Apellido y Nombre:

Carrera y comisión:

1	2	3	4	5	6	1	2	TOTAL	NOTA

## ÁLGEBRA y ÁLGEBRA II Examen Final-Tema A (19/2/2008)

1. Sean  $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^4$  los subespacios de soluciones de los siguientes sistemas homogéneos:

$$W_1: \begin{cases} x-y+z=0, & W_2: \begin{cases} x=0, \\ -x-y+t=0, \end{cases} \\ W_2: \begin{cases} x=0, \\ -2y+z+t=0. \end{cases}$$

- (a) Hallar bases de  $W_1 \cap W_2$  y de  $W_1 + W_2$
- (b) Describir implicitamente W<sub>1</sub> ∩ W<sub>2</sub> y W<sub>1</sub> + W<sub>2</sub>.
- (c)  $Es \mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$ ?

2. Sea  $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$  la transformación lineal definida en la forma

$$T(x,y,z) = (x+z,2x+y+3z,-y-z,-x-z).$$

- (a) Dar una base del núcleo de T y calcular su dimensión.
- (b) Dar una base de la imagen de T y calcular su dimensión.
- (c) Determinar la matriz de T con respecto a las bases ordenadas B y B' de R3 y R4, respectivamente, donde

$$\mathcal{B} = \{(0,1,0), (1,0,0), (0,0,1)\}, \quad \mathcal{B}' = \{(0,1,-1,0), (1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,1,0,1)\}.$$

- 3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdadedar o falsas:
  - (a) Si  $T:V \to V$  es una transformación lineal tal que  $T^2=0$ , entonces  $\operatorname{Im} T\subseteq \operatorname{Nu} T$ .  $\bigvee$
  - (b) Sea U un espacio vectorial de dimensión finita. Si V,W son subespacios de U tales que  $\dim V + \dim W \ge \dim U$ , entonces U = V + W.
  - que dim V + dim  $V \ge \alpha \sin \theta$ , ...

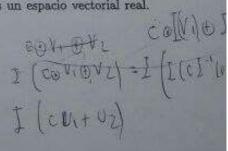
    (c) Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno. Si  $\alpha \in V$  es tal que  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle$ , para todos  $\beta, \gamma \in V$ , entonces  $\alpha = 0$ .  $\vee$
- Sea (U, +, ·) un espacio vectotorial real de dimensión n, V un conjunto y sea (I) U → V una biyección.
  - on las siguientes  $v_1 \oplus v_2 = I(I^{-1}(v_1) + I^{-1}(v_2))$ (a) Demostrar que con las siguientes operaciones (V, ⊕, ⊙) es un espacio vectorial real.

$$\oplus : V \times V \mapsto V$$
  
 $v_1 \oplus v_2 = I(I^{-1}(v_1) + I^{-1}(v_2))$ 

$$\odot: \mathbb{R} \times V \mapsto V$$

$$c\odot v_1=I(c\cdot I^{-1}(v_1).$$

- (b) ¿Es  $I:(U,+,\cdot)\mapsto (V,\oplus,\odot)$  un isomorfismo?
- (c) ¿Cuál es la dimensión de (V, ⊕, ⊙)?
- 5. Sea  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ .



- (a) ¿Existen valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$  para los que  $A: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  no sea inversible? Justificar
- (b) ¿Existen valores de  $\lambda \in \mathbb{C}$  para los que  $A : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$  no sea inversible?. Justificar
- 6. Sea V un espacio vectorial real, dim V = n. Demostrar las siguientes afirmaciones.
  - (a) Si  $S = \{\alpha_1, \dots \alpha_m\}$  es un conjunto linealmente independiente de V, entonces existen  $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in V$  tales que  $\beta = \{\alpha_1, \dots \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n\}$  es una base de V.
  - (b) Sea A un conjunto finito tal que < A > = V. Entonces existe  $w_1, \dots w_k \in A$  tales que  $\beta' = \{w_1, \dots w_k\}$  es una base de V.

## LIBRES.

- 1. Hallar la matriz de cambio de base de la base ordenada canónica de  $\mathbb{R}^3$  a la base ordenada  $\mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B} = \{(0,0,1),(1,0,-1),(1,1,0)\}.$
- Sea V un espacio vectorial de dimensión n. T : V → V una transformación lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - (a) T es inyectiva
  - (b) T es sobre
  - (c) T es un isomorfismo
  - (d) Si  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de V entonces  $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$  tambien es una base de V.