ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной

Задача о нахождении мгновенной скорости. Пусть $y=s(t)$ – закон прямолинейного движения (точнее, уравнение закона движения) материальной точки в зависимости от времени t. Если предположить, что движение является неравномерным, то есть скорость точки зависит от момента времени, то средняя скорость движения (весь пройденный путь, деленный на все затраченной на его прохождение время) не будет характеризовать закон движения в каждый конкретный момент времени. Более информативной характеристикой будет величина скорости в любой заданный момент времени.

Зафиксируем некоторый момент времени t_0. К этому моменту пройден путь $y_0 = s(t_0)$. Рассмотрим далее другой момент времени $t = t_0 + \Delta t$. Ему соответствует путь $y(t) = s(t_0 + \Delta t)$. Тогда за промежуток времени Δt материальная точка пройдет путь $\Delta y = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Средняя скорость движения за этот промежуток времени Δt будет равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

Здесь зафиксирован момент времени t_0, а Δt изменяется. Следовательно, чем меньше этот промежуток Δt, тем точнее будем знать скорость в заданный момент времени t_0. Поэтому естественно принять за мгновенную скорость в точке t_0 следующий предел

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

Задача о линейной плотности стержня. Пусть дан тонкий прямоугольный неоднородный стержень длиной l. Требуется определить его плотность в фиксированной точке. Введем систему координат таким образом, чтобы стержень находился на оси Ox, а его начало совпадало с началом координат. Тогда каждой точке стержня соответствует определенная координата x. Обозначим через m массу стержня между точками O и x, тогда $m = f(x)$. Зафиксируем точку x_0 и рассмотрим приращенную точку $x_0 + \Delta x$. Отрезок стержня $[x_0, x_0 + \Delta x]$ имеет длину Δx и массу $\Delta m = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Отношение массы к длине $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ будет средней линейной плотностью на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$. За линейную плотность в точке x_0 примем

$$\rho = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

По содержанию задачи совершенно различные, но в результате приходим к пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, то есть к общей, не с физической, а с математической точки зрения, процедуре.

Пусть некоторая функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a,b), что для компактности будем записывать следующим образом: $f(x) \in C(a, b)$. Выберем точку $x_0\in(a,b)$ и придадим ей приращение Δx (Δx называется

приращением аргумента) такое, что приращенная точка $x=x_0+\Delta x\in(a,b)$. Это приращение аргумента вызовет ***приращение функции*** $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Определение. ***Производной функции*** $y=f(x)$ ***в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$ произвольным образом, если этот предел существует и конечен

$$f'(x_0)=\frac{dy(x_0)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Функция, имеющая производную в точке, называется ***дифференцируемой в этой точке***, а операция нахождения производной функции $y=f(x)$ называется ***дифференцированием***. Функция, имеющая конечную производную в каждой точке данного промежутка, называется ***дифференцируемой в*** этом ***промежутке***.

Если предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, то говорят, что функция $y=f(x)$ в точке x_0 производной не имеет. Если предел равен ∞, то говорят, что у функции в точке бесконечная производная.

Из определения следует, что любому $x\in(a,b)$ ставится в соответствие единственно вполне определенное число $f'(x)$, то есть производная является функцией аргумента x. Другими словами, функция $y=f(x)$ «порождает, производит» функцию $f'(x)$. Отсюда и название производная.

<u>*Схема нахождения производной функции по определению:*</u>

1. Придать фиксированному значению x_0 приращение Δx и вычислить значение функции $f(x_0+\Delta x)$.
2. Найти приращение функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.
3. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
4. Найти $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пример. Найти производную функции $y=x^2$ в текущей точке.
Решение. Действуя согласно приведенной схеме, имеем:

$$f(x)=x^2,\ f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2,$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=$$
$$=(x+\Delta x-x)(x+\Delta x+x)=\Delta x(2x+\Delta x),$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x+\Delta x,$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

То есть окончательно $(x^2)'=2x$.

Если рассмотреть односторонние пределы отношения приращения функции к приращению аргумента в точке x_0 при $\Delta x\to 0-0\stackrel{\text{def}}{=}-0$ и $\Delta x\to 0+0\stackrel{\text{def}}{=}+0$, то приходим к понятию ***левой (левосторонней) и правой (правосторонней) производных*** в точке x_0:

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\ f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Замечание. Из свойств пределов следует, что конечная производная в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда существуют односторонние (конечные) производные $f'(x_0-0)$ и $f'(x_0+0)$ и они равны между собой:

$$f'(x_0) = f'(x_0-0) = f'(x_0+0).$$

Пример. Найти производную функции $y=|x|$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Так как $\Delta y = |\Delta x|$, то

$$y'(x_0-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$y'(x_0+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Односторонние производны существуют, конечны, но не равны друг другу. Следовательно, функция $y=|x|$ в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой, но, в тоже время, она непрерывна в заданной точке.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Будет ли в этом случае функция непрерывна в этой точке. Вычислим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Из равенства нулю этого предела следует, что бесконечно малому приращению аргумента в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а это одно из определений непрерывности функции в точке. Доказали следующую теорему, связывающую такие важные понятия как дифференцируемость и непрерывность функции в точке.

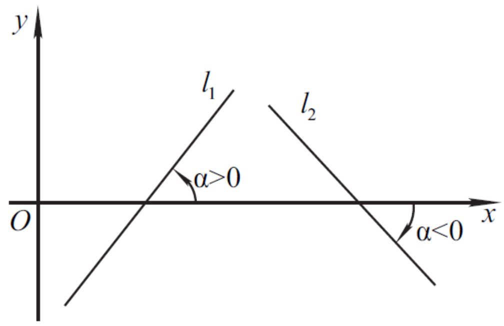
Теорема. Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в ней.

Замечание. Доказанная теорема является необходимым условием дифференцируемости функции в точке, то есть обратное к теореме утверждение неверно: если функция непрерывна в точке, то она может быть не дифференцируемой в этой точке. Рассмотренный выше пример функции $y=|x|$ в точке $x_0 = 0$ хорошо иллюстрирует эту мысль.

§2. Физический и геометрический смысл производной

Если обратится к примеру, приведенному в начале, то становится ясным ***механический*** (либо его еще называют физический) ***смысл производной функции в точке***: если функция $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ описывает закон прямолинейного неравномерного движения материальной точки, то $\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t_0})$ — скорость движения точки в момент времени t_0. В общем случае производную функции можно интерпретировать как «скорость» изменения функции.

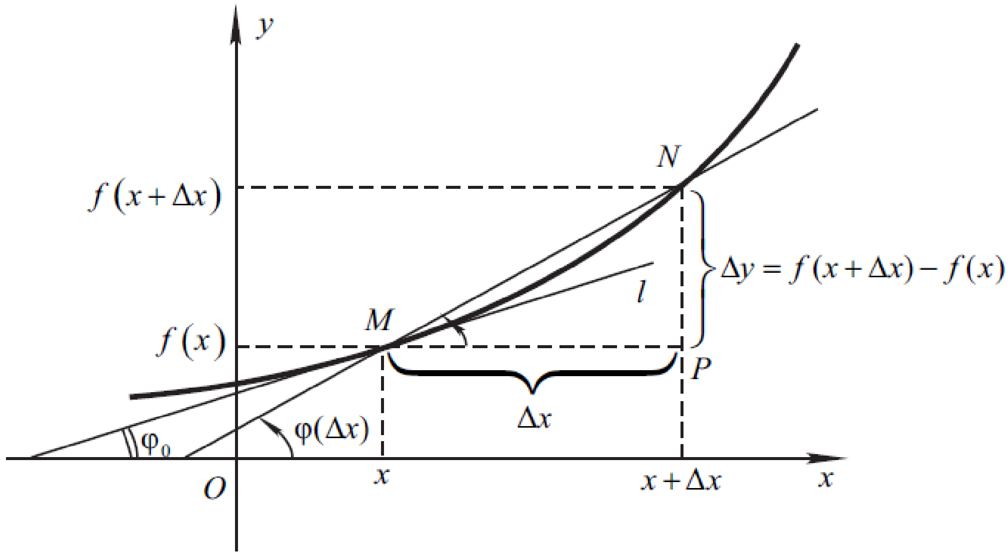
Рассмотрим, далее, геометрический смысл производной в точке.



Пусть задана прямоугольная система координат xOy и дана прямая l. Обозначим буквой α величину угла, на который нужно повернуть ось Ox, чтобы совместить ее положительное направление с одним из направлений на прямой l, причем $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Число $k = tg\alpha$ называется ***угловым коэффициентом*** прямой l в данной системе координат.

Рассмотрим график функции y=f(x), то есть множество точек $\{(x, f(x)), x \in X\}$, где X – область определения этой функции. Отметим на графике точки $M(x, f(x))$ и $N(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Прямая MN называется ***секущей*** по отношению к графику функции. Величину угла между секущей и осью Ox обозначим $\varphi(\Delta x)$. Устремим теперь Δx к нулю.



Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, то прямая l с угловым коэффициентом $k = tg\varphi_0$, проходящая через точку $M(x, f(x))$, называется ***касательной к графику функции*** y=f(x) в точке M. Или проще, касательная к графику функции y=f(x) в точке $M(x, f(x))$ есть предельное положение секущей MN при $\Delta x \to 0$, то есть при стремлении по графику функции точки N к точке M.

Пусть функция y=f(x) непрерывна в точке x и в этой точке существует производная $f'(x)$. Из треугольника MNP получаем:

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \varphi(\Delta x) = arctg\,\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользуемся тем, что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

и *arctgt* – непрерывная функция. Получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} arctg \frac{\Delta y}{\Delta x} = arctgf'(x).$$

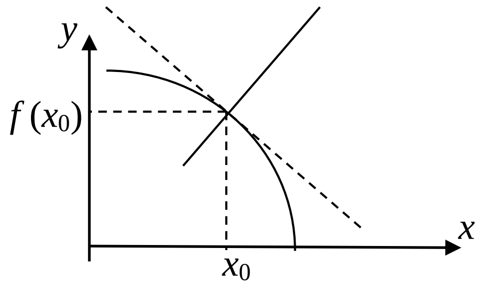
Отсюда следует, что существует касательная к графику функции в точке $M(x, f(x))$. При этом

$$\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = arctgf'(x)$$

и для углового коэффициента касательной получаем равенство $k = tg\varphi_0 = f'(x)$. Получили ***геометрический смысл производной***: производная от функции $y=f(x)$ в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Замечание. В случае бесконечной производной $\alpha = \pi/2$, уравнение касательной имеет вид: $x=x_0$, касательная к графику функции параллельна оси *Oy.*
Нормалью к графику функции в точке x_0 называется перпендикуляр к касательной в той же точке.



Если $\boldsymbol{f'(x_0) \neq 0}$**,** то уравнение нормали имеет вид:

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$

Замечание. Если $f'(x_0) = \mathbf{0}$, то касательная параллельна оси *Ox* и уравнение нормали имеет вид $x=x_0$. Если $f'(x_0) = \pm\infty$, то уравнение нормали имеет вид $y = f(x_0)$.

§3. Техника дифференцирования

§3.1. Основные правила дифференцирования

1. *Постоянную можно выносить за знак производной.*

Пусть $y=cu(x)$ – дифференцируемая функция, $c = const$. Тогда $\boldsymbol{\Delta y = c\Delta u}$ и

$$\boldsymbol{y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\Delta u}{\Delta x} = cu'(x)}$$

2. *Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных слагаемых.*

Доказательство проведем для случая производной суммы двух функций. Пусть u=u(x) и v=v(x) дифференцируемые функции независимой переменной x, а y=u(x) + v(x). Тогда $\Delta \boldsymbol{y} = \Delta \boldsymbol{u} + \Delta \boldsymbol{v}$ и

$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{u} + \Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta \boldsymbol{x}} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}).$$

3. *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первой из них на другую и производной второй на первую*: $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'$.

Пусть u=u(x) и v=v(x) дифференцируемые функции независимой переменной x, а $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{uv}$. Тогда $\Delta \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u} + \Delta \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{uv} = \Delta \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\Delta \boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{u}\Delta \boldsymbol{v}$ и производная произведения равна

$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta \boldsymbol{u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{x}} =$$

$$= \left| \lim_{\Delta x \to 0} \Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \text{так как } \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \text{ непрерывна} \right| = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'.$$

Это свойство можно распространить на произведение конечного числа дифференцируемых функций:

$$(\boldsymbol{u_1 u_2} \cdots \boldsymbol{u_n})' = \boldsymbol{u_1}'\boldsymbol{u_2} \cdots \boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{u_1}\boldsymbol{u_2}' \cdots \boldsymbol{u_n} + \cdots + \boldsymbol{u_1 u_2} \cdots \boldsymbol{u_n}'.$$

4. Пусть u=u(x) и v=v(x) дифференцируемые функции независимой переменной x. Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ в точках, где знаменатель не обращается в ноль. Тогда $\Delta \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{u}+\Delta \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}+\Delta \boldsymbol{v}} - \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}+\Delta \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}+\Delta \boldsymbol{v})}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}+\Delta \boldsymbol{v})} =$

$= \frac{\boldsymbol{v}(\Delta \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}(\Delta \boldsymbol{v})}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}+\Delta \boldsymbol{v})}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{v}\frac{\Delta u}{\Delta x} - \boldsymbol{u}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}+\Delta \boldsymbol{v})} = \frac{\boldsymbol{v} \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - \boldsymbol{u} \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{v} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta \boldsymbol{v}\right)} = \frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}$. Окончательно, для производной частного двух дифференцируемых функций верна формула:

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}.$$

Представим для наглядности полученные правила в виде таблицы.

Пусть $u = u\,(x)$ и $v = v\,(x)$ дифференцируемые функции независимой переменной x, $c = const$, тогда	
1. $(c)' = 0$; $(x)' = 1$.	2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
3. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$; $(cu)' = cu'$.	4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

§3.2. Производная сложной функции

Пусть $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\big) = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{u})(\boldsymbol{x})$ – сложная функция. Установим правило, позволяющее найти производную сложной функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\big)$, если известны производные составляющих ее функций $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ и $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Придадим фиксированному значению аргумента *x* приращение $\Delta\boldsymbol{x}$. Этому приращению соответствует приращение $\Delta\boldsymbol{u}$ функции $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Приращению $\Delta\boldsymbol{u}$, в свою очередь, соответствует приращение $\Delta\boldsymbol{y}$ функции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ в точке *x*: $\Delta\boldsymbol{x}\to\Delta\boldsymbol{u}\to\Delta\boldsymbol{y}$. Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{из дифференцируемости функции } u=u(x)\\ \text{следует ее непрерывность в этой точке}\\ \text{то есть при } \Delta x\to 0 \text{ имеем } \Delta u\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}}_{f'(u)}=f'(u)\cdot u'(x).$$

Таким образом, доказали *правило дифференцирования сложной функции*. ***Производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента по независимому аргументу:***

$$\left(f'\left(u(x)\right)\right)=f'_u\cdot u'(x).$$

Полученное правило можно распространить на сложную функцию, зависящую от нескольких промежуточных аргументов, то есть на композицию нескольких функций:

$$y'=(f\circ u\circ v)'(t)=f'_u\cdot u'_v\cdot v'(t),$$

где $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ дифференцируемые функции своих аргументов.

Например, для того чтобы продифференцировать функцию $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{ln\,arctg x^3}$, нужно найти производную функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{ln\,u}$, затем функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{arctg v}$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x^3}$, перемножить их и выразить всё через независимый аргумент *x*. По определению производной вычисления провести затруднительно, так как даже разность арктангенсов тяжело найти. Но – арктангенс является обратной к функции тангенс, а это уже проще. Правда при условии, что удастся восстановить связь между производной функции и производной функции, обратной к исходной. Так что пример пока не поддается. Необходимы дополнительные формулы. Их выводом и займемся.

§3.3. Производная обратной функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a,b]$ и имеет ненулевую производную $y'=f'(x)\neq 0$ для $\forall\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. Пусть далее $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Тогда существует обратная к $y=f(x)$ функция $x=\varphi(y)$, которая непрерывна и монотонна на $[\alpha,\beta]$. Рассмотрим эту функцию $x=\varphi(y)$ и придадим некоторому фиксированному значению аргумента *y* приращение Δy. Этому приращению соответствует приращение обратной функции Δx. По определению производной

$$x'=\varphi'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=$$

$$= \left| \text{из непрерывности функции } \boldsymbol{y = f(x)} \ \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta \boldsymbol{y} = \mathbf{0} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{1}}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\mathbf{1}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\mathbf{1}}{f'(x)}.$$

Таким образом доказали следующую теорему.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$ и имеет во всех точках интервала(a,b) ненулевую производную $y'=f'(x)$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ дифференцируема во всех точках интервала $(f(a), f(b))$ и ее производная равна

$$x'_y = \frac{\mathbf{1}}{y'_x}.$$

Пример. Найти производную функции $y=arcsinx$, если известно, что $(siny)'=cosy$.

Решение

$$(\boldsymbol{arcsinx})' = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{siny})'} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cosy}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{sin^2y}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x^2}}}.$$

§3.4. Таблица производных

Естественно, что производные по определению никто не вычисляет. Используя правила дифференцирования, производную сложной и обратной функции, а также таблицу дифференцирования, которая была получена по определению для некоторых функций, можно найти производные более сложных функций. Более того, производная любой элементарной функции является элементарной функцией. Из всех перечисленных объектов не хватает таблицы производных. Приведем ее для сложной функции, то есть с учетом промежуточного (их может быть несколько) аргумента $u=u(x)$.

Таблица производных

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$, $\alpha = const,\ u = u(x)$	
2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$.	9. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}u'$.
3. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}(\ln a)u'$.	10. $\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$.
4. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}u'$.	11. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}u'$.
5. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.	12. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.
6. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.	13. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.
7. $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$.	

8. $(\mathrm{ctg}\,u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$.	14. $(\mathrm{arctg}\,u)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$. 15. $(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$

Имея на руках правила дифференцирования сложной функции и таблицу производных, вернемся к примеру из §3.2. Найдем производную функции $y = ln\,arctgx^3$:

$$(ln\,arctgx^3)' = \frac{1}{arctgx^3}\cdot(arctgx^3)' = \frac{1}{arctgx^3}\cdot\frac{1}{1+x^6}\cdot(x^3)' =$$

$$= \frac{1}{arctgx^3}\cdot\frac{1}{1+x^6}\cdot 3x^2.$$

§3.4. Логарифмическое дифференцирование

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a,b) и для $\forall x \in (a,b)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. Прологарифмируем эту функцию $\ln y = \ln f(x)$, а затем найдем производную этого логарифма $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ как производную сложной функции. Из полученного соотношения следует, что $y' = y(\ln y)'$. Производную от логарифма функции называют ***логарифмической производной***. Логарифмическое дифференцирование целесообразно применять для дифференцирования произведения большого числа функций (особенно степенных с дробными показателями) $y = u_1 u_2 \cdots u_n$ и степенно-показательной функции $y = [u(x)]^{v(x)}$, $u(x) > 0$.

Логарифмическое дифференцирование для произведения большого числа функций проиллюстрируем на примере.

Пример. Найти производную функции $y = \frac{\sqrt{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x+1)^4}}{\sqrt[5]{(x+3)^{16}}}$.

Прологарифмируем функцию: $\ln y = \frac{3}{2}\ln(x-2) + \frac{4}{3}\ln(x+1) - \frac{16}{3}\ln(x+3)$.

Продифференцируем: $\frac{y'}{y} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x+3}$

Выразим производную: $y' = \frac{\sqrt{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x+1)^4}}{\sqrt[5]{(x+3)^{16}}}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x+3}\right)$.

Можно, далее, раскрыть скобки и привести подобные, но это уже техническая работа. При дифференцировании этой функции как производной дроби, трудоемкость возрастает, то есть логарифмическое дифференцирование облегчает техническую работу в данном примере.

Схема логарифмического дифференцирования для степенно-показательной функции $y = [u(x)]^{v(x)}$.

1. Логарифмируем функцию: $\ln y = v(x)\ln u(x)$.
2. Дифференцируем:

$$(\ln y)' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow \frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

3. Выражаем y' из полученного соотношения:

$$y' = [u(x)]^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Замечание. Как правило, запоминать эту формулу не стоит. Ее проще вывести непосредственно для каждого примера, чем запоминать правило, которое приводится в некоторых учебниках: *производная степенно-показательной функции равна сумме производных этой функции, если ее рассматривать сначала как как показательную, а затем как степенную*. Это правило получается после раскрытия скобок в пункте 3 схемы.

Пример. Найти производную функции $y=x^x$.

Решение. Действуем непосредственно по схеме:

$$y=x^x \Longrightarrow \ln y = x\ln x \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x \Longrightarrow y' = y(1+\ln x) \Longrightarrow$$
$$y' = x^x(1+\ln x) \Longrightarrow (x^x)' = x^x + x^x\ln x.$$

§4. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x) \in C^1(a,b)$ – непрерывно дифференцируемая на (a,b) функция, то есть дифференцируемая на (a,b) и, кроме того, ее производная является непрерывной функцией. Производная от производной функции $y = f(x)$ называется ***производной второго порядка*** или ***второй производной функции*** (обозначается $f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$):

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f'(x)\right)'.$$

Если $y = s(t)$ – закон движения материальной точки, $\left(s(t)\right)' = v(t)$ – скорость материальной точки в заданный момент времени t, значит, вторая производная $\left(s(t)\right)'' = v'(t)$ – скорость изменения скорости, то есть ускорение. Фактически, это механический смысл второй производной.

Аналогичным образом вводятся производные третьего, четвертого и так далее порядков. ***Производной n-го порядка*** от функции $y = f(x)$ называется производная от производной (n-1) порядка: $f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Пример. Найти третью производную функции $y = xe^x$.

Решение. $y' = \left(xe^x\right)' = \left(x\right)'e^x + x\left(e^x\right)' = e^x + xe^x = e^x\left(x+1\right),$

$$y'' = \left(e^x\left(x+1\right)\right)' = \left(e^x\right)'\left(x+1\right) + e^x\left(x+1\right)' = e^x\left(x+1\right) + e^x = e^x\left(x+2\right),$$

$$y''' = \left(e^x\left(x+2\right)\right)' = e^x\left(x+2\right) + e^x = e^x\left(x+3\right)\cdot$$

§5. Производные функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}, t \in T.$$

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы для $\forall t \in T$ и производная $\varphi'(t) \neq 0$. Кроме того, предположим, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(\,x)$, которая также является дифференцируемой. Тогда функцию, заданную параметрически, можно рассматривать как сложную $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(\,x))$, считая $t = \varphi^{-1}(\,x)$ промежуточным аргументом. Продифференцируем эту функцию по правилам дифференцирования сложной функции: $y'(x) = \psi'(t) \cdot t'(x)$. Но $t = \varphi^{-1}(\,x)$, поэтому, по правилу дифференцирования обратной функции, имеем $t'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$. Подставляя это в предыдущее равенство, приходим к формуле $y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Задача ставилась отыскать производную $y'(x)$ (левая часть формулы), а получена зависимость от переменной t (правая часть формулы), поэтому необходимо указать уравнение связи переменных x и t: $x = \varphi(t)$. Другими словами, производная функции, заданной параметрически, будет также функция, заданная параметрически:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Для простоты функцию, заданную параметрически, записывают в виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ тогда ее производная имеет вид $\begin{cases} y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \\ x = x(t). \end{cases}$

По аналогии можно построить формулы для нахождения второй, третьей и так далее, производных функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{\left(y'(x)\right)'_t}{x'(t)}, \\ x = x(t), \end{cases} \begin{cases} y'''(x) = \dfrac{\left(y''(x)\right)'_t}{x'(t)}, \\ x = x(t), \end{cases} \ldots$$

Следует обратить внимание, что в знаменателе дроби в формуле производных всех порядков стоит первая производная функции $x = x(t)$.

Пример. Найти производные y'_x и y''_{xx} функции $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Решение. Найдем $x'_t = \left(a\cos^3 t\right)' = 3a\cos^2 t\left(\cos t\right)' = -3a\cos^2 t\sin t$,

$$y'_t = \left(a\sin^3 t\right)' = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Тогда

$$y'_x = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t.\ \left(y'_x\right)'_t = \left(-\operatorname{tg} t\right)' = \frac{-1}{\cos^2 t},$$

$$y''_{xx} = \frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

К полученным формулам производных необходимо добавить уравнение связи $x = acos^3 t$.

§6. Производные функций, заданных неявно

Пусть уравнение $F(x,y)=0$ задает y как неявную функцию от переменной x, то есть $y=y(x)$. Предположим, далее, что $y=y(x)$ дифференцируема. Тогда $F(x,y(x))=0$ – верное тождество по аргументу x для $\forall x\in X$. Продифференцируем это тождество по переменной x, полагая, что $y=y(x)$. Получим новое уравнение $\Phi(x,y,y')=0$, содержащее x,y,y'. Если удастся его разрешить относительно y', что, вообще говоря, возможно далеко не всегда, то найдем производную неявной функции $y=y(x)$.

Схема нахождения производной y'_x неявной функции $F(x;y)=0$

Этапы	Пример для функции $x^4y^2-5x+3y^3=7$
1. Продифференцировать обе части равенства $F(x;y)=0$ по переменной x, считая, что $y=y(x)$	$\left(x^4y^2\right)'_x-5(x)'_x+3\left(y^3\right)'_x=(7)'$ $\left(x^4\right)'y^2+x^4\left(y^2\right)'_x-5+3\cdot 3y^2y'_x=0$ $4x^3y^2+x^4\cdot 2yy'_x-5+9y^2y'_x=0$
2. Из получившегося в результате дифференцирования равенства выразить y'_x через x и y	$4x^3y^2+2x^4yy'_x-5+9y^2y'_x=0$ $y'_x\left(2x^4y+9y^2\right)=5-4x^3y^2$ $y'_x=\dfrac{5-4x^3y^2}{2x^4y+9y^2}$

Если удалось выразить первую производную неявной функции в явном виде (то есть имеем функцию $y'=\varphi(x,y)$, зависящую явно от x и $y(x)$), то продифференцируем найденную первую производную и получим функцию, зависящую от переменных x, y, y'. Так как выражение y' через x и y известно, то подставим его в равенство для второй производной y'' и получим $y''=\psi(x,y)$. Аналогично для третьей, четвертой и так далее производных.

Схема нахождения производной y''_{xx} неявной функции $F(x;y)=0$

Этапы	Пример для функции $4x^2-y^2=4$
1. Найти y'_x	$8x-2yy'_x=0$ $y'_x=\dfrac{8x}{2y}=4\dfrac{x}{y}$
2. Найти $y''_{xx}=(y'_x)'_x$, считая, что $y=y(x)$	$y''_{xx}=4\dfrac{y-xy'}{y^2}$

3. В полученное выражение подставить уже найденное значение y'_x, тем самым, выразив y''_{xx} через y и x	$y''_x = 4\dfrac{y - x\left(4\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = 4\dfrac{y - \dfrac{4x^2}{y}}{y^2} =$ $= 4\dfrac{y^2 - 4x^2}{y^3} = \left[y^2 - 4x^2 = -4\right] = -\dfrac{16}{y^3}.$ Воспользовались условием задачи.

Если после первого дифференцирования не удается выразить в явном виде y' через x и $y(x)$, то полученное неявное выражение $\Phi(x, y, y') = 0$ дифференцируем, считая функцию y=y(x). Аналогично поступаем с производными более высокого порядка.

§7. Понятие дифференцируемости функции. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.
Определение. ***Функция*** $y = f(x)$ ***называется дифференцируемой в точке*** x_0, если её приращение в этой точке $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.
Дифференцируемость в точке означает, что с точностью до бесконечно малой более высокого порядка малости, чем приращение аргумента Δx, приращение функции представимо в виде линейной функции от Δx.

Теорема. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала конечная производная функции.

Доказательство: $\Longrightarrow$) (необходимость). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда, по определению, ее приращение представимо в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Разделим это равенство на приращение аргумента Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}_{f'(x_0)} = A + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)}_{=0} \Longrightarrow f'(x_0) = A.$$

$\Longleftarrow$) (достаточность). Пусть существует конечная производная функции $y = f(x)$ в точке x_0: $f'(x_0) = A$. По определению производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.
По теореме о необходимом и достаточном условии существования конечного предела функции (*справочно*: Для того, чтобы при $x \to a$ существовал конечный предел функции $y = f(x)$ равный b необходимо и достаточно, чтобы в

некоторой проколотой окрестности точки a выполнялось равенство $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x\to a$), имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$. Значение производной в точке – это некоторое число A, которое не зависит от Δx. Следовательно,

$$\Delta y = A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Что и требовалось доказать.

Эта теорема позволяет отождествлять понятие дифференцируемости функции в точке и существование конечной производной функции в этой точке. Из этой теоремы также следует, что если функция дифференцируема в точке, то ее приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Отсюда, если $f'(x_0)\neq 0$, то

$$\frac{\Delta y}{f'(x_0)\cdot\Delta x}=1+\frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x_0)}$$

и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\cdot\Delta x}=1.$$

То есть, при $\Delta x\to 0$ приращение функции Δy и выражение $f'(x_0)\cdot\Delta x$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями: $\Delta f(x_0)\sim f'(x_0)\cdot\Delta x$ при $\Delta x\to 0$, то есть приближенно можно считать при достаточно малых Δx, что $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Определение. ***Дифференциалом функции*** $y=f(x)$ ***в точке*** x_0 ***соответствующим приращению аргумента*** Δx, называют главную часть приращения Δy этой функции, линейную относительно приращения аргумента Δx:

$$dy=df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Если $f'(x_0)=0$, то дифференциал определяют по той же формуле, считая $df(x_0)=0$.

Если функция $y=x$, то ее производная $y'=1$ и, следовательно, из дифференцируемости этой функции, имеем $\Delta x=1\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, что влечет за собой выполнение равенства $dx=\Delta x$, то есть ***дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой***: $df(x_0)=f'(x_0)\cdot dx$. Что в свою очередь объясняет смысл обозначения производной $f'(x_0)=\frac{dy}{dx}$ как отношение дифференциалов.

Так как дифференциал dy функции $y=f(x)$ равен производной этой функции, умноженной на дифференциал аргумента dx, то вычисления значения дифференциала сводится к вычислению производных. Поэтому, ***правила вычисления дифференциалов аналогичны правилам вычисления производных***. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемые функции, а $C=const$:

1. $d(Cu(x))=Cdu(x)$;

2. $d(u(x)\pm v(x))=du\pm dv$;

3. $d(uv)=udv+vdu$;

4. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

Пример. Найти дифференциал функции $y=5^{tgx}\sqrt{x}$.

Решение. Воспользуемся формулой $dy=y'_x dx$.

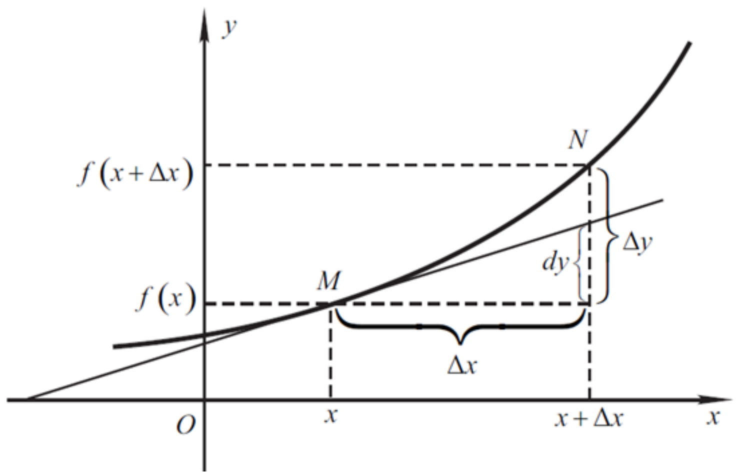
$$dy=\left(5^{\operatorname{tg}x}\sqrt{x}\right)'dx=\left(\left(5^{\operatorname{tg}x}\right)'\sqrt{x}+5^{\operatorname{tg}x}\left(\sqrt{x}\right)'\right)dx=$$

$$=\left(5^{\operatorname{tg}x}\ln 5\left(\operatorname{tg}x\right)'\sqrt{x}+5^{\operatorname{tg}x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\left(5^{\operatorname{tg}x}\ln 5\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}+\frac{5^{\operatorname{tg}x}}{2\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=5^{\operatorname{tg}x}\frac{2x\ln 5+\cos^2 x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}dx.$$

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в точке $(x,f(x))$, когда аргумент получает приращение Δx, то есть при переходе к приращенной точке с координатами $(\boldsymbol{x+\Delta x}, \boldsymbol{f(x+\Delta x)})$.



Механический смысл дифференциала

Если $s=s(t)$ – закон прямолинейного движения точки, где t – время, $t\in[t_0,t_0+\Delta t]$, то $ds(t)=s'(t)dt=v(t)dt$, где $v(t)$ – мгновенная скорость в момент времени t. Следовательно, замена приращения $\Delta s(t_0)=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$ дифференциалом $ds(t_0)=s'(t_0)(t-t_0)$ означает замену неравномерного движения равномерным (на бесконечно малом промежутке $[t_0,t_0+\Delta t]$) с постоянной скоростью $v(t_0)=s'(t_0)$.

§8. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

С помощью формулы $\Delta y=dy+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ можно приближенно вычислять значения функции $f(x+\Delta x)$ при малых Δx, если известны значения производной $f'(x)$ и функции $f(x)$. В самом деле, из равенства

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

следует

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

откуда получаем приближенное равенство

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

для достаточно малых значений приращений аргумента Δx.

Пример. Вычислить приближённо $\cos 29^0$.

Решение. Перейдём к радианной мере угла:

$$\cos 29^0=\cos\frac{29^0\cdot\pi}{180^0}=\cos\left(\frac{(30-1)\pi}{180}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right).$$

Рассмотрим функцию $y=\cos x$. Согласно формуле:

$$\cos(x_0+\Delta x)\approx\cos x_0+(\cos x)'\Big|_{x_0}\cdot\Delta x,\text{ где } x_0=\frac{\pi}{6},\Delta x=-\frac{\pi}{180}.$$

Следовательно:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx\cos\frac{\pi}{6}+(\cos x)'\Big|_{\frac{\pi}{6}}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{180}\approx$$

$$\approx 1,73\cdot 0,5+\frac{0,5\cdot 3,14}{180}\approx 0,87.$$

По вышеприведенной формуле функция для всех значений аргумента из некоторой окрестности точки *x* приближенно заменяется линейной функцией, то есть функция ***линеаризуется.*** Геометрически это означает, что график функции $y=f(x)$ для всех значений аргумента из этой окрестности заменяется отрезком касательной к кривой в этой точке. Это приближенная замена, но часто возможно оценить абсолютную или относительную погрешность вычисления.

Пример. Найти приращение и дифференциал функции $y=2x-x^2$ в точке $x=3$ при $\Delta x=0,1$. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции дифференциалом.

Решение.

$$y(3)=6-9=-3, y(3,1)=6,2-9,61=-3,41\Rightarrow\Delta y=-3,41-(-3)=-0,41;$$

$$dy=\left(2x-x^2\right)'dx=(2-2x)dx=2(1-x)dx$$

в точке $x=3$ при $\Delta x=0,1$ имеем:

$$dy=2(1-3)0,1=-0,4.$$

Абсолютная погрешность

$$\varepsilon_{\text{абс.}}=|dy-\Delta y|=|-0,4+0,41|=0,01.$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon_{\text{отн.}} = \left|\frac{dy-\Delta y}{\Delta y}\right| = \left|\frac{-0,4+0,41}{-0,41}\right| = \frac{0,01}{0,41} \approx 0,024 = 2,4\%.$$

§9. Дифференциал сложной функции

Дифференциал функции $y = f(x)$, где x – независимая переменная, выражается формулой $dy = f'(x)dx$. Здесь $dx = \Delta x$ является приращением независимой переменной x. Дифференциал функции dy называется также ***первым дифференциалом функции.***

Рассмотрим далее случай, когда x будет не независимой переменной, а дифференцируемой функцией некоторой независимой переменной t: $x = \varphi(t)$. Тогда $y = f\big(\varphi(t)\big)$ – сложная функция независимой переменной t. Согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$dy = f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx=\varphi'(t)dt} = f'(x)dx.$$

Или окончательно получаем, что формула записи первого дифференциала и в случае промежуточного аргумента сохранила свой вид. В этом и заключается ***свойство инвариантности формы первого дифференциала***: *дифференциал функции всегда равен произведению производной функции и дифференциала аргумента и не зависит от того, является ли переменная, по которой взята производная, независимой или же промежуточным аргументом.* Отметим, что инвариантной (не изменяющейся) является только форма (вид) первого дифференциала, а суть меняется, так как для промежуточного аргумента $dx = \varphi'(t)dt \neq \Delta x$. Из этого свойства следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

то есть производная функции равна отношению дифференциалов функции и аргумента и в том случае, когда аргумент x – не независимая переменная, а функция некоторой независимой переменной.

§10. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ***дифференциалом второго порядка***. Дифференциалом n-го порядка называется дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка. Получим расчетные формулы для дифференциалов высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках некоторого интервала. Если x – независимая переменная, то первый дифференциал функции выражался формулой

$$dy = f'(x)dx.$$

Если $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция независимой переменной t, то

$$dy = f'(x)dx = f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

В каждом из этих случаев dy является функцией двух переменных – независимой переменной (x или t) и ее дифференциала (dx или dt), который входит в виде сомножителя. При введении второго дифференциала будем рассматривать dy как функцию только независимой переменной, то есть дифференциал независимой переменной будем рассматривать как постоянный множитель в выражении для dy.

При этом условии определим второй дифференциал d^2y функции $y = f(x)$ как дифференциал от первого дифференциала

$$d^2y = d(dy))$$

и, кроме того, при вычислении дифференциала от dy приращение независимой переменной будем снова брать dx или dt.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть x является независимой переменной, тогда $dy = f'(x)dx$, где $dx = \Delta x$ – приращение независимой переменной. Далее, согласно определению,

$$d^2y = d(dy)) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d\big(f'(x)\big) = dx \cdot (f''(x)dx) = \\ = f''(x)(dx)^2.$$

Окончательно, в случае независимой переменной x получили формулу

$$d^2y = f''(x)dx^2 \Rightarrow f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}.$$

Аналогичные формулы получаются и для дифференциалов более высокого порядка

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}.$$

2. Пусть x – функция некоторой независимой переменной t: $x = \varphi(t)$. В этом случае $dy = f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$ и далее получаем

$$d^2y = d(dy)) = dt \cdot d\left(f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\right) = dt \cdot \left(f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\right)' dt = \\ = f''\big(\varphi(t)\big)\underbrace{(\varphi'(t)dt)^2}_{(dx)^2} + f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \underbrace{\varphi''(t)dt^2}_{d^2x} = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Итак,

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким образом, форма второго дифференциала не инварианта. Это же относится и к дифференциалам более высокого порядка.

§10. Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма. Если функция определена в некоторой окрестности точки ξ, принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение и имеет в ней производную, то эта производная равна нулю.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки ξ и принимает в этой точке наибольшее значение. Тогда для любого x из этой окрестности $f(x) \leq (\xi)$. Соответственно,

если $x < \xi$, то $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$,

если $x > \xi$, то $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$.

Перейдя к пределу в данных неравенствах при $x \to \xi$, получим

$$\begin{cases} f'(\xi) \geq 0 \\ f'(\xi) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(\xi) = 0\,,$$

что и требовалось доказать. Для наименьшего значения доказательство аналогично.

Геометрический смысл теоремы Ферма: в точке наибольшего и наименьшего значения, достигаемого внутри некоторого промежутка, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. она непрерывна на $[a,b]$;
2. дифференцируема на интервале (a,b);
3. её значения на конце отрезка равны: $f(a)=f(b)$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = 0$.

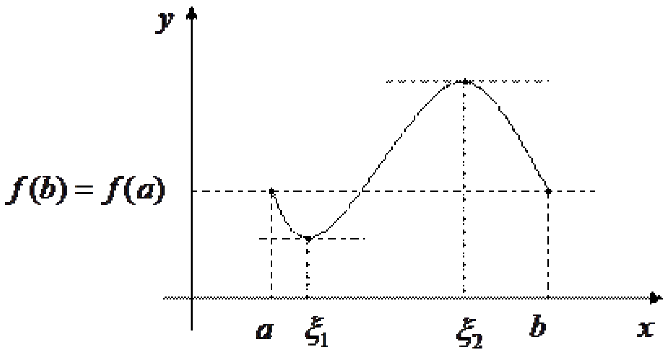
Доказательство. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на нем она принимает свое наибольшее M и наименьшее m значения (следует из свойств непрерывных на отрезке функций). Возможны следующие варианты:
a) $M=m \Leftrightarrow f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0$ для $\forall x \in (a, b)$.
b) $M>m$. Тогда из равенства $f(a)=f(b)$ получаем, что хотя бы одно из двух значений M или m функция $y = f(x)$ принимает во внутренней точке $\xi \in (a, b)$. Пусть $f(\xi) = m$. Из определения минимума функции на отрезке $[a,b]$ имеем, что $f(\xi) \geq f(x)$ для $\forall x \in [a, b]$. Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции в точке является существование конечных односторонних производных в этой точке и равенство их между собой: $f'(\xi - 0) = f'(\xi + 0)$. По определению односторонних производных и с учетом выполнения неравенства $f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \geq 0$ для $\forall \xi \in (a, b)$:

$f'(\xi - 0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \leq 0$, так как Δx стремится к нулю, оставаясь меньше, чем ноль;

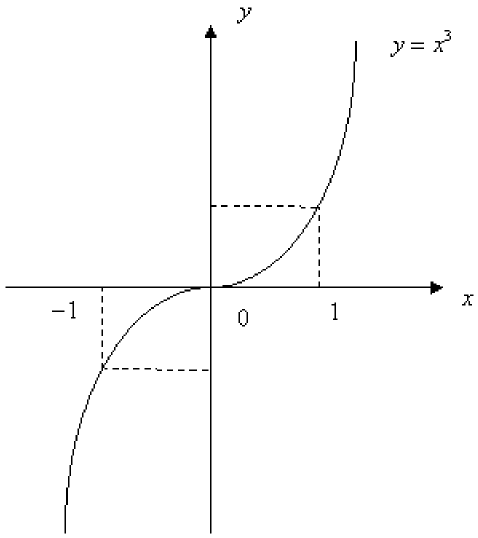
$f'(\xi + 0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \geq 0$, так как Δx стремится к нулю, оставаясь больше, чем ноль.

Равенство односторонних производных возможно только при $f'(\xi) = 0$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл теоремы Ролля. Если непрерывная на отрезке $[a,b]$ дифференцируемая в интервале (a,b) функция $y = f(x)$ принимает на концах этого отрезка равные значения, то на графике функции найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси *Ox*.



Замечание. Условия теоремы Ролля являются достаточными, но не необходимыми. Например, функция $f(x) = x^3$ непрерывна на отрезке [–1,1], дифференцируема на интервале (–1,1) и $f(-1) \neq f(1)$, но $f'(0) = 0$.



Касательная при x=0 совпадает с осью абсцисс.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Составим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = (b-a)f(x) - \big(f(b) - f(a)\big)x,$$

которая удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому существует $\xi \in (a,b)$, такая что $\varphi'(\xi) = 0$, то есть

$$\varphi'(x) = (b-a)f'(x) - \big(f(b) - f(a)\big) \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Таким образом доказали следующую теорему.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a,b)$ такая что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

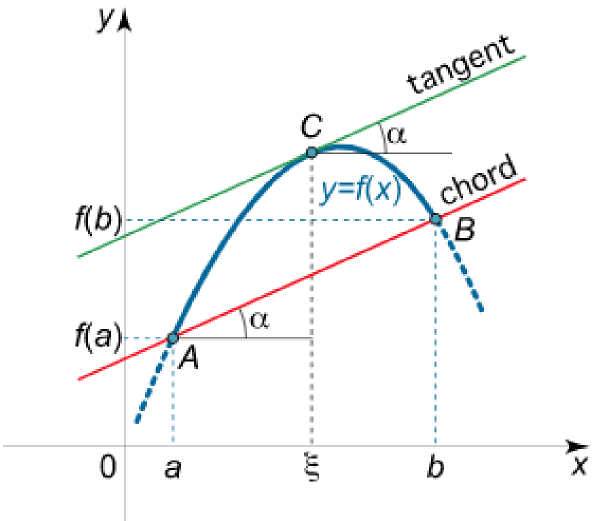
Если в формуле Лагранжа положить $f(a)$=$f(b)$, то получим формулировку теоремы Ролля, то есть теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля.

Следствие. Если производная $f'(x)$ равна нулю во всех точках отрезка $[a,b]$, то функция $f(x)$ является постоянной на этом отрезке.

Теорему Лагранжа часто называют ***теоремой о конечных приращениях***, а формулу из нее записывают в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=f'(\xi),\xi\in(a,b).$$

Теорема Лагранжа имеет простой *геометрический смысл*. Хорда, проходящая через точки графика, соответствующие концам отрезка a и b, имеет угловой коэффициент, равный $k=tg\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$. Тогда внутри отрезка $[a,b]$ существует точка ξ, в которой касательная к графику функции параллельна хорде.



Теорема Лагранжа также имеет наглядную *физическую интерпретацию*. Если считать, что $f(t)$ описывает координату тела при перемещении вдоль прямой в зависимости от времени t, то отношение $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$ представляет собой среднюю скорость тела в промежутке времени b–a. Поскольку $f'(t)$ – это мгновенная скорость, то данная теорема означает, что существует момент времени ξ, в который мгновенная скорость равна средней скорости.

Если в формуле теоремы Лагранжа положить $a=x$, $b=x+\Delta x$ то она принимает вид

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\cdot\Delta x,\xi\in(x,x+\Delta x).$$

Записанную в таком виде её называют ***формулой конечных приращений,*** которая дает точное выражение приращения функции через приращение аргумента. Однако, при точных вычислениях формула неудобна, так как производная вычисляется в некоторой средней точке $\xi\in(x,x+\Delta x)$, конструктивного алгоритма отыскания которой не существует и отыскать ее не всегда возможно, поэтому на практике используют приближенное равенство $\Delta y\approx dy$.

Обобщением теоремы Лагранжа является теорема Коши.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) непрерывны на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируемы в интервале (a,b), причем $g'(x)\neq 0$ для любого $x\in(a,b)$.
Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi\in(a,b)$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Примем эту теорему без доказательства. Легко видеть, что если в качестве функции $g(x)=x$, то приходим к формулировке теоремы Лагранжа.

Так как эти теоремы (Ролля, Лагранжа и Коши) описывают поведение функции в некоторой точке внутри промежутка, то их называют ***теоремами о среднем.***

§11. Правило Лопиталя

Теорема (правило Лопиталя). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. определены и дифференцируемы на интервале (a,b), за исключением может быть точки a, причем $g'(x)\neq 0$ для $\forall x\in(a,b)$;
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (либо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$);
3. существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует также предел отношения функций, и он равен пределу отношения производных

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство для случая $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x=a$ положив $f(x) = g(x) =0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ становятся непрерывными в этой точке. Рассмотрим отрезок $[a,x]$: $a<x<b$. На этом отрезке функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, а на интервале (a, x) дифференцируемы, причем $g'(x)\neq 0$. По теореме Коши имеем, что

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\xi\in(a,x).$$

Так как $f(x) = g(x) =0 \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Но при $x\to a\Longrightarrow\xi\to a$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Что и требовалось доказать. Несложно доказать, что правило справедливо и в случае, когда $x\to\infty$.

Замечание 1. Если предел отношения производных не существует, то из этого не следует, что не существует предела отношения функций.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx+x}{x}$.

Решение. Предел отношения производных $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{cosx+1}{1}$ не существует. Но сам предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx+x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{sinx}{x}+1\right)=1$ ($\frac{1}{x}sinx\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ как произведение бесконечно малой на ограниченную функцию).

Замечание 2. Смысл правила Лопиталя заключается в том, оно позволяет свести вычисления предела отношения функций в случае неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ к пределу отношения производных, который часто вычисляется проще.

Замечание 3. Если производные удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя и существует предел отношения вторых производных, то применив правило Лопиталя дважды, получим предел отношения функций.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^2-3x+7}$.

Решение. Неопределённость $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2-3x+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(x^2-3x+7\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2e^{2x}\right)'}{\left(2x-3\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=+\infty.$$

Правило Лопиталя можно применять до тех пор, пока не будет получена дробь, для которой условия теоремы уже не выполняются.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{6}=\frac{1}{3}$$

Неопределённости вида $[\infty\cdot0]$, $[\infty-\infty]$, $\left[1^\infty\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[0^0\right]$ приводятся с помощью тождественных преобразований к неопределённостям $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Решение. В этом пределе неопределённость $[\infty-\infty]$. Воспользуемся тождеством $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ и приведём выражение к общему знаменателю

$$\lim_{x\to0}\left(e^x\operatorname{ctg}x-\frac{1}{\sin x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x\cos x-1}{\sin x}.$$

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cos x-1\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{\cos x}=\left[\frac{1-0}{1}\right]=1.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to +0}\left(x^3\ln^2 x\right)$.

Решение. В данном пределе неопределённость вида $\left[0\cdot\infty\right]$. Преобразуем её в неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x\to +0}x^3\ln^2 x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to +0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x^3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{\frac{-3}{x^4}}=\lim_{x\to +0}\frac{2\ln x}{\frac{-3}{x^3}}.$$ Опять

получили неопределённость $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Применяем правило Лопиталя ещё раз:

$$\lim_{x\to +0}\frac{2\ln x}{\frac{-3}{x^3}}=\frac{-2}{3}\lim_{x\to +0}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'}=\frac{-2}{3}\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}}=\frac{2}{9}\lim_{x\to +0}x^3=0.$$

Неопределённость вида $\left[1^\infty\right],\left[\infty^0\right],\ \left[0^0\right]$ встречаются в степенно-показательных функциях. Вычисления проводим по схеме из таблицы.

Схема вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)^{v(x)}$	Пример для предела $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^x=\left[0^0\right]$

1. Логарифмируем выражение $f(x)^{v(x)}$ и находим предел $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}v(x)\ln f(x)=$ $[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$, или $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{v(x)}{\dfrac{1}{\ln f(x)}}$. Получаем при этом неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ или $\dfrac{0}{0}$.	1. Логарифмируем $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\sin x)^x=\lim\limits_{x\to 0}(x\ln(\sin x))=$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\dfrac{1}{x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.
2. Применяем правило Лопиталя. Если предел существует и равен K, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{v(x)}=e^K$	2. Применяем правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(\sin x))'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x\cdot x^2}{\sin x}=$ $=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\operatorname{tg}x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2)'}{(\operatorname{tg}x)'}=$ $=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=-\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos^2 x\right)=0.$ Так как предел равен 0, то искомый предел $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x=e^0=1$

§11. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),$$

то есть

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

Другими словами, существует многочлен первой степени

$$P_1(x) = f(x_0) + b(x - x_0)$$

такой, что при $x \to x_0$

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0),$$

причем

$$P_1(x_0) = f(x_0), P_1{}'(x_0) = b = f'(x_0).$$

<u>Постановка задачи</u>. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней n производных $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)$. Выясним, существует ли многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой что

$$f(x) = P_n(x) + o(x - x_0)^n.$$

Многочлен степени n запишем с неопределенными коэффициентами

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n,$$

которые будем искать из выполнения условий

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P_n{}'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = P_n{}^{(n)}(x_0)\,.$$

Продифференцировав многочлен $P_n(x)$ и подставляя вместо x значение x_0, найдем неизвестные коэффициенты b_i многочлена $P_n(x)$:

$$\left.\begin{array}{c} f(x_0) = P_n(x_0) = b_0 \\ f'(x_0) = P_n{}'(x_0) = b_1 \\ f''(x_0) = P_n{}''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot b_2 \\ f'''(x_0) = P_n{}'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x_0) = P_n{}^{(n)}(x_0) = n! \cdot b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} b_0 = f(x_0) \\ b_1 = f'(x_0) \\ b_2 = \dfrac{1}{2} \cdot f''(x_0) \\ b_3 = \dfrac{1}{3!} \cdot f'''(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n! \cdot b_n = \dfrac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \end{array}\right.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов вместо b_i получим многочлен вида

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

который называется ***многочленом Тейлора функции*** $f(x)$. Разность

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

называется ***остаточным членом формулы Тейлора.***

Можно доказать, что выполняется следующая теорема.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ определена и n раз дифференцируема в окрестности точки x_0, то при $x \to x_0$ имеет место формула

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n\,.$$

где $R_n(x) = o(x - x_0)^n$ – остаточный член в форме Пеано.

Последняя формула называется ***формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.*** Более кратко ее можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n.$$

Если в формуле Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим формулу

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

называемую ***формулой Маклорена.***

Существуют различные формы записи остаточного члена формулы Тейлора. Если функция $y = f(x)$ имеет (n+1) производную в окрестности точки x_0, то остаточный член можно представить в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \in (x_0, x)$$

и он называется ***остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа***. Формула Тейлора используется для приближенного вычисления значений функций, причем можно оценить погрешность таких вычислений, если пользоваться формулой с остаточным членом в форме Лагранжа.

Некоторые представления элементарных функций по формуле Маклорена приведены далее

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x).$$

§12. Монотонность функции. Глобальные и локальные экстремумы

В процессе исследования функции всегда представляют интерес интервалы монотонности функции, то есть те интервалы из области определения функции, на которых она возрастает или убывает. Найдем связь с монотонностью дифференцируемой функции и знаком ее производной.

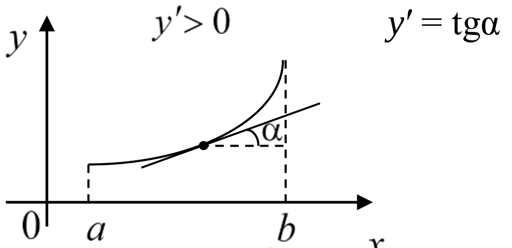
Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая неубывающая (возрастающая или имеющая интервалы постоянства) на (a, b) функция. Тогда для любого $x \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$ приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$, Следовательно $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$ для $\forall x \in (a, b)$. То есть, если дифференцируемая на некотором интервале функция является неубывающей, то её производная на этом интервале неотрицательна.

Поставим обратную задачу: будет ли из неотрицательности производной функции на некотором интервале следовать, что функция на этом интервале является неубывающей. Пусть $f'(x) \geq 0$ для $\forall x \in (a, b)$. По формуле Лагранжа выполняется $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $\xi \in (x_1, x_2)$. Тогда для $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_2 > x_1$ в силу формулы Лагранжа получаем $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$, то есть функция $y = f(x)$ является неубывающей на рассматриваемом интервале.
Выше изложена схема доказательства частного случая следующей теоремы.

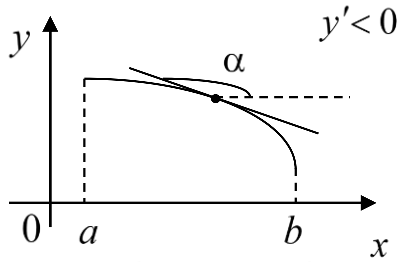
Теорема. Для того, чтобы дифференцируемая на (a, b) функция $y = f(x)$ не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a, b)$. Если же для $\forall x \in (a, b)$ производная $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция $y = f(x)$ строго возрастает (убывает) на этом интервале.

Следует заметить, что условия теоремы для случая строгой монотонности являются достаточными, но не необходимыми. Например функция $y = x^3$ возрастает на (–1,1), но производная функции в точке x=0 обращается в ноль.

<u>*Геометрический смысл теоремы*</u> состоит в следующем:
касательная к графику возрастающей на интервале функции составляет острый угол с осью абсцисс;
касательная к графику убывающей на интервале функции образует тупой угол с осью абсцисс;
если на некотором интервале функция постоянна, то касательная к графику параллельна оси абсцисс.



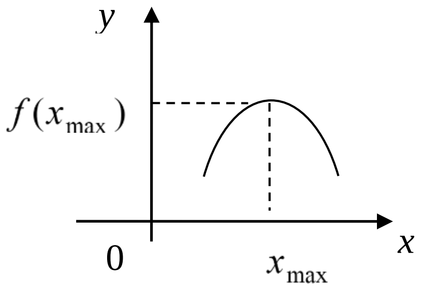
$0 < \alpha < 90^\circ$
Возрастающая функция



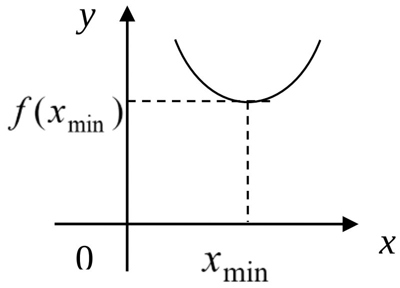
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
Убывающая функция

Особую роль в исследовании поведения функции играют точки, разделяющие интервалы возрастания и убывания функции.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой локального максимума (минимума) функции*** $y = f(x)$, если существует такая проколотая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности выполнено неравенство $f(x) - f(x_0) < 0$ $(f(x) - f(x_0) > 0)$. Значение $f(x_0)$ при этом называется ***локальным максимумом (минимумом)*** функции. Точки локального максимума и локального минимума называют ***точками локального экстремума***, а значения функции в них ***локальными экстремумами функции***.



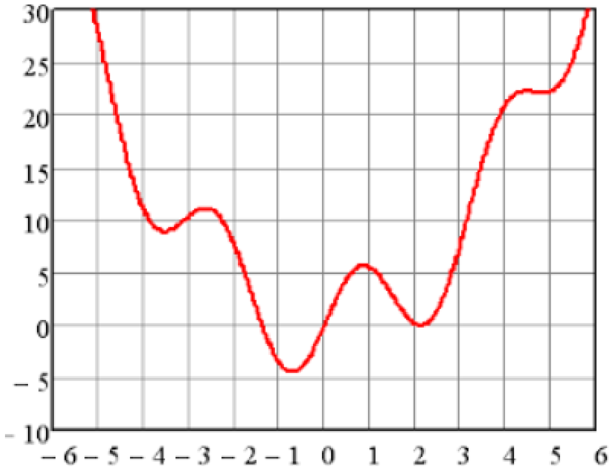
Точка максимума



Точка минимума

Из определения очевидным образом вытекает, что:

1. в точках локального экстремума, и только в них, для достаточно малых приращений аргумента Δx приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ не меняет знака при переходе аргумента через рассматриваемую точку x_0: $\Delta y \geq 0$ в случае минимума и $\Delta y \leq 0$ в случае максимума:
2. локальный экстремум не может достигаться в граничных точках, так как требуется существование окрестности из области определения. То есть функция может иметь локальный экстремум лишь во внутренних точках области определения;
3. экстремумы носят локальный характер, так как это наибольшее и наименьшее значения по сравнению с близлежащими точками и, если функция на интервале имеет несколько локальных максимумов и минимумов, то возможен случай, когда значение локального максимума будет меньше значения локального минимума. Ниже приведен график функции $y = 5sin2x + x^2$ на интервале (–6,6), хорошо иллюстрирующий это утверждение (локальный минимум аргумента из интервала (–4,–3) больше локального максимума на интервале (0,1)).



Во многих учебниках слово «локальный» перед экстремумом часто опускают.

Определим, далее, каким условиям должны удовлетворять точки, в которых достигается экстремум. Предположим, что в точке x_0 достигается максимум. Тогда, по определению, существует такая проколотая окрестность этой точки, что для все аргументов x из этой окрестности

$$f(x_0) > f\,(x) \;\Rightarrow f(x_0) > f\,(x_0 + \Delta x), \Delta x \neq 0\,.$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю справа и слева:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } \Delta x \to -0 \; (\Delta x < 0) & \dfrac{f\,(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \\ \text{при } \Delta x \to +0 \; (\Delta x > 0) & \dfrac{f\,(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0 - 0) \geq 0 \\ f'(x_0 + 0) \leq 0 \end{cases}$$

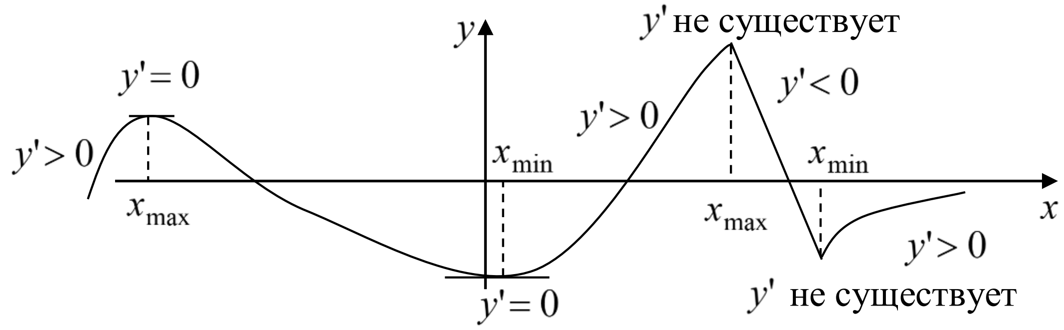
Если функция имеет конечную производную в точке x_0, то односторонние производные равны между собой, а это может произойти только в случае $f\,'(x_0) = 0$ (то есть касательная параллельна оси абсцисс, что было геометрически очевидно и из приведенного после определения рисунка). Если односторонние производные не равны между собой, то производная в точке x_0 не существует. Для случая максимума получим аналогичный результат.

Таким образом, обосновали следующую теорему.

Теорема (необходимое условие существования локального экстремума). Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Определение. Точки области из определения функции $y = f(x)$, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются ***критическими*** (подозрительными на экстремум) ***точками*** функции.

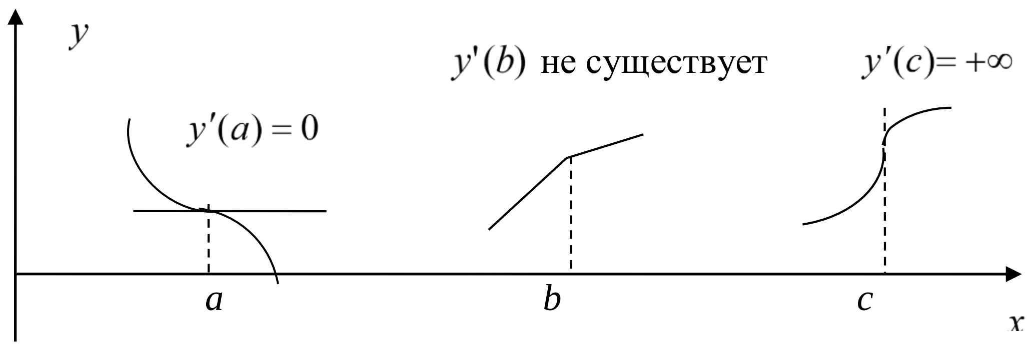
На рисунке приведены *примеры типов критических точек функции*.



Точки, в которых производная равна нулю, называются ***стационарными точками***. Критическая точка, в которой односторонние производные конечны, но не равны между собой, называются ***угловыми точками функции***. Если производная в критической точке бесконечна, то такая точка называется ***точкой возврата***.

Функция может иметь экстремум лишь в критических точках. В теореме сформулированы необходимые условия экстремума, то есть не всякая критическая точка является точкой экстремума. Например, функция $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеет нулевую производную, но при переходе через эту точку приращение функции своего знака не меняет, так как функция в этой точке возрастает.

Примеры критических точек, не являющихся точками экстремума



Вопрос, какая из критических точек функции будет являться точкой экстремума, а какая нет, решается с помощью достаточных признаков экстремума. Сформулируем эти теоремы без доказательства.

Теорема (первый достаточный признак экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности, за исключением, может быть, самой точки x_0. Тогда, если при переходе слева направо через точку x_0 производная меняет знак с «–» на «+», то x_0 является точкой строгого минимума; если знак меняется с «+» на «–», то точка x_0 является точкой строгого максимума. Если производная функции знака не меняет, то x_0 не является точкой экстремума.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x-1}$ на монотонность и экстремум.

Решение. Функция определена и непрерывна при всех $x \neq 1$, $x = 1$ – точка разрыва второго рода (точка бесконечного разрыва). Находим производную функции

$$y'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

и её критические точки (точки из области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует):

– $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$ – стационарные точки;

– $y'(x)$ не существует при $x = 1$, но $x = 1$ не принадлежит области определения и не является критической точкой.

Определяем знак $y'(x)$ в интервалах, на которые критические точки и точки разрыва разбивают область определения

Знак $y'(x)$	$-$		$-$		$-$	min	$+$
Поведение функции	↘	0	↘	1	↘	$\frac{3}{2}$	↗

На интервалах $(-\infty;1)$ и $(1;\frac{3}{2})$ функция убывает, на интервале $(\frac{3}{2};+\infty)$ функция возрастает; $x_2 = \frac{3}{2}$ – точка минимума, $y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$.

Теорема (второй достаточный признак экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 равную нулю первую производную и непрерывную отличную от нуля вторую производную. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума; если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума.

Например,

1) для $y = x^2$ и $x_0 = 0$ имеем: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 > 0$, значит, $x_0 = 0$ – точка локального минимума;

2) для $y = -x^2$ и $x_0 = 0$ имеем: $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2 < 0$, значит, $x_0 = 0$ – точка строгого максимума.

Теорема (третий достаточный признак экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если:

1. n – четное и *a*) $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума;
b) $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума;

2. n – нечетное, то x_0 не является точка экстремума.

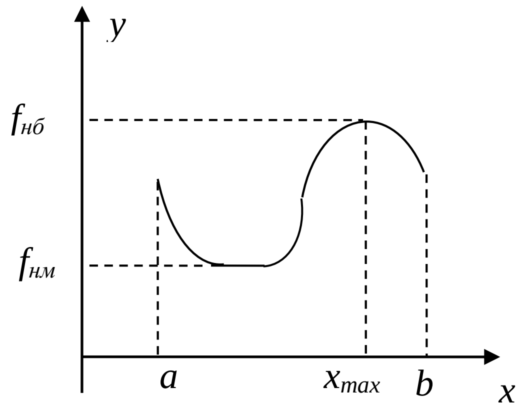
Пример. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^4 - 4x^3 + 17$.
Решение. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $f'(x) = 0$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$;

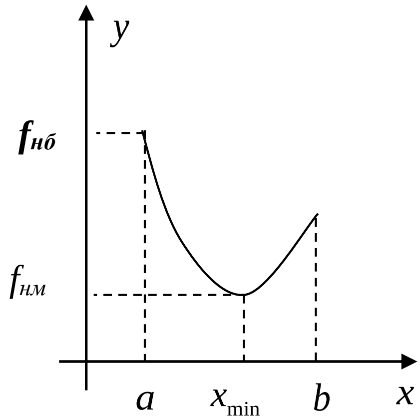
$f''(x) = 12x^2 - 24x$, $f''(0) = 0$,
$f''(3) = 36 > 0$, значит $x_2 = 3$ *точка локального минимума*;
$f'''(x) = 24x - 24$, $f'''(0) = -24$. Так как отлична от нуля третья (нечетная) производная функции, то в стационарной точке $x_1 = 0$ экстремум не достигается.

Помимо локальных экстремумов, для анализа практических задач представляет интерес и такая характеристика, как ***глобальные*** (***абсолютные***) ***экстремумы*** на отрезке, то есть наибольшее и наименьшее значения функции на некотором отрезке $[a, b]$. По теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке функция принимает свое наибольшее и наименьшее значения. Для их нахождения следует придерживаться следующей схемы для дифференцируемой на $[a, b]$ функции $y = f(x)$:

1. Найти критические точки функции, принадлежащие заданному отрезку и, не определяя в них наличие и тип экстремума, вычислить значения функции в этих точках.
2. Вычислить значения функции на концах отрезка.
3. Из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Другими словами, глобальный экстремум достигается либо внутри отрезка (в критических точках) либо на его концах.





$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f_{нм}$

$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{\max}) = f_{нб}$

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{\min}) = f_{нм}$

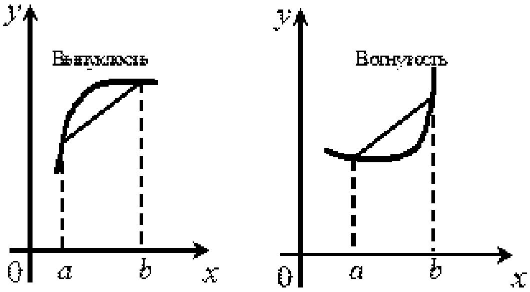
$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a) = f_{нб}$

Пример. Найти глобальные экстремумы функции $y = \frac{x^3}{x-1}$ на отрезке $[-2, \frac{1}{2}]$.
Решение. Критические точки этой функции были найдены ранее. Это стационарные точки $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Точка x_2 интервалу $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ не принадлежит, поэтому вычисляем значение функции только в точке $x_1 = 0$: $y(0) = 0$. Значения функции на концах отрезка равны: $y(-2) = \frac{8}{3}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Из вычисленных значений функции выбираем наибольшее $y_{max}(-2) = \frac{8}{3}$ и наименьшее

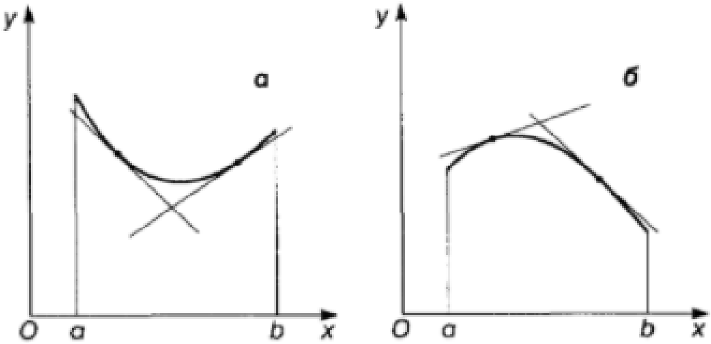
$y_{min}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, которые и являются глобальными экстремумами функции на заданном отрезке.

§12. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Функция $y = f(x)$ ***называется выпуклой вверх (выпуклой вниз, вогнутой)*** на интервале (a, b), если любая дуга её графика (отвечающего этому интервалу) расположена выше (ниже) стягивающей дугу хорды.



Дифференцируемая функция выпукла вверх (вогнута) на интервале, если её график расположен не выше (не ниже) любой касательной к нему.

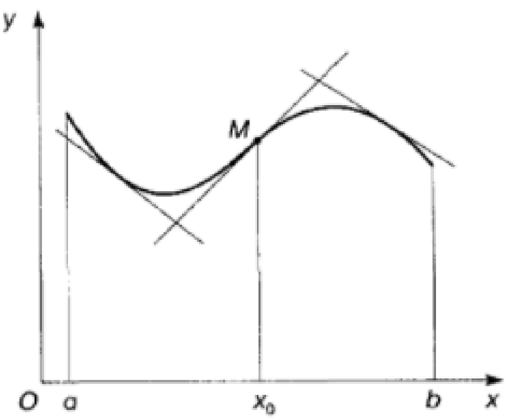


Теорема (достаточные условия выпуклости и вогнутости). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируемая функция и для $\forall x \in (a, b)$

$f''(x) \geq 0$, то график этой функции на (a, b) – вогнутый;

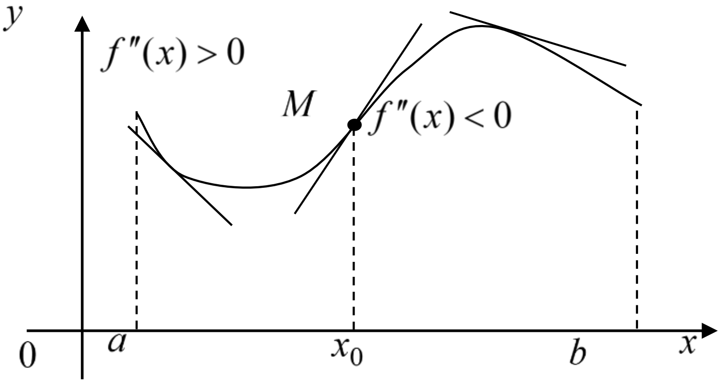
$f''(x) \leq 0$, то график этой функции на (a, b) – выпуклый вверх.

Точки непрерывности функции, в которых меняется выпуклость на вогнутость или наоборот, называются ***точками перегиба функции.***



Если x_0 − точка перегиба функции $y = f(x)$, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется ***точкой перегиба графика*** этой функции. В окрестности точки перегиба график дифференцируемой функции лежит по разные стороны касательной к графику в точке перегиба.

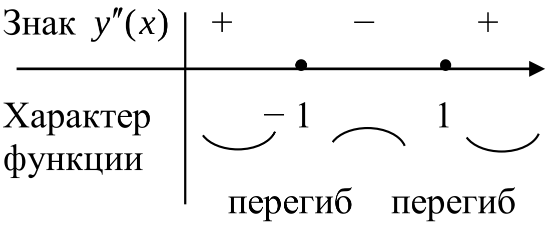
Теорема (достаточное условие существования точки перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, и функция непрерывна в точке x_0, то точка x_0 − точка перегиба функции, а точка М $(x_0, f(x_0))$–точка перегиба графика функции.



Пример. Исследовать на выпуклость и точки перегиба функцию $y = x^4 - 6x^2$.
Решение. Функция определена, непрерывна и дифференцируема для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Находим производную второго порядка и точки, в которых она равна нулю или не существует:

$$y' = 4x^3 - 12x;\ y'' = 12x^2 - 12 = 0 \text{ при } x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 1.$$

В каждом интервале, на которые точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ разбивают область определения, определяем знак $y''(x)$ и находим промежутки выпуклости и вогнутости функции



Функция:

вогнута при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$,

выпукла вверх при $x \in (-1; +1)$;

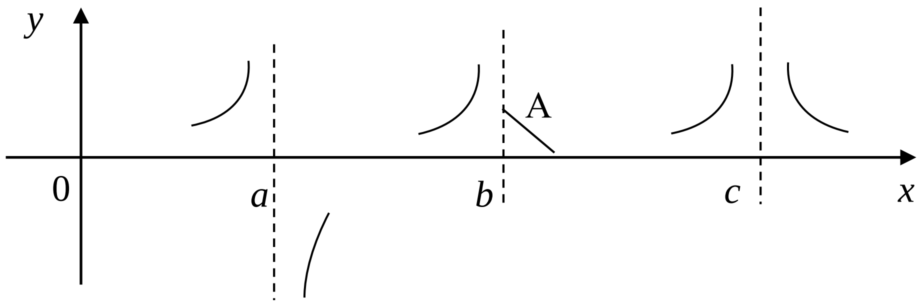
точки перегиба функции $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$;

точки перегиба графика функции (−1;−5) и (1;−5).

§13. Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, то есть при $x \to \pm\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода (точек бесконечного разрыва), часто оказывается , что расстояние между точками графика функции и точками некоторой прямой, с теми же абсциссами, сколь угодно мало. Такую прямую называют ***асимптотой графика функции***. Различают ***вертикальные*** (параллельные оси ординат) и ***наклонные*** (частный случай ***горизонтальные*** – параллельные оси абсцисс) ***асимптоты***.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой графика функции*** $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности.



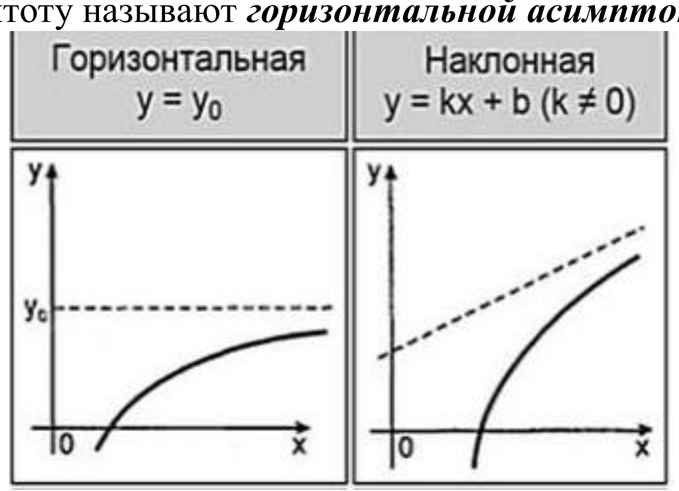
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to c-0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to b+0} f(x) = A \qquad \lim_{x\to c+0} f(x) = +\infty$$

Прямые $x = a$ и $x = c$ − двусторонние вертикальные асимптоты, прямая $x = b$ − левосторонняя асимптота.

Очевидно, что непрерывные на всем множестве действительных чисел функции вертикальных асимптот не имеют.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если функцию $y = f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. При $k = 0$ наклонную асимптоту называют ***горизонтальной асимптотой***.



Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

Запись $x \to \pm\infty$ означает, что при нахождении наклонных асимптот нужно отдельно рассматривать случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Возможны следующие случаи:

1. оба предела существуют и не зависят от знака бесконечности, тогда прямая $y = kx + b$ является ***двусторонней наклонной асимптотой***;
2. оба предела существуют, но при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ они различны, тогда имеем две ***односторонние наклонные асимптоты***;
3. если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то наклонных асимптот нет.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Решение. Функция определена и непрерывна при $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$, $x = 2$ − точка разрыва. Так как

$$\lim_{x\to2-0} \frac{x^2+1}{x-2} = \left(\frac{5}{-0}\right) = -\infty;\ \lim_{x\to2+0} \frac{x^2+1}{x-2} = \left(\frac{5}{+0}\right) = +\infty,$$

то $x = 2$ − точка бесконечного разрыва и прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота.

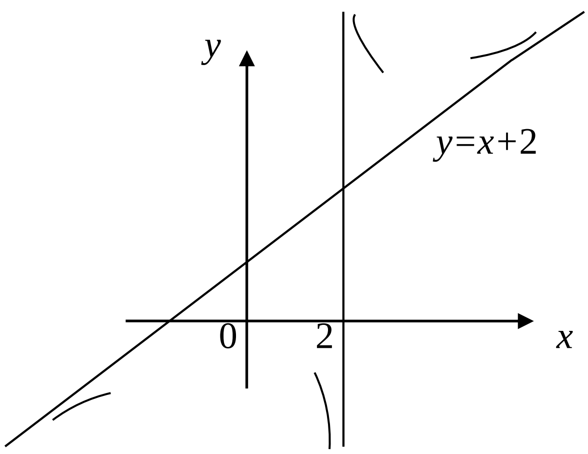
Находим наклонные $y = kx + b$ асимптоты графика функции:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{(x-2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-2x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{(x-2)} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2\,.$$

Прямая $y = x + 2$ – двухсторонняя наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

Эскиз графика функции в окрестности асимптот имеет вид



§14. Общая схема исследования функции и построения графика

Процесс исследования функции $y = f(x)$ и построения графика можно условно разбить на следующие этапы:

I) предварительное исследование зависимости $y = f(x)$ (без использования производной):

а) найти область определения функции и интервалы непрерывности;

б) если есть точки разрыва, найти односторонние пределы функции в этих точках и изобразить на чертеже поведение функции вблизи каждой точки разрыва;

в) исследовать функцию на чётность, нечётность, периодичность;

г) найти асимптоты графика функции;

д) изучить поведение функции при стремлении аргумента к граничным точкам области определения (если это не ясно из предыдущих исследований);

е) найти (если это возможно) точки пересечения графика с осями координат и отметить их на схеме графика.

II) исследование по первой производной:

а) найти первую производную $f'(x)$;

б) найти критические точки ($f'(x)$=0 или не существует);

в) найти интервалы возрастания ($f'(x)$>0) и убывания ($f'(x)$<0);

г) найти точки максимума и минимума, вычислить значения функции в этих точках; изобразить на чертеже поведение функции в окрестности каждой из этих точек.

III) исследование по второй производной:

а) найти вторую производную $f''(x)$;

б) найти промежутки выпуклости вверх ($f''(x)$<0) и вогнутости ($f''(x)$>0);

в) найти точки перегиба ($f''(x)$=0 или не существует, но в окрестности точки меняет знак), вычислить значения функции в этих точках и изобразить поведение функции в окрестности этих точек на чертеже.

IV) построение схемы графика с учетом полученных результатов.

Целесообразно результаты исследования сопровождать последовательным построением схемы графика. Приведенная схема исследования не является обязательной. При решении конкретной задачи отдельные этапы этой схемы могут быть расширены, другие же могут оказаться излишними или невыполнимыми, поэтому порядок пунктов схемы исследования может быть несколько другим. Так, в более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций, а если же график функции не совсем ясен и после выполнения всех этапов исследования, то можно построить дополнительно несколько точек графика, выяснить другие особенности функции.

Пример исследования функции и построения графика

Этапы	Функция $y = \dfrac{x^2}{x-1}$
1. а) находим область определения и интервалы непрерывности функции	Функция определена и непрерывна при всех $x \neq 1$ (как частное двух непрерывных функций); $x = 1$ – точка разрыва
б) исследуем тип точки разрыва $x = 1$. Для этого найдём односторонние пределы при $x \to 1$	$\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^2}{x-1} = \left(\dfrac{1}{-0}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^2}{x-1} = \left(\dfrac{1}{+0}\right) = +\infty$. Так как в точке $x = 1$ функция терпит бесконечный разрыв, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой
г) находим наклонные асимптоты $y = kx + b$	$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1,$ $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1.$ Прямая $y = x + 1$ – наклонная асимптота при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Так как $\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{(x^2-1)+1}{x-1} = (x+1) + \dfrac{1}{x-1} > x + 1$ при $x > 1$, то график функции расположен выше асимптоты, аналогично, ниже асимптоты при $x < 1$
в), е) исследуем функцию на чётность, найдём точки пересечения с осями	Так как область определения не симметрична относительно нуля, то функция не будет ни чётной, ни нечётной. При $x = 0$ $y = 0$, значит, график функции пройдёт через начало координат
2.а)–г) исследуем функцию на экстремум	$y' = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $y' = 0, x^2 - 2x = 0$ при $x_1 = 0, x_2 = 2$. Эти точки являются критическими. Исследуем знак производной в окрестности каждой критической точки; $y(0) = 0$, $y(2) = 4$. max min Знак $y'(x)$: + – – + Поведение функции: ↗ 0 ↘ 1 ↘ 2 ↗ x

3. а)–в) найдём интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба	$y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3} \neq 0$, значит, точек перегиба нет; при $x > 1$ функция выпукла $(y'' > 0)$ и при $x < 1$ – вогнута $(y'' < 0)$
4. Используя данные исследования, построим схему графика функции. Отдельные этапы исследования иногда можно не проводить. В данном случае точки перегиба можно было не находить, так как поведение графика определялось предыдущими пунктами исследования