

Trabajo Final: Péndulo Invertido con Volante de Inercia

Alesandria, Alejo S.(Autor)

Departamento de Ingeniería Electrónica, UTN Facultad Regional San Francisco, Córdoba, Argentina
alealesandria@gmail.com

Resumen - En el siguiente trabajo se busca desarrollar el estudio de un sistema de péndulo invertido con volante de inercia para diseñar e implementar sobre el mismo, un controlador proporcional, integral y derivativo (PID) que resulte óptimo para lograr una correcta respuesta transitoria y correcto funcionamiento. Además se implementará un control mediante realimentación de estados, como un LQR.

Palabras clave - Función de transferencia; identificación; estabilidad; análisis de respuesta; control PID, LQR.

1 INTRODUCCIÓN

A lo largo del presente informe se desarrollarán los conceptos y pasos necesarios para la implementación de un sistema de control utilizando tanto técnicas clásicas, como la teoría de control PID, como enfoques más modernos basados en espacio de estados. Partiendo de un modelo físico preestablecido, se desarrollará su modelo matemático utilizando las leyes de Kirchhoff, Newton, mecánica lagrangiana y la transformada de Laplace, lo que permitirá obtener tanto la función de transferencia como la representación en espacio de estados. Este análisis será complementado con técnicas de identificación de sistemas en MATLAB, utilizando una señal de prueba PRBS para obtener un modelo matemático que capture fielmente el comportamiento del sistema real.

Una vez obtenido el modelo, se procederá a su análisis en función de la ubicación de polos, respuesta transitoria, estabilidad y análisis en frecuencia, para evaluar tanto la respuesta en el dominio temporal como en el dominio frecuencial. Se diseñará un controlador PID ajustado para mejorar la estabilidad y tiempos de respuesta del sistema, complementado con una implementación de control moderno mediante técnicas como el LQR y un observador de estados, que permitirá una estimación precisa de variables no medibles. Con este enfoque mixto, se buscará optimizar el desempeño del sistema, garantizando un control robusto y eficiente tanto en su formulación clásica como moderna.

1.1 Conceptos preliminares

Sistemas invariantes en el tiempo: Son aquellos sistemas cuyas propiedades o características intrínsecas permanecen constantes a lo largo del tiempo, es decir, su derivada primera es cero. Estas propiedades intrínsecas son inherentes al sistema que se desea controlar y son siempre internas; cualquier variación externa se considera una perturbación.

Sistema lineal: Un sistema lineal puede ser invariante en el tiempo, aunque no necesariamente. Para que un sistema sea considerado lineal, debe cumplir con los principios de superposición, aditividad y homogeneidad. Verificar la aditividad es suficiente para determinar si el sistema es lineal.

La función de transferencia, en dominio de Laplace, es el cociente entre la salida y la entrada con condiciones iniciales iguales a 0.

Un sistema no lineal puede ser acotado para cierto rango de operación, dentro del mismo se lo puede considerar como lineal y controlar, aunque teniendo cierto error.

Cuando un sistema presenta oscilaciones no controladas o la salida crece indefinidamente, se lo llama sistema inestable; ya que la salida del mismo no tiende a 0 cuando el $t \rightarrow \infty$.

Variable controlada: Es la entidad o condición que se mide y controla. Para el péndulo la posición angular del mismo.

Variable manipulada: Es la cantidad o condición que modifica el controlador. Para el PIVI es el duty del PWM.

Control: Significa medir la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada para corregir la desviación del valor medio respecto al deseado.

El control de un sistema se basa en la medición de la variable manipulada para mantener la variable controlada en su punto de ajuste o valor deseado. Uno de los métodos de control más reconocidos es el controlador PID, denominado así por sus componentes proporcional, integral y derivativo.

Planta: Cualquier objeto físico que deba controlarse. Ejemplo: un motor.

Perturbaciones: Es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema.

1.2 Objetivo:

- Desarrollar un sistema de control en espacio de estados mediante realimentación de estados. Comprender las bases teóricas, realizando un contraste con los resultados y mediciones obtenidas de la implementación física.

2 DESARROLLO

2.1 Características generales del sistema

El sistema de Péndulo Invertido con Volante de Inercia (PIVI) es inherentemente estable cuando el péndulo se encuentra en su posición inferior. Sin embargo, al operar con el péndulo en su posición vertical, el sistema se vuelve inestable debido a que su centro de masa se sitúa por encima del punto de rotación, lo que requiere un control activo para mantener el equilibrio.

El PIVI consiste en una barra fijada en uno de sus extremos, mientras que en el otro extremo se encuentra un motor que lleva un volante de inercia acoplado a su eje. La función del volante de inercia es almacenar energía cinética en forma de rotación. La velocidad del motor se regula mediante PWM (modulación por ancho de pulso), lo que permite ajustar la tensión según la posición del péndulo. Este ajuste genera un momento de fuerza en dirección opuesta al movimiento del péndulo, contrarrestando su desplazamiento y logrando su estabilización. Para controlar el sistema, además de gestionar el motor, es fundamental conocer la posición del péndulo. En este caso, se empleará un encoder para medir con precisión la posición angular del péndulo.

2.1.1. ¿Por qué se eligió este prototipo?

El prototipo se eligió debido a que presenta dos situaciones diferentes de control, el estado natural y el estado de equilibrio inestable; en el primero de los dos el sistema es estable por naturaleza, en cambio en el otro estado no es estable. En ambos casos se puede realizar un método de control para generar una respuesta deseada del péndulo, siendo necesario la identificación del sistema en la parte inferior, para luego determinar los parámetros para el estado en la parte superior. [1]

2.2 Diagrama de bloques del sistema

El diagrama de bloque de la Figura 1 representa el sistema PIVI, donde $r(t)$ representa el setpoint en grados, a esta señal se le resta la realimentación del encoder magnético AS5600, que representa el valor de la posición angular actual del péndulo.

Luego de realizar la diferencia entre las señales, se la introduce al controlador PID, implementado en un microcontrolador ESP32-s3, el cual se encargará de ajustar el duty del motor dependiendo de cuán grande es la señal de error. Una vez aplicado el control se lo introduce al péndulo para mantenerlo estable entorno al setpoint.

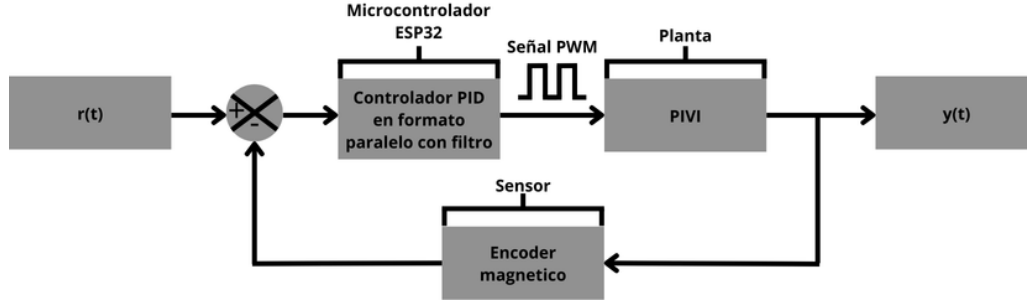


Figura 1: Diagrama de bloque del PIVI.

Modelado matemático del sistema

Para el modelado del péndulo, se parte del circuito eléctrico equivalente de un motor de corriente directa, presentado en la Figura 2.

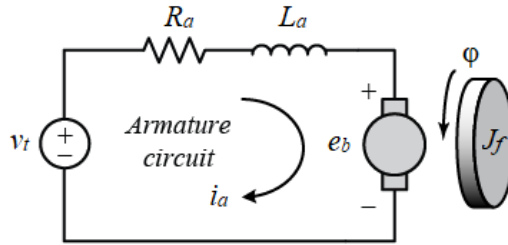


Figura 2: Circuito eléctrico equivalente de un motor de DC [2].

- v_t = Señal de control.
- R_a = Resistencia de Armadura.
- L_a = Inductancia de Armadura.
- e_b = fuerza contra electromotriz.
- φ = ángulo del rotor.
- J_f = momento de inercia del Volante

Aplicando ley de Kirchhoff de Tensiones se obtiene la Ec. (1). Ver [3].

$$v_t = R_a * i_a + e_b \quad (1)$$

Reescribiendo la fuerza contra electromotriz como $e_b = K * \phi * \omega_m = K * \phi * \dot{\varphi}$, y donde $K_b = K * \phi$.

$$v_t = R_a * i_a + K_b * \dot{\varphi} \quad (2)$$

De la Figura 2 se determina la ecuación correspondiente al par inducido desarrollado por la máquina.

$$\begin{aligned} \tau_m &= K * \phi * i_a \\ &= K_m * i_a \\ i_a &= \frac{\tau_m}{K_m} \end{aligned} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2), queda determinada la ecuación correspondiente al circuito equivalente del motor cd.

$$v_t = R_a * \frac{\tau_m}{K_m} + K_b * \dot{\varphi} \quad (4)$$

De acuerdo a lo establecido por la segunda Ley de Newton para la rotación, el par inducido se puede expresar de la siguiente forma.

$$\tau_m = J_f * \ddot{\varphi}$$

Y reemplazando en la Ec. (4) y reordenando la misma, se obtiene la Ec. (5).

$$\ddot{\varphi} + \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f} * \dot{\varphi} = v_t * \frac{K_m}{R_a * J_f} \quad (5)$$

Una vez que se obtuvo la ecuación del circuito equivalente del motor, expresada en términos de φ (posición angular del volante de inercia) y v_t (señal de control), se puede realizar la transformada de Laplace.

$$\begin{aligned} s^2 * \Phi(s) + \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f} * s * \Phi(s) &= V_t(s) * \frac{K_m}{R_a * J_f} \\ \frac{\Phi(s)}{V_t(s)} &= \frac{\frac{K_m}{R_a * J_f}}{s^2 + \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f} * s} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{Reemplazando } K_{bm} = \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f}$$

$$\frac{\Phi(s)}{V_t(s)} = \frac{\frac{K_m}{R_a * J_f}}{s^2 + K_{bm} * s} \quad (7)$$

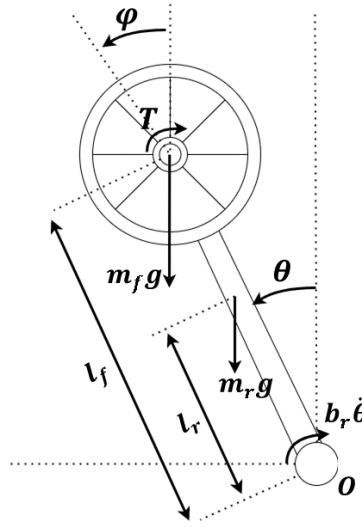


Figura 3: Modelo físico del Péndulo [4]

Partiendo de la Figura 3 se modela el péndulo a través de energías, utilizando la mecánica lagrangiana, reforma de la mecánica clásica. Partiendo del supuesto de $L = K - U$; donde L representa el lagrangiano, K la energía cinética y U la energía potencial, se plantean las ecuaciones de energía que representan el modelo del péndulo.

$$K = \frac{1}{2} * J * \dot{\theta}^2 + b_r * \dot{\theta} \quad (8)$$

$$U = m_f * l_f * g * \cos \theta + m_r * l_r * g * \cos \theta \quad (9)$$

Reemplazando (8) y (9) en el lagrangiano, queda expresado según la Ec. (10) .

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} * J * \dot{\theta}^2 + b_r * \dot{\theta} - m_f * l_f * g * \cos \theta - m_r * l_r * g * \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} * J * \dot{\theta}^2 + b_r * \dot{\theta} - g * \cos \theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) \end{aligned} \quad (10)$$

Tras la obtención del lagrangiano, se debe aplicar la ecuación de Euler-Lagrange, Ec. (11).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (11)$$

Aplicando las derivadas correspondientes al lagrangiano, la ecuación que modeliza al péndulo a través de energías se presenta en la Ec. (12). [5]

$$\ddot{\theta} * J + b_r * \dot{\theta} - g * \sin \theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) = -\tau_m \quad (12)$$

Al considerar el péndulo en su posición natural (hacia abajo), el ángulo se reemplaza por $180 + \theta \Rightarrow \sin 180 + \theta = -\sin \theta$. Además se considera variaciones de θ tal que $\theta \ll 1$ por ende $-\sin \theta \approx -\theta$. Con estas consideraciones se reescribe la Ec. (12).

$$\ddot{\theta} * J + b_r * \dot{\theta} + g * \theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) = -J_f * \ddot{\varphi} \quad (13)$$

Aplicando transformada de Laplace a la Ec. (13), y reemplazando $ML = (m_f * l_f + m_r * l_r)$.

$$J * s^2 * \Theta(s) + b_r * s * \Theta(s) + g * ML * \Theta(s) = -J_f * s^2 * \Phi(s) \quad (14)$$

Despejando $\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)}$.

$$\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)} = \frac{-J_f * s^2}{J * s^2 + b_r * s + g * ML} \quad (15)$$

Uniendo las ecuaciones (7) y (15) se puede obtener el modelo matemático que representa al PIVI en su posición natural. $\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)} \frac{\Phi(s)}{V_t(s)} = \frac{\Theta(s)}{V_t(s)}$

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(s)}{V_t(s)} &= \frac{-J_f * s^2}{J * s^2 + b_r * s + g * ML} * \frac{\frac{K_m}{R_a * J_f}}{s^2 + K_{bm} * s} \\ &= \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s^2}{J * s^4 + J * K_{bm} * s^3 + b_r * K_{bm} * s^2 + g * ML * s^2 + g * ML * K_{bm} * s} \\ &= \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s^2}{J * s^4 + (J * K_{bm} + b_r) * s^3 + (b_r * K_{bm} + g * ML) * s^2 + g * ML * K_{bm} * s} \\ &= \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s^2}{s^4 + (K_{bm} + \frac{b_r}{J}) * s^3 + \frac{(b_r * K_{bm} + g * ML)}{J} * s^2 + \frac{g * ML * K_{bm}}{J} * s} \\ &= \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s}{s^3 + (K_{bm} + \frac{b_r}{J}) * s^2 + \frac{(b_r * K_{bm} + g * ML)}{J} * s + \frac{g * ML * K_{bm}}{J}} \end{aligned}$$

Dando como resultado la Ec. (16).

$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)_{natural}} = \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s}{s^3 + (K_{bm} + \frac{b_r}{J}) * s^2 + \frac{(b_r * K_{bm} + g * ML)}{J} * s + \frac{g * ML * K_{bm}}{J}} \quad (16)$$

Una vez obtenido el modelo del péndulo en la posición natural, se procede a obtener el modelo matemático para el péndulo en la posición de equilibrio inestable. La diferencia se encuentra en la Ec. (13), donde la nueva expresión queda como:

$$\ddot{\theta} * J + b_r * \dot{\theta} - g * \theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) = -J_f * \ddot{\varphi}$$

Esto hace que el modelo quede determinado por la Ec. (17)

$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)_{invertido}} = \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s}{s^3 + (K_{bm} + \frac{b_r}{J}) * s^2 + \frac{(b_r * K_{bm} - g * ML)}{J} * s - \frac{g * ML * K_{bm}}{J}} \quad (17)$$

2.3 Espacio de estados

Un sistema moderno complejo posee muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí, este tipo de sistemas complejos suele ser conveniente analizarlo mediante el uso de Espacio de Estados.

Es una técnica de control moderna que se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en término de n-ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial vectorial de primer orden.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (18)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (19)$$

La Ec. (18) representa la derivada temporal del vector de estados y es la encargada de determinar las dinámicas del sistema, y la Ec. (19) es la ecuación de salida, que representa la respuesta que tiene el sistema.

Los coeficientes de cada término de las Ecuaciones (18) y (19) representan matrices, donde A corresponde a la matriz de estados, B es la matriz de entrada, C matriz de salida y D es la matriz de transmisión directa. En la Figura 4 se muestra la representación de un espacio de estados. Por último $x(t)$ representa el vector de estados y $u(t)$ la señal de control.

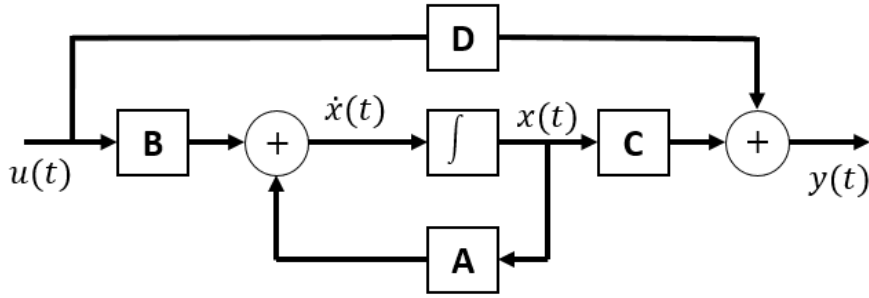


Figura 4: Representación de sistema en espacio de estados.

En su forma discreta queda determinado por las Ecuaciones 20 y 21

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (20)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (21)$$

2.4 Identificación del sistema

La identificación de un sistema consiste en excitar al mismo con una señal para obtener su dinámica y comportamiento, para así determinar una función de transferencia y además poder deducir los parámetros, en este caso, del motor y los momentos de inercia y energía del sistema.

Para llevar a cabo este proceso se decide utilizar una secuencia PRBS (pseudo-random binary sequence), Figura 5, la cual es una señal periódica y determinista. Para el caso del péndulo se adoptó un tiempo de muestreo de $T_s = 0,01$ s y 4200 muestras.

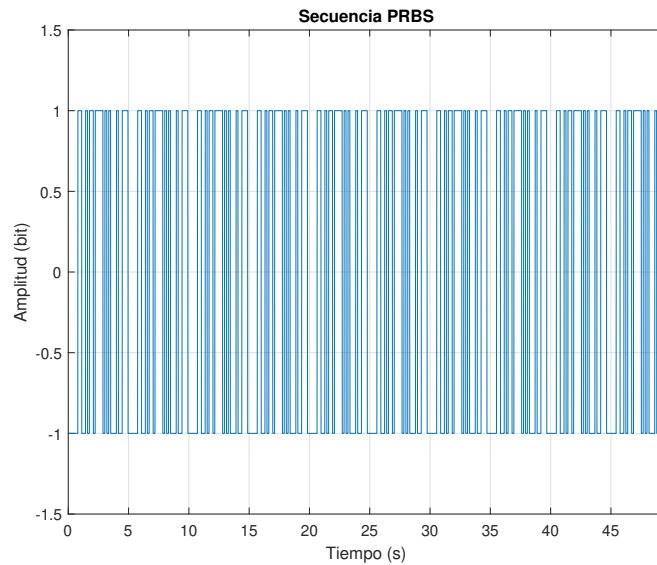


Figura 5: Gráfica de secuencia PRBS.

Como el sistema del PIVI presenta dos estados el único en el que se puede realizar la identificación es en la posición natural, ya que en este punto es un sistema LTI; y luego se identifica el modelo en equilibrio inestable partiendo del modelo obtenido en el estado natural.

Para poder introducir la secuencia en el sistema y poder excitar al motor correctamente, se asocia el signo con el sentido de giro, siendo -1 asociado a un giro horario, y 1 a un sentido antihorario. Además, como la variable manipulada del sistema es la tensión del motor por medio de PWM, se opta por utilizar 1638 bits de duty para la identificación, esto es el rango útil de 2457 a 4095 (60 % a 100 %) mapeados de 0 a 1638 bits. Los datos del encoder son almacenados en un archivo .csv, que luego se carga en MatLab para así realizar el proceso de identificación, Figura 6.

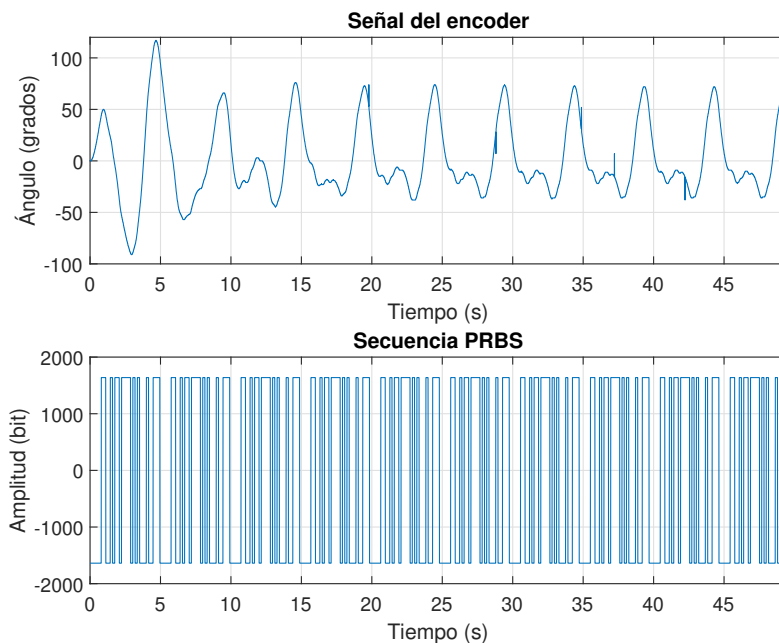


Figura 6: Identificación realizada con el péndulo en posición natural.

Una vez recopilado todos los datos necesarios, secuencia PRBS y posición angular del péndulo; se procede a utilizar la herramienta de MatLab *SystemIdentification*, en la cual mediante datos de experimentación logra estimar una función de transferencia de la planta, y luego valida la misma con datos de validación. Para el péndulo se optó por utilizar el 70 % de los datos recopilados para estimar el modelo, y el 30 % para validar el modelo obtenido.

Partiendo de la Ec. (16), modelo matemático del sistema, se determina el número de polos y ceros necesarios para realizar la identificación mediante el uso de la herramienta de MatLab. Se colocan orden 3 para estimar el espacio de estados en forma canónica observable, lo que arroja una estimación de 78,22 %, y la validación del modelo se presenta en la Figura 7.

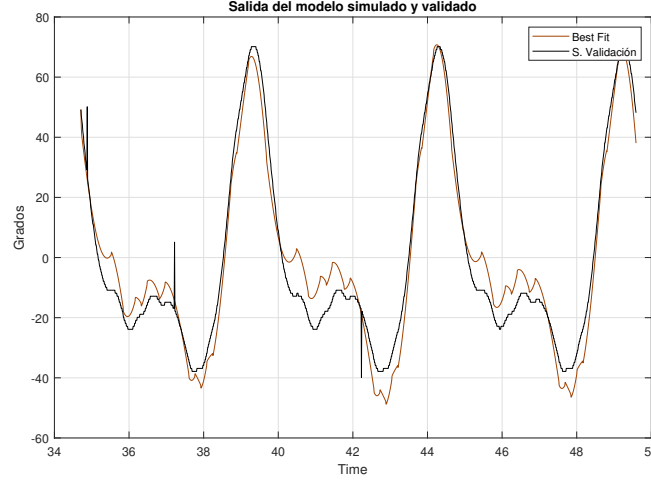


Figura 7: Validación del modelo realizada con *SystemIdentification*.

El espacio de estado identificado del modelo del péndulo invertido con volante de inercia se presenta en la Ec. (22)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1112 & -99,35 & -295,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1053 \\ -35,72 \\ 10520 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

En la Ec. 23 se presenta el espacio de estados de la Ec. 22 en tiempo discreto.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(k) \\ \dot{x}_2(k) \\ \dot{x}_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9999 & 0,009991 & 0,00002296 \\ -0,02553 & 0,9976 & 0,0032 \\ -3,559 & -0,3435 & 0,05097 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,000228 \\ -0,1154 \\ 33,75 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (23)$$

2.5 Controlabilidad y observabilidad

Se dice que un sistema es de estado controlable si en $t = t_0$, es posible construir una señal de control sin restricción que transfiera el estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

$$x(0) = - \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Todo sistema posee controlabilidad completa siempre que los vectores $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ sean linealmente indepen-

dientes, o la matriz de la Ec. 25 de tamaño $n \times n$, tenga un rango de n . [6]

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (25)$$

La controlabilidad del modelo obtenido, Ec. 22, se determina a través de la Ec. 25

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \times 10^3 \\ 0 & 10 \times 10^3 & -3,11 \times 10^6 \\ 10 \times 10^3 & -3,11 \times 10^6 & 9,1879 \times 10^8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\mathcal{C}) = 3$$

La matriz \mathcal{C} tiene un tamaño de 3×3 y un rango de 3, lo que hace que el sistema sea controlable.¹

Un sistema también puede cumplir con la condición de ser completamente observable, esto es, si un estado $x(t_0)$ es posible determinarlo a partir de observar la salida $y(t)$ en un intervalo finito de tiempo, $t_0 \leq t \leq t_1$. Esto determina que si todas las transiciones de estado afectan a todos los elementos del vector de salida el sistema es completamente observable. Para el caso del péndulo es realmente necesario conocer si el sistema es observable, ya que el único estado conocido es la posición angular del mismo, haciendo que el resto de estados deban estimarse.

La observabilidad completa está dada por la Ec. 26, donde el sistema es completamente observable si y solo si la matriz $n \times nm$ es de rango n , o tiene n vectores columna linealmente independientes. [6]

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Se comprueba observabilidad del modelo, Ec. 22, a través de la Ec. 26

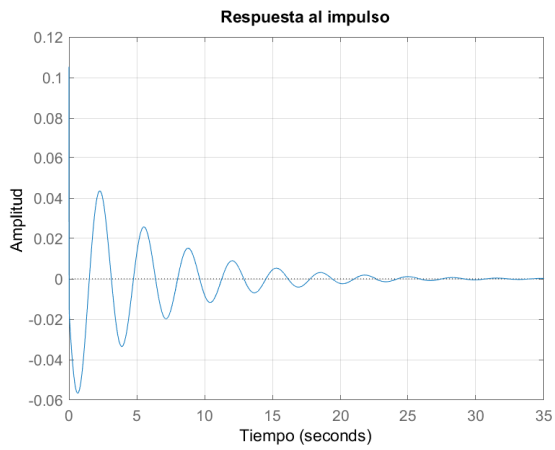
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\mathcal{O}) = 3$$

Por ende, siendo la matriz de 3×3 y de rango 3, se determina que el modelo es completamente observable.

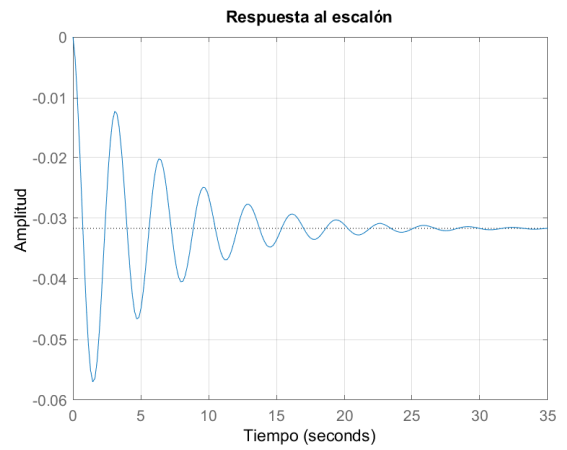
2.6 Análisis de estabilidad y lugar geométrico de raíces de la planta

En las Figuras 8 y 9 se presentan las respuestas al escalón e impulso, tanto del modelo matemático como del modelo estimado. Debido a los resultados, se puede concluir que el sistema es estable por naturaleza, en la posición natural del mismo; ya que $\text{Amplitud} \rightarrow 0$ mientras $t \rightarrow \infty$. Si bien en la Figura 8b, no tiende a cero, esto se debe a que presenta un cero en el semiplano derecho, haciendo que el sistema tenga un comportamiento de fase no mínima, Figura 10.

¹La matriz de controlabilidad como el rango de la misma se obtuvieron a través de MatLab.

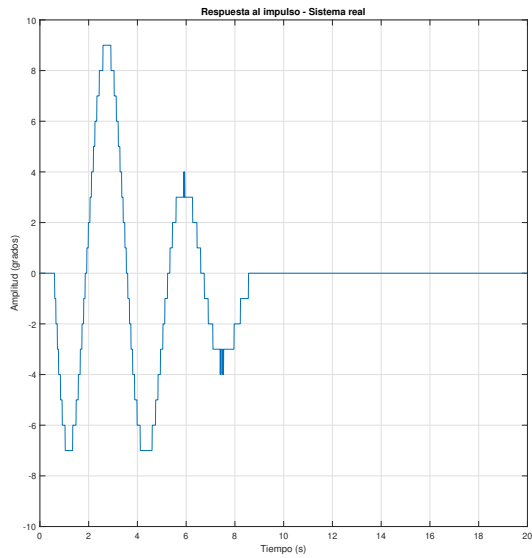


(a) Respuesta al impulso.

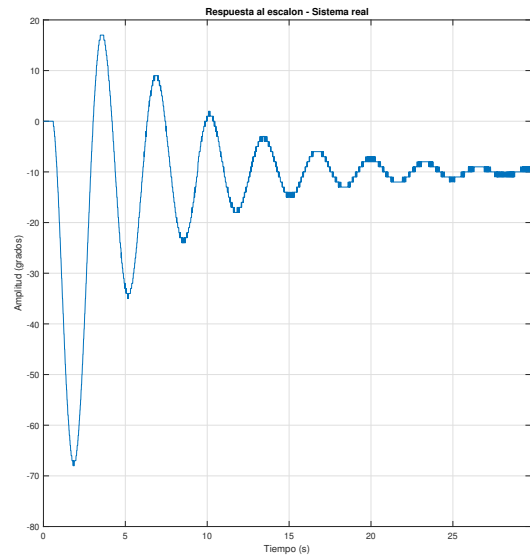


(b) Respuesta al escalón.

Figura 8: Respuestas del sistema en posición natural del modelo estimado.



(a) Respuesta al impulso - Planta.



(b) Respuesta al escalón - Planta.

Figura 9: Respuestas del sistema en posición natural del modelo real.

Realizando el análisis en relación a la ubicación de polos y ceros, se obtiene la misma conclusión debido a que los polos y ceros se encuentran en el semiplano izquierdo, Figura 10.

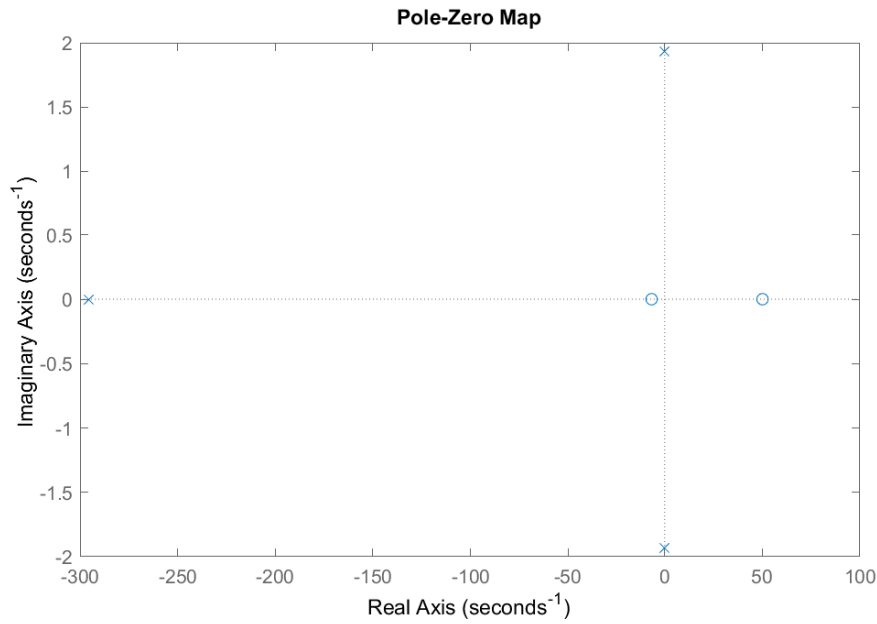
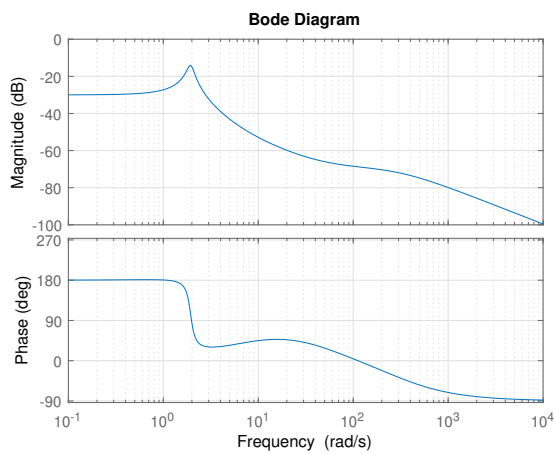
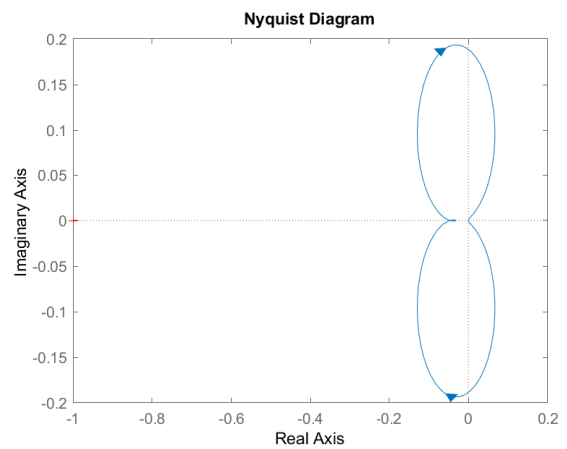


Figura 10: Diagrama de polos y ceros.

Análisis de respuesta en frecuencia del sistema



(a) Diagrama de Bode



(b) Diagrama de Nyquist

Figura 11: Respuesta en frecuencia del sistema.

En la Figura 11b también es posible determinar la estabilidad, siendo que las curvas no rodean al punto crítico $[-1; 0]$, el sistema es estable.

2.7 Controlador PID

Como se presentó en las secciones anterior, el sistema de PIVI es estable por naturaleza en posición hacia abajo y es inestable en la posición superior pero, en ambos casos es posible la aplicación de un control para mejorar la respuesta de las Figura 8a y 9a.

Para el primer caso mencionado la función del control es disminuir al máximo posible las oscilaciones, y mejorar la respuesta de rechazo ante perturbaciones. Cuando el péndulo es posicionado en la parte superior (equilibrio inestable), la

función del sistema de control es mantener el péndulo en ese punto, y además mejorar el rechazo a perturbaciones.

En ambos casos se opta por aplicar un controlador PID con filtro derivativo. La justificación de esto último es que el derivador en un controlador PID es sensible al ruido en la señal de entrada, esto se debe a que el término derivativo calcula la tasa de cambio de la señal y cualquier pequeña fluctuación en la señal (como el ruido) se amplificara cuando se derive. Las señales de entrada suelen tener ruido debido a la naturaleza de los sensores o las perturbaciones en el entorno, si el ruido no se filtra adecuadamente, el término derivativo puede generar grandes fluctuaciones en la salida del controlador lo que lleva a un comportamiento no deseado del sistema. Para solucionar este problema se utiliza un filtro pasa bajos que suaviza la señal y reduce el impacto del ruido en el control derivativo.

Un PID es un sistema de control que, mediante la realimentación de la salida del sistema y conociendo la entrada actual al mismo, calcula la acción de corrección a realizar por medio del error entre ambas señales mencionadas. En la Figura 12 se muestra la composición interna del PID.

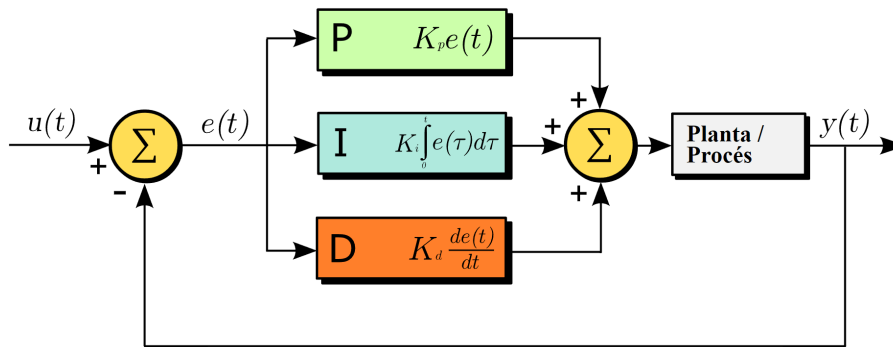


Figura 12: Diagrama de bloques PID

- $u(t)$, señal de referencia - set-point.
- $e(t)$, señal de error que se introduce en el PID. $e(t) = u(t) - y(t)$
- $y(t)$, salida del sistema.

En la Figura 12 se presenta el PID en 3 bloques, el primero (color verde) representa la **acción proporcional - P**, que consiste en el producto de la señal de error por una constante proporcional, K_p , haciendo que el error de estado estacionario se aproxime a 0, si la constante es muy grande genera que la banda proporcional disminuya y el controlador entre en zona de saturación más rápidamente.

El segundo bloque (color celeste) representa la **acción integral - I**, el cual tiene como propósito disminuir y eliminar el error de estado estacionario provocado por perturbaciones exteriores, las cuales el control proporcional no es capaz de mitigar; la acción integral consiste en la acumulación de error desde el tiempo pasado a la actualidad, multiplicando el mismo por una constante K_i .

Por último, el tercer bloque (color anaranjado) consiste en la **acción derivativa - D**, que se compone por la derivada del error multiplicada por una constante derivativa K_d ; esta acción predice el error futuro, disminuyendo los sobreimpulsos generados por la acción integral.

Con estos conceptos, se elige aplicar un PID con filtro derivativo, Figura 13, donde la Ec. (27) representa la función de transferencia de este control en el dominio de Laplace.

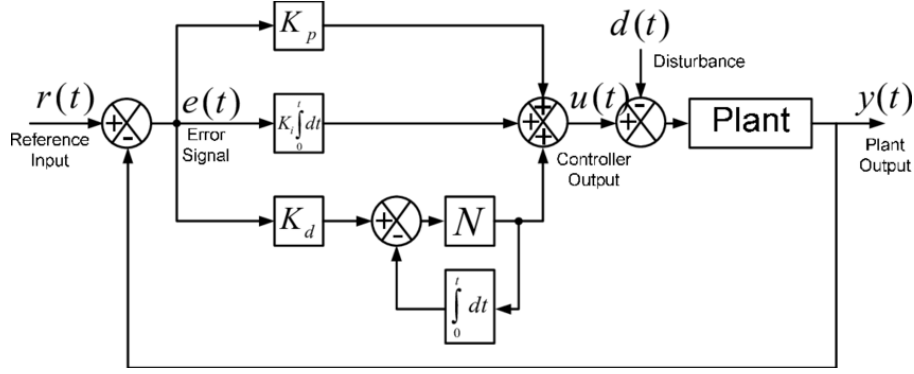


Figura 13: Diagrama de bloques PID con filtro derivativo

$$PID(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_i * \frac{1}{s} + K_d * \frac{N}{1 + \frac{N}{s}} \quad (27)$$

Como el control PID se aplica en un microcontrolador, se debe expresar la Ec. (27) en tiempo discreto, y su posterior obtención de ecuación en diferencias.

$$PID(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_i * \frac{T_s}{z - 1} + K_d * \frac{N}{1 + N * \frac{T_s}{z - 1}} \quad (28)$$

Agrupando los términos se puede reescribir como en la Ec. (29)

$$\begin{aligned} Numerador = & (K_p + K_d N) z^2 \\ & + (-2K_p - 2K_d N + K_i T_s + K_p N T_s) z \\ & + (K_p + K_d N - K_i T_s - K_p N T_s + K_i N T_s^2) \end{aligned}$$

$$Denominador = z^2 + (-2 + N T_s) z + (1 - N T_s)$$

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{z^2 + (-2 + N T_s) z + (1 - N T_s)} & \left[(K_p + K_d N) z^2 \right. \\ & + (-2K_p - 2K_d N + K_i T_s + K_p N T_s) z \\ & \left. + (K_p + K_d N - K_i T_s - K_p N T_s + K_i N T_s^2) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Y expresando lo mismo pero en ecuación en diferencias, Ec. (30).

$$\begin{aligned} u[n] = & (K_p + K_d N) e[n] \\ & + (-2K_p - 2K_d N + K_i T_s + K_p N T_s) e[n - 1] \\ & + (K_p + K_d N - K_i T_s - K_p N T_s + K_i N T_s^2) e[n - 2] \\ & - (-2 + N T_s) u[n - 1] \\ & - (1 - N T_s) u[n - 2] \end{aligned} \quad (30)$$

- K_p , constante proporcional.

- K_i , constante integral.
- K_d , constante derivativa.
- N , coeficiente de filtro derivativo.
- T_s , tiempo de muestreo.

2.7.1. Sintonización PID

La implementación del PID se realizó sobre una placa de desarrollo ESP32-s3 en conexión con un puente H que mediante una señal PWM brindada por la salida analógica del microcontrolador es posible regular el sentido de giro y la velocidad del motor.

Para la determinación de la posición angular del péndulo se utiliza un encoder magnético, que envía los datos al microcontrolador para que éste realice la comparación con el setpoint y aplique la señal de control correspondiente para corregir la posición del péndulo.

La lógica de funcionamiento del programa es la siguiente, se crea un timer de 10 ms ($T_s = 0,01$ s), correspondiente con el tiempo de muestreo, que periódicamente realiza la acción de control. En la función de control se mide la posición actual del péndulo a través del encoder, luego se la compara con el setpoint, y el resultado se lo introduce en el controlador PID discreto.

Una vez aplicado el control PID, se determina el sentido de giro dependiendo del signo que posea el error, y luego el valor absoluto del mismo es aplicado como el duty del PWM al motor. Debido a las limitaciones de duty mencionadas anteriormente, se realiza un mapeo del valor de duty donde 0 % se corresponde a 2457 *bits* en vez de 0 *bits* y el 100 % se corresponde con 4095 *bits*. En la Figura 15 se pueden observar los resultados obtenidos.

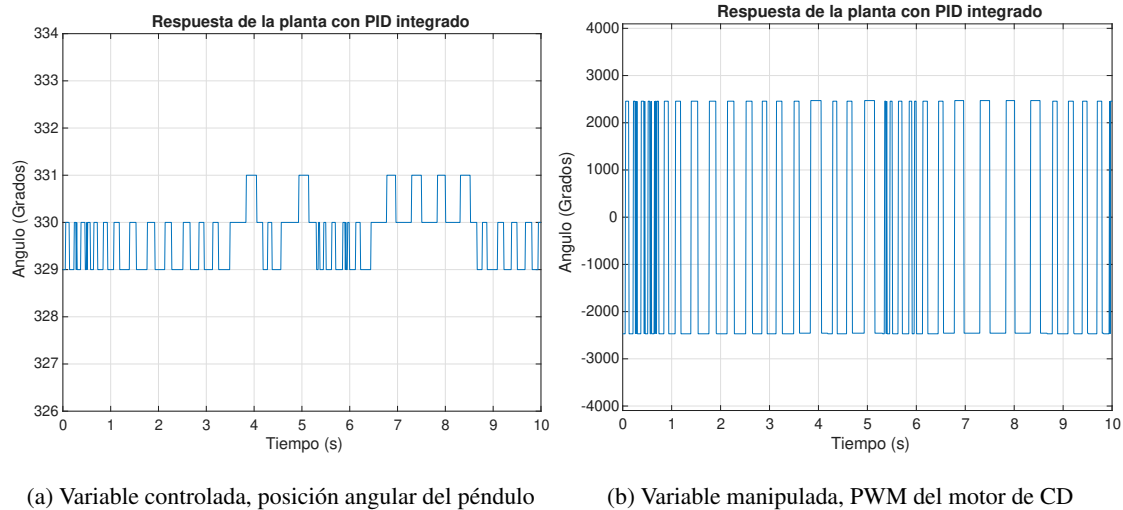


Figura 14: Respuesta del sistema en equilibrio inestable, sin perturbaciones.

En la Figura 14 se aprecia el péndulo en la posición de equilibrio inestable, sin perturbación. Además, en la Figura 15 se aprecia la respuesta del péndulo ante perturbaciones aleatorias realizadas manualmente.

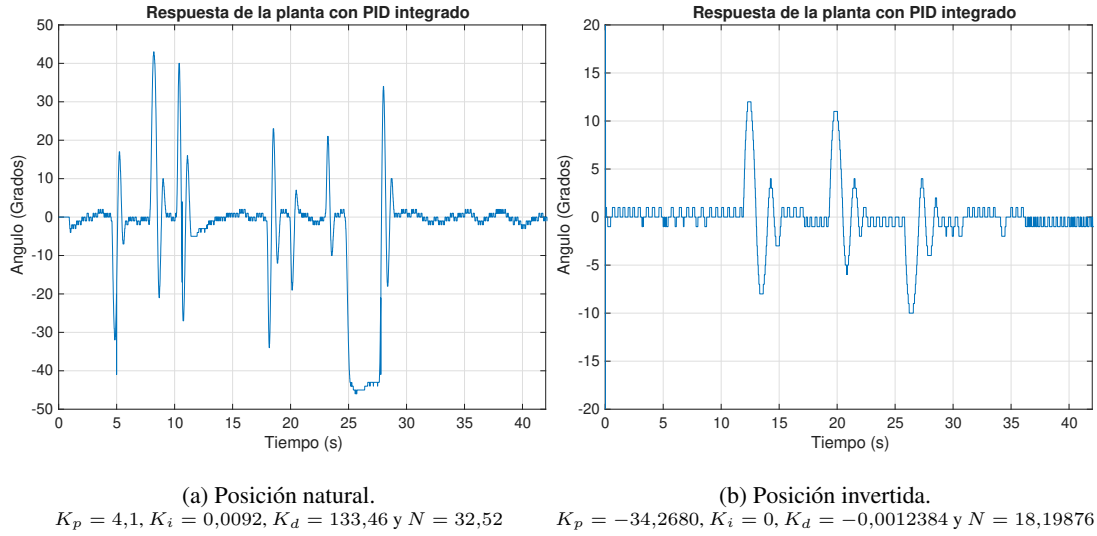


Figura 15: Respuestas del sistema en ambas posiciones con PID integrado.

2.8 Control en espacio de estados

Existen diversas formas de aplicar un control en espacio de estados, como por ejemplo asignación de polos o LQR (regulador cuadrático lineal). Lo que comparten estos dos métodos de control, es que buscan obtener una matriz de realimentación de estados K , Figura 16.

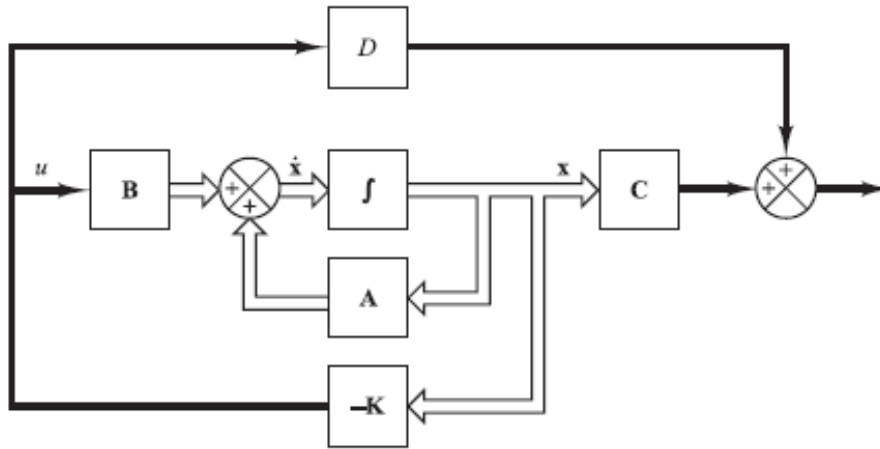


Figura 16: Representación de control por medio de realimentación de estados.

El primero de los métodos consiste en determinar los polos en lazo cerrado deseados a partir de la respuesta transitoria o especificaciones del sistema, esto hace que una vez obtenida la matriz K para estos polos, al realimentar los estados, el sistema tenga los polos en las posiciones deseadas, siempre que el sistema original sea de estado completamente controlable. Siempre que el sistema cumpla con la condición mencionada, la ubicación de los polos puede darse en cualquier posición arbitraria en el plano s .

El otro método (LQR), la principal ventaja respecto de asignación de polos es que presenta un procedimiento sistemático para calcular la matriz de ganancia de realimentación de estados (K). En este trabajo se opta por aplicar un control en espacio de estados utilizando el método LQR o regulador óptimo cuadrático.

2.8.1 Limitaciones del sistema

El sistema posee una limitación, la cual es el motor de CD, el cual es de 24 V pero debido al puente H solo se puede alimentar con 12 V, esto produce que el sistema no tenga la capacidad de respuesta correcta. El duty del PWM solo es

posible controlarlo entre un 60 % y el 100 %, producto de la baja tensión de alimentación al mismo; esto también hace que el motor no genere el suficiente momento como para poder mantener el péndulo. Si bien se anexo más peso al volante de inercia, no fue suficiente.

Producto de esto, el péndulo en la posición de equilibrio inestable solo es posible controlarlo agregando un contrapeso al péndulo, esto genera que la inestabilidad se reduzca, pero manteniendo al sistema inestable en ese estado.

Estas limitaciones se encontraron cuando se realizaron todas las pruebas pertinentes del sistema en el laboratorio.

El control PID al tener un filtro pasa bajo en el derivativo introduce un retardo y puede suavizar más de lo necesario la señal, limitando la capacidad del término derivativo para reaccionar a cambios rápidos. Siempre se deberá tener un compromiso entre una respuesta rápida y el filtrado del ruido.

En el caso del control por realimentación de estados, el duty del PWM fue usado en rango completo, por más que la identificación se realizó solo para un rango del mismo. Otra de las limitaciones es que hay estados no medidos, haciendo que se tengan que observar mediante alguna técnica como filtro de Kalman.

2.9 Observador de estados

En la práctica no todos los estados del sistema son medibles o disponibles para la realimentación, por ello es necesario realizar una estimación de estas variables no medibles, esta técnica se denomina *observación*. El dispositivo que estima u observa se lo llama *observador de estados*.

Existen distintos tipos de observador como los observadores de orden completo, el cual estima todas las variables de estado sin importar que alguna de ellas se encuentre disponible.

Los observadores son aplicables siempre que el sistema cumpla con la observabilidad, esto determina que es posible observar o estimar las variables de estado a partir de sus variables de salida, generalmente medibles; siendo un sistema completamente observable aquel en el cual cada variable de estado afecta alguna de sus salidas. En la Figura 17 se presenta un observador de orden completo propuesto por Luenberger, y la Ec. (31) y (32) representa la construcción del observador en el dominio continuo, [7].

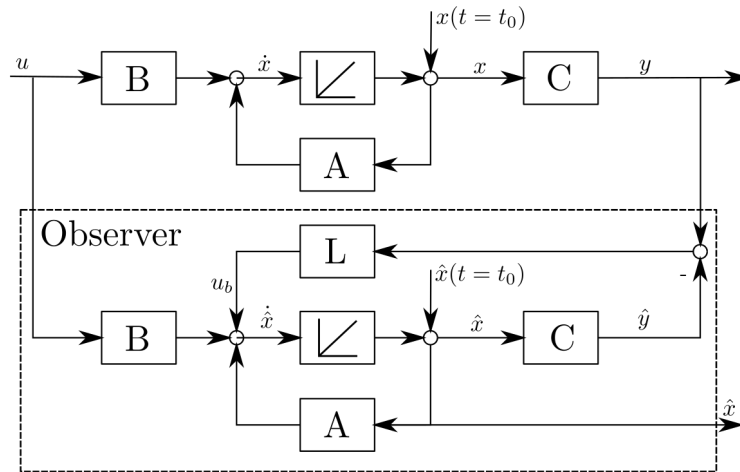


Figura 17: Representación de control por medio de realimentación de estados.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (31)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (32)$$

La Ec. (31) se puede reescribir al reemplazar $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

Como se aplicará el observador en un microcontrolador, el mismo debe expresarse en el dominio discreto.

$$\hat{x}(k+1) = (A - L \cdot C)\hat{x}(k) + Bu(k) + Ly(k) \quad (33)$$

$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k) \quad (34)$$

También se debe operar en forma matricial la Ec. (33) para obtener la ecuación correspondiente a cada estado estimado.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \cdot u(k) + \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \end{bmatrix} \cdot y(k) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11}c_{11} & L_{11}c_{12} & L_{11}c_{13} \\ L_{21}c_{11} & L_{21}c_{12} & L_{21}c_{13} \\ L_{31}c_{11} & L_{31}c_{12} & L_{31}c_{13} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}u(k) \\ b_{21}u(k) \\ b_{31}u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11}y(k) \\ L_{21}y(k) \\ L_{31}y(k) \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} - L_{11}c_{11} & a_{12} - L_{11}c_{12} & a_{13} - L_{11}c_{13} \\ a_{21} - L_{21}c_{11} & a_{22} - L_{21}c_{12} & a_{23} - L_{21}c_{13} \\ a_{31} - L_{31}c_{11} & a_{32} - L_{31}c_{12} & a_{33} - L_{31}c_{13} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}u(k) \\ b_{21}u(k) \\ b_{31}u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11}y(k) \\ L_{21}y(k) \\ L_{31}y(k) \end{bmatrix} \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} - L_{11}c_{11})\hat{x}_1(k) + (a_{12} - L_{11}c_{12})\hat{x}_2(k) + (a_{13} - L_{11}c_{13})\hat{x}_3(k) \\ (a_{21} - L_{21}c_{11})\hat{x}_1(k) + (a_{22} - L_{21}c_{12})\hat{x}_2(k) + (a_{23} - L_{21}c_{13})\hat{x}_3(k) \\ (a_{31} - L_{31}c_{11})\hat{x}_1(k) + (a_{32} - L_{31}c_{12})\hat{x}_2(k) + (a_{33} - L_{31}c_{13})\hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}u(k) \\ b_{21}u(k) \\ b_{31}u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11}y(k) \\ L_{21}y(k) \\ L_{31}y(k) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Una vez realizada las operaciones, se obtienen las ecuaciones correspondientes a cada uno de los estados, presentadas en las Ec. (37), (38) y (39).

$$\hat{x}_1(k+1) = (a_{11} - L_{11}c_{11})\hat{x}_1(k) + (a_{12} - L_{11}c_{12})\hat{x}_2(k) + (a_{13} - L_{11}c_{13})\hat{x}_3(k) + b_{11}u(k) + L_{11}y(k) \quad (37)$$

$$\hat{x}_2(k+1) = (a_{21} - L_{21}c_{11})\hat{x}_1(k) + (a_{22} - L_{21}c_{12})\hat{x}_2(k) + (a_{23} - L_{21}c_{13})\hat{x}_3(k) + b_{21}u(k) + L_{21}y(k) \quad (38)$$

$$\hat{x}_3(k+1) = (a_{31} - L_{31}c_{11})\hat{x}_1(k) + (a_{32} - L_{31}c_{12})\hat{x}_2(k) + (a_{33} - L_{31}c_{13})\hat{x}_3(k) + b_{31}u(k) + L_{31}y(k) \quad (39)$$

Este método, en la práctica, no funcionó de forma correcta, por ello se decidió implementar un filtro de Kalman como observador Luenberger.

2.10 Filtro de Kalman

Esta técnica, al igual que el observador de Luenberger, son utilizadas para determinar aquel estado no disponible u oculto, la principal diferencia radica en que el filtro de Kalman, actualiza las ganancias de realimentación de estados en función de las varianzas de error que afectan al sistema.

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo, esto indica que se pueden incorporar nuevas observaciones al algoritmo, sin este ser modificado. Este algoritmo puede ser dividido en dos partes, la predicción y la corrección. Se trabaja en dominio discreto, [8].

2.10.1. Predicción

$$\hat{x}_{pred}(k) = A \hat{x}(k) + B u(k) \quad (40)$$

$$P_{pred}(k) = A P(k) A^T + Q(k) \quad (41)$$

2.10.2. Corrección

$$S = C P_{pred}(k) C^T + R(k) \quad (42)$$

$$K(k) = \frac{P_{pred}(k) C^T}{S} \quad (43)$$

$$\hat{y}(k) = C \hat{x}_{pred}(k) \quad (44)$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_{pred}(k) + K(k)(y(k) - \hat{y}(k)) \quad (45)$$

$$P(k) = (I - K(k) C) P_{pred}(k) \quad (46)$$

Cabe aclarar que, $Q(k)$ representa las covarianzas de ruido del proceso, es una matriz de tamaño igual que la matriz de estados del modelo dinámico del sistema; mientras que $R(k)$ representa las covarianzas de ruido de medición, donde se representa por un escalar. Estas matrices son necesarias para un correcto funcionamiento del filtro de Kalman, la matriz $Q(k)$ representa la incertidumbre del modelo del sistema, si tiene valores pequeños indica que el filtro confía en el modelo del sistema, en contra parte si tiene valores grandes, se considera que el modelo posee variabilidad no predichas.

En el caso de la matriz $R(k)$ representa la incertidumbre en la medición del sistema, si es pequeña significa que las mediciones son confiables, y sino el filtro preferirá confiar en la predicción del modelo.

Las ecuaciones (40) - (46) se desarrollan en forma matricial para obtener cada ecuación correspondiente aplicable al microcontrolador.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1_{pred}}(k) \\ \hat{x}_{2_{pred}}(k) \\ \hat{x}_{3_{pred}}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + a_{13}\hat{x}_3 \\ a_{21}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 + a_{23}\hat{x}_3 \\ a_{31}\hat{x}_1 + a_{32}\hat{x}_2 + a_{33}\hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}u(k) \\ b_{21}u(k) \\ b_{31}u(k) \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} P_{kp11} = & (a_{11}P_{k11} + a_{12}P_{k21} + a_{13}P_{k31}) * a_{11} + (a_{11}P_{k12} + a_{12}P_{k22} + a_{13}P_{k32}) * a_{12} \\ & + (a_{11}P_{k13} + a_{12}P_{k23} + a_{13}P_{k33}) * a_{13} + Q_{11} \end{aligned} \quad (48)$$

El resto de valores correspondientes a la matriz de covarianzas de error predicha se calculan de manera similar.

$$\begin{aligned} S = & (c_{11} * P_{kp11} + c_{12} * P_{kp21} + c_{13} * P_{kp31}) * c_{11} + (c_{11} * P_{kp12} + c_{12} * P_{kp22} + c_{13} * P_{kp32}) * c_{12} \\ & + (c_{11} * P_{kp13} + c_{12} * P_{kp23} + c_{13} * P_{kp33}) * c_{13} + R_{Kalman} \end{aligned} \quad (49)$$

Ganancias de Kalman

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{kp11}c_{11} + P_{kp12}c_{12} + P_{kp13}c_{13} \\ P_{kp21}c_{11} + P_{kp22}c_{12} + P_{kp23}c_{13} \\ P_{kp31}c_{11} + P_{kp32}c_{12} + P_{kp33}c_{13} \end{bmatrix} S^{-1} \quad (50)$$

Salida estimada con los estados predichos

$$\hat{y}(k) = c_{11}\hat{x}_{1_{pred}}(k) + c_{12}\hat{x}_{2_{pred}}(k) + c_{13}\hat{x}_{3_{pred}}(k) \quad (51)$$

Corrección de estados

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1_{pred}}(k) \\ \hat{x}_{2_{pred}}(k) \\ \hat{x}_{3_{pred}}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}y_{error} \\ K_{21}y_{error} \\ K_{31}y_{error} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Corrección de covarianza de error

$$P_{k11} = (1 - K_{11} * c_{11}) * P_{kp11} - K_{11} * c_{12} * P_{kp21} - K_{11} * c_{13} * P_{kp31} \quad (53)$$

El resto de valores correspondientes a la matriz de covarianzas de error se calculan de manera similar.

2.11 Control LQR

Es un método de control que se basa en la ponderación de las variables de estado y las entradas de control a través de la función de costo presentada en la Ec. 54. El objetivo es minimizar al máximo el valor de la ecuación de costos.

$$J = \int_0^\infty (x \cdot Qx + u \cdot Ru) dt \quad (54)$$

Qx representa una matriz identidad de rango igual a la matriz de estados A , donde cada valor de la misma se determina dependiendo la relevancia del error de los estados entre sí, cuanto más grande sea el valor significa que dará importancia al error de ese estado, haciendo que los estados sigan al valor deseado, haciendo que el control LQR trabaje agresivamente.

El valor Ru corresponde al costo del uso del actuador del sistema, un valor grande de Ru genera que el control sea más suave, acciones de control moderadas; en cambio si este valor es mayor, hace que la acción de control sea más agresiva.

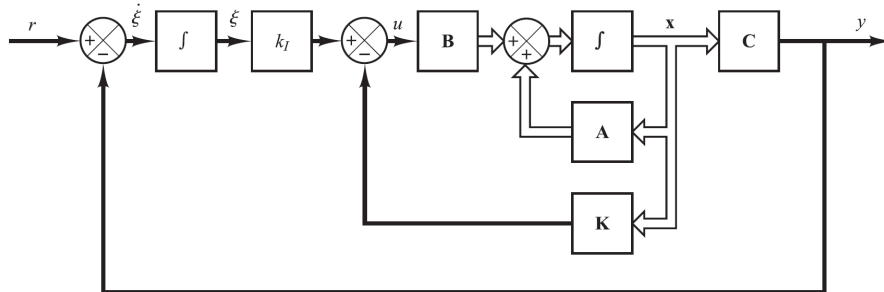


Figura 18: Control LQR con integral.

- r , señal de referencia - setpoint.
- $\dot{\xi}$, diferencia entre setpoint y salida del sistema - error.
- ξ , error integrado.
- u , señal de control.
- x , vector de estados.

- y, salida del sistema.

Se decidió aplicar un control LQR con integral, Figura 18; esto provoca que la matriz Qx sea de rango, $\text{rank}(A) + 1$.

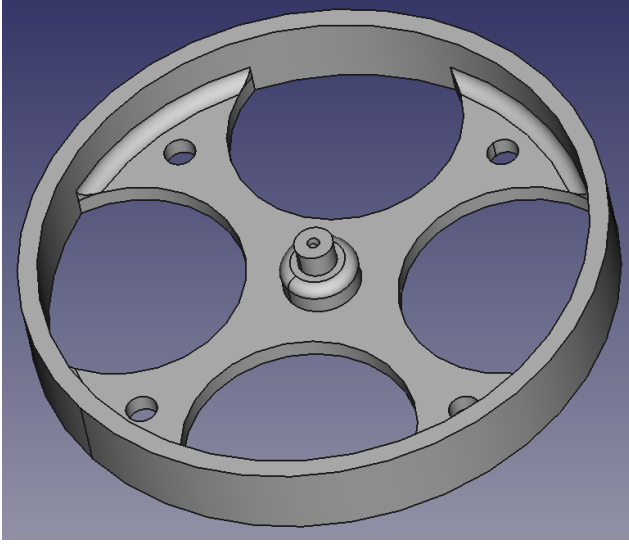
$$Qx = \begin{bmatrix} Qx_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Qx_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Qx_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ki \end{bmatrix}$$

2.12 Implementación física del sistema

- Sensor de posición angular, encoder magnético AS5600.
- Motor de CD, extraído de impresora.
- Puente H, L298n.



Figura 19: Sistema físico PIVI.



(a) Diseño 3D.



(b) Impresión.

Figura 20: Volante de inercia.

2.13 Resultados de control LQR

Para realizar la sintonización del regulador LQR se utilizó MatLab, donde se configuraron los parámetros Qx y Ru dependiendo del análisis. Como se aprecia en la ecuación del modelo, Ec. 22, la posición angular del mismo se corresponde con el estado x_1 , determinando que este estado debe tener mayor ponderación respecto de los demás, ya que como se identificó en la forma canónica observable, los dos estados restantes se estiman pero no se miden.

Como se explicó la matriz Qx debe tener el mismo tamaño que la matriz A (matriz de estados) pero esto no es así, se debe a que se utiliza un control LQR con integral, generando un nuevo término dentro de la matriz. El valor de Ru , costo de uso del actuador del sistema, se lo colocó pequeño para que el actuador genere una acción de control agresiva.

Todos estos valores se testearon en MatLab hasta obtener una respuesta deseada como la que se observa en la Figura 21

Parámetros LQR

$$Qx = \begin{bmatrix} 1000000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100000 \end{bmatrix}$$

$$Ru = 0,0000000001$$

(55)

Estos parámetros determinan una ganancia de realimentación K , y el respectivo valor de ganancia integral.

$$K_{hat} = \begin{bmatrix} K_{LQR} & ki \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -805,7053 & -66,7527 & -0,2154 & 8,1492 \end{bmatrix}$$

$$K_{LQR} = \begin{bmatrix} -805,7053 & -66,7527 & -0,2154 \end{bmatrix}$$

$$ki = 8,1492$$

Para determinar los parámetros del filtro de Kalman utilizado como observador de estados, se realizaron pruebas sobre el sistema físico, Figuras 22, 23 y 24; en la primera prueba se configuró $R = 0.001$ y $Q = 10$, estos valores determinan una buena confianza a la medición del sensor (R pequeña), y una confianza no muy grande hacia el modelo (Q grande), esto es así debido a que el modelo presenta imperfecciones y no representa por completo al sistema real.

En la segunda prueba se configuró un valor de $Q = 0.001$ y $R = 10$, esto es el caso opuesto al anterior, donde se prioriza la confianza en el modelo y no tanto en la medición del sensor; como se aprecia en la Figura 23, los resultados fueron peores respecto al caso 1 Figura 22, donde se aprecia que el estado \hat{x}_1 deberían seguir la posición angular del péndulo y no lo hace, generando que el sistema tarde más tiempo en llegar al setpoint; además, producto de esto, la señal de control es menos agresiva.

Por último se analizó el comportamiento del sistema si la confianza sobre la medición era mucho mayor respecto a la prueba 1, donde $Q = 100$ y $R = 0.00001$ Figura 24; si bien los resultados son similares al caso 1, se puede apreciar que la señal de control satura más fácilmente, generando que antes de llegar al setpoint oscile con mayor amplitud.

2.13.1. Simulación

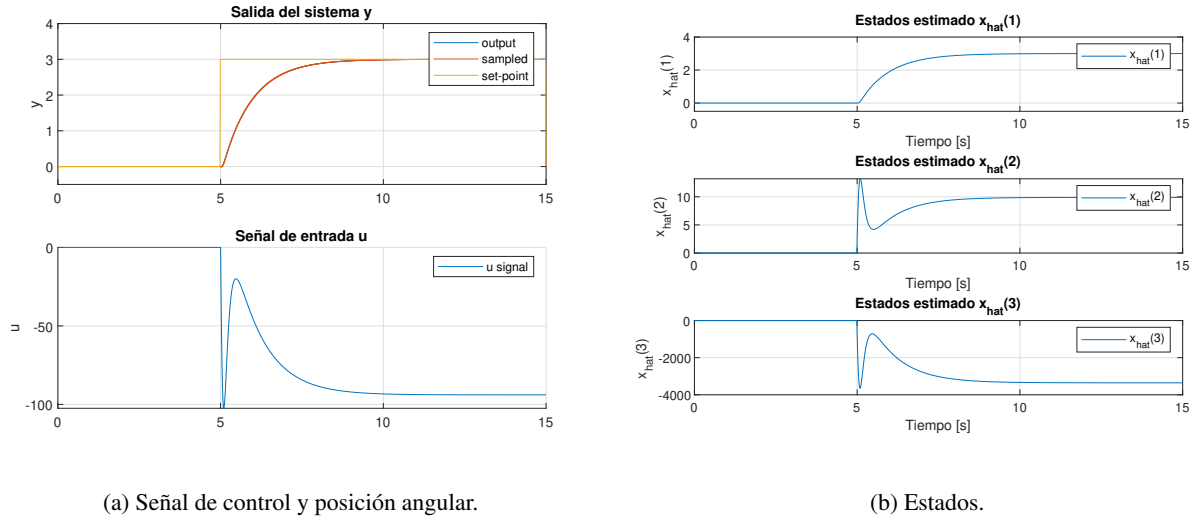
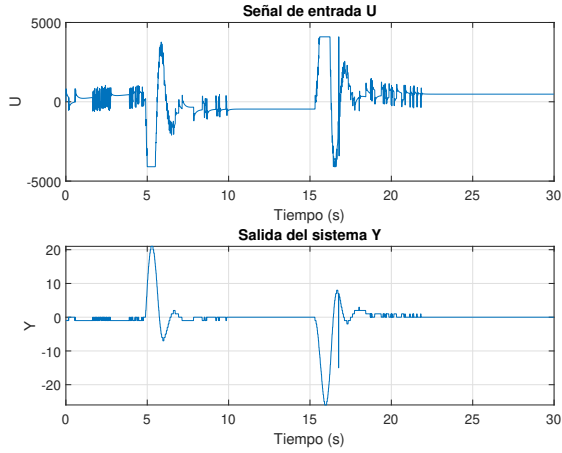
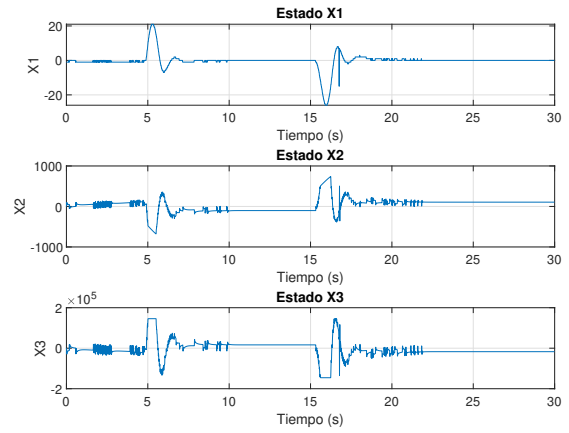


Figura 21: Resultados del sistema con LQR (Qx ; Ru) y Kalman ($Q = I * 10$; $R = 0.001$) en simulación.

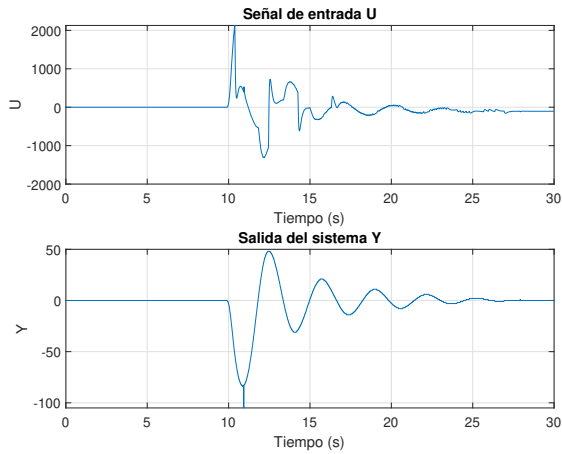
2.13.2. Sistema físico



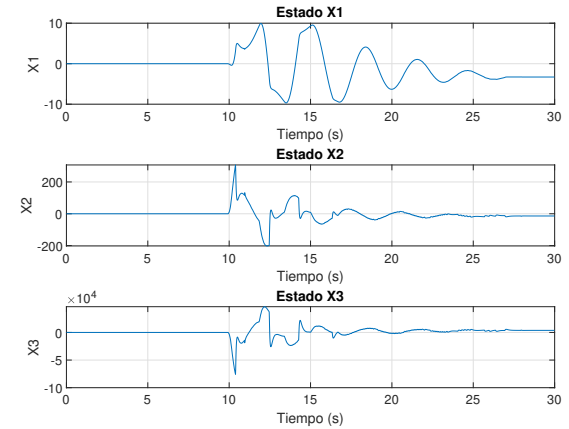
(a) Señal de control y posición angular.



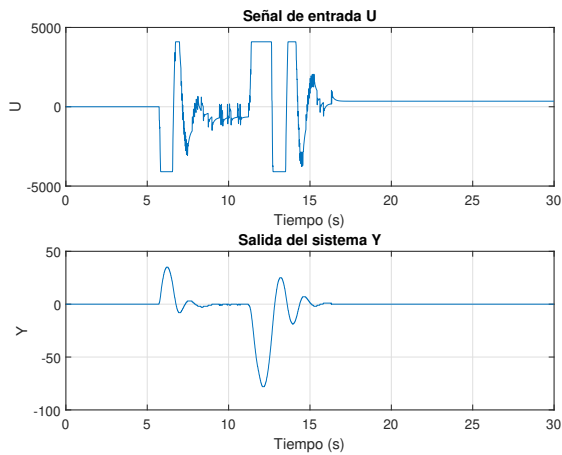
(b) Estados.

Figura 22: Resultados del sistema con LQR (Q_x ; R_u) y Kalman ($Q = I * 10$; $R = 0.001$).

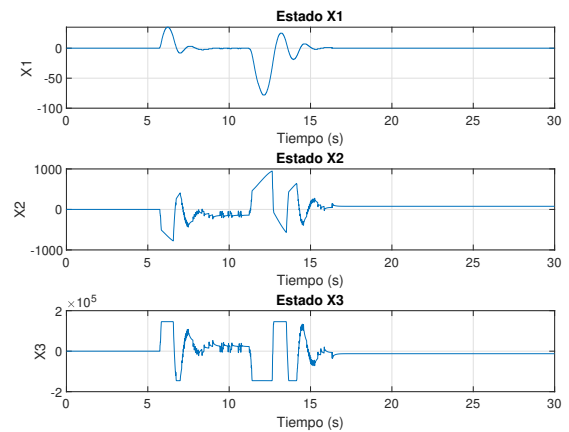
(a) Señal de control y posición angular.



(b) Estados.

Figura 23: Resultados del sistema con LQR (Q_x ; R_u) y Kalman ($Q = I * 0,001$; $R = 10$).

(a) Señal de control y posición angular.



(b) Estados.

Figura 24: Resultados del sistema con LQR (Q_x ; R_u) y Kalman ($Q = I * 100$; $R = 0.00001$).

3 CONCLUSIÓN

Como corolario al trabajo, se logró desarrollar el modelo matemático del sistema en espacio de estados y su correspondiente identificación empírica, implementando un controlador discreto basado en el enfoque de control moderno en un microcontrolador.

Los resultados obtenidos permitieron no solo comprender los conceptos y técnicas abordadas para la obtención del modelo y el diseño del sistema de control, sino también validar la efectividad de la representación en espacio de estados. El modelo empírico identificado mostró una correspondencia óptima con el sistema físico real, lo que permitió una implementación precisa del controlador LQR y del observador de estados.

Se logró controlar el péndulo en ambos estados, considerando las limitaciones del sistema, lo que reafirma la robustez de las técnicas de espacio de estados aplicadas en este proyecto.

REFERENCIAS

- [1] J. Scerri, G. S. Đorđević y D. Todorović, «Modeling and control of a reaction wheel pendulum with visual feedback,» en *2017 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, 2017, págs. 024-029. DOI: 10.1109/CADIAG.2017.8075625.
- [2] J. R. Vasconcelos, G. E. M. y P. M. del Foyo, «Design and Control of a Flywheel Inverted Pendulum System,» en *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*, vol. 1, oct. de 2020. DOI: 10.20906/CBA2022/390.
- [3] S. Chapman, *Máquinas eléctricas*, 5ta. McGrawHill, 2015.
- [4] V. Cardoso, T. Souza y P. M. del Foyo, «Flywheel Inverted Pendulum Design for Evaluation of Swing-Up Energy-Based Strategies,» en *Anais do XXIV Congresso Brasileiro de Automática*, vol. 3, oct. de 2022. DOI: 10.20906/CBA2022/3529.
- [5] A. A. A. Moghadam y M. Marshall, «Robust Control of the Flywheel Inverted Pendulum System Considering Parameter Uncertainty,» en *2021 American Control Conference (ACC)*, 2021, págs. 1730-1735. DOI: 10.23919/ACC50511.2021.9483178.
- [6] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, 5ta edición. Madrid, España: Pearson Educación, 2010.
- [7] E. Bernardi y M. Miretti, *Análisis de Señales y Sistemas*. AnSyS, 2024.
- [8] G. Welch y G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*. University of North Carolina at Chapel Hill, 1998.