ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO
UNIVERSIDAD

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
Trabajo en Grupo 5
27 de abril de 2023
(SOLUCIÓN)

I. [PA–2][7] Teniendo en cuenta la definición de Transformada de Laplace, en términos de integrales, deduzca el resultado de $\mathcal{L}\left\{ e^{-t}\sin\left(2t\right)\right\}$.

Solución De acuerdo con la definición: $\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f\left(t\right)dt$.

En este caso, para la $\mathcal{L}\left\{e^{-t}\sin\left(2t\right)\right\}$, se debe calcular $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}e^{-t}\sin\left(2t\right)dt$.

Como $e^{-st}e^{-t}\sin\left(2t\right) = e^{-t\left(s+1\right)}\sin\left(2t\right)$, se halla $\displaystyle\int e^{-t\left(s+1\right)}\sin\left(2t\right)dt$ haciendo integración por partes:

Integrar	$e^{-t\left(s+1\right)}$ $(+)$	$-\dfrac{e^{-t\left(s+1\right)}}{\left(s+1\right)}$ $(-)$	$\dfrac{e^{-t\left(s+1\right)}}{\left(s+1\right)^2}$ $(+)$
Derivar	$\sin\left(2t\right)$	$2\cos\left(2t\right)$	$-4\sin\left(2t\right)$

Así, $$\int e^{-t\left(s+1\right)}\sin\left(2t\right)dt = -\frac{e^{-t\left(s+1\right)}\sin\left(2t\right)}{\left(s+1\right)} - \frac{2e^{-t\left(s+1\right)}\cos\left(2t\right)}{\left(s+1\right)^2} - \frac{4}{\left(s+1\right)^2}\int e^{-t\left(s+1\right)}\sin\left(2t\right)dt \;\Rightarrow$$

$$\int e^{-t\left(s+1\right)}\sin\left(2t\right)dt = \frac{-\dfrac{e^{-t\left(s+1\right)}\sin\left(2t\right)}{\left(s+1\right)} - \dfrac{2e^{-t\left(s+1\right)}\cos\left(2t\right)}{\left(s+1\right)^2}}{1+\dfrac{4}{\left(s+1\right)^2}} = -e^{-t\left(s+1\right)}\left[\frac{2\cos\left(2t\right)+\sin\left(2t\right)+s\sin\left(2t\right)}{s^2+2s+5}\right] ,$$

por lo tanto , $$\int_0^\infty e^{-t\left(s+1\right)}\sin\left(2t\right)dt = \lim_{k\to\infty}\left(-e^{-t\left(s+1\right)}\left(\frac{2\cos\left(2t\right)+\sin\left(2t\right)+s\sin\left(2t\right)}{s^2+2s+5}\right)\Bigg|_0^k\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(-e^{-k\left(s+1\right)}\left(\frac{2\cos\left(2k\right)+\sin\left(2k\right)+s\sin\left(2k\right)}{s^2+2s+5}\right)+\left(\frac{2}{s^2+2s+5}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{s^2+2s+5} = \frac{2}{\left(s+1\right)^2+4} .$$

II.[RM–2][7] Establezca si la función $f(t) = \sin\left(t^2\right) + t^4 e^{6t}$ es o no una función de orden exponencial. Si su respuesta es afirmativa demuéstrelo, es decir, obtenga valores reales de M, k y T_0 tales que $\left|f(t)\right| \leq Me^{kt}$ para toda $t \geq T_0$. Si su respuesta es negativa no haga nada más.

Solución i) Es claro que $\sin\left(t^2\right) \leq 1$. ii) Como $t < e^t$ entonces $t^4 < e^{4t}$ y así $t^4 e^{6t} < e^{10t}$.

De i) y ii) se tiene que $\sin\left(t^2\right) + t^4 e^{6t} < 1 + e^{10t}$.

Además $1 + e^{10t} < 3e^{10t}$ para todo $t \geq 0$, por lo tanto $\sin\left(t^2\right) + t^4 e^{6t} < 3e^{10t}$ para todo $t \geq 0$, lo cual significa que $f(t) = \sin\left(t^2\right) + t^4 e^{6t}$ sí es una función de orden exponencial haciendo $M = 3$, $k = 10$ y $T_0 = 0$.

Nota: Estos valores son una opción, pero hay infinitas posibilidades.

III.[RM–2][8] Utilizando las definiciones y los teoremas de la hoja adjunta obtenga el resultado de $\mathcal{L}\left\{t^2\, e^{-3t} \sin^2(t)\right\}$. Indique la definición o el teorema que le permite establecer la respuesta de cada paso.

Solución $\mathcal{L}\left\{t^2\, e^{-3t} \sin^2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-3t} t^2 \sin^2(t)\right\}$.

Haciendo $g(t) = t^2 \sin^2(t)$ se tiene que $\mathcal{L}\left\{e^{-3t} t^2 \sin^2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-3t} g(t)\right\}$

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t^2 \sin^2(t)\right\} = (-1)^2 \left[\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\left\{\sin^2 t\right\}\right]$$

i) $\mathcal{L}\left\{e^{-3t} g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}\Big|_{s \to s+3}$ .... TEOREMA 3.1

ii) $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t^2 \sin^2(t)\right\} = (-1)^2 \left[\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\left\{\sin^2 t\right\}\right]$ .... TEOREMA 4.1

iii) $\mathcal{L}\left\{\sin^2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos(2t)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\cos(2t)\right\}$ .... Linealidad de $\mathcal{L}$

iv) $\frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\cos(2t)\right\} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$ .... TEOREMA 1.1 a) y e)

v) Sustituyendo iv) en ii) $\mathcal{L}\left\{t^2 \sin^2(t)\right\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\right) = \frac{1}{s^3} + \frac{s\left(s^2-12\right)}{\left(s^2+4\right)^3}$

vi) Sustituyendo v) en i) $\mathcal{L}\left\{e^{-3t} t^2 \sin^2(t)\right\} = \frac{1}{(s+3)^3} + \frac{(s+3)\left((s+3)^2-12\right)}{\left((s+3)^2+4\right)^3}$.

IV.[PA–2][9] Obtenga el resultado de $\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\}$ si $f\left(t\right)=\begin{cases}\left(t+1\right)^{-1} & \text{si } \; 0\le t<1\\ 2-t & \text{si } \; 1\le t<3\\ -t^2 & \text{si } \; 3\le t<10\\ 0 & \text{si } \; t\ge 10\end{cases}$

Solución

$$f\left(t\right)=\left(t+1\right)^{-1}+\left(\left(2-t\right)-\left(t+1\right)^{-1}\right)\mathcal{U}\left(t-1\right)+\left(-t^2-\left(2-t\right)\right)\mathcal{U}\left(t-3\right)+\left(0-\left(t^2\right)\right)\mathcal{U}\left(t-10\right)$$

$$=\frac{1}{t+1}+\left(\left(2-t\right)-\frac{1}{t+1}\right)\mathcal{U}\left(t-1\right)-\left(t^2-t+2\right)\mathcal{U}\left(t-3\right)-\left(t^2\right)\mathcal{U}\left(t-10\right).$$

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t+1}\right\}+\mathcal{L}\left\{\left(\left(2-t\right)-\frac{1}{t+1}\right)\mathcal{U}\left(t-1\right)\right\}-\mathcal{L}\left\{\left(t^2-t+2\right)\mathcal{U}\left(t-3\right)\right\}-\mathcal{L}\left\{t^2\mathcal{U}\left(t-10\right)\right\}$$

$$=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t+1}\right\}+e^{-s}\mathcal{L}\left\{\left[\left(2-\left(t+1\right)\right)-\frac{1}{\left(t+1\right)+1}\right]\right\}-e^{-3s}\mathcal{L}\left\{\left(t+3\right)^2-\left(t+3\right)+2\right\}-e^{-10s}\mathcal{L}\left\{\left(t+10\right)^2\right\}$$

$$=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t+1}\right\}+e^{-s}\mathcal{L}\left\{1-t-\frac{1}{t+2}\right\}-e^{-3s}\mathcal{L}\left\{t^2+5t+8\right\}-e^{-10s}\mathcal{L}\left\{t^2+20t+100\right\}$$

$$=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t+1}\right\}+e^{-s}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}-\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t+2}\right\}\right)-e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{5}{s^2}+\frac{8}{s}\right)-e^{-10s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{20}{s^2}+\frac{100}{s}\right).$$

Nota: Las transformadas de Laplace de funciones de la forma $f\left(t\right)=\left(t+k\right)^{-1}$, con $k\in\mathbb{R}$, no se pueden calcular.

V.[PA–2][9] Obtenga el resultado de $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{7s^3-2s^2-3s+6}{s^3\left(s-2\right)}\right\}$.

Solución

$$\frac{7s^3-2s^2-3s+6}{s^3\left(s-2\right)}=\frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{D}{s-2}=\frac{A\left(s-2\right)+Bs\left(s-2\right)+Cs^2\left(s-2\right)+Ds^3}{s^3\left(s-2\right)}$$

$$=\frac{As-2A+Bs^2-2Bs+Cs^3-2Cs^2+Ds^3}{s^3\left(s-2\right)}.$$

A partir de esta igualdad se obtiene el SEL $\begin{cases}-2A=6\\ A-2B=-3\\ B-2C=-2\\ C+D=7\end{cases}$ cuya solución es $A=-3$, $B=0$, $C=1$ y $D=6$.

Finalmente: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{7s^3-2s^2-3s+6}{s^3\left(s-2\right)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-3}{s^3}+\dfrac{1}{s}+\dfrac{6}{s-2}\right\}=-\dfrac{3}{2}t^2+1+6e^{2t}$.

VI. [PA–2][10] Solucione la EDO $y''-2y'+5y=-8e^{-t}$ s.a. $y(0)=2$, $y'(0)=12$ por el Método de Transformada de Laplace.

Solución $\mathcal{L}\left\{y''-2y'+5y\right\}=\mathcal{L}\left\{-8e^{-t}\right\}\Rightarrow s^2Y(s)-s\ y(0)-y'(0)-2sY(s)+2\cdot y(0)+5Y(s)=-\dfrac{8}{s+1}$

$$\Rightarrow s^2Y(s)-2s-12-2sY(s)+4+5Y(s)=-\frac{8}{s+1}$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)-2sY(s)+5Y(s)=-\frac{8}{s+1}+2s+8$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{-\dfrac{8}{s+1}+2s+8}{s^2-2s+5}=2\times\frac{5s+1}{(s+1)\left(s^2-2s+5\right)}$$

$$\frac{5s+1}{(s+1)\left(s^2-2s+5\right)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+5}=\frac{As^2-2As+5A+Bs^2+Bs+Cs+C}{(s+1)\left(s^2-2s+5\right)}$$

A partir de esta igualdad se obtiene el SEL $\begin{cases}5A+C=1\\-2A+B+C=5\\A+B=0\end{cases}$ cuya solución es $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{1}{2}$ y $C=\dfrac{7}{2}$.

Finalmente:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{2\times\frac{5s+1}{(s+1)\left(s^2-2s+5\right)}\right\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{2(s+1)}+\frac{s+7}{2\left(s^2-2s+5\right)}\right\}=-e^{-t}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{(s-1)^2+4}\right\}\Rightarrow$$

$$y(t)=-e^{-t}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1+8}{(s-1)^2+4}\right\}=-e^{-t}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\}+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4}\right\}\Rightarrow$$

$$y(t)=-e^{-t}+e^{t}\cos(2t)+4e^{t}\sin(2t).$$