José Alejandro Zitzumbo Montaño
Licenciatura en ingeniería Física, UG
Universidad de Guanajuato

29 de febrero del 2024

EXPO — Elipses
Comenzamos usando la formula de diferencias finitas centradas en la primera derivada.

Para esto sabemos que la definicion de dericada es:

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Comenzamos usando la aproximación derecha de nuestra derivada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Para obtener una aproximación de la segunda derivada aplicamos la misma aproximación. Esto ya que no importa la derivada, su definicion sera la misma que la primer derivada con la diferencia que la funcion tendra un orden menor $f^{n-1}(x_i)$

$$f^n(x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{n-1}(x_{i+1}) - f^{n-1}(x_i)}{h}$$

$$f^{''}(x_i) = \frac{f^{'}(x_{i+1}) - f^{'}(x_i)}{h}$$

Sustituimos las funciones aplicando a x_i sus respectivos valores.

$$f^{''}(x_i) = \frac{\frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{h} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}{h}$$

$$f^{''}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))}{h^2}$$

$$f^{''}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i))}{h^2}$$

Usamos la definición de $f^n(x_i)$ evaluada en el 3er orden y despejando nuestra funcion de segundo orden.

$$f^{'''}(x_i) = \frac{f^{''}(x_{i+1}) - f^{''}(x_i)}{h}$$

$$f^{'''}(x_i) = \frac{\frac{f(x_{i+3}) - 2f(x_{i+2}) + f(x_{i+1}))}{h^2} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i))}{h^2}}{h}$$

$$f^{'''}(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

Por ultimo obtenemos la cuarta derivada despejando en esta la tercer derivada, pero primero su formula.

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f^{'''}(x_{i+1}) - f^{'''}(x_i)}{h}$$

Entonces tenemos la siguiente expersion.

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{\frac{f(x_{i+4}) - 3f(x_{i+3}) + 3f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{h^3} - \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}}{h}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

Con esto llegamos a la cuarta derivada.

Submitted by José Alejandro Zitzumbo Montaño on 29 de febrero del 2024.