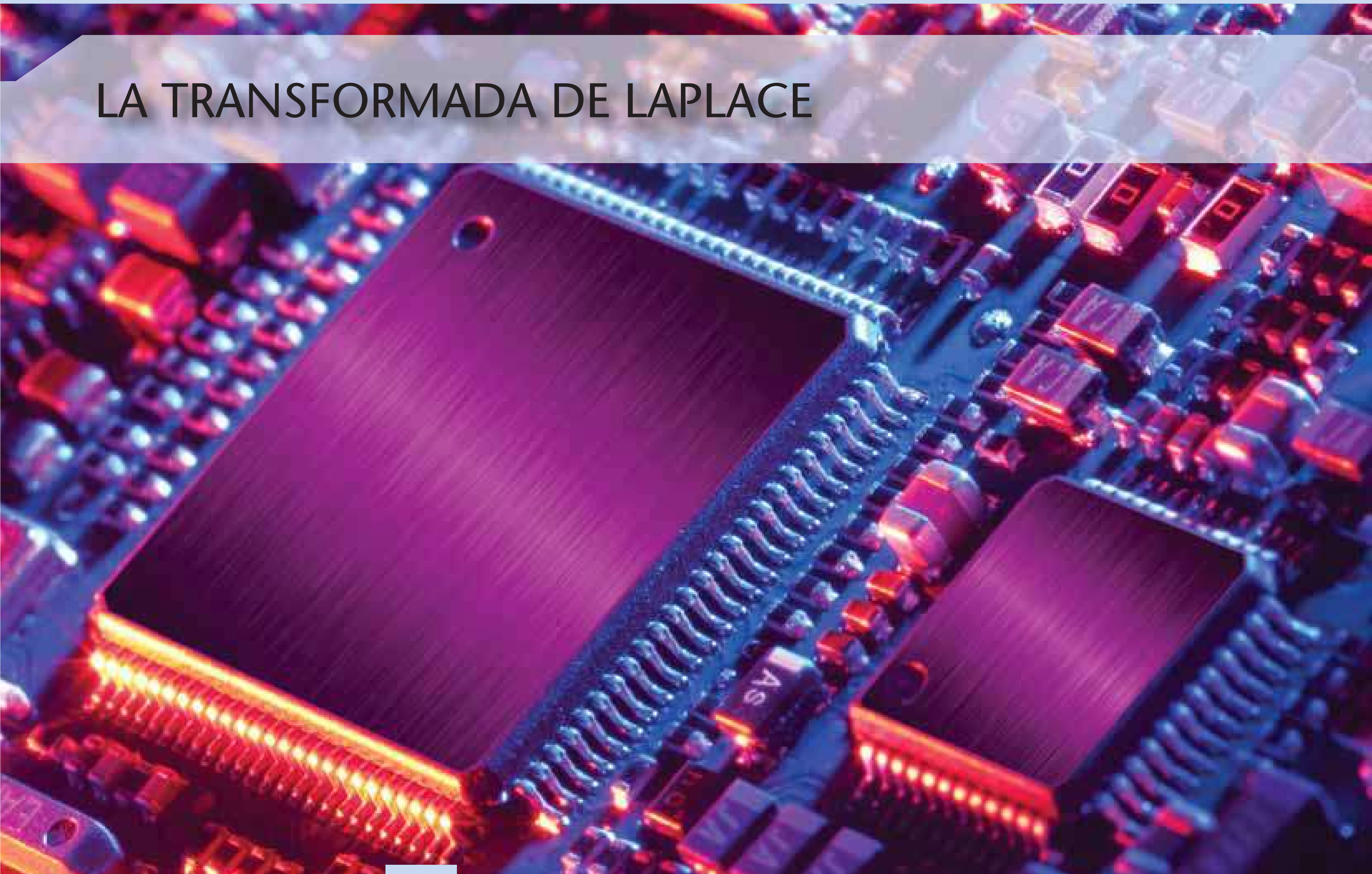
7

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE



En los modelos matemáticos lineales para sistemas físicos como un sistema resorte/masa o un circuito eléctrico en serie, el miembro del lado derecho o entrada, de las ecuaciones diferenciales

$$mx'' + \beta x' + kx = f(t) \text{ o } Lq'' + Rq' + q/C = E(t)$$

representa una fuerza externa $f(t)$ o un voltaje aplicado $E(t)$. En la sección 5.1 consideramos problemas en los que las funciones f y E son continuas. Sin embargo, las funciones de conducción discontinuas son comunes. Aunque ya hemos resuelto ecuaciones diferenciales lineales definidas por tramos usando las técnicas discutidas en los capítulos 2 y 4, la Transformada de Laplace que se estudia en este capitulo, es una herramienta muy especial que simplifica la solución de este tipo de ecuaciones.

7.1 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

INTRODUCCIÓN En cálculo elemental aprendió que la derivación y la integración son *transformadas;* esto significa, a grandes rasgos, que estas operaciones transforman una función en otra. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se transforma, a su vez, en una función lineal y en una familia de funciones polinomiales cúbicas con las operaciones de derivación e integración:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \text{y} \qquad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Además, estas dos transformadas tienen la **propiedad de linealidad** tal que la transformada de una combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las transformadas. Para α y β constantes

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

y

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$$

siempre que cada derivada e integral exista. En esta sección se examina un tipo especial de transformada integral llamada **transformada de Laplace**. Además de tener la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace tiene muchas otras propiedades interesantes que la hacen muy útil para resolver problemas lineales con valores iniciales.

TRANSFORMADA INTEGRAL Si $f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces una integral definida de f respecto a una de las variables conduce a una función de la otra variable. Por ejemplo, si se conserva y constante, se ve que $\int_1^2 2xy^2\,dx = 3y^2$. De igual modo, una integral definida como $\int_a^b K(s, t)\,f(t)\,dt$ transforma una función f de la variable t en una función F de la variable s. Tenemos en particular interés en una **transformada integral**, donde el intervalo de integración es el intervalo no acotado $[0, \infty)$. Si $f(t)$ se define para $t \geq 0$, entonces la integral impropia $\int_0^\infty K(s, t)\,f(t)\,dt$ se define como un límite:

$$\int_0^\infty K(s, t)\,f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b K(s, t)\,f(t)\,dt. \tag{1}$$

Si existe el límite en (1), entonces se dice que la integral existe o es **convergente**; si no existe el límite, la integral no existe y es **divergente**. En general, el límite en (1) existirá sólo para ciertos valores de la variable s.

Supondremos que s es una variable real ▶

UNA DEFINICIÓN La función $K(s, t)$ en (1) se llama **kernel** o **núcleo** de la transformada. La elección de $K(s, t) = e^{-st}$ como el núcleo nos proporciona una transformada integral especialmente importante.

DEFINICIÓN 7.1.1 Transformada de Laplace

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \tag{2}$$

es la **transformada de Laplace** de f, siempre que la integral converja.

La transformada de Laplace se llama así en honor del matemático y astrónomo francés **Pierre-Simon Marquis de Laplace** (1749-1827).

Cuando la integral de la definición (2) converge, el resultado es una función de s. En el análisis general se usa una letra minúscula para denotar la función que se transforma y la letra mayúscula correspondiente para denotar su transformada de Laplace, por ejemplo,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s), \qquad \mathscr{L}\{g(t)\} = G(s), \qquad \mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

Como muestran los siguientes cuatro ejemplos, el dominio de la función $F(s)$ depende de la función $f(t)$.

EJEMPLO 1 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathscr{L}\{1\}$.

SOLUCIÓN De (2),

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-st}}{s}\bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-sb}+1}{s} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

siempre que $s > 0$. En otras palabras, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y $e^{-sb} \to 0$ conforme $b \to \infty$. La integral diverge para $s < 0$. ■

El uso del signo de límite se vuelve un poco tedioso, por lo que se adopta la notación $\big|_0^\infty$ como abreviatura para escribir $\lim_{b\to\infty}(\;)\big|_0^b$. Por ejemplo,

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \frac{-e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

En el límite superior, se sobreentiende lo que significa $e^{-st} \to 0$ conforme $t \to \infty$ para $s > 0$.

EJEMPLO 2 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathscr{L}\{t\}$.

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 se tiene $\mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}\,t\,dt$. Al integrar por partes y usando $\lim_{t\to\infty} te^{-st} = 0$, $s > 0$, junto con el resultado del ejemplo 1, se obtiene

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{-te^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

■

EJEMPLO 3 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe **a)** $\mathscr{L}\{e^{-3t}\}$. **b)** $\mathscr{L}\{e^{5t}\}$

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 se tiene

a)
$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{-3t}\} &= \int_0^\infty e^{-3t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt\\ &= \frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3}\bigg|_0^\infty\\ &= \frac{1}{s+3}.\end{aligned}$$

El último resultado es válido para $s > -3$, ya que para que exista el $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+3)t} = 0$ para $s + 3 > 0$ o $s > -3$.

b)
$$\mathscr{L}\{e^{5t}\} = \int_0^\infty e^{5t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-5)t}\,dt$$
$$= \left.\frac{-e^{-(s-5)t}}{s-5}\right|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{s-5}$$

A diferencia del inciso a), este resultado es válido para $s > 5$ ya que $\lim_{t\to\infty} e^{-(s-5)t} = 0$ requiere que $s - 5 > 0$ o $s > 5$. ■

EJEMPLO 4 Aplicando la definición 7.1.1

Evalúe $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}$.

SOLUCIÓN De la definición 7.1.1 e integrando por partes dos veces se tiene que

$$\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen } 2t\,dt = \left.\frac{-e^{-st}\,\text{sen } 2t}{s}\right|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt$$
$$= \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt, \qquad s > 0$$

$\lim_{t\to\infty} e^{-st}\cos 2t = 0,\ s > 0$ Transformada de Laplace de sen $2t$

$$= \frac{2}{s}\left[\left.\frac{-e^{-st}\cos 2t}{s}\right|_0^\infty - \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen } 2t\,dt\right]$$
$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}.$$

En este punto se tiene una ecuación con $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}$ en ambos lados de la igualdad. Si se despeja esa cantidad el resultado es

$$\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} = \frac{2}{s^2+4}, \qquad s > 0.$$ ■

$\mathscr{L}$ ES UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL Para una combinación lineal de funciones podemos escribir

$$\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\,dt = \alpha\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt + \beta\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt$$

siempre que ambas integrales converjan para $s > c$. Por lo que se tiene que

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s). \tag{3}$$

Como resultado de la propiedad dada en (3), se dice que $\mathscr{L}$ es una **transformación lineal**.

EJEMPLO 5 Linealidad de la transformada de Laplace

En este ejemplo usamos los resultados de los ejemplos anteriores para ilustrar la linealidad de la transformada de Laplace.

a) De los ejemplos 1 y 2 tenemos para $s > 0$

$$\mathscr{L}\{1 + 5t\} = \mathscr{L}\{1\} + 5\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2},$$

b) De los ejemplos 3 y 4 tenemos para $s > 5$.

$$\mathscr{L}\left\{4e^{5t} - 10\,\text{sen } 2t\right\} = 4\mathscr{L}\left\{e^{5t}\right\} - 10\mathscr{L}\{\text{sen} 2t\} = \frac{4}{s-5} - \frac{20}{s^2+4}.$$

c) De los ejemplos 1, 2 y 3 tenemos para $s > 0$,

$$\mathscr{L}\{20e^{-3t} + 7t - 9\} = 20\mathscr{L}\{e^{-3t}\} + 7\mathscr{L}\{t\} - 9\mathscr{L}\{1\}$$
$$= \frac{20}{s+3} + \frac{7}{s^2} - \frac{9}{s}$$

Se establece la generalización de algunos ejemplos anteriores por medio del siguiente teorema. A partir de este momento se deja de expresar cualquier restricción sobre s; se sobreentiende que s está lo suficientemente restringida para garantizar la convergencia de la adecuada transformada de Laplace.

TEOREMA 7.1.1 Transformada de algunas funciones básicas

a) $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

b) $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ **c)** $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

d) $\mathscr{L}\{\text{sen } kt\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$ **e)** $\mathscr{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$

f) $\mathscr{L}\{\text{senh } kt\} = \dfrac{k}{s^2 - k^2}$ **g)** $\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$

Este resultado en b) del teorema 7.1.1 se puede justificar formalmente para n un entero positivo usando integración por partes para demostrar primero que

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\,\mathscr{L}\{t^{n-1}\}$$

Entonces para $n = 1$, 2 y 3, tenemos, respectivamente,

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s}\cdot\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$
$$\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2}{s}\cdot\mathscr{L}\{t\} = \frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{2\cdot 1}{s^3}$$
$$\mathscr{L}\{t^3\} = \frac{3}{s}\cdot\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{3}{s}\cdot\frac{2\cdot 1}{s^3} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{s^4}$$

Si sigue con la secuencia, al final deberá estar convencido de que

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

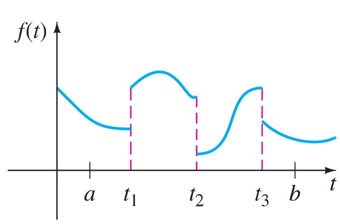


FIGURA 7.1.1 Función continua por tramos.

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE $\mathscr{L}\{f(t)\}$ La integral que define la transformada de Laplace no tiene que converger. Por ejemplo, no existe $\mathscr{L}\{1/t\}$ ni $\mathscr{L}\{e^{t^2}\}$. Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de $\mathscr{L}\{f(t)\}$ son que f sea continua por tramos sobre $[0, \infty)$ y que f sea de orden exponencial para $t > T$. Recuerde que la función f es **continua por tramos** sobre $[0, \infty)$ si, en cualquier intervalo $0 \le a \le t \le b$, hay un número finito de puntos t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ $(t_{k-1} < t_k)$ en los que f tiene discontinuidades finitas y es continua sobre cada intervalo abierto (t_{k-1}, t_k). Vea la figura 7.1.1. El concepto de **orden exponencial** se define de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 7.1.2 Orden exponencial

Se dice que f es de **orden exponencial c** si existen constantes c, $M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \le Me^{ct}$ para toda $t > T$.

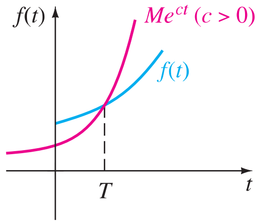


FIGURA 7.1.2 f es de orden exponencial c.

Si f es una función *creciente*, entonces la condición $|f(t)| \leq Me^{ct}$, $t > T$, simplemente establece que la gráfica de f sobre el intervalo (T, ∞) no crece más rápido que la gráfica de la función exponencial Me^{ct}, donde c es una constante positiva. Vea la figura 7.1.2. Las funciones $f(t) = t$, $f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = 2 \cos t$ son de orden exponencial porque para $c = 1$, $M = 1$, $T = 0$ se tiene, respectivamente, para $t > 0$

$$|t| \leq e^t, \quad |e^{-t}| \leq e^t, \qquad \text{y} \qquad |2 \cos t| \leq 2e^t.$$

Una comparación de las gráficas sobre el intervalo $[0, \infty)$ se muestra en la figura 7.1.3.

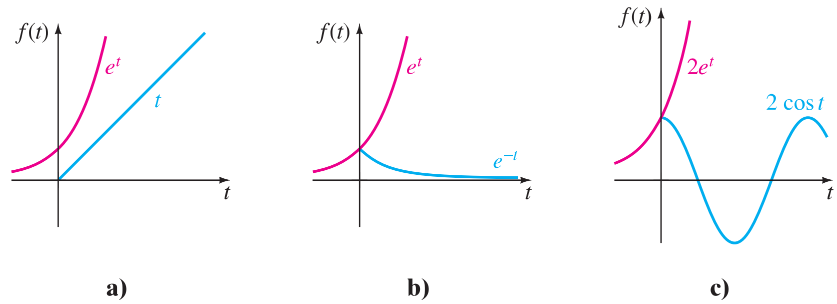


FIGURA 7.1.3 Tres funciones de orden exponencial

Un exponente entero positivo de t siempre es de orden exponencial puesto que, para $c > 0$,

$$|t^n| \leq Me^{ct} \qquad \text{o} \qquad \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right| \leq M \quad \text{para} \quad t > T$$

es equivalente a demostrar que el $\lim_{t\to\infty} t^n/e^{ct}$ es finito para $n = 1, 2, 3, \ldots$ El resultado se deduce con n aplicaciones de la regla de L'Hôpital. Una función como $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial puesto que, como se muestra en la figura 7.1.4, e^{t^2} crece más rápido que cualquier potencia lineal positiva de e para $t > c > 0$. Esto también se puede ver, de

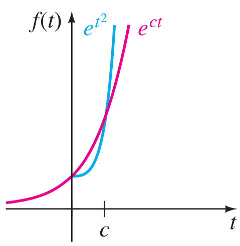


FIGURA 7.1.4 e^{t^2} no es de orden exponencial.

$$\left|\frac{e^{t^2}}{e^{ct}}\right| = e^{t^2 - ct} = e^{t(t-c)} \to \infty \quad \text{es} \quad t \to \infty$$

para *cualquier* valor de c. Por el mismo razonamiento, $e^{-st}e^{t^2} \to \infty$, cuando $t \to \infty$ para cualquier s, por lo que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}\,dt$ diverge. Es decir, $\mathscr{L}\{e^{t^2}\}$ no existe

TEOREMA 7.1.2 **Condiciones suficientes para la existencia**

Si f es una función continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces $\mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

DEMOSTRACIÓN Por la propiedad aditiva del intervalo de integrales definidas podemos escribir

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt = I_1 + I_2.$$

La integral I_1 existe ya que se puede escribir como la suma de integrales sobre los intervalos en los que $e^{-st}f(t)$ es continua. Ahora puesto que f es de orden exponencial, existen constantes c, $M > 0$, $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > T$. Entonces podemos escribir

$$|I_2| \leq \int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\,dt \leq M \int_T^\infty e^{-st}e^{ct}\,dt = M \int_T^\infty e^{-(s-c)t}\,dt = M\frac{e^{-(s-c)T}}{s - c}$$

para $s > c$. Puesto que $\int_T^\infty Me^{-(s-c)t}\,dt$ converge, la integral $\int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\,dt$ converge por la prueba de comparación para integrales impropias. Esto, a su vez, significa que I_2 existe para $s > c$. La existencia de I_1 e I_2 implica que existe $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ para $s > c$. Vea i) en los *Comentarios* ∎

EJEMPLO 6 Transformada de una función continua por tramos

Evalúe $\mathscr{L}\{f(t)\}$ donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ 2, & t \ge 3. \end{cases}$

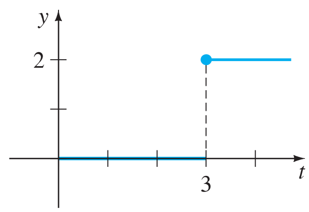


FIGURA 7.1.5 Función continua por tramos en el ejemplo 6.

SOLUCIÓN La función f que se muestra en la figura 7.1.5, es continua por tramos y de orden exponencial para $t > 0$. Puesto que f se define en dos tramos, $\mathscr{L}\{f(t)\}$ se expresa como la suma de dos integrales:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &= \int_0^3 e^{-st}(0)\,dt + \int_3^\infty e^{-st}(2)\,dt \\ &= 0 + \left.\frac{2e^{-st}}{-s}\right|_3^\infty \\ &= \frac{2e^{-3s}}{s}, \qquad s > 0.\end{aligned}$$

Concluimos esta sección con un poco más de teoría relacionada con los tipos de funciones de s con las que en general se estará trabajando. El siguiente teorema indica que no toda función arbitraria de s es una transformada de Laplace de una función continua por tramos de orden exponencial.

TEOREMA 7.1.3 Comportamiento de $F(s)$ conforme $s \to \infty$

Si f es continua por tramos sobre $[0, \infty)$ y de orden exponencial y $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, entonces el $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Puesto que f es de orden exponencial, existen constantes $\gamma, M_1 > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \le M_1 e^{\gamma t}$ para $t > T$. También, puesto que f es continua por tramos para el intervalo $0 \le t \le T$, está necesariamente acotada sobre el intervalo; es decir, $|f(t)| \le M_2 = M_2 e^{0t}$. Si M denota el máximo del conjunto $\{M_1, M_2\}$ y c denota el máximo de $\{0, \gamma\}$, entonces

$$|F(s)| \le \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \le M\int_0^\infty e^{-st}e^{ct}\,dt = M\int_0^\infty e^{-(s-c)t}\,dt = \frac{M}{s-c}$$

para $s > c$. Conforme $s \to \infty$, se tiene $|F(s)| \to 0$ y por tanto $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} \to 0$. ■

COMENTARIOS

i) En este capítulo nos dedicaremos principalmente a funciones que son continuas por tramos y de orden exponencial. Sin embargo, se observa que estas dos condiciones son suficientes pero no necesarias para la existencia de la transformada de Laplace. La función $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua por tramos sobre el intervalo $[0, \infty)$, pero existe su transformada de Laplace. La función $f(t) = 2te^{t^2}\cos e^{t^2}$ no es de orden exponencial pero se puede demostrar que su transformada de Laplace existe. Vea los problemas 43 y 53 en los ejercicios 7.1.

ii) Como consecuencia del teorema 7.1.3 se puede decir que las funciones de s como $F_1(s) = 1$ y $F_2(s) = s/(s+1)$ no son las transformadas de Laplace de funciones continuas por tramos de orden exponencial, puesto que $F_2(s) \not\to 0$ y $F_2(s) \not\to 0$ conforme $s \to \infty$. Pero no se debe concluir de esto que $F_1(s)$ y $F_2(s)$ *no* son transformadas de Laplace. Hay otras clases de funciones.

EJERCICIOS 7.1 *Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-11.*

En los problemas 1-18 use la definición 7.1 para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

1. $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi/2 \\ \cos t, & t \ge \pi/2 \end{cases}$

7.

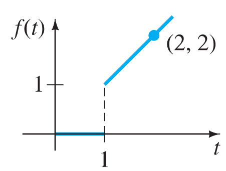


FIGURA 7.1.6 Gráfica para el problema 7.

8.

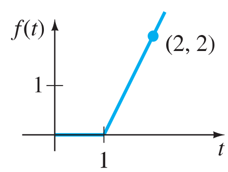


FIGURA 7.1.7 Gráfica para el problema 8.

9.

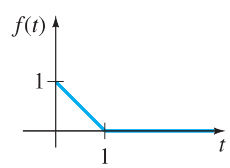


FIGURA 7.1.8 Gráfica para el problema 9.

10.

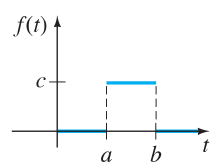


FIGURA 7.1.9 Gráfica para el problema 10.

11. $f(t) = e^{t+7}$ **12.** $f(t) = e^{-2t-5}$

13. $f(t) = te^{4t}$ **14.** $f(t) = t^2e^{-2t}$

15. $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t$ **16.** $f(t) = e^{t} \cos t$

17. $f(t) = t \cos t$ **18.** $f(t) = t \operatorname{sen} t$

En los problemas 19-36 use el teorema 7.1.1 para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

19. $f(t) = 2t^4$ **20.** $f(t) = t^5$

21. $f(t) = 4t - 10$ **22.** $f(t) = 7t + 3$

23. $f(t) = t^2 + 6t - 3$ **24.** $f(t) = -4t^2 + 16t + 9$

25. $f(t) = (t + 1)^3$ **26.** $f(t) = (2t - 1)^3$

27. $f(t) = 1 + e^{4t}$ **28.** $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$

29. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$ **30.** $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

31. $f(t) = 4t^2 - 5 \operatorname{sen} 3t$ **32.** $f(t) = \cos 5t + \operatorname{sen} 2t$

33. $f(t) = \operatorname{senh} kt$ **34.** $f(t) = \cosh kt$

35. $f(t) = e^t \operatorname{senh} t$ **36.** $f(t) = e^{-t} \cosh t$

En los problemas 37 a 40 encuentre $\mathscr{L}\{f(t)\}$ usando primero una identidad trigonométrica.

37. $f(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$ **38.** $f(t) = \cos^2 t$

39. $f(t) = \operatorname{sen}(4t + 5)$ **40.** $f(t) = 10 \cos\left(t - \dfrac{\pi}{6}\right)$

41. Hemos encontrado a la **función gamma** $\boldsymbol{\Gamma(\alpha)}$ en nuestro estudio de las funciones de Bessel en la sección 6.4. (pág. 263). Una definición de esta función está dada por la integral impropia

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \quad \alpha > 0.$$

Use esta definición para demostrar que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Cuando $\alpha = n$ es un entero positivo se puede utilizar la última propiedad para demostrar que $\Gamma(n + 1) = n!$. Vea el Apéndice A.

42. Utilice el problema 41 y un cambio de variable $u = st$ para obtener la generalización

$$\mathscr{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1$$

del resultado en el teorema 7.1.1(b)

En los problemas 43 a 46 utilice los problemas 41 y 42 y el hecho que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ para encontrar la transformada de Laplace de la función dada

43. $f(t) = t^{-1/2}$ **44.** $f(t) = t^{1/2}$

45. $f(t) = t^{3/2}$. **46.** $f(t) = 2t^{1/2} + 8\,t^{5/2}$

Problemas para analizar

47. Suponga que $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ para $s > c_1$ y que $\mathscr{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ para $s > c_2$. ¿Cuándo es cierto que

$$\mathscr{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)?$$

48. La figura 7.1.4 indica, pero no demuestra, que la función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial. ¿Cómo demuestra la observación de que $t^2 > \ln M + ct$, para $M > 0$ y t suficientemente grande, que $e^{t^2} > Me^{ct}$ para cualquier c?

49. Utilice el inciso c) del teorema 7.1.1 para demostrar que $\mathscr{L}\{e^{(a+ib)t}\} = \dfrac{s - a + ib}{(s - a)^2 + b^2}$, donde a y b son reales e $i^2 = -1$. Demuestre cómo se puede usar la fórmula de Euler (pág. 136) para deducir los resultados

$$\mathscr{L}\{e^{at} \cos bt\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$$

$$\mathscr{L}\{e^{at} \operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}.$$

50. ¿Bajo qué condiciones una función lineal $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$, es una transformada lineal?

51. Explique por qué la función

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 4, & 2 < t < 5 \\ 1/(t-5), & t > 5 \end{cases}$$

No es una función continua por tramos, sobre $[0, \infty)$.

52. Demuestre que la función $f(t) = 1/t^2$ no tiene una transformada de Laplace [*Sugerencia:* escriba $\mathscr{L}\{1/t^2\}$ como dos integrales impropias;

$$\mathscr{L}\{1/t^2\} = \int_0^1 \frac{e^{-st}}{t^2}\,dt + \int_1^\infty \frac{e^{-st}}{t^2}\,dt = I_1 + I_2$$

demuestre que I_1 diverge.]

53. La función $f(t) = 2te^{t^2}\cos t^2$ no es de orden exponencial. A pesar de esto, demuestre que la transformada de Laplace $\mathscr{L}\{2te^{t^2}\cos e^{t^2}\}$ existe. [*Sugerencia*: comience con la integración por partes.]

54. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $a > 0$ es una constante, demuestre que

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Este resultado se conoce como el **teorema de cambio de escala**.

En los problemas 55-58 utilice la transformada de Laplace dada y el resultado del problema 54 para encontrar la transformada de Laplace indicada. Suponga que a y k son constantes positivas.

55. $\mathscr{L}\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1}$; $\mathscr{L}\{e^{at}\}$

56. $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$; $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\}$

57. $\mathscr{L}\{1 - \cos t\} = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$; $\mathscr{L}\{1 - \cos kt\}$

58. $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} t \operatorname{senh} t\} = \dfrac{2s}{s^4+4}$; $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt \operatorname{senh} kt\}$

7.2 TRANSFORMADAS INVERSAS Y TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

INTRODUCCIÓN En esta sección se dan algunos pasos hacia un estudio de cómo se puede usar la transformada de Laplace para resolver ciertos tipos de ecuaciones para una función desconocida. Se empieza el análisis con el concepto de transformada de Laplace inversa o, más exactamente, la inversa de una transformada de Laplace $F(s)$. Después de algunos antecedentes preliminares importantes sobre la transformada de Laplace de derivadas $f'(t), f''(t), \ldots$, se ilustra cómo entran en juego la transformada de Laplace y la transformada de Laplace inversa para resolver ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas.

7.2.1 TRANSFORMADAS INVERSAS

EL PROBLEMA INVERSO Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir, $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ se dice entonces que $f(t)$ es la **transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ y se escribe $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$. En el caso de los ejemplos 1, 2 y 3 de la sección 7.1 tenemos las tablas a la izquierda, respectivamente.

Transformada	Transformada inversa
$\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$	$1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}$
$\mathscr{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$	$t = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\}$
$\mathscr{L}\{e^{-3t}\} = \dfrac{1}{s+3}$	$e^{-3t} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\}$

Pronto veremos que en la aplicación de la transformada de Laplace a ecuaciones no se puede determinar de manera directa una función desconocida $f(t)$; más bien, se puede despejar la transformada de Laplace $F(s)$ o $f(t)$; pero a partir de ese conocimiento, se determina f calculando $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$. La idea es simplemente esta: suponga que $F(s) = \dfrac{-2s+6}{s^2+4}$ es una transformada de Laplace; encuentre una función $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. En el ejemplo 2 se muestra cómo resolver este último problema.

Para futuras referencias el análogo del teorema 7.1.1 para la transformada inversa se presenta como nuestro siguiente teorema.

TEOREMA 7.2.1 Algunas transformadas inversas

a) $1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}$

b) $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}$

d) $\operatorname{sen} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\right\}$

e) $\cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k^2}\right\}$

f) $\operatorname{senh} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2-k^2}\right\}$

g) $\cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-k^2}\right\}$

Al evaluar las transformadas inversas, suele suceder que una función de s que estamos considerando no concuerda *exactamente* con la forma de una transformada de Laplace $F(s)$ que se presenta en la tabla. Es posible que sea necesario "arreglar" la función de s multiplicando y dividiendo entre una constante apropiada.

EJEMPLO 1 Aplicando el teorema 7.2.1

Evalúe **a)** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\}$ **b)** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+7}\right\}$.

SOLUCIÓN **a)** Para hacer coincidir la forma dada en el inciso b) del teorema 7.2.1, se identifica $n + 1 = 5$ o $n = 4$ y luego se multiplica y divide por 4!:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24}t^4.$$

b) Para que coincida con la forma dada en el inciso d) del teorema 7.2.1, identificamos $k^2 = 7$ y, por tanto, $k = \sqrt{7}$. Se arregla la expresión multiplicando y dividiendo por $\sqrt{7}$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\sqrt{7}t.$$ ■

$\mathscr{L}^{-1}$ ES UNA TRANSFORMADA LINEAL La transformada de Laplace inversa es también una transformada lineal para las constantes α y β

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}, \tag{1}$$

donde F y G son las transformadas de algunas funciones f y g. Como en la ecuación (3) de la sección 7.1, la ecuación (1) se extiende a cualquier combinación lineal finita de transformadas de Laplace.

EJEMPLO 2 División término a término y linealidad

Evalúe . $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$

SOLUCIÓN Primero se reescribe la función dada de s como dos expresiones dividiendo cada uno de los términos del numerador entre el denominador y después se usa la ecuación (1):

repartición de cada uno de los términos por el denominador

linealidad y arreglo de las constantes

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}\right\} = -2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{6}{2}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \qquad (2)$$

$$= -2\cos 2t + 3\,\mathrm{sen}\,2t.$$

← incisos e) y d) del teorema 7.2.1 con $k = 2$ ■

FRACCIONES PARCIALES Las fracciones parciales juegan un papel importante en la determinación de transformadas de Laplace inversas. La descomposición de una expresión racional en las fracciones componentes se puede hacer rápidamente usando una sola instrucción en la mayoría de los sistemas algebraicos de computadora. De hecho, algunos SAC tienen paquetes implementados de transformada de Laplace y transformada de Laplace inversa. Pero para quienes no cuentan con este tipo de software, en esta sección y en las subsecuentes revisaremos un poco de álgebra básica en los casos importantes donde el denominador de una transformada de Laplace $F(s)$ contiene factores lineales distintos, factores lineales repetidos y polinomios cuadráticos sin factores reales. Aunque examinaremos cada uno de estos casos conforme se desarrolla este capítulo, podría ser buena idea que consultara un libro de cálculo o uno de precálculo para una revisión más completa de esta teoría.

En el siguiente ejemplo se muestra la descomposición en fracciones parciales en el caso en que el denominador de $F(s)$ se puede descomponer en *diferentes factores lineales*.

EJEMPLO 3 Fracciones parciales: diferentes factores lineales

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$.

SOLUCIÓN Existen constantes reales A, B y C, por lo que

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}$$

$$= \frac{A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}.$$

Puesto que los denominadores son idénticos, los numeradores son idénticos:

$$s^2 + 6s + 9 = A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2). \qquad (3)$$

Comparando los coeficientes de las potencias de s en ambos lados de la igualdad, sabemos que (3) es equivalente a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas A, B y C. Sin embargo, hay un atajo para determinar estas incógnitas. Si se hace $s = 1$, $s = 2$ y $s = -4$ en (3) se obtiene, respectivamente,

$$16 = A(-1)(5), \qquad 25 = B(1)(6) \quad \text{y} \quad 1 = C(-5)(-6),$$

y así, $A = -\frac{16}{5}$, $B = \frac{25}{6}$, y $C = \frac{1}{30}$. Por lo que la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = -\frac{16/5}{s-1} + \frac{25/6}{s-2} + \frac{1/30}{s+4}, \qquad (4)$$

y, por tanto, de la linealidad de $\mathscr{L}^{-1}$ y del inciso c) del teorema 7.2.1,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{16}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$= -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}. \qquad (5)$$ ■

7.2.2 TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

TRANSFORMADA DE UNA DERIVADA Como se indicó en la introducción de este capítulo, el objetivo inmediato es usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Para tal fin, es necesario evaluar cantidades como $\mathscr{L}\{dy/dt\}$ y $\mathscr{L}\{d^2y/dt^2\}$. Por ejemplo, si f' es continua para $t \geq 0$, entonces integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\\ &= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

o
$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \tag{6}$$

Aquí hemos supuesto que $e^{-st}f(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$. De manera similar, con la ayuda de la ecuación (6),

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\, dt = e^{-st} f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt\\ &= -f'(0) + s\mathscr{L}\{f'(t)\}\\ &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \qquad \leftarrow \text{de (6)}\end{aligned}$$

o
$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{7}$$

De igual manera se puede demostrar que

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \tag{8}$$

La naturaleza recursiva de la transformada de Laplace de las derivadas de una función f es evidente de los resultados en (6), (7) y (8). El siguiente teorema da la transformada de Laplace de la n-ésima derivada de f. Se omite la demostración.

TEOREMA 7.2.2 Transformada de una derivada

Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas sobre $[0, \infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos sobre $[0, \infty)$, entonces

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

SOLUCIÓN DE EDO LINEALES Es evidente del resultado general dado en el teorema 7.2.2 que $\mathscr{L}\{d^ny/dt^n\}$ depende de $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ y las $n - 1$ derivadas de $y(t)$ evaluadas en $t = 0$. Esta propiedad hace que la transformada de Laplace sea adecuada para resolver problemas lineales con valores iniciales en los que la ecuación diferencial tiene *coeficientes constantes*. Este tipo de ecuación diferencial es simplemente una combinación lineal de términos $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$\begin{aligned} a_n\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0y &= g(t),\\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1},\end{aligned}$$

donde las a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes. Por la propiedad de linealidad la transformada de Laplace de esta combinación lineal es una combinación lineal de transformadas de Laplace:

$$a_n\mathscr{L}\left\{\frac{d^ny}{dt^n}\right\} + a_{n-1}\mathscr{L}\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_0\,\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{g(t)\}. \tag{9}$$

Del teorema 7.2.2, la ecuación (9) se convierte en

$$a_n[s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)]$$
$$+ a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)] + \cdots + a_0Y(s) = G(s), \tag{10}$$

donde $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$. En otras palabras, *la transformada de Laplace de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se convierte en una ecuación algebraica en $Y(s)$.* Si se resuelve la ecuación transformada general (10) para el símbolo $Y(s)$, primero se obtiene $P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$ y después se escribe

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)}, \tag{11}$$

donde $P(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$, $Q(s)$ es un polinomio en s de grado menor o igual a $n - 1$ que consiste en varios productos de los coeficientes a_i, $i = 1, \ldots, n$ y las condiciones iniciales prescritas $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ y $G(s)$ es la transformada de Laplace de $g(t)$.* Normalmente se escriben los dos términos de la ecuación (11) sobre el mínimo común denominador y después se descompone la expresión en dos o más fracciones parciales. Por último, la solución $y(t)$ del problema con valores iniciales original es $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$, donde la transformada inversa se hace término a término.

El procedimiento se resume en el siguiente diagrama.

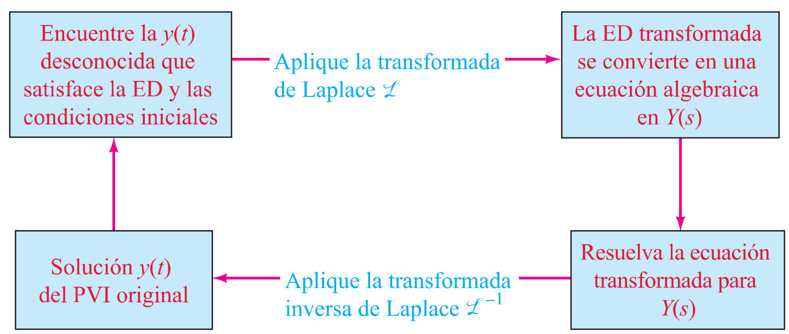


FIGURA 7.2.1 Pasos para resolver un PVI con la tranformada de Laplace.

En el ejemplo siguiente se ilustra el método anterior para resolver ED, así como la descomposición en fracciones parciales para el caso en que el denominador de $Y(s)$ contenga un *polinomio cuadrático sin factores reales*.

EJEMPLO 4 Solución de un PVI de primer orden

Use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13 \operatorname{sen} 2t, \quad y(0) = 6.$$

SOLUCIÓN Primero se toma la transformada de cada miembro de la ecuación diferencial.

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\mathscr{L}\{y\} = 13\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\}. \tag{12}$$

De (6), $\mathscr{L}\{dy/dt\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 6$, y del inciso d) del teorema 7.1.1, $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = 2/(s^2 + 4)$, por lo que la ecuación (12) es lo mismo que

$$sY(s) - 6 + 3Y(s) = \frac{26}{s^2 + 4} \quad \text{o} \quad (s + 3)Y(s) = 6 + \frac{26}{s^2 + 4}.$$

*El polinomio $P(s)$ es el mismo que el polinomio auxiliar de n-ésimo grado en la ecuación (12) de la sección 4.3 donde el símbolo m usual se sustituye por s.

Resolviendo la última ecuación para $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{6}{s+3} + \frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)}. \tag{13}$$

Puesto que el polinomio cuadrático $s^2 + 4$ no se factoriza usando números reales, se supone que el numerador en la descomposición de fracciones parciales es un polinomio lineal en s:

$$\frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4}.$$

Poniendo el lado derecho de la igualdad sobre un común denominador e igualando los numeradores, se obtiene $6s^2 + 50 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s + 3)$. Haciendo $s = -3$ se obtiene inmediatamente que $A = 8$. Puesto que el denominador no tiene más raíces reales, se igualan los coeficientes de s^2 y s: $6 = A + B$ y $0 = 3B + C$. Si en la primera ecuación se usa el valor de A se encuentra que $B = -2$, y con este valor aplicado a la segunda ecuación, se obtiene $C = 6$. Por lo que,

$$Y(s) = \frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{8}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4}.$$

Aún no se termina porque la última expresión racional se tiene que escribir como dos fracciones. Esto se hizo con la repartición término a término entre el denominador del ejemplo 2. De (2) de ese ejemplo,

$$y(t) = 8\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}.$$

Se deduce de los incisos c), d) y e) del teorema 7.2.1, que la solución del problema con valores iniciales es $y(t) = 8e^{-3t} - 2\cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t$. ■

EJEMPLO 5 **Solución de un PVI de segundo orden**

Resuelva $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$

SOLUCIÓN Procediendo como en el ejemplo 4, se transforma la ED. Se toma la suma de las transformadas de cada término, se usan las ecuaciones (6) y (7), las condiciones iniciales dadas, el inciso c) del teorema 7.1.1 y después se resuelve para $Y(s)$:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 3\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{-4t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s + 2 + \frac{1}{s+4}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s^2-3s+2)(s+4)} = \frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}. \tag{14}$$

Los detalles de la descomposición en fracciones parciales de $Y(s)$ en (14) ya se presentaron en el ejemplo 3. En vista de los resultados en (4) y (5), se tiene la solución del problema con valores iniciales

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$ ■

En los ejemplos 4 y 5, se ilustra el procedimiento básico de cómo usar la transformada de Laplace para resolver un problema lineal con valores iniciales, pero podría parecer que estos ejemplos demuestran un método que no es mucho mejor que el aplicado a los problemas descritos en las secciones 2.3 y 4.3 a 4.6. No saque conclusiones negativas de sólo dos ejemplos. Sí, hay una gran cantidad de álgebra inherente al uso de la transformada de Laplace, *pero* observe que no se tiene que usar la variación de parámetros o preocuparse acerca de los casos y el álgebra en el método de coeficientes indeterminados. Además, puesto que el método incorpora las condiciones iniciales preescritas directamente en la solución, no se requiere la operación separada de aplicar las condiciones iniciales a la solución general $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n + y_p$ de la ED para determinar constantes específicas en una solución particular del PVI.

La transformada de Laplace tiene muchas propiedades operacionales. En las secciones que siguen se examinan algunas de estas propiedades y se ve cómo permiten resolver problemas de mayor complejidad.

COMENTARIOS

i) La transformada de Laplace inversa de una función $F(s)$ podría no ser única; en otras palabras, es posible que $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$ y sin embargo $f_1 \neq f_2$. Para nuestros propósitos, esto no es algo que nos deba preocupar. Si f_1 y f_2 son continuas por tramos sobre $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces f_1 y f_2 son *esencialmente* iguales. Véase el problema 50 de los ejercicios 7.2. Sin embargo, si f_1 y f_2 son continuas sobre $[0, \infty)$ y $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$, entonces $f_1 = f_2$ sobre el intervalo.

ii) Este comentario es para quienes tengan la necesidad de hacer a mano descomposiciones en fracciones parciales. Hay otra forma de determinar los coeficientes en una descomposición de fracciones parciales en el caso especial cuando $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ es una función racional de s y el denominador de F es un producto de *distintos* factores lineales. Esto se ilustra al analizar de nuevo el ejemplo 3. Suponga que se multiplican ambos lados de la supuesta descomposición

$$\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4} \tag{15}$$

digamos, por $s - 1$, se simplifica y entonces se hace $s = 1$. Puesto que los coeficientes de B y C en el lado derecho de la igualdad son cero, se obtiene

$$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s+4)}\right|_{s=1} = A \quad \text{o} \quad A = -\frac{16}{5}.$$

Escrita de otra forma,

$$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{\boxed{(s-1)}(s-2)(s+4)}\right|_{s=1} = -\frac{16}{5} = A,$$

donde se ha sombreado o *cubierto*, el factor que se elimina cuando el lado izquierdo se multiplica por $s - 1$. Ahora, para obtener B y C, simplemente se evalúa el lado izquierdo de (15) mientras se cubre, a su vez, $s - 2$ y $s + 4$:

$$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)\boxed{(s-2)}(s+4)}\right|_{s=2} = \frac{25}{6} = B$$

y $$\left.\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)\boxed{(s+4)}}\right|_{s=-4} = \frac{1}{30} = C.$$

La descomposición deseada (15) se da en (4). Esta técnica especial para determinar coeficientes se conoce desde luego como **método de cubrimiento**.

iii) En este comentario continuamos con la introducción a la terminología de sistemas dinámicos. Como resultado de las ecuaciones (9) y (10) la transformada de Laplace se adapta bien a sistemas dinámicos *lineales*. El polinomio $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$ en (11) es el coeficiente total de $Y(s)$ en (10) y es simplemente el lado izquierdo de la ED en donde las derivadas $d^k y/dt^k$ se sustituyen por potencias s^k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Es común llamar al recíproco de $P(s)$, en particular $W(s) = 1/P(s)$, **función de transferencia** del sistema y escribir la ecuación (11) como

$$Y(s) = W(s)Q(s) + W(s)G(s). \tag{16}$$

De esta manera se han separado, en un sentido aditivo, los efectos de la respuesta debidos a las condiciones iniciales (es decir, $W(s)Q(s)$) de los causados por la función de entrada g (es decir, $W(s)G(s)$). Vea (13) y (14). Por tanto la respuesta $y(t)$ del sistema es una superposición de dos respuestas:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\{W(s)G(s)\} = y_0(t) + y_1(t).$$

Si la entrada es $g(t) = 0$, entonces la solución del problema es $y_0(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)Q(s)\}$. Esta solución se llama **respuesta de entrada cero** del sistema. Por otro lado, la función $y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)G(s)\}$ es la salida debida a la entrada $g(t)$. Entonces, si la condición inicial del sistema es el estado cero (todas las condiciones iniciales son cero), entonces $Q(s) = 0$ y, por tanto, la única solución del problema con valores iniciales es $y_1(t)$. La última solución se llama **respuesta de estado cero** del sistema. Tanto $y_0(t)$ como $y_1(t)$ son soluciones particulares: $y_0(t)$ es una solución del PVI que consiste en la ecuación homogénea relacionada con las condiciones iniciales dadas y $y_1(t)$ es una solución del PVI que consiste en la ecuación no homogénea con condiciones iniciales cero. En el ejemplo 5 se ve de (14) que la función de transferencia es $W(s) = 1/(s^2 - 3s + 2)$, la respuesta de entrada cero es

$$y_0(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-1)(s-2)}\right\} = -3e^t + 4e^{2t},$$

y la respuesta de estado cero es

$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{1}{5}e^t + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$

Compruebe que la suma de $y_0(t)$ y $y_1(t)$ es la solución de $y(t)$ en el ejemplo 5 y que $y_0(0) = 1$, $y_0'(0) = 5$, mientras que $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$.

EJERCICIOS 7.2

Las respuestas a los problemas seleccionados con número impar comienzan en la página RES-11.

7.2.1 TRANSFORMADAS INVERSAS

En los problemas 1-30 use el álgebra apropiada y el teorema 7.2.1 para encontrar la transformada inversa de Laplace dada.

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$

3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{48}{s^5}\right\}$

4. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$

6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\}$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s} + \frac{6}{s^5} - \frac{1}{s+8}\right\}$

9. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$

10. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s-2}\right\}$

11. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$

12. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$

14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-4s}\right\}$

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-3}\right\}$

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-20}\right\}$

21. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{0.9s}{(s-0.1)(s+0.2)}\right\}$

22. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}\right\}$

23. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$

24. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s(s-1)(s+1)(s-2)}\right\}$

25. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+5s}\right\}$

26. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$

27. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}\right\}$

28. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-9}\right\}$

29. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

30. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{s^4+5s^2+4}\right\}$

En los problemas 31-34 encuentre la función inversa de la transformada de Laplace encontrando la transformada de Laplace de la función indicada

31. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2-b^2}\right\}$; $f(t) = e^{at}\operatorname{senh} bt$

32. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}\right\}$; $f(t) = at - \operatorname{sen} at$

33. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}$; $f(t) = a \operatorname{sen} bt - b \operatorname{sen} at$

34. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}$; $f(t) = \cos bt - \cos at$

7.2.2 TRANSFORMADAS DE DERIVADAS

En los problemas 35-44, use la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales.

35. $\frac{dy}{dt} - y = 1, \quad y(0) = 0$

36. $2\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = -3$

37. $y' + 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 2$

38. $y' - y = 2\cos 5t, \quad y(0) = 0$

39. $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

40. $y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

41. $y'' + y = \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0$

42. $y'' + 9y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

43. $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$ $y''(0) = 1$

44. $y''' + 2y'' - y' - 2y = \operatorname{sen} 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$ $y''(0) = 1$

Las formas inversas de los resultados del problema 49 en los ejercicios 7.1 son

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at}\cos bt$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at}\operatorname{sen} bt.$$

En los problemas 45 y 46 use la transformada de Laplace y estas inversas para resolver el problema con valores iniciales dado.

45. $y' + y = e^{-3t}\cos 2t, \quad y(0) = 0$

46. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

En los problemas 47 y 48 utilice una de las transformadas inversas de Laplace encontradas en los problemas 31 a 34 para resolver el problema de valor inicial dado.

47. $y'' + 4y = 10\cos 5t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

48. $y'' + 2y = 4t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Problemas para analizar

49. **a)** Con un ligero cambio de notación la transformada en (6) es lo mismo que

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Con $f(t) = te^{at}$, analice cómo se puede usar este resultado junto con c) del teorema 7.1.1 para evaluar $\mathscr{L}\{te^{at}\}$.

b) Proceda como en el inciso a), pero esta vez examine cómo usar (7) con $f(t) = t \operatorname{sen} kt$ junto con d) y e) del teorema 7.1.1 para evaluar $\mathscr{L}\{t \operatorname{sen} kt\}$.

50. Construya dos funciones f_1 y f_2 que tengan la misma transformada de Laplace. No considere ideas profundas.

51. Lea de nuevo el inciso *iii*) de los *Comentarios* del final de esta sección. Encuentre la respuesta de entrada cero y la respuesta de estado cero para el PVI del problema 40.

52. Suponga que $f(t)$ es una función para la que $f'(t)$ es continua por tramos y de orden exponencial c. Use los resultados de esta sección y la sección 7.1 para justificar

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s),$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Compruebe este resultado con $f(t) = \cos kt$.