

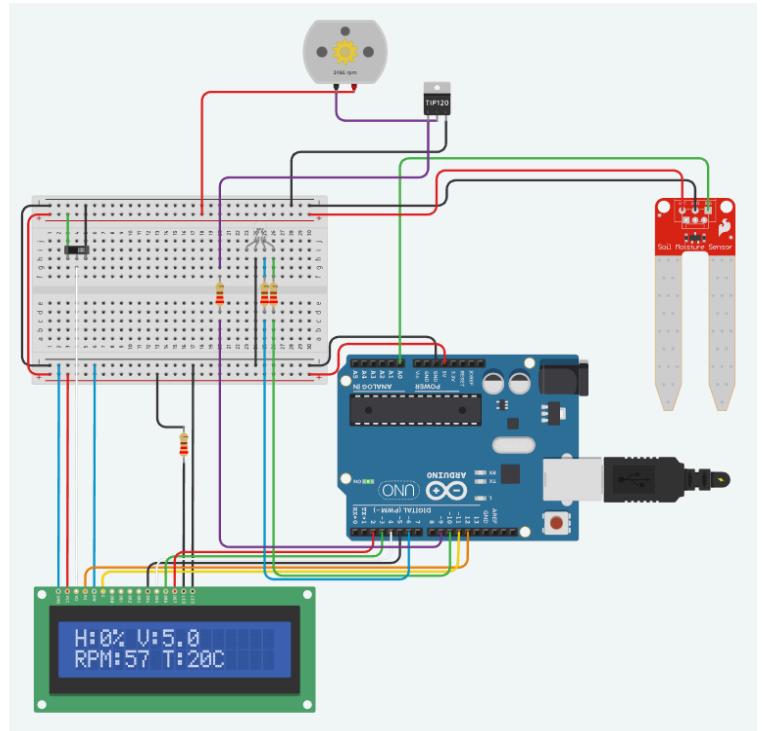
Tecnologías Para la Automatización

Global - Sistema de riego

Alejo Carobolante

Julián Cadenas

25 de noviembre de 2025



Índice

Índice.....	1
Selección de un tema de interés.....	2
Implementación del Sistema.....	2
Componentes del sistema.....	2
Funcionamiento del sistema.....	3
Implementación de un sistema de monitoreo visual.....	4
Análisis del Sistema de Control.....	5
Estado del sistema.....	5
Variables de estado.....	6
Matrices del sistema.....	6
¿Qué representa cada coeficiente?.....	6
Ecuaciones de estado del sistema.....	8
RPM.....	8
Temperatura.....	8
Entrada $u(t)$	8
Salida del sistema.....	9
Función de transferencia del sistema.....	9
Laplace.....	10
Solución del sistema.....	11
Análisis de estabilidad.....	12
Criterio de Routh-Hurwitz.....	12
Análisis de velocidad de convergencia.....	13
Convergencia del sistema.....	14
Plano de Fase.....	15
Implementación de un control de temperatura.....	16
Implementación de motor DC con encoder.....	17
Precisión del modelo matemático.....	18
Alternativas para el análisis de compatibilidad con el nuevo motor.....	19
Cálculo de un Gear Ratio ideal para nuestro sistema.....	20
Adaptar el estado del sistema a la realidad.....	21
Nuevas matrices del sistema.....	21
Nuevo cálculo de las RPM como variable de estado.....	21
Nueva función de transferencia del sistema.....	22
Solución del sistema.....	22
Comparación final.....	22

Selección de un tema de interés

Sistema de Riego Automático Basado en Humedad del Suelo

- Desarrollo e implementación de un modelo matemático de la dinámica de humedad en el suelo (considerando evaporación, absorción por plantas, etc.) (Matlab). Simulación en Tinkercad con sensores de humedad y bombas de agua. Envío de datos en tiempo real de humedad a ThinkSpeak para generar gráficos y alertas (por ejemplo, suelo seco).

El tema elegido es el **sistema de riego automático basado en la humedad del suelo**. Este sistema de control es un sistema **SISO**.

Implementación del Sistema

La implementación del sistema se realizó en el software trabajado en la cátedra, Tinkercad, el cual nos permite simular el funcionamiento del mismo, utilizando diferentes dispositivos tanto analógicos como digitales. Además utilizamos el software de Matlab para realizar diferentes gráficos del sistema de control y poder enviar datos reales de nuestro sistema a ThingSpeak, con el propósito de hacer una integración completa de lo visto en la cátedra. Como agregado y principalmente pensando en el usuario, implementamos un front el cual está deployado en vercel, que nos permite ver cómo sería la una simulación de nuestro sistema funcionando sin la necesidad de acceder al tinkercad. Además, desde esta aplicación podemos ver los gráficos que tenemos en thingspeak para hacer un seguimiento de un histórico de los porcentajes de humedad por ejemplo o también tenemos la posibilidad de agregar diferentes gráficos a la pantalla principal de la aplicación.

Esto lo logramos gracias a las READ API KEY que nos proporciona thingspeak, por supuesto que estos gráficos que mostramos son cargados previamente a través de un txt que contiene la salida del monitor serial de nuestro código en tinkercad. Y este txt es leído en matlab y se realiza el envío desde ahí.

Componentes del sistema

Este sistema está compuesto por elementos que cumplen distintos roles:

- **Sensor de humedad del suelo:** Este dispositivo cumple el rol de sensor, permitiendo a nuestro robot percibir información del entorno, como lo puede ser la humedad del medio con el que está en contacto

- **Motor de corriente directa:** Este dispositivo cumple el rol de actuador, el cual convierte la información brindada por el sensor (en forma de pulso eléctrico), en fuerza, en este caso, siendo el motor de la bomba de riego del espacio en el que se coloque
- **LCD 16x2:** Si bien este dispositivo no es propio del análisis del sistema de control, nos permite conocer información sobre el estado del sistema, en este caso mostrando el porcentaje (%) de humedad del medio y la corriente que llega al sistema.
- **Side Switch:** Similar al caso del LCD, no forma parte del análisis del sistema de control, ya que es únicamente una herramienta que sirve para controlar que el LCD se encienda.
- **Arduino UNO:** Siendo el controlador, este dispositivo funciona como “cerebro” del robot, el cual nos permite realizar las conexiones físicas y lógicas para enviar la información desde el sensor de humedad hasta el motor de CD.
- **Transistor TIP120:** Este dispositivo no es propio del análisis del sistema de control. El transistor TIP120 actúa como un amplificador de corriente e interruptor controlado electrónicamente entre el Arduino y la bomba de agua. Ya que si tuviéramos la bomba conectada directamente al arduino, este podría sufrir daños debido a los altos amperajes que maneja la bomba. Además este transistor nos permite variar las revoluciones del motor de acuerdo a la humedad que encontramos en el suelo.

Funcionamiento del sistema

Este sistema de riego permite trabajar con valores continuos en cuanto a la corriente recibida por el motor.

A diferencia de un sistema tradicional (On/Off), nosotros implementamos un sistema de control de lazo cerrado con acción proporcional: el sistema modula la energía entregada al actuador (bomba) mediante una señal **PWM**.

Este sistema, funciona mediante una relación inversa entre la humedad y el voltaje. Por ejemplo, cuando la humedad del suelo es mínima (0%), el sistema entrega al motor el voltaje máximo, generando un número alto de RPM en la bomba. A medida que la humedad aumenta y se acerca al máximo (100%), el voltaje y las RPM disminuyen gradualmente, permitiendo una absorción más eficiente y uniforme del agua por parte del suelo.

Un aspecto distintivo del sistema adoptado respecto del planteado originalmente es la inclusión de la temperatura de operación del motor como variable de estado del sistema, tomando como principio que el motor no siempre operará en condiciones favorables, sino que su temperatura se verá afectada por:

- Calor producido por la fricción interna y la corriente eléctrica (proporcional a las RPM).

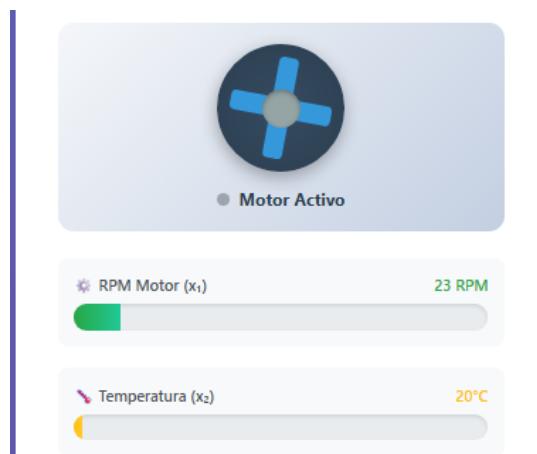
- Refrigeración por el propio agua bombeada y usada como refrigerante (a mayores RPM, mayor cantidad de agua bombeada, proporcionando mayor disipación de calor).

Implementación de un sistema de monitoreo visual

A nivel visual, y pensando en la experiencia del usuario de este tipo de sistemas, implementamos una herramienta a nivel Front End enfocada a que el usuario pueda observar en tiempo real métricas sobre las variables de estudio e interés del sistema:



Por un lado, en esta versión prototipo podemos observar el funcionamiento del sistema y su respuesta ante niveles variables de humedad (slide cuyo valor se decide manualmente, únicamente a modo didáctico). Se presenta un “modo demo”, en el que se puede emular el comportamiento del sistema en condiciones normales.



Dependiendo el nivel de humedad del suelo, las RPM y la temperatura variarán y convergerán a sus distintos puntos de equilibrio.

Hemos implementado el “control de temperatura”, sobre el cual se hablará más adelante en el informe.



Como último punto, logramos una integración directa con ThingSpeak, por lo que mediante las métricas que se van tomando con el funcionamiento en el día a día, el usuario puede llevar a cabo un control del ambiente de operación de la bomba.

Para dirigirse a la simulación hacer click acá, y para ver el código fuente hacer click acá.

Los datos que se encuentran cargados actualmente son extraídos del monitor serial de Tinkercad. Para verlos haga click acá.

Análisis del Sistema de Control

Estado del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} u(t)$$

Variables de estado

El sistema se describe mediante dos variables principales que nos indican cómo se está comportando la bomba en todo momento:

- **$x_1(t)$: RPM del motor**
 - Representa la velocidad real a la que está girando la bomba de agua.
 - Esta velocidad depende directamente del voltaje que le enviamos $u(t)$. Si aumentamos el voltaje, las RPM suben; si lo bajamos, las RPM bajan.
- **$x_2(t)$: Dinámica Térmica del Motor**
 - Es un valor calculado que nos dice cuál es el estado térmico del motor proporcionalmente a su funcionamiento, refrigeración, etc.. Como no tenemos un sensor físico en el sistema observando a la bomba, el Arduino lo estima matemáticamente.
 - **Gracias al estudio realizado y a los coeficientes obtenidos, la escala de valores que toma esta variable de estados, es similar a la temperatura del sistema en °C, por lo que a niveles prácticos vamos a llamarla temperatura.**
 - En el desglose de los coeficientes de la matriz A están detallados los valores y su justificación, por lo que termina siendo de fácil comprensión el hecho de aproximar esta variable a la temperatura.
 - Su valor sube cuando el motor gira rápido (por el uso continuo y la fricción) y baja gracias a que el agua que circula ayuda a enfriarlo.
 - Su función principal es la **protección**.
 - Opcionalmente, si esta temperatura estimada supera el límite de seguridad (80°C), el sistema decide apagar la bomba automáticamente para evitar que se queme.
 - No depende directamente del voltaje, sino que es una consecuencia de las RPM.

Matrices del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ (0.05 - 0.03) & -0.05 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz A}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz B}} u(t)$$

¿Qué representa cada coeficiente?

- **Matriz A:**

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 \left[\frac{1}{s} \right] & 0 \\ 0.02 \left[\frac{\text{°C}}{s \cdot RPM} \right] & -0.05 \left[\frac{1}{s} \right] \end{bmatrix}$$

○ **A11 ($\frac{1}{s}$):**

- Valor: -0.5
- Significado: Este coeficiente define la inercia del sistema, la resistencia física que ofrece el agua a ser empujada por el motor. El signo negativo es porque se opone al movimiento del motor.
- Justificación del valor: Al ser el agua un fluido viscoso, un valor de 0.5 implica una constante de tiempo mecánica de 2 segundos (realista para modelar el tiempo que demora un motor en detenerse debido a la inercia del fluido dentro de la tubería una vez se corta la energía)

○ **A21 ($\frac{\text{°C}}{s \cdot RPM}$):**

- Valor: $(0.05 - 0.03 = 0.02)$
 - 0.05: Este término representa el calentamiento por la resistividad de los materiales de la bomba.
 - 0.03: Este término representa la capacidad calorífica del agua. Al ser una bomba de paso, el agua se lleva gran parte del calor generado.
 - Resultado 0.02: La diferencia demuestra que a pesar de que el agua refrigerá, cuando se opera con niveles de exigencia altos, la generación de calor supera a la disipación, aumentando así la temperatura.
- Significado: Es una diferencia de temperaturas: el aumento de la temperatura debido al uso continuo de la bomba contra el enfriamiento producto del uso del agua como agente refrigerante. La temperatura de la bomba subirá si la bomba gira más rápido.

○ **A22 ($\frac{1}{s}$):**

- Valor: -0.05
- Significado: (Tasa de decaimiento térmico o Coeficiente de Disipación Térmica Convectiva) Este coeficiente representa la capacidad de la bomba de liberar temperatura al aire. El signo negativo es porque estamos hablando de una pérdida de temperatura del sistema.
- Justificación del valor: Este valor es aceptable para bombas cuya carcasa del motor es de ABS o algún metal ligero (Plástico ABS, Aluminio fundido).

• **Matriz B:**

$$B = \begin{bmatrix} 20 & \left[\frac{RPM}{s \cdot V} \right] \\ 0 & \end{bmatrix}$$

○ **B11 ($\frac{RPM}{s \cdot V}$):**

- Valor: 20
- Significado: Representa la relación entre el voltaje aplicado y el aumento o disminución de las RPM. Este valor es consecuencia del cálculo para las RPM y voltaje solicitados:

$$0 = -0.5 \cdot (RPM) + 20 \cdot (5V) \rightarrow 0.5 \cdot RPM = 100 \rightarrow RPM = 200$$

Observamos entonces que para el voltaje máximo (5V), las RPM para el sistema en equilibrio son 200.

Ecuaciones de estado del sistema

RPM

$$x'1(t) = -0.05 * x1(t) + 20 u(t)$$

Temperatura

$$x'2(t) = (0.05 - 0.03) * x1(t) - 0.05 * x2(t)$$

Entrada u(t)

En nuestro sistema la entrada $u(t)$ es el voltaje aplicado al motor, que va a depender de la humedad medida del suelo a través de nuestro sensor de humedad. Esta entrada afecta directamente las revoluciones del motor, por otro lado, afecta indirectamente la temperatura del mismo. Ya que la temperatura del motor aumentará debido a las altas revoluciones, mientras que el flujo de agua ayudará a enfriar el motor.

$$u(t) = 5 * (1 - \frac{\text{Humedad}}{100})$$

Estamos hablando entonces de un **Controlador Proporcional**, es un sistema de **lazo cerrado con ganancia constante con entrada variable**.

Salida del sistema

La salida del sistema, dada por:

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

Son las RPM del motor (bomba), lo cual puede traducirse en el agua bombeada hacia afuera del sistema.

En la matriz C, dada por:

$$C = [1 \quad 0]$$

Se define el coeficiente c_{11} como 1, ya que se toman en cuenta las RPM del motor para mostrar la salida, y 0 el coeficiente c_{12} ya que la temperatura no representa un valor de salida.

Si resolvemos el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$y(t) = \underbrace{[1 \quad 0]}_{\text{Matriz C}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{\text{Matriz D}} u(t)$$

$$y(t) = (1 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t)) + 0$$

$$y(t) = x_1(t) = \text{RPM}$$

Demostrando nuevamente que la salida está dada únicamente por la variable de estado x_1 , las RPM del motor.

Función de transferencia del sistema

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 0.5 & 0 \\ -0.02 & s + 0.05 \end{bmatrix}$$

$$(sl - A)^{-1} = \frac{1}{(s+0.5)(s+0.05)} \begin{bmatrix} s + 0.05 & 0 \\ 0.02 & s + 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(sl - A)^{-1} B = \frac{1}{(s+0.5)(s+0.05)} \begin{bmatrix} 20s + 1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$C(sl - A)^{-1} B = \frac{20s + 1}{(s+0.5)(s+0.05)}$$

Es la función de transferencia del sistema

Simplificando

$$G(s) = \frac{20(s + 0.05)}{(s + 0.5)(s + 0.05)}$$

Finalmente, la función de transferencia del sistema es:

$$G(s) = \frac{20}{(s + 0.5)}$$

Esta función nos demuestra que el cambio en la temperatura no tiene impacto en las RPM, las cuales dependen solo de su propia fricción ($s+0.5$).

Laplace

Vamos a aplicar la Transformada de Laplace para conocer cómo reaccionan las RPM (**$Y(s)$**) ante una entrada de Voltaje de tipo Escalón unitario ($U(s)$).

Tengamos en cuenta:

- Entrada Escalón Unitario $U(s)$: $\frac{1}{s}$
- Salida: $Y(s) = G(s) * U(s)$

$$Y(s) = \frac{20}{s + 0.5} \cdot \frac{1}{s}$$

Usando fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0.5}$$

Calculamos **A** y **B**:

- Para **A** multiplicamos por s y evaluamos en $s = 0$:

$$A = \frac{20}{0+0.5} = 40$$

- Para **B** multiplicamos por $s + 0.5$ y evaluamos en $s = -0.5$:

$$B = \frac{20}{-0.5} = -40$$

Obtenemos:

$$Y(s) = \frac{40}{s} - \frac{40}{s+0.5}$$

Aplicando **Transformada Inversa de Laplace** de la siguiente manera:

- $\frac{1}{s} = l$ Escalón
- $\frac{1}{s+a} = e^{-at}$ Exponencial

Solución del sistema

La solución luego de aplicar **Transformada Inversa de Laplace** es la siguiente:

$$RPM(t) = 40 \cdot (1 - e^{-0.5t})$$

Es la función de **Entrada Escalón Unitario**.

Entonces, la solución del sistema es:

$$RPM(t) = 40 \cdot V \cdot (1 - e^{-0.5t})$$

De este análisis observamos los siguientes puntos:

1. **Ganancia estática de a 40 RPM por Voltio:** Si se aplica 1V, las RPM serán 40, y así hasta 5V con $RPM = 200$, cantidad que coincide con la máxima delimitada para la bomba.

2. **Análisis de la respuesta temporal:** Dado que el polo dominante del sistema se encuentra en $s = -0.5$, la constante de tiempo es $\tau = \frac{1}{0.5} = 2$ segundos. Esto implica que, ante un cambio en el voltaje de entrada, el motor tardará aproximadamente 2 segundos en alcanzar el 63% de su velocidad objetivo y se considerará estabilizado (99%) luego de 10 segundos (5τ).

Análisis de estabilidad

Un sistema es estable si dado a una entrada acotada, este produce una salida acotada.

Los autovalores del sistema son $s_1 = -0.5$ y $s_2 = -0.05$

- Respecto a las **RPM** del motor, el autovalor s_1 , muestra que las RPM no crecerán indefinidamente, sino que convergerán rápidamente a su punto de equilibrio (valor determinado por *la humedad* (entrada) $u(t)$). Este autovalor está más a la izquierda en el plano complejo.
- Respecto de la **Temperatura** del motor, el autovalor s_2 , muestra que la temperatura del motor tampoco crecerá indefinidamente, sin embargo se estabilizará más lentamente debido a que es más cercano a 0.

Esto nos demuestra que el sistema es incondicionalmente estable, garantizando que ante cualquier entrada acotada de voltaje, tanto RPM como temperatura no divergieron al infinito, sino buscarán un punto de equilibrio.

Sin embargo, a pesar de ser estable, el valor de convergencia del sistema no es constante, sino que cambiará dinámicamente, dependiendo del porcentaje de humedad en cada momento.

Criterio de Routh-Hurwitz

Teniendo en cuenta que la función de transferencia (sin simplificar) del sistema es

$$G(s) = \frac{20(s + 0.05)}{(s + 0.5)(s + 0.05)}$$

Desarrollaremos a partir del denominador:

$$D(s) = (s + 0.5)(s + 0.05)$$

Expandiendo el producto:

$$s^2 + 0.55s + 0.025 = 0$$

Obtenemos:

- $a_0 = 1$
- $a_1 = 0.55$
- $a_2 = 0.025$

Armamos la tabla:

s^2	1	0.025
s^1	0.55	
s^0	b ₁	

Calculando b₁:

$$b_1 = \frac{(0.55 \times 0.025) - (1 \times 0)}{0.55}$$

$$b_1 = \frac{0.01375}{0.55} = 0.025$$

Viendo la primera columna, podemos comprobar que no existen cambios de signo, todos los valores son positivos.

Según el **Criterio de Routh-Hurwitz**, esto indica que no existen polos en el semiplano derecho, confirmando que el sistema es **absolutamente estable**.

Análisis de velocidad de convergencia

En el caso de las **RPM**, observamos una constante de tiempo de $\tau = \frac{1}{0.5} = 2$ segundos, lo cual nos dice que es la variable más rápida en estabilizarse o converger (10 segundos)

Por otro lado, la **Temperatura**, con una constante de tiempo de $\tau = \frac{1}{0.05} = 20$ segundos, vemos que es la variable más lenta, demorando 100 segundos en estabilizarse ante un cambio en las RPM.

Convergencia del sistema

El análisis de convergencia de las **RPM** nos demuestra que convergen a $40*u(t)$.

Por otro lado, la temperatura converge a un equilibrio en el que el calor producido por el motor es igual al enfriamiento:

Este equilibrio lo podemos describir en:

$$\dot{x}_2 = \underbrace{0.02 \cdot x_1}_{\text{Calor que entra}} - \underbrace{0.05 \cdot (x_2 - T_{amb})}_{\text{Calor que sale}}$$

Tomando en cuenta una temperatura ambiente realista de 20°C (En un modelo real, una bomba nunca operaría en 0°C , ya que se congelaría).

El equilibrio se da cuando el calor que entra es igual al calor que sale:

$$0 = 0.02 \cdot (200) - 0.05 \cdot (x_{final} - 20)$$

$$4 = 0.05 \cdot (x_{final} - 20).$$

$$x_{final} = 80 + 20 = \mathbf{100^{\circ}\text{C}.}$$

Este análisis está enfocado en el caso en el que la bomba opere a su máxima capacidad de manera indefinida en el tiempo.

Ver esto nos dice que el valor de la temperatura cuando las RPM están al máximo converge a 100°C en lugar de tender al infinito, lo cual nos vuelve a confirmar que el sistema diseñado es estable.

Si en su lugar queremos obtener la temperatura a la que converge el sistema cuando las RPM no son máximas el análisis es el siguiente:

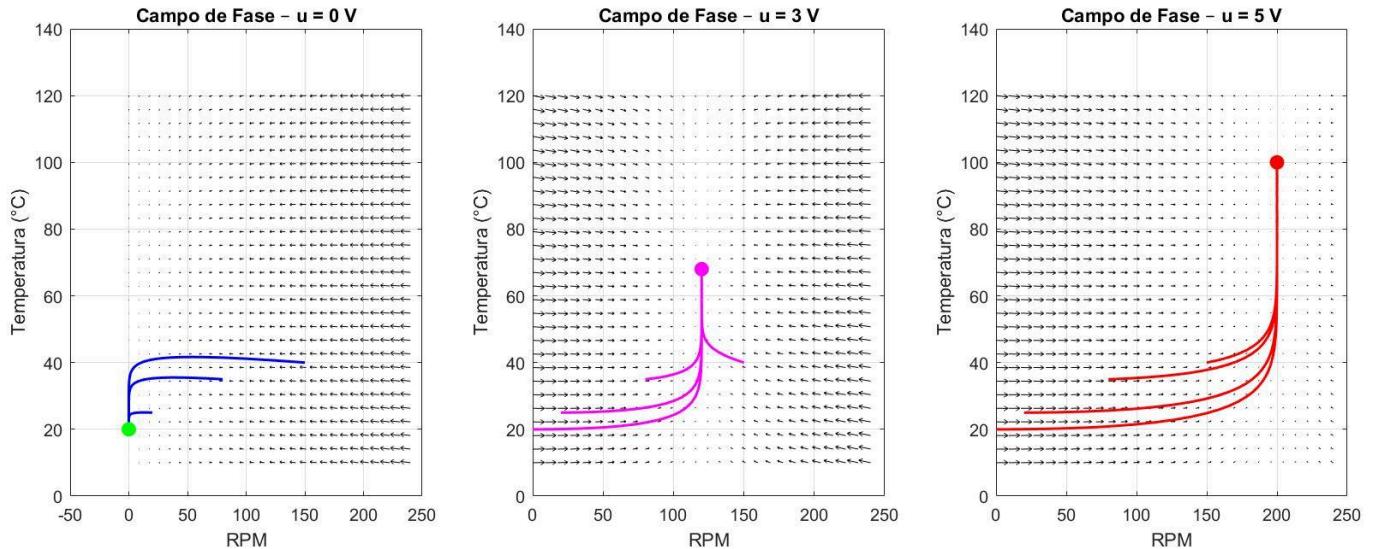
$$0.05 \cdot (x_2 - 20) = 0.02 \cdot x_1$$

$$x_{2_{equilibrio}} = 0.4 \cdot x_1 + 20$$

Donde estamos tomando las RPM (x_1) como un valor variable, lo cual sirve para estudiar genéricamente el comportamiento y convergencia del sistema para cada valor de la entrada.

Plano de Fase

Planos de Fase del Modelo en Espacio de Estados



Análisis del Plano de Fase:

El diagrama de fase (x_1 vs x_2) generado en Matlab nos permite visualizar la evolución conjunta de las variables de estado, eliminando el tiempo explícito de los ejes.

1. **Topología del Sistema:** Dado que ambos autovalores son reales y negativos (λ_1, λ_2), el diagrama presenta la topología característica de un **Nodo Estable**. Esto confirma visualmente la ausencia de oscilaciones amortiguadas (espirales); las trayectorias son monótonas y directas.
2. **Dominancia Dinámica:** Se observa que las trayectorias tienden a alinearse rápidamente con el eje correspondiente a la dinámica lenta (Temperatura). Esto valida gráficamente que la constante de tiempo mecánica (τ_1) es mucho menor que la térmica (τ_2); el sistema ajusta sus RPM rápidamente y luego evoluciona "lentamente" hacia el equilibrio térmico.
3. **Lugar de los Puntos de Equilibrio:** Debido a que la entrada $u(t)$ es función de la humedad, no existe un único atractor puntual. En su lugar, el sistema opera sobre un **lugar geométrico de equilibrios**. El estado del sistema "persigue" este punto móvil a medida que varía la humedad del suelo, desplazándose entre el estado de reposo (0 RPM, Tamb) y el estado de máxima carga (200 RPM, Tmax).

Los planos de fase obtenidos a partir del modelo en espacio de estados permiten analizar de manera visual el comportamiento dinámico del sistema en función de sus dos variables de

estado. En el caso de $u(t) = 0 \text{ V}$, el campo vectorial muestra que todas las trayectorias convergen hacia el punto de equilibrio $(0, T_{\text{amb}})$, lo cual representa el estado natural del sistema cuando la bomba está completamente apagada. Las curvas azules corresponden a trayectorias simuladas desde distintas condiciones iniciales, evidenciando cómo el motor tiende primero a disipar la temperatura acumulada y luego a detenerse por completo.

Cuando la entrada se fija en $u(t) = 5 \text{ V}$, el comportamiento cambia de forma significativa. En este caso, el campo vectorial indica que el sistema converge hacia un nuevo equilibrio mucho más alejado del origen, correspondiente a la velocidad y temperatura estacionarias bajo máxima alimentación. Las trayectorias rojas muestran cómo, partiendo de diferentes condiciones iniciales, el sistema acelera y aumenta su temperatura hasta alcanzar dicho punto estable. Se observa además que las curvas inicialmente se aproximan a la nullcline térmica antes de ascender hacia el equilibrio final, lo que revela la interacción entre el calentamiento generado por el motor y el efecto disipativo del entorno. En conjunto, ambos planos de fase permiten comprender cómo el sistema evoluciona dinámicamente ante distintos niveles de entrada, confirmando la estabilidad del modelo y la coherencia física entre RPM, temperatura y señal de control.

Cuando la entrada es de $u(t) = 3 \text{ V}$, el campo vectorial muestra que todas las trayectorias convergen hacia un equilibrio en $(120 \text{ RPM}, 65^\circ\text{C})$, ya que estamos en un nivel de funcionamiento superior al 50% de la bomba. Se observa que las trayectorias rosas (sobre todo la más larga) parte prácticamente del estado estacionario del sistema y converge hacia el punto de equilibrio correspondiente.

Implementación de un control de temperatura

Existe la posibilidad de implementar un control de temperatura.

Este control nos indica que si la temperatura de la bomba es llega a los 80°C , el sistema se detiene hasta que la misma baje hasta los 60° para continuar las operaciones.

Realizar esto nos trae ciertas implicaciones:

1. El sistema pasa a tener otro lazo de retroalimentación que funciona como un veto (cuando Temp = 80° , $u(t) = 0\text{V}$), priorizando la integridad del actuador (bomba)
2. El sistema se transforma en **No lineal**, ya que cuando la temperatura llega a 80°C , la dinámica del sistema deja de responder a la entrada, sino que respeta las limitaciones de temperatura impuestas (debe bajar hasta 60°C para reanudar las operaciones)

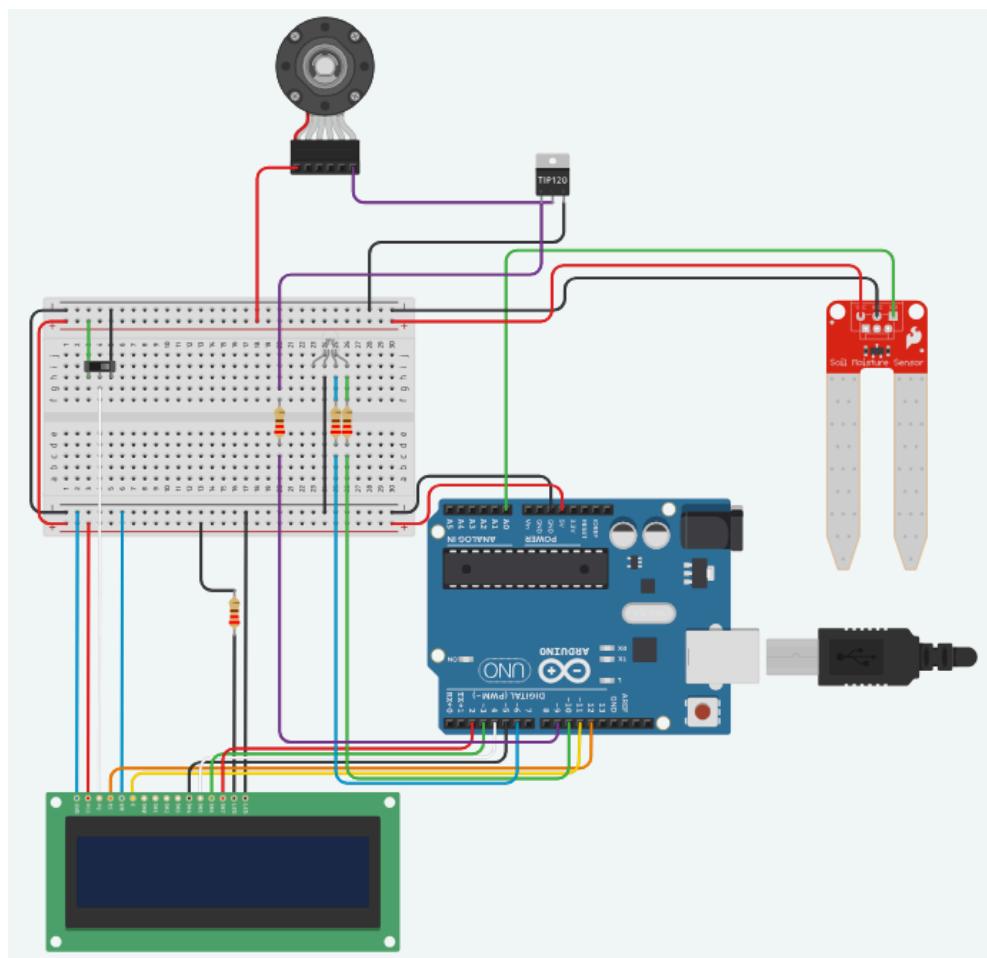
3. Se prolonga la vida útil del sistema, ya que si la temperatura se cortara en 80°C y se esperara que se baje a 79°C, el motor se encendería con un comportamiento repetitivo, dañándose en poco tiempo. En su lugar se implementa una histéresis de 20°C.

En resumen, si bien añade complejidad y transforma el sistema en NO LINEAL, nos permite prolongar la vida útil del sistema añadiendo un nuevo control.

Preparación para examen final

Implementación de motor DC con encoder

Como parte de la preparación para el examen final, y como sugerencia del cuerpo docente, se implementa en el modelo un motor DC cuya característica principal es la capacidad de medir las RPM de operación, por lo que podemos comparar las RPM que obtenemos como **medición de variable de estado** (original), con la lectura de este motor (nueva propuesta).



En comparación con la implementación anterior, en este caso el **actuador** es un motor DC con encoder.

Las particularidades o innovaciones que presenta este motor con respecto del motor DC tradicional son las siguientes:

1. **RPM como lectura:** en lugar de obtener las RPM únicamente como cálculo de variable de estado, las obtenemos también desde lectura brindada por el propio motor, lo cual va de la mano con la siguiente característica:
2. **Gear Ratio:** Es la relación de transmisión de la caja reductora interna del motor. En resumen, es la cantidad máxima de RPM que puede entregar el motor según la relación de transmisión; a mayores RPM, menor fuerza tendrá el motor (misma lógica que la caja de cambios de un auto).
 - a. Las opciones de Gear Ratio que brinda Tinkercad más aproximadas a nuestro modelo matemático son las siguientes: 416, 520, 624, 730 RPM máximas.

Precisión del modelo matemático

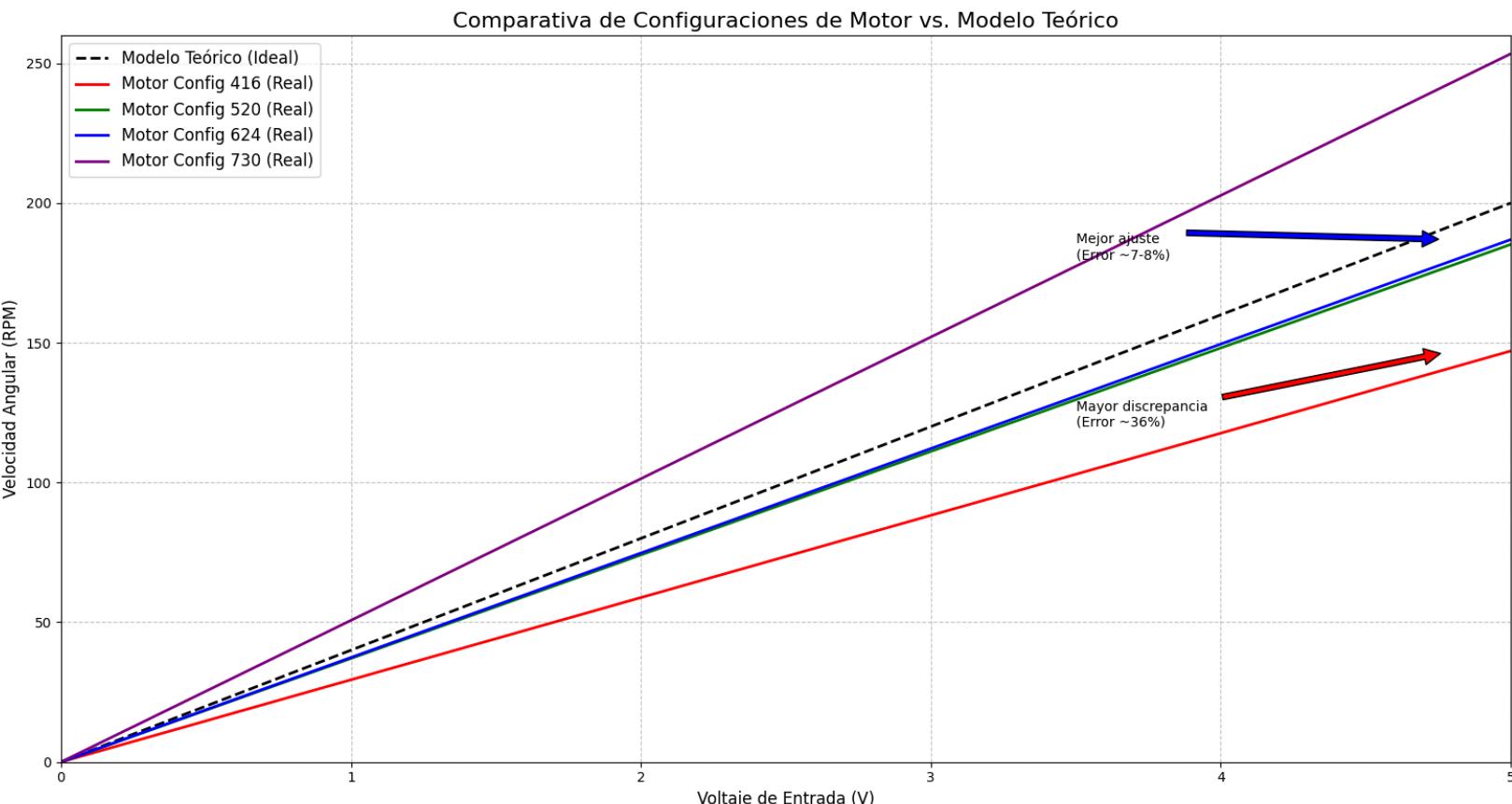
Para los distintos Gear Ratio del motor, obtenemos distintas RPM del motor para cada nivel de voltaje entregado, por lo que tenemos que realizar una comparación side-by-side para comprobar si nuestro sistema es preciso para algún Gear Ratio estándar de motores DC.

La medición se realizó para un voltaje de aproximadamente 2.25V, situación en la cual las RPM ideales se aproximaban a 90. Llamaremos este punto como un “pseudo equilibrio” (lo tomamos como válido para el análisis).

Configuración Motor (Tinkercad)	RPM Teóricas (Modelo) a 2.25V	RPM Reales (Medidas) a 2.25V	Error Relativo	Conclusión
416 RPM	90 RPM	~66 RPM	26,67%	Demasiada fricción / Reducción alta.
520 RPM	90 RPM	~83 RPM	7,78%	Buen ajuste ("sub-amortiguado").
624 RPM	90 RPM	~84 RPM	6,67%	Mejor ajuste conservador.
730 RPM	90 RPM	~114 RPM	-26,67%	Sobre-velocidad (Mucha eficiencia)

Podemos notar que dadas las siguientes opciones de RPM máximas que entrega el motor, obtenemos distintos resultados dependiendo de la disposición elegida.

Gráficamente podemos ver la relación de la siguiente manera:



Si bien nuestro modelo teórico (considerado ideal) no coincide perfectamente con ninguna de las opciones brindadas, observamos una gran fidelidad a la configuración de máximo 624 RPM.

Esta disposición nos permite observar una diferencia de entre 4 y 6 RPM con respecto a lo ideal. Esta diferencia es de aproximadamente un 6.67%.

Alternativas para el análisis de compatibilidad con el nuevo motor

Para acercar nuestro modelo a la realidad tenemos que adaptar nuestro sistema a la realidad (adaptar las ecuaciones de estado a los valores numéricos de tal manera que el análisis coincida con la realidad), o adaptar la realidad a nuestro sistema (buscar un Gear Ratio tal que coincida total o muy fielmente a nuestro análisis).

Cálculo de un Gear Ratio ideal para nuestro sistema

Nosotros necesitamos obtener una gear ratio tal que en el “pseudo equilibrio” medido, las RPM ideales coincidan con las reales en 90 RPM.

Para este análisis, tomaremos en cuenta el límite de 730 RPM y el de 624 RPM, los cuales son los valores inferior y superior más cercanos.

En comparación con el modelo ideal, analizamos lo siguiente:

- **624:** obtenemos 84 RPM, faltan **6**
- **730:** obtenemos 114 RPM, sobran **24**

La distancia entre las RPM reales es:

$$\Delta RPM_{real} = 114 - 84 = 30 \text{ RPM}$$

Por otro lado, la distancia en configuración del motor (Gear Ratio) es:

$$\Delta Config = 730 - 624 = 106 \text{ unidades}$$

La tasa de cambio de cada unidad de configuración por cada RPM es:

$$\text{Pendiente} = \frac{106}{30} \approx 3.533 \text{ unidades de config por cada RPM real}$$

Tomando como base la configuración de 624 RPM, necesitamos una configuración que entregue 6 RPM más para que nuestro análisis sea preciso:

$$\text{Configuración Ideal} = 624 + (6 \text{ RPM} \times 3.533)$$

$$\text{Configuración Ideal} = 624 + 21.2$$

$$\text{Configuración Ideal} \approx \mathbf{645.2 \text{ RPM}}$$

Obtenemos una configuración ideal de **645 RPM máximas**, lo cual, si bien no es un estándar, es posible “adaptar nuestro análisis” a la configuración estándar de 624 RPM, lo cual deriva en el siguiente análisis.

Adaptar el estado del sistema a la realidad

Para adaptar nuestro modelo a la realidad, vamos a tomar como cierto el motor con la configuración de 624 RPM, la cual es la que menos error presenta con respecto del análisis del modelo matemático, con aproximadamente un 6.67% de diferencia.

El motor real se ve afectado por factores físicos que no fueron tomados en cuenta en el análisis del motor ideal, y por otro lado, la Gear Ratio no fue tomada en cuenta con valores reales. Esto deriva en valores de fricción o eficiencia distintos entre los dos análisis.

- **Ganancia del modelo ideal:** Como pudimos ver en la primer parte del análisis, aplicando Antitransformada de Laplace, la ganancia estática es:

$$\circ \quad K_{ideal} = \frac{20}{0.5} = \mathbf{40 \text{ RPM/V}}$$

- **Ganancia real:** Con el motor funcionando con 2.25V, el motor entrega aproximadamente 84 RPM, por lo que el análisis es:

$$\circ \quad K_{real} = \frac{84}{2.25} = \mathbf{37.33 \text{ RPM/V}}$$

Para ajustar el modelo, debemos modificar la matriz B, que representa la tasa de conversión entre el voltaje y las RPM.

$$\text{Ganancia} = \frac{\beta}{\alpha} \implies \beta_{nueva} = K_{real} \cdot \alpha$$

$$\beta_{nueva} = 37.33 \cdot 0.5 = \mathbf{18.66}$$

Nuevas matrices del sistema

La matriz B pierde potencia, pasa de tener una relación de 20 a 1 a tener una relación de 18.66 a 1.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.02 & -0.05 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz A (Igual)}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 18.66 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz B (Ajustada)}} u(t)$$

Nuevo cálculo de las RPM como variable de estado

$$\dot{x}_1 = -0.5x_1 + 18.66u$$

Al cambiar el coeficiente b_{11} , se adapta la ecuación del cálculo de las RPM, obteniendo nuevamente una disminución en las RPM finales del sistema.

Nueva función de transferencia del sistema

La nueva función de transferencia del sistema está dada por:

$$G(s) = \frac{18.66}{s + 0.5}$$

Observamos que solo cambia el numerador, ya que vimos una cancelación **polo-cero**, dejando en el numerador únicamente el coeficiente b_{11} de la matriz B.

Solución del sistema

Ante una entrada de tipo escalón unitario, el sistema responde de la siguiente manera:

$$RPM(t) = 37.33 \cdot (1 - e^{-0.5t})$$

La solución del sistema entonces es:

$$RPM(t) = 37.33 \cdot \mathbf{V} \cdot (1 - e^{-0.5t})$$

lo cual significa una ganancia estática de 37.33 RPM/V, lo cual nos indicaría que ante una entrada de un máximo de 5V, las RPM máximas, hacia donde converge el sistema son **186,66 RPM**.

Comparación final

Luego de adaptar este modelo, y al correr la simulación aún obtenemos una diferencia de entre 1 a 3 RPM aproximadamente.

El resultado del nuevo análisis describe con una alta fidelidad el comportamiento del actuador con 624 RPM. Sin embargo, se presenta este pequeño error residual que no es descripto por las ecuaciones del sistema.

Algunas de las posibles causas de la presencia de estos errores son:

- El modelo es **LTI** puramente teórico, es decir, el sistema siempre responderá ante una entrada, por muy pequeña que esta sea; por otro lado, la simulación en Tinkercad considera una fricción estática para la cual hace falta una cantidad mínima de voltaje de entrada para que el motor comience a girar.

- **Señal PWM:** el modelo matemático considera una entrada de voltaje continua y pura en su totalidad, mientras que el Arduino entrega la energía mediante PWM de 8 bits, introduciendo un error de cuantización.

En resumen, lograr una precisión tan alta a pesar de que el modelo es meramente teórico (ignorando las variables físicas externas e internas mencionadas), demuestra que el análisis y el diseño del sistema de control es lo suficientemente robusto como para funcionar sin problemas en la vida real.