X(s)] = \mu(s) = 0$ y función de covarianzas $\text{cov}(X(s), X(s')) = C_0(s - s')$. Calcule la covarianza y el variograma del proceso $Y(s) = X^2(s)$. Describa si sus resultados cambian si $\mu(s) = \mu_0$.

Solución: De forma general, consideremos que $\mu(s) = \mu_0$. Luego, note que,

$$\mathbb{E}[Y(s)] = \mathbb{E}[X^2(s)] = \text{var}(X(s)) + \mathbb{E}[X(s)]^2 = C_0(0) + \mu_0^2$$

y por definición de covarianza,

$$\begin{aligned}\text{cov}(Y(s), Y(s')) &= \mathbb{E}[Y(s)Y(s')] - \mathbb{E}[Y(s)]\mathbb{E}[Y(s')] \\ &= \mathbb{E}[X^2(s)X^2(s')] - (C_0(0) + \mu_0^2)^2\end{aligned}$$

Para calcular $\mathbb{E}[X^2(s)X^2(s')]$ haremos uso del Teorema de Isserlis, que nos dice que si $Z = (Z_1, \dots, Z_4)^\top$ distribuye normal multivariado con media cero, entonces,

$$\mathbb{E}[Z_1Z_2Z_3Z_4] = \mathbb{E}[Z_1Z_2]\mathbb{E}[Z_3Z_4] + \mathbb{E}[Z_1Z_3]\mathbb{E}[Z_2Z_4] + \mathbb{E}[Z_1Z_4]\mathbb{E}[Z_2Z_3].$$

Recordando que los momentos centrales impares de una normal multivariada son cero, tenemos que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2(s)X^2(s')] &= \mathbb{E}[(X(s) - \mu_0 + \mu_0)^2(X(s') - \mu_0 + \mu_0)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X(s) - \mu_0)^2(X(s') - \mu_0)^2] \\ &\quad + \mathbb{E}[\mu_0^2(X(s) - \mu_0)^2 + \mu_0^2(X(s') - \mu_0)^2] \\ &\quad + \mathbb{E}[4\mu_0^2(X(s) - \mu_0)(X(s') - \mu_0)] + \mu_0^4\end{aligned}$$

Notando que $C_0(s - s') = \mathbb{E}[(X(s) - \mu_0)(X(s') - \mu_0)]$, obtenemos que,

$$\mathbb{E}[X^2(s)X^2(s')] = \mathbb{E}[(X(s) - \mu_0)^2(X(s') - \mu_0)^2] + 2\mu_0^2C_0(0) + 4\mu_0^2C_0(s - s') + \mu_0^4.$$

Considerando $Z_1 = Z_2 = X(s) - \mu_0$ y $Z_3 = Z_4 = X(s') - \mu_0$ tenemos que Z distribuye normal con media cero. Haciendo uso del teorema de Isserlis,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X(s) - \mu_0)^2(X(s') - \mu_0)^2] &= \mathbb{E}[(X(s) - \mu_0)^2]\mathbb{E}[(X(s') - \mu_0)^2] \\ &\quad + 2\mathbb{E}[(X(s) - \mu_0)(X(s') - \mu_0)]^2 \\ &= C_0(0)^2 + 2C_0(s - s')^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando lo anterior,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2(s)X^2(s')] &= C_0(0)^2 + 2C_0(s - s')^2 + 2\mu_0^2C_0(0) + 4\mu_0^2C_0(s - s') + \mu_0^4 \\ &= (C_0(0) + \mu_0^2)^2 + 2C_0(s - s')^2 + 4\mu_0^2C_0(s - s')\end{aligned}$$

Finalmente, al reemplazar en la expresión de la covarianza,

$$\begin{aligned}\text{cov}(Y(s), Y(s')) &= \mathbb{E}[X^2(s)X^2(s')] - (C_0(0) + \mu_0^2)^2 \\ &= 2C_0(s - s')^2 + 4\mu_0^2C_0(s - s').\end{aligned}$$

Por otro lado, si $h = s - s'$ el variograma viene dado por,

$$\gamma(h) = 2C_0(0)^2 + 4\mu_0^2C_0(0) - 2C_0(h)^2 + 4\mu_0^2C_0(h).$$

Hemos realizado los calculos de forma general, pero para responder a la pregunta basta reemplazar $\mu_0 = 0$. Es evidente que los resultados cambian considerablemente si $\mu_0 \neq 0$.