КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Комплексные числа

Пример 1. Даны комплексные числа: $z_1 = -2$, $z_2 = i$, $z_3 = 1+2i$, $z_4 = -3+i$, $z_5 = \overline{1+2i}$.

Решение. Изобразим числа $z_1, \ldots, z_5$ точками на комплексной плоскости. Поскольку $\overline{1+2i} = 1-2i$, имеем (рис. 1)

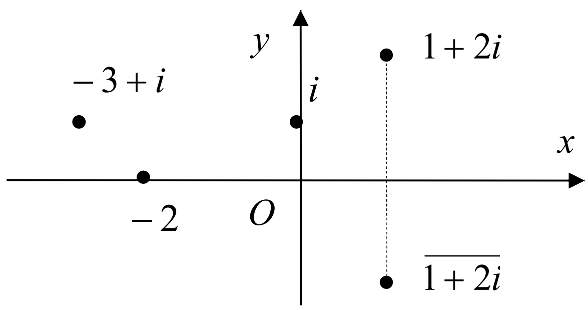

Рис. 1

Число $z = x+iy$	Действительная часть $\operatorname{Re} z = x$	Мнимая часть $\operatorname{Im} z = y$	Сопряженное число $\bar{z} = x - iy$
$z_1 = -2+0i$	$\operatorname{Re} z_1 = -2$	$\operatorname{Im} z_1 = 0$	$\bar{z}_1 = -2-0i = -2$
$z_2 = 0+1i$	$\operatorname{Re} z_2 = 0$	$\operatorname{Im} z_2 = 1$	$\bar{z}_2 = 0-1i = -i$
$z_3 = 1+2i$	$\operatorname{Re} z_3 = 1$	$\operatorname{Im} z_3 = 2$	$\bar{z}_3 = 1-2i$
$z_4 = -3+i$	$\operatorname{Re} z_4 = -3$	$\operatorname{Im} z_4 = 1$	$\bar{z}_4 = -3-i$

Пример 2. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_2}{z_1}$, если $z_1 = 3-2i$, $z_2 = -1+4i$.

Решение. $z_1 + z_2 = (3-2i) + (-1+4i) = (3-1) + i(-2+4) = 2+2i$;

$z_1 - z_2 = (3-2i) - (-1+4i) = (3-(-1)) + i(-2-4) = 4-6i$;

$z_1 z_2 = (3-2i)(-1+4i) = -3+12i+2i-8i^2 = -3+14i+8 = 5+14i$;

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{-1+4i}{3-2i}=\frac{(-1+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-3-2i+12i-8}{9+4}=-\frac{11}{13}+\frac{10}{13}i\,.$$

Пример 3. Записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число $z=\sqrt{3}-i$.

Решение. Применяя формулы, находим $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$, $\cos\phi=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\phi=\frac{y}{r}=-\frac{1}{2}$, откуда главное значение $\varphi=\frac{11}{6}\pi$. Следовательно, тригонометрическая форма данного числа имеет вид $z=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$, а показательная – $z=2e^{i\frac{11}{6}\pi}$.

Пример 4. Выполнить действия $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, ${z_1}^4$ над комплексными числами в тригонометрической форме, если $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=-1+i$.

Решение. Поскольку $z_1=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$ (см. выше), запишем в тригонометрической форме число z_2. Имеем $|z_2|=r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\cos\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда главное значение $\varphi=\frac{3}{4}\pi$. Следовательно, $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$.

Применяя формулы умножения, деления и возведения в степень, получим

$$z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{3}{4}\pi\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{31}{12}\pi+i\sin\frac{31}{12}\pi\right)=$$

$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right),$$

$$z_1^{\,4} = 2^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{11}{6}\pi\right)\right) = 16\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -8 - 8\sqrt{3}i\,.$$

Пример 5. Извлечь корень 3–ей степени из комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$.

Решение. Имеем

$$\sqrt[3]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[3]{2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{11}{6}\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{11}{6}\pi + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$. Отсюда $\left(\sqrt[3]{z}\right)_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{18}\pi + i\sin\frac{11}{18}\pi\right)$,

$\left(\sqrt[3]{z}\right)_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{23}{18}\pi + i\sin\frac{23}{18}\pi\right)$, $\left(\sqrt[3]{z}\right)_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{35}{18}\pi + i\sin\frac{35}{18}\pi\right)$.

Значения $\left(\sqrt[3]{z}\right)_0$, $\left(\sqrt[3]{z}\right)_1$, $\left(\sqrt[3]{z}\right)_2$ на комплексной плоскости изображаются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[3]{2}$ с центром в начале координат.

2. Многочлены

Пример 1. Найти все корни многочлена $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4$.

Решение. 1) Составим таблицу, в которую запишем все возможные числа $\frac{p}{q}$ в соответствии с условием теоремы. Поскольку свободный член многочлена равен $a_n = 4$, то p может принимать значения $\pm 1; \pm 2; \pm 4$. Старший коэффициент $a_0 = 4$, поэтому q может быть $1; 2; 4$.

$q \backslash p$	1	−1	2	−2	4	−4
1	1	−1	2	−2	4	−4
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	−1	2	−2
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	−1

Проверяем, являются ли эти числа корнями многочлена, начиная с самых простых значений.

При $x=1$ многочлен принимает значение

$$4\cdot 1^4-8\cdot 1^3+3\cdot 1^2-8\cdot 1+4=4-8+3-8+4=-5\neq 0,$$

поэтому $x=1$ не является корнем этого многочлена.

При $x=-1$ получаем

$$4\cdot(-1)^4-8\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)+4=4+8+3+8+4=27\neq 0,$$

т. е. $x=-1$ не является корнем. Нетрудно также видеть, что никакое отрицательное число не будет корнем этого многочлена, поскольку при отрицательных x многочлен принимает строго положительные значения.

Следующее число $x=2$ – корень многочлена, так как

$$4\cdot 2^4-8\cdot 2^3+3\cdot 2^2-8\cdot 2+4=64-64+12-16+4=0.$$

Разделим многочлен на $x-2$ по правилу деления многочленов «уголком».

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -8x^3 & +3x^2 & -8x & +4 & x-2 \\ \cline{6-6}
4x^4 & -8x^3 & & & & 4x^3+3x-2 \\ \cline{1-3}
 & & 3x^2 & -8x & +4 & \\
 & & 3x^2 & -6x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -2x & +4 & \\
 & & & -2x & +4 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Следовательно, $4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=(x-2)(4x^3+3x-2)$ и

$$4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)(4x^3+3x-2)=0;$$

$$x-2=0 \quad \text{или} \quad 4x^3+3x-2=0.$$

Корнем первого уравнения является $x_1 = 2.$ Для решения второго уравнения снова применим теорему 5.

2) Составим таблицу, в которую запишем все возможные числа $\dfrac{p}{q}$ в соответствии с условием теоремы. Поскольку свободный член многочлена $4x^3 + 3x - 2$ равен $a_n = -2,$ то p может принимать значения $\pm 1; \pm 2.$ Старший коэффициент $a_0 = 4,$ поэтому q может быть $1; 2; 4.$

$q \backslash p$	1	-1	2	-2
1	1	-1	2	-2
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Проверяем, являются ли эти числа корнями многочлена. При этом учтем, что числа $x = \pm 1$ не являются корнями исходного многочлена, а значит, не могут быть и корнями второго многочлена, который является делителем первого. Кроме этого, как указано выше, никакое отрицательное число не будет корнем этого многочлена.

Проверим $x = 2,$ которое может оказаться кратным корнем исходного многочлена:

$$4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = 32 + 6 - 2 = 36 \neq 0.$$

Значит, число $x = 2$ не является корнем нового многочлена.

Следующее число $x = \dfrac{1}{2}$ – корень многочлена, так как

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = 0.$$

Разделим многочлен $4x^3 + 3x - 2$ на $x - \dfrac{1}{2}$ или, для удобства расчетов, на $2x - 1.$

$$\begin{array}{llll|l}
4x^3 & & +3x & -2 & 2x-1 \\ \cline{5-5}
\underline{4x^3} & \underline{-2x^2} & & & 2x^2 + x + 2
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rrr}
\hline
2x^2 & +\,3x & -\,2 \\
2x^2 & -\,x & \\
\cline{1-2}
 & 4x & -\,2 \\
 & 4x & -\,2 \\
\cline{2-3}
 & & 0
\end{array}
$$

Следовательно, $4x^3+3x-2=(2x-1)(2x^2+x+2)$ и

$$4x^3+3x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)(2x^2+x+2)=0;$$

$$2x-1=0 \quad \text{или} \quad 2x^2+x+2=0.$$

Корнем первого уравнения является $x_2=\dfrac{1}{2}$. Второе уравнение решим с помощью дискриминанта:

$$D=1^2-4\cdot 2\cdot 2=-15=(\sqrt{15}i)^2;$$

$$x_{3;\,4}=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}.$$

Таким образом, корнями исходного многочлена являются числа $x_1=2;\ x_2=\dfrac{1}{2};\ x_{3;\,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$.

Пример 2. Используя решение предыдущего примера, запишем разложение многочлена $4x^4-8x^3+3x^2-8x+4$ на множители:

1) на множестве комплексных чисел:

$$4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=$$
$$=2(x-2)(2x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{15}i}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{15}i}{4}\right);$$

2) на множестве действительных чисел (т. е. с действительными коэффициентами):

$$4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=(x-2)(2x-1)(2x^2+x+2),$$

поскольку дискриминант квадратного трехчлена меньше 0.