Recuperatorio de los Trabajos Prácticos

Entrega de las respuesta.

- Este Recuperatorio está disponible en la sección "Trabajos Prácticos" del aula virtual desde las 9:00hs del lunes 29/6/20.
- Deben enviar su respuesta a través del aula virtual, en la misma sección "Trabajos Prácticos", antes del miércoles 1/7/20 a las 18hs.
- El sistema sólo acepta archivos pdf. Pueden sacarle fotos a sus hojas y convertirlas en pdf o (recomendado) usar aplicaciones para celulares como "Tiny Scanner", "FotoScan", "CamScanner", etc. que simulan un escáner. También pueden escribir su respuesta utilizando medios digitales (procesadores de textos, tablet, etc).
- En caso de tener problemas de conexión a internet o algún otro problema pueden enviar su respuesta por email (cristianvay@gmail.com) o usando telegram al docente Cristian Vay. Usar esta opción sólo en caso de ser necesario.

Pautas a tener en cuenta.

- Justificar todas las respuestas.
- Puede usar cualquier método y resultado para responder siempre y cuando esté bien justificado.
- Recuerde indicar en sus respuestas las operaciones elementales por filas que realiza.
- No se responderán preguntas de ningún tipo.

Puntaje. El recuperatorio de cada trabajo práctico se aprueba con 40 puntos o más.

Recuperatorio del Primer Trabajo Práctico

(1) (10 puntos cada item) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Describir explícitamente el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.

(b) Describir implíctamente el conjunto de vectores $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que el sistema

$$AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

tiene solución.

(2) (10 puntos) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} (1, -1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ (b) $(1, -1, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = (9)$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} (1, -1, 2) = (9)$

(3) Determinar si las siguientes matrices son inversibles o no. Hallar la matriz inversa cuando sea posible. Puede usar cualquier método siempre y cuando esté bien justificado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) (10 puntos) Calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 1 & \frac{1}{3} \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$

(5) (10 puntos cada item) Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ tales que $\det A = 2$, $\det B = 3$ y $\det C = 4$.

(a) Calcular $\det(-A^3 B^{-1} C^2 A^{-1})$.

(b) Calcular $\det(PQR)$ donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{F_1+3F_2} P, \quad B \xrightarrow{2F_4} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} R.$$

Es decir,

- P se obtiene a partir de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 3.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 4 por 2.
- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 3.

(6) (10 puntos) Calcular los autovalores de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Decidir si alguno de los siguientes vectores es un autovector de la matriz.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(7) (10 puntos) El número -1 es un autovalor de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Describir explícitamente el autoespacio asociado al autovalor -1.

(8) (10 puntos) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $AB = BA$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un autovector de A con autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Probar que Bv también es un autovector de A asociado a λ.

(1) (10 puntos cada item) Sea W el siguiente subsespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$W = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rr} 3x+6y+3z+15w=0, & x+2y+3w=0, \\ 2x+4y+z+8w=0, & x+2y-z+w=0 \end{array} \right\}$$

(a) Dar una base y la dimensión de W.
(b) Extender a una base de $\mathbb{R}^4$ la base que haya dado en el item anterior.

(2) (10 puntos cada item) Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el siguiente conjunto

$$S = \Big\{ (3,1,2-1), (6,2,4,-2), (3,0,1,1), (15,3,8,-1) \Big\}$$

(a) Caracterizar con ecuaciones a V.
(b) Dar una base de V formada por vectores de S y determinar la dimensión de V.

(3) (5 puntos cada item) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
(a) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
(b) Sea V un espacio vectorial. Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V, entonces $W_1 \cup W_2$ es también un subespacio vectorial de V.

(4) (7,5 puntos cada item) Sea $T : \mathbb{R}^{3\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}_{<3}[x]$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = (3a+6b+3c+15d)\,x^2 + (a+2b+3d)\,x + e - f$$

(a) Decir cuáles de los siguientes matrices están en el núcleo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Decir cuáles de los siguientes polinómios están en la imagen:

$$p = (x-1)(x+1), \quad q = 3x^2+3x+2, \quad r = x^4$$

(5) (5 puntos cada item) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1,1)$, $T(e_2) = (2,1)$ y $T(e_3) = (3,1)$.
(a) Calcular $T(10,-1,1)$ y $T(-1,1,0)$.
(b) Dar la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

(6) (5 puntos cada item) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
(a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que los vectores $(1,0,-1,2)$, $(0,1,2,-1,)$ y $(0,0,2,2)$ pertenecen al núcleo de T.
(b) Si $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^{13}$ es una transformación lineal, entonces $\dim \operatorname{Im}(T) \leq 9$.
(c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ tal que $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Nu}(T)$.

(7) (5 puntos cada item) Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Probar que
(a) El núcleo de T es un subespacio vectorial de V.
(b) Si $\dim W = 1$, entonces $T = 0$ o es T un epimorfismo.