VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

Definición 1

Sea A una matriz de $n \times n$. El número real λ es un **valor propio** (también conocidos como, valores característicos, autovalores o incluso eigenvalores) de A si existe un vector $\mathbf{x}$ *distinto* de cero en R^n tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{1}$$

Todo vector $\mathbf{x}$ distinto de cero que satisfaga (1) es un **vector propio de** A, **asociado con el valor propio** λ. Los valores propios también se llaman **valores característicos**, **autovalores**, **valores latentes** o **eigenvalores** (del alemán *eigen*, que significa "propio"). De manera similar, los vectores propios también se llaman **vectores característicos**, **autovectores**, **vectores latentes** o **eigenvectores**.

Observe que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ siempre satisface (1), pero $\mathbf{0}$ no es un vector propio, pues, como hemos insistido, un vector propio debe ser un vector no nulo.

En la definición anterior, el número λ puede ser real o complejo, y el vector $\mathbf{x}$ puede tener componentes reales o complejos.

Ejemplo 1

Si A es la matriz identidad I_n, el único valor propio es $\lambda = 1$; todo vector distinto de cero en R^n es un vector propio de A, asociado con el valor propio $\lambda = 1$:

$$I_n\mathbf{x} = 1\mathbf{x}.$$

■

Ejemplo 2

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Además,

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. La figura 8.1 muestra que $\mathbf{x}_1$ y $A\mathbf{x}_1$ son paralelos, lo mismo que $\mathbf{x}_2$ y $A\mathbf{x}_2$. Esto ilustra el hecho de que $\mathbf{x}$ es un vector propio de A y, por lo tanto, $\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x}$ son paralelos. ■

CÁLCULO DE VALORES PROPIOS Y DE VECTORES PROPIOS

Ejemplo 3

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Queremos determinar los valores propios de A y sus vectores propios asociados. En consecuencia, queremos determinar todos los números reales λ y todos los vectores no nulos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que satisfagan (1), es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

La ecuación (2) se convierte en

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= \lambda x_2, \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (\lambda - 4)x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Esta ecuación es un sistema homogeneo de dos ecuaciones con dos incognitas que tiene una solución no trivial si y sólo si la determinante de su matriz de coeficientes es cero, es decir, si y sólo si

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto significa que

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 = 0,$$

o

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 = (\lambda - 3)(\lambda - 2).$$

Por lo tanto,

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 3$$

son los valores propios de A. Para determinar todos los vectores propios de A asociados con $\lambda_1 = 2$, formamos el sistema lineal

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x},$$

o

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Esto da como resultado

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} (2 - 1)x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (2 - 4)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Observe que podríamos haber obtenido este último sistema homogéneo simplemente sustituyendo $\lambda = 2$ en (3). Todas las soluciones de este último sistema están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= \text{cualquier número real } r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, todos los vectores propios asociados con el valor propio $\lambda_1 = 2$ están dados por $\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$, donde r es cualquier número real distinto de cero. En particular,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio asociado con $\lambda_1 = 2$. De manera análoga, para $\lambda_2 = 3$ obtenemos, a partir de (3),

$$\begin{aligned} (3 - 1)x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (3 - 4)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Todas las soluciones de este último sistema homogéneo están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}x_2 \\ x_2 &= \text{cualquier número real } r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, todos los vectores propios asociados con el valor propio $\lambda_2 = 3$ están dados por $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}r \\ r \end{bmatrix}$, donde r es cualquier número real distinto de cero. En particular,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es un vector propio asociado con $\lambda_2 = 3$. ■

Definición 2

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$. El determinante

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

es el **polinomio característico de** A. La ecuación

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

es la **ecuación característica de** A.

Recuerde que en el desarrollo de la determinante de una matriz de $n \times n$, cada término es un producto de n elementos de la matriz, el cual tiene exactamente un elemento de cada fila y un elemento de cada columna. Así que, si desarrollamos $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, obtenemos un polinomio de grado n. Además, por el **Teorema Fundamental del Álgebra**, un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene n raíces (contando las repeticiones), algunas de las cuales pueden ser números complejos.
La expresión relacionada con λ^n en el polinomio característico de A proviene del producto

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}),$$

de modo que el coeficiente de λ^n es 1. Entonces, podemos escribir

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Si hacemos $\lambda = 0$ en $\det(\lambda I_n - A)$, al igual que en la expresión de la derecha, obtenemos $\det(-A) = c_n$, lo cual muestra que el término constante c_n es $(-1)^n \det(A)$. Con este resultado se establece el siguiente teorema.

Teorema 1 Una matriz A de $n \times n$ es singular si y sólo si 0 (cero) es un valor propio de A.

Lista de equivalencias no singulares

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una matriz A de $n \times n$.

1. A es no singular.
2. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. A es equivalente por filas (renglones) a I_n.
4. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para cada matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.
5. $\det(A) \neq 0$.
6. A tiene rango n.
7. A tiene nulidad 0.
8. Las filas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.
9. Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.
10. Cero *no* es un valor propio de A.

Teorema 2 Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A.

En consecuencia, para determinar los valores propios de una matriz dada A, debemos determinar las raíces de su polinomio característico f (λ). Hay muchos métodos para determinar aproximaciones a las raíces de un polinomio, algunos más eficaces que otros; de hecho, muchos programas de computadora permiten determinar las raíces de un polinomio.

NOTA

Dos resultados que suelen ser útiles a este respecto son

I. El producto de todas las raíces del polinomio

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \ldots\ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

es $(-1)^n a_n$

II. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{n-1}$ y a_n son enteros, $f(\lambda)$ **no** puede tener una raíz racional que no sea un entero. Así, sólo se debe verificar los factores enteros de a_n como posibles raíces racionales de $f(\lambda)$. Por supuesto, $f(\lambda)$ podría tener raíces irracionales o complejas.

Los vectores propios correspondientes se obtienen al sustituir el valor de λ en la ecuación $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y resolver el sistema homogéneo resultante.

Ejemplo 4

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es:

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 0 & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

Las posibles raíces enteras de $f(\lambda)$ son $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 6. Al sustituir estos valores en $f(\lambda)$, tenemos que $f(1) = 0$, de modo que $\lambda = 1$ es una raíz de $f(\lambda)$. Por lo tanto, $(\lambda - 1)$ es un factor de $f(\lambda)$. Al dividir $f(\lambda)$ entre $(\lambda - 1)$, obtenemos (verifique)

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Al factorizar $\lambda^2 - 5\lambda + 6$, tenemos

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Entonces, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Para determinar un vector propio $\mathbf{x}_1$, asociado con $\lambda_1 = 1$, formamos el sistema lineal

$$(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una solución es

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}r \\ r \end{bmatrix}$$

para cualquier número real r. Por lo tanto, para $r = 2$,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_1 = 1$.

Para determinar un vector propio $\mathbf{x}_2$ asociado con $\lambda_2 = 2$, formamos el sistema lineal

$$(2I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una solución es

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{bmatrix}$$

para cualquier número real r. En consecuencia, para $r = 4$,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_2 = 2$.

Para determinar un vector propio $\mathbf{x}_3$ asociado con $\lambda_3 = 3$, formamos el sistema lineal

$$(3I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

y vemos que una solución es (verifique)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{bmatrix}$$

para cualquier número real r. Así, para $r = 4$,

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_3 = 3$. ■

Ejemplo 4

Calcule los valores propios y los vectores propios asociados de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & 0 & -3 \\ -1 & \lambda - 0 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

(verifique). Determinamos que $\lambda = 3$ es una raíz de $p(\lambda)$. Al dividir $p(\lambda)$ entre $(\lambda - 3)$, obtenemos $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$. Entonces, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i.$$

Para obtener un vector propio $\mathbf{x}_1$ asociado con $\lambda_1 = 3$, sustituimos $\lambda = 3$, lo cual nos da como resultado

$$\begin{bmatrix} 3 - 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 - 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinamos que el vector $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$ es una solución para cualquier número real r (verifique). Al hacer $r = 1$, concluimos que

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_1 = 3$. Para obtener un vector propio $\mathbf{x}_2$ asociado con $\lambda_2 = i$, sustituimos $\lambda = i$ en (5), lo que da como resultado

$$\begin{bmatrix} i - 0 & 0 & -3 \\ -1 & i - 0 & 1 \\ 0 & -1 & i - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determinamos que el vector $\begin{bmatrix} (-3i)r \\ (-3 + i)r \\ r \end{bmatrix}$ es una solución para cualquier número r (verifique). Al hacer $r = 1$, concluimos que

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -3i \\ -3 + i \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A asociado con $\lambda_2 = i$. De manera similar, determinamos que

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3i \\ -3 - i \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_3 = -i$. ■

El procedimiento para determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz, es como sigue.

Paso 1. Determine las raíces del polinomio característico $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$. Éstas son los valores propios de A.

Paso 2. Para cada valor propio λ, determine todas las soluciones no triviales para el sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Éstos son los vectores propios de A, asociados con el valor propio λ.

Por supuesto, el polinomio característico de una matriz dada puede tener algunas raíces complejas, e incluso podría carecer por completo de raíces reales. Sin embargo, en el importante caso de las matrices simétricas, todas las raíces del polinomio característico son reales.

Los valores propios y los vectores propios satisfacen muchas propiedades de gran interés. Por ejemplo, si A es una matriz triangular superior (inferior) o una matriz diagonal, los valores propios de A son los elementos de la diagonal principal de A.

Precaución

Al determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz A, evite cometer el error común de transformar primero A a la forma escalonada reducida por filas B, y luego determinar los valores y vectores propios de B.
Para comprender rápidamente cómo falla este enfoque, considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sus valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Como A es una matriz no singular, cuando la transformamos a la forma escalonada reducida por filas B, tenemos que $B = I_2$. Los valores propios de I_2 son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$.

Tomado de KOLMAN,Bernard ; HILL, David. *Algebra Lineal*. Octava Edición. Pearson Prentice Hall Editores. México. 2006. Cap 8 Páginas 408 a 417