Раздел 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Рождение аналитической геометрии – 1637 г. – трактат Р. Декарта «Рассуждение о методе» с приложениями «Диоптрика», «Метеоры», «Геометрия». «Геометрия» – единственное сочинение Декарта, полностью посвященное математике. Оно рассматривалось автором как образец применения его общих методов.

«Геометрия» Декарта стала поворотным пунктом в развитии новой математики. Главной ценностью книги было то, что она содержала изложение нового раздела математики – аналитической геометрии, которая позволяла с помощью системы координат перевести геометрические задачи на алгебраический язык и тем самым существенно упрощала их исследование и решение. Кроме того, Декарт использовал в «Геометрии» удобную математическую символику, которая с этого момента стала общепринятой в науке.

«Геометрия» начала процесс переключения внимания математиков с изучения числовых величин на изучение зависимостей между ними – в современной терминологии, функций. Декартовский подход послужил основой для разработки к концу XVII в. Ньютоном и Лейбницем математического анализа.

Принцип формулировки геометрических свойств на алгебраическом языке одновременно с Р. Декартом разрабатывал П. Ферма, но его работы не были опубликованы при жизни автора. Подход Ферма был аналогичен декартовскому, хотя уступал последнему по ясности и глубине изложения.

Термин «аналитическая геометрия» был предложен И. Ньютоном.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Аналитическая геометрия – это раздел математики, в котором свойства геометрических объектов изучаются алгебраическими методами. При этом геометрические объекты описываются уравнениями и изучение их свойств сводится к исследованию уравнений.

В аналитической геометрии рассматриваются два типа задач.

1. Составить уравнение геометрического объекта по известным свойствам этого объекта.

2. По данному уравнению геометрического объекта определить его свойства.

На плоскости каждая точка определяется двумя координатами x, y. Уравнение линии на плоскости – это уравнение вида

$F(x; y) = 0$, такое, что координаты всех точек этой линии удовлетворяют этому уравнению, а координаты точек, не лежащих на линии, не удовлетворяют уравнению.

Аналогично, поверхность в пространстве задается уравнением $F(x; y; z) = 0$.

Линия в пространстве может быть задана как пересечение двух поверхностей: $\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases}$

§ 1. Плоскость в пространстве. Различные виды уравнения плоскости

При составлении уравнения плоскости весьма плодотворно используются элементы векторной алгебры, а именно свойства скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.

Плоскость в пространстве однозначно задается:

- тремя точками, лежащими в этой плоскости;
- вектором, перпендикулярным плоскости, и точкой, лежащей в этой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$

Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка этой плоскости. Точки M, M_1, M_2, M_3 лежат в одной плоскости (рис. 1) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, т. е. их смешанное произведение равно 0.

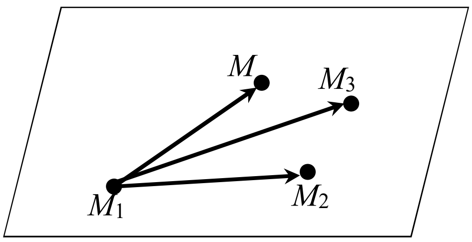


Рис. 1. Плоскость, проходящая через три заданные точки M_1, M_2, M_3

Найдем координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1;\, y - y_1;\, z - z_1\};$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\};$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1;\, y_3 - y_1;\, z_3 - z_1\}.$$

Записав условие компланарности трех векторов (смешанное произведение равно нулю) в координатной форме, получим уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.} \qquad (1)$$

Пример 1. Напишем уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(2; -7; 0)$, $M_3(4; 3; -2)$.

Решение. Подставляя координаты точек в уравнение (1), получим

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 2 - 1 & -7 - 2 & 0 - 3 \\ 4 - 1 & 3 - 2 & -2 - 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 1 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, находим

$$(x - 1) \cdot \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - (y - 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (z - 3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$48(x - 1) - 4(y - 2) + 28(z - 3) = 0;$$

$$48x - 4y + 28z - 124 = 0.$$

Сокращая на 4, получим искомое уравнение плоскости в виде $12x - y + 7z - 31 = 0.\bullet$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$

Опр. 1. Вектор, перпендикулярный к плоскости, называется вектором ***нормали*** к этой плоскости, или ***нормальным вектором*** плоскости.

Замечание. Вектор нормали к плоскости определяется неоднозначно. Если $\vec{n} = \{A; B; C\}$ – нормальный вектор плоскости, то любой ненулевой вектор, коллинеарный данному, также является вектором нормали к этой плоскости.

Пусть плоскость имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ и проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 2).

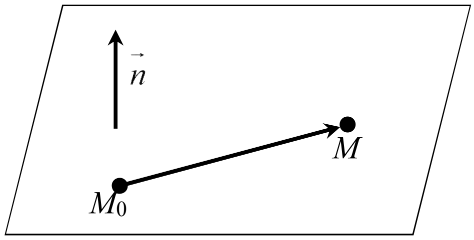


Рис. 2. Плоскость, проходящая через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$

Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка этой плоскости. Она принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n} = \{A; B; C\}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ будут ортогональны, а значит, их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Записав скалярное произведение векторов через координаты сомножителей, получим искомое уравнение плоскости в виде

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (2)$$

Итак, уравнение любой плоскости можно записать в виде уравнения (2), линейного относительно переменных x, y, z.

Общее уравнение плоскости

Преобразуем уравнение (2), раскрыв скобки и обозначив $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Тогда получим ***общее уравнение плоскости***

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,} \qquad (3)$$

причем коэффициенты A, B, C являются координатами вектора нормали к этой плоскости: $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

Т 1. Пусть в трехмерном пространстве задана система координат $Oxyz$. Тогда всякое уравнение вида (3), т. е. линейное уравнение (уравнение 1-й степени) относительно переменных x, y, z, в котором хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю, задает некоторую плоскость в пространстве. И обратно, любая плоскость в пространстве может быть задана уравнением вида (3).

Исследование общего уравнения плоскости

Изучим особенности расположения плоскости в зависимости от значений коэффициентов A, B, C, D общего уравнения плоскости (3).

1. Если $A = 0$, то уравнение примет вид $By + Cz + D = 0$. Нормальный вектор $\vec{n} = \{0; B; C\}$ перпендикулярен оси Ox. Следовательно, плоскость параллельна оси Ox.

Аналогично, при $B = 0$ плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy.

Если $C = 0$, то плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz.

2. Если $D = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0; 0; 0)$. Следовательно, в этом случае плоскость проходит через начало координат.

3. Если $A = D = 0$, т. е. уравнение имеет вид $By + Cz = 0$, то плоскость проходит через $O(0; 0; 0)$ параллельно оси Ox, т. е. $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox.

При $B = D = 0$ плоскость $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy.

При $C = D = 0$ плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz.

4. Если $A = B = 0$, то уравнение (3) принимает вид $Cz + D = 0$. Это плоскость, перпендикулярная оси Oz (параллельная плоскости Oxy) (вектор $\vec{n} = \{0; 0; C\}$ параллелен плоскости Oxy).

При $A = C = 0$ плоскость $By + D = 0$ перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости Oxz).

Если $B = C = 0,$ то плоскость $Ax + D = 0$ перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости Oyz).

5. Если $A = B = D = 0$, то уравнение (3) примет вид $Cz = 0,$ или $z = 0.$ Эта плоскость совпадает с плоскостью $Oxy.$

При $A = C = D = 0$ получим $By = 0,$ или $y = 0$ – плоскость $Oxz.$

Если $B = C = D = 0,$ то $Ax = 0,$ т. е. $x = 0$ – плоскость $Oyz.$

Пример 2. Построим плоскости: **а)** $2x - y + 3z - 6 = 0;$ **б)** $3y + z + 3 = 0;$ **в)** $z = 4.$

Решение. **а**) Для построения плоскости $2x - y + 3z - 6 = 0$ найдем точки ее пересечения с осями координат. На оси Ox координаты y и z равны 0, поэтому $2x - 6 = 0;$ а значит, $x = 3.$ Для нахождения точки пересечения с Oy положим $x = 0; z = 0,$ тогда $y = -6.$ Точка пересечения с Oz имеет координаты $x = 0; y = 0; z = 2.$ Отметив найденные точки на осях координат, получим искомую плоскость (рис. 3).

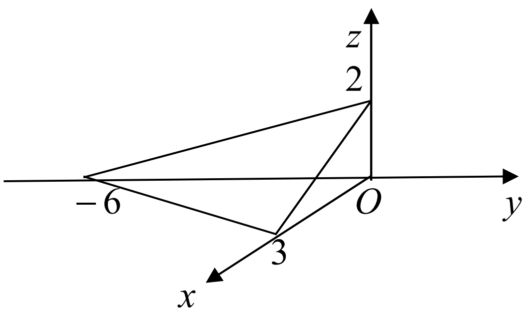


Рис. 3. Плоскость $2x - y + 3z - 6 = 0$

б) Заметим, что в уравнении $3y + z + 3 = 0$ отсутствует переменная $x.$ Значит, эта плоскость будет параллельна оси $Ox.$ Плоскость пересекает ось Oy при $y = -1,$ а ось Oz – при $z = -3$ (рис. 4).

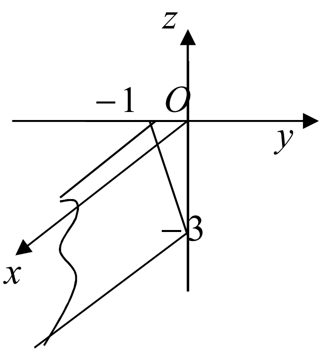


Рис. 4. Плоскость $3y + z + 3 = 0$

в) Уравнение $z = 4$ задает плоскость, параллельную плоскости Oxy и пересекающую ось Oz в точке $z = 4$ (рис. 5). •

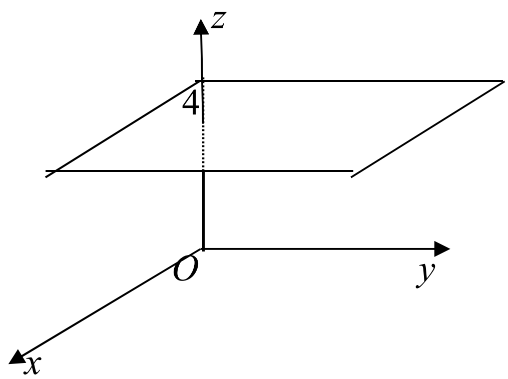


Рис. 5. Плоскость $z = 4$

Взаимное расположение двух плоскостей

Взаимное расположение двух плоскостей определяется взаимным расположением их нормальных векторов.

Пусть заданы две плоскости

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Зная общие уравнения плоскостей, имеем нормальные векторы этих плоскостей: $\overrightarrow{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ – вектор нормали плоскости π_1; $\overrightarrow{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ – вектор нормали плоскости π_2.

Условие параллельности двух плоскостей. Плоскости π_1 и π_2 параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы коллинеарны (рис. 6а), т. е. $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, или

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.}$$

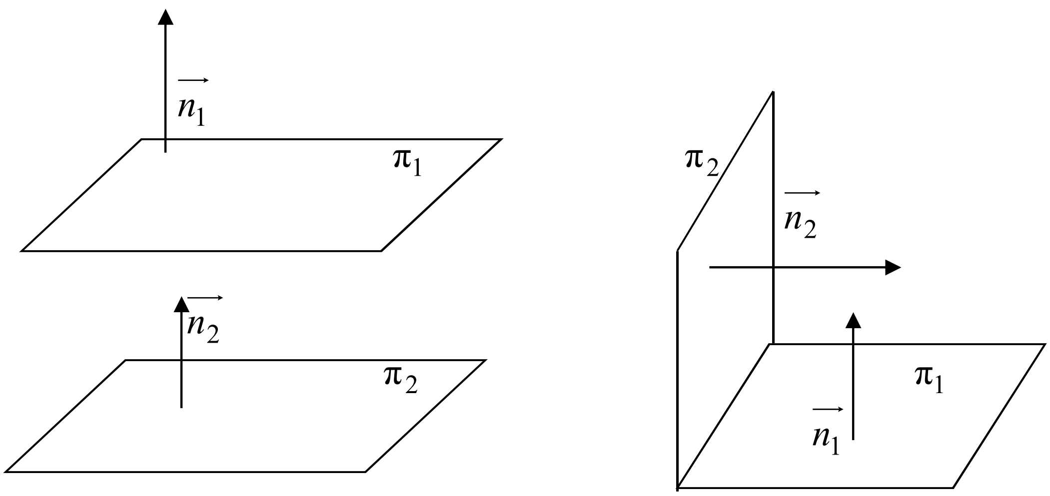
При этом если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

то плоскости π_1 и π_2 совпадают.

Условие перпендикулярности двух плоскостей. Плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы ортогональны (рис. 6б), т. е. $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, или $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$. Переходя к координатам векторов, получим условие перпендикулярности плоскостей в виде

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.}$$



а б

Рис. 6. Взаимное расположение двух плоскостей

Угол между двумя плоскостями

Под углом между плоскостями π_1 и π_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Угол между нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ плоскостей π_1 и π_2 равен одному из этих углов. Поэтому косинус угла между плоскостями π_1 и π_2 определяется формулой $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}$, или

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.}$$

Замечание. Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Расстояние от точки до плоскости

Утв. 1. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

Доказательство. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – произвольная точка плоскости, на направление нормального вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$ (рис. 7).

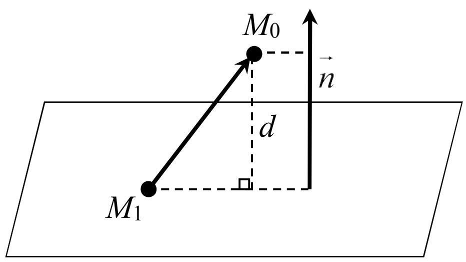


Рис. 7. Расстояние d от точки M_0 до плоскости

Следовательно,

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит плоскости, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, т. е. $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$. Поэтому $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. ◁

§ 2. Различные виды уравнений прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана:
- двумя точками;
- точкой и направляющим вектором;
- как пересечение двух плоскостей.

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$

Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка этой прямой. Точки M, M_1, M_2 лежат на одной прямой (рис. 8) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, т. е. их координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.} \qquad (1)$$

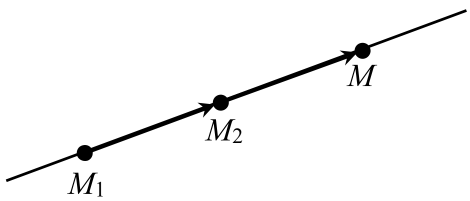


Рис. 8. Прямая, проходящая через две заданные точки M_1, M_2

Пример 1. Напишем уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(5; 4; 3)$.

Решение. Подставляя координаты точек в уравнение (1), получим

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z-3}{3-3}; \qquad \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{0};$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{0}. \bullet$$

Канонические уравнения прямой

Напишем уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}=\{m; n; p\}$ (рис. 9).

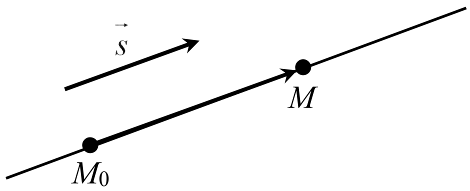


Рис. 9. Прямая, проходящая через точку M_0 параллельно вектору $\vec{s}$

Опр. 1. Вектор, параллельный прямой, называется ***направляющим вектором*** этой прямой.

Замечание. Направляющим вектором прямой является любой вектор, параллельный этой прямой.

Точка $M(x; y; z)$ лежит на этой прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны (рис. 9), т. е. их координаты пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.} \tag{2}$$

Уравнения (2), где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки, лежащей на прямой, а $\vec{s}=\{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой, называются ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве и представляют собой наиболее удобный способ записи уравнений прямой в пространстве.

Параметрические уравнения прямой

Уравнения (2) можно записать в виде системы трех уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t, \\ \dfrac{z-z_0}{p}=t, \end{cases}$$

где t – некоторый параметр. Выражая каждую координату текущей точки на прямой через параметр t, получим ***параметрические уравнения прямой***

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}}$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки, лежащей на прямой, а $\vec{s}=\{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой.

Пример 1 (продолжение). Напишем параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(5; 4; 3)$.

Решение. Приравнивая в канонических уравнениях прямой каждую дробь к t и выражая каждую координату через параметр t, получим

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1+2t, \\ y=2+t, \\ z=3. \end{cases} \bullet$$

Общие уравнения прямой

Общими уравнениями прямой в пространстве называются

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

т. е. прямая задается как пересечение двух плоскостей.

Пример 2. Напишем канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x+3y+2z-9=0, \\ 2x+4y+z-4=0. \end{cases}$$

Решение. Прямая задана как пересечение двух плоскостей. Чтобы записать канонические уравнения прямой, нужно найти направляющий вектор $\vec{s}=\{m;n;p\}$ этой прямой и координаты какой-нибудь точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, лежащей на этой прямой.

Найдем направляющий вектор прямой. Вектор $\vec{s}=\{m;n;p\}$ должен быть перпендикулярен нормальным векторам заданных плоскостей, т. е. векторам $\overrightarrow{n_1}=\{1;3;2\}$ и $\overrightarrow{n_2}=\{2;4;1\}$. Этим свойством обладает векторное произведение векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$::

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-5\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}.$$

Таким образом, $m=-5;\ n=3;\ p=-2.$

За точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через которую проходит данная прямая, можно принять, например, точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью Oxy. Так как при этом $z=0$, то координаты x и y этой точки определяются из системы уравнений заданных плоскостей, если в них положить $z=0$:

$$\begin{cases} x+3y-9=0, \\ 2x+4y-4=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y=9, \\ 2x+4y=4. \end{cases}$$

Решая систему методом Крамера, получим

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{24}{-2}=-12; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{-14}{-2}=7,$$

т. е. прямая проходит через точку $M_0(-12;7;0)$.

Итак, используя формулу (2), запишем искомые канонические уравнения прямой:

$$\frac{x+12}{-5}=\frac{y-7}{3}=\frac{z}{-2}, \text{ или } \frac{x+12}{5}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z}{2}. \bullet$$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Взаимное расположение двух прямых определяется взаимным расположением их направляющих векторов.

Пусть заданы две прямые

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1};$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Зная канонические уравнения прямых, имеем их направляющие векторы: $\overrightarrow{s_1}=\{m_1; n_1; p_1\}$ – направляющий вектор прямой l_1; $\overrightarrow{s_2}=\{m_2; n_2; p_2\}$ – направляющий вектор прямой l_2.

Угол между двумя прямыми – это угол между прямыми, параллельными данным и проходящими через одну точку, – равен углу между направляющими векторами $\overrightarrow{s_1}$ и $\overrightarrow{s_2}$ этих прямых. Поэтому косинус угла между прямыми l_1 и l_2 определяется формулой $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}|\cdot|\overrightarrow{s_2}|}$, или

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.}$$

Замечание. Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Условие параллельности двух прямых. Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{s_1}\,||\,\overrightarrow{s_2}$, т. е.

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.}$$

Условие перпендикулярности двух прямых. Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{s_1} \perp \vec{s_2}$, или $\vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = 0$. Переходя к координатам векторов, получим условие перпендикулярности прямых в виде

$$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть заданы прямая

$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и плоскость

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Взаимное расположение прямой l и плоскости π определяется взаимным расположением направляющего вектора прямой $\vec{s} = \{m; n; p\}$ и нормального вектора плоскости $\vec{n} = \{A; B; C\}$. Как видно из рис. 10, угол между векторами $\vec{s}$ и $\vec{n}$ равен либо $90° - \varphi$, либо $90° + \varphi$, где φ – угол между прямой l и плоскостью π.

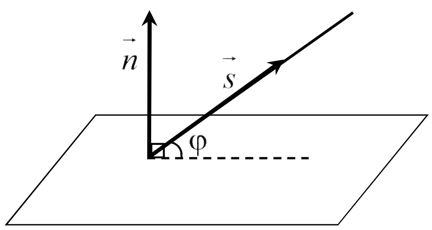


Рис. 10. Угол между прямой и плоскостью

Следовательно, $\cos(90° \pm \varphi) = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$, а значит, $\sin\varphi = \mp \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$, т. е. синус угла φ между прямой l и плоскостью π может быть найден по формуле

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.}$$

Замечание. Поскольку $\sin\varphi \geq 0$, то числитель дроби взят по модулю.

Условие параллельности прямой и плоскости. Прямая l и плоскость π параллельны тогда и только тогда, когда $\vec{s} \perp \vec{n}$, или $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$. Переходя к координатам векторов, получим условие прямой и плоскости в виде

$$\boxed{Am + Bn + Cp = 0.}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая l и плоскость π перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{n} \parallel \vec{s}$, т. е. координаты этих векторов пропорциональны:

$$\boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.}$$

§ 3. Прямая на плоскости

Различные виды уравнения прямой на плоскости

Прямая на плоскости, как и прямая в пространстве, может быть задана двумя точками либо точкой и направляющим вектором. С другой стороны, аналогично плоскости в пространстве, прямая на плоскости однозначно определяется точкой, лежащей на ней, и вектором, перпендикулярным прямой. Рассмотрим различные способы записи уравнения прямой на плоскости.

1. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, записывается из условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M(x; y)$ – произвольная точка этой прямой (рис. 11). В этом случае уравнение прямой имеет вид

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.} \quad (1)$$

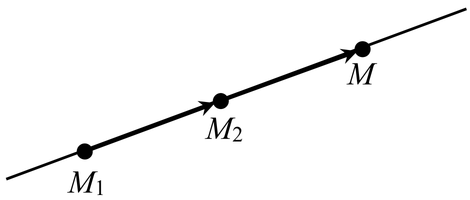


Рис. 11. Прямая, проходящая через две заданные точки M_1, M_2

2. Каноническое уравнение прямой записывается как уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s} = \{m; n\}$ (***направляющему вектору*** прямой) (см. рис. 12):

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.}$$

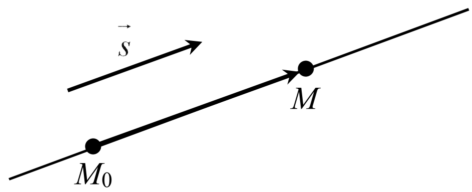


Рис. 12. Прямая, проходящая через точку M_0 параллельно вектору $\vec{s}$

3. Параметрические уравнения прямой на плоскости имеют вид

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}}$$

где $(x_0; y_0)$ – координаты точки, лежащей на прямой, а $\vec{s} = \{m; n\}$ – направляющий вектор прямой.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = \{A; B\}$, записывается из условия ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где $M(x; y)$ – произвольная точка на прямой (рис. 13). Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный данной прямой, называется ***нормальным векто-***

ром этой прямой. В силу ортогональности векторов их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$ т. е.

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.}$$

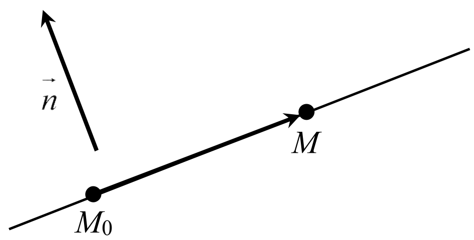


Рис. 13. Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$

5. Общее уравнение прямой на плоскости – это уравнение вида

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \tag{2}$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A или B не равен 0, т. е. $A^2 + B^2 \neq 0.$

Таким образом, уравнение прямой на плоскости – это линейное уравнение (уравнение 1-й степени) относительно переменных $x, y.$ Любое уравнение вида (2), где $A^2 + B^2 \neq 0,$ задает некоторую прямую на плоскости. И обратно, любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида (2).

6. Уравнение прямой в отрезках – это уравнение прямой, пересекающей ось Ox в точке a, а ось Oy – в точке b (рис. 14).

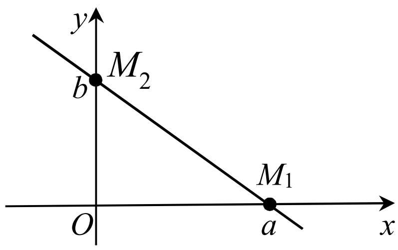


Рис. 14. Прямая, пересекающая оси координат в точках a и b

Получим это уравнение как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(a;0)$, $M_2(0;b)$. Тогда по формуле (1) имеем

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}; \qquad \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}; \qquad -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b};$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.} \tag{3}$$

Уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения прямой, заданной общим уравнением и пересекающей оси координат.

Пример 1. Построим прямую $2x-3y-6=0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду (3); для этого перенесем свободный член вправо и разделим обе части на него:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$$

Сравнивая с уравнением (3), найдем $a=3$ и $b=-2$. Следовательно, прямая пересекает ось Ox при $x=3$, а ось Oy – при $x=-2$ (рис. 15). •

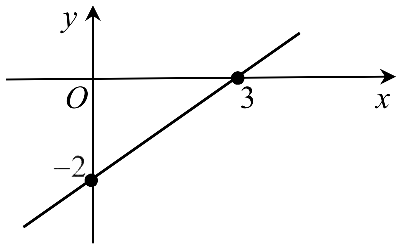


Рис. 15. Прямая $2x-3y-6=0$

7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Прямая, пересекающая ось Oy, может быть задана точкой $M_0(0;b)$ пересечения с осью Oy и углом φ наклона прямой к оси Ox.

Опр. 1. ***Угловым коэффициентом*** прямой на плоскости называется число $k=\operatorname{tg}\varphi$, где φ – угол наклона прямой к оси Ox.

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка этой прямой. Проведем прямые M_0N и MN параллельно осям Ox и Oy соответственно (рис. 16). Тогда $N(x; b)$. Из прямоугольного треугольника M_0MN получим

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{MN}{M_0N} = \frac{y-b}{x}.$$

Выражая y, получим уравнение прямой, пересекающей ось Oy, в точке b и имеющей угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\varphi$, в виде

$$\boxed{y = kx + b.} \tag{4}$$

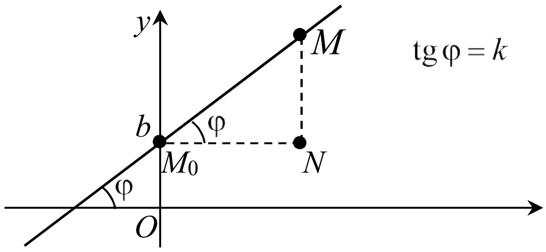


Рис. 16. Прямая с углом наклона φ

8. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ **с заданным угловым коэффициентом** k**.** Это уравнение будет иметь вид (4) с неизвестным значением b. Чтобы найти значение b, учтем, что координаты точки $M_0(x_0; y_0)$ должны удовлетворять уравнению (4), т. е.

$$y_0 = kx_0 + b.$$

Вычитая это равенство из уравнения (4), получим искомое уравнение

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0).} \tag{5}$$

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

1. Если прямые заданы своими каноническими уравнениями, то известны их направляющие векторы. Тогда формула для нахождения угла между прямыми и условия параллельности и перпендикулярности прямых аналогичны случаю прямых в пространстве.

Упражнение 1. Записать формулу для нахождения угла между прямыми и условия параллельности и перпендикулярности прямых в случае, когда известны канонические уравнения прямых на плоскости.

2. Если прямые заданы своими общими уравнениями, то известны их нормальные векторы. Тогда формула для нахождения угла между прямыми и условия параллельности и перпендикулярности прямых аналогичны случаю плоскостей в пространстве.

Упражнение 2. Записать формулу для нахождения угла между прямыми и условия параллельности и перпендикулярности прямых в случае, когда известны общие уравнения прямых на плоскости.

3. Пусть две прямые заданы своими уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1 : y = k_1 x + b_1;$$

$$l_2 : \ y = k_2 x + b_2.$$

Имея угловые коэффициенты прямых, знаем углы φ_1 и φ_2 наклона прямых к оси Ox, поскольку $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$. Пусть $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – угол между прямыми l_1 и l_2 (рис. 17).

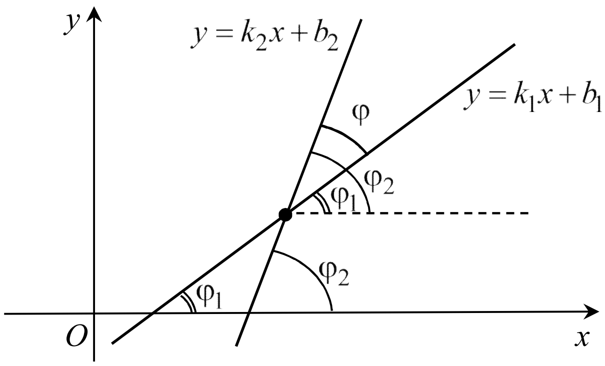


Рис. 17. Нахождение угла между прямыми $l_1 : y = k_1 x + b_1$ и $l_2 :$ $y = k_2 x + b_2$

Применяя формулу для тангенса разности двух углов, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2},$$

откуда

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.} \qquad (6)$$

Замечание. По этой формуле определяется тангенс угла φ, на который нужно повернуть прямую l_1 в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) до совпадения с прямой l_2. Для нахождения острого угла между прямыми следует взять правую часть формулы по модулю.

Условие параллельности двух прямых на плоскости. Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда

$$\boxed{k_1 = k_2.}$$

Условие перпендикулярности двух прямых на плоскости. Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$\boxed{k_1 k_2 = -1.}$$

Расстояние от точки до прямой на плоскости

Утв. 1. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$$

Упражнение 3. Доказать аналогично формуле для расстояния от точки до плоскости.

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника: $A(1; 3), B(-1; 2), C(2; -2).$ Запишем уравнения сторон AB и BC, высоты CH, медианы AM; найдем угол ABC.

Решение. Построим точки в системе координат Oxy (рис. 18).

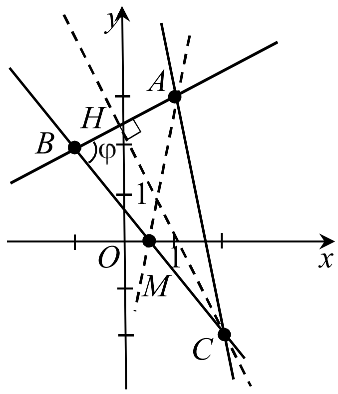


Рис. 18. Треугольник *ABC*

1) Прямую *AB* построим, соединив вершины *A* и *B* треугольника. Зная координаты точек *A* и *B*, запишем уравнение прямой *AB* как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки по формуле (1):

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-3}{2-3}; \qquad \frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{-1};$$

$$x-1=2y-6; \qquad x-2y+5=0.$$

2) Аналогично напишем уравнение прямой *BC* как уравнение прямой, проходящей через точки $B(-1;2)$ и $C(2;-2)$:

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{-2-2}; \qquad \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-4};$$

$$-4x-4=3y-6; \qquad 4x+3y-2=0.$$

3) Высоту *CH* построим как прямую, проходящую через точку *C* перпендикулярно прямой *AB*.

Для того чтобы написать уравнение прямой *CH*, используем условие перпендикулярности двух прямых через их угловые коэффициенты: $k_{CH}k_{AB}=-1$. Найдем угловой коэффициент прямой *AB*, преобразовав уравнение *AB* к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$AB: x-2y+5=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$

Следовательно, $k_{AB} = \dfrac{1}{2}$; $k_{CH} = -2$. Запишем уравнение высоты CH как уравнение прямой, проходящей через данную точку $C(2; -2)$ с заданным угловым коэффициентом $k_{CH} = -2$, по формуле (5):

$$y + 2 = -2(x - 2); \qquad y + 2 = -2x + 4; \qquad 2x + y - 2 = 0.$$

4) Медиану AM построим, соединив вершину A с серединой стороны BC – точкой M. Координаты середины отрезка BC найдем как полусумму соответствующих координат концов отрезка:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = 0,5; \qquad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0.$$

Зная координаты точек $A(1; 3)$ и $M(0,5; 0)$, запишем уравнение высоты AM как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки по формуле (1):

$$\frac{x - 1}{0,5 - 1} = \frac{y - 3}{0 - 3}; \qquad \frac{x - 1}{-0,5} = \frac{y - 3}{-3};$$

$$3x - 3 = 0,5y - 1,5; \qquad 3x - 0,5y + 1,5 = 0; \qquad 6x - y + 3 = 0.$$

5) Найдем угол $\varphi = \angle ABC$ как угол, на который нужно повернуть прямую BC в положительном направлении (против часовой стрелки) до совпадения с прямой AB по формуле (6), где $k_1 = k_{BC}$; $k_2 = k_{AB}$.

Угловой коэффициент прямой AB был найден в пункте 3: $k_2 = k_{AB} = \dfrac{1}{2}$. Аналогично получим угловой коэффициент прямой BC, зная ее общее уравнение:

$$4x + 3y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3},$$

откуда $k_1 = k_{BC} = -\dfrac{4}{3}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{11}{6}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{11}{2},$$

а значит, $\varphi = \angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{11}{2}$. •

§ 4. Кривые второго порядка на плоскости, их канонические уравнения

Опр. 1. ***Линией (кривой) 2-го порядка*** называется линия, определяемая в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости алгебраическим уравнением 2-й степени, т. е. уравнением вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равен 0.

К линиям 2-го порядка относятся окружность, эллипс, гипербола, парабола.

Рассмотрим их ***канонические уравнения***, т. е. их простейшие уравнения, которые получаются при определенном выборе системы координат.

Окружность

Опр. 2. ***Окружностью*** называется множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до данной точки (***центра окружности***) постоянно и равно R (число R называется ***радиусом окружности***).

Выведем уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и радиусом R (рис. 19). Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка этой окружности. По определению, расстояние от точки M до точки M_0 должно быть равно R, поэтому

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R;$$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.}$$

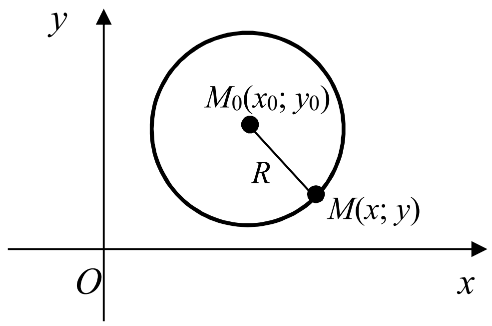


Рис. 19. Окружность

Если систему координат выбрать так, чтобы начало координат совпало с центром окружности, т. е. $x_0 = 0; y_0 = 0$, то уравнение окружности примет наиболее простой вид:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2.}$$

Эллипс

Опр. 3. ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная и *большая*, чем расстояние между фокусами.

Вывод канонического уравнения эллипса.

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2, расстояние между фокусами через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов – через $2a$. По определению $2a > 2c$, т. е. $a > c$.

Выберем систему координат так, чтобы фокусы лежали на оси Ox симметрично относительно начала координат. Тогда $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$ (см. рис. 20).

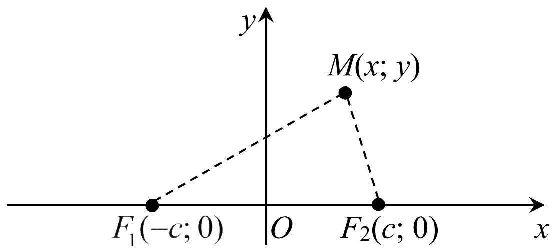


Рис. 20. К выводу канонического уравнения эллипса

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса. По определению, $\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$. Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx;$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку $a > c$, то $a^2 > c^2$; обозначим

$$\boxed{b^2 = a^2 - c^2.}$$

Тогда последнее уравнение преобразуется к виду

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (1)$$

Это уравнение называется ***каноническим уравнением эллипса***; величины a и b называются полуосями, причем a – ***большая***, b – ***малая полуось*** эллипса.

Исследование формы эллипса по его уравнению.

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением (1).

1. Уравнение (1) содержит переменные x и y только в четных степенях, поэтому оси координат являются осями симметрии эл-

липса (***осями эллипса***), а начало координат $O(0;0)$ – центром симметрии (***центром***) эллипса.

2. Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются его ***вершинами***. В данном случае это точки $(a;0);(-a;0);(0;b);(0;-b)$ (рис. 21).

3. Из уравнения (1) следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит 1: $\frac{x^2}{a^2} \le 1; \frac{y^2}{b^2} \le 1,$ поэтому $|x| \le a; |y| \le b.$ Следовательно, эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a;\ y = \pm b$ (рис. 21).

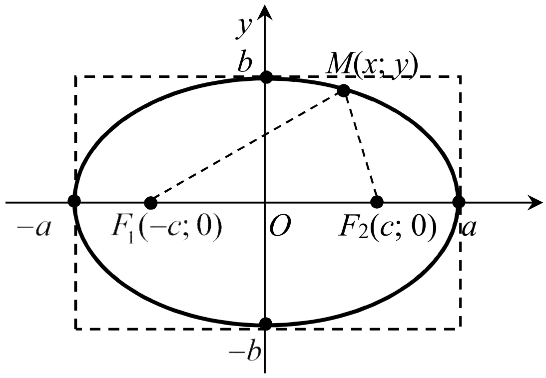


Рис. 21. Эллипс

Одной из характеристик формы линий второго порядка является эксцентриситет. Для эллипса ***эксцентриситет*** определяется как отношение половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}.}$$

Поскольку $a > c$, то $0 \le \varepsilon < 1$. В предельном случае при $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность.

Чем меньше ε, тем ближе эллипс по форме к окружности; чем больше ε, тем больше эллипс сжат к своей большой оси.

Замечание. Изобразить эллипс можно с помощью карандаша и нити длиной $2a$, закрепив концы нити в фокусах F_1 и F_2 эллипса. Тогда, натягивая нить, карандаш нарисует линию, которая и будет эллипсом.

Гипербола

Опр. 4. ***Гиперболой*** называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная и *меньшая*, чем расстояние между фокусами.

Вывод канонического уравнения гиперболы.

Обозначим фокусы гиперболы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов – через $2a$, причем $a < c$.

Выберем систему координат так, чтобы фокусы лежали на оси Ox симметрично относительно начала координат, т. е. $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$. Согласно определению, для произвольной точки $M(x; y)$ на гиперболе должно выполняться соотношение $\left| |\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| \right| = 2a.$ Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a;$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = x^2 - 2cx + c^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2;$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2;$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4;$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4;$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку $a < c,$ обозначим

$$\boxed{b^2 = c^2 - a^2 > 0.}$$

Тогда последнее уравнение преобразуется к виду

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2,$$

или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (2)$$

Это уравнение называется ***каноническим уравнением гиперболы***; величины a и b называются полуосями, причем a – ***действительная***, b – ***мнимая полуось*** гиперболы.

Исследование формы гиперболы по ее уравнению.

Установим форму гиперболы, пользуясь ее каноническим уравнением (2).

1. Уравнение (2) содержит переменные x и y только в четных степенях, поэтому оси координат являются осями симметрии гиперболы (***осями гиперболы***), а начало координат $O(0;0)$ – центром симметрии (***центром***) гиперболы.

2. Точки пересечения гиперболы с ее осями симметрии называются ***вершинами*** гиперболы. В данном случае это точки $(a;0);(-a;0)$ (рис. 22).

Отметим, что гипербола (2) пересекает ось Ox (действительную ось гиперболы) и не пересекает ось Oy (мнимую ось гиперболы).

3. Из уравнения (2) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, поэтому $|x| \geq a$, т. е. точки гиперболы расположены либо правее прямой $x = a$, либо левее прямой $x = -a$.

Прямоугольник, заключенный между прямыми $x = \pm a;\ y = \pm b$ называется ***основным прямоугольником гиперболы***. Его удобно использовать для построения гиперболы.

4. Прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, проходящие через противоположные вершины основного прямоугольника гиперболы, являются ***асимптотами*** гиперболы, поскольку точки гиперболы, бесконечно удаляясь от начала координат, приближаются к этим прямым (рис. 22).

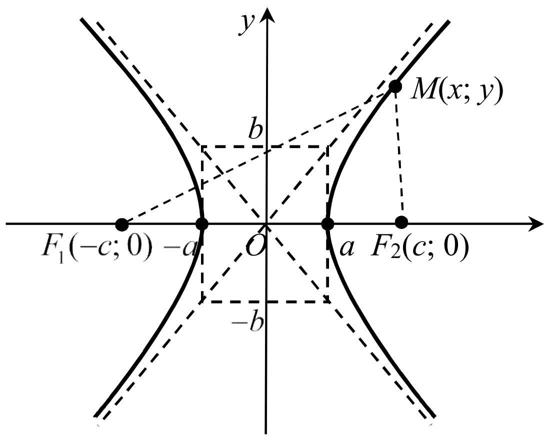


Рис. 22. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Эксцентриситет гиперболы определяется как отношение половины расстояния между фокусами к действительной полуоси гиперболы:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}.}$$

Поскольку $a < c$, то $\varepsilon > 1$.

Замечание. Для гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ действительной осью является ось Oy, так как эта гипербола пересекает ось Oy и не пересекает ось Ox. Поэтому точки $(0; b); (0; -b)$ – вершины гиперболы, b – действительная, a – мнимая полуоси; фокусы гиперболы $F_1(0; -c)$; $F_2(0; c)$ лежат на ее *действительной* оси (рис. 23).

Отметим, что фокусы эллипса лежат на его *большой* оси.

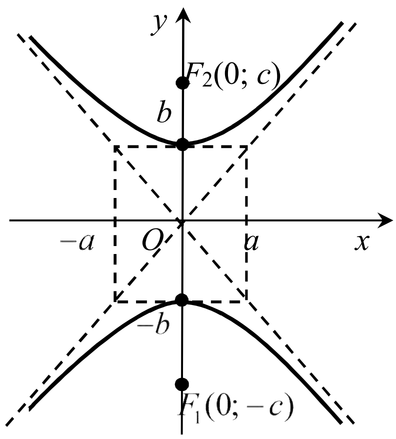


Рис. 23. Гипербола $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$

Директрисы эллипса и гиперболы

Опр. 5. Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра эллипса на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$ (где a – большая полуось) от центра эллипса, называются ***директрисами*** эллипса (рис. 24).

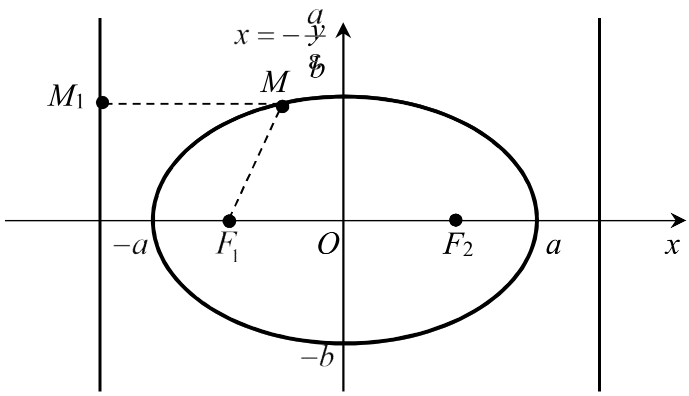


Рис. 24. Директрисы эллипса

Опр. 6. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра гиперболы на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$ (где a – действительная полуось) от центра гиперболы, называются ***директрисами*** гиперболы (рис. 25).

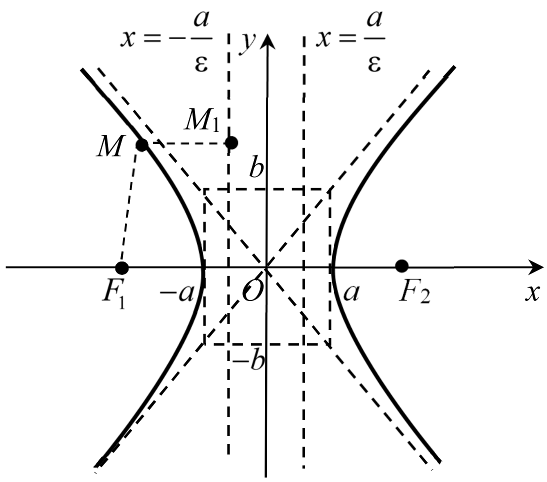


Рис. 25. Директрисы гиперболы

Т 1. Отношение расстояния от произвольной точки эллипса (гиперболы) до какого-либо фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисы постоянно и равно ε:

$$\frac{\left|\overrightarrow{MF_1}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|}=\varepsilon.$$

Итак, если линия на плоскости обладает тем свойством, что для всех ее точек отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой постоянно и равно ε, то:

в случае $\varepsilon>1$ эта линия – гипербола;
в случае $\varepsilon<1$ эта линия – эллипс;
в случае $\varepsilon=1$ эта линия – парабола.

Парабола

Опр. 7. ***Парабола*** – множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой***.

Вывод канонического уравнения параболы.

Обозначим фокус параболы через F, расстояние между фокусом и директрисой через p.

Выберем систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к фокусу, а начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой (рис. 26). Тогда $F\left(\frac{p}{2};0\right)$; а уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$.

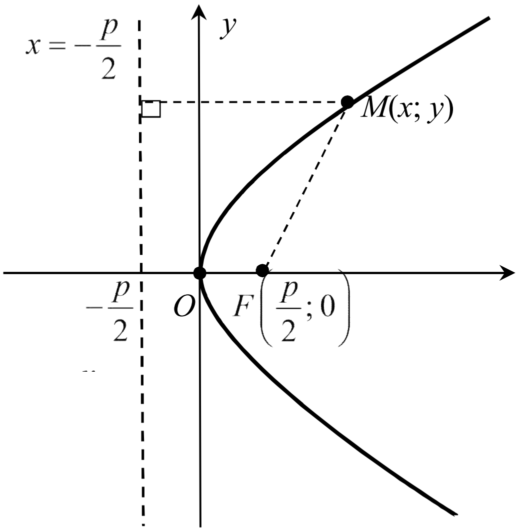


Рис. 26. Парабола $y^2=2px$

Для произвольной точки $M(x;y)$ на параболе, согласно определению, приравняем расстояния от этой точки до фокуса и до директрисы:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Возводя в квадрат, имеем

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

откуда получим ***каноническое уравнение параболы***

$$\boxed{y^2=2px,} \tag{3}$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы параболы – называется ***параметром*** параболы.

Исследование формы параболы по ее уравнению.

1. В уравнение (3) переменная y входит в четной степени, поэтому ось Ox является осью симметрии параболы (***осью параболы***).

2. Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называются ***вершиной*** параболы. В данном случае это $O(0; 0)$.

3. Из (3) следует, что $x \geq 0$, т. е. парабола расположена правее оси Oy.

Замечание 1. Каноническое уравнение параболы может быть записано в одной из четырех форм (рис. 27).

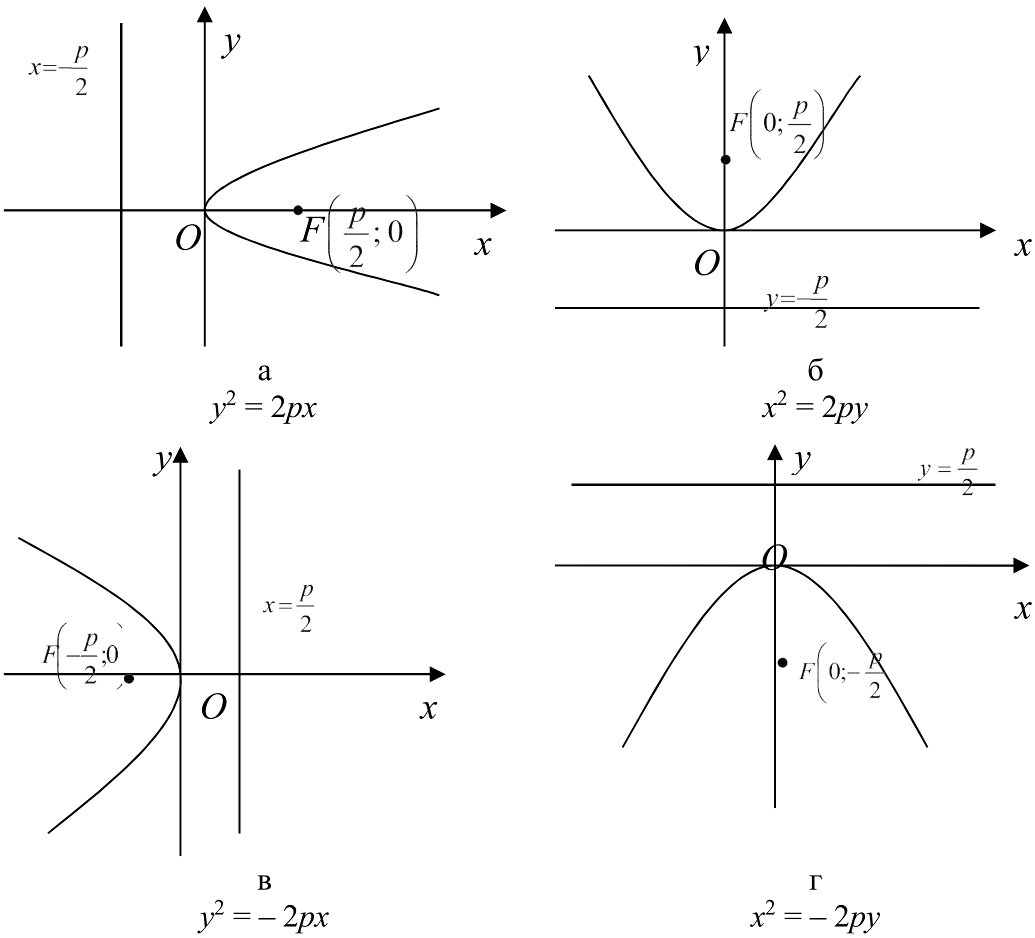


Рис. 27. Расположение параболы в зависимости от формы записи ее канонического уравнения

Замечание 2. Параметр $p > 0$ отвечает за форму параболы, чем больше p, тем шире область, ограниченная параболой (рис. 28).

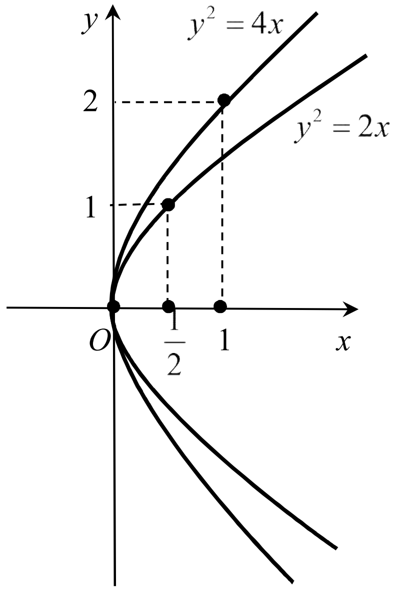
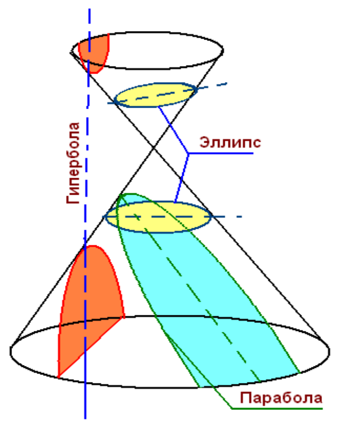


Рис. 28. Параболы $y^2 = 2x$ и $y^2 = 4x$

Кривые второго порядка как конические сечения

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Впервые кривые второго порядка изучались древнегреческим математиком Менехмом (ок. 380 г. – ок. 320 г. до н.э.). Его работа заключалась в следующем: если взять две пересекающиеся прямые и вращать их вокруг биссектрисы угла, ими образованного, то получится коническая поверхность (бесконечный в обе стороны конус). Если же пересечь эту поверхность плоскостью, то в сечении получаются различные геометрические фигуры:

- если плоскость пересекает одну половину конуса, получается эллипс;
- если плоскость пересекает обе половины конуса, то гипербола;
- если плоскость параллельна образующей конуса, получается парабола.

Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII в., когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической. Еще позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости – по эллипсу, при

достижении второй космической скорости – по параболе, а при скорости, большей второй космической – по гиперболе. Для Земли вторая космическая скорость равна 11,16 км/с. Тело, имеющее около Земли такую скорость, покидает окрестности Земли и становится спутником Солнца. Для Солнца вторая космическая скорость составляет 617,7 км/с.
W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Оптические свойства конических сечений

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Оптические свойства эллипса и гиперболы заключаются в том, что отрезки, проведенные из фокусов к некоторой точке эллипса (гиперболы), образуют равные углы с касательной.

В связи с этим если в один из фокусов эллиптического зеркала поместить источник света, то лучи, отразившись, соберутся в другом фокусе (луч отражается от касательной к эллипсу по правилу «угол падения равен углу отражения»). Если источником является, например, свеча, то предмет, помещенный в другой фокус, может загореться. Отсюда и происходит термин «фокус» (лат. focus – «очаг»), введенный И. Кеплером.

На этом свойстве основаны некоторые эффекты с распространением звуковых волн в зданиях с овальными стенами, сводами и др., когда шепотом произнесенное слово в одном из фокусов оказывается слышно в другом.

В результате отражения в гиперболическом зеркале не лучи, исходящие из фокуса, а их продолжения соберутся в другом фокусе: они создадут иллюзию, что источник света находится в другом фокусе.

Существует и *оптическое свойство параболы*: параболическое зеркало собирает в одной точке параллельные лучи; в частности, лучи, параллельные оптической оси, собираются в фокусе параболы.

На этом свойстве основано действие зажигательных зеркал, собирающих параллельные солнечные лучи в одной точке. Согласно легенде, Архимед использовал этот принцип при обороне Сиракуз от римлян, поджигая таким образом вражеские корабли.

Оптическое свойство параболы широко применяется сегодня в самых различных сферах жизни: карманный фонарик, автомобильные фары, прожекторы и т. д. Широкое применение нашли параболические зеркала и в конструкции телескопов.
W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W WW W W

Кривые второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Пусть даны две системы Oxy и O_1XY декартовых координат на плоскости с разными началами O и O_1 и одинаковым направлением осей (рис. 29). Пусть $O_1(x_0; y_0)$ в системе координат на Oxy.

Пусть M – произвольная точка на плоскости. Обозначим через $M(x; y)$ ее координаты в системе координат Oxy; через $M(X; Y)$ – в системе координат O_1XY. Тогда

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0. \end{cases}$$

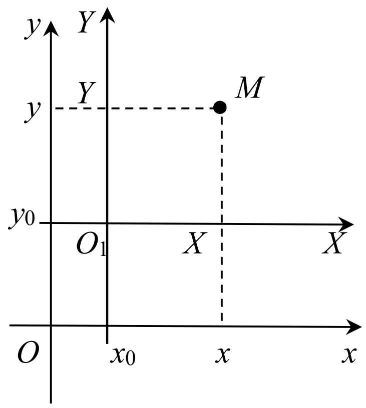


Рис. 29. Связь декартовых координат в системах с одинаковым направлением осей координат

Пусть имеется эллипс с центром $O_1(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям Ox и Oy, его уравнение в новой системе координат

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

а значит, в системе координат Oxy уравнение эллипса примет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично для гиперболы с центром $O_1(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям Ox и Oy (если действительная ось параллельна Ox), имеем:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

для параболы с вершиной $O_1(x_0; y_0)$ получим

$$Y^2 = \pm 2pX \quad \Leftrightarrow \quad (y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0),$$

если ось симметрии параллельна Ox;

$$X^2 = \pm 2pY \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0),$$

если ось симметрии параллельна Oy.

Заметим, что после преобразований все эти уравнения могут быть записаны в виде

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{4}$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22} не равен 0.

Для того, чтобы определить тип кривой второго порядка, имея уравнение вида (4), нужно получить ее каноническое уравнение, выделив полный квадрат по каждой переменной. Таким образом, уравнение (4) приводится к каноническому виду с помощью замены переменных

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0, \end{cases}$$

которая сводится к параллельному переносу системы координат.

Пример 1. Построим линию $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$.

Решение. Выделим полный квадрат по x и по y и приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 6y) + 9 = 0;$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 6y + 9) - 36 + 9 = 0;$$

$$9(x-1)^2 + 4(y+3)^2 = 36;$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$$

Получили уравнение эллипса с центром в точке $O_1(1; -3)$ и полуосями $a = 2; b = 3$ (рис. 30).

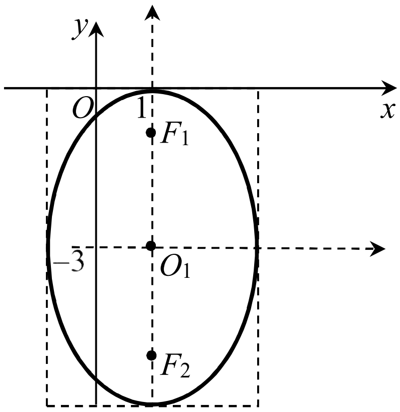


Рис. 30. Эллипс $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

Отметим, что у этого эллипса $a=2$ – малая полуось, а $b=3$ – большая. Фокусы эллипса лежат на его большой оси.

Найдем дополнительно координаты фокусов эллипса. Эти точки будут расположены симметрично относительно центра $O_1(1;-3)$ эллипса на расстоянии c от него, поэтому $F_1(1;-3+c); F_2(1;-3-c)$. Величину c найдем из условия $c^2=3^2-2^2=5$, поэтому $c=\sqrt{5}$, а значит $F_1(1;-3+\sqrt{5}); F_2(1;-3-\sqrt{5})$. •

Пример 2. Построим линию $x^2+3y^2-4x+20=0$.

Решение. Выделяя полный квадрат по x, получим

$$(x^2-4x+4)-4+3y^2+20=0;$$

$$(x-2)^2+3y^2=-16.$$

Очевидно, что этому уравнению никакая линия не соответствует. •

Пример 3. Построим линию $x^2-4y^2+16y=0$.

Решение. Выделим полный квадрат по y и приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

$$x^2-4(y^2-4y)=0;$$

$$x^2-4(y^2-4y+4)+16=0;$$

$$x^2 - 4(y-2)^2 = -16;$$

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Получили уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(0;2)$ и полуосями $a=4; b=2,$ причем a – мнимая, b – действительная полуоси (рис. 31).

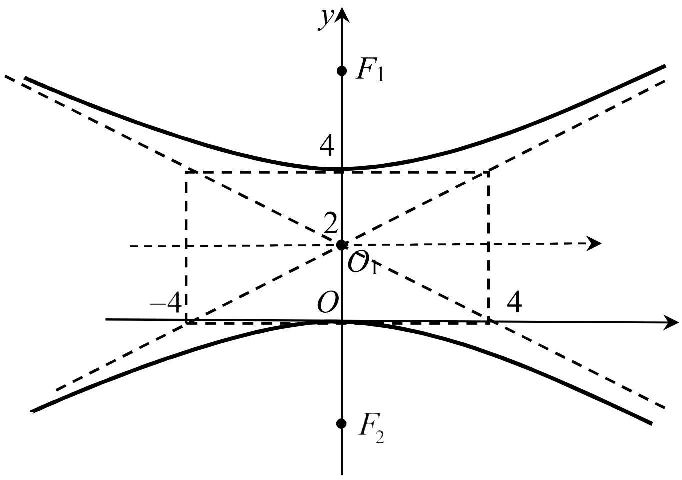


Рис. 31. Гипербола $-\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

Отметим, что эта гипербола проходит через начало координат – точку с координатами $x=0; y=0,$ что хорошо видно из исходного уравнения.

Отметим, что фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси симметрично относительно центра $O_1(0;2)$ гиперболы на расстоянии c от него, поэтому $F_1(0; 2+c); F_2(0; 2-c).$ Величину c найдем из условия $c^2 = 4^2 + 2^2 = 20,$ поэтому $c = 2\sqrt{5},$ а значит $F_1(0; 2+2\sqrt{5}); F_2(0; 2-2\sqrt{5}).$ •

Пример 4. Построим линию $y^2 - 4x - 4y - 8 = 0.$

Решение. Выделим полный квадрат по y и приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

$$(y^2 - 4y + 4) - 4 - 4x - 8 = 0;$$

$$(y-2)^2 = 4x+12;$$

$$(y-2)^2 = 4(x+3).$$

Получили уравнение параболы с вершиной $O_1(-3; 2)$ и осью симметрии $y=2$. Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, то $x \ge -3$, а значит, ветви параболы направлены вправо.

Для уточнения рисунка, найдем точки пересечения параболы с осями координат. На оси *Ox* переменная $y=0$, поэтому из исходного уравнения получим $-4x-8=0$; $x=-2$. На оси *Oy* переменная $x=0$, из последнего уравнения получаем $(y-2)^2=12$; $y=2\pm 2\sqrt{3}$ (рис. 32).

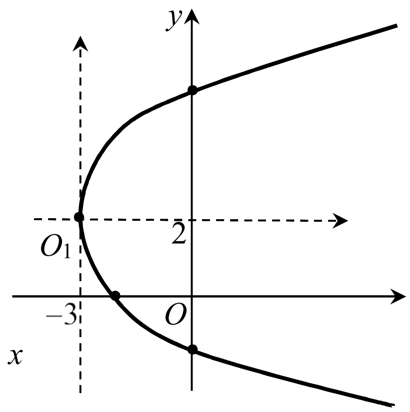


Рис. 32. Парабола $(y-2)^2 = 4(x+3)$

•

Пример 5. Построим линию $x^2-2x-y^2+1=0$.

Решение. Выделяя полный квадрат по *x*, получим

$$(x-1)^2 - y^2 = 0.$$

Раскладывая левую часть на множители, имеем:

$$(x-1-y)(x-1+y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-1-y=0, \\ x-1+y=0. \end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение задает на плоскости две пересекающиеся прямые $x-y=1$ и $x+y=1$ (рис. 33).

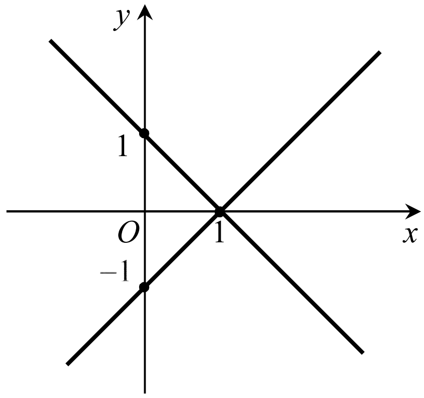


Рис. 33. Две пересекающиеся прямые $x - y = 1$ и $x + y = 1$

•

Т 2. Всякое алгебраическое уравнение 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

(в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равен 0) задает одну из следующих линий на плоскости: эллипс (возможно, вырожденный эллипс вида $x^2 + y^2 = 0$ (точка) или мнимый эллипс вида $x^2 + y^2 = -1$), гиперболу, параболу или пару прямых (пересекающихся, параллельных или совпадающих).

Преобразование уравнения к каноническому виду осуществляется с помощью замены переменных вида

$$\begin{cases} X = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + c_1, \\ Y = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + c_2, \end{cases}$$

которая сводится к повороту и параллельному переносу системы координат.

§ 5. Поверхности второго порядка. Метод сечений

Опр. 1. ***Поверхностью 2-го порядка*** называется поверхность, определяемая в декартовой прямоугольной системе координат в пространстве алгебраическим уравнением 2-й степени с тремя переменными, т. е. уравнением вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не равен 0.

В зависимости от значений коэффициентов это уравнение определяет поверхности следующих типов:

1) ***эллиптический*** (эллипсоид, частный случай – сфера);

2) ***гиперболический*** (однополостный и двуполостный гиперболоиды, коническая поверхность);

3) ***параболический*** (эллиптический и гиперболический параболоиды);

4) ***цилиндрические*** поверхности (эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры, пара пересекающихся или пара параллельных плоскостей).

Для того чтобы определить тип поверхности, ее уравнение приводят к наиболее простому ***каноническому виду***. Как и в случае кривых 2-го порядка, это можно сделать с помощью замены переменных, которая сводится к повороту и параллельному переносу системы координат.

Метод сечений

При изучении формы поверхностей используется ***метод сечений***, который состоит в том, что поверхность рассекают плоскостями и по виду линий пересечения делают вывод о форме самой поверхности.

Для простоты в качестве секущих плоскостей рассматривают координатные плоскости и им параллельные.

Сфера

Опр. 2. ***Сфера*** – множество точек пространства, равноудаленных от данной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, которая называется ***центром сферы***. Расстояние R от центра до точек сферы называется ее ***радиусом*** (рис. 34).

Если $M(x; y; z)$ – произвольная точка на сфере, то, по определению, расстояние от точки M до точки M_0 должно быть равно R, поэтому

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R;$$

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.}$$

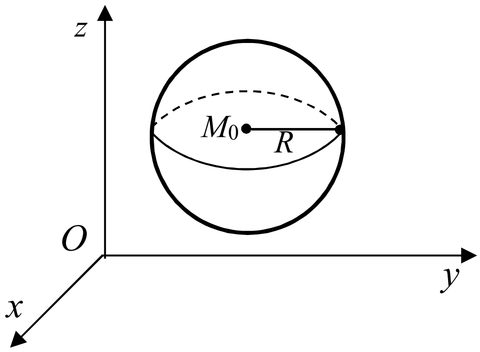


Рис. 34. Сфера

Если $x_0=0; y_0=0; z_0=0,$ то уравнение сферы с центром в начале координат имеет вид

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2.}$$

Эллипсоид

Опр. 3. ***Эллипсоид*** – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Для исследования формы этой поверхности применим метод сечений.

Будем пересекать данную поверхность плоскостями $z=h,$ параллельными плоскости Oxy. При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z=h$ (в системе координат с началом в точке $(0;0;h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}.$$

Рассмотрим несколько случаев.

При $h=0$ (в плоскости Oxy) получим эллипс с полуосями a и b. При $|h|<c$ получим линию

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Это уравнение определяет эллипс, полуоси которого $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\le a$; $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\le b$ и уменьшаются с возрастанием $|h|$.

При $|h|=c$ получим точку.

При $|h|>c$ плоскость не пересекается с эллипсоидом.

Аналогичная картина имеет место при пересечении эллипсоида плоскостями $y=h$ и $x=h$.

Таким образом, в сечении эллипсоида любой плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей, можно получить пустое множество, точку или эллипс (см. рис. 35).

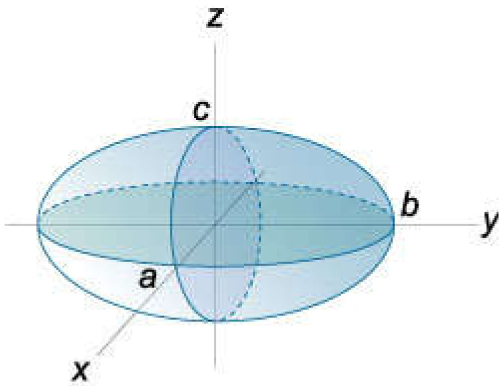


Рис. 35. Эллипсоид

Однополостный гиперболоид

Опр. 4. ***Однополостный гиперболоид*** – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Исследуем форму этой поверхности методом сечений.

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h$, параллельными плоскости Oxy. При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z = h$ (в системе координат с началом в точке $(0; 0; h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

При $h = 0$ (в плоскости Oxy) получим эллипс с полуосями a и b. При $h \neq 0$ получим линию

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \dfrac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \dfrac{h^2}{c^2}\right)} = 1,$$

т. е. эллипс, полуоси которого $a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}} \geq a$; $b\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}} \geq b$ и увеличиваются с возрастанием $|h|$.

В сечении плоскостью Oyz (при $x = 0$) получается линия

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

т. е. гипербола с полуосями b и c. Действительной осью здесь является ось Oy (гипербола пересекает ось Oy в точках b и $-b$), а мнимой – ось Oz (см. рис. 36).

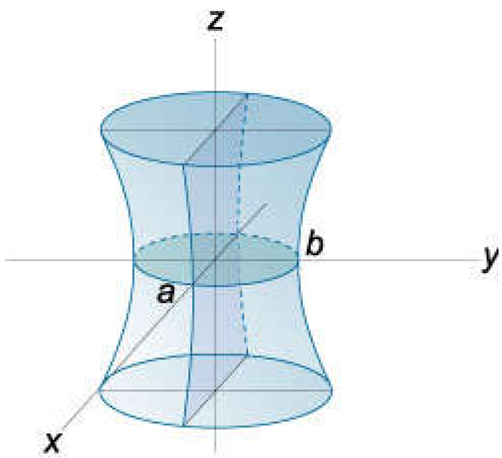


Рис. 36. Однополостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид

Опр. 5. ***Двуполостный гиперболоид*** – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Исследуем форму этой поверхности методом сечений.

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h,$ параллельными плоскости Oxy. При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z=h$ (в системе координат с началом в точке $(0;0;h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1.$$

При $|h|<c$ плоскость не пересекает гиперболоид.

При $|h|=c$ получим в сечении точку.

При $|h|>c$ получим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1,$$

полуоси которого $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1};\ b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ увеличиваются с возрастанием $|h|$.

В сечении плоскостью Oyz (при $x=0$) получается линия

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. гипербола с полуосями b и c. Действительной осью здесь является ось Oz (гипербола пересекает ось Oz в точках c и $-c$), а мнимой – ось Oy (см. рис. 37).

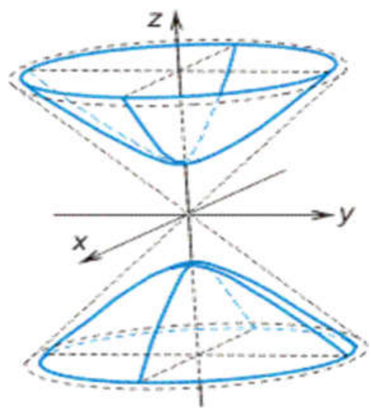


Рис. 37. Двуполостный гиперболоид

Коническая поверхность

Опр. 6. ***Коническая поверхность*** – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Исследуем форму этой поверхности методом сечений.

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h,$ параллельными плоскости Oxy. При заданном h линия, полученная в сечении, определяется в плоскости $z=h$ (в системе координат с началом в точке $(0;0;h)$ и осями, параллельными Ox и Oy) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}.$$

При $|h|=0$ получим в сечении точку – начало координат.

При $h\neq 0$ получим эллипс

$$\frac{x^2}{\frac{a^2h^2}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2h^2}{c^2}}=1,$$

полуоси которого $\frac{a}{c}|h|;$ $\frac{b}{c}|h|$ увеличиваются с возрастанием $|h|$.

В сечении плоскостью Oyz (при $x=0$) получается линия

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

т. е. пара пересекающихся прямых $y=\pm\frac{b}{c}z$ (см. рис. 38).

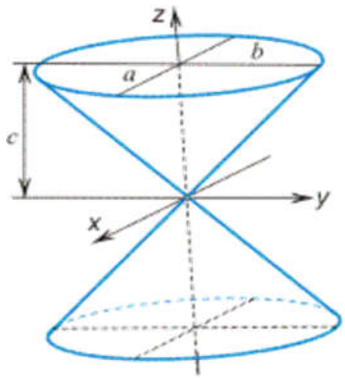


Рис. 38. Коническая поверхность

Эллиптический параболоид

Опр. 7. ***Эллиптический параболоид*** – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z.$$

Исследуем форму этой поверхности методом сечений.

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h$, параллельными плоскости Oxy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h.$$

При $h<0$ пересечения нет.

При $h=0$ получим в сечении точку – начало координат.

При $h>0$ получим эллипс с полуосями $a\sqrt{h}$; $b\sqrt{h}$, увеличивающимися с возрастанием h.

В сечении плоскостью Oyz (при $x=0$) получается парабола $\frac{y^2}{b^2}=z$ с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz (рис. 39).

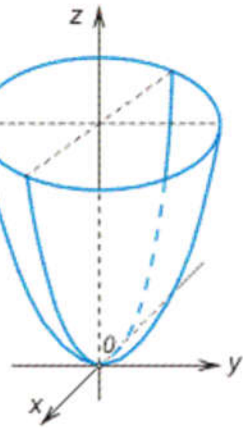


Рис. 39. Эллиптический параболоид

Гиперболический параболоид

Опр. 8. ***Гиперболический параболоид*** – это поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-z.$$

Исследуем форму этой поверхности методом сечений.

Рассмотрим сечения плоскостями $z=h$, параллельными плоскости Oxy:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-h.$$

При $h=0$ получим в сечении пару пересекающихся прямых $y=\pm\frac{b}{a}x$. При $h\neq 0$ получим гиперболу

$$-\frac{x^2}{a^2h}+\frac{y^2}{b^2h}=1.$$

При $h>0$ эта гипербола пересекает ось Oy (точнее, прямую $x=0;\, z=h$, параллельную оси Oy); при $h<0$ пересекает ось Ox (прямую $y=0;\, z=h$, параллельную оси Ox).

В сечении плоскостью Oyz (при $x=0$) получается парабола $\frac{y^2}{b^2}=z$, осью симметрии которой является ось Oz, а ветви направлены вверх. Более того, в сечении любой плоскостью $x = h$, параллельной Oyz, получается парабола, ось симметрии которой параллельна Oz, а ветви направлены вверх.

Аналогично, в сечении плоскостью Oxz (при $y = 0$) получается парабола $\frac{x^2}{a^2} = -z$, осью симметрии которой является ось Oz, а ветви направлены вниз. Более того, в сечении любой плоскостью $y = h$, параллельной Oxz, получается парабола, ось симметрии которой параллельна Oz, а ветви направлены вниз (рис. 40).

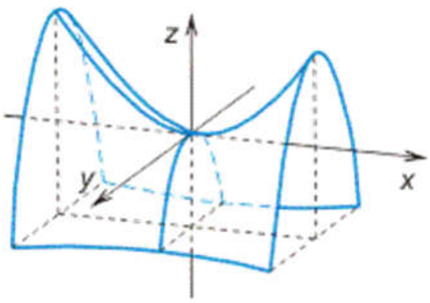


Рис. 40. Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид называют также ***седловидной поверхностью***.

Замечание. Гиперболический параболоид можно получить, взяв две параболы с общей вершиной и противоположно направленными ветвями, расположенными в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и перемещая одну из парабол параллельно самой себе так, чтобы ее вершина двигалась по второй параболе.

Цилиндрические поверхности

Опр. 9. ***Цилиндрической поверхностью***, или ***цилиндром***, называется поверхность, которую можно получить перемещением прямой L, которая называются ***образующей***, параллельно самой себе вдоль некоторой кривой K, которая называется ***направляющей*** (рис. 41).

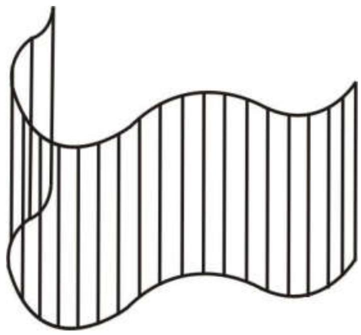


Рис. 41. Цилиндрическая поверхность

Опр. 10. Цилиндрическая поверхность называется ***цилиндрической поверхностью 2-го порядка***, если ее направляющей является одна из линий 2-го порядка.

Уравнение 2-й степени с двумя переменными определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной той координатной оси, переменная которой отсутствует в уравнении. Так, уравнение любой цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси Oz, имеет вид $F(x;\,y)=0$.

Рассмотрим цилиндрические поверхности 2-го порядка с образующими, параллельными оси Oz:

- ***эллиптический цилиндр*** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 42);

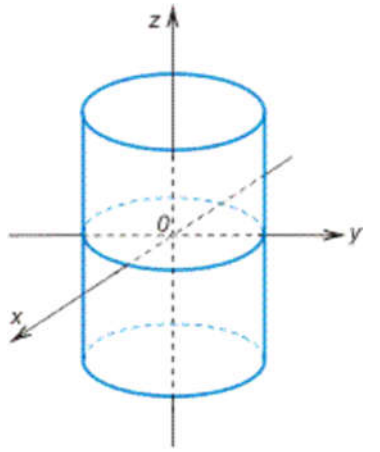


Рис. 42. Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

- ***гиперболический цилиндр*** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 43);

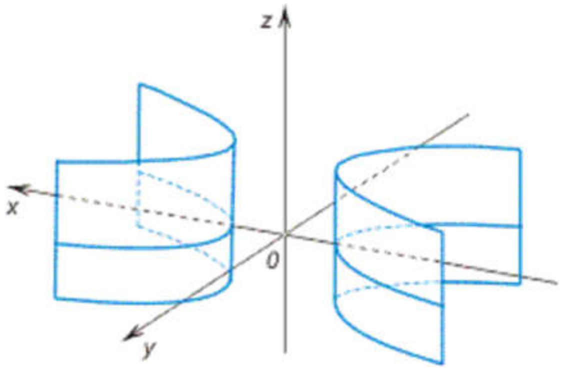


Рис. 43. Гиперболический цилиндр $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

-***параболический цилиндр*** $y^2 = 2px$ (рис. 44).

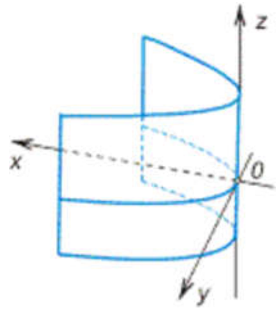


Рис. 44. Параболический цилиндр $y^2 = 2px$

Способы образования поверхностей

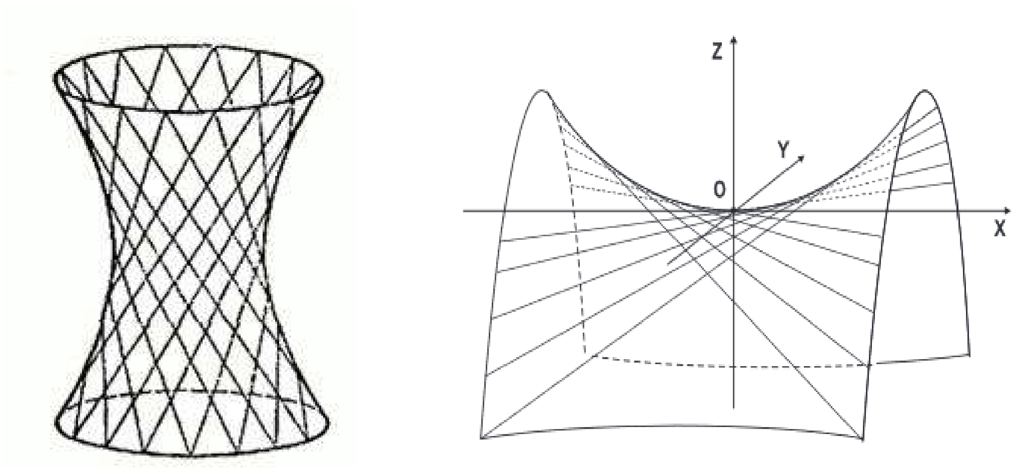
По способу образования поверхностей выделяют линейчатые поверхности и поверхности вращения.

Опр. 11. ***Линейчатая поверхность*** – это поверхность, которую можно получить движением некоторой прямой линии (***образующей***).

Линейчатыми поверхностями являются:

- цилиндрические поверхности;
- коническая поверхность;
- однополостный гиперболоид;
- гиперболический параболоид (седло).

Интересно, что через каждую точку однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида проходит *ровно две прямые*, лежащие на этой поверхности.



а б

Рис. 45. Однополостный гиперболоид (а) и гиперболический параболоид (б) как линейчатые поверхности

Отметим, что однополостные гиперболоиды нашли применение в практике строительства. Сооружение различных высотных башен с использованием прямолинейных образующих однополостного гиперболоида сочетает в себе прочность конструкции с простотой ее исполнения. Идея использования однополостного гиперболоида в строительстве принадлежит русскому и советскому инженеру В. Г. Шухову (1853–1939). По проекту Шухова строились водонапорные башни, опоры линий передач, маяки, а также была построена телевизионная башня на Шаболовке в г. Москве, она состоит из секций однополостных гиперболоидов вращения.

Опр. 12. ***Поверхность вращения*** – это поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости.

Поверхность, полученная вращением вокруг оси *Oz*, имеет уравнение $F(x^2+y^2;z)=0$. Например,

$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид вращения;

$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1;\quad \dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – однополостный и двуполостный гиперболоиды вращения;

$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – круговой конус;

$x^2+y^2=\pm a^2 z$ – параболоид вращения (круговой параболоид);

$x^2+y^2=a^2$ – круговой цилиндр.

Упражнение. Построить поверхности: **а)** $x^2+y^2=4z$; **б)** $x^2+y^2-z^2=4$; **в)** $x^2+y^2=z^2-4z$; **г)** $x^2+2x+y^2=2z$; **д)** $xy=4$; **е)** $x^2+2xy+3y^2+4y=z$.

§ 6. Криволинейные системы координат на плоскости и в пространстве

Полярная система координат на плоскости

В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости каждая точка M однозначно определяется двумя своими координатами x и y. С другой стороны, можно охарактеризовать точку M следующим образом: расстоянием r от начала координат (точки O) и углом φ между положительным направлением оси Ox и лучом OM (см. рис. 46).

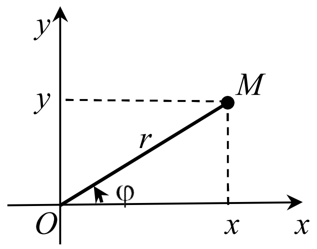


Рис. 46. Декартовы и полярные координаты точки M

Опр. 1. Говорят, что на плоскости задана ***полярная система координат***, если заданы:

1) точка O, которая называется ***полюсом***;
2) луч OP, выходящий из полюса, который называется ***полярным лучом***;
3) единица масштаба на полярной оси.

Опр. 2. ***Полярными координатами*** точки M называется пара чисел $(r; \varphi)$, где:

r – расстояние от точки M до полюса (точки O) – ***полярный радиус***;

φ – угол между полярной осью и лучом OM, который отсчитывается против часовой стрелки, как в тригонометрии, – ***полярный угол***.

Обычно считается, что полярный радиус удовлетворяет условию $0 \le r < +\infty$, так как характеризует расстояние. Иногда рассматривают так называемую *обобщенную полярную систему координат*, в которой допускаются отрицательные значения полярного радиуса.

Для точки O (полюса) $r = 0$, значение φ не определено.

Любой точке плоскости, кроме полюса, соответствует одно определенное значение r и множество значений φ, отличающихся на $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0 \le \varphi < 2\pi$, называется ***главным***.

Пример 1. Построим точки $A\left(4; \frac{\pi}{3}\right); B\left(3; \frac{5\pi}{4}\right); C\left(2; -\frac{\pi}{4}\right);$ $D(4,5; 0); E\left(-2; \frac{\pi}{3}\right)$, заданные полярными координатами.

Решение. Выберем начало отсчета точку O (полюс), зададим направление полярного луча OP и единицу масштаба на полярной оси. Чтобы построить точку $A\left(4; \frac{\pi}{3}\right)$, повернем луч OP против часовой стрелки на угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и отложим на новом луче отрезок длиной $r = 4$ (рис. 47). Аналогично, точка $B\left(3; \frac{5\pi}{4}\right)$ получится, если повернуть полярную ось OP против часовой стрелки на угол $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ и отложить отрезок длиной $r = 3$.

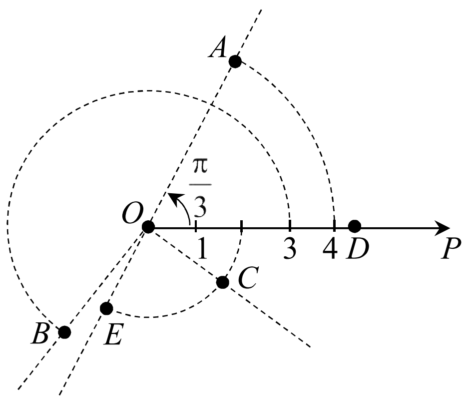


Рис. 47. Точки, заданные своими координатами в полярной системе координат

Чтобы построить точку $C\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$ (с отрицательным значением полярного угла $\varphi = -\frac{\pi}{4}$), нужно повернуть полярную ось по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{4}$. Точка $D(4{,}5; 0)$ располагается на полярной оси. Чтобы получить точку $E\left(-2; \frac{\pi}{3}\right)$ (с отрицательным значением полярного радиуса $r = -2$), нужно отложить отрезок длины 2 на продолжении луча $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (луча OA) за точку O (см. рис. 47). •

Если совместить начало декартовой системы координат с полюсом O, а ось Ox – с полярной осью OP (рис. 48), то ***связь между полярными*** $(r; \varphi)$ ***и декартовыми*** $(x; y)$ ***координатами точки*** задается формулами

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}}$$

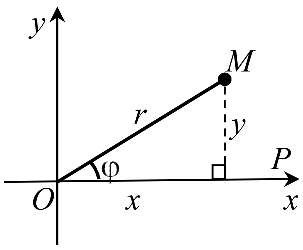


Рис. 48. Связь между декартовыми и полярными координатами точки

С другой стороны, зная декартовы координаты $(x; y)$ точки, можно определить ее полярные координаты по формулам

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$;	$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$

Упражнение 1. Какие линии задаются уравнениями $r = a$ и $\varphi = \alpha$?

Примеры линий, заданных уравнениями в полярных координатах

Пример 2. Построим ***спираль Архимеда*** $r = a\varphi$.

Решение. При увеличении полярного угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ полярный радиус постепенно увеличивается от $r = 0$ до $r = 2\pi a$. Далее, при изменении полярного угла на 2π (полный оборот вокруг полюса) полярный радиус изменяется на одно и то же значение $2\pi a$, т. е. каждый новый виток спирали отстоит от предыдущего и последующего на одно и то же расстояние $2\pi a$ (рис. 49). •

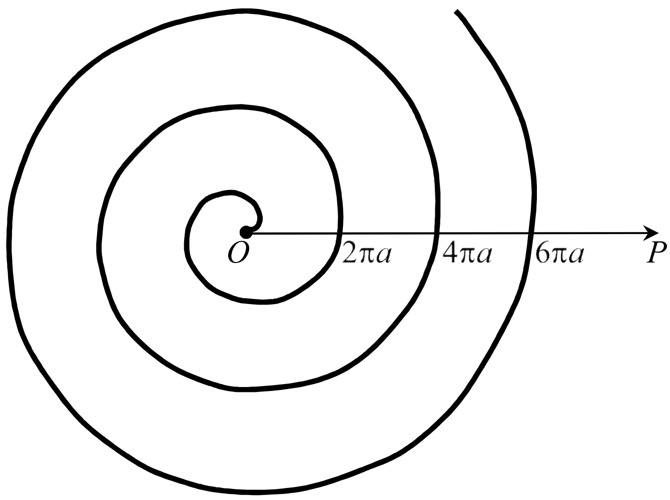


Рис. 49. Спираль Архимеда

Пример 3. Определим, какая линия задается уравнением $r = 2a\cos\varphi$.

Решение. Перейдем к декартовым координатам. Для этого умножим обе части уравнения на r и воспользуемся формулами $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\varphi$. Тогда

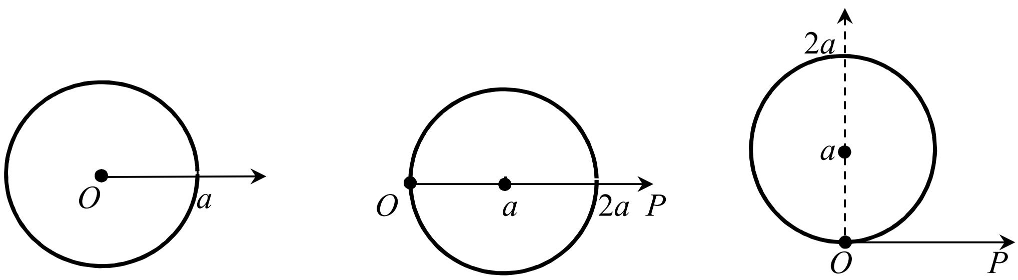
$$r = 2a\cos\varphi; \qquad r^2 = 2ar\cos\varphi; \qquad x^2 + y^2 = 2ax.$$

Выделяя в последнем уравнении полный квадрат по переменной x, получим

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2; \;\; (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Таким образом, $r = 2a\cos\varphi$ – это уравнение окружности с центром $(a;0)$ и радиусом $R = a$. •

Аналогично, $r = 2a\sin\varphi$ – уравнение окружности с центром $(0;a)$ и радиусом $R = a$.



а $r = a$ б $r = 2a\cos\varphi$ в $r = 2a\sin\varphi$

Рис. 50. Окружности, заданные уравнениями в полярных координатах

Пример 4. Построим линию $r = a(1+\cos\varphi)$.

Решение. Заметим, что поскольку функция $\cos\varphi$ имеет период 2π, то все точки линии можно получить, если взять $\varphi \in [0; 2\pi]$.

При увеличении полярного угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$ значения функции $\cos\varphi$ уменьшаются от 1 до -1, а значения полярного радиуса – соответственно, от $r = 2a$ до $r = 0$. Аналогично, при изменении полярного угла от $\varphi = \pi$ до $\varphi = 2\pi$ значения функции $\cos\varphi$ увеличиваются от -1 до 1, значения полярного радиуса – от $r = 0$ до $r = 2a$. Учитывая это, отметим опорные точки с полярными координатами $(2a;0)$, $\left(a;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $(0;\pi)$, $\left(a;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ и схематически построим линию (рис. 51).•

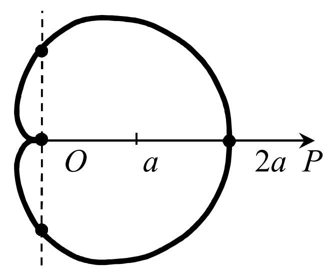


Рис. 51. Кардиоида $r = a(1+\cos\varphi)$

Линия, заданная уравнением $r = a(1+\cos\varphi)$ (или $r = a(1-\cos\varphi)$, $r = a(1+\sin\varphi)$, $r = a(1-\sin\varphi)$), называется ***кардиоидой***.

Кардиоида – это траектория точки, лежащей на окружности радиуса $\frac{a}{2}$, которая катится по окружности такого же радиуса (см. рис. 52).

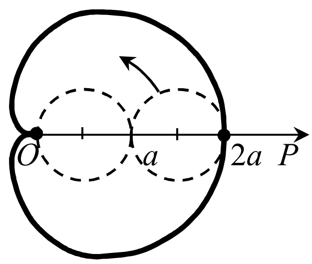


Рис. 52. Кардиоида как траектория точки

Линия, заданная уравнением вида $r = a + b\cos\varphi$ (или $r = a + b\sin\varphi$), называется ***улиткой Паскаля*** (в честь Этьена Паскаля (1588–1651), математика-любителя, отца знаменитого Блеза Паскаля).

Линии, заданные уравнениями вида $r = a\cos k\varphi$ (или $r = a\sin k\varphi$), называются ***розами***.

Пример 5. Построим трехлепестковую розу $r = a\sin 3\varphi$.

Решение. Заметим, что поскольку функция $\sin 3\varphi$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, достаточно построить часть линии, соответствующую значениям $\varphi \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, а затем повернуть картинку на угол $\frac{2\pi}{3}$ дважды, чтобы получить все точки, отвечающие $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Значения полярного радиуса $r \le a$, т. е. вся линия будет расположена внутри окружности $r = a$. При увеличении полярного угла от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{6}$ значения полярного радиуса увеличиваются от $r = 0$ до $r = a$, а при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ значения полярного радиуса уменьшаются от $r = a$ до $r = 0$. При $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ получаем $r \le 0$, т. е. в секторе между $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ точек линии нет (если рассматривать обобщенные полярные координаты, то соответствующие точки будут расположены в секторе между $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{5\pi}{3}$). Отмечая опорные точки, в которых $r = a$, схематически построим линию (рис. 53).•

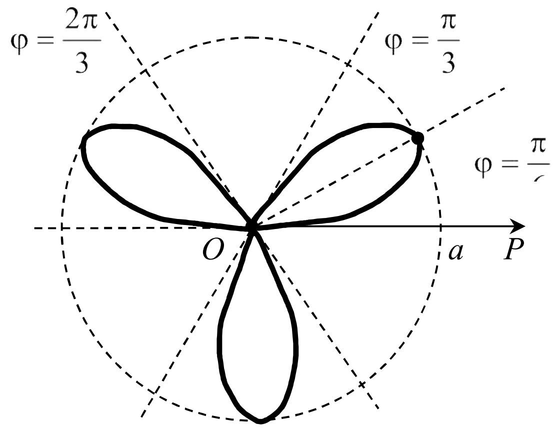


Рис. 53. Трехлепестковая роза $r = a\sin 3\varphi$

Полярные уравнения кривых второго порядка

Утв. 1. При специальном выборе полярной системы координат (если поместить полюс в один из фокусов кривой 2-го порядка, а полярную ось направить из фокуса по оси кривой в сторону, противоположную той, где лежит соответствующая директриса) уравнение кривой 2-го порядка имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

где ε – эксцентриситет кривой, а p – ее *фокальный параметр* (в случае параболы p – ее параметр; в случае эллипса $p = \frac{a^2}{b}$, где a – большая, b – малая полуось; в случае гиперболы $p = \frac{a^2}{b}$, где a – действительная, b – мнимая полуось).

Цилиндрическая система координат в пространстве

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$. Пусть M' – проекция точки M на плоскость Oxy (см. рис. 54).

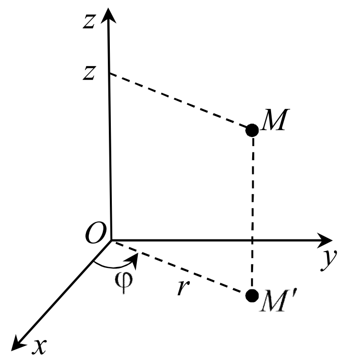


Рис. 54. Цилиндрические координаты точки M

Опр. 3. ***Цилиндрическими координатами*** точки M называется тройка чисел $(r; \varphi; z)$, где:

r – расстояние от начала координат (точки O) до точки M';

φ – угол между осью Ox и лучом OM';

z – аппликата точки M.

Связь между цилиндрическими $(r; \varphi; z)$ и декартовыми $(x; y; z)$ координатами точки задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Сферическая система координат в пространстве

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$. Обозначим через M' проекцию точки M на плоскость Oxy (см. рис. 55).

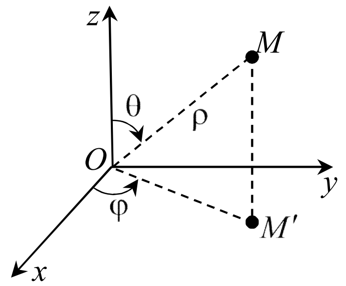


Рис. 55. Сферические координаты точки *M*

Опр. 4. ***Сферическими координатами*** точки *M* называется тройка чисел $(\rho;\theta;\varphi)$, где:

ρ – расстояние от начала координат (точки *O*) до точки *M*;

θ – угол между осью *Oz* и лучом OM ($0 \le \theta \le \pi$);

φ – угол между осью *Ox* и лучом OM' ($0 \le \varphi < 2\pi$).

Можно видеть, что связь между сферическими $(\rho;\theta;\varphi)$ и декартовыми $(x;y;z)$ координатами точки задается формулами

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$