Condición:

1	2	3	4	5a	5b	6a(i)	6a(ii)	6b	7	8a	8b	9a	9b	10	Total

Análisis Matemático II
Licenciatura en Ciencias de la Computación
EXAMEN 7/12/07

Parte teórica

Ejercicio 1: (8 ptos.) Enunciar con precisión y probar el criterio del cociente para la convergencia de series.

Ejercicio 2: (4 ptos.) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejercicio 3: (4 ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dé la definición de diferenciabilidad de f en el punto $a \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 4: (4 ptos.) Enuncie el teorema fundamental del cálculo.

Parte práctica

Ejercicio 5: Calcule las siguientes integrales: (a) 8 ptos; b) 8 ptos.)

$$\text{(a)} \int_0^1 \operatorname{arctg}(x)\, dx \qquad \text{(b)} \int_4^{\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$$

Ejercicio 6:

a) (14 ptos.) Decida si las siguientes series son convergentes, absolutamente convergentes o divergentes:

$$\text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

b) (7 ptos.) Demuestre que:

$$\int_0^1 x e^{x^3}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\cdot n!}$$

(Ayuda: $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad \forall t \in \mathbb{R}$)

Ejercicio 7: (8 ptos.) Pruebe que el siguiente límite no existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

Ejercicio 8: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$.

a) (8 ptos.) Sabiendo que el plano π tangente al gráfico de f en $(a, b, f(a, b))$ es paralelo al plano de ecuación $5x - \frac{7}{2}y - z = -5$, determine los valores de a y b y dé la ecuación del plano π.

b) (5 ptos.) Dé la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por el punto $(1, -1)$.

Ejercicio 9: Sea $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$ y defina $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $g(x, y) = f(xy) = \int_0^{xy} e^{t^2} dt$

a) (6 ptos.) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$.

b) (8 ptos.) Pruebe que $(0, 0)$ es el único punto crítico de g y determine si es un punto de máximo, de mínimo o de silla.

Ejercicio 10: (8 ptos.) Dibuje la región R determinada por las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y calcule

$$\iint_R \frac{1}{x + y}\, dA$$

Para alumnos libres

Ejercicio A: Calcular las derivadas de segundo orden de $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$.

Ejercicio B: Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 alrededor de $x = 0$ de $f(x) = \cos(3x)$.