

Efficiency and Precision in Spatial Random Field Simulation: A Comparative Analysis of Cholesky Decomposition and Turning Bands Methods

FRANCINE PALACIOS¹, ALEJANDRO VILLAZÓN²

¹Departamento de Matemáticas, Universidad Técnica Federico Santa María (e-mail: francine.palacios@usm.cl)

²Departamento de Matemáticas, Universidad Técnica Federico Santa María (e-mail: alejandro.villazon@usm.cl)

Proyecto final para el curso de magíster MAT468: Simulación Estocástica, segundo semestre 2023 con el profesor Francisco Cuevas.

ABSTRACT This paper compares the efficiency of Cholesky decomposition and Turning Bands for simulating spatial random fields, essential in various disciplines. Implementing both methods on a regular square grid, we showcase their ability to capture isotropic covariance structures. The results demonstrate precise simulations by Cholesky and the remarkable accuracy of Turning Bands, even with approximation. Comparative analysis reveals Turning Bands' advantage in computational efficiency for large grids, making it an excellent choice for scenarios with a significant number of points. Future work should explore extension to irregular grids and optimize parameters for enhanced computational performance, paving the way for broader applications.

KEYWORDS Spatial random fields, simulation methods, Cholesky decomposition, Turning Bands, covariance models, computational efficiency, variogram analysis

I. INTRODUCCIÓN

EN la vanguardia de la investigación científica y la ingeniería, la simulación precisa de campos espaciales ha demostrado ser un recurso inestimable para modelar fenómenos complejos que abarcan desde la distribución de recursos naturales hasta la propagación de eventos físicos. A medida que nuestra comprensión de estos fenómenos ha evolucionado, la necesidad de simular campos espaciales más amplios se ha vuelto imperativa, desafiando los límites de los métodos tradicionales y exigiendo enfoques computacionales más avanzados.

Los campos espaciales bidimensionales, con su versatilidad de aplicaciones en diversas disciplinas, constituyen un terreno fértil para la investigación científica y la ingeniería. Desde la modelización de la dispersión de contaminantes atmosféricos hasta la planificación de redes de sensores ambientales, estos campos ofrecen un marco robusto para abordar fenómenos complejos en el mundo real. Nuestro enfoque se centra en la motivación de la eficiencia computacional en un escenario con una gran cantidad de puntos, reconociendo que la representación precisa de fenómenos cada vez más complejos requiere no solo riqueza y realismo, sino también un manejo eficiente de recursos computacionales.

El método de Turning Bands, basado en la densidad espectral, se presenta como un candidato prometedor en este contexto, siendo nuestra principal área de enfoque. La densidad espectral proporciona un marco matemático sólido para la

simulación de campos espaciales, y nuestra implementación eficiente en Python agrega un componente práctico significativo a nuestra investigación. Es importante destacar que, hemos implementado el método de Descomposición de Cholesky para comparar su eficiencia, nuestra atención se centra especialmente en demostrar la superioridad en términos de velocidad y precisión del método Turning Bands en el contexto de campos espaciales de alta dimensión. A lo largo de este artículo, exploraremos detalladamente la eficacia y velocidad de ambos métodos, destacando cómo la elección de Turning Bands puede ofrecer una solución eficiente sin comprometer la precisión en la simulación. Este análisis no solo contribuirá al desarrollo teórico, sino que también proporcionará una herramienta valiosa para investigadores y profesionales que buscan simular campos espaciales que requieren una gran cantidad de puntos de manera eficiente.

II. CAMPOS ALEATORIOS ESTACIONARIOS

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ representa un punto en el espacio de d dimensiones, \mathbb{R}^d , y $Z(\mathbf{x})$ es una variable aleatoria correspondiente al punto \mathbf{x} , entonces definimos una función aleatoria en \mathbb{R}^d como el conjunto $\{(\mathbf{x}, Z(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1}\}$. Si la dimensionalidad del espacio \mathbb{R}^d es $d = 2$ o $d = 3$, entonces la función aleatoria suele llamarse un campo aleatorio. Cuando $d = 1$, se llama un proceso de línea o proceso unidimensional. También se denomina a una función aleatoria un proceso estocástico.

La función media de un proceso estocástico se define como

$$m(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[Z(\mathbf{x})],$$

donde $\mathbb{E}[\cdot]$ es el operador esperanza. Si $\mathbb{E}[Z^2(\mathbf{x})]$ es finito para todo \mathbf{x} , podemos definir la función de covarianza como

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \mathbb{E}[\{Z(\mathbf{x}_1) - m(\mathbf{x}_1)\} \{Z(\mathbf{x}_2) - m(\mathbf{x}_2)\}] \\ &= \mathbb{E}[Z(\mathbf{x}_1) Z(\mathbf{x}_2)] - m(\mathbf{x}_1) m(\mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^d$.

Nos referiremos a ‘estacionalidad debil’ (en adelante se referirá a este como proceso estacionario de segundo orden) si se cumplen las siguientes condiciones:

- Media Constante:

$$\mathbb{E}[Z(\mathbf{x})] = \mu \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

- La función de covarianza depende solo de la diferencia de vectores $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ y no de cada vector particular $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$:

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = C(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = C(\mathbf{h})$$

donde $\mathbf{h} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

Por otro lado en el contexto de campos aleatorios, se considera que el campo aleatorio $Z(\mathbf{x})$ es intrínsecamente estacionario si satisface las siguientes condiciones:

- Media Constante:

$$\mathbb{E}[Z(\mathbf{x})] = \mu, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

- La varianza de la diferencia tiene la siguiente forma:

$$\text{var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}')] = 2\gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^d.$$

γ es una función, llamada variograma, que mide la variabilidad espacial entre puntos \mathbf{x} y \mathbf{x}' . La estacionariedad intrínseca implica que las propiedades estadísticas del campo aleatorio son invariantes ante traslaciones en el espacio, proporcionando una descripción significativa de la homogeneidad intrínseca del fenómeno modelado.

En el ámbito de los campos aleatorios, se define que la función de covarianza es isotrópica si la covarianza entre $Z(\mathbf{x})$ y $Z(\mathbf{x}')$ depende únicamente de la norma euclidiana de la diferencia entre los puntos \mathbf{x} y \mathbf{x}' , denotada como $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$. La definición equivalente se aplica al variograma isotrópico.

Una herramienta esencial para cuantificar la variabilidad espacial en una muestra de datos georreferenciados es el concepto de *variograma experimental*. Dada una muestra $Z(\mathbf{x}_1), \dots, Z(\mathbf{x}_n)$, el variograma experimental se define como:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2|N(\mathbf{h})|} \sum_{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in N(\mathbf{h})} [Z(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_j)]^2, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d,$$

donde $N(\mathbf{h})$ se define como el conjunto de pares de puntos $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ tales que la diferencia $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ es aproximadamente igual a \mathbf{h} .

$$N(\mathbf{h}) = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) : \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \approx \mathbf{h}\}$$

La cardinalidad $|N(\mathbf{h})|$ representa el número de pares contenidos en el conjunto $N(\mathbf{h})$.

Este variograma experimental proporciona una estimación de la semivarianza entre puntos separados por la distancia \mathbf{h} . La ponderación por el inverso del número de pares en $N(\mathbf{h})$ busca compensar la variabilidad en la densidad de muestreo, garantizando una evaluación equitativa de la variabilidad en diferentes distancias espaciales. Este enfoque se revela fundamental para comprender la estructura de dependencia espacial y orientar la modelación precisa de campos aleatorios.

III. MÉTODO DE CHOLESKY

Supongamos que el campo espacial consta de n puntos $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ ubicados en $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$, que sigue una distribución normal multivariada $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$, donde $\Sigma_{ij} = \text{Cov}(Y_i, Y_j)$.

El método de Cholesky se presenta como una técnica precisa para simular campos espaciales sin la necesidad de hacer supuestos en la matriz de covarianza. El proceso implica la generación de un vector normal multivariado estándar $\mathbf{Y}_0 \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ y el cálculo de la descomposición de Cholesky de la matriz de covarianza, $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$. Al explotar las propiedades de vectores aleatorios, obtenemos una simulación $\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Y}_0$ que sigue la distribución deseada.

Si bien nuestro interés principal se centra en evaluar la eficiencia del método de Turning Bands, hemos implementado el método de Cholesky como punto de referencia para realizar una comparación detallada. Como se detallará mas adelante, a diferencia de Turning Bands, que es un método aproximado, el método de Cholesky proporciona simulaciones exactas desde la distribución asumida. En las secciones subsiguientes, exploraremos la implementación de ambos métodos y detallaremos sus desempeños respectivos en la simulación de campos aleatorios, especialmente al lidiar con una gran cantidad de puntos espaciales.

IV. MÉTODO TURNING BANDS

Consideremos un campo aleatorio gaussiano estacionario de segundo orden en un espacio euclidiano con d dimensiones, representado por $Y = \{Y(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$. Este campo tiene una media cero, varianza unitaria y una función de covarianza $C(\mathbf{h})$, donde \mathbf{h} es un vector diferencia entre dos puntos de \mathbb{R}^d . Dado que esta función de covarianza es continua y absolutamente integrable, podemos expresarla como la transformada de Fourier de una función de densidad de probabilidad $f(\mathbf{u})$, donde \mathbf{u} está definido en \mathbb{R}^d y se llama la densidad espectral de $C(\mathbf{h})$ (según lo demostró Bochner en 1933):

$$C(\mathbf{h}) = \mathcal{F}[f](\mathbf{h}) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\mathbf{u}^\top \mathbf{h}) f(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

donde \mathcal{F} denota la transformada de Fourier. Esta propiedad de la función de covarianza nos permite simular Y mediante una función coseno de la forma:

$$Y(\mathbf{x}) = \sqrt{2} \cos(\mathbf{u}^\top \mathbf{h} + \phi), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

donde \mathbf{u} es un vector aleatorio en \mathbb{R}^d con densidad de probabilidad f y ϕ es una variable aleatoria independiente distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 2\pi]$. Aplicando el Teorema Central del Límite, obtenemos un campo aleatorio con distribuciones finitas aproximadamente gaussianas al sumar y escalar adecuadamente muchas de estas funciones coseno independientes:

$$Y(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{l=1}^L \cos(\mathbf{u}_l^\top \mathbf{x} + \phi_l), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (3)$$

donde L es un número grande, $\{\mathbf{u}_l : l = 1, \dots, L\}$ son vectores aleatorios mutuamente independientes con densidad de probabilidad f , y $\{\phi_l : l = 1, \dots, L\}$ son variables aleatorias mutuamente independientes distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, 2\pi]$, independientes de $\{\mathbf{u}_l : l = 1, \dots, L\}$.

Este método se presenta como un caso específico del algoritmo de turning bands (Matheron 1973) y permite simular campos aleatorios gaussianos estacionarios basándose en la densidad espectral de sus funciones de covarianza. Shinozuka (1971) y Shinozuka y Jan (1972) propusieron una variante de este método, simulando los vectores aleatorios $\{\mathbf{u}_l : l = 1, \dots, L\}$ de acuerdo con una distribución uniforme en lugar de la distribución espectral, para luego ponderar adecuadamente las ondas coseno. Sin embargo, este enfoque es aproximado a menos que la densidad espectral f tenga un soporte acotado. Emery et al. (2016) proponen reemplazar la distribución uniforme por otra, digamos g , con un soporte que contenga el de f , de la siguiente manera:

$$Y(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=1}^L \sqrt{\frac{2f(\mathbf{u}_l)}{g(\mathbf{u}_l)}} \cos(\mathbf{u}_l^\top \mathbf{x} + \phi_l), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (4)$$

donde $\{\mathbf{u}_l : l = 1, \dots, L\}$ son vectores aleatorios mutuamente independientes con densidad de probabilidad g y $\{\phi_l : l = 1, \dots, L\}$ son variables aleatorias mutuamente independientes distribuidas uniformemente en $[0, 2\pi]$, independientes de $\{\mathbf{u}_l : l = 1, \dots, L\}$. Se puede demostrar que el campo aleatorio Y así definido es estacionario de segundo orden, con media cero y función de covarianza $C(\mathbf{h})$, y si L es grande, sus distribuciones finitas son casi gaussianas (Emery et al. 2016).

En contraste con la Ecuación (3), la Ecuación (4) separa la elección de la distribución de los vectores de frecuencia $\{\mathbf{u}_l : l = 1, \dots, L\}$ (densidad g) de la elección de la función de covarianza del campo aleatorio objetivo (densidad f), lo que equivale a una estrategia de *importance sampling*.

V. IMPLEMENTACIÓN

Toda la implementación que se explica en esta sección se realizó desde cero en código Python, mediante la interfaz de Google Colaboratory.¹

¹<https://colab.research.google.com/drive/1GYwXgn4KvNcdA1FEDv-yoRFD6YqTS6nh>

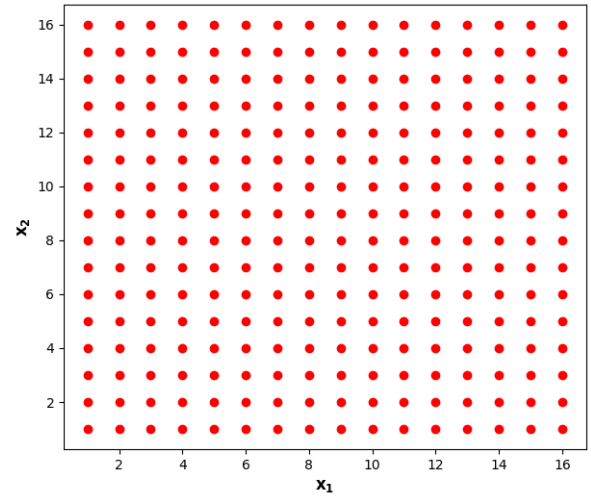


FIGURA 1. Ejemplo de una malla cuadrada regular de tamaño 16×16

A. ESTRUCTURA DE MALLA

En adelante, adoptaremos una dimensión espacial de $d = 2$ para las ubicaciones, aprovechando la versatilidad y facilidad de visualización que ofrecen los campos espaciales bidimensionales en diversas disciplinas.

Para la generación de simulaciones, se ha implementado una malla cuadrada regular, conformando un grid espacial homogéneo. Un ejemplo visual de esta malla se presenta en la Figura 1.

Aunque la metodología posee la flexibilidad para extenderse a ubicaciones distribuidas irregularmente, se optó deliberadamente por la utilización de una malla regular en este estudio. Esta elección se fundamenta en la robustez que proporciona esta prueba de concepto, simplificando la visualización y la implementación.

En la implementación, para gestionar la cantidad de n puntos en la malla cuadrada, se introduce una variable correspondiente a la raíz cuadrada de n , representando así la cantidad de puntos a lo largo de cada eje. Este enfoque asegura la formación de una malla regular cuadrada y proporciona un control sistemático sobre la densidad espacial de los puntos, facilitando la manipulación de la estructura de la malla para diferentes configuraciones experimentales.

B. CHOLESKY

La implementación se fundamentó en los principios descritos en la Sección III, donde se exploraron diversos modelos de covarianza isotrópicos. Entre ellos, se incluyeron los modelos detallados en la Tabla 1.

C. TURNING BANDS

La ejecución de la simulación se apoyó en los principios delineados en la Sección IV. En la implementación de esta simulación, se empleó la estrategia de *importance sampling*, eligiendo $g(\cdot)$ como la densidad de la normal bivariada estándar. Esta elección se basó en la simplicidad, propiedades

TABLA 1. Modelos de Covarianza

Modelo	Función de Covarianza
Matérn	$C(\mathbf{h}) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{\alpha} \right)^\nu K_\nu \left(\frac{\ \mathbf{h}\ }{\alpha} \right)$
Exponencial	$C(\mathbf{h}) = \exp \left(-\frac{\ \mathbf{h}\ }{\alpha} \right)$
Exponencial Potencia	$C(\mathbf{h}) = \exp \left(-\frac{\ \mathbf{h}\ ^\beta}{\alpha} \right)$
Esférico	$C(\mathbf{h}) = \left(1 + \frac{\ \mathbf{h}\ }{2\alpha} \right) \max \left(1 - \frac{\ \mathbf{h}\ }{\alpha}, 0 \right)^2$
Askey	$C(\mathbf{h}) = \max \left(1 - \frac{\ \mathbf{h}\ }{\alpha}, 0 \right)^\nu$

TABLA 2. Funciones de densidad

Modelo	Densidad Espectral
Matérn	$f(\omega) = \frac{\Gamma(\nu + d/2) \alpha^{2\nu}}{\Gamma(\nu) \pi^{d/2}} \frac{1}{(\alpha^2 + \ \omega\ ^2)^{\nu + d/2}}$
Telis	$f(\omega) = \frac{4(\ \omega\ /b)^2}{\pi b [1 + (\ \omega\ /b)^2]^2}$

y aplicabilidad de dicha densidad. Es relevante destacar que el dominio de la normal bivariada estándar abarca todo \mathbb{R}^2 , brindándonos la flexibilidad de seleccionar cualquier densidad espectral f sin la restricción de que su soporte esté contenido en el de $g(\cdot)$, es decir, $\text{supp}(f) \subseteq \text{supp}(g) = \mathbb{R}^2$.

Dentro de este método, se llevaron a cabo implementaciones de modelos de covarianza isotrópicos, detallados en la Tabla 2.

VI. SIMULACIÓN

Con el objetivo de evaluar la eficacia de los métodos de simulación implementados, se lleva a cabo una comparación entre el promedio de variogramas experimentales (ver Sección II), obtenidos de 100 simulaciones y el variograma teórico correspondiente. Esta evaluación se realiza en una malla que consta de 50×50 puntos regulares.

A. CHOLESKY

Con el propósito de evaluar la eficacia de la implementación del método de Cholesky, hemos seleccionado el modelo de covarianza Esférico con un parámetro $\alpha = 15$. La Figura 2(a) exhibe una realización del campo espacial generada utilizando este modelo de covarianza. Además, en la Figura 2(b) se presentan los resultados correspondientes a los vari-

ogramas derivados de las simulaciones.

B. TURNING BANDS

Con el fin de evaluar la efectividad de la implementación del método de Turning Bands, hemos seleccionado el modelo de covarianza Matérn con parámetro de suavidad $\nu = 3/2$ y rango práctico $\alpha = 2.5$. Asimismo, hemos fijado la cantidad de bandas rotantes en $L = 1000$. La Figura 3(a) exhibe una realización del campo espacial generada con este modelo de covarianza y los parámetros mencionados. Los resultados de las 100 simulaciones se presentan en la Figura 3(b).

C. CONTRASTE DE TIEMPOS

Con el objetivo de demostrar la eficiencia del método Turning Bands, hemos llevado a cabo una comparación de los tiempos de simulación en segundos entre los dos métodos presentados. En este análisis, variamos la cantidad de puntos n en la malla, explorando una grilla regular para \sqrt{n} desde 2 hasta 150, con incrementos de 15.

Para la comparación, fijamos el modelo de covarianza Matérn con parámetro de suavidad $\nu = 1.5$. La elección del rango práctico $\alpha = \sqrt{n}/20$ se realizó de manera dinámica en función de n para lograr simulaciones más realistas. Esta decisión se basa en la necesidad de ajustar α a la cantidad de puntos, ya que si se fija α y solo se aumenta el número de puntos, la simulación resultante contendría predominantemente ruido, perdiendo aplicabilidad en contextos reales. Es importante destacar que esta adaptación de α no tiene impacto en los tiempos de cómputo de cada método.

En la implementación del modelo de Turning Bands, se estableció la cantidad de bandas en $L = 1000$. Para cada valor de n , calculamos el promedio del tiempo de cómputo a partir de 25 simulaciones. Los resultados detallados se presentan de manera gráfica en la Figura 4. En la cual por motivos de visualización se utiliza la escala Logarítmica en ambos ejes.

VII. CONCLUSIÓN Y DISCUSIONES

La implementación de los métodos abordados en este trabajo ha demostrado su eficacia al realizar simulaciones de campos aleatorios. Los resultados obtenidos revelan que ambos métodos generan realizaciones consistentes con los modelos de covarianza deseados, como se evidencia en las Figuras 3(b) y 2(b), donde se ha comparado el variograma teórico con el promedio de 100 variogramas experimentales, revelando una notable concordancia. Es importante destacar que, a pesar de ser una aproximación, Turning Bands ofrece excelentes resultados en la simulación, y su precisión depende directamente de la cantidad de bandas rotantes utilizadas.

Los resultados presentados en la Figura 4 son alentadores. Para valores bajos de n , Cholesky supera a Turning Bands debido a la precisión inherente al método, determinada por la cantidad de bandas rotantes utilizadas. Sin embargo, a medida que n aumenta, Turning Bands exhibe una ventaja considerable. Se puede observar que el crecimiento de Cholesky es aproximadamente cúbico, mientras que Turning Bands crece de forma lineal. En conclusión, en situaciones que demandan

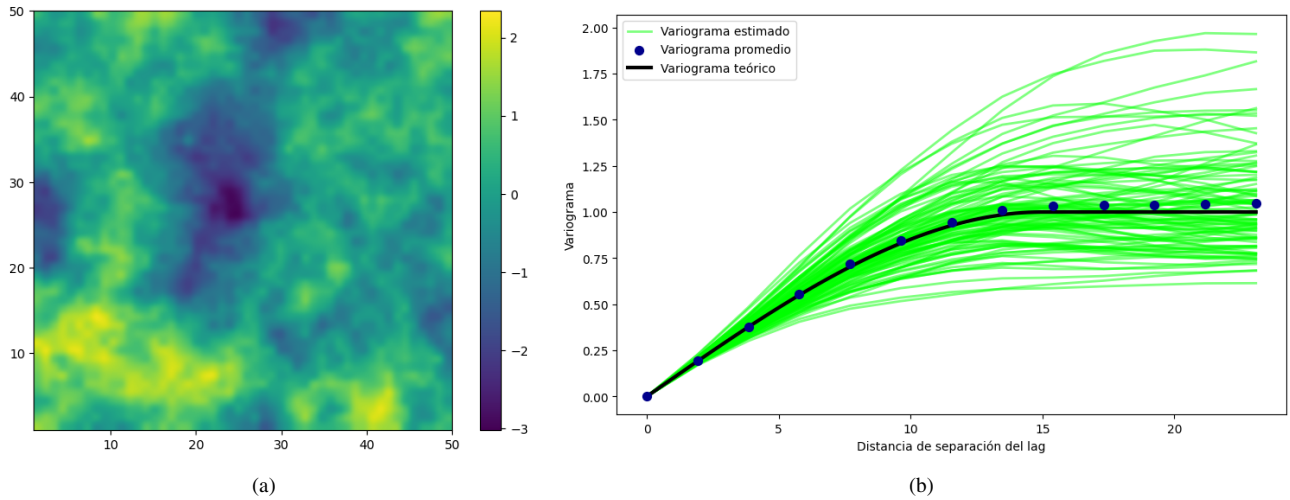


FIGURA 2. Método de Cholesky con modelo de covarianza esférico ($\alpha = 15$) (a) Realización del campo aleatorio. (b) Variogramas experimentales de 100 simulaciones en un campo aleatorio.

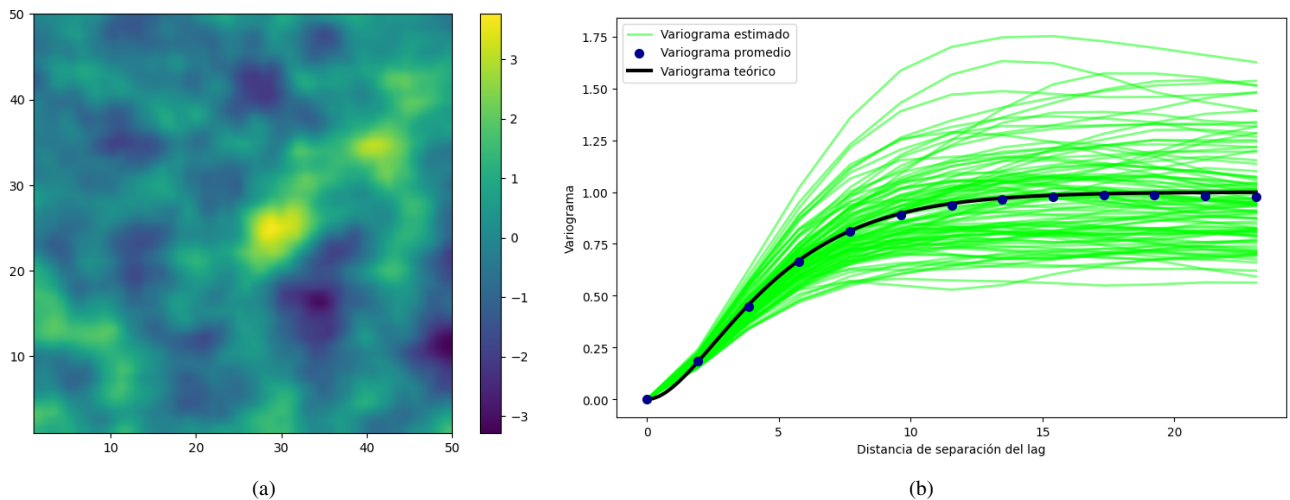


FIGURA 3. Método de Turning Bands con modelo de covarianza Matérn ($\alpha = 2.5$, $\nu = 3/2$) con $L = 1000$. (a) Realización del campo aleatorio (b) Variogramas experimentales de 100 simulaciones en un campo aleatorio

la simulación de un gran número de puntos, Turning Bands surge como una opción eficiente sin sacrificar la precisión de los resultados.

Como se detalló en la Sección V-A, la malla utilizada en nuestras implementaciones fue regular y cuadrada. Un trabajo futuro prometedor sería extender nuestras metodologías a mallas irregulares y/o no cuadradas, lo que permitiría una aplicación más amplia de los métodos presentados.

El enfoque futuro debería considerar modelos de covarianza más complejos, distintas configuraciones de ubicaciones espaciales y la incorporación de otros métodos de simulación para comparación. Los resultados obtenidos sugieren firmemente que el método de Turning Bands seguirá siendo eficiente en la simulación de campos espaciales.

Otro aspecto no profundizado en nuestro trabajo es el control de la cantidad de bandas L en el modelo de Turning Bands, que influye directamente en la precisión del método.

En nuestra implementación, optamos por utilizar 1000 bandas, una elección respaldada por la literatura como una aproximación sólida. No obstante, un área de investigación futura crucial debería abordar la determinación óptima de este parámetro, considerando el equilibrio entre precisión y eficiencia computacional.

A pesar de ser un método de aproximación destacado, Turning Bands tiene una limitación notable: la necesidad de conocer la función de densidad espectral, que no siempre está disponible de manera explícita o es fácil de obtener/calcular. Un enfoque interesante para futuras investigaciones podría centrarse en desarrollar métodos efectivos que aproximen esta función, permitiendo así la aplicación del método de Turning Bands bajo cualquier modelo de covarianza, ampliando significativamente su utilidad y aplicabilidad.

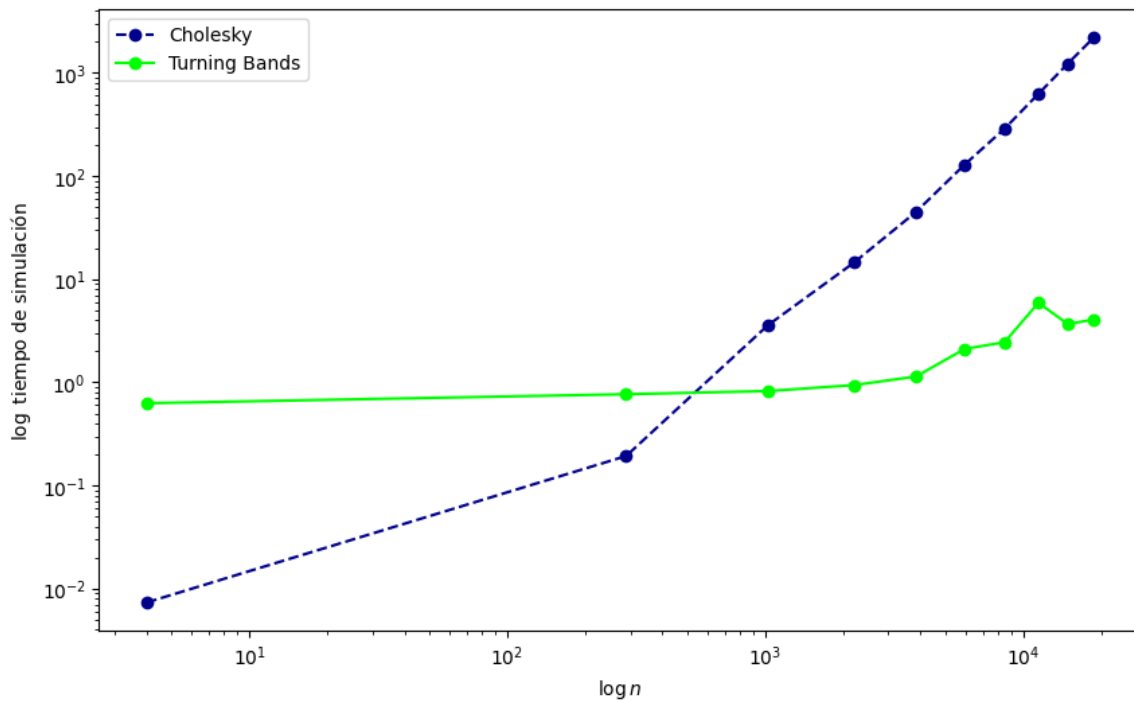


FIGURA 4. Tiempo promedio de simulación en escala logarítmica

AGRADECIMIENTOS

Los cálculos se realizaron utilizando el servicio gratuito de Google Colab (<https://colab.research.google.com>).

REFERENCES

- [1] Emery, X., & Arroyo, D. (2018). On a continuous spectral algorithm for simulating non-stationary Gaussian random fields. *Stochastic environmental research and risk assessment*, 32, 905-919.
- [2] Mantoglou, A., & Wilson, J. L. (1982). The turning bands method for simulation of random fields using line generation by a spectral method. *Water Resources Research*, 18(5), 1379-1394.
- [3] Chiles, J. P., & Delfiner, P. (2009). *Geostatistics: modeling spatial uncertainty* (Vol. 497). John Wiley & Sons.
- [4] Gaetan, C., & Guyon, X. (2010). *Spatial statistics and modeling* (Vol. 90). New York: Springer.
- [5] Hristopulos, D. T. (2020). *Random Fields for Spatial Data Modeling*. Springer Netherlands.
- [6] Stein, M. L. (2012). *Interpolation of spatial data: some theory for kriging*. Springer Science & Business Media.
- [7] van Lieshout, M. N. M. (2019). *Theory of Spatial Statistics: A Concise Introduction*. CRC Press.

...