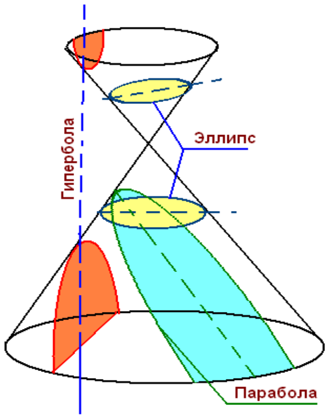
Кривые второго порядка как конические сечения



Впервые кривые второго порядка изучались древнегреческим математиком Менехмом (ок. 380 г. – ок. 320 г. до н.э.). Его работа заключалась в следующем: если взять две пересекающиеся прямые и вращать их вокруг биссектрисы угла, ими образованного, то получится коническая поверхность (бесконечный в обе стороны конус). Если же пересечь эту поверхность плоскостью, то в сечении получаются различные геометрические фигуры:

- если плоскость пересекает одну половину конуса, получается эллипс;
- если плоскость пересекает обе половины конуса, то гипербола;
- если плоскость параллельна образующей конуса, получается парабола.

Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII в., когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической. Еще позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости – по эллипсу, при достижении второй космической скорости – по параболе, а при скорости, большей второй космической – по гиперболе. Для Земли вторая космическая скорость равна 11,16 км/с. Тело, имеющее около Земли такую скорость, покидает окрестности Земли и становится спутником Солнца. Для Солнца вторая космическая скорость составляет 617,7 км/с.

Оптические свойства эллипса и гиперболы заключаются в том, что отрезки, проведенные из фокусов к некоторой точке эллипса (гиперболы), образуют равные углы с касательной.

В связи с этим если в один из фокусов эллиптического зеркала поместить источник света, то лучи, отразившись, соберутся в другом фокусе (луч отражается от касательной к эллипсу по правилу «угол падения равен углу отражения»). Если источником является, например, свеча, то предмет, помещенный в другой фокус, может загореться. Отсюда и происходит термин «фокус» (лат. focus – «очаг»), введенный И. Кеплером. На этом свойстве основаны некоторые эффекты с распространением звуковых волн в зданиях с овальными стенами, сводами и др., когда шепотом произнесенное слово в одном из фокусов оказывается слышно в другом.

В результате отражения в гиперболическом зеркале не лучи, исходящие из фокуса, а их продолжения соберутся в другом фокусе: они создадут иллюзию, что источник света находится в другом фокусе.

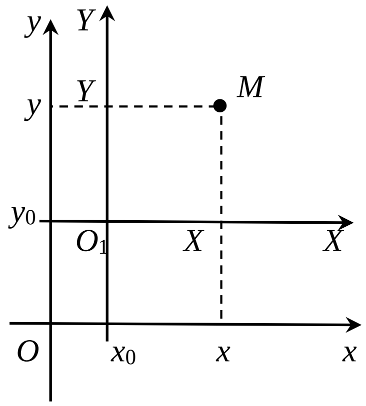
Существует и *оптическое свойство параболы*: параболическое зеркало собирает в одной точке параллельные лучи; в частности, лучи, параллельные оптической оси, собираются в фокусе параболы.

На этом свойстве основано действие зажигательных зеркал, собирающих параллельные солнечные лучи в одной точке. Согласно легенде, Архимед использовал этот принцип при обороне Сиракуз от римлян, поджигая таким образом вражеские корабли. Оптическое свойство параболы широко применяется сегодня в самых различных сферах жизни: карманный фонарик, автомобильные фары, прожекторы и т. д. Широкое применение нашли параболические зеркала и в конструкции телескопов.

§5. Кривые второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Пусть даны две системы Oxy и O_1XY декартовых координат на плоскости с разными началами O и O_1 и одинаковым направлением осей. Пусть $O_1(x_0; y_0)$ в системе координат на Oxy. Пусть M – произвольная точка на плоскости. Обозначим через $M(x; y)$ ее координаты в системе координат Oxy; через $M(X; Y)$ – в системе координат O_1XY. Тогда

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0. \end{cases}$$



Пусть имеется эллипс с центром $O_1(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям *Ox* и *Oy*, его уравнение в новой системе координат

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

а значит, в системе координат *Oxy* уравнение эллипса примет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично для гиперболы с центром $O_1(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям *Ox* и *Oy* (если действительная ось параллельна *Ox*), имеем:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

для параболы с вершиной $O_1(x_0; y_0)$ получим

$$Y^2 = \pm 2pX \quad \Leftrightarrow \quad (y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0),$$

если ось симметрии параллельна *Ox*;

$$X^2 = \pm 2pY \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0),$$

если ось симметрии параллельна *Oy*.

Заметим, что после преобразований все эти уравнения могут быть записаны в виде

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22} не равен 0.

Для того, чтобы определить тип кривой второго порядка, имея уравнение общего вида, нужно получить ее каноническое уравнение, выделив полный квадрат по каждой переменной. Таким образом, уравнение приводится к каноническому виду с помощью замены переменных

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0, \end{cases}$$

которая сводится к параллельному переносу системы координат.

*Пример***.** Построим линию $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0.$

Решение. Выделим полный квадрат по x и по y и приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

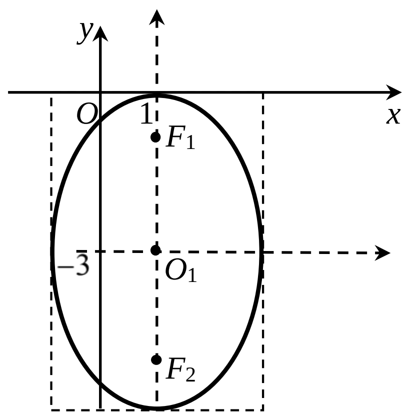
$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 6y) + 9 = 0;$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 6y + 9) - 36 + 9 = 0;$$

$$9(x-1)^2 + 4(y+3)^2 = 36;$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$$

Получили уравнение эллипса с центром в точке $O_1(1; -3)$ и полуосями $a = 2; b = 3$ (рис. 30).



Отметим, что у этого эллипса $a=2$ – малая полуось, а $b=3$ – большая. Фокусы эллипса лежат на его большой оси.

Найдем дополнительно координаты фокусов эллипса. Эти точки будут расположены симметрично относительно центра $O_1(1;-3)$ эллипса на расстоянии c от него, поэтому $F_1(1;-3+c); F_2(1;-3-c)$. Величину c найдем из условия $c^2=3^2-2^2=5,$ поэтому $c=\sqrt{5},$ а значит

$$F_1(1;-3+\sqrt{5}); F_2(1;-3-\sqrt{5}). \bullet$$

*Пример***.** Построить линию $x^2+3y^2-4x+20=0.$

Решение. Выделяя полный квадрат по x, получим

$$(x^2-4x+4)-4+3y^2+20=0;$$

$$(x-2)^2+3y^2=-16.$$

Очевидно, что этому уравнению никакая линия не соответствует.

*Пример***.** Построить линию $x^2-4y^2+16y=0.$

Решение. Выделим полный квадрат по y и приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

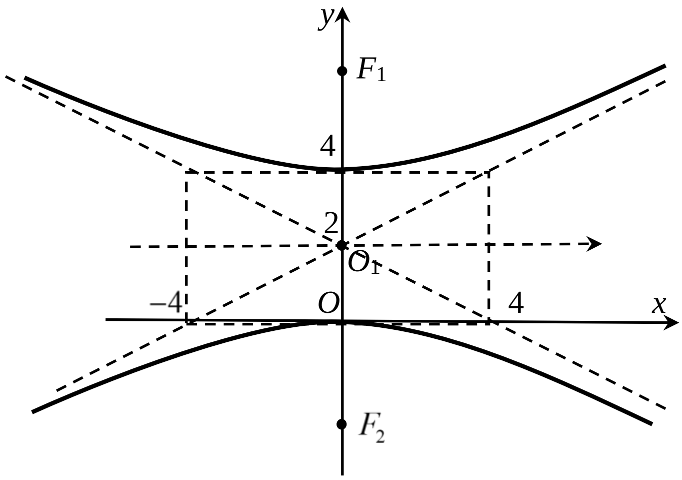
$$x^2-4(y^2-4y)=0;$$

$$x^2-4(y^2-4y+4)+16=0;$$

$$x^2-4(y-2)^2=-16;$$

$$-\frac{x^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1.$$

Получили уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(0;2)$ и полуосями $a=4; b=2,$ причем a – мнимая, b – действительная полуоси.



Эта гипербола проходит через начало координат – точку с координатами $x=0;\ y=0,$ что хорошо видно из исходного уравнения. Ее фокусы лежат на действительной оси симметрично относительно центра $O_1(0;\,2)$ гиперболы на расстоянии c от него, поэтому $F_1(0;\,2+c);\ F_2(0;\,2-c).$ Величину c найдем из условия

$$c^2=4^2+2^2=20,$$

поэтому $c=2\sqrt{5},$ а значит $F_1(0;\,2+2\sqrt{5});\ F_2(0;\,2-2\sqrt{5}).$ •

Пример. Построим линию $y^2-4x-4y-8=0.$

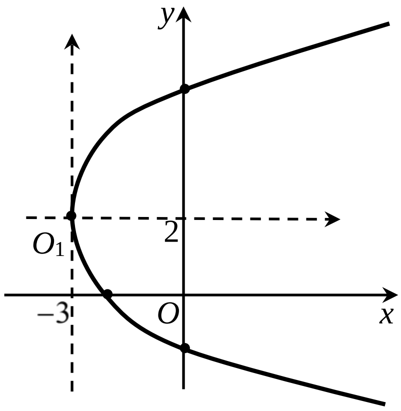
Решение. Выделим полный квадрат по y и приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

$$(y^2-4y+4)-4-4x-8=0;$$

$$(y-2)^2=4x+12;$$

$$(y-2)^2=4(x+3).$$

Получили уравнение параболы с вершиной $O_1(-3;\,2)$ и осью симметрии $y=2.$ Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, то $x\ge -3,$ а значит, ветви параболы направлены вправо. Для уточнения рисунка, найдем точки пересечения параболы с осями координат. На оси Ox переменная $y=0,$ поэтому из исходного уравнения получим $-4x-8=0;$ $x=-2.$ На оси Oy переменная $x=0,$ из последнего уравнения получаем $(y-2)^2=12;$ $y=2\pm 2\sqrt{3}.$



*Пример***.** Построим линию $x^2-2x-y^2+1=0$.

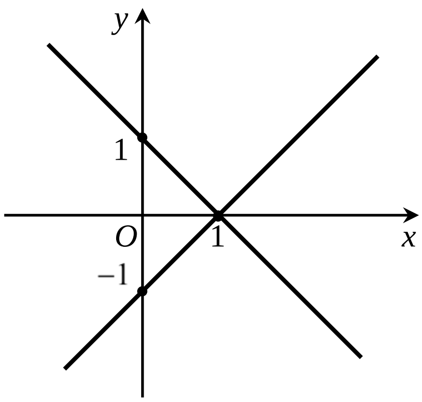
Решение. Выделяя полный квадрат по *x*, получим

$$(x-1)^2-y^2=0.$$

Раскладывая левую часть на множители, имеем:

$$(x-1-y)(x-1+y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-1-y=0, \\ x-1+y=0. \end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение задает на плоскости две пересекающиеся прямые $x-y=1$ и $x+y=1$.



Теорема. Всякое алгебраическое уравнение 2-го порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0,$$

(в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равен 0) задает одну из следующих линий на плоскости: эллипс (возможно, вырожденный эллипс вида $x^2+y^2=0$ (точка) или мнимый эллипс вида $x^2 + y^2 = -1$), гиперболу, параболу или пару прямых (пересекающихся, параллельных или совпадающих).

Преобразование уравнения к каноническому виду осуществляется с помощью замены переменных вида

$$\begin{cases} X = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + c_1, \\ Y = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + c_2, \end{cases}$$

которая сводится к повороту и параллельному переносу системы координат.

§6. Поверхности второго порядка. Метод сечений

Поверхностью 2-го порядка называется поверхность, определяемая в декартовой прямоугольной системе координат в пространстве алгебраическим уравнением 2-й степени с тремя переменными, т. е. уравнением вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не равен 0.

В зависимости от значений коэффициентов это уравнение определяет поверхности следующих типов:

1) ***эллиптический*** (эллипсоид, частный случай – сфера);

2) ***гиперболический*** (однополостный и двуполостный гиперболоиды, коническая поверхность);

3) ***параболический*** (эллиптический и гиперболический параболоиды);

4) ***цилиндрические*** поверхности (эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры, пара пересекающихся или пара параллельных плоскостей).

Для того чтобы определить тип поверхности, ее уравнение приводят к наиболее простому ***каноническому виду***. Как и в случае кривых 2-го порядка, это можно сделать с помощью замены переменных, которая сводится к повороту и параллельному переносу системы координат.

При изучении формы поверхностей используется ***метод сечений***, который состоит в том, что поверхность рассекают плоскостями и по виду линий пересечения делают вывод о форме самой поверхности. Для простоты в качестве секущих плоскостей рассматривают координатные плоскости и им параллельные.

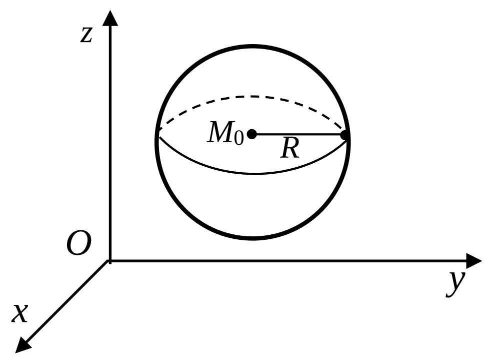
Сфера

Сфера – множество точек пространства, равноудаленных от данной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, которая называется ***центром сферы***. Расстояние R от центра до точек сферы называется ее ***радиусом***.

Если $M(x; y; z)$ – произвольная точка на сфере, то, по определению, расстояние от точки M до точки M_0 должно быть равно R, поэтому

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R \text{ или}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$



Если $x_0=0; y_0=0; z_0=0,$ то уравнение сферы с центром в начале координат имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Эллипсоид

Эллипсоид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Для исследования формы этой поверхности применим метод сечений. Будем пересекать данную поверхность плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy. При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z = h$ (в системе координат с началом в точке $(0; 0; h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

При $h = 0$ (в плоскости Oxy) получим эллипс с полуосями a и b. При $|h| < c$ получим линию

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$

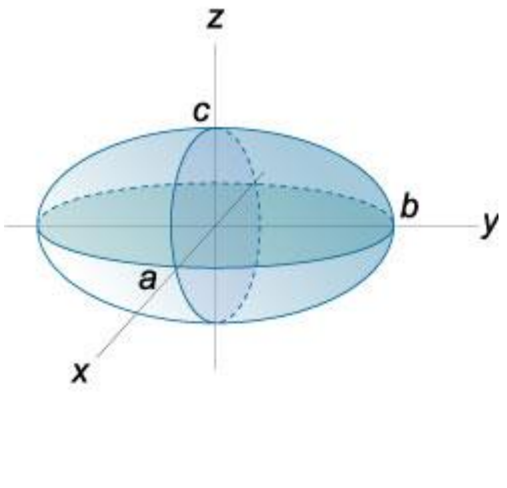
Это уравнение определяет эллипс, полуоси которого $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \le a$; $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \le b$ и уменьшаются с возрастанием $|h|$.

При $|h| = c$ получим точку.

При $|h| > c$ плоскость не пересекается с эллипсоидом.

Аналогичная картина имеет место при пересечении эллипсоида плоскостями $y = h$ и $x = h$.

Таким образом, в сечении эллипсоида любой плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей, можно получить пустое множество, точку или эллипс.



Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Исследуем форму этой поверхности методом сечений.

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h,$ параллельными плоскости Oxy. При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z=h$ (в системе координат с началом в точке $(0; 0; h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

При $h=0$ (в плоскости Oxy) получим эллипс с полуосями a и b. При $h\neq 0$ получим линию

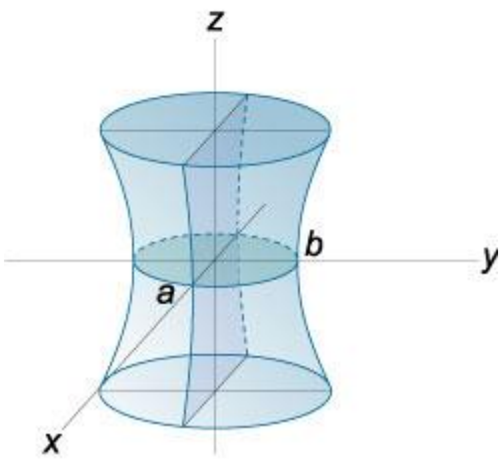
$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,$$

т. е. эллипс, полуоси которого $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\geq a;\ b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\geq b$ и увеличиваются с возрастанием $|h|$.

В сечении плоскостью Oyz (при $x=0$) получается линия

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. гипербола с полуосями b и c. Действительной осью здесь является ось Oy (гипербола пересекает ось Oy в точках b и $-b$), а мнимой – ось Oz.



Двуполостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h,$ параллельными плоскости Oxy. При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z=h$ (в системе координат с началом в точке $(0;0;h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1.$$

При $|h|<c$ плоскость не пересекает гиперболоид.

При $|h|=c$ получим в сечении точку.

При $|h|>c$ получим эллипс

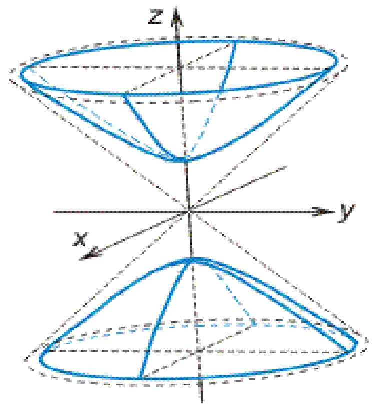
$$\frac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}-1\right)}=1,$$

полуоси которого $a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1};\ b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$ увеличиваются с возрастанием $|h|$.

В сечении плоскостью Oyz (при $x=0$) получается линия

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. гипербола с полуосями b и c. Действительной осью здесь является ось Oz (гипербола пересекает ось Oz в точках c и $-c$), а мнимой – ось Oy.



Коническая поверхность

Коническая поверхность – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h,$ параллельными плоскости Oxy. При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z=h$ (в системе координат с началом в точке $(0;0;h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}.$$

При $|h|=0$ получим в сечении точку – начало координат.

При $h\neq 0$ получим эллипс

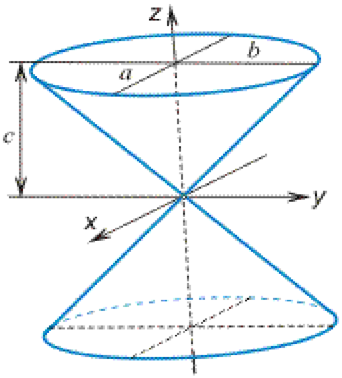
$$\frac{x^2}{\frac{a^2h^2}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2h^2}{c^2}}=1,$$

полуоси которого $\frac{a}{c}|h|$; $\frac{b}{c}|h|$ увеличиваются с возрастанием $|h|$.

В сечении плоскостью Oyz (при $x=0$) получается линия

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

т. е. пара пересекающихся прямых $y=\pm\frac{b}{c}z$.



Эллиптический параболоид

Эллиптический параболоид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z.$$

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h$, параллельными плоскости Oxy:

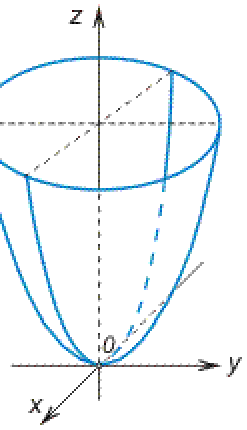
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h.$$

При $h<0$ пересечения нет.

При $h=0$ получим в сечении точку – начало координат.

При $h>0$ получим эллипс с полуосями $a\sqrt{h}$; $b\sqrt{h}$, увеличивающимися с возрастанием h.

В сечении плоскостью Oyz (при $x=0$) получается парабола $\frac{y^2}{b^2}=z$ с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz.



Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-z.$$

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h$, параллельными плоскости Oxy:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-h.$$

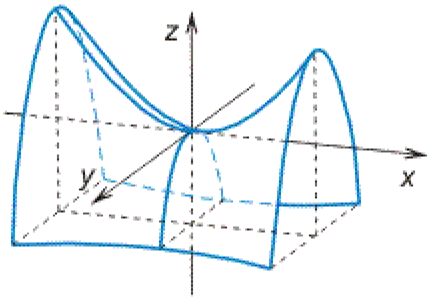
При $h=0$ получим в сечении пару пересекающихся прямых $y=\pm\frac{b}{a}x$. При $h\neq 0$ получим гиперболу

$$-\frac{x^2}{a^2h}+\frac{y^2}{b^2h}=1.$$

При $h>0$ эта гипербола пересекает ось Oy (точнее, прямую $x=0;\, z=h,$ параллельную оси Oy); при $h<0$ пересекает ось Ox (прямую $y=0;\, z=h,$ параллельную оси Ox).

В сечении плоскостью Oyz (при $x=0$) получается парабола $\frac{y^2}{b^2}=z,$ осью симметрии которой является ось Oz, а ветви направлены вверх. Более того, в сечении любой плоскостью $x = h$, параллельной Oyz, получается парабола, ось симметрии которой параллельна Oz, а ветви направлены вверх.

Аналогично, в сечении плоскостью Oxz (при $y = 0$) получается парабола $\frac{x^2}{a^2} = -z$, осью симметрии которой является ось Oz, а ветви направлены вниз. Более того, в сечении любой плоскостью $y = h$, параллельной Oxz, получается парабола, ось симметрии которой параллельна Oz, а ветви направлены вниз.

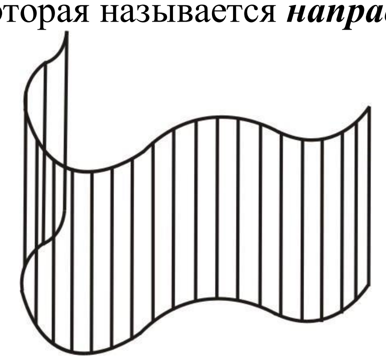


Гиперболический параболоид называют также ***седловидной поверхностью***.

Замечание. Гиперболический параболоид можно получить, взяв две параболы с общей вершиной и противоположно направленными ветвями, расположенными в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и перемещая одну из парабол параллельно самой себе так, чтобы ее вершина двигалась по второй параболе.

§7. Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью, или ***цилиндром***, называется поверхность, которую можно получить перемещением прямой L, которая называются ***образующей***, параллельно самой себе вдоль некоторой кривой K, которая называется ***направляющей***.

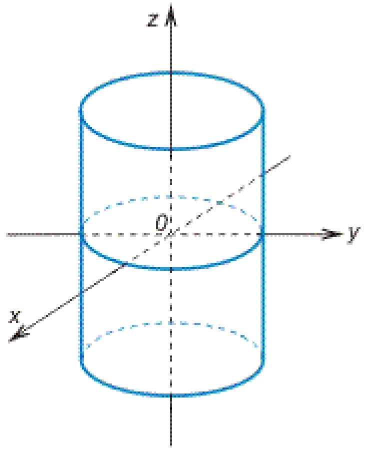


Цилиндрическая поверхность называется ***цилиндрической поверхностью 2-го порядка***, если ее направляющей является одна из линий 2-го порядка.

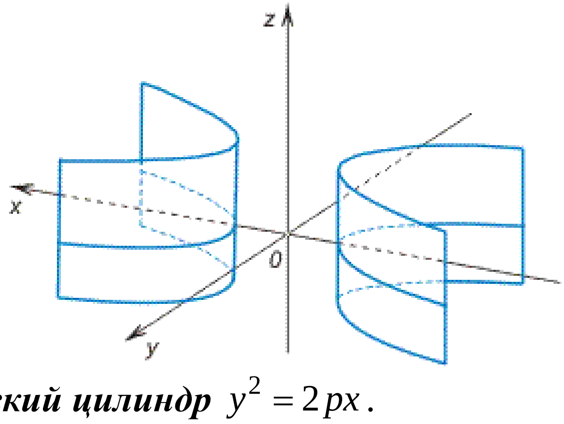
Уравнение второй степени с двумя переменными определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной той координатной оси, переменная которой отсутствует в уравнении. Так, уравнение любой цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси Oz, имеет вид $F(x;\,y)=0$.

Рассмотрим цилиндрические поверхности 2-го порядка с образующими, параллельными оси Oz:

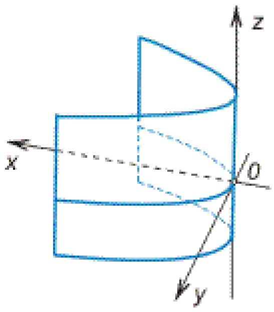
- ***эллиптический цилиндр*** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;



- ***гиперболический цилиндр*** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;



-***параболический цилиндр*** $y^2=2px$.



§8. Способы образования поверхностей

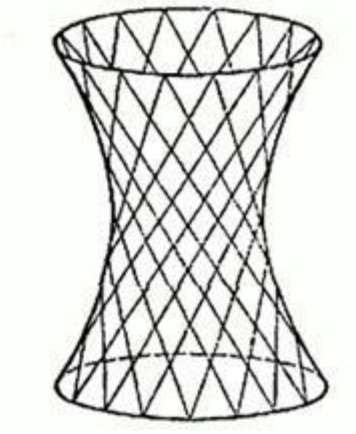
По способу образования поверхностей выделяют линейчатые поверхности и поверхности вращения.

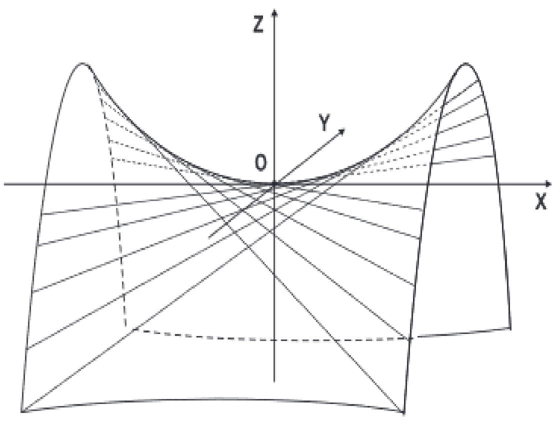
Линейчатая поверхность – это поверхность, которую можно получить движением некоторой прямой линии (***образующей***).

Линейчатыми поверхностями являются:

- цилиндрические поверхности;
- коническая поверхность;
- однополостный гиперболоид;
- гиперболический параболоид (седло).

Интересно, что через каждую точку однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида проходит *ровно две прямые*, лежащие на этой поверхности.





а б

Отметим, что однополостные гиперболоиды нашли применение в практике строительства. Сооружение различных высотных башен с использованием прямолинейных образующих однополостного гиперболоида сочетает в себе прочность конструкции с простотой ее исполнения. Идея использования однополостного гиперболоида в строительстве принадлежит русскому и советскому инженеру В. Г. Шухову (1853–1939). По проекту Шухова строились водонапорные башни, опоры линий передач, маяки, а также была построена телевизионная башня на Шаболовке в г. Москве, она состоит из секций однополостных гиперболоидов вращения.

Поверхность вращения – это поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости.

Поверхность, полученная вращением вокруг оси Oz, имеет уравнение $F(x^2 + y^2; z) = 0$. Например,

$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид вращения;

$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$; $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – однополостный и двуполостный гиперболоиды вращения;

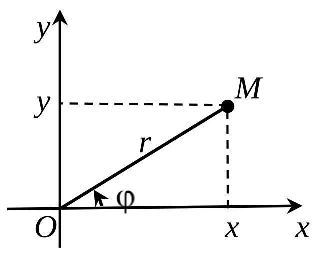
$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – круговой конус;

$x^2+y^2=\pm a^2 z$ – параболоид вращения (круговой параболоид);

$x^2+y^2=a^2$ – круговой цилиндр.

§ 9. Криволинейные системы координат на плоскости и в пространстве

В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости каждая точка M однозначно определяется двумя своими координатами x и y. С другой стороны, можно охарактеризовать точку M следующим образом: расстоянием r от начала координат (точки O) и углом φ между положительным направлением оси Ox и лучом OM.



Говорят, что на плоскости задана ***полярная система координат***, если заданы:

1) точка O, которая называется ***полюсом***;

2) луч OP, выходящий из полюса, который называется ***полярным лучом***;

3) единица масштаба на полярной оси.

Полярными координатами точки M называется пара чисел $(r;\varphi)$, где:

r – расстояние от точки M до полюса (точки O) – ***полярный радиус***;

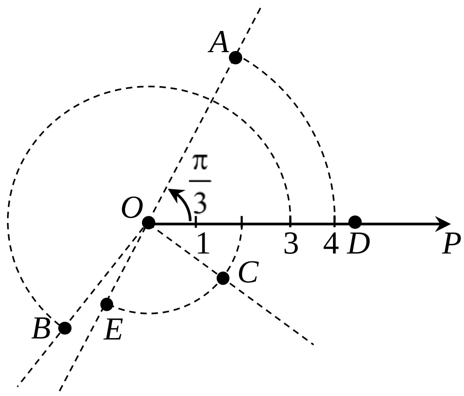
φ – угол между полярной осью и лучом OM, который отсчитывается против часовой стрелки, как в тригонометрии, – ***полярный угол***.

Обычно считается, что полярный радиус удовлетворяет условию $0 \le r < +\infty$, так как характеризует расстояние. Иногда рассматривают так называемую *обобщенную полярную систему координат*, в которой допускаются отрицательные значения полярного радиуса. Для точки O (полюса) $r = 0$, значение φ не определено.

Любой точке плоскости, кроме полюса, соответствует одно определенное значение r и множество значений φ, отличающихся на $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0 \le \varphi < 2\pi$, называется ***главным***.

Пример 1. Построим точки $A\left(4;\dfrac{\pi}{3}\right); B\left(3;\dfrac{5\pi}{4}\right); C\left(2;-\dfrac{\pi}{4}\right);$ $D(4,5;\,0); E\left(-2;\dfrac{\pi}{3}\right),$ заданные полярными координатами.

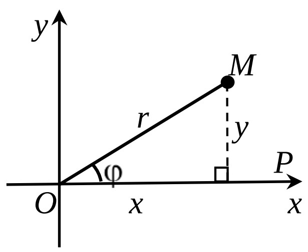
Решение. Выберем начало отсчета точку O (полюс), зададим направление полярного луча OP и единицу масштаба на полярной оси. Чтобы построить точку $A\left(4;\dfrac{\pi}{3}\right),$ повернем луч OP против часовой стрелки на угол $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ и отложим на новом луче отрезок длиной $r = 4$. Аналогично, точка $B\left(3;\dfrac{5\pi}{4}\right)$ получится, если повернуть полярную ось OP против часовой стрелки на угол $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$ и отложить отрезок длиной $r = 3$.



Чтобы построить точку $C\left(2;-\frac{\pi}{4}\right)$ (с отрицательным значением полярного угла $\varphi=-\frac{\pi}{4}$), нужно повернуть полярную ось по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{4}$. Точка $D(4,5;0)$ располагается на полярной оси. Чтобы получить точку $E\left(-2;\frac{\pi}{3}\right)$ (с отрицательным значением полярного радиуса $r=-2$), нужно отложить отрезок длины 2 на продолжении луча $\varphi=\frac{\pi}{3}$ (луча OA) за точку O.

Если совместить начало декартовой системы координат с полюсом O, а ось Ox – с полярной осью OP, то ***связь между полярными*** $(r;\varphi)$ ***и декартовыми*** $(x;y)$ ***координатами точки*** задается формулами

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$



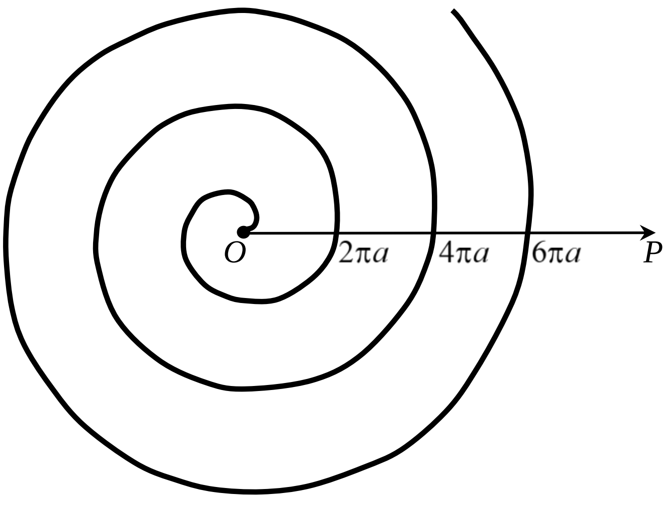
С другой стороны, зная декартовы координаты $(x;\, y)$ точки, можно определить ее полярные координаты по формулам

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\ \begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{cases}$$

Примеры линий, заданных уравнениями в полярных координатах

Пример. Построим ***спираль Архимеда*** $r=a\varphi$.

Решение. При увеличении полярного угла от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ полярный радиус постепенно увеличивается от $r=0$ до $r=2\pi a$. Далее, при изменении полярного угла на 2π (полный оборот вокруг полюса) полярный радиус изменяется на одно и то же значение $2\pi a$, т. е. каждый новый виток спирали отстоит от предыдущего и последующего на одно и то же расстояние $2\pi a$.



Пример. Определим, какая линия задается уравнением $r=2a\cos\varphi$.

Решение. Перейдем к декартовым координатам. Для этого умножим обе части уравнения на r и воспользуемся формулами $r^2=x^2+y^2$, $x=r\cos\varphi$. Тогда

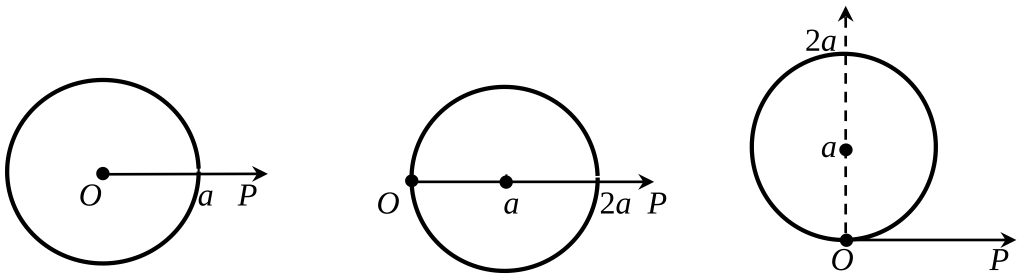
$$r = 2a\cos\varphi; \qquad r^2 = 2ar\cos\varphi; \qquad x^2 + y^2 = 2ax.$$

Выделяя в последнем уравнении полный квадрат по переменной x, получим

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2; \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Таким образом, $r = 2a\cos\varphi$ – это уравнение окружности с центром $(a; 0)$ и радиусом $R = a$. •

Аналогично, $r = 2a\sin\varphi$ – уравнение окружности с центром $(0; a)$ и радиусом $R = a$.

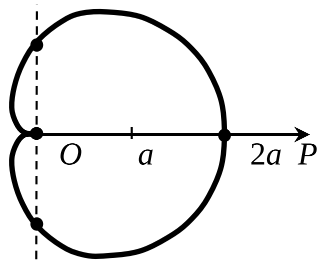


а $r = a$ б $r = 2a\cos\varphi$ в $r = 2a\sin\varphi$

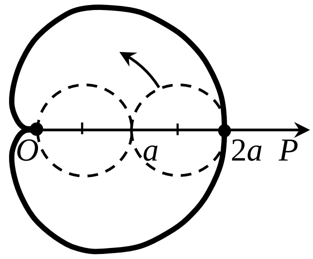
Пример. Построим линию $r = a(1+\cos\varphi)$.

Решение. Заметим, что поскольку функция $\cos\varphi$ имеет период 2π, то все точки линии можно получить, если взять $\varphi \in [0; 2\pi]$.

При увеличении полярного угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$ значения функции $\cos\varphi$ уменьшаются от 1 до -1, а значения полярного радиуса – соответственно, от $r = 2a$ до $r = 0$. Аналогично, при изменении полярного угла от $\varphi = \pi$ до $\varphi = 2\pi$ значения функции $\cos\varphi$ увеличиваются от -1 до 1, значения полярного радиуса – от $r = 0$ до $r = 2a$. Учитывая это, отметим опорные точки с полярными координатами $(2a; 0)$, $\left(a; \frac{\pi}{2}\right)$, $(0; \pi)$, $\left(a; \frac{3\pi}{2}\right)$ и схематически построим линию.



Линия, заданная уравнением $r = a(1 + \cos\varphi)$ (или $r = a(1 - \cos\varphi)$, $r = a(1 + \sin\varphi)$, $r = a(1 - \sin\varphi)$), называется ***кардиоидой***. ***Кардиоида*** – это траектория точки, лежащей на окружности радиуса $\frac{a}{2}$, которая катится по окружности такого же радиуса.



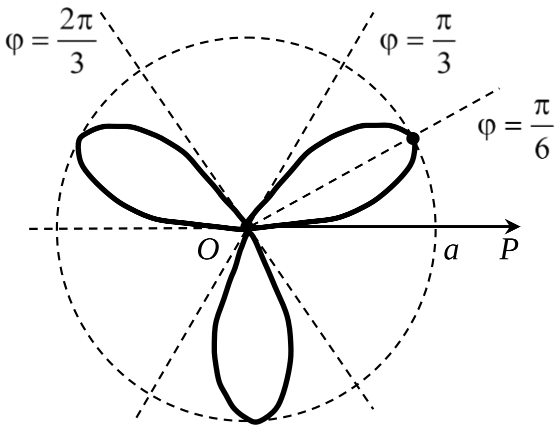
Линия, заданная уравнением вида $r = a + b\cos\varphi$ (или $r = a + b\sin\varphi$), называется ***улиткой Паскаля*** (в честь Этьена Паскаля (1588–1651), математика-любителя, отца знаменитого Блеза Паскаля). Линии, заданные уравнениями вида $r = a\cos k\varphi$ (или $r = a\sin k\varphi$), называются ***розами***.

Пример. Построим трехлепестковую розу $r = a\sin 3\varphi$.

Решение. Заметим, что поскольку функция $\sin 3\varphi$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, достаточно построить часть линии, соответствующую значениям $\varphi \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, а затем повернуть картинку на угол $\frac{2\pi}{3}$ дважды, чтобы получить все точки, отвечающие $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Значения полярного радиуса $r \le a$, т. е. вся линия будет расположена внутри окружности $r = a$. При увеличении полярного угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{6}$ значения полярного радиуса увеличиваются от

$r=0$ до $r=a$, а при $\varphi\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ значения полярного радиуса уменьшаются от $r=a$ до $r=0$. При $\varphi\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ получаем $r\le 0$, т. е. в секторе между $\varphi=\frac{\pi}{3}$ и $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ точек линии нет (если рассматривать обобщенные полярные координаты, то соответствующие точки будут расположены в секторе между $\varphi=\frac{4\pi}{3}$ и $\varphi=\frac{5\pi}{3}$). Отмечая опорные точки, в которых $r=a$, схематически построим линию.



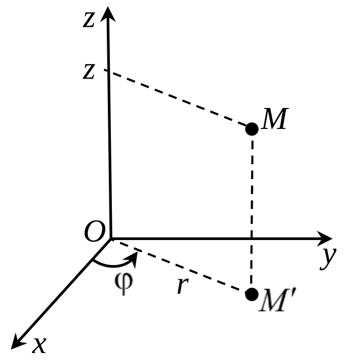
При специальном выборе полярной системы координат (если поместить полюс в один из фокусов кривой 2-го порядка, а полярную ось направить из фокуса по оси кривой в сторону, противоположную той, где лежит соответствующая директриса) уравнение кривой 2-го порядка имеет вид

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},$$

где ε – эксцентриситет кривой, а p – ее *фокальный параметр* (в случае параболы p – ее параметр; в случае эллипса $p=\frac{a^2}{b}$, где a –

большая, b – малая полуось; в случае гиперболы $p = \dfrac{a^2}{b}$, где a – действительная, b – мнимая полуось).

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$. Пусть M' – проекция точки M на плоскость Oxy.



Цилиндрическими координатами точки M называется тройка чисел $(r; \varphi; z)$, где:

r – расстояние от начала координат (точки O) до точки M';

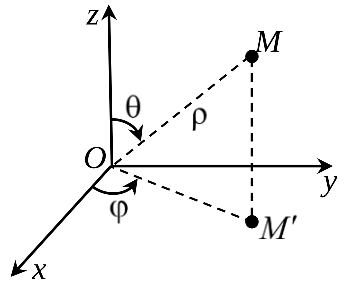
φ – угол между осью Ox и лучом OM';

z – аппликата точки M.

Связь между цилиндрическими $(r; \varphi; z)$ и декартовыми $(x; y; z)$ координатами точки задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$. Обозначим через M' проекцию точки M на плоскость Oxy.



Сферическими координатами точки M называется тройка чисел $(\rho; \theta; \varphi)$, где:

ρ – расстояние от начала координат (точки O) до точки M;

θ – угол между осью Oz и лучом OM $(0 \le \theta \le \pi)$;

φ – угол между осью Ox и лучом OM' $(0 \le \varphi < 2\pi)$.

Можно видеть, что связь между сферическими $(\rho; \theta; \varphi)$ и декартовыми $(x; y; z)$ координатами точки задается формулами

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$