ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO
UNIVERSIDAD

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
Examen Parcial II
Parte Teórica
(SOLUCIÓN)

En los puntos I. a IX. Marque con una **X** sobre la letra que corresponde a la respuesta correcta.

I.[PA–2][5] Para la EDO $y^{(4)} - y'' = 2x^2 + 1$ la forma de una solución particular es

a) $y = Ax^2 + Bx + C$. b) $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

X) $y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$. d) $y = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3$.

JUSTIFICACIÓN Como el polinomio característico asociado a la EDO $y^{(4)} - y'' = 2x^2 + 1$, que es $m^4 - m^2$, tiene como raíces $m = 0$ (de multiplicidad dos), $m = 1$ y $m = -1$ (ambas de multiplicidad uno), entonces $y_c(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{1x} + C_4 e^{-1x} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x}$.

Si una EDOLCCNH es de la forma $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P_n(x)$ donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n y 0 (cero) es una raíz de multiplicidad k de la ecuación característica de la EDOLCCH correspondiente entonces $y_p(x) = x^k \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n\right)$.

Para el ejercicio $y_p(x) = x^2\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\right) = A_0 x^2 + A_1 x^3 + A_2 x^4$, que equivale a $y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

II.[PA–2][5] Una solución singular de la EDO $y'' - 4x\sqrt{y'} = 0$ es, obviamente, $y = C$ donde C es una constante. La forma general de la familia de soluciones de dicha EDO es:

a) $3y = \left(x^2 + C_1\right)^3 + C_2$. **X**) $15\left(y + C_2\right) = x\left(3x^4 + 10C_1 x^2 + 15C_1^2\right)$.

c) $\left(y + C_2\right) = x\left(3x^4 + C_1 x^2 + C_1\right)$. d) $3y = \left(x^2 - C_1\right)^3 + C_2$.

JUSTIFICACIÓN Si $y'' - 4x\sqrt{y'} = 0 \Rightarrow y'' = 4x\sqrt{y'}$. Haciendo $z = \dfrac{dy}{dx}$ se tiene que $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ y así la EDO dada se transforma en $\dfrac{dz}{dx} = 4x\sqrt{z}$, con lo cual, $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int 4x\,dx$.

Solucionando las integrales se obtiene $2\sqrt{z} = 2x^2 + K_1 \Rightarrow \sqrt{z} = x^2 + K_2 \Rightarrow z = \left(x^2 + K_2\right)^2 = x^4 + 2K_2 x^2 + K_2^2$.

Como $z = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x^4 + 2K_2 x^2 + K_2^2$ e $y(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}K_2 x^3 + K_2^2 x + K_3 = \frac{x^5}{5} + K_4 x^3 + K_5 x + K_3$.

Finalmente, $y(x) = \frac{x^5}{5} + K_4 x^3 + K_5 x + K_3$ (i).

Al despejar y en la opción b) $15\left(y + C_2\right) = x\left(3x^4 + 10C_1 x^2 + 15C_1^2\right)$ se tiene que $y = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2}{3}C_1 x^3 + C_1^2 x - 15C_2$ (ii).

Haciendo $K_4 = \frac{2}{3}C_1$, $K_5 = C_1^2$ y $K_3 = -15C_2$ en (i) se obtiene la expresión (ii).

III.[RM–2][5] Para las funciones $y_1(x)=x^2$ e $y_2(x)=x^2\ln x$ y a la EDO $x^3y^{(3)}-2xy'+4y=0$ se puede afirmar que:

a) $y_1(x)$ e $y_2(x)$ **sí** son soluciones de la EDO dada, pero **no** son funciones linealmente independientes.

b) $y_1(x)$ e $y_2(x)$ **no** son soluciones de la EDO dada y **tampoco** son funciones linealmente independientes.

X) $y_1(x)$ e $y_2(x)$ **sí** son soluciones de la EDO dada y **también** son funciones linealmente independientes.

d) $y_1(x)$ e $y_2(x)$ **no** son soluciones de la EDO dada, pero **sí** son funciones linealmente independientes.

JUSTIFICACIÓN

i) Si $y_1(x)=x^2 \Rightarrow y'_1(x)=2x \Rightarrow y''_1(x)=2 \Rightarrow y'''_1(x)=0$. Al sustituir en la EDO dada se tiene que $x^3(0)-2x(2x)+4(x^2)=0$. Como esta igualdad es verdadera $y_1(x)=x^2$ sí es solución de la EDO dada.

ii) Si $y_2(x)=x^2\ln x \Rightarrow y'_2(x)=x+2x\ln x \Rightarrow y''_2(x)=3+2\ln x \Rightarrow y'''_1(x)=\dfrac{2}{x}$. Al sustituir en la EDO dada se tiene que $x^3\left(\dfrac{2}{x}\right)-2x(x+2x\ln x)+4(x^2\ln x)=0$, que al simplificarla se transforma en $2x^2-2x^2-4x^2\ln x+4x^2\ln x=0$. Como esta igualdad es verdadera $y_2(x)=x^2$ sí es solución de la EDO dada.

iii) $W(x^2,x^2\ln x)=\det\begin{pmatrix} x^2 & x^2\ln x \\ 2x & x+2x\ln x\end{pmatrix}=x^3+2x^2\ln x-2x^3\ln x\neq 0$.

Por lo tanto $y_1(x)=x^2$ e $y_2(x)=x^2\ln x$ son funciones linealmente independientes.

IV.[PA–2][5] La ecuación característica de una EDOLCCH es $r^3(1-r)^2(2r+r^2+5)=0$, por lo tanto, la solución general de dicha EDOLCCH es:

a) $y(x)=C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4xe^{-x}+C_5x^2e^{-x}+C_6e^{x}\cos 2x+C_7e^{x}\sin 2x$.

b) $y(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4xe^{x}+C_5x^2e^{x}+C_6e^{-x}\cos 2x+C_7e^{-x}\sin 2x$.

X) $y(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{x}+C_5xe^{x}+C_6e^{-x}\cos 2x+C_7e^{-x}\sin 2x$.

d) $y(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3e^{x}+C_4xe^{x}+C_5x^2e^{x}+C_6e^{x}\cos 2x+C_7e^{x}\sin 2x$.

JUSTIFICACIÓN

Los ceros de la ecuación característica son $r=0$ de multiplicidad 3, $r=1$ de multiplicidad 2, $r=-1+2i$ de multiplicidad 1 y $r=-1-2i$ de multiplicidad 1.
La solución general de dicha EDOLCCH es:

$$y(x)=C_1e^{0x}+C_2xe^{0x}+C_3x^2e^{0x}+C_4e^{1x}+C_5xe^{1x}+C_6e^{-x}\cos 2x+C_7e^{-x}\sin 2x$$

$$=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{x}+C_5xe^{x}+C_6e^{-x}\cos 2x+C_7e^{-x}\sin 2x\ .$$

VI. [PA–3][5] Al hacer $x=e^t$, derivar convenientemente y hacer las sustituciones correspondientes, la EDO

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y-\ln x=0$$

se transforma en:

a) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y-t=0\,.$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y-t=0\,.$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+y-t=0$

d) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}-y-t=0$

Si $\quad x=e^t \Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}=x\dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)x=\left(x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\right)x=x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}=x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-x\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}.$$

JUSTIFICACIÓN Es claro que si $x=e^t \Rightarrow \ln x=t$. Por lo tanto, se tiene que $\ln x=t$, $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}$ y $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}$.

Finalmente, sustituyendo en la EDO dada $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y-\ln x=0$, ésta se transforma en $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+y-t=0$.

VII.[RM–2][5] Para la EDO $xy''+2y'+xy=0$ y la función $y_1(x)=x^{-1}\sin x$ se puede afirmar que:

a) $y_1(x)$ es solución de la EDO dada y la solución general es $y(x)=C_1x^{-1}\sin x+C_2x\sin x$.

b) $y_1(x)$ es solución de la EDO dada y la solución general es $y(x)=C_1x^{-1}\sin x+C_2x^{-1}\cos x$.

c) $y_1(x)$ es solución de la EDO dada y la solución general es $y(x)=C_1x^{-1}\sin x+C_2x\cot x$.

d) $y_1(x)$ no es solución de la EDO dada.

JUSTIFICACIÓN i) Si $y_1(x)=x^{-1}\sin x \Rightarrow y'_1(x)=x^{-1}\cos x-x^{-2}\sin x \Rightarrow y''_1(x)=-x^{-1}\sin x-2x^{-2}\cos x+2x^{-3}\sin x$.

Al sustituir $y_1(x)$, $y'_1(x)$ e $y''_1(x)$ en el miembro izquierdo de la EDO dada se tiene que:

$$\begin{aligned} xy''+2y'+xy &= x\left(-x^{-1}\sin x-2x^{-2}\cos x+2x^{-3}\sin x\right)+2\left(x^{-1}\cos x-x^{-2}\sin x\right)+x\left(x^{-1}\sin x\right)\\ &= -\sin x-2x^{-1}\cos x+2x^{-2}\sin x+2x^{-1}\cos x-2x^{-2}\sin x+\sin x=0. \end{aligned}$$

Como esta igualdad es verdadera, $y_1(x)=x^{-1}\sin x$ sí es solución de la EDO dada.

ii) Si $y_1(x) = x^{-1}\sin x$ es solución de la EDO dada, teniendo en cuenta que equivale a $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$, la segunda solución, $y_2(x)$, se obtiene de la siguiente forma:

$$y_2(x) = x^{-1}\sin x\int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{x^{-2}\sin^2 x}dx = x^{-1}\sin x\int \frac{e^{-\ln x^2}}{x^{-2}\sin^2 x}dx = x^{-1}\sin x\int \frac{x^{-2}}{x^{-2}\sin^2 x}dx = x^{-1}\sin x\int \csc^2 x\, dx$$

$$= x^{-1}\sin x\left(-\cot x\right) = -x^{-1}\sin x\frac{\cos x}{\sin x} = -x^{-1}\cos x\ .$$

iii) Finalmente, la solución general de la EDO dada está dada por

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 x^{-1}\sin x + C_2 x^{-1}\cos x\ .$$

VIII.[RM–2][5] Dada la EDOLCCNH $ay''+by'+cy=e^{kx}$, una expresión para A, de forma que $y_1(x) = Ae^{kx}$ sea solución de ella, es:

a) $\left(ak^2+bk\right)^{-1}$. b) ak^2+bk+c. X) $\left(ak^2+bk+c\right)^{-1}$. d) ak^2+bk.

Nota: Asuma que a, b y c son números reales con a diferente de cero y k diferente de las raíces del polinomio característico de la EDOLCCH correspondiente.

Justificación Si $y_1(x) = Ae^{kx} \Rightarrow y'_1(x) = Ake^{kx} \Rightarrow y''_1(x) = Ak^2e^{kx}$. Sustituyendo estas expresiones en la EDO dada se tiene:

$$a\left(Ak^2e^{kx}\right)+b\left(Ake^{kx}\right)+c\left(Ae^{kx}\right)=e^{kx} \Rightarrow Aak^2e^{kx}+Abke^{kx}+Ace^{kx}=e^{kx} \Rightarrow Aak^2+Abk+Ac=1 \Rightarrow$$

$$A\left(ak^2+bk+c\right)=1 \Rightarrow A=\left(ak^2+bk+c\right)^{-1}.$$

IX.[RM–2][5] ¿De cuál de las EDOLCCH dadas más adelante es la función $y(x) = C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}+C_4x^2e^{-x}$ la solución general?

X) $y^{iv}+2y'''-2y'-y=0$. b) $y^{iv}-2y'''+2y'-y=0$.

c) $y^{iv}+2y'''-2y''-y=0$ d) $y^{iv}+y'''-2y''-2y=0$.

Justificación A partir de la función dada como solución se deduce que, en efecto, la ecuación diferencial debe ser de orden cuatro. De la misma forma se obtiene que las raíces de la ecuación característica correspondiente son $m=1$ de multiplicidad uno y $m=-1$ de multiplicidad tres, con lo cual la ecuación característica es $(m-1)(m+1)^3=0$ que equivale a $m^4+2m^3-2m-1=0$. Una EDOLCCH es, entonces, $y^{iv}+2y'''-2y'-y=0$.