

# Trabajo Final: Péndulo Invertido con Volante de Inercia

**Alesandria, Alejo Samuel (Autor)**

Departamento de Ingeniería Electrónica, UTN Facultad Regional San Francisco  
Av. de la Universidad 501, San Francisco, Córdoba - Argentina  
alealesandria@gmail.com

**Delfino, Ramiro (Autor)**

Departamento de Ingeniería Electrónica, UTN Facultad Regional San Francisco  
Av. de la Universidad 501, San Francisco, Córdoba - Argentina  
pokramiro12@gmail.com

## RESUMEN

En el siguiente trabajo se busca desarrollar el estudio de un sistema de péndulo invertido con volante de inercia para diseñar e implementar sobre el mismo, un controlador proporcional, integral y derivativo (PID) que resulte óptimo para lograr una correcta respuesta transitoria y correcto funcionamiento.

**Palabras clave:** Función de transferencia, identificación, estabilidad, análisis de respuesta, control PID.

## INTRODUCCIÓN

A lo largo del presente informe se verán todos los conceptos y pasos necesarios para la implementación de un sistema de control sobre un modelo físico ya preestablecido. Se procederá a realizar y analizar el modelo matemático, utilizando leyes de Kirchhoff, Newton, mecánica lagrangiana, transformada de Laplace y ecuación en diferencias. Posteriormente contrastarlo y ampliarlo por medio de una identificación del sistema realizada a través de MatLab, ésta analiza los datos obtenidos del comportamiento del sistema al someterlo a una señal de prueba de secuencia binaria pseudoaleatoria (PRBS), para así poder estimar un modelo matemático que se corresponda al prototipo real.

Una vez obtenida la función de transferencia que caracteriza el sistema final con buena precisión se procede a su análisis para determinar el lugar geométrico de raíces, además se realiza un análisis de respuesta transitoria y en estado estacionario, estabilidad y respuesta en frecuencia consiguiendo así el entendimiento completo del sistema para poder aplicar un controlador PDI adecuado al mismo que mejore su estabilidad y tiempos de respuesta.

## Conceptos preliminares

*Sistemas invariantes en el tiempo:* Son aquellos sistemas cuyas propiedades o características intrínsecas permanecen constantes a lo largo del tiempo, es decir, su derivada primera es cero. Estas propiedades intrínsecas son inherentes al sistema que se desea controlar y son siempre internas; cualquier variación externa se considera una perturbación.

*Sistema lineal:* Un sistema lineal puede ser invariante en el tiempo, aunque no necesariamente. Para que un sistema sea considerado lineal, debe cumplir con los principios de superposición, aditividad y homogeneidad. Verificar la aditividad es suficiente para determinar si el sistema es lineal.

La función de transferencia, en dominio de Laplace, es el cociente entre la salida y la entrada con condiciones iniciales iguales a 0.

Un sistema no lineal puede ser acotado para cierto rango de operación, dentro del mismo se lo puede considerar como lineal y controlar, aunque teniendo cierto error.

Cuando un sistema presenta oscilaciones no controladas o la salida crece indefinidamente, se lo llama sistema inestable; ya que la salida del mismo no tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ .

*Variable controlada:* Es la entidad o condición que se mide y controla. Para el péndulo la posición angular del mismo.

*Variable manipulada:* Es la cantidad o condición que modifica el controlador. Para el PIVI es el duty del PWM.

*Control:* Significa medir la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada para corregir la desviación del valor medio respecto al deseado.

El control de un sistema se basa en la medición de la variable manipulada para mantener la variable controlada en su punto de ajuste o valor deseado. Uno de los métodos de control más reconocidos es el controlador PID, denominado así por sus componentes proporcional, integral y derivativo.

*Planta:* Cualquier objeto físico que deba controlarse. Ejemplo: un motor.

*Perturbaciones:* Es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema.

## Objetivo:

- Desarrollar un sistema de control de lazo cerrado PID. Comprender las bases teóricas, realizando un contraste con los resultados y mediciones obtenidas de la implementación física

## DESARROLLO

### Características generales del sistema

El sistema de Péndulo Invertido con Volante de Inercia (PIVI) es inherentemente estable cuando el péndulo se encuentra en su posición inferior. Sin embargo, al operar con el péndulo en su posición vertical, el sistema se vuelve inestable debido a que su centro de masa se sitúa por encima del punto de rotación, lo que requiere un control activo para mantener el equilibrio.

El PIVI consiste en una barra fijada en uno de sus extremos, mientras que en el otro extremo se encuentra un motor que lleva un volante de inercia acoplado a su eje. La función del volante de inercia es almacenar energía cinética en forma de rotación. La velocidad del motor se regula mediante PWM (modulación por ancho de pulso), lo que permite ajustar la tensión según la posición del péndulo. Este ajuste genera un

momento de fuerza en dirección opuesta al movimiento del péndulo, contrarrestando su desplazamiento y logrando su estabilización. Para controlar el sistema, además de gestionar el motor, es fundamental conocer la posición del péndulo. En este caso, se empleará un encoder para medir con precisión la posición angular del péndulo.

### ¿Por qué se eligió este prototipo?

El prototipo se eligió debido a que presenta dos situaciones diferentes de control, el estado natural y el estado de equilibrio inestable; en el primero de los dos el sistema es estable por naturaleza, en cambio en el otro estado no es estable. En ambos casos se puede realizar un método de control para generar una respuesta deseada del péndulo, siendo necesario la identificación del sistema en la parte inferior, para luego determinar los parámetros para el estado en la parte superior. (Scerri, Đorđević y Todorović 2017)

### Diagrama de bloques del sistema

El diagrama de bloque de la Figura 1 representa el sistema PIVI, donde  $r(t)$  representa el setpoint en grados, a esta señal se le resta la realimentación del encoder magnético AS5600, que representa el valor de la posición angular actual del péndulo.

Luego de realizar la diferencia entre las señales, se la introduce al controlador PID, implementado en un microcontrolador ESP32-s3, el cual se encargar de ajustar el duty del motor dependiendo de cuan grande es la señal de error. Una vez aplicado el control se lo introduce al péndulo para mantenerlo estable entorno al setpoint.

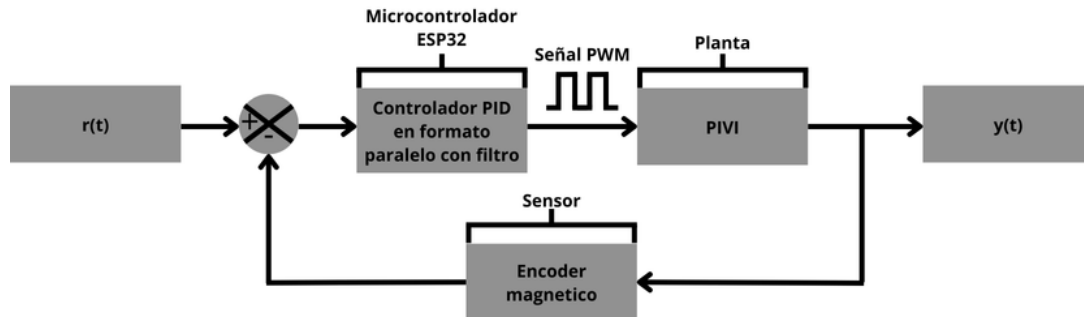


Figura 1: Diagrama de bloque del PIVI.

### Modelado matemático del sistema

Para el modelado del péndulo, se parte del circuito eléctrico equivalente de un motor de corriente directa, presentado en la Figura 2.

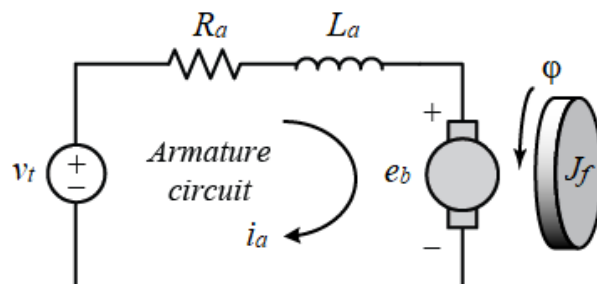


Figura 2: Circuito eléctrico equivalente de un motor de DC (Vasconcelos, M. y Foyo 2020).

- $v_t$  = Señal de control.
- $R_a$  = Resistencia de Armadura.
- $L_a$  = Inductancia de Armadura.
- $e_b$  = fuerza contra electromotriz.
- $\varphi$  = ángulo del rotor.
- $J_f$  = momento de inercia del Volante

Aplicando ley de Kirchhoff de Tensiones se obtiene la Ecuación 1. (Chapman 2015).

$$v_t = R_a * i_a + e_b \quad (1)$$

Reescribiendo la fuerza contra electromotriz como  $e_b = K * \phi * \omega_m = K * \phi * \dot{\varphi}$ , y donde  $K_b = K * \phi$ .

$$v_t = R_a * i_a + K_b * \dot{\varphi} \quad (2)$$

De la Figura 2 se determina la ecuación correspondiente al par inducido desarrollado por la máquina.

$$\begin{aligned} \tau_m &= K * \phi * i_a \\ &= K_m * i_a \end{aligned}$$

$$i_a = \frac{\tau_m}{K_m} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2), queda determinada la ecuación correspondiente al circuito equivalente del motor cd.

$$v_t = R_a * \frac{\tau_m}{K_m} + K_b * \dot{\varphi} \quad (4)$$

De acuerdo a lo establecido por la segunda Ley de Newton para la rotación, el par inducido se puede expresar de la siguiente forma.

$$\tau_m = J_f * \ddot{\varphi}$$

Y reemplazando en la Ecuación 4 y reordenando la misma, se obtiene la Ecuación 5.

$$\ddot{\varphi} + \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f} * \dot{\varphi} = v_t * \frac{K_m}{R_a * J_f} \quad (5)$$

Una vez que se obtuvo la ecuación del circuito equivalente del motor, expresada en términos de  $\varphi$  (posición angular del volante de inercia) y  $v_t$  (señal de control), se puede realizar la transformada de Laplace.

$$s^2 * \Phi(s) + \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f} * s * \Phi(s) = V_t(s) * \frac{K_m}{R_a * J_f}$$

$$\frac{\Phi(s)}{V_t(s)} = \frac{\frac{K_m}{R_a * J_f}}{s^2 + \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f} * s} \quad (6)$$

Reemplazando  $K_{bm} = \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f}$

$$\frac{\Phi(s)}{V_t(s)} = \frac{\frac{K_m}{R_a * J_f}}{s^2 + K_{bm} * s} \quad (7)$$

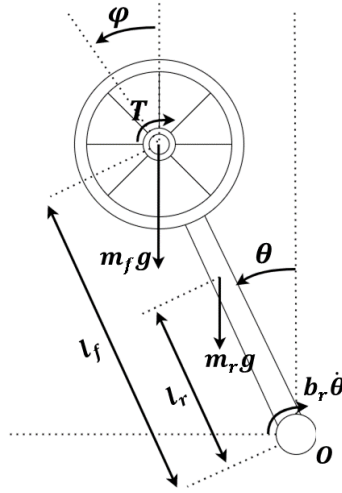


Figura 3: Modelo físico del Péndulo (Cardoso, Souza y Foyo 2022)

Partiendo de la Figura 3 se modela el péndulo a través de energías, utilizando la mecánica lagrangiana, reforma de la mecánica clásica. Partiendo del supuesto de  $L = K - U$ ; donde  $L$  representa el lagrangiano,  $K$  la energía cinética y  $U$  la energía potencial, se plantean las ecuaciones de energía que representan el modelo del péndulo.

$$K = \frac{1}{2} * J * \dot{\theta}^2 + b_r * \theta \quad (8)$$

$$U = m_f * l_f * g * \cos \theta + m_r * l_r * g * \cos \theta \quad (9)$$

Reemplazando (8) y (9) en el lagrangiano, queda expresado según la Ecuación 10 .

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} * J * \dot{\theta}^2 + b_r * \theta - m_f * l_f * g * \cos \theta - m_r * l_r * g * \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} * J * \dot{\theta}^2 + b_r * \theta - g * \cos \theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) \end{aligned} \quad (10)$$

Tras la obtención del lagrangiano, se debe aplicar la ecuación de Euler-Lagrange, Ecuación 11.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (11)$$

Aplicando las derivadas correspondientes al langrangiano, la ecuación que modeliza al péndulo a través de energías se presenta en la Ecuación 12. (Moghadam y Marshall 2021)

$$\ddot{\theta} * J + b_r * \dot{\theta} - g * \sin \theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) = -\tau_m \quad (12)$$

Al considerar el péndulo en su posición natural (hacia abajo), el ángulo se reemplaza por  $180 + \theta \Rightarrow \sin 180 + \theta = -\sin \theta$ . Además se considera variaciones de  $\theta$  tal que  $\theta \ll 1$  por ende  $-\sin \theta \approx -\theta$ . Con estas consideraciones se reescribe la Ecuación 12.

$$\ddot{\theta} * J + b_r * \dot{\theta} + g * \theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) = -J_f * \ddot{\varphi} \quad (13)$$

Aplicando transformada de Laplace a la Ecuación 13, y reemplazando  $ML = (m_f * l_f + m_r * l_r)$ .

$$J * s^2 * \Theta(s) + b_r * s * \Theta(s) + g * ML * \Theta(s) = -J_f * s^2 * \Phi(s) \quad (14)$$

Despejando  $\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)}$ .

$$\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)} = \frac{-J_f * s^2}{J * s^2 + b_r * s + g * ML} \quad (15)$$

Uniendo las ecuaciones 7 y 15 se puede obtener el modelo matemático que representa al PIVI en su posición natural.  $\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)} \frac{\Phi(s)}{V_i(s)} = \frac{\Theta(s)}{V_i(s)}$

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(s)}{V_t(s)} &= \frac{-J_f * s^2}{J * s^2 + b_r * s + g * ML} * \frac{\frac{K_m}{R_a * J_f}}{s^2 + K_{bm} * s} \\ &= \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s^2}{J * s^4 + J * K_{bm} * s^3 + b_r * K_{bm} * s^2 + g * ML * s^2 + g * ML * K_{bm} * s} \\ &= \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s^2}{J * s^4 + (J * K_{bm} + b_r) * s^3 + (b_r * K_{bm} + g * ML) * s^2 + g * ML * K_{bm} * s} \\ &= \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s^2}{s^4 + (K_{bm} + \frac{b_r}{J}) * s^3 + \frac{(b_r * K_{bm} + g * ML)}{J} * s^2 + \frac{g * ML * K_{bm}}{J} * s} \\ &= \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s}{s^3 + (K_{bm} + \frac{b_r}{J}) * s^2 + \frac{(b_r * K_{bm} + g * ML)}{J} * s + \frac{g * ML * K_{bm}}{J}} \end{aligned}$$

Dando como resultado la Ecuación 16.

$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)_{natural}} = \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s}{s^3 + \left(K_{bm} + \frac{b_r}{J}\right) * s^2 + \frac{(b_r * K_{bm} + g * ML)}{J} * s + \frac{g * ML * K_{bm}}{J}} \quad (16)$$

Una vez obtenido el modelo del péndulo en la posición natural, se procede a obtener el modelo matemático para el péndulo en la posición de equilibrio inestable. La diferencia se encuentra en la Ecuación 13, donde la nueva expresión queda como:

$$\ddot{\theta} * J + b_r * \dot{\theta} - g * \theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) = -J_f * \ddot{\varphi}$$

Esto hace que el modelo quede determinado por la Ecuación 17

$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)_{invertido}} = \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s}{s^3 + \left(K_{bm} + \frac{b_r}{J}\right) * s^2 + \frac{(b_r * K_{bm} - g * ML)}{J} * s - \frac{g * ML * K_{bm}}{J}} \quad (17)$$

## Identificación del sistema

La identificación de un sistema consiste en excitar al mismo con una señal para obtener su dinámica y comportamiento, para así determinar una función de transferencia y además poder deducir los parámetros, en este caso, del motor y los momentos de inercia y energía del sistema.

Para llevar a cabo este proceso se decide utilizar una secuencia PRBS (pseudo-random binary sequence), Figura 4, la cual es una señal periódica y determinista. Para el caso del péndulo se adoptó un tiempo de muestreo de  $T_s = 0,01 \text{ s}$  y 4200 muestras.

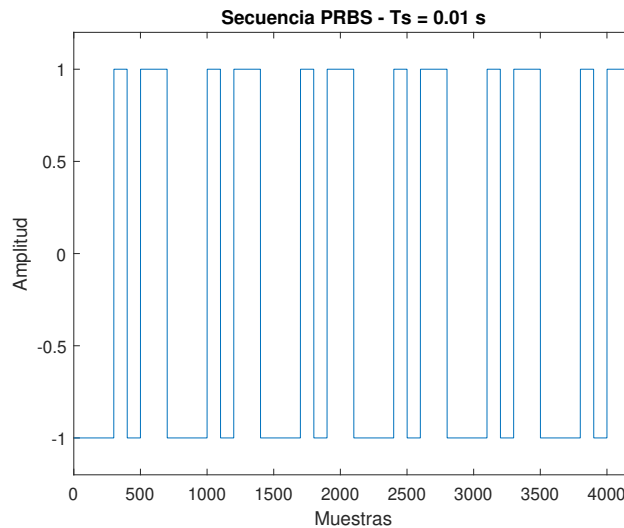


Figura 4: Gráfica de secuencia PRBS.

Como el sistema del PIVI presenta dos estados el único en el que se puede realizar la identificación es en la posición natural, ya que en este punto es un sistema LTI; y luego se identifica el modelo en equilibrio inestable partiendo del modelo obtenido en el estado natural.

Para poder introducir la secuencia en el sistema y poder excitar al motor correctamente, se asocia el signo con el sentido de giro, siendo  $-1$  asociado a un giro horario, y  $1$  a un sentido antihorario. Además, como la variable manipulada del sistema es la tensión del motor por medio de PWM, se opta por utilizar el 100 % de duty para la identificación. Los datos del encoder son almacenados en un archivo *.csv*, que luego se carga en MatLab para así realizar el proceso de identificación, Figura 5.

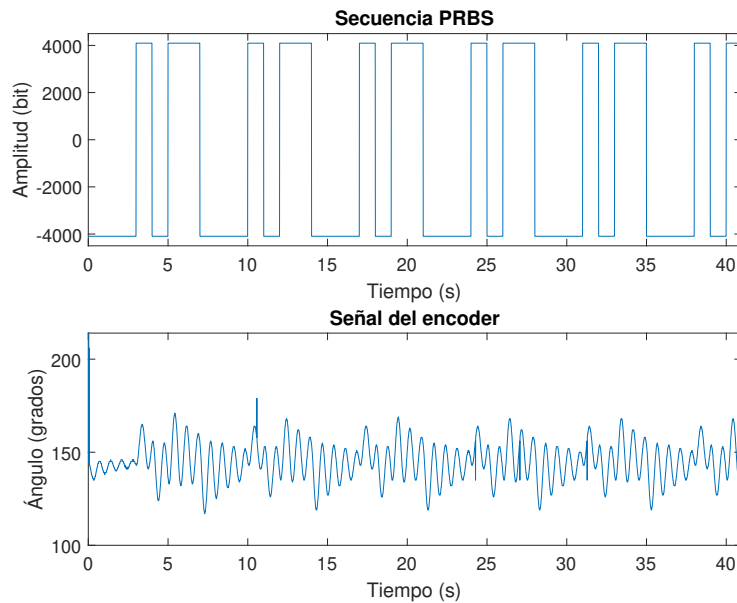


Figura 5: Identificación realizada con el péndulo en posición natural.

Una vez recopilado todos los datos necesarios, secuencia PRBS y posición angular del péndulo; se procede a utilizar la herramienta de MatLab *SystemIdentification*, en la cual mediante datos de experimentación logra estimar una función de transferencia de la planta, y luego valida la misma con datos de validación. Para el péndulo se optó por utilizar el 80 % de los datos recopilados para estimar el modelo, y el 20 % para validar el modelo obtenido.

Partiendo de la Ecuación 16, modelo matemático del sistema, se determina el número de polos y ceros necesarios para realizar la identificación mediante el uso de la herramienta de MatLab. Se colocan 3 polos y 1 cero para estimar la función de transferencia, lo que arroja una estimación de 89,3 %, y la validación del modelo se presenta en la Figura 6.

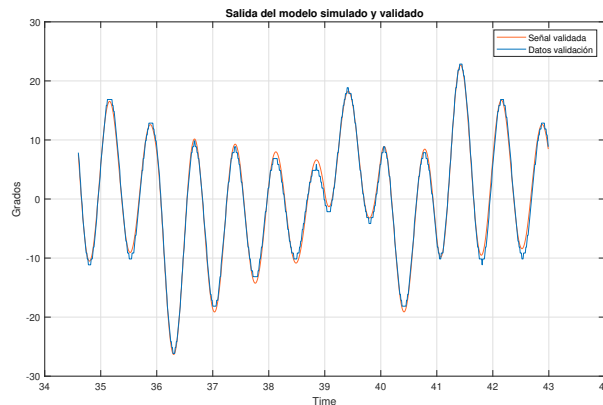


Figura 6: Validación del modelo realizada con *SystemIdentification*.



La función de transferencia identificada del modelo del péndulo invertido con volante de inercia se presenta en la Ecuación 18

$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)_{natural}} = \frac{0,1122 s + 0,009427}{s^3 + 1,468 s^2 + 75,36 s + 61,8} \quad (18)$$

Como se puede apreciar, la única diferencia respecto al modelo matemático obtenido, Ecuación 16; es que presenta un cero desplazado sobre el eje de abscisas, debido al término del numerador 0,009427.

Por medio de este modelo identificado, se pueden estimar los valores del modelo para el péndulo en la posición invertida, basándose en la Ecuación 16 y en la Ecuación 18, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones. Las incógnitas a encontrar son,  $K_{bm}$ ,  $b_r$  y  $J$ , ya que  $g$  (aceleración gravitatoria) y  $ML$  se puede obtener mediante  $l_r * m_r + l_f * m_f$ , donde  $m_r$  corresponde a la masa del brazo del péndulo 0,11 kg,  $l_r$  corresponde a la distancia desde el eje de rotación al centro de masa del brazo del péndulo 0,08 m;  $m_f$  es la masa del motor junto al volante de inercia 0,3 kg y  $l_f$  a la distancia desde el eje de rotación al centro de masa del motor 0,14 m

$$\begin{cases} K_{bm} + \frac{b_r}{J} = 1,468 \\ \frac{b_r * K_{bm} + gML}{J} = 75,36 \\ \frac{gML * K_{bm}}{J} = 61,8 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se llega a los siguientes valores:

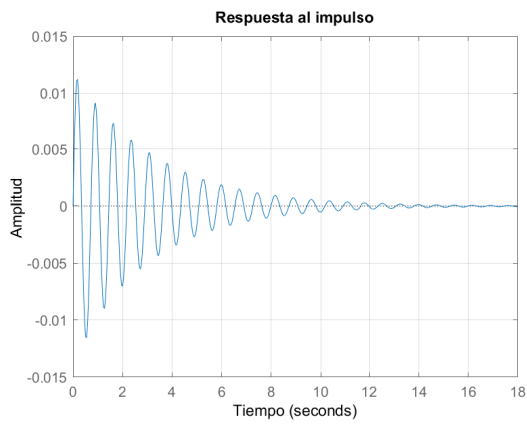
$$\begin{aligned} K_{bm} &= 0,820912 \\ b_r &= 0,00428209 \\ J &= 0,00661748 \end{aligned}$$

Y reemplazando los mismos en la Ecuación 17, se obtiene el modelo para el péndulo en equilibrio inestable.

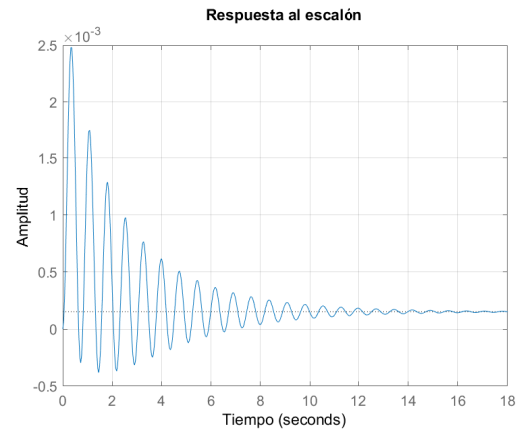
$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)_{invertido}} = \frac{-0,1122 s}{s^3 + 1,468 s^2 - 74,2976 s - 61,8} \quad (19)$$

## Análisis de estabilidad y lugar geométrico de raíces de la planta

En las Figuras 7 y 8 se presentan las respuestas al escalón e impulso, tanto del modelo matemático como del modelo estimado. Debido a los resultados, se puede concluir que el sistema es estable por naturaleza, en la posición natural del mismo; ya que  $Amplitud \rightarrow 0$  mientras  $t \rightarrow \infty$ .

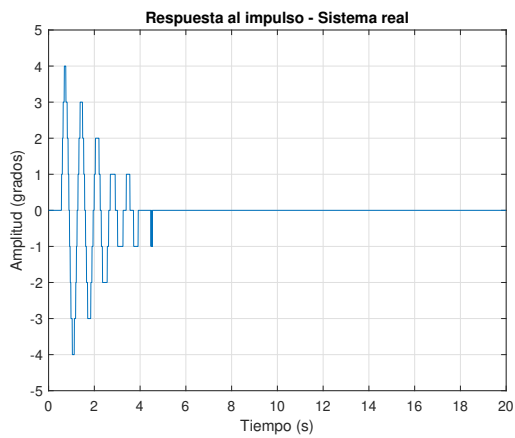


(a) Respuesta al impulso.

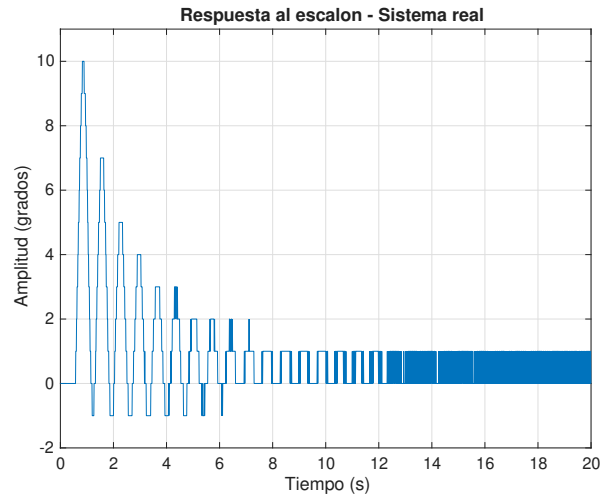


(b) Respuesta al escalón.

Figura 7: Respuestas del sistema en posición natural del modelo estimado.



(a) Respuesta al impulso - Planta.



(b) Respuesta al escalón - Planta.

Figura 8: Respuestas del sistema en posición natural del modelo real.

Realizando el análisis en relación a la ubicación de polos y ceros, se obtiene la misma conclusión debido a que los polos y ceros se encuentran en el semiplano izquierdo, Figura 9.

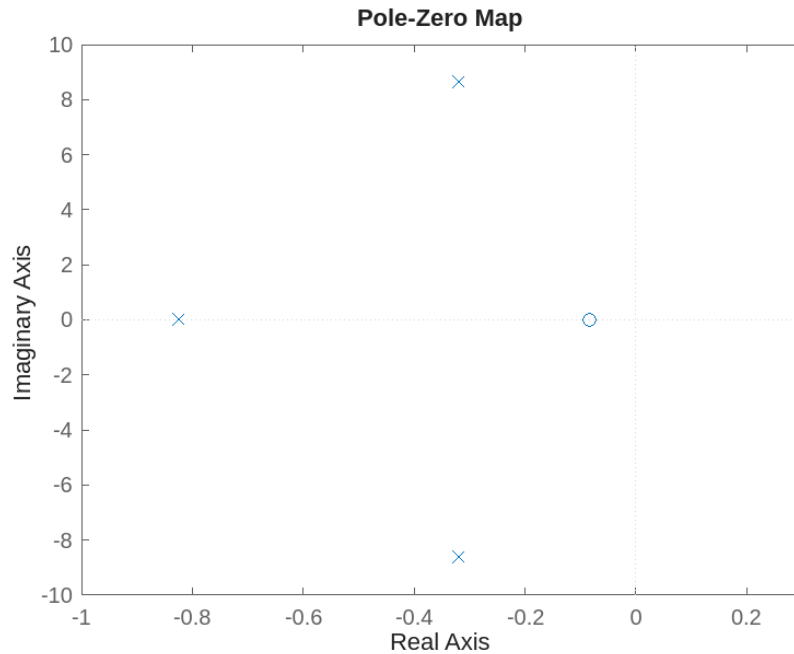
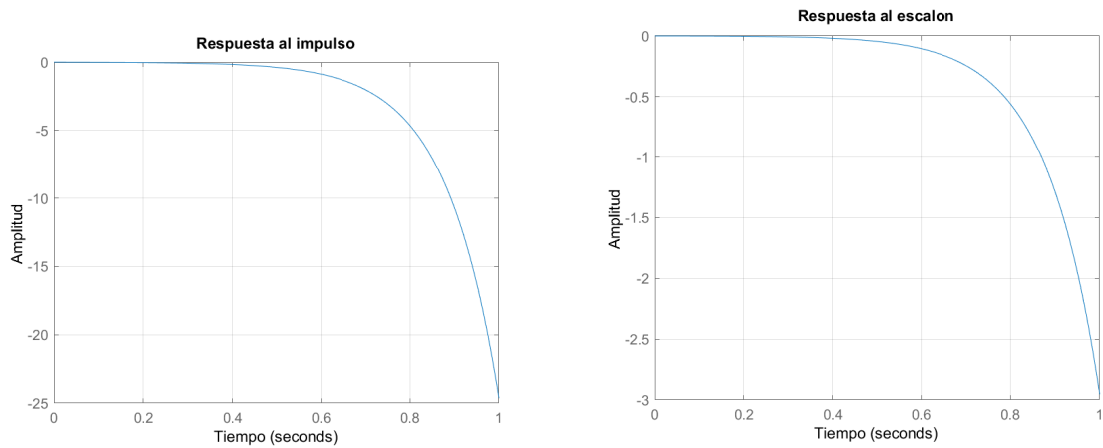


Figura 9: Diagrama de polos y ceros.

Para el caso en el que el péndulo se encuentra en su posición invertida o de equilibrio inestable, ante cualquier perturbación, el sistema es inestable ya que el péndulo cae a su posición natural, esto es apreciable en la Figura 10



(a) Respuesta al impulso.

(b) Respuesta al escalón.

Figura 10: Respuestas del sistema en posición invertida del modelo matemático obtenido.

También se puede realizar el análisis de la posición de polos y ceros del sistema, donde como se aprecia en la Figura 11, hay un polo en el semiplano derecho, haciendo que en la posición invertida el sistema es inestable.

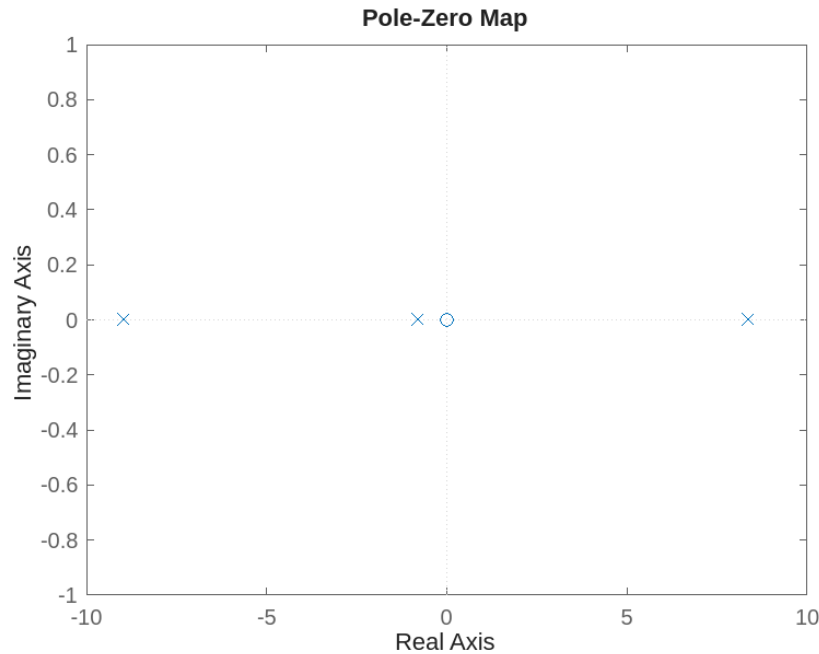
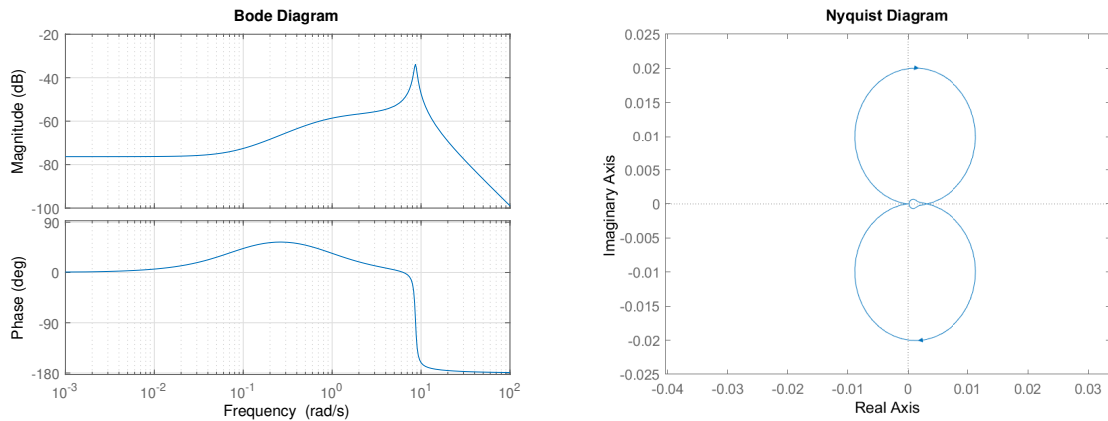


Figura 11: Diagrama de polos y ceros - equilibrio inestable.

## Análisis de respuesta en frecuencia del sistema



(a) Diagrama de Bode

(b) Diagrama de Nyquist

Figura 12: Respuesta en frecuencia del sistema.

En la Figura 12b también es posible determinar la estabilidad, siendo que las curvas no rodean al punto crítico  $(-1; 0)$ , el sistema es estable.

## Controlador PID

Como se presentó en las secciones anterior, el sistema de PIVI es estable por naturaleza en posición hacia abajo y es inestable en la posición superior pero, en ambos casos es posible la aplicación de un control para mejorar la respuesta de las Figura 7a y 8a.

Para el primer caso mencionado la función del control es disminuir al máximo posible las oscilaciones, y mejorar la respuesta de rechazo ante perturbaciones. Cuando el péndulo

es posicionado en la parte superior (equilibrio inestable), la función del sistema de control es mantener el péndulo en ese punto, y además mejorar el rechazo a perturbaciones.

En ambos casos se opta por aplicar un controlador PID con filtro derivativo. La justificación de esto último es que el derivador en un controlador PID es sensible al ruido en la señal de entrada, esto se debe a que el término derivativo calcula la tasa de cambio de la señal y cualquier pequeña fluctuación en la señal (como el ruido) se amplificara cuando se derive. Las señales de entrada suelen tener ruido debido a la naturaleza de los sensores o las perturbaciones en el entorno, si el ruido no se filtra adecuadamente, el término derivativo puede generar grandes fluctuaciones en la salida del controlador lo que lleva a un comportamiento no deseado del sistema. Para solucionar este problema se utiliza un filtro pasa bajos que suaviza la señal y reduce el impacto del ruido en el control derivativo.

Un PID es un sistema de control que, mediante la realimentación de la salida del sistema y conociendo la entrada actual al mismo, calcula la acción de corrección a realizar por medio del error entre ambas señales mencionadas. En la Figura 13 se muestra la composición interna del PID.

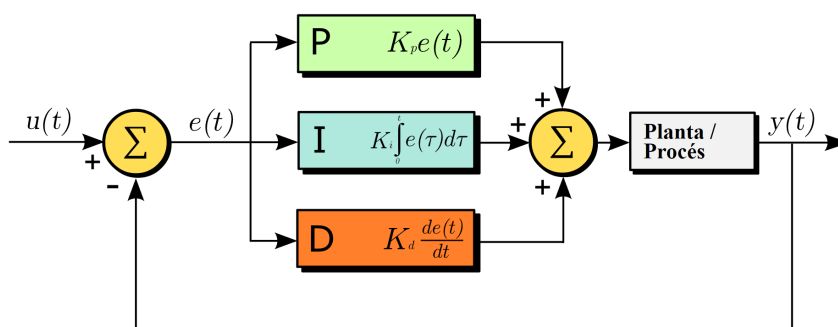


Figura 13: Diagrama de bloques PID

- $u(t)$ , señal de referencia - set-point.
- $e(t)$ , señal de error que se introduce en el PID.  $e(t) = u(t) - y(t)$
- $y(t)$ , salida del sistema.

En la Figura 13 se presenta el PID en 3 bloques, el primero (color verde) representa la **acción proporcional - P**, que consiste en el producto de la señal de error por una constante proporcional,  $K_p$ , haciendo que el error de estado estacionario se aproxime a 0, si la constante es muy grande genera que la banda proporcional disminuya y el controlador entre en zona de saturación más rápidamente.

El segundo bloque (color celeste) representa la **acción integral - I**, el cual tiene como propósito disminuir y eliminar el error de estado estacionario provocado por perturbaciones exteriores, las cuales el control proporcional no es capaz de mitigar; la acción integral consiste en la acumulación de error desde el tiempo pasado a la actualidad, multiplicando el mismo por una constante  $K_i$ .

Por último, el tercer bloque (color anaranjado) consiste en la **acción derivativa - D**, que se compone por la derivada del error multiplicada por una constante derivativa  $K_d$ ; esta acción predice el error futuro, disminuyendo los sobreimpulsos generados por la acción integral.

Con estos conceptos, se elige aplicar un PID con filtro derivativo, Figura 14, donde la Ecuación 20 representa la función de transferencia de este control en el dominio de Laplace.

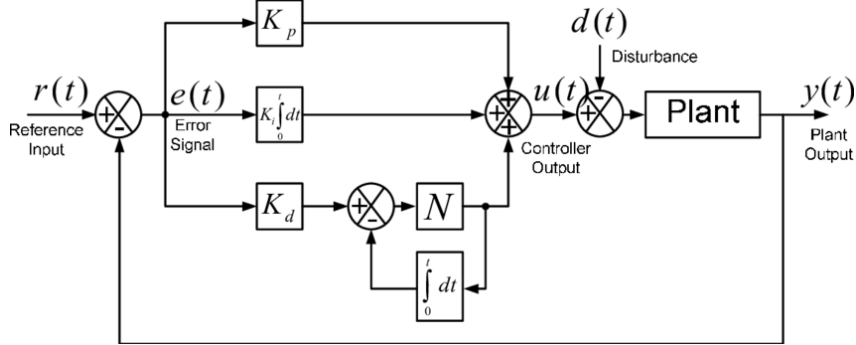


Figura 14: Diagrama de bloques PID con filtro derivativo

$$PID(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_i * \frac{1}{s} + K_d * \frac{N}{1 + \frac{N}{s}} \quad (20)$$

Como el control PID se aplica en un microcontrolador, se debe expresar la Ecuación 20 en tiempo discreto, y su posterior obtención de ecuación en diferencias.

$$PID(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_i * \frac{T_s}{z - 1} + K_d * \frac{N}{1 + N * \frac{T_s}{z - 1}} \quad (21)$$

Agrupando los términos se puede reescribir como en la Ecuación 22

$$\begin{aligned} Numerador = & (K_p + K_d N) z^2 \\ & + (-2K_p - 2K_d N + K_i T_s + K_p N T_s) z \\ & + (K_p + K_d N - K_i T_s - K_p N T_s + K_i N T_s^2) \end{aligned}$$

$$Denominador = z^2 + (-2 + N T_s) z + (1 - N T_s)$$

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{z^2 + (-2 + N T_s) z + (1 - N T_s)} & \left[ (K_p + K_d N) z^2 \right. \\ & + (-2K_p - 2K_d N + K_i T_s + K_p N T_s) z \\ & \left. + (K_p + K_d N - K_i T_s - K_p N T_s + K_i N T_s^2) \right] \quad (22) \end{aligned}$$

Y expresando lo mismo pero en ecuación en diferencias, Ecuación 23.

$$\begin{aligned} u[n] = & (K_p + K_d N) e[n] \\ & + (-2K_p - 2K_d N + K_i T_s + K_p N T_s) e[n-1] \\ & + (K_p + K_d N - K_i T_s - K_p N T_s + K_i N T_s^2) e[n-2] \\ & - (-2 + N T_s) u[n-1] \\ & - (1 - N T_s) u[n-2] \end{aligned} \quad (23)$$

- $K_p$ , constante proporcional.
- $K_i$ , constante integral.
- $K_d$ , constante derivativa.
- $N$ , coeficiente de filtro derivativo.
- $T_s$ , tiempo de muestreo.

### Limitaciones del sistema

El sistema posee una limitación, la cual es el motor de CD, el cual es de 24 V pero debido al puente H solo se puede alimentar con 12 V, esto produce que el sistema no tenga la capacidad de respuesta correcta. El duty del PWM solo es posible controlarlo entre un 60 % y el 100 %, producto de la baja tensión de alimentación al mismo; esto también hace que el motor no genere el suficiente momento como para poder mantener el péndulo. Si bien se anexo más peso al volante de inercia, no fue suficiente.

Producto de esto, el péndulo en la posición de equilibrio inestable solo es posible controlarlo agregando un contrapeso al péndulo, esto genera que la inestabilidad se reduzca, pero manteniendo al sistema inestable en ese estado.

Estas limitaciones se encontraron cuando se realizaron todas las pruebas pertinentes del sistema en el laboratorio.

El control PID al tener un filtro pasa bajo en el derivativo introduce un retardo y puede suavizar más de lo necesario la señal, limitando la capacidad del término derivativo para reaccionar a cambios rápidos. Siempre se deberá tener un compromiso entre una respuesta rápida y el filtrado del ruido.

### Sintonización PID

Para realizar la sintonización se utilizó la herramienta de MatLab *PIDTuner*. En la Figura 16 se presentan los resultados luego de aplicado el control PID. Cabe destacar que los valores que arrojó *PIDTuner* se utilizaron como aproximación, luego del análisis del sistema fueron modificados para obtener una respuesta óptima a lo deseado.

La implementación del PID se realizó sobre una placa de desarrollo ESP32-s3 en conexión con un puente H que mediante una señal PWM brindada por la salida analógica del microcontrolador es posible regular el sentido de giro y la velocidad del motor.

Para la determinación de la posición angular del péndulo se utiliza un encoder magnético, que envía los datos al microcontrolador para que éste realice la comparación con el

setpoint y aplique la señal de control correspondiente para corregir la posición del péndulo.

La lógica de funcionamiento del programa es la siguiente, se crea un timer de 10 ms ( $T_s = 0,01$  s), correspondiente con el tiempo de muestreo, que periódicamente realiza la acción de control. En la función de control se mide la posición actual del péndulo a través del encoder, luego se la compara con el setpoint, y el resultado se lo introduce en el controlador PID discreto.

Una vez aplicado el control PID, se determina el sentido de giro dependiendo del signo que posea el error, y luego el valor absoluto del mismo es aplicado como el duty del PWM al motor. Debido a las limitaciones de duty mencionadas anteriormente, se realiza un mapeo del valor de duty donde 0 % se corresponde a 2457 *bits* en vez de 0 *bits* y el 100 % se corresponde con 4095 *bits*. En la Figura 16 se pueden observar los resultados obtenidos.

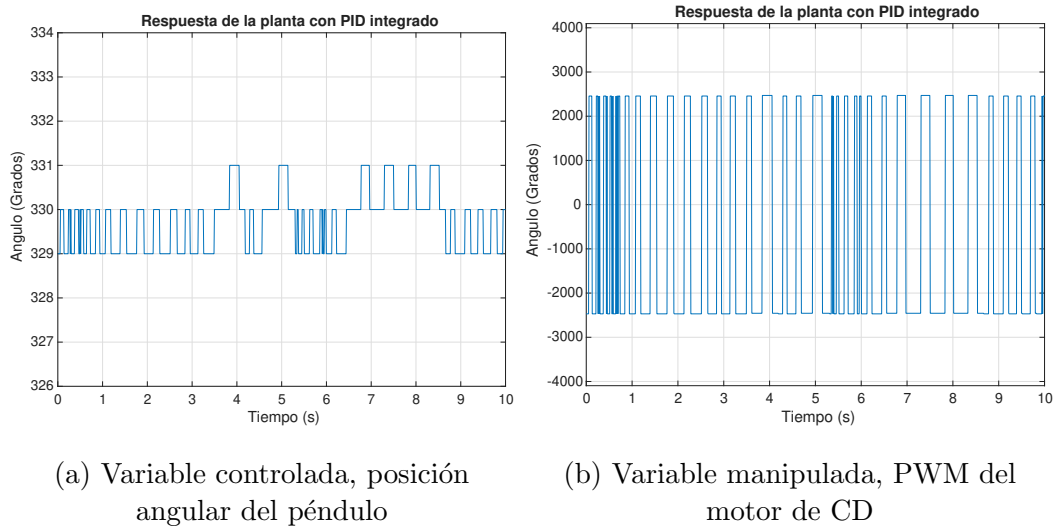


Figura 15: Respuesta del sistema en equilibrio inestable, sin perturbaciones.

En la Figura 15 se aprecia el péndulo en la posición de equilibrio inestable, sin perturbación. Además, en la Figura 16 se aprecia la respuesta del péndulo ante perturbaciones aleatorias realizadas manualmente.

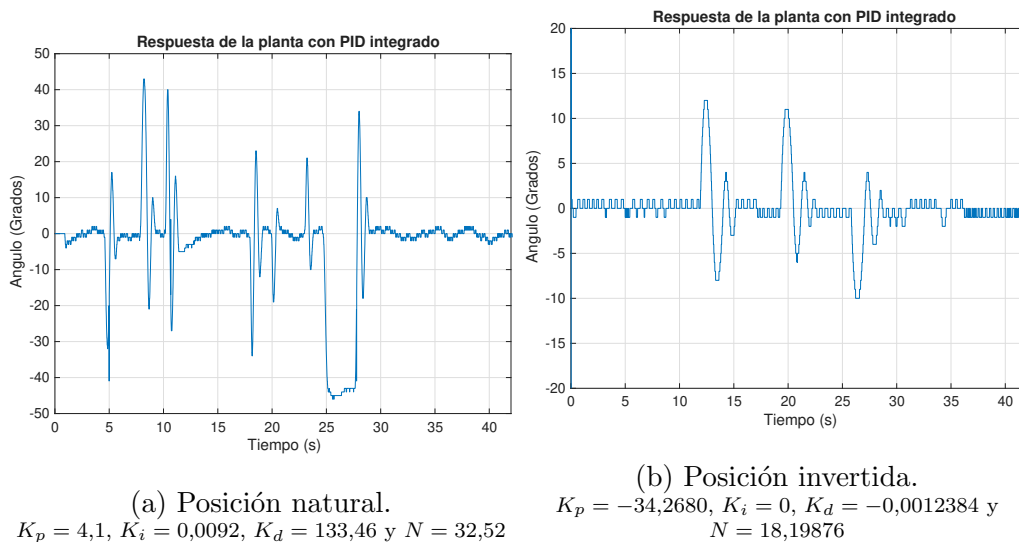


Figura 16: Respuestas del sistema en ambas posiciones con PID integrado.



## Implementación física del sistema

- Sensor de posición angular, encoder magnético AS5600.
- Motor de CD, extraído de impresora.
- Puente H, L298n.

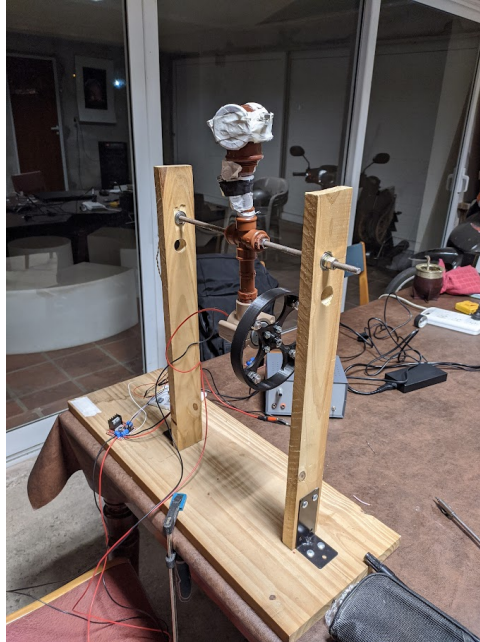
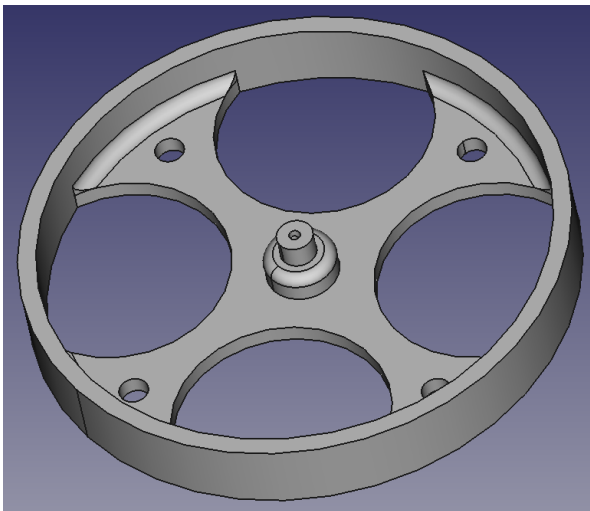


Figura 17: Sistema físico PIVL.



(a) Diseño 3D.



(b) Impresión.

Figura 18: Volante de inercia.

## CONCLUSIÓN

Como corolario al trabajo, se pudo realizar el modelo matemático del sistema como su correspondiente identificación, y se implementó correctamente un PID discreto en un microcontrolador.

Los resultados del control del péndulo fueron suficientes para comprender todo los conceptos y contenidos abarcados para realizar tanto la obtención del modelo como el desarrollo de un sistema de control. Además el modelo empírico obtenido se corresponde de manera óptima con el modelo físico.

Se pudo realizar el control del péndulo en ambos estados, teniendo en cuenta las limitaciones.

## REFERENCIAS

- [1] Jeremy Scerri, Goran S. Đorđević y Darko Todorović. «Modeling and control of a reaction wheel pendulum with visual feedback». En: *2017 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*. 2017, págs. 024-029. DOI: 10.1109/CADIAG.2017.8075625.
- [2] José R. Vasconcelos, González Elizabeth M. y Pedro M. del Foyo. «Design and Control of a Flywheel Inverted Pendulum System». En: *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*. Vol. 1. Oct. de 2020. DOI: 10.20906/CBA2022/390.
- [3] Stephen Chapman. *Máquinas eléctricas*. 5ta. McGrawHill, 2015.
- [4] Victor Cardoso, Thiago Souza y Pedro M. del Foyo. «Flywheel Inverted Pendulum Design for Evaluation of Swing-Up Energy-Based Strategies». En: *Anais do XXIV Congresso Brasileiro de Automática*. Vol. 3. Oct. de 2022. DOI: 10.20906/CBA2022/3529.
- [5] Amir Ali Amiri Moghadam y Matthew Marshall. «Robust Control of the Flywheel Inverted Pendulum System Considering Parameter Uncertainty». En: *2021 American Control Conference (ACC)*. 2021, págs. 1730-1735. DOI: 10.23919/ACC50511.2021.9483178.