Trabajo Final: Péndulo Invertido con Volante de Inercia

Alesandria, Alejo Samuel
alealesandria@gmail.com

Delfino, Ramiro
pokramiro12@gmail.com

Contenido

1. INTRODUCCIÓN
   - Conceptos preliminares
2. DESARROLLO
   - Características generales del sistema
   - Diagrama de bloques del sistema
   - Modelado matemático del sistema
   - Identificación del sistema
   - Análisis de estabilidad y lugar geométrico de raíces de la planta
   - Análisis de respuesta en frecuencia del sistema
   - Controlador PID
     - Limitaciones del sistema
     - Sintonización PID
   - Implementación física del sistema
3. CONCLUSIÓN

Conceptos preliminares

- **Sistemas invariantes en el tiempo**.
- **Sistema lineal**.
- **Variable controlada**.
- **Variable manipulada**.
- **Sistema de control**.
- **Planta**.
- **Perturbaciones**.

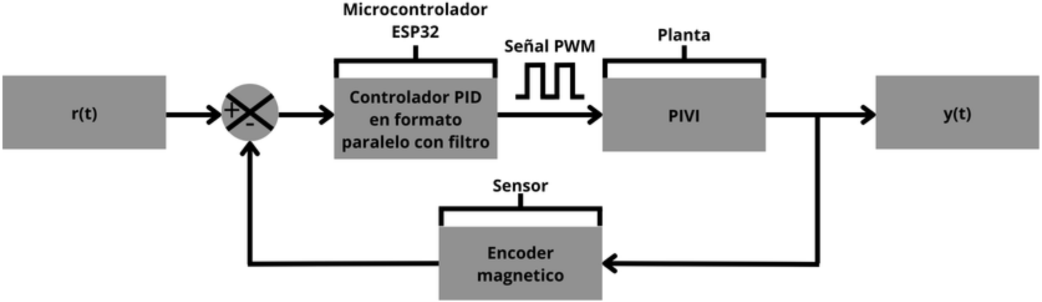
Características generales del sistema

- Estable cuando está hacia abajo.
- Inestable cuando está vertical hacia arriba.
- Se requiere control activo para mantenerlo en equilibrio.

Construcción

- Barra fija en un extremo.
- Motor con volante de inercia en el extremo opuesto.
- El motor es regulado mediante PWM.
- Para determinar la posición angular del péndulo se utiliza un encoder magnético.

Diagrama de bloques del sistema



- $r(t)$, señal de referencia.
- $y(t)$, salida del sistema.
- Señal PWM, variable manipulada.
- Sensor (posición angular), variable controlada.

Modelado matemático del sistema

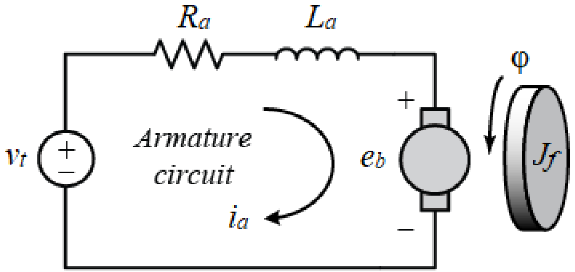


Figura: Circuito eléctrico equivalente de un motor de DC.

- v_t = Señal de control.
- R_a = Resistencia de Armadura.
- L_a = Inductancia de Armadura.
- e_b = fuerza contra electromotriz.
- φ = ángulo del rotor.
- J_f = momento de inercia del Volante

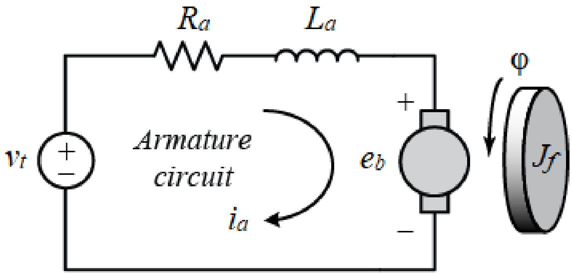


Figura: Circuito eléctrico equivalente de un motor de DC.

Aplicando ley de Kirchhoff de Tensiones:

$$v_t = R_a * i_a + e_b$$

Se reescribe $e_b = K * \phi * \omega_m = K * \phi * \dot{\varphi}$, y donde $K_b = K * \phi$

Modelado matemático del sistema

Se determina el par inducido como:

$$\tau_m = K * \phi * i_a$$
$$J_f * \ddot{\varphi} = K_m * i_a$$

Reemplazando y reordenando la ecuación de tensiones de Kirchhoff.

$$\ddot{\varphi} + \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f} * \dot{\varphi} = v_t * \frac{K_m}{R_a * J_f}$$

Y aplicando transformada de Laplace.

$$s^2 * \Phi(s) + \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f} * s * \Phi(s) = V_t(s) * \frac{K_m}{R_a * J_f}$$

Reemplazando $K_{bm} = \frac{K_b * K_m}{R_a * J_f}$ y despejando $\frac{\Phi(s)}{V_t(s)}$.

$$\frac{\Phi(s)}{V_t(s)} = \frac{\frac{K_m}{R_a * J_f}}{s^2 + K_{bm} * s}$$

Φ (posición angular del volante de inercia) y V_t (señal de control)

Modelado matemático del sistema

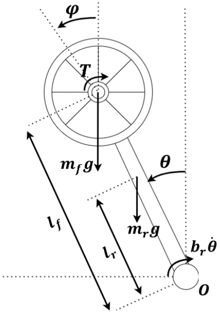


Figura: Modelo físico del Péndulo.

Se modela el péndulo a través de mecánica lagrangiana.

$$L = K - U$$

L, representa el lagrangiano, K la energía cinética y U la energía potencial.

Modelado matemático del sistema

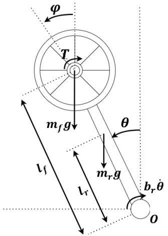


Figura: Modelo físico del Péndulo.

Se plantean las ecuación correspondiente a la energía y se reemplaza en el lagrangiano.

$$L = \frac{1}{2} * J * \dot{\theta}^2 + b_r * \theta - g * \cos\theta * (m_f * l_f + m_r * l_r)$$

Modelado matemático del sistema

Se aplica la ecuación de Euler-Lagrange, y se obtiene. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau$

$$\ddot{\theta} * J + b_r * \dot{\theta} - g * \sin\theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) = -\tau_m$$

Al considerar el péndulo en su posición natural, $\sin(180 + \theta) = -\sin\theta \approx -\theta$. Solo cuando $\theta \ll 1$

$$\ddot{\theta} * J + b_r * \dot{\theta} + g * \theta * ML = -J_f * \ddot{\varphi}$$

$ML = (m_f * l_f + m_r * l_r)$
Aplicando transformada de Laplace, y despejando $\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)}$

$$\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)} = \frac{-J_f * s^2}{J * s^2 + b_r * s + g * ML}$$

Θ (posición angular del péndulo) y Φ (posición angular del volante de inercia)

Modelado matemático del sistema

Uniendo las ecuaciones obtenidas en dominio de Laplace. $\frac{\Theta(s)}{\Phi(s)} \frac{\Phi(s)}{V_t(s)} = \frac{\Theta(s)}{V_t(s)}$

Función de transferencia del péndulo en posición natural

$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)}_{natural} = \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s}{s^3 + \left(K_{bm} + \frac{b_r}{J}\right) * s^2 + \frac{(b_r * K_{bm} + g * ML)}{J} * s + \frac{g * ML * K_{bm}}{J}}$$

Para obtener la función para el péndulo en posición de equilibrio inestable se reescribe la ecuación de energías.

Función de transferencia del péndulo en posición invertida

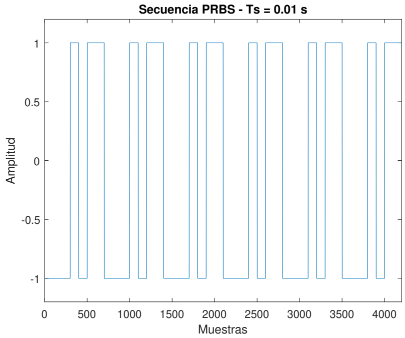
$$\ddot{\theta} * J + b_r * \dot{\theta} - g * \theta * (m_f * l_f + m_r * l_r) = -J_f * \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)}_{invertido} = \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s}{s^3 + \left(K_{bm} + \frac{b_r}{J}\right) * s^2 + \frac{(b_r * K_{bm} - g * ML)}{J} * s - \frac{g * ML * K_{bm}}{J}}$$

Identificación del sistema

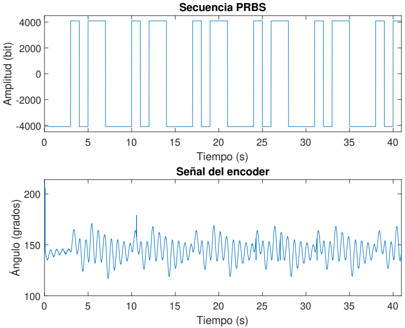
- Excitar al sistema con una señal para determinar la dinámica.
- Poder deducir los parámetros.
- Determinar la función de transferencia.

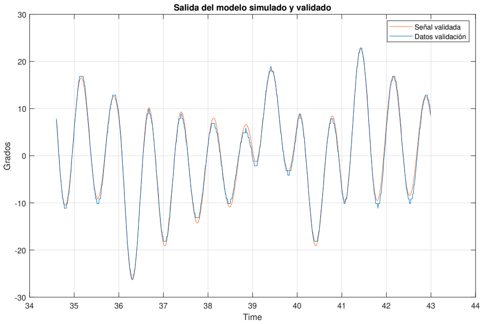
Se utiliza una secuencia PRBS, $T_s = 0{,}01\ s$ y 4200 muestras.



Identificación del sistema

Una vez recopilado los datos se utiliza MatLab *SystemIdentification*.





Como el modelo calculado posee tres polos y un cero, se colocan estos datos en la herramienta, dando un 89,3 % de correspondencia.

$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)}_{natural} = \frac{0{,}1122\ s + 0{,}009427}{s^3 + 1{,}468\ s^2 + 75{,}36\ s + 61{,}8}$$

Identificación del sistema

$$\frac{\Theta(s)}{V_t(s)}_{invertido} = \frac{\frac{-K_m}{R_a} * s}{s^3 + \left(K_{bm} + \frac{b_r}{J}\right) * s^2 + \frac{(b_r * K_{bm} - g * ML)}{J} * s - \frac{g * ML * K_{bm}}{J}}$$

A través de la identificación obtenida y conociendo la función de transferencia para el modelo invertido, se determina la misma resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} K_{bm} + \dfrac{b_r}{J} = 1,468 \\ \dfrac{b_r * K_{bm} + gML}{J} = 75{,}36 \\ \dfrac{gML * K_{bm}}{J} = 61{,}8 \end{cases}$$

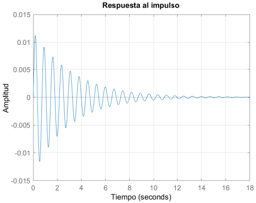
Y reemplazando en la ecuación del modelo invertido.

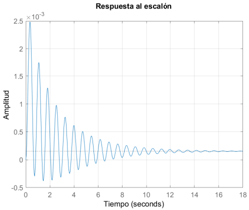
$$\frac{\mathit{\Theta}(s)}{V_t(s)}_{invertido} = \frac{-0{,}1122\ s}{s^3 + 1{,}468\ s^2 - 74{,}2976\ s - 61{,}8}$$

Análisis de estabilidad

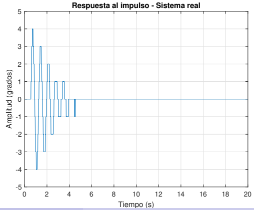
Péndulo en posición natural

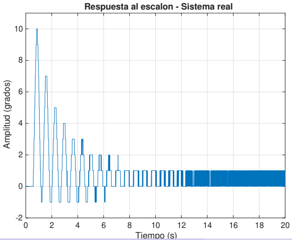
Modelo estimado.



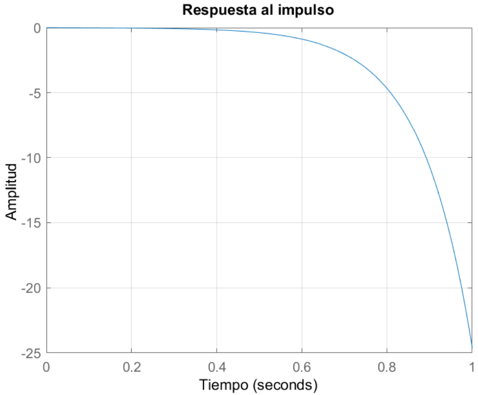


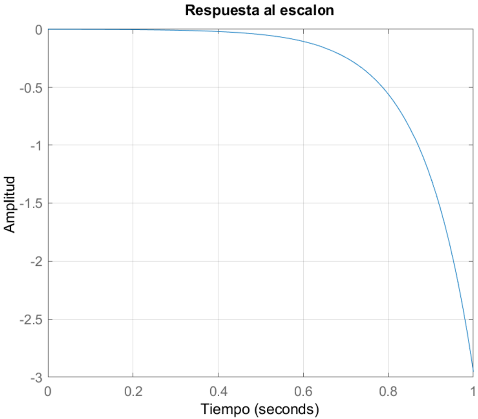
Péndulo real.





Péndulo en posición Invertida





Péndulo en posición natural

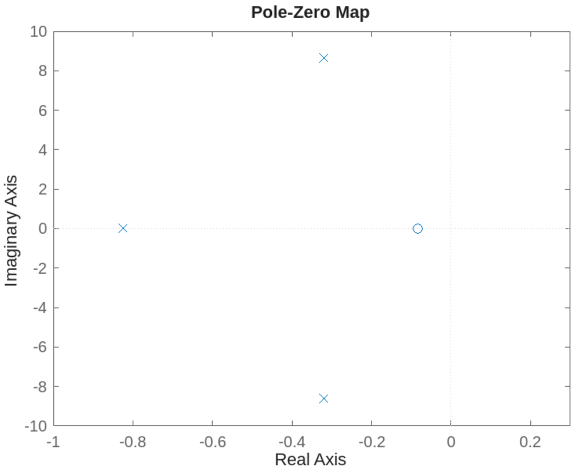
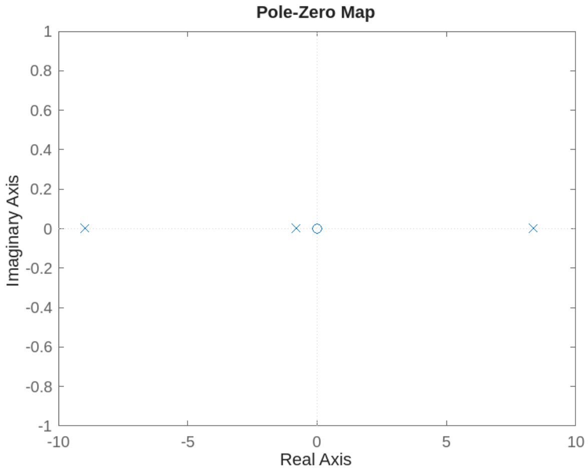
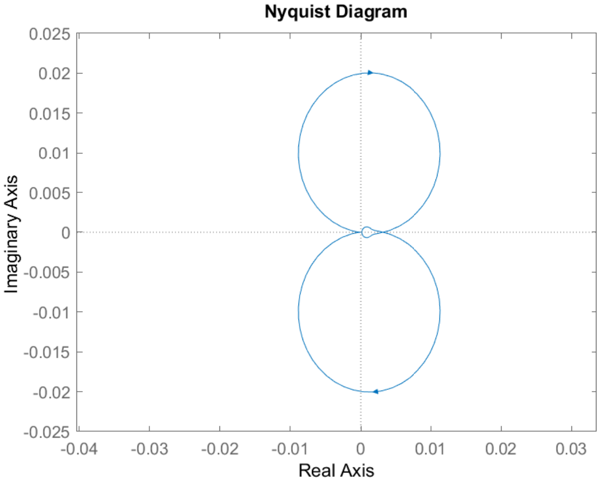


Diagrama de polos y ceros

Péndulo en posición invertida

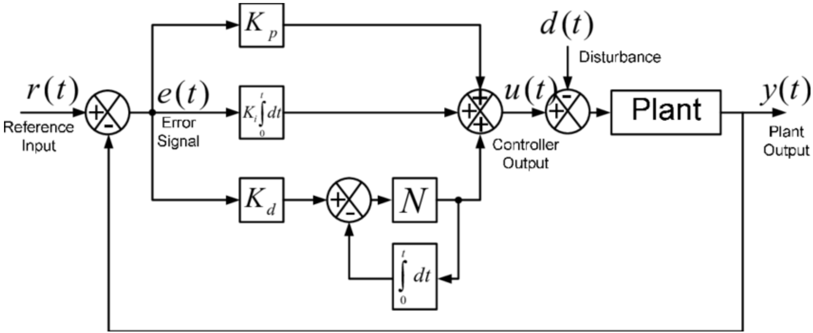


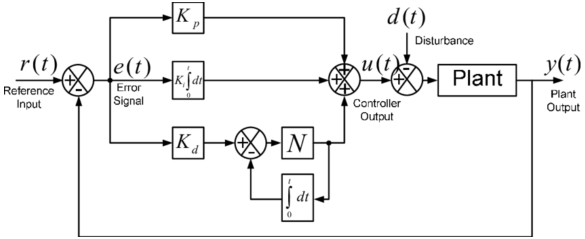
Análisis de respuesta en frecuencia del sistema



Objetivos:

- Mejorar la respuesta del sistema.
- Disminuir las oscilaciones.
- Mantener el péndulo en posición vertical.
- Mejorar el rechazo a perturbaciones.



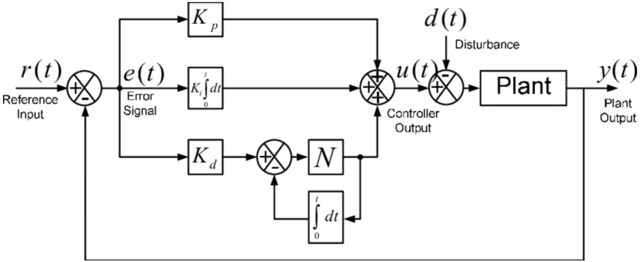


$$PID(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_i * \frac{1}{s} + K_d * \frac{N}{1 + \frac{N}{s}}$$

Se expresa la función de transferencia en tiempo discreto. Se utiliza el método de Forward Euler. $s = \frac{T_s}{z-1}$

$$PID(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + K_i * \frac{T_s}{z-1} + K_d * \frac{N}{1 + N * \frac{T_s}{z-1}}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{(K_p + K_d N)z^2 + (-2K_p - 2K_d N + K_i T_s + K_p N T_s)z + (K_p + K_d N - K_i T_s - K_p N T_s + K_i N T_s^2)}{z^2 + (-2 + NT_s)z + (1 - NT_s)}$$



Como el control se aplica en un microcontrolador, la función de transferencia en tiempo discreto se debe expresar en ecuación en diferencias.

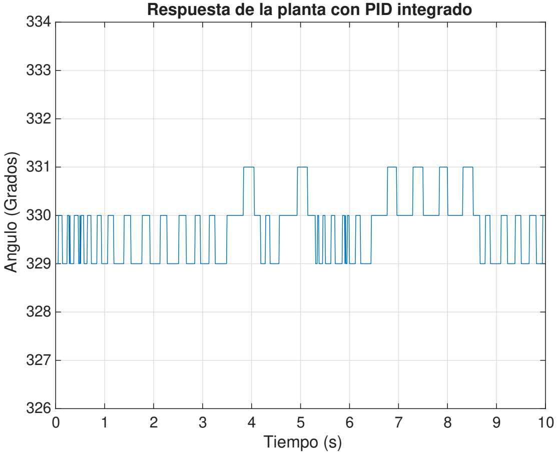
$$
\begin{aligned}
u[n] = {} & (K_p + K_d N)\ e[n] \\
& + (-2K_p - 2K_d N + K_i T_s + K_p N T_s)\ e[n-1] \\
& + (K_p + K_d N - K_i T_s - K_p N T_s + K_i N T_s^2)\ e[n-2] \\
& - (-2 + N T_s)\ u[n-1] \\
& - (1 - N T_s)\ u[n-2]
\end{aligned}
$$

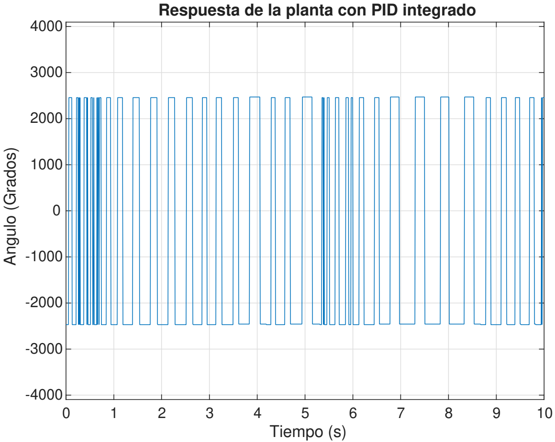
Limitaciones del sistema

- Alimentación del motor de CD.
- Limitación del duty del PWM en un rango de 60 % *a* 100 %.
- Solo es controlable en posición de equilibrio inestable agregando un contrapeso.

Sintonización PID

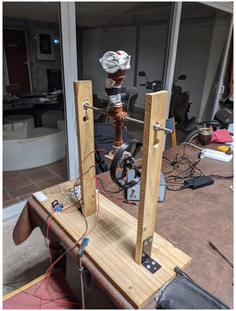
La sintonización se realizó en MatLab con *PIDTuner*





Los valores arrojados en *PIDTuner* fueron utilizados como una aproximación, luego se sintonizó de acuerdo con la respuesta visible del sistema.

Implementación física del sistema



- El control PID se realizó en una placa de desarrollo ESP32-s3.
- Para controlar el motor se utilizó un puente H, L298n.
- Para la medición de la posición angular del péndulo se empleó un encoder magnético.
- Se diseñó un volante de inercia.
- El motor de CD se extrajo de una impresora no funcional.

DEMOSTRACIÓN

Espacio de preguntas

Conclusiones

- Se pudo implementar correctamente un control PID.
- Se desarrolló analíticamente el sistema.
- El modelo empírico se corresponde con el modelo físico.
- Se analizó el modelo físico, y se realizaron las comparaciones pertinentes.

¡Gracias por su atención!

Alesandria Alejo - Delfino Ramiro
UTN Facultad Regional San Francisco
03 de septiembre de 2024

Referencias

[1] Victor Cardoso, Thiago Souza y Pedro M. del Foyo. «Flywheel Inverted Pendulum Design for Evaluation of Swing-Up Energy-Based Strategies». En: *Anais do XXIV Congresso Brasileiro de Automática*. Vol. 3. Oct. de 2022. DOI: 10.20906/CBA2022/3529.

[2] José R. Vasconcelos, González Elizabeth M. y Pedro M. del Foyo. «Design and Control of a Flywheel Inverted Pendulum System». En: *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*. Vol. 1. Oct. de 2020. DOI: 10.20906/CBA2022/390.

[3] Amir Ali Amiri Moghadam y Matthew Marshall. «Robust Control of the Flywheel Inverted Pendulum System Considering Parameter Uncertainty». En: *2021 American Control Conference (ACC)*. 2021, págs. 1730-1735. DOI: 10.23919/ACC50511.2021.9483178.

[4] Jeremy Scerri, Goran S. Đorđević y Darko Todorović. «Modeling and control of a reaction wheel pendulum with visual feedback». En: *2017 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*. 2017, págs. 024-029. DOI: 10.1109/CADIAG.2017.8075625.

[5] Stephen Chapman. *Máquinas eléctricas*. 5ta. McGrawHill, 2015.