ПРОИЗВОДНАЯ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти производные первого порядка функций:

1) $y=\dfrac{4}{x^2}+\sqrt[5]{7x}-2$; 2) $y=\cos^2 x\cdot\sin x$;

3) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2}$; 4) $y=\sin^3(\ln 5x)$.

Решение.

1) Применим формулу производной суммы, затем представим первое и второе слагаемые как произведение числа и степенной функции и применим формулу для производной степени.

$$y'=\left(\frac{4}{x^2}+\sqrt[5]{7x}-2\right)'=\left(\frac{4}{x^2}\right)'+\left(\sqrt[5]{7x}\right)'-(2)'=4\left(x^{-2}\right)'+\sqrt[5]{7}\left(x^{1/5}\right)'-0=$$

$$=4\cdot(-2)x^{-3}+\sqrt[5]{7}\,\frac{1}{5}x^{-4/5}=-\frac{8}{x^3}+\frac{\sqrt[5]{7}}{5\sqrt[5]{x^4}}=-\frac{8}{x^3}+\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{7}{x^4}}\,.$$

2) применим формулу производной произведения, затем формулы из таблицы производных для производных степени, синуса и косинуса.

$$y'=\left(\cos^2 x\cdot\sin x\right)'=\left[u=\cos^2 x, v=\sin x, (uv)'=u'v+uv'\right]=$$

$$=\left(\cos^2 x\right)'\cdot\sin x+\cos^2 x\cdot(\sin x)'=\left[\left(\cos^2 x\right)'=\left(u^2\right)'=2u\cdot u', u=\cos x\right]=$$

$$=2\cos x\cdot(\cos x)'\cdot\sin x+\cos^2 x\cdot\cos x=2\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\sin x+$$

$$+\cos^3 x=-2\cos x\sin^2 x+\cos^3 x=\cos^3 x-2\cos x\sin^2 x\,\cdot$$

3) применим формулу производной частного и формулы для производной арктангенса и производной степени из таблицы производных, учтем, что производная числа равна 0.

$$y'=\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\right)'=\left[u=\operatorname{arctg}x, v=1+x^2, \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\right]=$$

$$=\frac{(\operatorname{arctg}x)'\cdot\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctg}x\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctg}x\cdot(0+2x)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-2x\cdot\operatorname{arctg}x}{\left(1+x^2\right)^2}\,.$$

4) Используем формулы для производной степенной функции, производной синуса и производной логарифма из таблицы производных.

$$y' = \left(\sin^3\left(\ln 5x\right)\right)' = \left[\left(u^3\right)' = 3u^2 \cdot u', u = \sin\left(\ln 5x\right)\right] = 3\sin^2\left(\ln 5x\right)\cdot\left(\sin\left(\ln 5x\right)\right)' =$$

$$= \left[\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u', u = \ln 5x\right] = 3\sin^2\left(\ln 5x\right)\cdot\cos\left(\ln 5x\right)\cdot\left(\ln 5x\right)' =$$

$$= \left[\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}u', u = 5x\right] = 3\sin^2\left(\ln 5x\right)\cdot\cos\left(\ln 5x\right)\frac{1}{5x}\left(5x\right)' =$$

$$= 3\sin^2\left(\ln 5x\right)\cdot\cos\left(\ln 5x\right)\frac{1}{5x}5 = 3\sin^2\left(\ln 5x\right)\cdot\cos\left(\ln 5x\right)\frac{1}{x}\cdot$$

Пример 2. Найти производные указанного порядка:

1) $y = xe^x, y'''(x)$; 2) $y = \ln(\cos x), y''(x)$.

Решение.

1) $y' = \left(xe^x\right)' = (x)'e^x + x\left(e^x\right)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$,

$$y'' = \left(e^x(x+1)\right)' = \left(e^x\right)'(x+1) + e^x(x+1)' = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2),$$

$$y''' = \left(e^x(x+2)\right)' = e^x(x+2) + e^x = e^x(x+3)\cdot$$

2) $y' = \left(\ln(\cos x)\right)' = \dfrac{1}{\cos x}(\cos x)' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$,

$$y'' = (-\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $y = 5^{\operatorname{tg} x}\sqrt{x} + \sin^3 2x - \log_3 6$.

Решение. Воспользуемся формулой $dy = y'_x dx$.

$$dy = \left(5^{\operatorname{tg} x}\sqrt{x} + \sin^3 2x - \log_3 6\right)' dx = \left(\left(5^{\operatorname{tg} x}\right)'\sqrt{x} + 5^{\operatorname{tg} x}\left(\sqrt{x}\right)' + \left(\sin^3 2x\right)' - \left(\log_3 6\right)'\right)dx =$$

$$= \left(5^{\operatorname{tg} x}\ln 5\left(\operatorname{tg} x\right)'\sqrt{x} + 5^{\operatorname{tg} x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3\sin^2 2x\left(\sin 2x\right)' + 0\right)dx =$$

$$= \left(5^{\operatorname{tg} x}\ln 5\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{5^{\operatorname{tg} x}}{2\sqrt{x}} + 3\sin^2 2x\cdot\cos 2x\left(2x\right)'\right)dx =$$

$$= \left(5^{\operatorname{tg} x}\ln 5\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{5^{\operatorname{tg} x}}{2\sqrt{x}} + 6\sin^2 2x\cdot\cos 2x\right)dx.$$

Пример 4. Найти дифференциал функции $y = \left(2x - x^2\right)^5$ в точке $x = 3$ при $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. $dy = \left(\left(2x - x^2\right)^5\right)' dx = 5\left(2x - x^2\right)^4 \left(2x - x^2\right)' dx = 5\left(2x - x^2\right)^4 \left(2 - 2x\right) dx$

в точке $x = 3$ при $dx = \Delta x = 0{,}1$ имеем: $dy = 5\left(2 \cdot 3 - \left(-3\right)^2\right)^4 \left(2 - 2 \cdot 3\right) 0{,}1 = -162$.

Пример 5. Проверить удовлетворяет ли функция $y = 2e^{-3x}$ соотношению $2y'' + 3y' - 9y = 0$.

Решение.

Для решения задачи нужно найти производные первого и второго порядка функции $y = 2e^{-3x}$ и подставить их вместе с самой функцией в заданное соотношение.

$$y' = \left(2e^{-3x}\right)' = 2\left(e^{-3x}\right)' = 2e^{-3x}\left(-3x\right)' = -6e^{-3x},$$

$$y'' = \left(-6e^{-3x}\right)' = -6\left(e^{-3x}\right)' = -6e^{-3x}\left(-3x\right)' = 18e^{-3x}.$$

Подставляем:

$$2 \cdot 18e^{-3x} + 3 \cdot \left(-6\right)e^{-3x} - 9 \cdot 2e^{-3x} = 0.$$

В итоге получим:

$$\left(36 - 18 - 18\right)e^{-3x} = 0$$

$$0 \cdot e^{-3x} = 0$$

$$0 = 0$$

Получили тождество. Следовательно, функция удовлетворяет соотношению.

Пример 6. Чему равно выражение $y'' - 4y' + 4y$ для функции $y = \cos 3x + xe^{2x}$?

Решение.

Для решения задачи нужно найти производные первого и второго порядка функции $y = \cos 3x + xe^{2x}$ и подставить их вместе с самой функцией в заданное соотношение.

$$y' = \left(\cos 3x + xe^{2x}\right)' = \left(\cos 3x\right)' + x'e^{2x} + x\left(e^{2x}\right)' =$$

$$= -\sin 3x \cdot \left(3x\right)' + e^{2x} + xe^{2x}\left(2x\right)' = -3\sin 3x + e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$y'' = \left(-3\sin 3x + e^{2x} + 2xe^{2x}\right)' = -3\left(\sin 3x\right)' + \left(e^{2x}\right)' + \left(2x\right)' e^{2x} + 2x\left(e^{2x}\right)' =$$

$$= -9\cos 3x + 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x} = -9\cos 3x + 4e^{2x} + 4xe^{2x}.$$

Подставляем и приводим подобные слагаемые:

$$\left(-9\cos 3x + 4e^{2x} + 4xe^{2x}\right) - 4\left(-3\sin 3x + e^{2x} + 2xe^{2x}\right) + 4\left(\cos 3x + xe^{2x}\right) =$$

$$= \underline{-9\cos 3x} + \underline{\underline{4e^{2x}}}\,\underline{\underline{\underline{+4xe^{2x}}}} + 12\sin 3x\underline{\underline{-4e^{2x}}}\,\underline{\underline{\underline{-8xe^{2x}}}} + \underline{4\cos 3x}\,\underline{\underline{\underline{+4xe^{2x}}}} = 12\sin 3x - 5\cos 3x$$

Таким образом, выражение $y'' - 4y' + 4y$ для функции $y = \cos 3x + xe^{2x}$ равно $12\sin 3x - 5\cos 3x$.