



A G H

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
WYDZIAŁ MATEMATYKI STOSOWANEJ

Praca dyplomowa

Modele powracania do średnich w wycenie opcji spread

Mean reverting models in spread option pricing

Autor:
Aleksander Adam Lorenc
Kierunek studiów:
Matematyka
Opiekun pracy:
dr inż. Jerzy Dzieża

Kraków, 2024

Spis treści

1 Wstęp	2
2 Własności cen instrumentów rynku energii	3
2.1 Rozkłady i momenty (empiryczne) cen instrumentów	4
2.2 Sezonowość i powracańe do średniej cen instrumentów	7
3 Preliminaria matematyczne	9
4 Proces Ornsteina-Uhlenbecka	15
4.1 Postać procesu Ornsteina-Uhlenbecka	15
4.2 Własności procesu Ornsteina-Uhlenbecka	16
5 Modele wyceny opcji spread	22
5.1 Model Blacka-Scholesa	23
5.2 Aproksymacja Carmony i Durremana w wycenie opcji spread	23
5.2.1 Dynamika cen instrumentów bazowych opcji spread	23
5.2.2 Korelacja zmiennych losowych w dynamice cen instrumentów bazowych	25
5.2.3 Aproksymacja ceny opcji spread	26
5.3 Wycena numeryczna opcji spread	27
5.3.1 Założenia i metoda numerycznej wyceny opcji spread	28
5.3.2 Estymatory parametrów procesu Ornsteina-Uhlenbecka	28
5.3.3 Historyczne ceny gazu i energii użyte do estymacji parametrów	29
5.3.4 Wycena opcji spread	31
6 Podsumowanie	32
7 Bibliografia	33
8 Aneks: kody źródłowe	34

1 Wstęp

Opcja spread jest instrumentem pochodnym od dawna popularnym na różnych rynkach, jednak jej wycena stanowi nadal niemałe wyzwanie. Opcja ta jest bowiem tak skonstruowana, że nie sposób wyprowadzić analitycznych wzorów na jej cenę i strategię replikującą. W niniejszej pracy omówione zostały wybrane modele wyceny tego instrumentu.

Termin spread odnosi się do różnicy wybranych parametrów pewnych instrumentów finansowych lub towarów, zazwyczaj ich cen. Istotnie, opcja spread to niejako opcja na wartość spreadu, tj. różnicy pomiędzy cenami dwóch instrumentów bazowych. W praktyce rozszerza się jednak to pojęcie do opcji na kombinację liniową instrumentów bazowych. Sama zaś opcja może być użyta do wyceny inwestycji, osłaniania jej przed ryzykiem, bądź też do zwykłej spekulacji.

Dla ustalenia uwagi, bez straty ogólności, w niniejszej pracy opcja spread omówiona została w kontekście instrumentów rynku energii. Można sobie wyobrazić, że elektrownia kupuje paliwo (ponosi koszt) oraz sprzedaje energię elektryczną (ma przychód ze sprzedaży). Powstaje więc pewien spread: *przychód-koszt*. Ten spread będziemy traktować jako instrument bazowy dla europejskiej opcji kupna. Rozważa się też modele uwzględniające koszt tak zwanych certyfikatów emisyjnych, czyli odpowiednich dokumentów zezwalających na odprowadzanie dużej ilości gazów emisyjnych do atmosfery ziemskiej. Ostatecznie rzeczony spread można określić jako kombinację liniową określonej liczby przepływów pieniężnych. Potrzeba więc modelować co najmniej dwie, a niejednokrotnie więcej wielkości nacechowanych losowością (cen instrumentów bazowych). Naturalnie, najczęściej wykorzystuje się do tego celu procesy stochastyczne.

Na rynku energetycznym rozważa się wiele rodzajów spreadu. W szczególności, w zależności od paliwa użytego przy produkcji energii, można wyróżnić:

- Dark spread (węgiel kamienny),
- Spark spread (gaz ziemny),
- Quark spread (uran),
- Clean/Green spread (uwzględniający certyfikaty emisyjne).

Przykładowo Clean Spark Spread (*CSS*) w chwili $t \in [0, T]$ można zdefiniować następująco:

$$CSS(t) = S_e(t) - h_g \cdot S_g(t) - I_g(t) \cdot SCO_2(t),$$

gdzie:

S_e - cena energii elektrycznej,

S_g - cena gazu,

h_g - współczynnik wydajności (*heat rate*) dla bloku gazowego,

I_g - intensywność emisji bloku gazowego,

SCO_2 - cena certyfikatów emisyjnych.

Mogna powiedzieć, że wartość *CSS* w chwili $t \in [0, T]$ to marża brutto bloku gazowego, która powinna pokryć wszystkie pozostałe koszty działania tego bloku, aby produkcja energii elektrycznej w chwili t była opłacalna.

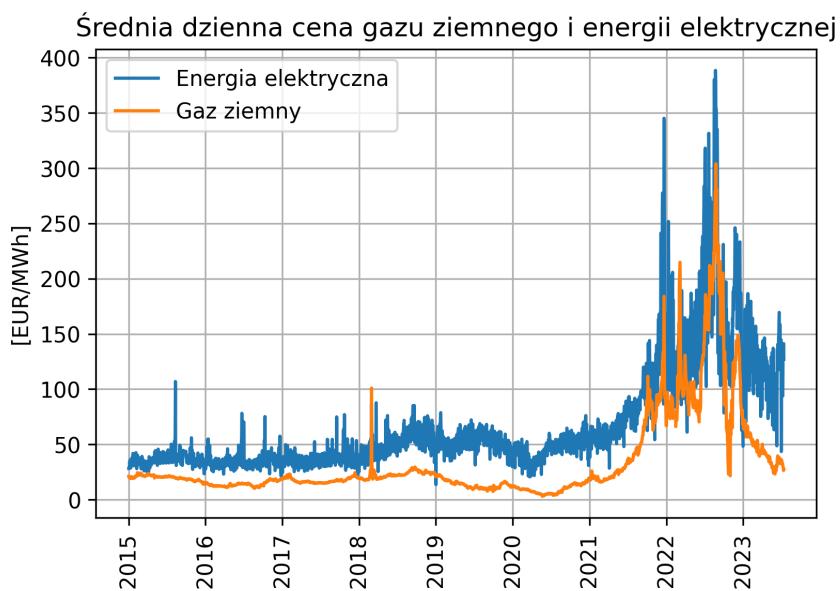
Należy jednak pamiętać, że nie da się uruchomić elektrowni (rozgrzać bloku paliwowego) bądź też wyłączyć jej (wygasnąć bloku paliwowego) w dowolnej chwili. Nawet w przypadku spadku zapotrzebowania na energię elektryczną kotły w elektrowniach nie są wygaszane zupełnie ani w dowolnie krótkim czasie. Produkcję można zmniejszyć do poziomu ok 20%, jednak przywrócenie pełnej mocy może zająć sporo czasu. W przypadku elektrowni gazowych czy jądrowych jest to

proces trwający co najmniej kilkadziesiąt minut, jednak w przypadku elektrowni węglowej - kilka godzin. Co więcej, ceny energii elektrycznej na rynku nie są notowane w trybie ciągłym. Dla przykładu Towarowa Giełda Energii w Warszawie dokonuje takiego kwotowania raz na godzinę. Wobec tych faktów pojedyncza opcja spread nie wystarczy do wyceny inwestycji bądź też podjęcia decyzji o uruchomieniu produkcji energii elektrycznej. W praktyce rozważa się zatem koszyk opcji spread (wystawianych z różnymi terminami zapadalności), który można łatwo wycenić, jeśli potrafimy wycenić pojedynczą opcję. Skoncentrujemy się zatem na wycenie jednego takiego instrumentu.

W tym celu najpierw przyjrzymy się danym rynkowym, aby dobrze zrozumieć, jaką sytuację (jaki problem) potrzeba opisać modelem matematycznym.

2 Właściwości cen instrumentów rynku energii

Wszelka zawarta w niniejszej pracy analiza szeregow czasowych cen energii elektrycznej i gazu ziemnego to samodzielne opracowanie danych pochodzących, odpowiednio, z serwisu *Ember* [1] (ceny z każdej godziny i średnie dzienne ceny z polskiej Towarowej Giełdy Energii) i *Trading Economics* [2] (średnie dzienne ceny z holenderskiej giełdy TTF). W całej pracy poprzez cenę należy rozumieć cenę spot.

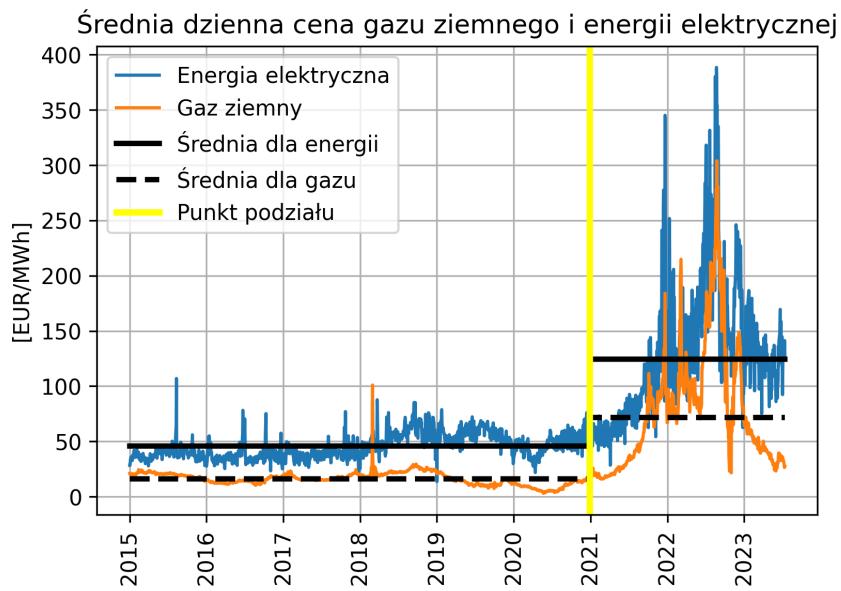


Rysunek 1: Średnia dzienna cena energii elektrycznej na TGE [1] i gazu ziemnego na TTF [2] od 01.01.2015 do 14.07.2023

Na rysunku 1 można zauważać, że w drugiej połowie 2021 roku ceny energii elektrycznej i gazu wzrosły bardzo mocno, a następnie wahaly się silnie w 2022 roku. W 2023 roku odnotowano tendencję spadkową, niejako powrót do średniej sprzed okresu tych silnych wahań. Rysunek 1 nasuwa też następujące spostrzeżenia: cena gazu zdecydowanie mniej fluktuuje, a ponadto zazwyczaj przyjmuje wartości niższe od ceny energii elektrycznej. Wydaje się jednak, że pomiędzy obiema zmiennymi występuje silna, dodatnia korelacja. Warto sprawdzić, czy jest tak w istocie.

2.1 Rozkłady i momenty (empiryczne) cen instrumentów

Z uwagi na wspomniane silne wahania cen występujące od 2021 roku warto podzielić omawiane szeregi czasowe na dwie części: okres do 2020 roku włącznie oraz okres od 2021 do 2023 roku.



Rysunek 2: Średnia dzienna cena energii elektrycznej na TGE [1] i gazu ziemnego na TTF [2] od 01.01.2015 do 14.07.2023 z podziałem na dwa analizowane okresy

Na rysunku 2 zaznaczone są wartości średnie dla pierwszej i drugiej części analizowanego okresu. Tabela 1 przedstawia nieco więcej parametrów statystycznych.

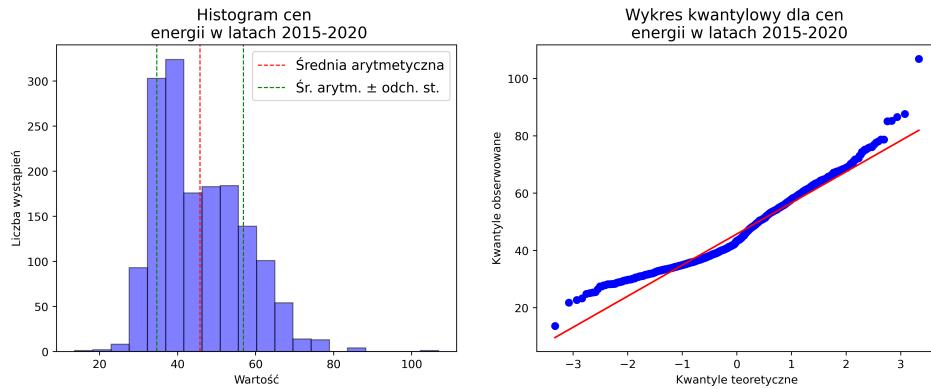
parametr	Podstawowe parametry statystyczne					
	2015 - 2020		2021 - 2023		2015 - 2023	
	energia	gaz	energia	gaz	energia	gaz
medianą	43,38	15,96	113,74	59,10	52,87	19,27
średnia arytmetyczna	45,76	16,05	124,38	71,60	71,53	34,24
odchylenie standardowe	11,09	5,78	60,96	52,78	51,58	40,17
skośność	0,68	2,06	1,33	1,42	2,35	2,81
kurtoza	0,27	29,18	2,36	2,08	6,69	9,10
współczynnik korelacji	0,09		0,80		0,87	

Tabela 1: Podstawowe parametry statystyczne dla cen energii elektrycznej na TGE [1] i gazu ziemnego na TTF [2] od 01.01.2015 do 14.07.2023 z podziałem na dwa analizowane okresy

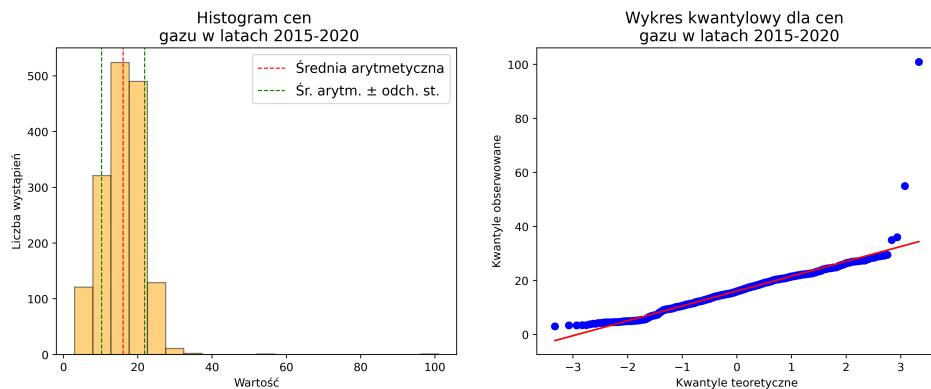
W odniesieniu do rysunku 2 oraz intuicji nieco zaskakujący może być fakt, że znajdujący się u dołu tabeli 1 współczynnik korelacji pomiędzy cenami energii i gazu w okresie 2015-2020 wynosi jedynie 0,09. Wydaje się to dziwne zwłaszcza wobec wysokiej wartości tego współczynnika w następnym okresie. Zdecydowanie nie zaskakuje jednak fakt, iż odchylenie standardowe oraz średnia arytmetyczna dla obu zmiennych w okresie 2021-2023 są dużo wyższe niż w okresie 2015-2023.

Z widocznych w tabeli 1 wartości skośności i kurtozy można wnioskować, że obie zmienne (cena energii elektrycznej oraz cena gazu) na wszystkich trzech przedziałach czasowych mają rozkłady cechujące się prawostawną asymetrią (istotnie, w każdym przypadku średnia jest większa od mediany) oraz większą intensywnością występowania wartości skrajnych niż w rozkładzie normalnym. Jedynie rozkład zmiennej energia (cena energii) w przedziale 2015 - 2020 ma obie te

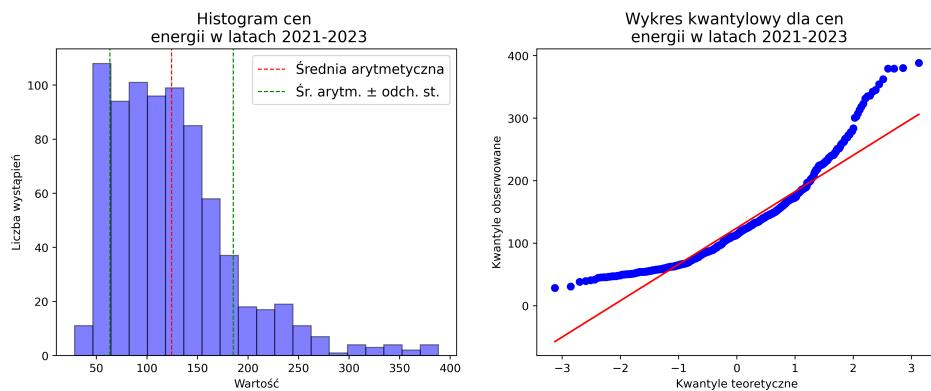
wartości stosunkowo małe, bliskie zeru, a zatem może ona mieć rozkład zbliżony do normalnego. Test Shapiro-Wilka dla wszystkich przypadków przyjmuje p-value równe 0, a zatem omawiane dane historyczne nie pochodzą z rozkładu normalnego. Dla potwierdzenia tych wniosków warto spojrzeć na poniższe histogramy i wykresy kwantylowe.



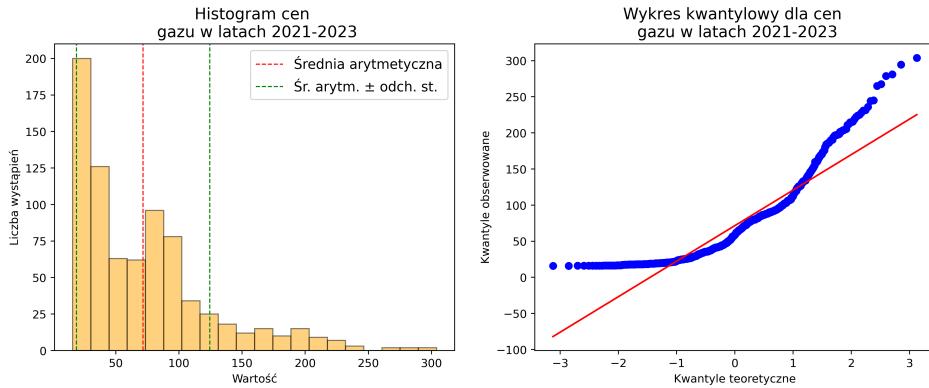
Rysunek 3: Histogram i wykres kwantylowy cen energii na TGE w latach 2015 - 2020 [1]



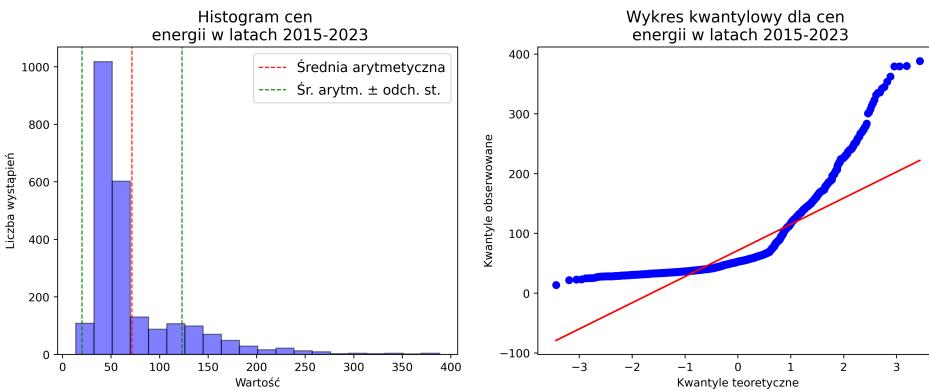
Rysunek 4: Histogram i wykres kwantylowy cen gazu na TTF w latach 2015 - 2020 [2]



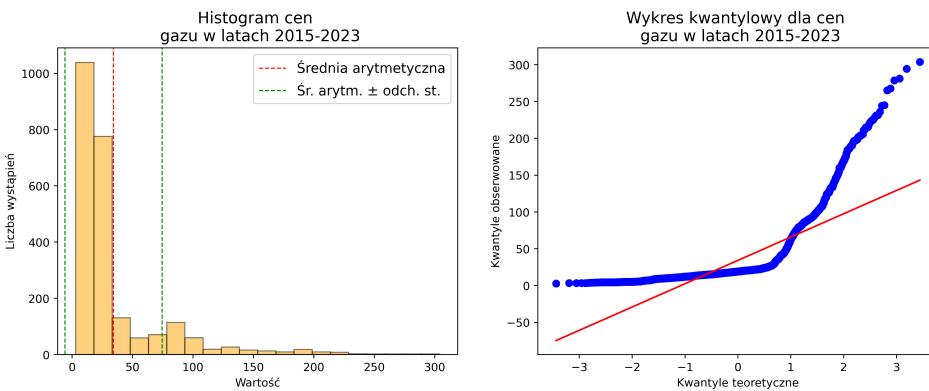
Rysunek 5: Histogram i wykres kwantylowy cen energii na TGE w latach 2021 - 2023 [1]



Rysunek 6: Histogram i wykres kwantylowy cen gazu na TTF w latach 2021 - 2023 [2]



Rysunek 7: Histogram i wykres kwantylowy cen energii na TGE w latach 2015 - 2023 [1]



Rysunek 8: Histogram i wykres kwantylowy cen gazu na TTF w latach 2015 - 2023 [2]

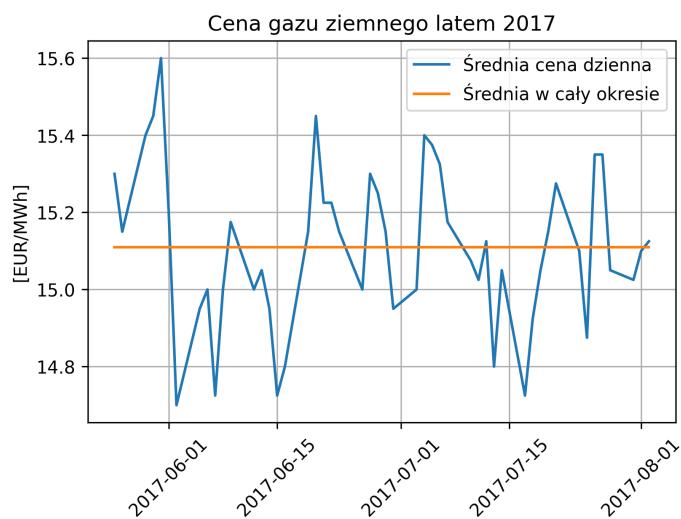
Istotnie, na większości histogramów daje się zauważać wydłużone prawe ogony, co wskazuje na prawostawną skośność. Na rysunkach 5-8 widać też, że zmienne przyjmują często wartości skrajne (występują "ciężkie ogony"), na co wskazywała wysoka kurzoza we wszystkich tych przypadkach.

Ogólny wniosek może więc być taki, że rozkłady omawianych zmiennych różnią się od normalnego. W przypadku cen energii (i gazu - gdyby zaniedbać obserwacje odstające) w latach 2015-2020 te różnice są nieznaczne, jednakże we wszystkich pozostałych - duże.

2.2 Sezonowość i powracanie do średniej cen instrumentów

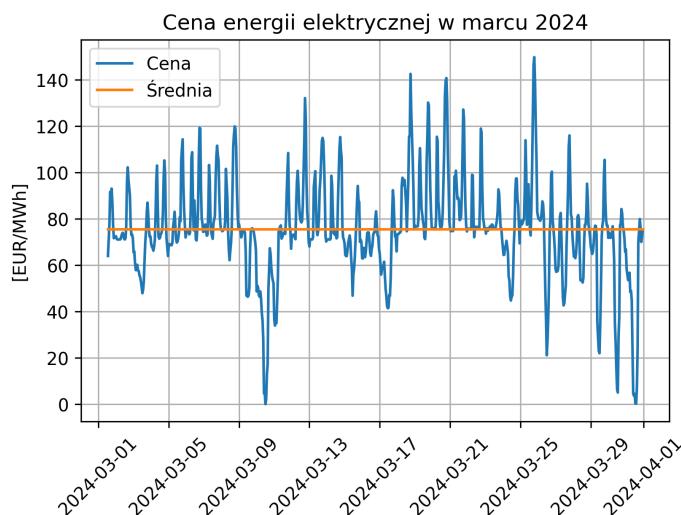
Ceny instrumentów rynku energii cechują się często wahaniem sezonowymi, czyli regularnymi odchyleniami od trendu, związanymi na przykład z porami doby czy też dniami tygodnia. Jak dało się zauważać w horyzoncie czasowym 2015 -2020 (rysunek 2), szeregi czasowe cen energii elektrycznej oraz gazu ziemnego w długich okresach mają niemal zerowy trend. Sezonowość jednak widoczna jest dopiero w skali dni.

Na rysunku 9 można zauważać sezonowość (w skali tygodnia) cen gazu ziemnego. Jako że 1.06.2017 był czwartkiem, najniższe ceny można zaobserwować w weekend. Dane przedstawione na rysunku 9 pochodzą z okresu przed pandemią choroby COVID-19. Współcześnie obserwuje się silne fluktuacje cen i sezonowość nie jest aż tak dobrze widoczna.



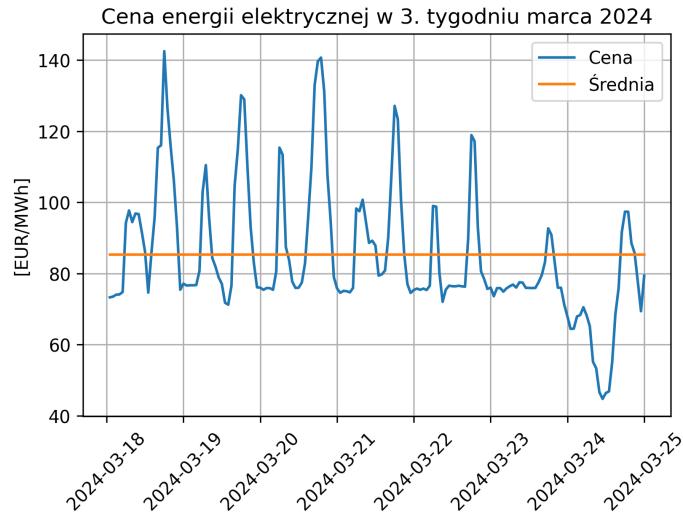
Rysunek 9: Średnia dzienna cena gazu ziemnego na TTF w czerwcu i lipcu 2017 [2]

Na rysunkach 10, 11 i 12 widać, że ceny energii elektrycznej również cechują się wyraźną sezonowością, a po różnych silnych zmianach mają zwyczaj powracać do średniej.

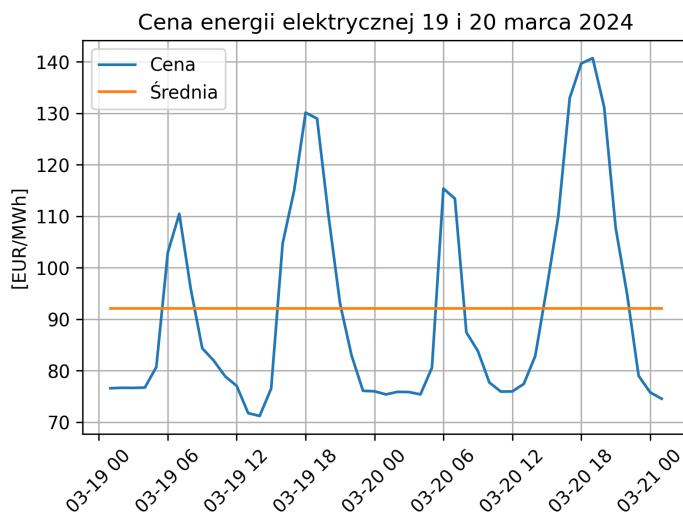


Rysunek 10: Cena energii elektrycznej na TGE w marcu 2024 [1]

Rysunek 10 dobrze uwidacznia sezonowość cen energii w skali tygodnia. 1.03.2024 był piątkiem, zatem marcowe weekendy w 2024 roku przypadały kolejno na dni: 2-3, 9-10, 16-17, 23-24 oraz 30-31 dzień miesiąca. Można zauważać następującą zależność: ceny energii elektrycznej w weekendy są niższe niż w dni robocze. Ponadto każdej doby również wahają się bardzo silnie, co dobrze widać na rysunkach 11 i 12. .



Rysunek 11: Cena energii elektrycznej na TGE w trzecim tygodniu marca 2024 [1]



Rysunek 12: Cena energii elektrycznej na TGE w trzecim tygodniu marca 2024 [1]

19 i 20 marca 2024 to odpowiednio wtorek i środa. Jak widać, ceny spot energii elektrycznej wczesnym rankiem i późnym popołudniem są znacznie wyższe niż w środku dnia czy nocą.

Podsumowując, ceny gazu ziemnego i energii elektrycznej zachowują się podobnie do siebie, a przedstawione szeregi czasowe wykazują silną sezonowość i powracanie do średniej. Ta ostatnia cecha daje się dobrze modelować przy użyciu procesu Ornsteina-Uhlenbecka, o którym mowa w dalszej części pracy.

3 Preliminaria matematyczne

Podstawowym narzędziem matematycznym służącym modelowaniu zmienności szeregów czasowych (między innymi na rynkach finansowych) obarczonych losowością jest proces stochastyczny.

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, \mathcal{F} jest σ -ciałem na Ω , natomiast \mathbb{P} jest miarą probabilistyczną.

Definicja 1 Procesem stochastycznym nazywamy funkcję dwóch zmiennych

$$X : [0, +\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

która jest produktowo mierzalna, tzn.

$$\forall_{B \in \mathcal{B}} : X^{-1} \in \mathcal{B}([0, +\infty)) \otimes \mathcal{F},$$

gdzie

$$X^{-1}(B) = \{(t, \omega) \in [0, +\infty) \times \Omega : X(t, \omega) \in B\}$$

oraz

$$\mathcal{B}([0, +\infty)) \otimes \mathcal{F} = \sigma\left(\{B \times \hat{F} : B \in \mathcal{B}([0, +\infty)), \hat{F} \in \mathcal{F}\}\right).$$

Definicja 2 Filtracją nazywamy wstępującą rodzinę σ -ciał.

Bardzo popularnym i użytecznym przykładem procesu stochastycznego jest używany wielokrotnie w niniejszej pracy proces Wienera. Na potrzeby tej i dalszych definicji oznaczmy niezależność σ -ciał symbolem \perp .

Definicja 3 Proces stochastyczny $(W(t))_{t \geq 0}$ nazywamy procesem Wienera (względem filtracji $(F(t))_{t \geq 0}$) z dryfem μ i wariancją σ^2 , gdy

1. $W(0) = 0$,
2. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, gdy $0 \leq s < t$,
3. $\forall_{0 \leq s \leq t} : \sigma(W(t) - W(s)) \perp F(s)$,
4. prawie wszystkie trajektorie $[0, +\infty) \ni t \mapsto W(t) \in \mathbb{R}$ są ciągłe.

Definicja 4 Proces $(X(t))_{t \geq 0}$ jest adaptowany do filtracji $(F(t))_{t \geq 0}$, gdy

$$\forall_{t > 0} : \sigma(X(t)) \subset F(t).$$

Niezwykle ważnym rodzajem procesów stochastycznych są martyngały.

Definicja 5 Proces $(X(t))_{t \geq 0}$ jest martyngałem (względem filtracji $(F(t))_{t \geq 0}$), gdy:

1. jest adaptowany do tej filtracji,
2. $\forall_{0 \leq t} : \mathbb{E}|M(t)| < +\infty$,
3. $\forall_{0 \leq s \leq t} : \mathbb{E}(M(t)|F(s)) = M(s)$ p.n.

W szczególności proces Wienera jest martyngałem.

Z kolei pewne techniczne własności procesów stochastycznych pozwalają klasyfikować je przy pomocy następującej definicji.

Definicja 6 Mówimy, że proces stochastyczny

$$f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

jest z przestrzeni

- $\mathcal{M}^2[0, T]$, gdy jest produktowo mierzalny oraz adaptowany do filtracji $(F(t))_{t \geq 0}$, a także spełnia

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f^2(t)dt\right) < \infty,$$

- $\mathcal{P}^1[0, T]$, gdy jest produktowo mierzalny oraz adaptowany do filtracji $(F(t))_{t \geq 0}$, a także spełnia

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|f(t)\|dt < \infty\right) = 1,$$

- $\mathcal{P}^2[0, T]$, gdy jest produktowo mierzalny oraz adaptowany do filtracji $(F(t))_{t \geq 0}$, a także spełnia

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt < \infty\right) = 1.$$

W dalszej części niniejszej pracy ważnym i często używanym narzędziem matematycznym będzie całka stochastyczna. Ponieważ jednak jej definicja jest bardzo długa i złożona technicznie, nie warto jej w tym miejscu przywoływać. Można ją znaleźć między innymi w rozdziale 3 książki [3].

Twierdzenie 1 (3) Jeżeli proces $f \in M_{[0, T]}^2$, to dla $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T f(t)dW(t)\right) = 0.$$

Twierdzenie 2 (3) Jeżeli proces $f \in M_{[0, T]}^2$, to dla $t \in [0, T]$

$$\text{Var}\left(\int_0^T f(t)dW(t)\right) = \int_0^T f^2(t)dt.$$

Konsekwencją powyższych własności jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 (4) Jeżeli deterministyczna funkcja $f \in M_{[0, T]}^2$, to dla $t \in [0, T]$ całka

$$\int_0^T f(t)dW(t)$$

jest zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}\left(0, \int_0^T f^2(t)dt\right)$.

Procesy stochastyczne, podobnie jak funkcje deterministyczne, mogą spełniać pewne równania.

Definicja 7 Stochastycznym równaniem różniczkowym nazywamy równanie całkowe postaci

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(t, X(t))dt + \int_0^t b(t, X(t))dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

które często zapisujemy skrótnie w formie różniczkowej

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

gdzie $X(0)$ jest stałą lub zmienną losową, funkcje $a : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są borelowsko mierzalne, zaś $W = (W(t))_{t \in [0, T]}$ jest procesem Wienera.

Definicja 8 Mówimy, że proces stochastyczny $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ jest rozwiązańiem równania (1) (lub: spełnia równanie (1)), gdy

1. X ma ciągłe trajektorie i jest adaptowany do $(F(t))_{t \geq 0}$,
2. $(a(t, X(t)))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{P}^1[0, T]$ oraz $(b(t, X(t)))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{P}^2[0, T]$,
- 3.

$$\forall_{t \in [0, T]} : \mathbb{P}\left(X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s)\right) = 1.$$

Definicja 9 Mówimy, że proces stochastyczny $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ jest jedynym rozwiązańiem równania (1), jeżeli dowolne inne rozwiązanie \hat{X} równania (1) jest nieroróżnialne od X , tzn.

$$\mathbb{P}\left(\forall_{t \in [0, T]} : \hat{X}(t) = X(t)\right) = 1.$$

Przez nieroróżnialność możemy rozumieć, że prawie wszystkie trajektorie procesów \hat{X} i X są identyczne.

Prawdziwe jest podstawowe twierdzenie typu Picarda o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania (1).

Twierdzenie 4 (3) Niech:

(A0) $X(0) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(X(0)) \in F(0)$, $\mathbb{E}(\|X(0)\|^2) < +\infty$,

(A1) funkcje

$$\begin{aligned} a : [0, T] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ b : [0, T] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

są borełowsko mierzalne,

(A2) istnieje $K_1 \in (0, +\infty)$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |a(t, x) - a(t, y)| &\leq K_1|x - y|, \\ |b(t, x) - b(t, y)| &\leq K_1|x - y|, \end{aligned}$$

(A3) istnieje $K_2 \in (0, +\infty)$ takie, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |a(t, x)| &\leq K_2(1 + |x|), \\ |b(t, x)| &\leq K_2(1 + |x|). \end{aligned}$$

Wówczas istnieje dokładnie jeden proces $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ będący rozwiązaniem równania (1). Co więcej, $X \in \mathcal{M}_{[0, T]}^2$. Ponadto, ponieważ obie strony równania (1) są procesami o ciągłych trajektoriach, dla rozwiązania X zachodzi

$$\mathbb{P}\left(\forall_{t \in [0, T]} : X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s)\right) = 1.$$

Podobnie jak w przypadku zmiennych losowych, dla procesów stochastycznych definiuje się i bada ich niezależność.

Definicja 10 Mówimy, że procesy stochastyczne $X_i = (X_i(t))_{t \in [0, T]}$, $i = 1, 2$, są niezależne, gdy

$$\sigma\left(\bigcup_{t \in [0, T]} \sigma(X_1(t))\right) \perp \sigma\left(\bigcup_{t \in [0, T]} \sigma(X_2(t))\right).$$

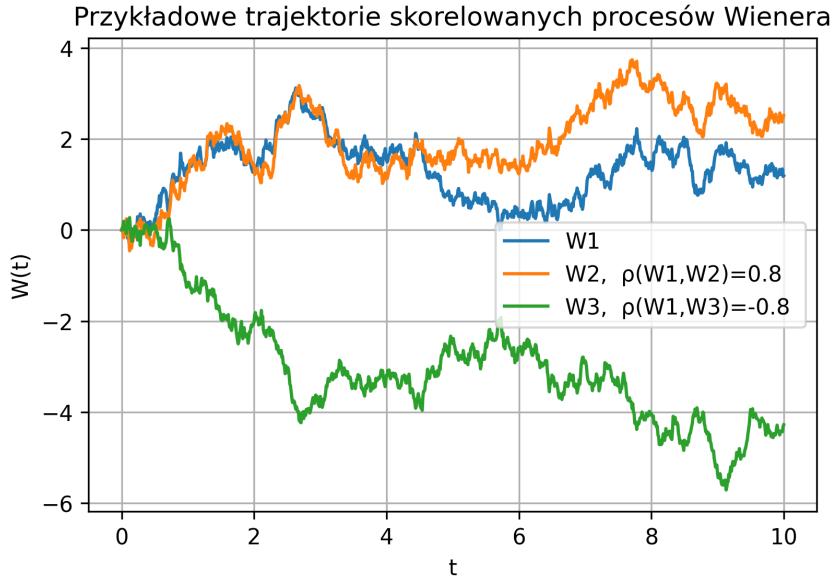
Definicja 11 Mówimy, że dwa procesy stochastyczne $X_i = (X_i(t))_{t \in [0, T]}$, $i = 1, 2$, spełniające równania

$$dX_i(t) = a(t, X_i(t))dt + b(t, X_i(t))dW_i(t), \quad i = 1, 2$$

są skorelowane i współczynnik tej korelacji wynosi $\rho \in [-1, 1]$, gdy

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt.$$

Rysunek 13 przedstawia przykładowe trajektorie skorelowanych procesów Wienera.



Rysunek 13: Przykładowe trajektorie skorelowanych procesów Wienera

Definicja 12 wprowadza szczególny rodzaj procesów stochastycznych, których własności są niezwykle użyteczne i zostaną użyte w dalszej części niniejszej pracy.

Definicja 12 Proces stochastyczny $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ postaci

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s),$$

gdzie $X(0)$ jest $F(0)$ -mierzalną rzeczywistą zmienną losową, $a = (a(t, X(t)))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{P}_{[0, T]}^1$, $b = (b(t, X(t)))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{P}_{[0, T]}^2$, nazywamy procesem Itô. Procesy a, b nazywamy jego charakterystykami.

Twierdzenie 5 (3) (Formuła Itô) Niech $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ będzie procesem Itô o charakterystykach $a = (a(t, X(t)))_{t \in [0, T]}$ oraz $b = (b(t, X(t)))_{t \in [0, T]}$, a funkcja $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ niech będzie klasy $C^{1,2}$ (tzn. $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ istnieją i są ciągłe). Wtedy

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= F(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, y)|_{y=X(s)} ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y}(s, y)|_{y=X(s)} \cdot a(s, X(s))ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(s, y)|_{y=X(s)} \cdot b^2(s, X(s))ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y}(s, y)|_{y=X(s)} \cdot b(s, X(s))dW(s). \end{aligned} \tag{3}$$

Równoważnie możemy przedstawić równanie 3 w skróconej formie przy użyciu zapisu różniczkowego:

$$\begin{aligned} dF(t, x) = & \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, y)|_{y=X(t)} + a(t, X(t)) \frac{\partial F}{\partial y}(t, y)|_{y=X(t)} + \frac{b^2(t, X(t))}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t, y)|_{y=X(t)} \right) dt \\ & + b(t, X(t)) \frac{\partial F}{\partial y}(t, y)|_{y=X(t)} dW(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Twierdzenie 6 (3) (Izometria Itô) Jeśli $(X(t))_{t \in [0, T]} \in M^2[0, T]$, to

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T X(t) dW(t) \right)^2 = \mathbb{E} \left(\int_0^T X^2(t) dt \right).$$

Twierdzenie 7 (4) (Kowariancja całek Itô) Jeśli $(X(t))_{t \in [0, T]}, (Y(t))_{t \in [0, T]} \in M^2[0, T]$, to

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T X(t) dW(t) \cdot \int_0^T Y(t) dW(t) \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^T X(t) Y(t) dt \right).$$

W dalszych obliczeniach wykorzystamy poniższe techniczne lematy.

Lemat 1 (4) Jeśli $0 \leq a \leq b \leq T$, a proces $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ jest z przestrzeni $M^2[0, T]$, to

$$\sigma \left(\int_a^b X(t) dW(t) \right) \subset F(b).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\int_a^b X(t) dW(t) = \int_0^b X(t) dW(t) - \int_0^a X(t) dW(t).$$

Jednak

$$\sigma \left(\int_0^b X(t) dW(t) \right) \subset F(b) \text{ oraz } \sigma \left(\int_0^a X(t) dW(t) \right) \subset F(a) \subset F(b),$$

a różnica $F(b)$ -mierzalnych zmiennych losowych jest również $F(b)$ -mierzalna. \blacksquare

Lemat 2 (4) Jeśli $0 \leq a \leq b \leq T$, a proces $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ jest z przestrzeni $M^2[0, T]$, to zachodzi równość

$$\mathbb{E} \left(\int_a^b X(t) dW(t) | F(a) \right) = 0. \quad (5)$$

Dowód. Należy zauważyć, że warunkowa wartość oczekiwana 5 jest dobrze określona, ponieważ całka stochastyczna będąca jej argumentem to zmienna losowa całkowalna z kwadratem. Pozostaje pytanie, czy

$$\forall A \in F(a) : \int_A \int_a^b X(t) dW(t) d\mathbb{P} = \int_A 0 d\mathbb{P}.$$

Ustalmy dowolne $A \in F(a)$. Zmienna $\mathbb{1}_A$ jest $F(a)$ -mierzalna, zatem

$$\int_A \int_a^b X(t) dW(t) d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A \int_a^b X(t) dW(t)\right) = \mathbb{E}\left(\int_a^b \mathbb{1}_A X(t) dW(t)\right) = 0,$$

przy czym ostatnia równość zachodzi na mocy twierdzenia 3. ■

W niniejszej pracy ważną rolę odgrywają procesy powracające do średniej. Następującą, użyteczną definicję takiego procesu podał Seydel na stronie 39 w [5].

Definicja 13 Dla ustalonego $T > 0$ mówimy, że proces stochastyczny $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ jest procesem powracającym do średniej μ , jeśli jest rozwiązaniem równania

$$dX(t) = \theta(\mu - X(t))dt + \sigma X^\alpha(t)dW(t), \quad (6)$$

gdzie $\sigma > 0$ to zmienność (odchylenie standardowe) tego procesu, $\alpha \geq 0$, $\theta > 0$, a $W = (W(t))_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera.

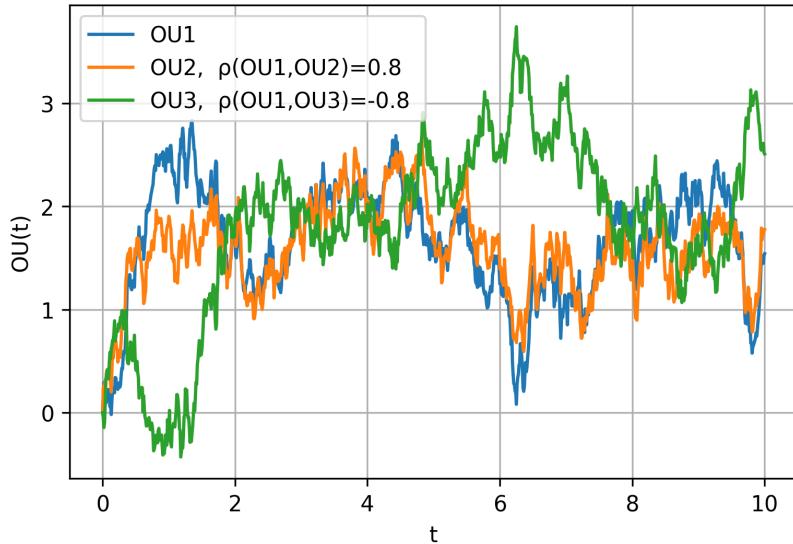
Definicja 14 Dla ustalonego $T > 0$ mówimy, że proces stochastyczny $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka o średniej μ , jeśli jest rozwiązaniem równania

$$dX(t) = \theta(\mu - X(t))dt + \sigma dW(t), \quad (7)$$

gdzie $\sigma > 0$ to zmienność (odchylenie standardowe) tego procesu, $\alpha \geq 0$, $\theta > 0$, a $W = (W(t))_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera.

Warto w tym miejscu spojrzeć na rysunek 14. Przedstawia on przykładowe trajektorie skorelowanych procesów Ornsteina-Uhlenbecka $OU1 = (OU1(t))_{t \in [0, T]}$, $OU2 = (OU2(t))_{t \in [0, T]}$, $OU3 = (OU3(t))_{t \in [0, T]}$ dla wspólnych parametrów $\theta = 1$, $\mu = 2$, $\sigma = 1$. Wszakże, jak pokazano w rozdziale 2 (tabela 1), wielkości historyczne, których używa się do kalibracji modeli, niejednokrotnie są ze sobą skorelowane.

Przykładowe trajektorie skorelowanych procesów Ornsteina-Uhlenbecka



Rysunek 14: Przykładowe trajektorie skorelowanych procesów Ornsteina-Uhlenbecka

4 Proces Ornsteina-Uhlenbecka

4.1 Postać procesu Ornsteina-Uhlenbecka

Lemat 3 (6) Dla pewnego $T > 0$ oraz $t \in [0, T]$ proces stochastyczny

$$X(t) = \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta s} dW(s) \quad (8)$$

jest rozwiązaniem równania (7), przy czym $W = (W(t))_{t \in [0, T]}$ jest procesem Wienera, natomiast $\theta > 0$, $\sigma > 0$ oraz $\mu \in \mathbb{R}$ to pewne stałe.

Dowód. Niech $Y(t) = X(t) - \mu$. Teraz $dY(t) = dX(t)$, a równanie (7) przyjmuje postać

$$dY(t) = -\theta Y(t)dt + \sigma dW(t).$$

Zdefiniujmy proces

$$F(t, Y(t)) = e^{\theta t} Y(t).$$

Ponieważ

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y)|_{y=Y(t)} = \theta e^{\theta t} Y(t), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(t, y)|_{y=Y(t)} = e^{\theta t}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t, y)|_{y=Y(t)} = 0,$$

na mocy twierdzenia 5 (Formuły Itô) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} dF(t, Y(t)) &= \theta e^{\theta t} Y(t)dt - \theta Y(t)e^{\theta t} dt + \sigma e^{\theta t} dW(t) \\ &= \sigma e^{\theta t} dW(t). \end{aligned}$$

Równoważnie:

$$F(t, Y(t)) = F(0, Y(0)) + \sigma \int_0^t e^{\theta s} dW(s).$$

Zatem

$$Y(t) = e^{-\theta t} F(t, Y(t)) = e^{-\theta t} Y(0) + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta s} dW(s)$$

i ostatecznie, ponieważ $X(t) = Y(t) + \mu$,

$$X(t) = \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta s} dW(s). \quad \blacksquare$$

Fakt 1 Rozwiązanie (8) równania (7) jest jedyne (w sensie definicji 9).

Dowód. Należy sprawdzić, czy równanie (7) spełnia warunki z twierdzenia 4. Przywołajmy w tym celu rzeczone równanie (7):

$$dX(t) = \theta(\mu - X(t))dt + \sigma dW(t).$$

Oczywiście parametry $\sigma > 0$, $\theta > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ są stałe. Zatem charakterystyki procesu $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ przyjmują postać

$$a(t, X(t)) = \theta(\mu - X(t)), \quad b(t, X(t)) \equiv \sigma.$$

Warunek (A0) jest założeniem czysto technicznym. Co więcej, niniejsza praca ma charakter aplikacyjny i jako taka dotyczy procesów stochastycznych o deterministycznej wartości początkowej, a zatem spełniających warunek (A0).

Warunek (A1) jest również spełniony, ponieważ funkcje liniowe a, b są borełowsko mierzalne.

Warunek (A2) zachodzi dla $K_1 = \theta$, ponieważ dla ustalonych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}|a(t, x) - a(t, y)| &= |\theta(\mu - x) - \theta(\mu - y)| \\&= |\theta(y - x)| = |\theta| \cdot |x - y| \\&= \theta|x - y|,\end{aligned}$$

a także

$$|b(t, x) - b(t, y)| = |\sigma - \sigma| = 0 \leq \theta.$$

Warunek (A3) zachodzi dla $K_2 = \max\{\sigma, \theta, \theta|\mu|\}$, ponieważ dla ustalonych $x \in \mathbb{R}$ oraz $t \in [0, T]$

jeżeli $|\mu| \leq 1$, to

$$\begin{aligned}|a(t, x)| &= |\theta(\mu - x)| = \theta \cdot |\mu - x| \\&\leq \theta(|\mu| + |x|) \leq \theta \cdot (1 + |x|),\end{aligned}$$

a jeżeli $|\mu| \geq 1$, to

$$\begin{aligned}|a(t, x)| &= |\theta(\mu - x)| = \theta \cdot |\mu - x| \\&= \theta|\mu| \cdot \left|1 - \frac{x}{\mu}\right| \leq \theta|\mu| \cdot \left(1 + \left|\frac{x}{\mu}\right|\right) \\&\leq \theta|\mu| \cdot (1 + |x|),\end{aligned}$$

a także

$$|b(t, x)| = |\sigma| \leq \sigma(1 + |x|). \quad \blacksquare$$

4.2 Własności procesu Ornsteina-Uhlenbecka

Poniższe spostrzeżenia okażą się być niezwykle istotne przy numerycznej wycenie opcji spread.

Fakt 2 Wartość procesu Ornsteina-Uhlenbecka w chwili $t \in [0, T]$ postaci

$$X(t) = \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta s} dW(s)$$

o deterministycznej wartości początkowej $X(0)$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, przy czym

$$\mathbb{E}(X(t)) = \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu), \tag{9}$$

natomiaszt

$$\text{Var}(X(t)) = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}). \tag{10}$$

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 3 całka

$$I(t) = \int_0^t e^{\theta s} dW(s).$$

jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwananą równą 0, a także

$$\text{Var}(I(t)) = \int_0^t e^{2\theta s} ds = \frac{e^{2\theta t} - 1}{2\theta}.$$

Zatem

$$\sigma e^{-\theta t} \cdot I(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 e^{-2\theta t} \cdot \frac{e^{2\theta t} - 1}{2\theta}\right)$$

i ostatecznie, przyjmując, że $X(0)$ jest wielkością deterministyczną, otrzymujemy następujący wniosek

$$X(t) \sim \mathcal{N}\left(\mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu), \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\theta t})}{2\theta}\right). \quad \blacksquare$$

Jeśli natomiast $X(0)$ jest całkowalną zmienną losową o skończonej wariancji, to dla $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}(X(t)) = \mu + e^{-\theta t}(\mathbb{E}(X(0)) - \mu).$$

oraz

$$\text{Var}(X(t)) = \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t}) + e^{-2\theta t} \text{Var}(X(0)).$$

Zauważmy, że dla zadanych z góry parametrów $X(0), \theta, \mu \in \mathbb{R}$ wartość oczekiwana (9) jest monotoniczną funkcją czasu

$$g(t) = \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu), \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

przy czym

$$g(0) = X(0)$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \mu.$$

Gdy $X(0) < \mu$, funkcja $g(t)$ jest rosnącą, a w przeciwnym wypadku - malejącą. Naturalnie, dla $X(0) = \mu$ jest stała.

Podobnie dla zadanych parametrów $\sigma, \theta > 0$ wariancja (10) jest rosnącą funkcją czasu

$$h(t) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\theta t})}{2\theta}, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

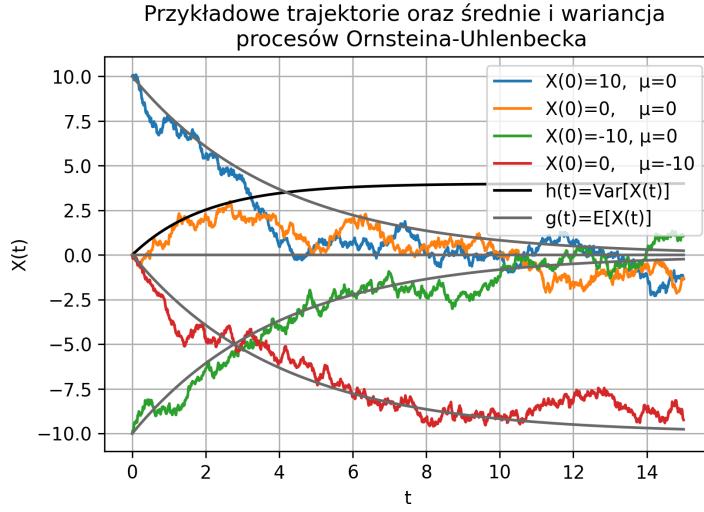
przy czym

$$h(0) = 0$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \frac{\sigma^2}{2\theta}.$$

Rysunek 15 przedstawia kilka przykładowych trajektorii niezależnych procesów Ornsteina-Uhlenbecka dla parametrów $\theta = 0,25$ i $\sigma = 1$, a także odpowiadające im przypadki funkcji $g(t)$ i jednakową dla wszystkich tych przypadków funkcję $h(t)$, to jest, odpowiednio, wartości oczekiwanej i wariancji.



Rysunek 15: Przykładowe trajektorie procesów Ornsteina-Uhlenbecka wraz z wartościami oczekiwanyymi i wariancją

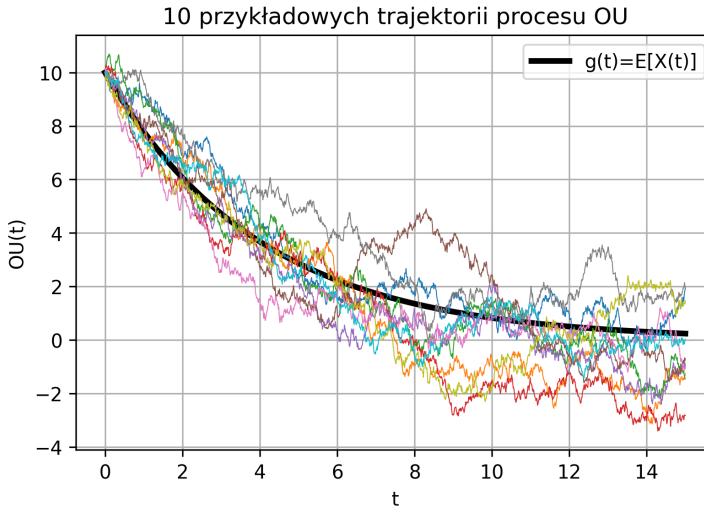
Niech $OU = (OU(t))_{t \in [0, T]}$, gdzie $T = 15$, będzie procesem Ornsteina-Uhlenbecka o parametrach

$$\mu = 0, \quad \sigma = 1, \quad \theta = \frac{1}{4}, \quad X(0) = 10.$$

Proces ten spełnia zatem równanie

$$dOU(t) = -\frac{1}{4}OU(t)dt + dW(t). \quad (13)$$

Po wykonaniu 1500 kroków w każdej z 10 symulacji otrzymujemy efekt widoczny na rysunku 16. Tutaj również dobrze widać zbieganie wartości procesu wzdłuż wartości funkcji $g(t) = \mathbb{E}[OU(t)]$ aż do średniej $\mu = 0$.

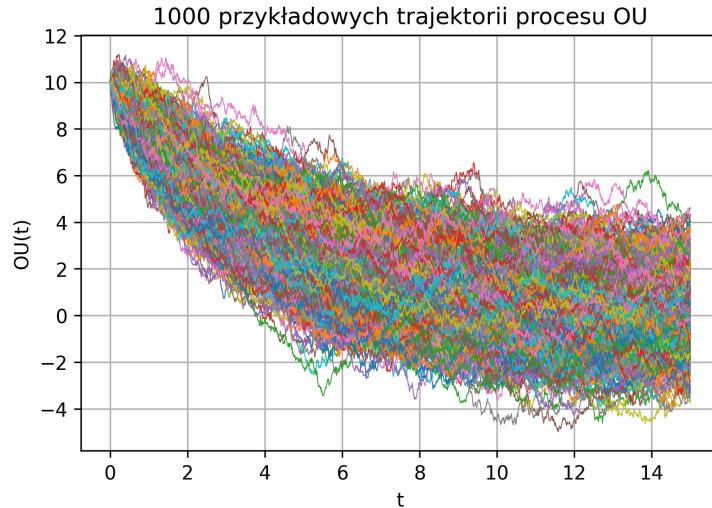


Rysunek 16: Przykładowe trajektorie procesu OU wraz z wartością oczekiwana

Ze wzorów (9) i (10) wynika, że

$$\mathbb{E}(OU(15)) = 0,23; \quad \text{Var}(OU(15)) = 1,99.$$

Czy jednak symulacje potwierdzą te teoretyczne wartości? Rysunek 17 przedstawia aż 1000 przykładowych trajektorii zdefiniowanego równaniem (13) procesu Ornsteina-Uhlenbecka OU .



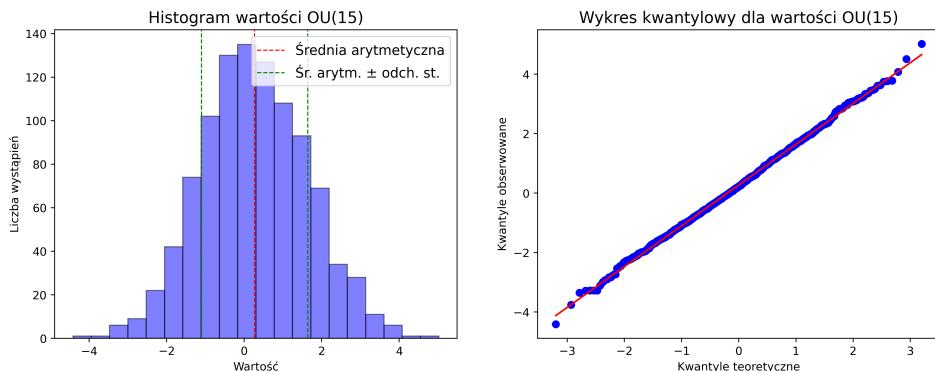
Rysunek 17: Przykładowe 1000 trajektorii procesu OU

Podstawowe parametry statystyczne	
medianą	0,13
średnia arytmetyczna	0,19
odchylenie standardowe	1,40
skośność	0,01
kurtoza	0,01

Tabela 2: Podstawowe parametry statystyczne dla $OU(15)$ dla 1000 trajektorii

Empiryczne odchylenie standardowe jest bliskie liczbie $\sqrt{2}$, a teoretyczna wariancja miała właśnie wynosić 2. Empiryczna wartość średnia również nie różni się bardzo od teoretycznej.

Z kolei test Shapiro-Wilka dla tych symulacji przyjmuje p-value równe 0,97. Nie ma więc podstaw do odrzucenia hipotezy mówiącej, że wartości te pochodzą z rozkładu normalnego. Co więcej, skośność i kurtoza są bliskie zeru. Ostatnim argumentem przemawiającym za normalnością rozkładu jest poniższy histogram i wykres kwantylowy.



Rysunek 18: Histogram i wykres kwantylowy dla $OU(15)$ dla 1000 trajektorii

W przypadku wyceny wielu instrumentów finansowych należy brać pod uwagę różne zależności między ich cenami (lub cenami instrumentów bazowych, gdy wycenia się instrument pochodny). Popularną miarą takiej zależności może być kowariancja (lub wyliczany w oparciu o nią współczynnik korelacji) pomiędzy procesami stochastycznymi używanymi do wyceny. Wobec tego warto zwrócić uwagę na poniższy fakt.

Fakt 3 (6) *Niech $s, t \in [0, T]$. Dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka postaci*

$$X(t) = \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta u} dW(u), \quad t \in [0, T]$$

o deterministycznej wartości początkowej $X(0)$ zachodzi

$$\text{Cov}[X(t), X(s)] = \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta|t-s|} - e^{-\theta(t+s)}).$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X(t), X(s)] &= \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}(X(t))) \cdot (X(s) - \mathbb{E}(X(s)))] \\ &= \mathbb{E}\left[\sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta u} dW(u) \cdot \sigma e^{-\theta s} \int_0^s e^{\theta v} dW(v)\right] \\ &= \sigma^2 e^{-\theta(t+s)} \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{\theta u} dW(u) \cdot \int_0^s e^{\theta v} dW(v)\right]. \end{aligned}$$

Jednak

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{\theta u} dW(u) \cdot \int_0^s e^{\theta v} dW(v)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\min\{s,t\}} e^{\theta u} dW(u) + \int_{\min\{s,t\}}^{\max\{s,t\}} e^{\theta u} dW(u)\right) \cdot \int_0^{\min\{s,t\}} e^{\theta v} dW(v)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\min\{s,t\}} e^{\theta u} dW(u)\right)^2\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_{\min\{s,t\}}^{\max\{s,t\}} e^{\theta u} dW(u) \cdot \int_0^{\min\{s,t\}} e^{\theta v} dW(v)\right]. \end{aligned}$$

Z uwagi na niezależność ostatnich dwóch zmiennych losowych (całek stochastycznych) i na mocy twierdzenia 1 zachodzi

$$\mathbb{E}\left[\int_{\min\{s,t\}}^{\max\{s,t\}} e^{\theta u} dW(u) \cdot \int_0^{\min\{s,t\}} e^{\theta v} dW(v)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\min\{s,t\}}^{\max\{s,t\}} e^{\theta u} dW(u)\right] \cdot 0 = 0$$

Pozostaje użyć twierdzenia 6 (Izometrii Itô) do następujących obliczeń

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\min\{s,t\}} e^{\theta u} dW(u)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\min\{s,t\}} e^{2\theta u} du\right] = \int_0^{\min\{s,t\}} e^{2\theta u} du = \frac{e^{2\theta \min\{s,t\}} - 1}{2\theta}.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\text{Cov}[X(t), X(s)] = \sigma^2 e^{-\theta(t+s)} \frac{e^{2\theta \min\{s,t\}} - 1}{2\theta} = \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta|t-s|} - e^{-\theta(t+s)}).$$

■

Fakt 4 Proces Ornsteina-Uhlenbecka nie jest martyngalem.

Dowód. Niech $0 \leq s \leq t$. Zgodnie z lematem 3 proces Ornsteina-Uhlenbecka to proces stochastyczny $(X(t))_{t \in [0, T]}$ postaci

$$X(t) = \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta s} dW(s),$$

gdzie $\theta > 0$, $\sigma > 0$ oraz $\mu \in \mathbb{R}$ to pewne stałe, natomiast $(W(t))_{t \in [0, T]}$ jest procesem Wienera. Oznaczmy przez $(F(t))_{t \in [0, T]}$ filtrację procesu $(X(t))$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t)|F(s)) &= \mathbb{E}\left(\mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta u} dW(u) \middle| F(s)\right) \\ &= \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \cdot \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\theta u} dW(u) \middle| F(s)\right) \\ &= \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \cdot \mathbb{E}\left(\int_s^t e^{\theta u} dW(u) + \int_0^s e^{\theta u} dW(u) \middle| F(s)\right), \end{aligned}$$

jednak na mocy lematu 2 zachodzi

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t e^{\theta u} dW(u) \middle| F(s)\right) = 0.$$

Wobec tego, po skorzystaniu z addytywności warunkowej wartości oczekiwanej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t)|F(s)) &= \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \cdot \mathbb{E}\left(\int_0^s e^{\theta u} dW(u) \middle| F(s)\right) \\ &= \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu) + \sigma e^{-\theta t} \cdot \mathbb{E}\left(\int_0^s e^{\theta u} dW(u)\right), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość jest konsekwencją lematu 1. Na mocy twierdzenia 1 ostatnia wartość oczekiwana jest równa zero, toteż

$$\mathbb{E}(X(t)|F(s)) = \mu + e^{-\theta t}(X(0) - \mu)$$

Jednakże

$$\mathbb{E}(X(s)) = \mu + e^{-\theta s}(X(0) - \mu).$$

Ostatecznie więc

$$\mathbb{E}(X(t)|F(s)) \neq \mathbb{E}(X(s))$$

■

Omówione własności procesu Ornsteina-Uhlenbecka (i procesów stochastycznych w ogóle) bywają niezwykle użyteczne w wycenie wielu instrumentów finansowych, w tym także opcji spread. W rozdziale 5 opisano kilka metod wyceny opcji spread, wykorzystujących te narzędzia matematyczne.

5 Modele wyceny opcji spread

Przyjmijmy oznaczenie $(x)^+ := x \cdot \mathbb{1}_{\{x>0\}}$, $x \in \mathbb{R}$. Przez $S_1(t)$ oraz $S_2(t)$ oznaczmy, odpowiednio, cenę paliwa oraz cenę energii elektrycznej w chwili $t \in [0, T]$ przy pewnym $T > 0$. Dla opcji spread o cenie wykonania (strike) K , terminie zapadalności (maturity) $T > 0$, pewnych ustalonych parametrach $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ i funkcji wypłaty

$$h(T) = (a_2 S_2(T) - a_1 S_1(T) - K)^+ \quad (14)$$

a więc opcji kupna (typu call), cenę w chwili $t \in [0, T]$ obliczymy, oczywiście, jako

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}((a_2 S_2(T) - a_1 S_1(T) - K)^+), \quad (15)$$

gdzie r to pewna stopa procentowa neutralna względem ryzyka. W praktyce najczęściej $a_2 = 1$, natomiast a_1 jest współczynnikiem wydajności generatora energii elektrycznej (efficiency rate). Dla skrócenia zapisu w niniejszej pracy przyjęto $a_1 = a_2 = 1$.

Dla tych samych oznaczeń cenę opcji o funkcji wypłaty

$$h(T) = (K - [a_2 S_2(T) - a_1 S_1(T)])^+ \quad (16)$$

a więc opcji sprzedawy (typu put), obliczymy jako

$$P(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}((K - [a_2 S_2(T) - a_1 S_1(T)])^+). \quad (17)$$

Warto w tym miejscu przywołać niezwykle ważne i użyteczne w matematyce finansowej następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8 (7) (Put-Call Parity) Niech dla $t \in [0, T]$ $C(t)$ będzie ceną europejskiej opcji kupna (call), a $P(t)$ - europejskiej opcji sprzedawy (put) na ten sam instrument bazowy o cenie $S(t)$, z tą samą ceną wykonania (strike) K oraz tym samym ustalonym terminem zapadalności (maturity) $T > 0$. Założymy, że instrument bazowy w trakcie trwania opcji nie generuje przepływu pieniężnego. Wówczas dla $t \in [0, T]$ spełniona jest następująca równość ("put-call parity"):

$$C(t) - S(t) = P(t) - e^{-r(T-t)} K,$$

gdzie r jest stopą procentową neutralną względem ryzyka.

Wobec deterministycznych wartości ustalonych parametrów r, t, T, K, a_1, a_2 na wielkości $C(t)$ i $P(t)$ w wyrażeniach (15) i (17) istotnie wpływają zmienne losowe $S_1(T), S_2(T)$ lub ogólniej: procesy stochastyczne $S_1 = (S_1(t))_{t \in [0, T]}$ oraz $S_2 = (S_2(t))_{t \in [0, T]}$. Rodzi się więc pytanie, jak (jakimi procesami) modelować dynamikę tych zmiennych.

Jak wykazano w rozdziale 2, dotyczącym danych rynkowych, historyczne ceny energii elektrycznej oraz gazu ziemnego cechują się między innymi powracaniem do średniej. Co za tym idzie, odpowiednim narzędziem matematycznym do modelowania dynamiki tych wielkości wydaje się być proces Ornsteina-Uhlenbecka.

Warto jednak w tym miejscu przywołać także model Blacka-Scholesa [8] z 1973r. Pozwala on wyceniać opcje kupna i sprzedawy typu europejskiego, choć nie uwzględnia powracania cen instrumentu bazowego do średniej (dynamika cen zadana jest zupełnie innym stochastycznym równaniem różniczkowym). W dalszej części niniejszej pracy pojawi się bowiem odniesienie do tego modelu (lemat 5).

5.1 Model Blacka-Scholesa

W modelu tym dynamika cen instrumentu bazowego przy $t \in [0, T]$, $T > 0$ jest opisana procesem stochastycznym $S = (S(t))_{t \in [0, T]}$ spełniającym następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (18)$$

gdzie μ i σ to odpowiednio dryf (wartość oczekiwana) i współczynnik dyfuzji (odchylenie standar-dowe) procesu cen S , natomiast $(W(t))_{t \in [0, T]}$ jest procesem Wienera.

Rozwiązaniem równania (18) jest proces postaci

$$S(t) = S(0) \cdot \exp \left([\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]t + \sigma \cdot W(t) \right). \quad (19)$$

Okazuje się, że dla tak zdefiniowanego procesu cen instrumentu bazowego ceny europejskiej opcji kupna (call) i sprzedaży (put) z terminem zapadalności T i ceną wykonania K przyjmują w chwili $t \in [0, T]$ następującą postać

$$C(t) = S(t) \cdot \Phi \left(\frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - K e^{-r(T-t)} \cdot \Phi \left(\frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right), \quad (20)$$

$$P(t) = K e^{-r(T-t)} \cdot \Phi \left(\frac{-\ln \frac{S(t)}{K} - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - S(t) \cdot \Phi \left(\frac{-\ln \frac{S(t)}{K} - (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right), \quad (21)$$

gdzie r jest stopą procentową neutralną względem ryzyka, a $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Jak już wspomniano, proces S użyty w modelu Blacka-Scholesa nie jest, niestety, procesem powracającym do średniej (nie spełnia definicji 13), a taką właśnie cechę mają procesy cen towarów rynku energetycznego. Jednakże bez względu na to pozostaje on użyteczną inspiracją przy tworzeniu nowych modeli. Ponadto w przywołanej poniżej metodzie wyceny opcji spread również można dostrzec podobieństwo do modelu Blacka-Scholesa, co dobrze ukazuje lemat 5.

5.2 Aproxymacja Carmony i Durrlemana w wycenie opcji spread

5.2.1 Dynamika cen instrumentów bazowych opcji spread

Carmona i Durrelman w [9] proponują, aby dynamikę cen paliwa $(S_1(t))_{t \in [0, T]}$ oraz energii elektrycznej $(S_2(t))_{t \in [0, T]}$ modelować następującymi stochastycznymi równaniami różniczkowymi:

$$dS_i(t) = S_i(t) [-\lambda_i(\ln S_i(t) - \mu_i)dt + \sigma_i dW_i(t)], \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

$(W_i(t))_{t \in [0, T]}$ to procesy Wienera o korelacji ρ . Stałe $\sigma_i > 0$ określają tutaj zmienność cen, którą zwykle utożsamia się z odchyleniem standardowym cen historycznych. $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ to współczynniki szybkości powracania do średniej, natomiast $\mu_i \in \mathbb{R}$ to właśnie te średnie.

Zdefiniujmy procesy

$$X_i(t, S_i(t)) = \ln S_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial X_i}{\partial t}(t, y)|_{y=S_i(t)} = 0, \quad \frac{\partial X_i}{\partial y}(t, y)|_{y=S_i(t)} = \frac{1}{S_i(t)}, \quad \frac{\partial^2 X_i}{\partial y^2}(t, y)|_{y=S_i(t)} = \frac{-1}{S_i^2(t)},$$

na mocy twierdzenia 5 (Formuły Itô) dla $i = 1, 2$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} dX_i(t) &= \left(S_i(t) \cdot (-\lambda_i)(\ln S_i(t) - \mu_i) \cdot \frac{1}{S_i(t)} + \frac{S_i^2(t)\sigma_i^2}{2} \frac{-1}{S_i^2(t)} \right) dt \\ &\quad + S_i(t)\sigma_i \frac{1}{S_i(t)} dW_i(t), \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu powyższe równania przyjmują formę:

$$dX_i(t) = \lambda_i \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2\lambda_i} - X_i(t) \right) dt + \sigma_i dW_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Ostatecznie, kładąc $\mu_i^\infty = \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2\lambda_i}$, otrzymujemy:

$$dX_i(t) = \lambda_i (\mu_i^\infty - X_i(t)) dt + \sigma_i dW_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Wniosek z tego jest taki, że procesy zlogarytmowanych cen instrumentów bazowych dla opcji spread to procesy Ornsteina-Uhlenbecka (spełniają definicję 14) ze średnimi μ_i^∞ .

Zatem na mocy lematu 3 można stwierdzić, że rozwiązania równań (23) są postaci

$$X_i(t) = \mu_i^\infty + e^{-\lambda_i t} (X_i(0) - \mu_i^\infty) + \sigma_i e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i s} dW_i(s), \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Zwróćmy uwagę, że jedyne stochastyczne części równości (24), a więc całki

$$I_i(t) = \int_0^t e^{\lambda_i s} dW_i(s), \quad i = 1, 2$$

zgodnie z twierdzeniem 3 są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwanaą równą 0 oraz

$$\text{Var}(I_i(t)) = \frac{e^{2\lambda_i t} - 1}{2\lambda_i}, \quad i = 1, 2.$$

Ponieważ $X_i(t) = \ln S_i(t)$ dla $i = 1, 2$, prawdziwe są równości

$$S_i(t) = \exp \left(\mu_i^\infty + e^{-\lambda_i t} (\ln S_i(0) - \mu_i^\infty) + \sigma_i e^{-\lambda_i t} \cdot I_i(t) \right). \quad (25)$$

Równoważnie

$$S_i(t) = \exp \left(\mu_i^\infty + e^{-\lambda_i t} (\ln S_i(0) - \mu_i^\infty) + \sigma_{i,t} \cdot \xi_i \right), \quad (26)$$

gdzie

$$\sigma_{i,t} = \sigma_i \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda_i t}}{2\lambda_i}},$$

natomiast ξ_1, ξ_2 są zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Obliczymy teraz ich korelację $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\xi_1, \xi_2)$.

5.2.2 Korelacja zmiennych losowych w dynamice cen instrumentów bazowych

Lemat 4 (9) Przy powyższych oznaczeniach zachodzi równość

$$\tilde{\rho}(\xi_1, \xi_2) = 2\rho \cdot \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\sqrt{1 - e^{-2\lambda_1 t}} \cdot \sqrt{1 - e^{-2\lambda_2 t}}}. \quad (27)$$

Dowód.

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\text{Var}(\xi_1)} \cdot \sqrt{\text{Var}(\xi_2)}} = \text{Cov}(\xi_1, \xi_2).$$

Zauważmy, że

$$\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\text{Cov}(I_1(t), I_2(t))}{\sqrt{\text{Var}(I_1(t))} \cdot \sqrt{\text{Var}(I_2(t))}}.$$

Potrzebujemy zatem obliczyć kowariancję całek I_1 oraz I_2 . Skorzystamy przy tym z twierdzenia 7 (Kowariancja całek Itô).

Najpierw jednak zauważmy, że skoro procesy Wienera $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$ i $(W_2(t))_{t \in [0, T]}$ są skorelowane, a współczynnik ich korelacji wynosi ρ , to dla $t \in [0, T]$ zachodzi

$$W_2(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_3(t), \quad (28)$$

gdzie $(W_3(t))_{t \in [0, T]}$ jest procesem Wienera niezależnym od procesu $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$.

Możemy teraz powrócić do obliczania rzeczywistej kowariancji. Należy przy tym pamiętać, że całka stochastyczna jako taka jest zmienną losową, a zatem kowariancja dwóch takich całek opartych o niezależne procesy stochastyczne będzie zerowa - skorzystamy z tego w poniższych obliczeniach.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_1(t), I_2(t)) &= \mathbb{E}\left(\left[I_1(t) - \mathbb{E}(I_1(t))\right]\left[I_2(t) - \mathbb{E}(I_2(t))\right]\right) \\ &= \mathbb{E}(I_1(t) \cdot I_2(t)) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s) \cdot \int_0^t e^{\lambda_2 s} dW_2(s)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s) \cdot \left(\int_0^t e^{\lambda_2 s} \rho dW_1(s) + \int_0^t e^{\lambda_2 s} \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(s)\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s) \cdot \int_0^t e^{\lambda_2 s} \rho dW_1(s) + \int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s) \cdot \int_0^t e^{\lambda_2 s} \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(s)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s) \cdot \int_0^t e^{\lambda_2 s} \rho dW_1(s)\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s) \cdot \int_0^t e^{\lambda_2 s} \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(s)\right) \end{aligned}$$

Ponieważ jednak procesy $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$ i $(W_3(t))_{t \in [0, T]}$ są niezależne, całki

$$\int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s) \quad \text{i} \quad \int_0^t e^{\lambda_2 s} \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(s)$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi, wobec czego

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s) \cdot \int_0^t e^{\lambda_2 s} \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(s)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s)\right) \cdot \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{\lambda_2 s} \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(s)\right) = 0.$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(I_1(t), I_2(t)) &= \mathbb{E} \left(\int_0^t e^{\lambda_1 s} dW_1(s) \cdot \int_0^t e^{\lambda_2 s} \rho dW_1(s) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\int_0^t \rho e^{\lambda_1 s} e^{\lambda_2 s} ds \right) \\
&= \rho \int_0^t e^{(\lambda_1 + \lambda_2)s} ds \\
&= \rho \cdot \frac{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} - 1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\sqrt{\frac{e^{2t\lambda_1}-1}{2\lambda_1}} \cdot \sqrt{\frac{e^{2t\lambda_2}-1}{2\lambda_2}}} \cdot \frac{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} - 1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= 2\rho \cdot \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} - 1}{\sqrt{e^{2\lambda_1 t} - 1} \cdot \sqrt{e^{2\lambda_2 t} - 1}}.
\end{aligned}$$

Teraz wystarczy licznik i mianownik ostatniego ułamka pomnożyć przez $e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$. ■

Ponieważ jednak w powyższych obliczeniach pojawia się zmienna t , należy doprecyzować, że z uwagi na docelowe użycie tego współczynnika korelacji (wycenę opcji o zapadalności w chwili $T > 0$) interesuje nas jego wartość dla $t = T$. Zapiszmy więc na potrzeby dalszych rozważań

$$\tilde{\rho} = 2\rho \cdot \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T}}{\sqrt{1 - e^{-2\lambda_1 T}} \cdot \sqrt{1 - e^{-2\lambda_2 T}}}. \quad (29)$$

Zatem znamy rozwiązania równań opisujących dynamikę cen instrumentów bazowych dla naszej opcji (paliwa i energii elektrycznej) z dokładnością do wartości pewnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym. Znamy też korelację tych zmiennych losowych. Możemy teraz przejść do wyceny opcji spread.

5.2.3 Aproksymacja ceny opcji spread

Ponieważ rozwiązaniami równań (22) są procesy stochastyczne postaci

$$S_i(t) = \exp \left(\mu_i^\infty + e^{-\lambda_i t} (\ln S_i(0) - \mu_i^\infty) + \sigma_{i,t} \cdot \xi_i \right) \quad i = 1, 2,$$

gdzie $\xi_1, \xi_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, wzór na cenę opcji spread typu call

$$C(0) = e^{-rT} \mathbb{E}((S_2(T) - S_1(T) - K)^+)$$

przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
C(0) &= \mathbb{E} \left\{ \left[\exp \left(-rT + \mu_2^\infty + e^{-\lambda_2 T} (\ln S_2(0) - \mu_2^\infty) + \sigma_{2,T} \cdot \xi_2 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \exp \left(-rT + \mu_1^\infty + e^{-\lambda_1 T} (\ln S_1(0) - \mu_1^\infty) + \sigma_{1,T} \cdot \xi_1 \right) - e^{-rT} K \right]^+ \right\}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Carmona i Durrelman proponują w [9], aby przyblizać cenę $C(0, T)$ z równości (30) wzorem:

$$\begin{aligned}\hat{C}(0) &= S_2(0)e^{-rT}\Phi(d^* + \sigma_2 \cos(\theta^* + \phi)\sqrt{T}) \\ &\quad - S_1(0)e^{-rT}\Phi(d^* + \sigma_1 \sin(\theta^*)\sqrt{T}) - Ke^{-rT}\Phi(d^*),\end{aligned}\tag{31}$$

którego obszerne uzasadnienie zawarli w [10]. Warto w tym miejscu zauważyc, że wzór ten w swojej konstrukcji jest podobny do wzoru Blacka-Scholesa (20). Celem użycia powyższej formuły należy przyjąć oznaczenia

$$\alpha = \exp(-rT + \mu_2^\infty + e^{-\lambda_2 T}(S_2(0) - \mu_2^\infty) - \sigma_{2,T}^2/2), \quad \beta = \sigma_{2,T} = \sigma_2 \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda_2 t}}{2\lambda_2}},$$

$$\gamma = \exp(-rT + \mu_1^\infty + e^{-\lambda_1 T}(S_1(0) - \mu_1^\infty) - \sigma_{1,T}^2/2), \quad \delta = \sigma_{1,T} = \sigma_1 \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda_1 t}}{2\lambda_1}},$$

$$d^* = \frac{1}{\sigma \cos(\theta^* - \psi)\sqrt{T}} \ln \left(\frac{S_2(0)\sigma_2 \sin(\theta^* + \phi)}{S_1(0)\sigma_1 \sin \theta^*} \right) - \frac{1}{2}(\sigma_2 \cos(\theta^* + \phi) + \sigma_1 \cos \theta^*)\sqrt{T},$$

a także $\kappa = Ke^{-rT}$ oraz obliczone powyżej $\hat{\rho}$. Wartości $\phi, \psi \in [0, \pi]$ spełniają

$$\cos \phi = \hat{\rho}, \quad \cos \psi = \frac{\sigma_1 - \hat{\rho}\sigma_2}{\sigma},$$

ponadto

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\hat{\rho}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2},$$

natomias θ^* jest rozwiązaniem równania

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\delta \cos \theta} \ln \left(-\frac{\beta \kappa \sin(\theta + \phi)}{\gamma[\beta \sin(\theta + \phi) - \delta \sin \theta]} \right) - \frac{\delta \cos \theta}{2} \\&= \frac{1}{\beta \cos(\theta + \phi)} \ln \left(-\frac{\delta \kappa \sin \theta}{\alpha[\beta \sin(\theta + \phi) - \delta \sin \theta]} \right) - \frac{\beta \cos(\theta + \phi)}{2}.\end{aligned}$$

Warto też wspomnieć, że przy powyższych oznaczeniach prawdziwy jest przedstawiony i udowodniony w [10] następujący lemat.

Lemat 5 (10) $\hat{C}(0) = C(0)$, jeśli $K = 0$ lub $S_1(0) = 0$ lub $S_2(0) = 0$ lub $\rho \in \{-1, 1\}$. Jeżeli natomiast $S_1(0) = 0$ lub $S_2(0) = 0$, to podany przez Carmonę i Durrelmana wzór (31) na cenę C sprowadza się do wzoru Blacka-Scholesa (20).

Lemat ten przywołujemy bez dowodu, który jest długi i techniczny.

Ponieważ jednak wzór (31) jest bardzo skomplikowany i stanowi jedynie przybliżenie dokładnej ceny, warto rozważyć wycenę numeryczną.

5.3 Wycena numeryczna opcji spread

Naturalnie, można wycenić opcję spread numerycznie, przy pomocy symulacji Monte Carlo. Przypomnijmy, że cena opcji spread typu call dana jest wzorem

$$C(0) = e^{-rT} \mathbb{E}((a_2 S_2(T) - a_1 S_1(T) - K)^+).$$

5.3.1 Założenia i metoda numerycznej wyceny opcji spread

Znając rozkład i korelację zmiennych $S_1(T)$ i $S_2(T)$, możemy wygenerować wiele próbek (wartości) z tych rozkładów, następnie obliczyć dla nich wartość spreadu i wypłatę z opcji, uśrednić wyniki i zdyskontować tę średnią do chwili $t = 0$.

Możemy, za Carmoną i Durllemanem [9], modelować dynamikę cen paliwa $S_1 = (S_1(t))_{t \in [0, T]}$ oraz energii elektrycznej $S_2 = (S_2(t))_{t \in [0, T]}$ następującymi równaniami:

$$dS_i(t) = S_i(t) [-\lambda_i(\ln S_i(t) - \mu_i)dt + \sigma_i dW_i(t)], \quad i = 1, 2. \quad (32)$$

Jak wykazaliśmy wcześniej (podrozdział 5.2.1), rozwiązań tych równań są postaci

$$S_i(t) = \exp \left(\mu_i^\infty + e^{-\lambda_i t} (\ln S_i(0) - \mu_i^\infty) + \sigma_{i,t} \cdot \xi_i \right) \quad i = 1, 2,$$

gdzie $\mu_i^\infty = \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2\lambda_i}$, natomiast ξ_1, ξ_2 są zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Współczynnik ich korelacji, zgodnie z lematem 4, wyraża wzór

$$\tilde{\rho}(\xi_1, \xi_2) = 2\rho \cdot \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\sqrt{1 - e^{-2\lambda_1 t}} \cdot \sqrt{1 - e^{-2\lambda_2 t}}},$$

gdzie ρ jest współczynnikiem korelacji pomiędzy procesami Wienera $(W_i(t))_{t \in [0, T]}$, $i = 1, 2$. W praktyce za ρ można przyjąć historyczną korelację cen.

Warto w tym miejscu przypomnieć, że to procesy

$$X_i(t) = \ln S_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (33)$$

są procesami Ornsteina-Uhlenbecka i to właśnie dla nich będziemy estymować odpowiednie parametry. W równaniach (32) występują po trzy parametry: $\lambda_i, \mu_i, \sigma_i$, $i = 1, 2$. Potrzebne są zatem trzy estymatory.

5.3.2 Estymatory parametrów procesu Ornsteina-Uhlenbecka

W pracy Przybyłowicza [11] można znaleźć następujące estymatory parametrów procesu Ornsteina-Uhlenbecka wyznaczone przy użyciu metody największej wiarygodności:

$$\hat{\lambda} = -h^{-1} \ln(\hat{\beta}_1), \quad (34)$$

$$\hat{\mu} = \hat{\beta}_2, \quad (35)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{2\hat{\lambda}\hat{\beta}_3(1 - \hat{\beta}_1^2)^{-1}}, \quad (36)$$

gdzie $h = \frac{T}{n}$ oraz

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} x_k - n^{-2} \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \sum_{k=0}^{n-1} x_k}{n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 - n^{-2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k \right)^2}, \quad (37)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - \hat{\beta}_1 x_k)}{1 - \hat{\beta}_1}, \quad (38)$$

$$\hat{\beta}_3 = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} ((x_{k+1} - \hat{\beta}_1 x_k - \hat{\beta}_2(1 - \hat{\beta}_1))^2. \quad (39)$$

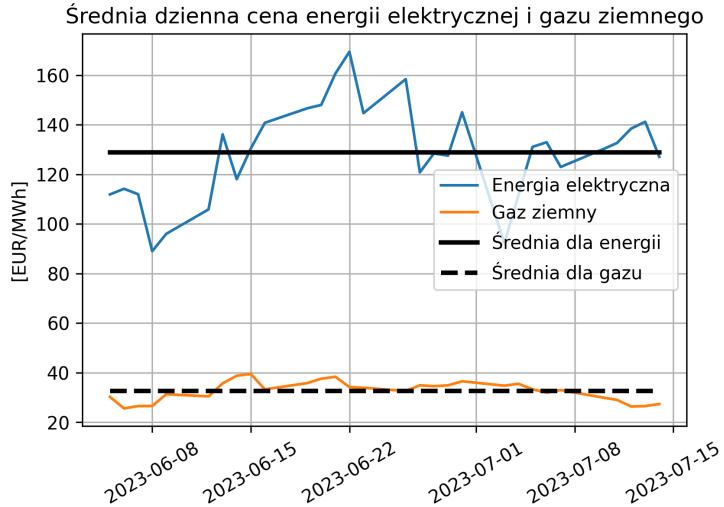
x_0, x_1, \dots, x_n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, są wartościami historycznymi interpretowanymi jako realizacja pewnego procesu Ornsteina-Uhlenbecka $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$, dla których właśnie estymujemy te parametry. Jednak z uwagi na równość (33) za wielkości x_0, x_1, \dots, x_n przyjmiemy zlogarytmowane ceny historyczne.

5.3.3 Historyczne ceny gazu i energii użyte do estymacji parametrów

Z uwagi na dane, jakimi dysponujemy (średnie dzienne ceny instrumentów bazowych), a także dobrą praktykę unikania overfittingu przy tak dużej obserwowanej zmienności danych historycznych, możemy przyjąć $n = 30$, a więc wielkości x_0, x_1, \dots, x_{29} będą zlogarytmowanymi średnimi dziennymi cenami z ostatnich 30 dni.

Ponownie biorąc pod uwagę dużą zmienność danych, możemy się zastanowić nad doborem terminu zapadalności wycenianej opcji. Rozważmy opcję zapadającą 15 dni od emisji (od najnowszych danych). Ponieważ termin zapadalności opcji w tym modelu jest wyrażony w latach (przyjmujemy stopę procentową r w skali roku), dla 250 dni kwotowania na rynku energii w roku otrzymujemy $T = \frac{15}{250} = 0,06$.

Rysunek 19 przedstawia czyste dane historyczne, to znaczy jeszcze przed zlogarytmowaniem. W oparciu o te dane wyestymujemy następnie wartości $\lambda_i, \mu_i, \sigma_i$, $i = 1, 2$.



Rysunek 19: Średnia dzienna cena spot energii elektrycznej na TGE [1] i gazu ziemnego na TTF [2] od 05.06.2023 do 14.07.2023

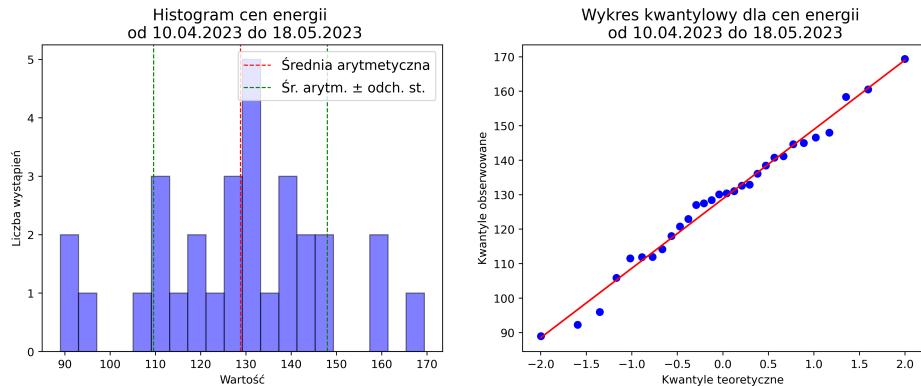
Wnioski z rozdziału 2.1 oraz intuicja sugerują, iż odchylenie standardowe oraz średnia arytmetyczna dla gazu są niższe niż dla energii. Zdają się to potwierdzać rysunek 19 i tabela 3 przedstawiająca nieco więcej parametrów statystycznych dla tych danych.

Z widocznych w tabeli 3 wartości skośności i kurtozy można wnioskować, że obie zmienne (cena energii elektrycznej oraz cena gazu) mają rozkłady zbliżone do normalnego.

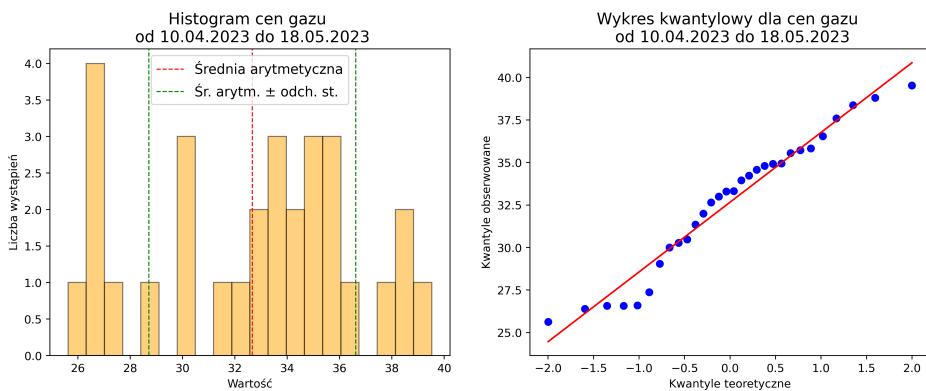
Podstawowe parametry statystyczne		
parametr	energia	gaz
mediana	130,26	33,31
średnia arytmetyczna	128,79	32,66
odchylenie standardowe	19,18	3,95
skośność	-0,13	-0,24
kurtoza	-0,29	-0,94
współczynnik korelacji	0,32	

Tabela 3: Podstawowe parametry statystyczne dla cen energii elektrycznej na TGE [1] i gazu ziemnego na TTF [2] od 05.06.2023 do 14.07.2023

Test Shapiro-Wilka dla cen energii przyjmuje p-value równe 0,9235, a dla cen gazu: 0,1708. Nie ma zatem podstaw do odrzucenia hipotezy mówiącej, że omawiane dane historyczne pochodzą z rozkładów normalnych. Poniższe wykresy kwantylowe zdają się to potwierdzać, chociaż histogramy niekoniecznie (optycznie) zauważalne, choć zanegowane wartościami kurtozy "ciężkie ogony" mogą wynikać z małej próbki danych).



Rysunek 20: Histogram i wykres kwantylowy cen energii na TGE od 05.06.2023 do 14.07.2023 [1]



Rysunek 21: Histogram i wykres kwantylowy cen gazu na TTF od 05.06.2023 do 14.07.2023 [2]

Dane historyczne, których użyjemy do wyestymowania parametrów $\lambda_i, \mu_i, \sigma_i$ procesów X_1, X_2 , (odpowiednio: gaz i energia) prawdopodobnie pochodzą więc z rozkładu normalnego.

5.3.4 Wycena opcji spread

Parametry wyznaczone w oparciu o powyższe dane i przy użyciu wzorów (34), (35) i (36), przyjmują następujące wartości:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= 3,63; & \hat{\lambda}_2 &= 6,13; \\ \hat{\mu}_1 &= 2,90; & \hat{\mu}_2 &= 5,03; \\ \hat{\sigma}_1 &= 2,96; & \hat{\sigma}_2 &= 9,91.\end{aligned}$$

Jakkolwiek ciężko ocenić poprawność parametrów $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$, pozostałe można z pewnością porównać z wartościami wyznaczonymi dla zlogarytmowanych danych historycznych. Wynoszą one, odpowiednio:

$$\begin{aligned}\mu_1^{hl} &= 3,47; & \mu_2^{hl} &= 4,84; \\ \sigma_1^{hl} &= 0,12; & \sigma_2^{hl} &= 0,15.\end{aligned}$$

Niestety estymator odchylenia standardowego podaje wielkości o cały rząd wielkości większe od historycznych. Natomiast estymator wartości średniej wydaje się być dość dokładnym.

Należy teraz ustalić wartości pozostałych parametrów opcji. Przyjmijmy więc neutralną względem ryzyka stopę procentową $r = 0,06$. Mniej więcej taka jest rentowność polskich rocznych obligacji skarbowych emitowanych wiosną 2024. Również niewiele niższa jest w tym okresie referencyjna stopa procentowa NBP: 5,75%. Dla uproszczenia przyjmijmy ponadto współczynniki $a_1 = a_2 = 1$ i cenę wykonania opcji $K = 5$, gdyż stanowi to około 5% wartości spreadu (różnicy cen energii i gazu) przed zlogarytmowaniem w ostatnim dniu z danych (dokładnie wynosił on 99,675). Może to być interpretowane na przykład jako pewna marża doliczona do kosztów pracy elektrowni.

Podsumowując, przyjmujemy dynamikę cen gazu i energii dane, odpowiednio, stochastycznymi równaniami różniczkowymi:

$$dS_1(t) = S_1(t) [-3,63(\ln S_1(t) - 2,90)dt + 2,96dW_1(t)], \quad t \in [0, T], \quad (40)$$

a także

$$dS_2(t) = S_2(t) [-6,13(\ln S_2(t) - 5,03)dt + 9,91dW_2(t)], \quad t \in [0, T]. \quad (41)$$

Pozostałe parametry opcji to:

$$T = 0,06; \quad r = 0,06; \quad K = 5; \quad a_1 = a_2 = 1.$$

Funkcja wypłaty i cena tej opcji spread typu call dane są zatem wzorami:

$$h(T) = (1 \cdot S_2(T) - 1 \cdot S_1(T) - 5)^+$$

oraz

$$C(0) = e^{-0,06 \cdot T} \mathbb{E}((1 \cdot S_2(T) - 1 \cdot S_1(T) - 5)^+),$$

Podobnie, funkcja wypłaty i cena opcji spread typu put o takich samych parametrach dane są wzorami:

$$h(T) = (5 - 1 \cdot S_2(T) + 1 \cdot S_1(T))^+$$

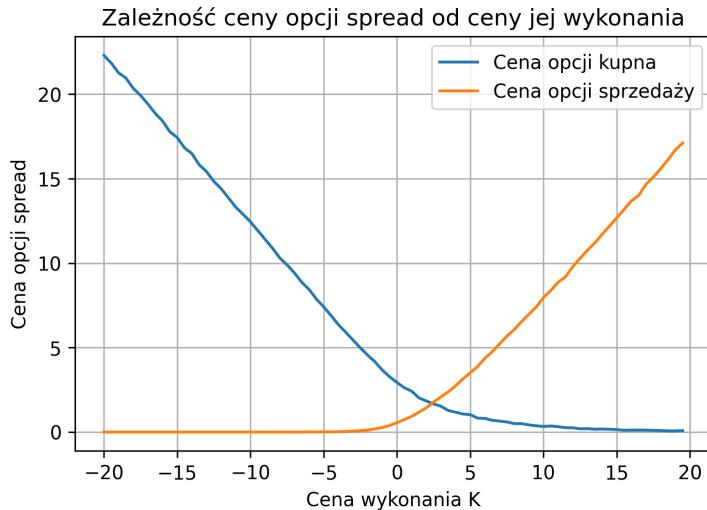
oraz

$$P(0) = e^{-0,06 \cdot T} \mathbb{E}((5 - 1 \cdot S_2(T) + 1 \cdot S_1(T))^+),$$

Ceny tych instrumentów, wyznaczone numerycznie w oparciu o 10^6 symulacji cen instrumentów bazowych w chwili zapadnięcia opcji, wynoszą

$$C(0) = 0,96\text{€}, \quad P(0) = 3,52\text{€}.$$

Rysunek 22 przedstawia ciekawą zależność ceny opcji spread (zarówno opcji kupna, jak i opcji sprzedaży) od ceny jej wykonania. Widoczny punkt przecięcia występuje dla $K \approx 2,5$.



Rysunek 22: Zależność cen opcji spread typu CALL i PUT od ceny wykonania

6 Podsumowanie

Niniejsza praca łączy charakter teoretyczny z aplikacyjnym. Już we wstępie zdefiniowany został pewien egzotyczny instrument finansowy zwany dalej opcją spread. Następnie w rozdziale 2 przedstawione zostały dane historyczne z rynku energii: ceny energii elektrycznej i gazu ziemnego, w oparciu o które konstruowany jest ten instrument. Badania rozkładów tych danych wykazały brak normalności i asymetrię. Po obliczeniu kilkunastu parametrów statystycznych dla badanych szeregów czasowych (dodatnia korelacja, średnia i odchylenie wyższe dla energii niż dla gazu) wskazane i omówione zostały takie ich cechy jak sezonowość czy powracanie do średniej.

W kolejnych rozdziałach (3 i 4) zdefiniowano wiele narzędzi matematycznych z zakresu teorii procesów stochastycznych, a także przywołano i udowodniono wiele ich własności. Zasadniczo cały rozdział 4 stanowi niejako przegląd najważniejszych faktów dotyczących procesu Ornsteina-Uhlenbecka, tak często wykorzystywanego w modelowaniu szeregów czasowych powracających do średniej. Udowodnione zostało istnienie i jedyność rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego, w oparciu o które definiuje się wspomniany proces. Część rozważań zawartych w rozdziale 4 dotyczy też rozkładu i momentów wartości tego procesu w czasie.

W rozdziale 5 przedstawione zostały trzy modele wyceny opcji, w tym dwa uwzględniające powracanie do średniej. Model proponowany przez Carmonę i Durrellmana w [9] okazał się być podobnym (lemat 5) do tak dobrze znanego modelu Blacka-Scholesa [8]. Ostatnia metoda to wycena numeryczna oparta o symulacje Monte Carlo.

Wszelkie narzędzia numeryczne wykorzystane przy tworzeniu tej pracy zdefiniowane zostały w języku Python. Najważniejsze fragmenty kodu zostały umieszczone w rozdziale 7.

7 Bibliografia

1. Ember, Wholesale day-ahead electricity price data for European countries, sourced from ENTSO-e; <https://ember-climate.org/data-catalogue/european-wholesale-electricity-price-data/>, 2024
2. Trading Economics, EU Natural Gas TTF, <https://tradingeconomics.com/commodity/eu-natural-gas>, 2024
3. Marek Capiński, Ekkehard Kopp, Janusz Traple, *Stochastic Calculus for Finance*, Cambridge University Press, 2012
4. Paweł Przybyłowicz, *Model Blacka-Scholesa*, wykład kursowy na Wydziale Matematyki Stosowanej AGH, Kraków, 2022/2023
5. Rüdiger U. Seydel, *Tools for Computational Finance*, Springer, 2009
6. Ross A. Maller, Gernot Müller, Alex Szimayer, *Ornstein-Uhlenbeck Processes and Extensions* w: T. Andersen, R. Davis, J.P. Kreiss, T. Mikosch, *Handbook of Financial Time Series*, 421-437, Springer, 2009
7. John C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson, 2022
8. Fischer Black, Myron Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 8, 637-654, 1973
9. Rene Carmona, Valdo Durrleman, *Pricing and hedging spread options*, SIAM Review, Vol. 45, No. 4, 627-685, 2003
10. Rene Carmona, Valdo Durrleman, *Pricing and Hedging Basket Options in a Log-Normal Model*, tech. report, Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University, Princeton, NJ, 2003
11. Paweł Przybyłowicz, *Monte Carlo methods and stochastic simulations: from integration to approximation of SDEs*, <https://arxiv.org/abs/2208.05531>, 2024

8 Aneks: kody źródłowe

Listing 1: Estymatory parametrów procesu Ornsteina-Uhlenbecka - z pliku Numerical Pricing.py.

```

import numpy as np

def Beta1(x,n):
    x_k=np.array(x[0:n-1])          # from x_0 to x_{n-2}
    x_k1=np.array(x[1:n])           # from x_1 to x_{n-1}
    S1=float(sum(x_k*x_k1))
    S2=float(sum(x_k1))
    S3=float(sum(x_k))
    S4=float(sum(x_k*x_k))
    numerator=S1/n-(S2*S3/(n*n))
    denominator=S4/n-np.power((S3/n),2)
    return float(numerator/denominator)

def Beta2(x,n):
    x_k=np.array(x[0:n-1])          # from x_0 to x_{n-2}
    x_k1=np.array(x[1:n])           # from x_1 to x_{n-1}
    beta1=Beta1(x,n)
    S=float(sum(x_k1-beta1*x_k))
    numerator=S/n
    denominator=1-beta1
    return float(numerator/denominator)

def Beta3(x,n):
    x_k=np.array(x[0:n-1])          # from x_0 to x_{n-2}
    x_k1=np.array(x[1:n])           # from x_1 to x_{n-1}
    beta1=Beta1(x,n)
    beta2=Beta2(x,n)
    y=x_k1-beta1*x_k-beta2*(1-beta1)
    S=sum(y*y)
    return float(S/n)

def lam_est(x,n,T):
    beta1=Beta1(x,n)
    h=T/n
    return float(-np.log(beta1)/h)

def mu_est(x,n):
    return Beta2(x,n)

def var_est(x,n,T):
    lam=lam_est(x,n,T)
    beta1=Beta1(x,n)
    beta3=Beta3(x,n)
    numerator=float(2*lam*beta3)
    denominator=float(1-beta1*beta1)
    return float(numerator/denominator)

```

Listing 2: Funkcja wyceny opcji spread metodą Monte-Carlo - z pliku Numerical Pricing.py.

```

import numpy as np

np.random.seed(69)

def SOPrice(optype,Nsym,r,T,K,rho,a1,a2,S1_0,S2_0,
           mu1,mu2,sig1,sig2, lam1, lam2):

    # optype=1 for call, optype=-1 for put
    # T=maturity, K=strike, rho=corr between Wieners

    mu1_infty=mu1-sig1*sig1/(2*lam1)    # |mu^| infty parameter from paper
    mu2_infty=mu2-sig2*sig2/(2*lam2)

    S1_T_part1=mu1_infty+np.exp(-lam1*T)*(np.log(S1_0)-mu1_infty)
    S2_T_part1=mu2_infty+np.exp(-lam2*T)*(np.log(S2_0)-mu2_infty)

    S1_T_part2=sig1*np.sqrt((1-np.exp(-2*lam1*T))/(2*lam1))    # |sigma_{1,T}|
    S2_T_part2=sig2*np.sqrt((1-np.exp(-2*lam2*T))/(2*lam2))    # |sigma_{2,T}|

    # computing |hat{\rho}} parameter from paper
    numerator=np.sqrt(lam1*lam2)*(1-np.exp(-T*(lam1+lam2)))
    denominator=(lam1+lam2)*np.sqrt((1-np.exp(-2*lam1*T))*(1-np.exp(-2*lam2*T)))
    rho_new=2*rho*numerатор/denominator      # |hat{\rho}} parameter from paper

    ran1=np.random.normal(0,1,Nsym)
    ran3=np.random.normal(0,1,Nsym)
    ran2=rho_new*ran1+np.sqrt(1-rho_new*rho_new)*ran3

    Payoff=[]

    # simulating scenarios to calculate expected payoff
    for i in range(0,Nsym):
        S1_T=np.exp(S1_T_part1+S1_T_part2*ran1[i])
        S2_T=np.exp(S2_T_part1+S2_T_part2*ran2[i])

        spread=float(a2*S2_T-a1*S1_T)
        payoff=max(optype*(spread-K),0)
        Payoff.append(payoff)

    av_payoff=np.mean(Payoff)    # expected payoff
    Price=av_payoff*np.exp(-r*T)

    return Price

```