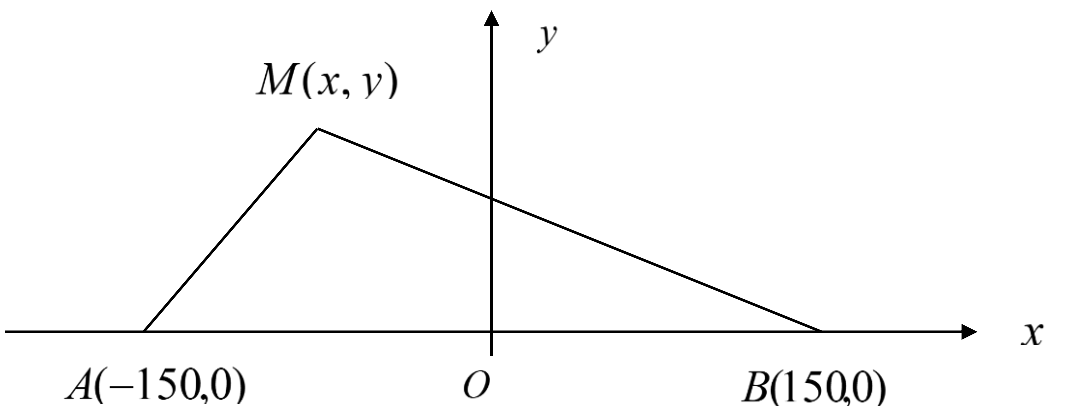
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§1. УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнением линии на плоскости в заданной системе координат Oxy называется уравнение с двумя переменными $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. Входящие в уравнение $F(x, y) = 0$ координаты x и y произвольной точки линии называются ***текущими координатами***. Для составления уравнения линии следует взять на ней произвольную точку и, исходя из свойств линии, установить зависимость между координатами этой точки.

Пример. Расстояние между двумя заводами, производящими одинаковую продукцию, равно 300 км. Транспортные расходы на т/км продукции от завода A в 2 раза больше, чем от B. Определить линию-границу районов, на которой одинаково выгодно получать продукцию заводов A и B.



Решение. Примем AB за ось Ox, за начало координат – середину AB, тогда получим $A(-150,0)$ и $B(150,0)$. Обозначим через $M(x, y)$ текущую точку искомой линии–границы районов. По условию задачи точка M должна быть в два раза ближе к A, чем к B: $2|AM| = |MB|$, или так как

$$|AM| = \sqrt{(x+150)^2 + y^2} \text{ и } |MB| = \sqrt{(x-150)^2 + y^2}$$

получим уравнение линии

$$2\sqrt{(x+150)^2 + y^2} = \sqrt{(x-150)^2 + y^2}$$

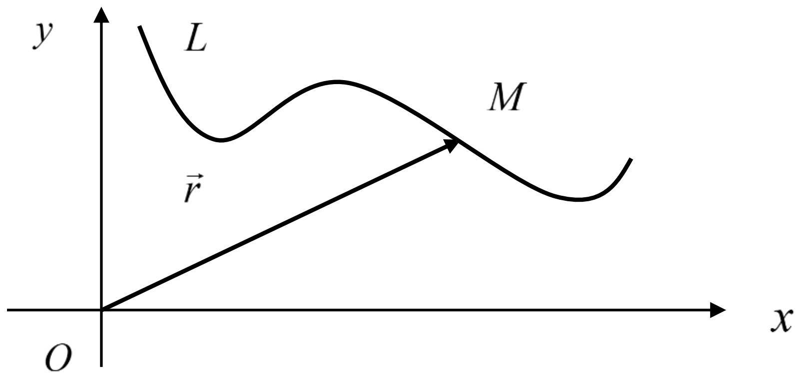
или возводя обе части в квадрат и приводя подобные

$$x^2 + 500x + y^2 + 22500 = 0.$$

Как видим, линия–граница, где одинаково выгодно получать продукцию заводов, выражается уравнением второй степени относительно текущих координат.

Характерной особенностью аналитической геометрии является то, что изучение свойств линии сводится к изучению свойств соответствующих уравнений.

Рассмотрим на плоскости некоторую линию L. Обозначим $\vec{r}$ радиус–вектор произвольной точки M этой линии.



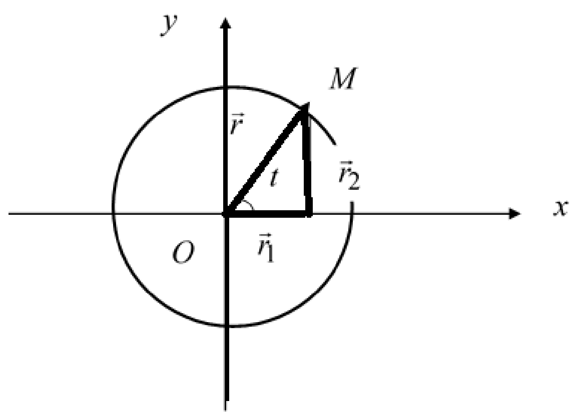
Векторным уравнением линии на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy называют уравнение вида $F(\vec{r})=0$, которому удовлетворяет радиус–вектор любой точки этой линии и не удовлетворяют радиус–векторы точек, не лежащих на этой линии. Радиус–вектор любой точки, лежащей на данной линии, называется ***текущим радиус–вектором.***

При перемещении точки по линии L радиус вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ меняется. Выразив переменный радиус–вектор $\vec{r}$ через некоторый скалярный параметр t, получим уравнение $\vec{r}=\vec{r}(t)$, которое называется ***векторно–параметрическим уравнением линии*** L ***на плоскости в заданной системе координат*** Oxy.

Если x и y – координаты вектора $\vec{r}$ в рассматриваемой системе координат, то векторно-параметрическое уравнение равносильно следующим уравнениям:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

которые называются параметрическими уравнениями линии L ***на плоскости в заданной системе координат Oxy.***



Пример. Составить уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Как известно, окружность есть множество точек плоскости, равноудаленных от данной ее точки, называемой центром. Возьмем на окружности произвольную точку M, координаты которой обозначим (x, y). Где бы на окружности эта точка не лежала, расстояние от нее до центра равно R: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = R$, то есть $\sqrt{x^2 + y^2} = R$ или $x^2 + y^2 = R^2$. Полученному уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на данной окружности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней.

Векторное уравнение окружности с центром в начале координат радиуса R имеет вид $|\vec{r}| = R$, где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор любой точки окружности M. Этому уравнению удовлетворяет радиус-вектор любой точки данной окружности, и не удовлетворяют радиус-векторы точек, лежащих вне этой окружности.

Примем за параметр t угол, который радиус–вектор $\vec{r}$ образует с положительным направлением оси Ox. Из рисунка видно, что $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$. Так как $\overrightarrow{r_1} = Rcost \cdot \vec{i}, \overrightarrow{r_2} = Rsint \cdot \vec{j}$, то уравнение $\vec{r} = (R\cos t)\vec{i} + (R\sin t)\vec{j}$ является векторно–параметрическим уравнением окружности. Параметрические уравнения рассматриваемой окружности имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t. \end{cases}.$$

Исключив из этой системы t, получим уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

В общем случае уравнение окружности радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Возвращаясь к уравнению $x^2 + 500x + y^2 + 22500 = 0$ предыдущего примера покажем, что это не что иное, как окружность. Выделим в уравнении полный квадрат относительно переменой x: $(x + 250)^2 + y^2 = 200^2$. Следовательно, линия граница района на которой одинаково выгодно получать продукцию заводов, представляет собой окружность радиуса 200 км с центром в точке с координатами $(-250,0)$ в введенной системе координат.

Уравнением поверхности в заданной системе координат $Oxyz$ называется уравнение с тремя переменными $F(x, y, z) = 0$ которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. Входящие в уравнение $F(x, y, z) = 0$ координаты (x, y, z) произвольной точки линии называются ***текущими координатами***.

Векторным уравнением поверхности в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется уравнение вида $F(\vec{r}) = 0$, которому удовлетворяет радиус–вектор любой точки этой поверхности и не удовлетворяют радиус–векторы точек, не лежащих на этой поверхности.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ даны уравнения $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$ двух поверхностей, пересекающихся по линии L. Системе уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0; \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

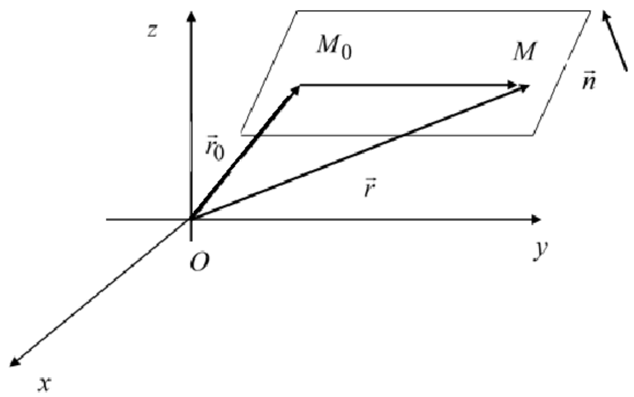
удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты точек, лежащих вне ее. Эта система называется ***уравнением линии в пространстве в системе координат*** $Oxyz$**.** Для линии в пространстве, аналогичным образом, как и на плоскости, вводятся векторные, векторно–параметрические и параметрические уравнения.

§2. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Положение плоскости в пространстве вполне определяется заданием некоторой точки $M_0(\vec{r}_0)$ этой плоскости и ненулевого вектора $\vec{n}$, перпендикулярного к этой плоскости (такой вектор называется ***нормальным вектором***). Для любой точки $M(\vec{r})$, лежащей на данной плоскости, и только для точек этой плоскости вектор $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ ортогонален вектору $\vec{n}$. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{n},\vec{r}-\vec{r}_0)=0.$$

Каждой плоскости соответствует такое уравнение. Справедливо и обратное.



Полученное уравнение является ***векторным уравнением плоскости.*** Если $\vec{n}=(A,B,C)$, $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{r}=(x,y,z)$, то векторное уравнение примет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Так как нормальный вектор $\vec{n}$ ненулевой, то $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Уравнение называется ***уравнением плоскости, проходящей через точку*** $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ***перпендикулярно к вектору*** $\vec{n}=(A,B,C)$, ***в координатной форме.***

Пример. Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку $M(5;4;-2)$ перпендикулярно прямой MN, если $N(2;-1;3)$.
Решение. Воспользуемся уравнением плоскости в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

где $(x_0;y_0;z_0)$ – координаты точки M. Вектор нормали $\vec{n}=\{A;B;C\}$ перпендикулярен плоскости Q. Таким вектором является вектор

$$\overrightarrow{MN}=\{2-5;-1-4;3+2\}=\{-3;-5;5\},$$

то есть уравнение плоскости Q имеет вид

$$-3(x-5)-5(y-4)+5(z+2)=0.$$

Если обозначить $-(Ax_0+By_0+Cz_0)$ через D, то уравнение в координатной форме можно записать в виде

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Это уравнение называется ***общим уравнением плоскости.***

Итак, ***всякой плоскости в декартовой прямоугольной системе координат соответствует уравнение первой степени с тремя переменными. Справедливо и обратное.***

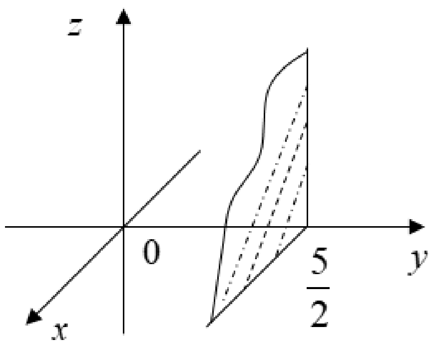
В таблице ниже приведены характерные случаи расположения плоскости в зависимости от значений коэффициентов A,B,C,D.

Расположение плоскости	Ее уравнение
Плоскость проходит через начало координат $(0;0;0)$	$D=0$: $Ax+By+Cz=0$
Плоскость параллельна оси Ox $\vec{n}\perp Ox \Rightarrow A=0$	$A=0$: $By+Cz+D=0$
Плоскость проходит через Ox	$A=0$, $D=0$: $By+Cz=0$
Плоскость параллельна осям Ox и Oy	$A=0$, $B=0$: $Cz+D=0$

Координатная плоскость Oxy	$z=0$
Координатная плоскость Oyz	$x=0$
Координатная плоскость Oxz	$y=0$

Пример. Построить плоскость, заданную уравнением $2y-5=0$.

Решение. Плоскость $2y-5=0$ $\left(y=\dfrac{5}{2}\right)$, $\vec{n}=\{0;2;0\}$, параллельна плоскости Oxz и отсекает на оси Oy отрезок, равный $\dfrac{5}{2}$.



Рассмотрим частный случай, когда плоскость пересекает все оси координат и отсекает на них соответственно отрезки длиной a, b и c. Так как точки $M(a,0,0)$, $N(0,b,0)$ и $P(0,0,c)$ принадлежит рассматриваемой плоскости, то подставляя их координаты в общее уравнение плоскости, получим

$$A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b}\ \text{и}\ C=-\frac{D}{c}.$$

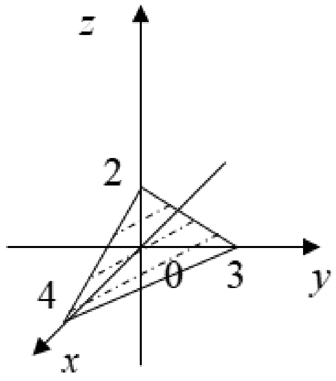
Используя полученные величины, имеем уравнение:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

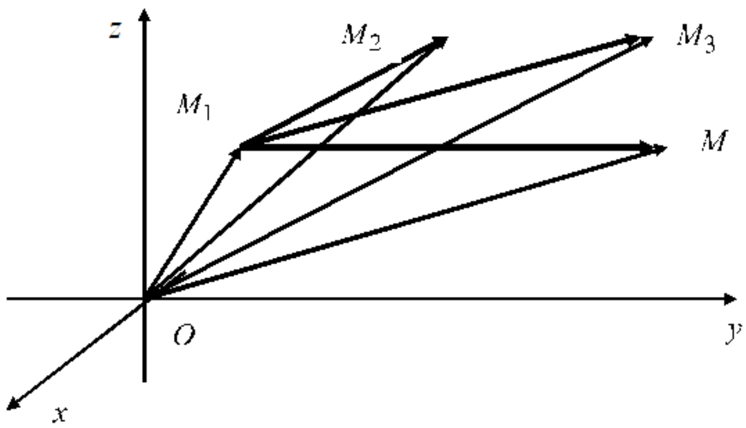
называемое ***уравнением плоскости в отрезках***.

Пример. Построить плоскость, заданную уравнением $3x+4y+6z-12=0$.

Решение. Плоскость $3x+4y+6z-12=0$ или в отрезках $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1$. Следовательно, плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки длиной 4, 3, 2.



Пусть в декартовой прямоугольной системе координат даны три точки $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$, $M_3(\vec{r}_3)$, не лежащие на одной прямой. Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки.



Для произвольной точки $M(\vec{r})$, принадлежащей рассматриваемой плоскости, и только для точек этой плоскости, векторы $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ компланарны, следовательно, их смешанное произведение равно нулю:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0.$$

Последнее уравнение является ***уравнением плоскости, проходящей через три данные точки, в векторной форме.*** Если точки заданы координатами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, то векторное уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

То есть плоскость может быть задана не только общим, но и другими уравнениями. Приведем их в виде таблицы.

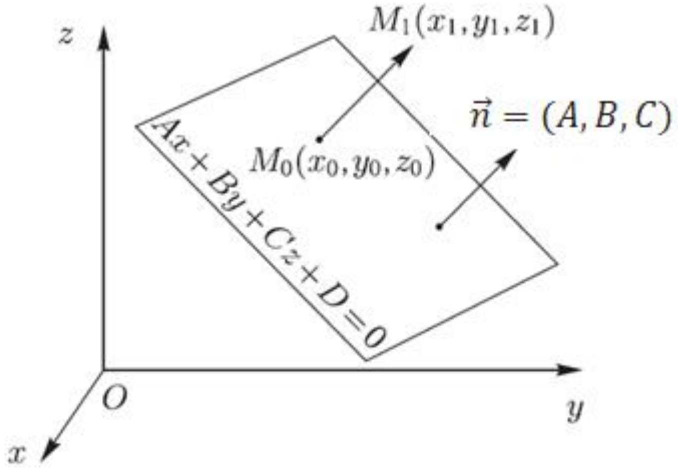
Данные, определяющие плоскость	Уравнение плоскости

Три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)\in Q$, $M_2(x_2;y_2;z_2)\in Q$, $M_3(x_3;y_3;z_3)\in Q$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
Точка $M_0(x_0;y_0;z_0)\in Q$ и вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}\perp Q$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
Плоскость Q отсекает отрезки a, b, c на осях Ox, Oy и Oz соответственно	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость задана уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где A, B, C, D — известные числа. Дана точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Нужно найти d – расстояние от точки M_1 до заданной плоскости. Нормальный вектор этой плоскости равен $\vec{n}=(A,B,C)$. Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ — проекция точки M_1 на плоскость, то есть основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на заданную плоскость.



Ясно, что длина вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ равна искомому расстоянию d. Ясно также, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарен нормальному вектору $\vec{n}$. Координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ равны разностям соответствующих координат конца и начала вектора:

$$\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0).$$

Скалярное произведение этого вектора и вектора $\vec{n}$ определим по формуле

$$\left(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{n}\right)=A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0).$$

С другой стороны, скалярное произведение в левой части равно

$$\left(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{n}\right)=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right||\vec{n}|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1},\vec{n}}\right)=d|\vec{n}|(\pm1),$$

где +1 берется, когда угол $\left(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1},\vec{n}}\right)=0$ (в этом случае точка M_1 и вектор $\vec{n}$ лежат по одну сторону от плоскости), и (-1), когда этот угол равен π (в этом случае точка M_1 и вектор $\vec{n}$ лежат по разные стороны от плоскости). Подставим выражение в левую часть предыдущей формулы, а в правой части раскроем скобки. Получим

$$\pm d|\vec{n}| = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Так как точка M_0 лежит на плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то ее координаты (x_0, y_0, z_0) удовлетворяют этому уравнению, то есть имеет место соотношение $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, и $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Теперь формулу можно переписать в виде

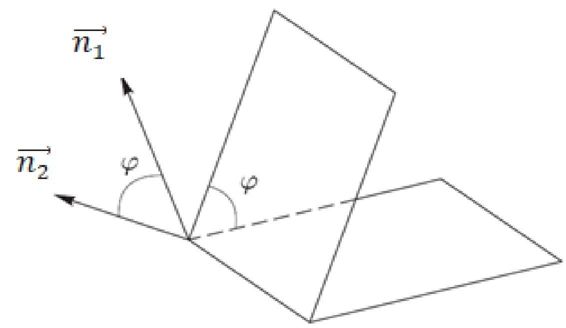
$$\pm d|\vec{n}| = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

Учитывая, что $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Из формулы видно, что для нахождения расстояния d от точки M_1 до плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, нужно в левую часть уравнения вместо x, y, z поставить координаты x_1, y_1, z_1 заданной точки M_1, а затем найденное число поделить на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Полученное число будет равно d, если оно положительное, и $-d$, если это число отрицательное. Тем самым найдем искомое расстояние d.

Пусть в пространстве в декартовой системе координат $Oxyz$ две плоскости заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, где коэффициенты A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 – заданные числа. Тогда векторы $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы этих плоскостей.



За угол φ между плоскостями примем один из образованных ими двугранных углов, равный углу между их нормальными векторами. Использовав формулу косинуса угла между векторами, заданными своими декартовыми координатами, определим, что

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Вычислив по формуле $cos\varphi$, найдем угол φ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$.

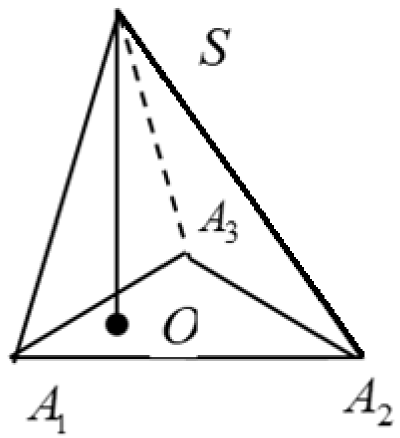
Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то плоскости параллельны, так как коллинеарны их нормальные векторы.

Если $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$, то плоскости перпендикулярны, так как перпендикулярны их нормальные векторы.

Подытожим вышеприведенные рассуждения. Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2 общими уравнениями: уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Рассмотрим их взаимное расположение и соответствующие условия на координаты их нормальных векторов.

Расположение	Условия
Плоскости Q_1 и Q_2 параллельны $Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
Плоскости Q_1 и Q_2 совпадают	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
Плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны $Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
Плоскости Q_1 и Q_2 пересекаются под углом φ	$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$
Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Q: Ax + By + Cz + D = 0$	$d = d(M_0, Q) = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Пример. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1(1;3;0)$, $A_2(-3;3;1)$, $A_3(5;0;-2)$ и $S(10;-7;2)$. Найти уравнение плоскости основания $A_1A_2A_3$ и длину высоты SO.



Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки. Получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ -3-1 & 3-3 & 1-0 \\ 5-1 & 0-3 & -2-0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$(x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$3(x-1) - 4(y-3) + 12z = 0,$$

$$3x - 4y + 12z + 9 = 0.$$

Итак, уравнение плоскости основания $A_1A_2A_3$ имеет вид

$$3x - 4y + 12z + 9 = 0.$$

Найдем высоту SO по формуле расстояния от точки S до плоскости $A_1A_2A_3$. Получим

$$SO = \frac{|3\cdot 10 - 4\cdot(-7) + 12\cdot 2 + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{91}{13} = 7.$$

§3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

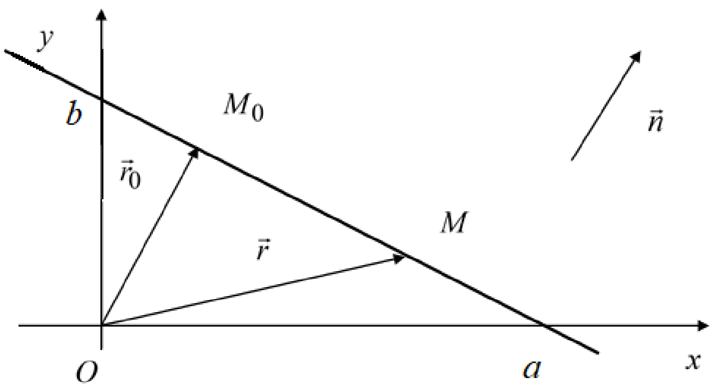
Пусть даны прямая на плоскости и декартова прямоугольная система координат Oxy. Проведя рассуждения, аналогичные сделанным в предыдущем параграфе, приходим к выводу, что уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 перпендикулярно к вектору $\vec{n}$, в векторной форме также имеет вид $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. В координатной форме уравнение прямой, проходящей на плоскости через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно к вектору $\vec{n}(A, B)$ запишется в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

а общее уравнение в виде

$$Ax + By + D = 0,$$

где $D = -Ax_0 - By_0$, причем $A^2 + B^2 \neq 0$.



Аналогично, если прямая на плоскости отсекает на координатных осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно, то ее уравнение имеет вид

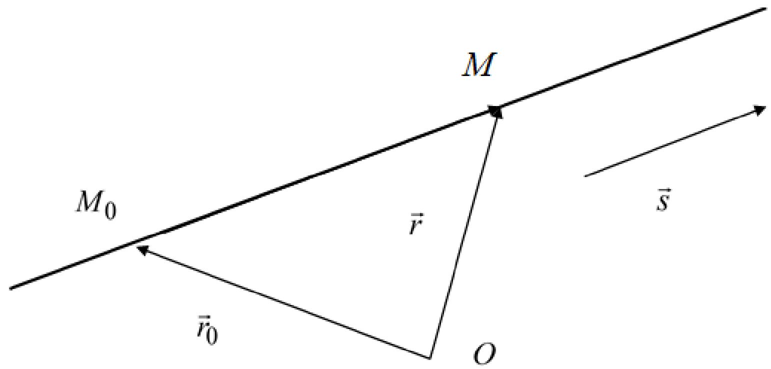
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

и называется ***уравнением прямой в отрезках.***

Уравнение прямой, проходящей через начало координат, или прямой, параллельной одной из осей координат, не может быть записано как уравнение прямой в отрезках. В этом случае приходилось бы делить на ноль, что лишено смысла. Общее же уравнение прямой приемлемо для любых положений прямой. Аналогичная ситуация и для плоскости, проходящей через начало координат или параллельно одной из координатных плоскостей.

Рассмотрим далее уравнения прямой в пространстве и, как частные случаи, на плоскости.

Пусть дана прямая в пространстве (или на плоскости) и O – начало координат декартовой прямоугольной системы.



Положение прямой вполне определяется заданием некоторой точки $M_0(\vec{r}_0)$ этой прямой и ненулевого вектора $\vec{s}$, параллельного данной прямой (такой вектор называется ***направляющим вектором прямой***). Для любой точки $M(\vec{r})$, принадлежащей данной прямой, и только для точек этой прямой векторы $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ и $\vec{s}$ коллинеарны. Следовательно, $\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{s}$ или

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s},$$

где t – вещественный параметр. Уравнение называется ***векторно–параметрическим уравнением прямой***.

Если $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{s}(m, n, p)$, $\vec{r}(x, y, z)$, то векторно–параметрическое уравнение (5) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

называемой ***параметрическими уравнениями прямой в пространстве***. Исключив из уравнения параметр t, получим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

называемое ***каноническими уравнениями прямой в пространстве***. Если среди чисел m, n, p есть одно или два, равных нулю, то условимся канонические уравнения прямой писать в том же в виде.

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в декартовой прямоугольной системе координат. Составим каноническое уравнение прямой, проходящей через эти точки. Так как прямая параллельна вектору $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ и проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то положив в каноническом уравнении $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$, $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$, $z_0 = z_1$, получим искомое уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Аналогично, если прямая задана на плоскости в системе координат Oxy, то параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$$

а канонические

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Уравнение прямой в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид

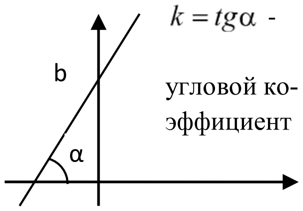
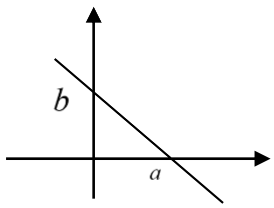
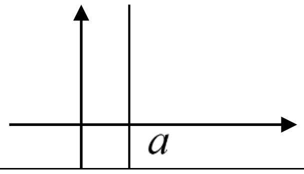
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

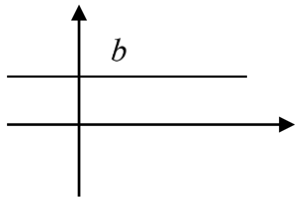
Если прямая не параллельна оси Oy ($m \neq 0$), то $\dfrac{m}{n} = tg\alpha$, где α – угол, который прямая образует с положительным направлением оси Ox, отсчитываемый против часовой стрелки. Обозначив $tg\alpha$ через k, получим уравнение прямой в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Величина $k = tg\alpha$ называется ***угловым коэффициентом прямой***, а уравнение – ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***.

В зависимости от имеющейся информации, уравнения прямой на плоскости имеют различный вид. Вид и их характеристика собраны в таблице.

Данные, определяющие прямую	Уравнение прямой
 $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент	$y = kx + b$
Прямая с угловым коэффициентом проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$	$y - y_0 = k(x - x_0)$
Прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
Прямая отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b 	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
Общее уравнение прямой	$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0$, $k = -\dfrac{A}{B}$, $\vec{n} = (A, B)$ - нормальный вектор прямой.
Прямая параллельна оси Oy и проходит через точку $(a;0)$ 	$x = a$

Прямая параллельна оси Ox и проходит через точку $(0;b)$ 	$y=b$

Рассмотрим далее прямые две l_1 и l_2 на плоскости, которые заданы следующими уравнениями, и их взаимное расположение:

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad l_2: A_2x+B_2y+C_2=0,$$

или $l_1: y=k_1x+b_1, \qquad l_2: y=k_2x+b_2.$

Расположение	Условия
Прямые l_1 и l_2 совпадают	$\begin{cases} k_1=k_2, \\ b_1=b_2, \end{cases}$ или $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
Прямые параллельны: $l_1 \parallel l_2$	$k_1=k_2$ или $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$
Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны: $l_1 \perp l_2$	$A_1A_2+B_1B_2=0$ или $k_1=-\frac{1}{k_2}$
Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $M_0(x_0;y_0)$ под углом $\varphi, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$	$\begin{cases} A_1x_0+B_1y_0+C_1=0, \\ A_2x_0+B_2y_0+C_2=0, \end{cases}$ $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\left\|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\|$
Расстояние $d=d(M_0,l)$ от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $l: Ax+By+C=0$	$d=d(M_0,l)=\frac{\|Ax_0+By_0+C\|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

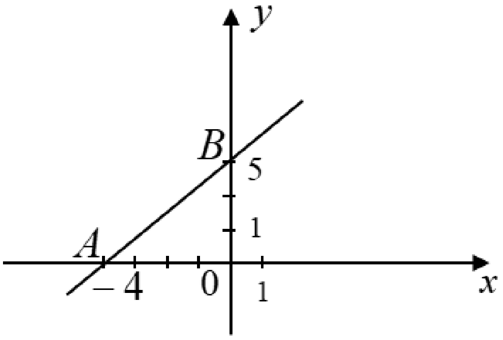
Пример. Построить прямые, описываемые уравнениями:

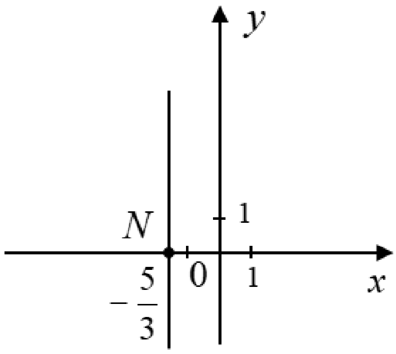
а) $5x-4y+20=0$; б) $3x+5=0$.

Решение а) Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее точек. Удобно брать точки пересечения прямой с осями координат. Пусть A –

точка пересечения прямой $5x-4y+20=0$ с осью Ox, а B – с осью Oy, тогда $y_A=0$, $x_B=0$. Координаты точек A и B удовлетворяют уравнению прямой $5x-4y+20=0$. Поэтому при $y_A=0$ получаем $5x_A+20=0$, $x_A=-4$, то есть $A(-4;0)$, при $x_B=0$, $-4y_B+20=0$, $y_B=5$, то есть $B(0;5)$. Отмечаем точки A и B и проводим через них прямую .

Решение б) Преобразуем уравнение $3x+5=0$ к виду $x=-\frac{5}{3}$. Это уравнение прямой, проходящей через точку $N\left(-\frac{5}{3};0\right)$ параллельно оси Oy.





Пример. Составить общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;4)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha=135^\circ$.

Решение. Найдем угловой коэффициент прямой $k=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}135^\circ=-1$. Подставляя координаты данной точки M_0 и значение углового коэффициента в уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$, получаем искомое уравнение прямой: $y-4=-1\cdot(x-3)$ или $y=-x+7$ или $x+y-7=0$ – общее уравнение прямой.

Пример. Найти острый угол между прямыми, определяемыми уравнениями $5x-y-3=0$ и $3x+2y-7=0$. Найти точку пересечения этих прямых.

Решение. Пусть φ – острый угол между прямыми, тогда $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, где k_1 и k_2 - угловые коэффициенты прямых. Из уравнений прямых найдем k_1 и k_2: $y=5x-3$, то есть $k_1=5$; $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$, то есть $k_2=-\frac{3}{2}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{-\frac{3}{2}-5}{1-\frac{3}{2}\cdot 5}\right|=1,\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Чтобы найти точку пересечения прямых, составим систему:

$$\begin{cases}5x-y-3=0,\\ 3x+2y-7=0.\end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2 и сложив со вторым, получаем $13x-13=0,$ то есть $x=1$. Из первого уравнения находим $y=5x-3=2$. Прямые пересекаются в точке $(1;2)$.

Пример. Даны три вершины трапеции $ABCD$: $A(4;-1)$, $B(-6;-3)$, $C(2;3)$. Найти: а) уравнения оснований BC и AD; б) уравнение высоты BM, проведенной к AD; в) длину высоты BM.

Решение. а) Найдем уравнение BC. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Здесь $(x_1;y_1)$ - координаты точки B, $(x_2;y_2)$ - точки C. Получим $\frac{x+6}{2+6}=\frac{y+3}{3+3}$, $6(x+6)=8(y+3), 3x+18=4y+12,$ то есть уравнение BC:

$$3x-4y+6=0 \text{ или } y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}.$$

Угловой коэффициент BC равен $k_{BC}=\frac{3}{4}$. Основание AD параллельно BC, поэтому угловой коэффициент AD также равен $\frac{3}{4}$. Воспользуемся уравнением $y-y_0=k(x-x_0)$. Здесь $(x_0;y_0)$ – координаты точки A, $k=k_{AD}=\frac{3}{4}$. Получим $y+1=\frac{3}{4}(x-4)$, или $3x-4y-16=0.$

б) Высота BM перпендикулярна AD. Следовательно, $k_{BM}=-\frac{1}{k_{AD}}=-\frac{4}{3}$, а уравнение BM будет иметь вид

$$y+3=-\frac{4}{3}(x+6), \text{или } 3y+9=-4x-24, \text{ или } 4x+3y+33=0.$$

в) Найдем длину высоты BM по формуле расстояния от точки до прямой. Прямая AD задана уравнением $3x-4y-16=0$, точка B имеет координаты $(-6;-3)$. Получаем $BM=\frac{|3\cdot(-6)-4\cdot(-3)-16|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{22}{5}=4,4.$

Пусть даны две непараллельные плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

в прямоугольной декартовой системе координат. Система уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

определяет прямую линию в пространстве в рассматриваемой системе координат. Уравнения называются ***общими уравнениями прямой в пространстве***. Для того чтобы перейти от общих уравнений к каноническим, нужно поступить следующим образом: найти координаты (x_0, y_0, z_0) некоторой точки M_0, принадлежащей этой прямой (найти любую тройку чисел x_0, y_0, z_0, удовлетворяющую системе) и направляющий вектор $\vec{s}(m,n,p)$. В качестве направляющего вектора можно взять векторное произведение нормальных векторов заданных плоскостей

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2],$$

где $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$.

В таблице ниже приведены различные виды уравнения прямой l в пространстве в зависимости от данных, однозначно определяющих эту прямую.

Данные, определяющие прямую	Уравнения прямой l:
Две пересекающиеся плоскости	$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ – прямая как пересечение двух плоскостей
Точка $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$ и вектор $\vec{s} = \{m; n; p\} \parallel l$ – направляющий вектор прямой	$l: \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ – каноническое уравнение прямой
Точка $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$ и направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{m; n; p\} \parallel l$	$l: \begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt, \end{cases}$ – параметрическое $t \in R$
Две точки $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$, $M_2(x_2; y_2; z_2) \in l$	$l: \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ – уравнение прямой по двум заданным точкам

Пусть заданы две прямые l_1 и l_2 каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

l_1: $l_1 \parallel \vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ $\qquad$ l_2: $l_2 \parallel \vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$

Рассмотрим в следующей таблице их взаимное расположение.

Расположение	Условия
Прямые параллельны (или совпадают):	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$
Прямые перпендикулярны	$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \perp \vec{s_2} \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
Расположены под углом φ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ $\varphi=\vec{s_1}\,\hat{}\,\vec{s_2}$?	$\cos\varphi=\frac{\lvert\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2\rvert}{\lvert\vec{s}_1\rvert\cdot\lvert\vec{s}_2\rvert}$

Пусть заданы плоскость Q общим уравнением и прямая l каноническим уравнением:

Q: $Ax+By+Cz+D=0$ $\qquad$ l: $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$

$\vec{n}=\{A;B;C\}\perp Q$ $\qquad$ $\vec{s}=\{m;n;p\}\parallel l$

Рассмотрим их взаимное расположение.

Расположение	Условия
l параллельна плоскости Q (лежит в плоскости)	$l \parallel Q \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$
Прямая l перпендикулярна плоскости Q	$l \perp Q \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$

Прямая l образует с плоскостью Q угол φ	$\sin\varphi = \cos(\vec{s}\,\hat{}\,\vec{n}) = \dfrac{\lvert\vec{s}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{s}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$

Пример. Найти: 1) уравнение прямой l_1, проходящей через точки $M_1(2;3;-4)$ и $M_2(5;3;0)$; 2) уравнение прямой l_2, проходящей через точку $M_0(-1;5;0)$ параллельно прямой l_1.

Решение 1). Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Здесь $(x_1;y_1;z_1)$ – координаты точки M_1, а $(x_2;y_2;z_2)$ – точки M_2. Получим

$$l_1\colon\ \frac{x-2}{5-2}=\frac{y-3}{3-3}=\frac{z+4}{0+4}\ \text{, или}\ \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+4}{4}.$$

Вектор $\vec{s}_1=\{3;0;4\}$ – направляющий вектор прямой l_1.

Решение 2). Воспользуемся каноническим уравнением

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

прямой. Здесь $(x_0;y_0;z_0)$ - координаты точки M_0, а $\{m;n;p\}$ – координаты направляющего вектора прямой l_2. Так как $l_1 \parallel l_2$, а $\vec{s}_1\parallel l_1$, то $\vec{s}_1\parallel l_2$ и можно взять $\{m;n;p\}=\{3;0;4\}$. Получим $l_2\colon\ \frac{x+1}{3}=\frac{y-5}{0}=\frac{z}{4}$.

Так как в дроби $\frac{y-5}{0}$ в знаменателе стоит 0, нужно и числитель приравнять к нулю. Получим

$$\begin{cases} y-5=0, \\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{z}{4} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=5, \\ 4x-3z+4=0. \end{cases}$$

Получили прямую как линию пересечения двух плоскостей.

Пример. Заданы плоскость Q уравнением $2x-y+2z+5=0$ и точка $M_1(1;-3;4)$. Найти уравнение прямой, проходящей через M_1 перпендикулярно плоскости Q и координаты точки пересечения этой прямой с плоскостью Q.

Решение. Вектор нормали $\vec{n}=\{2;-1;2\}$ перпендикулярен плоскости Q и прямая $l\perp Q$, следовательно, $\vec{n}\parallel l$ и может быть взят в качестве направляющего вектора для l. Запишем канонические уравнения прямой l и получим из них параметрическое уравнение:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}=t, \text{ или } \begin{cases} x=2t+1, \\ y=-t-3, \\ z=2t+4. \end{cases}$$

Чтобы найти точку пересечения M_0 плоскости и прямой, выражения для x, y и z из параметрического уравнения прямой подставим в уравнение плоскости и найдем соответствующее значение параметра t:

$$2(2t+1)-(-t-3)+2(2t+4)+5=0,$$

$$9t+18=0, \quad t=-2.$$

Подставляя найденное значение параметра в параметрическое уравнение прямой l, найдем координаты точки M_0:

$$x_0=2(-2)+1=-3, y_0=2-3=-1, \quad z_0=-4+4=0,$$

то есть $M_0(-3;-1;0)$.