

Examen Final - 21 de agosto de 2020

- Ejercicio 1.**
- a) Diga cuáles son los números que se encuentran a menor distancia de -1 que de 3 .
- (i) Escriba una inecuación que represente el problema.
 - (ii) Resuelva la inecuación del punto anterior.
- b) Grafique el conjunto de soluciones de la desigualdad $\ln(x-2) + \ln(x+1) - \ln(x-4) < 0$
- c) Dada la función $f(x) = e^{-x^2} + 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, responda las siguientes preguntas, justificando las respuestas:
- (i) ¿Es inyectiva?
 - (ii) ¿Es subyectiva?
 - (iii) ¿Es biyectiva?
 - (iv) ¿Es inversible?
 - (v) ¿Es necesario restringir el dominio para que sea inyectiva? En caso afirmativo, ¿cuál es?
 - (vi) ¿Es necesario restringir el conjunto de llegada para que sea subyectiva? En caso afirmativo, ¿cuál es?
 - (vii) Indique el dominio y espacio de llegada para que la función tenga inversa y calcúlela.

- Ejercicio 2.**
- a) Calcule los siguientes límites SIN usar la regla de L'Hôpital:
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(2x)}$
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ sabiendo que: $-\frac{1}{6} \leq f(x) \leq \frac{x-3}{9-x^2}$ para todo $x > 3$
- b)
- (i) Se sabe que el número de individuos en función del tiempo de una cierta especie de animales es igual a: $N(t) = \frac{100t+5}{t+5}$. ¿Cuál es el número de individuos cuando el tiempo crece indefinidamente?
 - (ii) Demuestre que hay una solución de la siguiente ecuación en el intervalo dado:
 $2^x = 2 - x$ en $(0, 1)$
- c) Usando las herramientas que considere más apropiadas, calcule el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3x}$

- Ejercicio 3.**
- a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = \cos^4(3x^2 + \pi)$

(ii) $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^3}$

- b)
- (i) Obtenga la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \ln(x+2)$ en el punto $(-1, 0)$.
 - (ii) Utilice la ecuación obtenida en (i) para estimar el valor de $f(-0, 9)$ con una aproximación lineal.
- c) Enuncie el Teorema del Valor Medio e interprete gráficamente este resultado (puede ser mediante un ejemplo).

Ejercicio 4. Grafique una función que cumpla con **todas** las siguientes características:

- (i) El dominio es $Dom f = \mathbf{R} - \{0\}$; la imagen es $\mathbb{I} = [-2, +\infty)$
- (ii) Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$
- (iv) Tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$
- (v) Tiene una discontinuidad de salto en $x = 4$
- (vi) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$
- (vii) Tiene un mínimo absoluto en $x = 2$
- (viii) Tiene puntos de inflexión en $x = -4$ y en $x = -2$
- (ix) Es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -4)$
- (x) $f''(x)$ es positiva en $(0, 4) \cup (4, +\infty)$

Ejercicio 5. a) Resuelva la siguiente integral. *Ayuda:* Puede resultar más fácil hacer primero una sustitución y después resolver por partes.

$$\int x^3 \cos(x^2) dx$$

- b) Grafique el triángulo cuyos vértices son $(0,0)$; $(1,2)$ y $(3,1)$. Calcule su área usando integrales definidas.
- c) Sin realizar el cálculo de la integral, justifique la validez de la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{24} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$$