# МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

1. **Матрицы, действия над ними**
2. **Определители**
3. **Обратная матрица**
4. **Ранг матрицы**
5. **Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)**

## 1. Матрицы, действия над ними

***Матрицей*** размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел (или других математических объектов) – элементов матрицы, расположенных в $m$ строках и $n$ столбцах:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$a_{ij}$ – элемент, принадлежащий $i$-й строке и $j$-му столбцу матрицы; числа $i$, $j$ называются ***индексами*** элемента.

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами: $A$, $B$, $C$ и т. д. или $A = \left[ a_{ij} \right] = \left[ a_{ij} \right]_{m \times n}$, если указываются элементы и размер матрицы.

Матрицы $A$ и $B$ одинаковых размеров называются ***равными***, если равны их соответствующие элементы:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}}$$

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется ***нулевой***. Она обозначается $O_{m \times n}$. Например, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – нулевая матрица размера $2 \times 3$.

***Квадратной*** матрицей $n$-го порядка называется матрица размера $n \times n$. В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***.

Квадратная матрица называется ***диагональной***, если все ее элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется ***единичной матрицей***. Обозначается $I_n$ или $E_n$. Например, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – единичная матрица 3-го порядка.

## Действия над матрицами

***Суммой (разностью)*** $C = A + B$ $(C = A - B)$ двух матриц $A = \left[ a_{ij} \right]_{m \times n}$ и $B = \left[ b_{ij} \right]_{m \times n}$ называется такая матрица $C = \left[ c_{ij} \right]_{m \times n}$, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц $A$ и $B$, т. е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\left( c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \right)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Отметим, что складывать и вычитать можно только матрицы одинаковых размеров.

***Произведением матрицы*** $A = \left[ a_{ij} \right]_{m \times n}$ ***на число*** $\lambda$ (или числа $\lambda$ на матрицу $A$) называется матрица $C = \left[ c_{ij} \right]_{m \times n}$, элементы которой равны соответствующим элементам матрицы $A$, умноженным на $\lambda$, т. е. $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Записывают $C = \lambda \cdot A$ или $C = A \cdot \lambda$.

Операции сложения, вычитания и умножения на число называют линейными операциями над матрицами. Выражение $\alpha A + \beta B$ называется линейной комбинацией матриц $A$ и $B$.

***Произведением матрицы*** $A$ размера $m \times s$ ***на матрицу*** $B$ размера $s \times n$ называется матрица $C = A \cdot B$ размера $m \times n$, элементы которой равны $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{is} b_{sj}$, т. е. чтобы получить элемент $c_{ij}$, стоящий в $i$-й строке и $j$-м столбце матрицы-произведения, нужно элементы $i$-й строки матрицы $A$ умножить на соответствующие элементы $j$-го столбца матрицы $B$ и полученные произведения сложить. Поэтому говорят, что матрицы умножаются по правилу «**строка на столбец**».

Согласно этому определению, произведение $C = A \cdot B$ матриц $A$ и $B$ существует, если ***матрица*** $A$ ***согласована с матрицей*** $B$ в том смысле, что число столбцов первой из них равно числу строк второй.

Заметим, что в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Матрицы $A$ и $B$, для которых $A \cdot B = B \cdot A$, называются ***коммутирующими*** (***перестановочными***).

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, ***транспонированной*** к данной. Матрицу, транспонированную к матрице $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$, обозначают $A^T = \left[b_{ij}\right]_{n \times m}$, где $b_{ij} = a_{ji}, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$

Если исходная матрица имеет размер $m \times n$, то транспонированная к ней будет иметь размер $n \times m$. Например,

если $B_{2\times3} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, то $B^T_{3\times2} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;

если $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 6 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

## 2. Определители

***Определитель*** является числовой характеристикой **квадратной** матрицы. Определитель матрицы обозначают символами $\det A$, $|A|$ или буквами $D$, $\Delta$ и др. Записывают определитель в виде такой же таблицы, как и матрицу, используя вместо скобок вертикальные линии.

Определитель матрицы вычисляется по следующим правилам.

| |
|---|
| ***Определитель*** квадратной матрицы ***1-го порядка*** равен своему элементу: $\det A = \det\left[a_{11}\right] = a_{11}$ |
| ***Определитель*** квадратной матрицы ***2-го порядка*** вычисляется как произведение элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали: $\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ |

***Определитель*** квадратной матрицы ***3-го порядка*** может быть вычислен одним из следующих способов:

1) ***разложение определителя по 1-й строке:***

$$\det A = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

2) ***правило треугольников***:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - $$
$$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11})$$

(со знаком «плюс» берется сумма произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и двух произведений элементов, стоящих в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, затем берется со знаком «минус» аналогичная конструкция относительно побочной диагонали)

***Определитель*** квадратной матрицы ***$n$-го порядка*** равен сумме произведений элементов строки (или столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения**:**

$$\det\left[a_{ij}\right]_{n\times n} \underset{\substack{\text{разложение}\\ \text{по } i-\text{й строке}}}{=} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} =$$

$$\underset{\substack{\text{разложение}\\ \text{по } j-\text{му столбцу}}}{=} a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – ***алгебраическое дополнение*** к элементу $a_{ij}$ определителя; $M_{ij}$ – ***минор*** элемента $a_{ij}$ – определитель матрицы, получающейся из исходной вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца.

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю ($\det A \neq 0$). В противном случае ($\det A = 0$) матрица $A$ называется ***вырожденной***.

## Свойства определителей

1. При транспонировании матрицы определитель не изменяется: $\det A = \det A^T$.
2. Если у определителя какая-либо строка состоит только из нулей, то такой определитель равен 0.
3. При перестановке двух строк определитель меняет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен 0.

5. Общий множитель элементов строки можно вынести за знак определителя.
6. Если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.
7. Сумма произведений элементов какой-либо строки на алгебраические дополнения соответствующих им элементов другой строки равна 0 («***фальшивое разложение***»).
8. Сумма произведений алгебраических дополнений элементов какой-либо строки определителя на некоторые числа $b_1, b_2, ..., b_n$ равна определителю, который получается из данного заменой указанной строки на числа $b_1, b_2, ..., b_n$.
9. Определитель матрицы, у которой все элементы под главной диагональю равны 0 (***треугольной*** матрицы), равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.
10. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.

*Замечание*. Все свойства определителей, сформулированные для строк, справедливы и для столбцов.

## 3. Обратная матрица

Матрица $A^{-1}$ называется ***обратной*** для **квадратной** матрицы $A$, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где $E$ – единичная матрица того же порядка, что и $A$.

*Замечание*. Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц.

***Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы***: матрица $A$ имеет обратную матрицу $A^{-1}$ тогда и только тогда, когда матриц $A$ невырожденная (т. е. $\det A \neq 0$).

Матрица $A^{-1}$, обратная к невырожденной матрице $A = \left[ a_{ij} \right]$, вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left[ A_{ij} \right]^T,$$

где элемент $A_{ij}$ матрицы $\left[ A_{ij} \right]$ является алгебраическим дополнением к элементу $a_{ij}$ матрицы $A$.

## Свойства обратной матрицы

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
3. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.
4. $(\lambda \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$, где $\lambda$ - число.
5. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, где $A, B$ - невырожденные матрицы.

## 4. Ранг матрицы

Понятие ранга вводится для любых, не только для квадратных, матриц.

Пусть $A$ - матрица размера $m \times n$. ***Минором порядка*** $k$ матрицы $A$ называется определитель $k$-го порядка, который получается на пересечении $k$ произвольных строк и $k$ произвольных столбцов матрицы $A$.

***Рангом*** матрицы называется наивысший порядок отличных от 0 миноров матрицы.

Ранг матрицы $A$ обозначают $\text{rang } A, \text{rank } A, r(A), r_A$.

Существуют так называемые **элементарные преобразования** матриц, которые не изменяют ранга матрицы:

- перестановка местами двух строк матрицы;

- умножение всех элементов какой-либо строки матрицы на одно и то же число, отличное от 0;

- прибавление ко всем элементам какой-либо строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Аналогично определяются элементарные преобразования над столбцами матрицы.

Если матрица $B$ получена из матрицы $A$ с помощью элементарных преобразований, то матрицы $A$ и $B$ называют эквивалентными и пишут $A \sim B$ или $A \to B$.

## Свойства ранга матрицы

1. $\text{rang}\, A_{m\times n} \le \min\{m; n\}$.
2. При транспонировании ранг матрицы не изменяется: $\text{rang}\, A^T = \text{rang}\, A$.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матриц.
4. $\text{rang}\, A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ - нулевая матрица.
5. $\text{rang}\, A_{n\times n} = n \quad \Leftrightarrow \quad \det A \ne 0$.
6. $\text{rang}\,(AB) \le \min\{\text{rang}\, A; \text{rang}\, B\}$.

## 5. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

***Система*** $m$ уравнений с $n$ неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ называется ***линейной (системой линейных алгебраических уравнений, СЛАУ)***, если она имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

где $a_{ij}$ – коэффициенты при неизвестных и $b_i$ – свободные члены ( $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ ) – заданные числа.

Упорядоченный набор чисел $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$ называется ***решением системы***, если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***.

Совместная система уравнений называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения. Неопределенная СЛАУ имеет бесконечно много решений.

Две системы уравнений называются эквивалентными или равносильными, если любое решение одной из них является также решением другой и наоборот.

СЛАУ, у которой все свободные члены равны нулю, называется ***однородной***. Однородная система всегда совместна, т. к. она всегда имеет нулевое решение.

СЛАУ удобно записывать в компактной матричной форме. СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

эквивалентна матричному уравнению

$$\boxed{A \cdot X = B,}$$

где матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ называется ***(основной) матрицей системы***, матрица-столбец $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ - ***столбцом неизвестных***, матрица-столбец $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$ - ***столбцом свободных членов***.

Матрица $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ называется ***расширенной матрицей системы.***

***Теорема Кронекера-Капелли.*** СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы этой системы, при этом:

если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение;

если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много решений.

## Методы решения СЛАУ

**1.** ***Метод Гаусса***, или ***метод последовательного исключения неизвестных***, является наиболее универсальным методом решения СЛАУ. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Процесс решения СЛАУ по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе (**прямой ход**) система приводится к равносильной системе ступенчатого, в частности треугольного вида, с помощью следующих преобразований:

- перестановка двух уравнений;
- умножение уравнения на число, отличное от 0;
- прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число.

При этом сначала исключается переменная $x_1$ из всех уравнений, кроме первого, затем переменная $x_2$ из всех уравнений, кроме первого и второго, и т. д.

В результате может оказаться, что в нескольких последних уравнениях исключены все переменные, т. е. эти уравнения имеют вид

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b \text{ или } 0 = b.$$

Если хотя бы в одном из этих уравнений свободный член отличен от нуля, то система несовместна. Если во всех этих уравнениях свободные члены равны нулю или таких уравнений нет, то система совместна.

На втором этапе (**обратный ход**) идет последовательное определение неизвестных из полученной системы, начиная с последних по номеру.

Если в полученной системе ступенчатого вида имеется хотя бы одно уравнение вида $0 = b$, где $b \neq 0,$ то система несовместна.

Пусть в полученной ступенчатой системе таких уравнений нет, обозначим через $r$ количество уравнений ступенчатой системы, в которых не все коэффициенты левой части равны нулю, при этом $r \le n$.

Если $r = n$, то система имеет единственное решение. В этом случае из последнего уравнения находим $x_n$, затем, подставляя $x_n$ в предпоследнее уравнение, находим $x_{n-1}$. Продолжая этот процесс, найдем единственное решение системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если в ступенчатой системе $r < n$, то из последнего уравнения системы выражаем одну переменную через остальные $n - r$ переменных, которые в этом случае называются ***свободными***. Затем подставляем полученное значение в предпоследнее уравнение и выражаем еще одну переменную через те же $n - r$ свободных переменных. Продолжая этот процесс, выразим $r$ неизвестных через свободные переменные. Придавая свободным переменным произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

**2. Матричный метод решения невырожденных систем.**

СЛАУ, содержащая $n$ уравнений с $n$ неизвестными, называется ***невырожденной***, если ее матрица $A$ является невырожденной (т. е. $\det A \ne 0$). В этом случае существует обратная матрица $A^{-1}$ и решение СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

может быть найдено ***матричным методом*** (***методом обратной матрицы***) как решение матричного уравнения

$$\boxed{A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B,}$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$.

*Замечание*. Матричный метод применим только для решения невырожденных систем $n$ уравнений с $n$ неизвестными.

**3.** ***Метод Крамера*** позволяет найти решение невырожденной СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

с помощью определителей.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, называется ***определителем системы***. Если определитель системы отличен от нуля: $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по ***формулам Крамера***

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},}$$

где $\Delta_j$ $(j = \overline{1,n})$ – определитель, полученный из $\Delta$ заменой $j$-го столбца столбцом свободных членов системы.