Aplicación de un QuadTree para un problema de optimización mediante un algoritmo de cubirimiento de vértices

Alejandro Uribe, *Estudiante, Universidad del Rosario,*

***Abstract*—En este proyecto se utilizó la teoría de grafos para optimizar un problema cotidiano, en este caso es para mejorar el tiempo de respuesta de unas patrullas ubicandolas en lugares especificos para que se puedan cubrir por completo los accidentes de una zona determinada.**

***Index Terms*—Teoría de grafos, optimización.**

I. Introducción

EL proyecto trata de dar una solución efectiva a un problema planteado mediante el uso de la teoría de grafos y estructuras de datos.

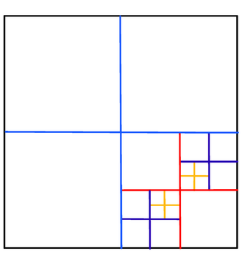
En el problema nos encontramos en una zona determinada de una ciudad x, en esta ciudad da la casualidad que ocurren muchos accidentes de tránsito, esto pasa gracias a que las personas son imprudentes a lo hora de conducir. El comandante de policia al ver esto decidió tomar acción y ejecutar un plan para que los oficiales de policia esten bien ubicados y puedan atender el caso en un tiempo óptimo.

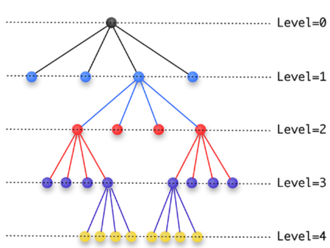
Para esto se usará la estructura de datos QuadTree para tener una representación espacial de dónde hubo accidentes y posteriormente se usará un algoritmo para oobtener un cubrimiento por vértice mínimo, esto último nos dirá en dónde se pueden ubicar las patrullas para que puedan llegar a los accidentes en un tiempo deseado.

au
Mayo 16, 2019

II. Funcionalidad

Primero, como el proyecto se basa en un espacio determinado, en este caso una zona de una ciudad, tenemos que considerar una región, para eso usamos una estructura de datos llamada Quadtree. Está se mostrará a continuación.

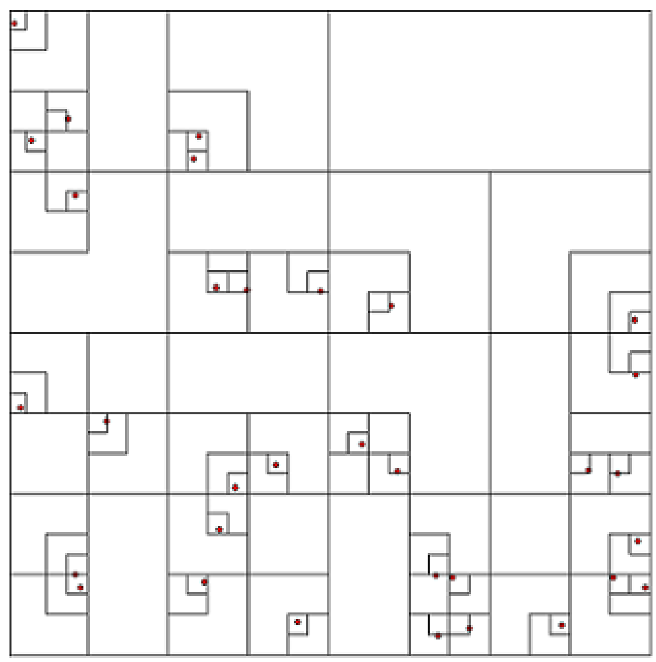




Como pueden ver el Quadtree nos proporciona una vista 2d de un espacio, en la figura se muestra su representación visual y al lado derecho su representación como estructura.

Una vez tenemos el árbol procedemos a realizar el algoritmo de cubrimiento de vértices, esto lo que va a hacer es recorrer el árbol buscando los nodos en los que hay algún tipo de accidente y ubica a las patrullas de una forma óptima.

Sobre el algoritmo, lo que se va a hacer es que a cada nodo se le va a poner el valor de las patrullas que hay en sus hijos o en el mismo, esto se hace para tener una idea de por dónde empezar a ubicar las patrullas. Luego de esto se irán ubicando las ambulancias en ciertos nodos dependiendo de cuantos accidentes haya en esa región. Un ejemplo:



En este ejemplo tenemos nuestro Quadtree con sus respectivos accidentes, lo que hace el algoritmo es ubicar los accidentes de tal manera que los padres tienen el numero de accidentes de los hijos.

El algoritmo consta de 2 parámetros, que son El quadtree, y el número de patrullas con las que cuenta para repartir, así si el numero de patrullas es igual al número de accidentes entonces se le asignaría una patruya a cada accidente, este primer caso y el caso dónde las patrullas sean mayores a los accidentes es fácil de cubrir, pero el caso cuando el número de patrullas sea menor al número de accidentes, es un poco más complejo, ya que si llega a un punto dónde el número de patrullas no puede cubrir los accidentes, se tendrá que devolver al nodo padre y posteriormente recalcular.

Por el teórema de Hall sabemos que siempre va a existir un emparejamiento que sature a nuestros nodos, ya que nos encontramos en un arbol que tiene 4 hijos, por lo que cada nodo se podrá saturar siempre y cuando tenga hijos.

III. Conclusiones

Sobre el proyecto, se puede decir que la teoría de grafos fue un gran recurso para poder solucionar el problema de una manera un poco más práctica que teórica.

El proyecto cumple con la función que se le propuso.

Las areas de grafos que son emparejamientos y cubrimientos fueron sumamente importantes para este proyecto ya que sin tener esos conocimientos hubiera sido muy dificíl pensar en una solución para este proyecto en específico, así como todas las demás areas vistas en clase que ayudaron a entender estos temas que son un poco avanzados.

Appendix I
Cubrimiento de vertices

Un cubrimiento de vértices de un grafo G es un conjunto Q $\subseteq$ V(G) que contiene al menos un punto final de cada arista. Los vertices de Q cubren E(G).

Appendix II
Teorema de Hall

Un x,y-Bigrafo G tiene un emparejamiento que satura a X si y sólo sí |N(S)| $\geq$ |S| para todo S $\subseteq$ X

Demostración:

$\gg$). Los |S| vértices emparejados a S deben juntarse en N(S).

$\ll$). Para probar que la condición de Hall es suficiente, debemos probar la contrarreciproca, Si M es un emparejamiento máximo en G y M no satura X, entonces obtenemos el conjunto S $\subseteq$ X tal que |N(S)| $\leq$ |S|. Sea u $\in$ X ser un vértice insaturado por M. Entre tpdps ps vértices alcanzables desde u por M-Caminos alternantes en G, deje que S conste de esos en X, y deje que T conste de los de Y, note que u $\in$ X. Decimos que M empareja T con S-{u}. El M-Camino alternante desde u alcanza a Y a lo largo de las aristas que no están en M y retorna a X a lo largo de las aristas en M. Por lo tanto cada vértice de S-{u} es alcanzado por una arista en M desde un vértice en T. desde que no hay M-Caminos de aumento, cada vértice de T es saturado; entonces un M-Camino alternante y$\in$ T se extiende mediante M a un vértice de S. Por lo tanto esas aristas de M marcan una biyección de T a S-{u}, y tenemos que |T| = |S-{u}|. El emparejamiento entre T y S-{u} deja a T $\subseteq$ N(S). En efecto, T = N(S). Suponga que y $\in$ Y - T tiene un vecino v $\in$ S. La arista vy no puede estar en M, como u es insaturado y todo S está emparejado a T por M. Entonces añadiendo vy a un M-Camino alternante alcanza a v mediante un M-Camino alternante hacia y. Esto contradice y $\notin$ T, y por lo tanto vy no puede existir. Con T = N(S), hemos probado que |N(S)| = |T| = |S| - 1 $\leq$ |S| por eso escogimos a S. Esto completa la prueba de la contrarreciproca.

Appendix III
Teorema de Konig

Si G es un grafo bipartito, entonces el tamaño máximo de un emparejamiento en G equivale al tamaño mínimo de un cubrimiento de vértices de G.

Demostración:

Sea G un X,Y-Bigrafo. Cómo diferentes vertices deben de ser usados para cubrir las aristas de un emparejamiento, $|Q|$ $\geq$ $|M|$ como sea Q es un cubrimiento por vértices y M es un emparejamiento en G. Dado un cubrimiento minimo Q de G, construimos un emparejamiento de tamaño $|Q|$ para probar la equivalencia siempre puede ser lograda. Particione Q siendo R = $Q \cap X$ y T = $Q \cap$ Y. Sean H y H' los subgrafos de G inducidos por $R \cup (Y - T)$ y $T \cup (X - R)$, respectivamente. Usamos el teorema de Hall para mostrar que H tiene un emparejamiento que satura a R en $Y - T$ y H' tiene un emparejamiento que satura a T. Como H y H' son disyuntos, los dos emparejamientos juntos forman un emparejamiento de tamaño |Q| en G. Como $R \cup T$ es un cubrimiento por vértices, G no tiene aristas desde Y - T hacia X - R. para cada $S \subseteq R$, consideramos $N_H(S)$ el cual está contenido en $Y - T$. Si $|N_H(S)| \leq |S|$, entonces podemos sustituir $N_H(S)$ por S en Q para obtener un cubrimiento de vértices más pequeño, como $N_H(S)$ cubre todas las aristas incidentes a S que no estan cubiertas por T. La minimalidad de Q cubre la condición de Hall en H, y por lo tanto H tiene un emparejamiento que satura a R. aplicando el mismo argumento a H' cubre el emparejamiento que satura a T.

References

[1] Douglas B. West. *Introduction to graph theory*, 2nd ed. Prentice Hall, 1996.

Alejandro Uribe Estudiante de matemáticas aplicadas y ciencias de la computación de una Universidad del Rosario. Nació el 23 de Junio del año 2000.