Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Universidad

Departamento De Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales
Transformada de Laplace
Abril de 2023

DEFINICIÓN 1.1 Transformada de Laplace

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

es la **transformada de Laplace** de f, siempre que la integral converja.

TEOREMA 1.1 Transformada de algunas funciones básicas

a) $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

b) $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

d) $\mathscr{L}\{\text{sen } kt\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$

e) $\mathscr{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$

f) $\mathscr{L}\{\text{senh } kt\} = \dfrac{k}{s^2 - k^2}$

g) $\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$

DEFINICIÓN 1.2 Orden exponencial

Se dice que f es de **orden exponencial c** si existen constantes c, $M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para toda $t > T$.

TEOREMA 1.2 Condiciones suficientes para la existencia

Si f es una función continua por tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial c, entonces $\mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

TEOREMA 1.3 Comportamiento de $F(s)$ conforme $s \to \infty$

Si f es continua por partes en $(0, \infty)$ y de orden exponencial y $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, entonces el $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

TEOREMA 2.1 Algunas transformadas inversas

a) $1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}$

b) $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}$

d) $\text{sen } kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2 + k^2}\right\}$

e) $\cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + k^2}\right\}$

f) $\text{senh } kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2 - k^2}\right\}$

g) $\cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 - k^2}\right\}$

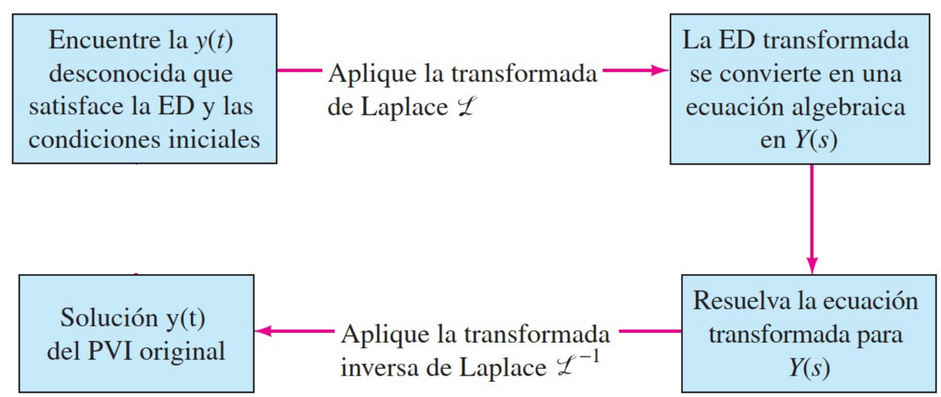
TEOREMA 2.2 Transformada de una derivada

Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

SOLUCIÓN DE EDO LINEALES



TEOREMA 3.1 Primer teorema de traslación

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a).$$

Otra notación: $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}|_{s\to s-a}$

Forma inversa: $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at}f(t)$

DEFINICIÓN 3.1 Función escalón unitario

La **función escalón unitario** $\mathscr{U}(t-a)$ se define como

$$\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a. \end{cases}$$

TEOREMA 3.2 Segundo teorema de traslación

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Caso particular: $\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$.

Expresión equivalente: $\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}$.

Forma inversa: $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a)$.

TEOREMA 4.1 Derivadas de transformadas

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

CONVOLUCIÓN

$$f * g = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

TEOREMA 4.2 Teorema de convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\,\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

Forma inversa: $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$.

Caso particular: Cuando $g(t) = 1$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s) = 1/s$

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

TEOREMA 4.3 Transformada de una función periódica

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt.$$

LA FUNCION DELTA DE DIRAC

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0}\delta_a(t-t_0).$$

TEOREMA 5.1 Transformada de la función delta de Dirac

Para $t_0 > 0$, $\quad \mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$.

Tomado del texto:

ZILL, Dennis G. *Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*, Novena Edición, Editorial Cengage, Cap 7.