MAT-277 “Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Parciales”

Ejercicios Tarea 1

Ejercicio 1

Considere el problema

$$-u''(x) = f(x) \quad x \in [-1,1], \qquad u(-1) = u(1) = 0,$$

donde $f(x) = \min\{0, -12x\}$.

1) Encuentre una solución analítica del problema

2) Considere una partición $\mathcal{T}_h$ compuesta por nodos N nodos internos de la forma $x_k = -1 + hk \quad (k = 1, \dots, N)$, con $h = \dfrac{1}{N+1}$.

   2.1) Implemente un código computacional en Python que permita implementar un esquema de elementos finitos para el problema descrito. Considere el espacio $S_0^1(\mathcal{T}_h)$.

   2.2) Obtenga la solución obtenida por dicho esquema de elementos finitos considerando 99 nodos internos. Compare la solución obtenida con la solución analítica obtenida en 1).

   2.3) Estudie el error de aproximación que se obtiene considerando $N = 2^n$, con $n \in \{1, \dots, 12\}$.

Ejercicio 2

Se define el operador proyección sobre $[0,1]$ como:

$$\mathcal{P}_{[0,1]} : w \longmapsto \mathcal{P}_{[0,1]}(w) = \min\{1, \max\{0, w\}\}.$$

Considere la función $f(x) = 2 - 4|x|$ sobre el intervalo $[-1,1]$.

1) Grafique $\mathcal{P}_{[a,b]}(f)$.

2) Considere una partición $\mathcal{T}_h$ compuesta por nodos N nodos internos de la forma $x_k = -1 + hk \quad (k = 1, \dots, N)$, con $h = \dfrac{1}{N+1}$. Denotemos por $\mathcal{Q}_h$ el espacio de funciones constantes a trozos.

   Mediante un código computacional, determine $\Pi\left(\mathcal{P}_{[a,b]}(f)\right)$ utilizando 19 nodos internos. Compare la solución obtenida con $\mathcal{P}_{[a,b]}(f)$.

3) Determine $\mathcal{P}_{[a,b]}\left(\Pi(f)\right)$ usando 19 notos internos. Compare la solución obtenida con $\mathcal{P}_{[a,b]}(f)$.

4) ¿Son iguales los resultados obtenidos en 2) y 3)? De no ser así, indique cuál de estas dos considera que aproxima mejor a $\mathcal{P}_{[a,b]}(f)$.

Ejercicio 3

Sea $\Omega = (0,1)$ y $\mathcal{T} = \{K_1, \ldots, K_N\}$ una partición con $K_j = (x_j, x_{j+1})$, $x_j = (j-1)h$, $h = \frac{1}{N}$. Se define el espacio de elementos finitos de orden 2 por

$$\mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{K_j} \in \mathbb{P}_2, \text{ y } u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

Sea $\{\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ una base de funciones techo de $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$. Entonces, una base de $\mathcal{S}_0^2(\mathcal{T})$ es

$$\{\varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}, \psi_1, \ldots, \psi_N\},$$

donde

$$\psi_j(x) = \begin{cases} (x - x_j)(x_{j+1} - x) & x \in K_j, \\ 0 & x \notin K_j. \end{cases}$$

Considere la formulación variacional del problema

$$-u''(x) = 1 \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

e implemente un código computacional en Python para calcular la aproximación de elementos finitos $u_h \in \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T})$. Estudie el error de aproximación que se obtiene considerando $N = 2^n$, con $n \in \{1, \ldots, 12\}$. ¿Que orden de convergencia puede observar?