Apellido y Nombre:

Carrera y comisión:

1	2	3	4	5	1	2	TOTAL	NOTA

ÁLGEBRA y ÁLGEBRA II Examen Final-Tema A (18/12/2007)

1. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$T(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$$
, $T(e_2) = -2e_1 + 2e_3$, $T(e_3) = 5e_2 + 10e_3$

donde $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

- (a) Dar una base del núcleo de T.
- (b) Dar una base de la imagen de T.
- (c) Dar la matriz de T con respecto a las bases ordenandas β y $\beta' = \{2e_3, -e_1, 3e_2\}$.
- (d) Calcular det[T].
- 2. Sea V un espacio vectorial real con producto interno (,) y sea || || la correspondiente norma definida por (,).
 - (a) Demostrar que $(v, w) \le ||v|| \cdot ||w||$.
 - (b) Si v, w son vectores no nulos de V tales que (v, w) = 0, demostrar que $\{v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente.
 - (c) Sea V es el espacio de los polinomios con coeficientes en R de grado menor o igual que 4. Decidir si

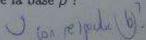
$$(g,h) = g(0)h(0)$$

define (o no) un producto interno en V. Justifique,

- 3. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando claramente su respuesta.
 - (a) Si $A \in \mathbb{R}(n \times n)$ es una matriz inversible, entonces existen dos bases de \mathbb{R}^n , β y β' tales que A es la matriz de cambio de base de β a β' . $\sqrt{\rho_1 d\alpha_1 \rho_2 \alpha_3}$
 - (b) Existe una transformación lineal no nula, $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, que no es sobre. $F_{\mathbb{R}} \mid_{f^{(k)}}$
 - (c) Si V es un espacio vectorial de dimensión n entonces todo conjunto linealmente independiente de n vectores es una base. Verdadeo
- 4. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, β y β' dos bases de \mathbb{R}^3 , tales que

$$[Id]^{\beta'}_\beta = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [T]^{\beta'}_\beta = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Encontrar $[T]^{\beta}_{\beta}$.
- (b) Si β es la base canónica de \mathbb{R}^3 ¿puede dar explícitamente la base β' ?
- (c) ¿Es T un isomorfismo? Si lo es, encuentre $[T^{-1}]^{\beta}_{\beta}$.



5. (a) Determinar para qué valores de t la siguiente matriz tiene inversa:

$$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right]$$

(b) Determinar para qué valores de c el siguiente conjunto de vectores puede extenderse a una base de \mathbb{R}^4 . Justifique.

$$\beta = \{(1,0,c,0); (0,c,1,0), (-1,0,1,0)\}.$$

(c) Dar una transformación lineal $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ cuya imagen sea el subespacio generado por β .

Ejercicios (sólo) para alumnos libres:

- I. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T:V\mapsto V$ una transformación lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (a) T es inyectiva
 - (b) T es sobre
 - (c) T es un isomorfismo
 - (d) Si $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ también es una base de V.
- 2. Dar la matriz escalón reducida por filas equivalente a

$$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right].$$