# ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

## §1. Линейные пространства: определение и примеры

**Пример 1.** Рассмотрим несколько множеств различных математических объектов:

1) множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ матриц фиксированного размера $m\times n$, элементы которых – действительные числа;

2) множество $\mathcal{V}_3$ векторов в пространстве (либо множество $\mathcal{V}_2$ векторов на плоскости, либо множество $\mathcal{V}_1$ векторов на прямой);

3) множество $\mathbb{R}$ действительных чисел;

4) множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами.

Во всех этих множествах определены операции сложения элементов и умножения на число, обладающие одинаковыми свойствами.•

Существует много других примеров множеств элементов различной природы, для которых определены операции сложения и умножения на число, обладающие теми же свойствами. Для изучения общих свойств таких множеств вводится понятие линейного пространства.

**Опр. 1.** ***Линейным*** (или ***векторным***) ***пространством*** называется множество $L$ элементов произвольной природы, если определены операция *сложения элементов*, ставящая в соответствие каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y}\in L$ единственный элемент $\overline{x}+\overline{y}\in L,$ и операция *умножения элементов на действительные числа*, ставящая в соответствие каждому элементу $\overline{x}\in L$ и каждому числу $\alpha\in\mathbb{R}$ единственный элемент $\alpha\overline{x}\in L,$ причем заданные операции удовлетворяют следующим 8 аксиомам: для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\in L$ и любых $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$

1) $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ (*коммутативность* сложения

2) $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$ (*ассоциативность* сложения);

3) существует ***нейтральный (нулевой) элемент*** $\overline{0}\in L$ такой, что $\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}$ для всех $\overline{x}\in L;$

4) для каждого $\bar{x} \in L$ существует ***противоположный элемент*** $-\bar{x} \in L$ такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$;

5) $1\bar{x} = \bar{x}$;

6) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$ (*дистрибутивность* умножения на число относительно сложения элементов);

7) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$ (*дистрибутивность* умножения элемента на число относительно сложения чисел);

8) $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$ (*ассоциативность* умножения на число).

*Замечание*. Элементы линейного пространства часто называют ***векторами***.

**Пример 1 (продолжение).** Укажем некоторые примеры линейных пространств.

1. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с обычными операциями сложения элементов и умножения на число.

2. Множество всех свободных векторов на плоскости $\mathcal{V}_2$, либо в пространстве $\mathcal{V}_3$, либо множество $\mathcal{V}_1$ всех векторов, коллинеарных заданной прямой.

3. Множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ всех матриц фиксированного размера $m \times n$.

*Упражнение 1*. Почему не является линейным пространством множество *всех* матриц?

4. Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами.

5. Множество $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше $n$ с действительными коэффициентами.

*Упражнение 2*. Почему не является линейным пространством множество всех многочленов фиксированной степени $n$ с действительными коэффициентами?

6. Множество всех функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$.

7. Множество всех непрерывных функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$. •

**Пример 2.** Важнейший пример линейного пространства дает ***пространство*** $\mathbb{R}^n$ – ***пространство*** $n$***-мерных векторов*** – множество всех упорядоченных комбинаций $n$ действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n = \{\overline{x} = (x_1;\, x_2;\, ...;\, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\},$$

в котором равенство $n$-мерных векторов, а также сложение и умножение на число понимаются поэлементно: если $\overline{x} = (x_1;\, x_2;\, ...;\, x_n)$, $\overline{y} = (y_1;\, y_2;\, ...;\, y_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ ..., \\ x_n = y_n; \end{cases}$$

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1;\, x_2 + y_2;\, ...;\, x_n + y_n);$$

$$\alpha\overline{x} = (\alpha x_1;\, \alpha x_2;\, ...;\, \alpha x_n).$$

В частности, множество $\mathcal{V}_2$ всех векторов на плоскости можно трактовать как множество $\mathbb{R}^2$, так как при выбранном базисе на плоскости каждый вектор плоскости может быть задан упорядоченной парой чисел – своими координатами в данном базисе.

Аналогично, множество $\mathcal{V}_3$ векторов в пространстве отождествляют с $\mathbb{R}^3$.

Множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ матриц размера $m \times n$ с действительными элементами иногда обозначают $\mathbb{R}^{m\times n}$.•

**Пример 3.** Существует линейное пространство, состоящее из одного элемента: $L = \{\overline{0}\}$. Такое линейное пространство называют ***нулевым***. •

*Замечание.* В определении линейного пространства произвольными могут быть не только природа элементов, но и способы сложения элементов и умножения их на число.

**Пример 4.** Рассмотрим множество всех *положительных* действительных чисел

$$L = \{\overline{x} = x : x > 0\}$$

и определим *сумму* элементов как их произведение, а *умножение на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ как возведение в степень $\alpha$:

$$\overline{x} + \overline{y} = xy; \qquad \alpha\overline{x} = x^{\alpha}.$$

Покажем, что множество $L$ с введенными таким образом операциями является линейным пространством.

*Решение*. Проверим, что введенные на множестве $L$ операции удовлетворяют 8 аксиомам линейного пространства. Действительно,

1) $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ для любых $\overline{x}, \overline{y}\in L,$ так как $xy=yx$ для всех $x, y\in\mathbb{R};$

2) $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$ для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\in L,$ так как $(xy)z=x(yz)$ для всех $x, y, z\in\mathbb{R};$

3) нейтральным элементом является $\overline{1}\in L,$ поскольку $\overline{x}+\overline{1}=1x=x=\overline{x}$ для всех $\overline{x}\in L;$

4) противоположным элементу $\overline{x}\in L$ является $\overline{\frac{1}{x}}\in L,$ поскольку $\overline{x}+\overline{\frac{1}{x}}=x\frac{1}{x}=1=\overline{1};$

5) $1\overline{x}=x^1=x=\overline{x}$ для всех $\overline{x}\in L;$

6) $\alpha(\overline{x}+\overline{y})=(xy)^\alpha=x^\alpha y^\alpha=\alpha\overline{x}+\alpha\overline{y}$ для любых $\overline{x}, \overline{y}\in L$ и любого $\alpha\in\mathbb{R};$

7) $(\alpha+\beta)\overline{x}=x^{\alpha+\beta}=x^\alpha x^\beta=\alpha\overline{x}+\beta\overline{x}$ для любого $\overline{x}\in L$ и любых $\alpha, \beta\in\mathbb{R};$

8) $\alpha(\beta\overline{x})=(x^\beta)^\alpha=x^{\alpha\beta}=(\alpha\beta)\overline{x}$ для любого $\overline{x}\in L$ и любых $\alpha, \beta\in\mathbb{R}.$

Следовательно, множество $L$ с введенными указанным образом операциями сложения и умножения на действительное число является линейным пространством. •

*Замечание*. В сформулированном определении 1 рассмотрена операция умножения на *действительные* числа, поэтому такое линейное (векторное) пространство называют также ***действительным*** (или ***вещественным***) ***линейным пространством***.

Если в определении 1 рассмотреть операцию умножения на *комплексные* числа, то получим определение ***комплексного линейного пространства***.

**Пример 5.** Приведем примеры комплексных линейных пространств.

1. Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения на комплексное число.

2. Множество $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ всех матриц фиксированного размера $m\times n$ с комплексными элементами.

3. Множество $\mathbb{C}[x]$ всех многочленов с комплексными коэффициентами.

4. Множество $\mathbb{C}^n=\{\overline{x}=(x_1;\,x_2;\,...;\,x_n):x_i\in\mathbb{C},1\le i\le n\}$ $n$-мерных векторов с комплексными координатами. •

*Замечание*. Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел по отношению к обычной операции сложения комплексных чисел и операции умножения комплексных чисел на *действительное* число является *действительным* линейным пространством.

### *Простейшие свойства линейных пространств*

Непосредственно из аксиом линейного пространства можно получить ряд простейших свойств.

**Т 1.** В произвольном линейном пространстве $L$:

**1)** нулевой элемент единственен;

**2)** для каждого $\overline{x}\in L$ существует *единственный* противоположный элемент.

*Доказательство*. **1)** В аксиоме 3 линейного пространства не утверждается, что нулевой элемент должен быть единственным. Но из аксиом 1 и 3 в совокупности это вытекает.

Пусть существуют два нулевых элемента $\overline{0_1}\in L$ и $\overline{0_2}\in L$. Тогда

$$\overline{0_1}=\overline{0_1}+\overline{0_2}=\overline{0_2}+\overline{0_1}=\overline{0_2}.$$

Здесь в первом равенстве использован тот факт, что $\overline{0_2}$ – нулевой элемент, второе следует из коммутативности сложения, а третье справедливо в силу того, что $\overline{0_1}$ – нулевой элемент.

Следовательно, элементы $\overline{0_1}$ и $\overline{0_2}$ совпадают.

**2)** Пусть для некоторого $\overline{x}\in L$ существует два противоположных элемента $(-\overline{x})_1\in L$ и $(-\overline{x})_2\in L$.

Рассмотрим сумму $(-\overline{x})_1+\overline{x}+(-\overline{x})_2$. В силу аксиомы 2 эта сумма не зависит от порядка выполнения двух операций сложения. Меняя порядок сложения, получаем:

$$\left((-\overline{x})_1+\overline{x}\right)+(-\overline{x})_2=\overline{0}+(-\overline{x})_2=(-\overline{x})_2;$$

$$(-\overline{x})_1+\left(\overline{x}+(-\overline{x})_2\right)=(-\overline{x})_1+\overline{0}=(-\overline{x})_1,$$

т. е. оба противоположных элемента совпадают. ◁

**Т 2.** В произвольном линейном пространстве $L$:

**1)** $0\overline{x}=\overline{0}$ для всех $\overline{x}\in L$;

**2)** $-1\overline{x}=-\overline{x}$ для всех $\overline{x}\in L$;

**3)** $\alpha\overline{0}=\overline{0}$ для всех $\alpha\in\mathbb{R}$ (либо для всех $\alpha\in\mathbb{C}$, если рассматривается комплексное линейное пространство);

**4)** $\alpha\overline{x}=\overline{0} \quad\Leftrightarrow\quad$ либо $\alpha=0$, либо $\overline{x}=\overline{0}$.

## §2. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства

Понятия линейной комбинации элементов, а также линейной зависимости и линейной независимости векторов произвольного линейного пространства определяются точно так же, как для обычных векторов в пространстве.

**Опр. 1.** ***Линейной комбинацией*** элементов $\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\in L$ с числовыми коэффициентами $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ называется элемент

$$\overline{y}=\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+...+\alpha_n\overline{x_n}\in L.$$

**Опр. 2.** Система (множество) элементов $\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\in L$ называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, из которых хотя бы одно не равно 0, что $\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+...+\alpha_n\overline{x_n}=\overline{0}$.

**Опр. 3.** Система (множество) элементов $\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\in L$ называется ***линейно независимой***, если равенство $\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+...+\alpha_n\overline{x_n}=\overline{0}$ возможно только в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны 0, т. е.

$$\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0.$$

**Т 1 (критерий линейной зависимости системы элементов).** Система элементов $\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\in L$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

*Доказательство.* По определению, если элементы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ линейно зависимы, то существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные 0, что $\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + ... + \alpha_n \overline{x_n} = \overline{0}$. Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\overline{x_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overline{x_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\overline{x_3} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overline{x_n},$$

т. е. элемент $\overline{x_1}$ является линейной комбинацией элементов $\overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_n}$.

Обратно, если $\overline{x_1}$ является линейной комбинацией элементов $\overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x_n}$, т. е. $\overline{x_1} = \alpha_2 \overline{x_2} + \alpha_3 \overline{x_3} + ... + \alpha_n \overline{x_n}$. Тогда $\overline{x_1} - \alpha_2 \overline{x_2} - \alpha_3 \overline{x_3} - ... - \alpha_n \overline{x_n} = \overline{0}$, т. е. линейная комбинация элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ равна $\overline{0}$, причем коэффициент при $\overline{x_1}$ не равен 0, а значит, элементы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ линейно зависимы. ◁

## *Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем элементов*

**Утв. 1.** Всякая система элементов, содержащая нулевой элемент, линейно зависима.

**Утв. 2.** Если часть системы элементов образует линейно зависимую систему, то и вся система линейно зависима.

**Утв. 3.** Если система элементов линейно независима, то и любая ее подсистема (часть) линейно независима.

**Утв. 4.** Если элементы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in L$ линейно независимы и элемент $\overline{y} \in L$ не является их линейной комбинацией, то система элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}, \overline{y} \in L$ линейно независима.

**Пример 1.** В линейном пространстве $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ матриц размера $2 \times 2$ проверить, являются линейно зависимыми или линейно независимыми следующие системы элементов:

**а)** $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

**б)** $B_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; $B_2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; $B_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $B_4=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$.

*Решение*. **а)** Составим линейную комбинацию указанных элементов (матриц) и приравняем ее к нулевому элементу, т. е. нулевой матрице:

$$\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+\alpha_3 A_3+\alpha_4 A_4=O;$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Выполняя действия над матрицами в левой части равенства, получим

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & 2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3\\ \alpha_3+3\alpha_4 & 3\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку равенство двух матриц означает равенство их соответствующих элементов, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0,\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0,\\ \alpha_3+3\alpha_4=0,\\ 3\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=0.\end{cases}$$

Если эта система имеет только нулевое решение, то элементы линейного пространства линейно независимы. Если эта система имеет ненулевое решение, то элементы линейного пространства линейно зависимы.

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[IV'=IV-3\cdot I]{II'=II-2\cdot I}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[IV'=IV+II]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&3&0\\0&0&3&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[IV'=IV-3\cdot III]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&3&0\\0&0&0&-8&0\end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, имеющая только одно (нулевое) решение:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0,\\ \alpha_2+\alpha_3=0,\\ \alpha_3+3\alpha_4=0,\\ -8\alpha_4=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0,\\ \alpha_2=0,\\ \alpha_3=0,\\ \alpha_4=0.\end{cases}$$

Таким образом, линейная комбинация матриц $A_1, A_2, A_3, A_4$ равна нулевой матрице только в том случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0.$ Следовательно, матрицы $A_1, A_2, A_3, A_4$ линейно независимы.

**б)** Проверим, может ли быть равна нулевой матрице линейная комбинация матриц $B_1, B_2, B_3, B_4,$ не все коэффициенты которой равны 0 (***нетривиальная*** линейная комбинация матриц $B_1, B_2, B_3, B_4$):

$$\alpha_1 B_1+\alpha_2 B_2+\alpha_3 B_3+\alpha_4 B_4=O;$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0&2\\3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & 2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4\\ \alpha_3+3\alpha_4 & 3\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+7\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие элементы двух матриц, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0,\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4=0,\\ \alpha_3+3\alpha_4=0,\\ 3\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+7\alpha_4=0.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[IV'=IV-3\cdot I]{II'=II-2\cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[IV'=IV+II]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[IV'=IV-3\cdot III]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, имеющая бесконечно много решений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ 0 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -c, \\ \alpha_2 = c, \\ \alpha_3 = -3c, \\ \alpha_4 = c, \, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

В частности, полагая $c = 1$, получим $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -3, \alpha_4 = 1$, т. е. существует равная нулевой матрице *нетривиальная* линейная комбинация матриц $B_1, B_2, B_3, B_4$:

$$-B_1 + B_2 - 3B_3 + B_4 = O,$$

а значит, матрицы $B_1, B_2, B_3, B_4$ линейно зависимы. •

**Пример 2. а)** Несложно видеть, что в линейном пространстве многочленов элементы

$$f_1(x) = x^4;\ f_2(x) = x^3;\ f_3(x) = x^2;\ f_4(x) = x;\ f_5(x) = 1;\ f_6(x) = x^3 - 4x + 1$$

линейно зависимы, так как последний из них является линейной комбинацией остальных: $f_6(x) = f_2(x) - 4f_4(x) + f_5(x)$, а значит, в соответствии с критерием линейной зависимости (теорема 1), данные многочлены линейно зависимы.

**б)** В линейном пространстве непрерывных функций элементы

$$f_1(x) = 1;\ f_2(x) = \cos x;\ f_3(x) = \cos^2 x;\ f_4(x) = \cos 2x$$

линейно зависимы, так как $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, т. е. последний элемент является линейной комбинацией остальных: $f_4(x) = 2f_3(x) - f_1(x)$, а значит, в соответствии с критерием линейной зависимости (теорема 1), данные функции линейно зависимы.•

### §3. Размерность и базис линейного пространства

**Опр. 1.** ***Размерностью*** линейного пространства $L$ называется такое число $\dim L = n$, что:

**1)** в $L$ существует $n$ линейно независимых элементов;

**2)** любая система из $n+1$ элемента линейно зависима.

Таким образом, *размерность линейного пространства – это максимальное число линейно независимых элементов этого пространства*.

Размерность нулевого линейного пространства считается равной 0.

**Опр. 2.** Линейное пространство $L$ называется ***бесконечномерным*** $(\dim L = \infty)$, если при любом натуральном $n$ существует система $n$ линейно независимых элементов этого пространства.

**Пример 1.** Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами является бесконечномерным линейным пространством, так как для любого натурального $n$ система многочленов $1; x; x^2; \dots; x^{n-1}$ является линейно независимой. (Действительно, линейная комбинация этих многочленов, отвечающая набору коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, есть многочлен $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$, который является нулевым (т. е. равен постоянной функции 0), только если все его коэффициенты (они же коэффициенты линейной комбинации) равны нулю.)

Аналогично, множество всех функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$, а также множество всех непрерывных функций с действительными значениями, определенных на некотором отрезке либо на $\mathbb{R}$, являются бесконечномерными линейными пространствами, поскольку содержат линейно независимую систему функций $1; x; x^2; \dots; x^{n-1}$ для любого натурального $n$.•

**Опр. 3.** ***Базисом*** линейного пространства $L$ называется такая *упорядоченная* система $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\}$, состоящая из $n$ линейно независимых элементов этого пространства, что любой элемент $\overline{x} \in L$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}. \quad (1)$$

**Опр. 4.** Представление (1) называется ***разложением элемента*** $\overline{x}$ ***по базису*** $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\}$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – ***координатами элемента*** $\overline{x}$ ***в базисе*** $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\}$; в этом случае пишут

$$\overline{x} = \{x_1; x_2; ...; x_n\}.$$

**Пример 2.** В линейном пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами элементы $x$ и $x^2$ линейно независимы: их линейная комбинация $\alpha x + \beta x^2$ есть многочлен, который равен нулю (нулевому многочлену) лишь при $\alpha = \beta = 0$.

Однако пара этих элементов не образует базиса, так как, к примеру, многочлен 1 нулевой степени, являющийся элементом $\mathbb{R}_2[x]$, нельзя представить в виде линейной комбинации многочленов $x$ и $x^2$, поскольку равенство $1 = \alpha x + \beta x^2$ двух многочленов невозможно ни при каких значениях коэффициентов.

В то же время три многочлена $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}_2[x]$, так как:

1) система многочленов $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ линейно независима: их линейная комбинация

$$\alpha_1 e_1(x) + \alpha_2 e_2(x) + \alpha_3 e_3(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

равна нулю (нулевому многочлену) лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$;

2) через многочлены $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ можно выразить любой многочлен степени не выше 2: если $p(x) = ax^2 + bx + c$, то $p(x) = ce_1(x) + be_2(x) + ae_3(x)$.

Таким образом, система многочленов $1, x, x^2$ есть базис в $\mathbb{R}_2[x]$.

●

**Пример 3.** Покажем, что квадратные трехчлены

$$e_1(x) = x^2 - x + 2,\ e_2(x) = 2x^2 + x,\ e_3(x) = 4x^2 - x + 1$$

образуют базис в линейном пространстве $\mathbb{R}_2[x]$ многочленов степени не выше 2 с действительными коэффициентами.

*Решение.* 1) Покажем, что система многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ линейно независима, т. е. что равенство $\alpha_1 e_1(x) + \alpha_2 e_2(x) + \alpha_3 e_3(x) = 0$ возможно только в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Составим линейную комбинацию данных квадратных трехчленов и приравняем ее к 0:

$$\alpha_1(x^2 - x + 2) + \alpha_2(2x^2 + x) + \alpha_3(4x^2 - x + 1) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)x + 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0.$$

Равенство возможно только в том случае, если все коэффициенты многочлена в левой части равны 0, т. е.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II' = II + I \\ III' = III - 2\cdot I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\substack{II' = \frac{1}{3}\cdot II \\ III' = -III}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow[III' = III - 4\cdot II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, имеющая только одно (нулевое) решение:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_3 = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, линейная комбинация многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ равна 0 только в том случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$ Следовательно, многочлены $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ линейно независимы.

2) Покажем, что любой многочлен $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x).$ Для этого, приравняв линейную комбинацию многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ к $p(x)$:

$$\alpha_1(x^2 - x + 2) + \alpha_2(2x^2 + x) + \alpha_3(4x^2 - x + 1) = ax^2 + bx + c,$$

определим значения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.$
Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)x + 2\alpha_1 + \alpha_3 = ax^2 + bx + c.$$

Равенство возможно только в том случае, если все коэффициенты многочленов при одинаковых степенях $x$ совпадают, т. е.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = a, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = b, \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = c. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ -1 & 1 & -1 & b \\ 2 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II'=II+I \\ III'=III-2\cdot I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 3 & 3 & b+a \\ 0 & -4 & -7 & c-2a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{II'=\frac{1}{3}\cdot II \\ III'=-III}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b+a}{3} \\ 0 & 4 & 7 & 2a-c \end{array}\right) \xrightarrow[III'=III-4\cdot II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b+a}{3} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{2a-4b-3c}{3} \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система, имеющая единственное решение:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = a, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = \dfrac{b+a}{3}, \\ 3\alpha_3 = \dfrac{2a-4b-3c}{3}; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{-a+2b+6c}{9}, \\ \alpha_2 = \dfrac{a+7b+3c}{9}, \\ \alpha_3 = \dfrac{2a-4b-3c}{9}. \end{cases}$$

Следовательно, любой многочлен $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$.

Таким образом, квадратные трехчлены

$$e_1(x) = x^2 - x + 2,\ e_2(x) = 2x^2 + x,\ e_3(x) = 4x^2 - x + 1$$

образуют базис в $\mathbb{R}_2[x]$. •

Квадратный трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ имеет в базисе

$$e_1(x) = x^2 - x + 2,\ e_2(x) = 2x^2 + x,\ e_3(x) = 4x^2 - x + 1$$

координаты

$$\alpha_1 = \frac{-a+2b+6c}{9};\ \alpha_2 = \frac{a+7b+3c}{9};\ \alpha_3 = \frac{2a-4b-3c}{9}.$$

поскольку $p(x) = \alpha_1 e_1(x) + \alpha_2 e_2(x) + \alpha_3 e_3(x)$.

Определим координаты квадратного трехчлена $p(x) = 2x^2 + x + 3$ в этом базисе. Так как $a = 2, b = 1, c = 3,$ то

$$\alpha_1 = \frac{-2+2\cdot 1+6\cdot 3}{9} = 2;\ \alpha_2 = \frac{2+7\cdot 1+3\cdot 3}{9} = 2;\ \alpha_3 = \frac{2\cdot 2-4\cdot 1-3\cdot 3}{9} = -1,$$

т. е. $p(x) = 2e_1(x) + 2e_2(x) - e_3(x)$.

Проверка: действительно,

$$2(x^2 - x + 2) + 2(2x^2 + x) - (4x^2 - x + 1) = 2x^2 + x + 3. \bullet$$

**Т 1.** Координаты любого элемента $\overline{x} \in L$ в данном базисе $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ определяются однозначно.

*Доказательство.* Если допустить, что некоторый элемент $\overline{x} \in L$ имеет в данном базисе два разложения:

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \ldots + x_n\overline{e_n}; \qquad \overline{x} = x_1{}'\overline{e_1} + x_2{}'\overline{e_2} + \ldots + x_n{}'\overline{e_n},$$

то, вычитая из первого равенства второе, получим

$$\overline{0} = (x_1 - x_1{}')\overline{e_1} + (x_2 - x_2{}')\overline{e_2} + \ldots + (x_n - x_n{}')\overline{e_n}.$$

Так как базис – это линейно независимая система элементов, то ее линейная комбинация равна нулевому элементу только в том случае, когда она тривиальная, т. е. все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю:

$$x_1 - x_1{}' = 0;\ x_2 - x_2{}' = 0; \ldots;\ x_n - x_n{}' = 0.$$

Следовательно, $x_1 = x_1{}';\ x_2 = x_2{}'; \ldots;\ x_n = x_n{}'$, а значит, два разложения элемента $\overline{x} \in L$ в базисе $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\right\}$ совпадают. ◁

***Основное значение базиса заключается в том, что операции сложения и умножения элементов линейного пространства на числа при задании базиса сводятся к соответствующим операциям над координатами элементов.***

**Т 2.** Пусть в линейном пространстве $L$ задан базис $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\right\}$. Тогда: **1)** все координаты нулевого элемента равны 0;

**2)** два элемента равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в данном базисе;

**3)** при сложении двух элементов складываются их соответствующие координаты;

**4)** при умножении элемента на число все координаты умножаются на это число.

**Т 3.** Базис линейного пространства $L$ состоит из $n$ элементов тогда и только тогда, когда $\dim L = n$.

**Пример 4. 1)** Если $L = \mathbb{R}$, то $\dim L = 1$; базис – любое число, отличное от 0.

**2)** Множество $\mathcal{V}_3$ всех векторов в пространстве является трехмерным линейным пространством: $\dim \mathcal{V}_3 = 3$; базис – любые три некомпланарных вектора. Если $L=\mathcal{V}_2$ (множество всех векторов на плоскости), то $\dim\mathcal{V}_2=2;$ базис – любые две неколлинеарных вектора. Множество $\mathcal{V}_1$ векторов, коллинеарных заданной прямой, – одномерное линейное пространство: $\dim\mathcal{V}_1=1;$ базис – любой ненулевой вектор этого пространства.

**3)** Если $L=\mathbb{R}^n$, то $\dim L=n;$ базис в пространстве $\mathbb{R}^n$ составляют, например, $n$ $n$-мерных векторов:

$$\overline{e_1}=(1;0;0;...;0);\ \overline{e_2}=(0;1;0;...;0);\ ...;\ \overline{e_n}=(0;0;0;...;1), \qquad (2)$$

поскольку для любого $\overline{x}=(x_1;x_2;...;x_n)\in\mathbb{R}^n$ справедливо представление $\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+...+x_n\overline{e_n}.$

Базис (2) в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют ***стандартным.***

**4)** *Упражнение 1*. Показать, что в качестве базиса в линейном пространстве $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ матриц размера $2\times3$ можно взять

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\dim\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})=6.$

**5)** Множество $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше $n$ имеет базис $1;\ x;\ x^2;...;\ x^n$, поэтому $\dim\mathbb{R}_n[x]=n+1.\bullet$

*Замечание*. Базис линейного пространства определяется неоднозначно.

**Т 4.** В $n$-мерном линейном пространстве всякая упорядоченная система, состоящая из $n$ линейно независимых элементов, является базисом.

**Пример 5.** Найдем координаты вектора $\overline{x}=(1;2;3;4)\in\mathbb{R}^4$ в базисе $\overline{e_1}=(1;0;1;0);\overline{e_2}=(0;1;0;1);\overline{e_3}=(1;1;1;0);\overline{e_4}=(0;1;1;1).$

*Решение*. Найдем коэффициенты разложения элемента $\overline{x}$ по базису $\{\overline{e_1};\overline{e_2};\overline{e_3};\overline{e_4}\}$, т. е. такие числа $x_1,x_2,x_3,x_4$, что $\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+x_3\overline{e_3}+x_4\overline{e_4}.$ При этом удобно записывать элементы пространства $\mathbb{R}^4$ (упорядоченные комбинации $n$ действительных чисел) как матрицы-столбцы. Тогда

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}x_1+x_3\\x_2+x_3+x_4\\x_1+x_3+x_4\\x_2+x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие элементы двух матриц, получим систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+x_3=1,\\x_2+x_3+x_4=2,\\x_1+x_3+x_4=3,\\x_2+x_4=4.\end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&1\\0&1&1&1&2\\1&0&1&1&3\\0&1&0&1&4\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{III'=III-I\\IV'=IV-II}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&1\\0&1&1&1&2\\0&0&0&1&2\\0&0&-1&0&2\end{array}\right).$$

Таким образом, получим систему:

$$\begin{cases}x_1+x_3=1,\\x_2+x_3+x_4=2,\\x_4=2,\\-x_3=2;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=3,\\x_2=2,\\x_3=-2,\\x_4=2.\end{cases}$$

Следовательно, $\overline{x} = 3\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - 2\overline{e_3} + 2\overline{e_4}$, т. е. определили координаты $\overline{x} = \{3; 2; -2; 2\}$ в базисе $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}; \overline{e_4}\right\}$.•

## *Преобразование координат вектора при изменении базиса*

В линейном пространстве все базисы равноправны. Тот или иной базис выбирают исходя из конкретных обстоятельств, а может быть, и вообще произвольно. Иногда удобно использовать для представления элементов линейного пространства несколько базисов, но тогда естественным образом возникает задача преобразования координат векторов, которое связано с изменением базиса.

Пусть $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – базис линейного пространства $L$; $\mathcal{E}' = \left\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; ...; \overline{e_n'}\right\}$ – новый базис линейного пространства $L$, причем (любой вектор пространства $L$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса $\mathcal{E}$)

$$
\begin{aligned}
&\overline{e_1'} = t_{11}\overline{e_1} + t_{21}\overline{e_2} + ... + t_{n1}\overline{e_n},\\
&\overline{e_2'} = t_{12}\overline{e_1} + t_{22}\overline{e_2} + ... + t_{n2}\overline{e_n},\\
&...,\\
&\overline{e_n'} = t_{1n}\overline{e_1} + t_{2n}\overline{e_2} + ... + t_{nn}\overline{e_n}.
\end{aligned}
$$

**Опр. 5.** Матрица

$$
T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix}
$$

называется ***матрицей перехода от базиса*** $\mathcal{E}$ ***к базису*** $\mathcal{E}'$.

Согласно данному определению, *i-й столбец матрицы перехода есть столбец координат i-го вектора нового базиса в старом*. Поэтому говорят, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.

*Замечание*. Поскольку векторы $\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; \ldots; \overline{e_n'}$ линейно независимы, то матрица перехода является невырожденной матрицей: $\det T \neq 0$.

**Пример 6.** В пространстве $\mathcal{V}_2$ векторов на плоскости найдем матрицу перехода от базиса $\mathcal{E} = \left\{\vec{i}; \vec{j}\right\}$ к базису $\mathcal{E}' = \left\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}\right\}$, который получается из базиса $\mathcal{E} = \left\{\vec{i}; \vec{j}\right\}$ поворотом на заданный угол $\varphi$ против часовой стрелки (рис. 1).

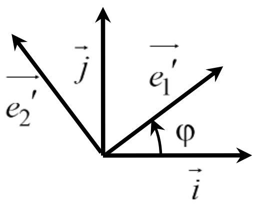


Рис. 1. Поворот ортонормированного базиса $\mathcal{E} = \left\{\vec{i}; \vec{j}\right\}$ на угол $\varphi$

Несложно видеть, что координаты векторов нового базиса в базисе $\mathcal{E} = \left\{\vec{i}; \vec{j}\right\}$ равны

$$\overline{e_1'} = \{\cos\varphi; \sin\varphi\}; \overline{e_2'} = \{-\sin\varphi; \cos\varphi\}.$$

Поэтому

$$T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \bullet$$

Непосредственной подстановкой доказывается следующий факт.

**Т 5.** Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}$ – столбцы координат элемента $\overline{x} \in L$ в базисе $\mathcal{E}$ и в базисе $\mathcal{E}'$ соответственно, то $\boxed{X = TX'.}$

**Следствие 1.** $\boxed{X' = T^{-1}X,}$ где $T$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.

**Следствие 2.** Матрица перехода от базиса $\mathcal{E}'$ к базису $\mathcal{E}$ – это матрица, обратная матрице перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$:

$$\boxed{T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} = T^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}.}$$

## *Изоморфизм линейных пространств*

**Опр. 6.** Два линейных пространства $L_1$ и $L_2$ называются ***изоморфными***, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если $\overline{x_1} \leftrightarrow \overline{y_1}$, $\overline{x_2} \leftrightarrow \overline{y_2}$, где $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in L_1$, $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in L_2$, то $\overline{x_1} + \overline{x_2} \leftrightarrow \overline{y_1} + \overline{y_2}$ и $\alpha\overline{x_1} \leftrightarrow \alpha\overline{y_1}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Из определения изоморфизма следует, что линейно зависимым векторам из $L_1$ соответствуют линейно зависимые векторы из $L_2$, и обратно. Поэтому размерности изоморфных пространств одинаковы, а пространства разной размерности не могут быть изоморфны друг другу.

**Т 6.** Два линейных пространства $L_1$ и $L_2$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim L_1 = \dim L_2$.

Таким образом, все ***линейные пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу***. Поэтому любое $n$-мерное действительное линейное пространство можно отождествлять с $\mathbb{R}^n$, рассматривая его элементы как столбцы координат в некотором фиксированном базисе.

## §4. Подпространства линейных пространств

**Опр. 1.** Непустое подмножество $L'$ действительного линейного пространства $L$ называется ***линейным подпространством*** пространства $L$, если для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L'$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ элементы $\overline{x} + \overline{y} \in L'$, $\alpha\overline{x} \in L'$.

**Утв. 1.** Подпространство само является линейным пространством, причем $\dim L' \le \dim L$.

**Пример 1.** Приведем примеры подпространств линейных пространств.

1. Простейшими примерами подпространств для любого линейного пространства $L$ являются нулевое подпространство $\{\bar{0}\}$ и само пространство $L$. Эти подпространства называются ***тривиальными***.

2. Пусть $L$ – множество всех непрерывных функций, тогда $L' = \mathbb{R}_n[x]$ – множество всех многочленов степени не выше $n$ – является подпространством линейного пространства $L$.

3. Пусть $L = \mathbb{R}_5[x]$ – множество многочленов степени не выше 5, тогда $L' = \mathbb{R}_4[x]$ – множество многочленов степени не выше 4 – является подпространством линейного пространства $L$.

4. Если $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех векторов в пространстве), то $L' = \mathcal{V}_2$ (множество всех векторов на плоскости) является подпространством линейного пространства $L$, а $L'' = \mathcal{V}_1$ (множество векторов, коллинеарных заданной прямой) является подпространством $L'$.●

Важный пример линейного подпространства дает следующее понятие.

**Опр. 2.** Пусть $\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}$ – элементы линейного пространства $L$. ***Линейной оболочкой*** элементов $\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}$ называется множество всех линейных комбинаций этих элементов:

$$L(\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}) = \{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + ... + \gamma\bar{z} : \alpha, \beta, ..., \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Линейную оболочку элементов $\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}$ обозначают $L(\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z})$ либо $<\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}>$. Иногда также говорят, что линейная оболочка *натянута на векторы* $\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}$.

*Упражнение*. Показать, что линейная оболочка заданных элементов линейного пространства $L$ является подпространством линейного пространства $L$.

**Утв. 2.** Линейная оболочка $L(\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z})$ является *наименьшим* подпространством, содержащим элементы $\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}$.

**Утв. 3.** Размерность линейной оболочки $L(\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z})$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе элементов $\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}$.

**Пример 2.** В линейном пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов линейная оболочка $L(1, x, x^2, ..., x^n) = \mathbb{R}_n[x]$ – множество всех многочленов степени не выше $n$; линейная оболочка $L(x, x^2, ..., x^n)$ – множество всех многочленов вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x$; линейная оболочка $L(1, x, x^2, x^2 + x + 1)$ – множество всех многочленов вида $a_0x^2 + a_1x + a_2$, т. е. $\mathbb{R}_2[x]$. •

**Пример 3.** Пусть $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех векторов в пространстве), $\overline{x} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\overline{y} = 3\vec{j} - 2\vec{k} \in L.$ Тогда линейная оболочка

$$L(\overline{x}, \overline{y}) = \{\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

– это множество всех векторов, параллельных плоскости, содержащей векторы $\overline{x} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\overline{y} = 3\vec{j} - 2\vec{k}$, т. е. плоскости

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

или $-2x + 4y + 6z = 0$, т. е. $x - 2y - 3z = 0.$•

### *Операции над подпространствами*

Пусть $L_1$ и $L_2$ – два линейных подпространства одного и того же линейного пространства $L$.

**Опр. 3.** ***Пересечением*** $L_1 \cap L_2$ подпространств $L_1$ и $L_2$ называется множество всех элементов, принадлежащих одновременно и $L_1$, и $L_2$:

$$L_1 \cap L_2 = \{\overline{x} \in L : \overline{x} \in L_1, \overline{x} \in L_2\}.$$

Очевидно, что $L_1 \cap L_2$ также является подпространством линейного пространства $L$.

**Опр. 4.** ***Суммой*** $L_1 + L_2$ подпространств $L_1$ и $L_2$ называется множество всех элементов вида $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$, где $\overline{x} \in L_1$, $\overline{y} \in L_2$, т. е.

$$L_1 + L_2 = \{\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} : \overline{x} \in L_1, \overline{y} \in L_2\}.$$

*Упражнение.* Проверить, что $L_1 + L_2$ является подпространством линейного пространства $L$.

**Пример 4.** Пусть $L = \mathcal{V}_3$ (множество всех свободных векторов в пространстве); $L_1$ – множество всех векторов, параллельных плоскости $Oxy$; $L_2$ – множество всех векторов, параллельных плоскости $Oxz$.

Тогда $L_1 \cap L_2$ – множество всех векторов, параллельных оси $Ox$, а $L_1 + L_2 = L$.

Заметим, что

$$\dim L = 3, \dim L_1 = 2, \dim L_2 = 2, \dim(L_1 \cap L_2) = 1, \dim(L_1 + L_2) = 3. \bullet$$

**Т 1.** Пусть $L_1$ и $L_2$ – два подпространством одного и того же линейного пространства $L$. Тогда

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

**Пример 5.** Пусть $L = \mathbb{R}[x]$ (множество всех многочленов); $L_1 = L(1, x, x^2, x^3)$, $L_2 = L(x^2, x^3, x^4)$. Тогда $\dim L_1 = 4, \dim L_2 = 3.$

В этом случае $L_1 + L_2 = L(1, x, x^2, x^3, x^4), \dim(L_1 + L_2) = 5;$ $L_1 \cap L_2 = L(x^2, x^3), \dim(L_1 \cap L_2) = 2.$ •

## § 5. Линейные операторы

Пусть $L_1$ и $L_2$ – два линейных пространства.

**Опр. 1.** Если задано правило $f$, по которому каждому элементу $\overline{x} \in L_1$ ставится в соответствие некоторый элемент $\overline{y} \in L_2$, то говорят, что задан ***оператор*** (***отображение***, ***преобразование***), действующий из $L_1$ в $L_2$: $f : L_1 \to L_2$; при этом элемент $\overline{y} = f(\overline{x})$ называется ***образом*** элемента $\overline{x}$, а элемент $\overline{x}$ – ***прообразом*** элемента $\overline{y}$ (при данном отображении $f$).

*Замечание*. Термин «преобразование» используется в случае, когда пространства $L_1$ и $L_2$ совпадают.

**Опр. 2.** Отображение, при котором каждый элемент $\overline{y} \in L_2$ имеет единственный прообраз (иными словами, разным элементам $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in L_1, \overline{x_1} \neq \overline{x_2}$, соответствуют разные образы $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in L_2, \overline{y_1} \neq \overline{y_2}$) называется ***взаимно однозначным***, или ***биективным***.

*Замечание*. Отображения, которые мы будем рассматривать, не обязательно будут взаимно однозначными.

**Опр. 3.** Оператор $f : L_1 \to L_2$ называется ***линейным***, если для любых элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x} \in L_1$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ (либо $\alpha \in \mathbb{C}$, если рассматриваются комплексные линейные пространства) выполняются условия:

1) $f(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2})$;
2) $f(\alpha\overline{x}) = \alpha f(\overline{x})$.

**Утв. 1.** Оператор $f : L_1 \to L_2$ является линейным тогда и только тогда, когда для любых элементов $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in L_1$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (либо $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ в случае комплексных линейных пространств) выполняется условие $f(\alpha\overline{x_1} + \beta\overline{x_2}) = \alpha f(\overline{x_1}) + \beta f(\overline{x_2})$.

**Пример 1.** Пусть $L_1 = \mathcal{V}_2$ – множество всех свободных векторов на плоскости. Будем рассматривать элементы этого линейного пространства как векторы, исходящие из начала координат – точки $O$.

Тогда примерами линейных операторов являются: поворот вектора на данный угол $\varphi$; умножение вектора на данное число $\lambda$; симметрия относительно прямой, проходящей через точку $O$; симметрия относительно точки $O$; проекция на одну из осей. •

**Пример 2.** Пусть $L_1 = \mathbb{R}^{n\times 1}$ – множество матриц-столбцов (множество столбцов высоты $n$), а $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – фиксированная матрица размера $m \times n$. Тогда $f(X) = AX$ – линейное отображение, $f : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$.

Отметим, что поскольку всякое $n$-мерное действительное линейное пространство можно отождествлять с $\mathbb{R}^n$, то данное отображение можно рассматривать как отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.•

**Пример 3.** Пусть $L_1 = \mathbb{R}[x]$ – пространство многочленов с действительными коэффициентами. Рассмотрим отображение $D$ – оператор дифференцирования, который ставит в соответствие каждому многочлену

$$a(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{R}[x]$$

его производную

$$a'(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \in \mathbb{R}[x].$$

Оператор дифференцирования является линейным оператором $D:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$.

Заметим, что $D:\mathbb{R}^n[x]\to\mathbb{R}^{n-1}[x]$. •

**Пример 4.** В любом линейном пространстве $L$ можно определить отображения $I(\overline{x})=\overline{x}$ и $O(\overline{x})=\overline{0}$, которые также являются линейными операторами. •

**Опр. 4.** Оператор $I:L\to L$, действующий по правилу $I(\overline{x})=\overline{x}$, называется ***тождественным оператором***.

**Пример 5.** Рассмотрим на множестве векторов в пространстве

$$L_1=\mathcal{V}_3=\{\overline{x}=(x_1;\,x_2;\,x_3):x_1;\,x_2;\,x_3\in\mathbb{R}\}$$

два линейных оператора:

$f_1(\overline{x})=\overline{x}\times\vec{a}$ – умножение вектора $\overline{x}\in\mathcal{V}_3$ справа на заданный вектор $\vec{a}=\{1;\,2;\,3\}$;

$f_2(\overline{x})$ – отображение вектора $\overline{x}\in\mathcal{V}_3$ симметрично относительно плоскости $Ox_1x_2$.

Найдем явный вид операторов $f_1$ и $f_2$, т. е. для каждого $\overline{x}=(x_1;\,x_2;\,x_3)\in L_1$ укажем координаты его образов $f_1(\overline{x})$ и $f_2(\overline{x})$.

Для отображения $f_1(\overline{x})=\overline{x}\times\vec{a}$ имеем

$$f_1(\overline{x})=f_1(x_1;\,x_2;\,x_3)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(3x_2-2x_3)-\vec{j}(3x_1-x_3)+\vec{k}(2x_1-x_2),$$

поэтому $f_1(x_1;\,x_2;\,x_3)=(3x_2-2x_3;\,-3x_1+x_3;\,2x_1-x_2)$.

Вектор, симметричный вектору $\overline{x}=(x_1;\,x_2;\,x_3)$ относительно плоскости $Ox_1x_2$, очевидно, имеет координаты $(x_1;\,x_2;\,-x_3)$, поэтому $f_2(x_1;\,x_2;\,x_3)=(x_1;\,x_2;\,-x_3)$. •

## *Действия с линейными операторами*

**Опр. 5.** ***Суммой*** двух линейных операторов $f : L_1 \to L_2$ и $g : L_1 \to L_2$ называется оператор $h = f + g : L_1 \to L_2$, действующий так, что для любого $\overline{x} \in L_1$ справедливо $h(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x})$.

Очевидно, что сумма линейных операторов является линейным оператором.

Очевидно, что $f + g = g + f$ (сложение операторов коммутативно).

**Опр. 6.** ***Произведением*** линейного оператора $f : L_1 \to L_2$ на число $\lambda$ называется оператор $h = \lambda f : L_1 \to L_2$, действующий по правилу $h(\overline{x}) = \lambda f(\overline{x})$ для любого $\overline{x} \in L_1$.

Очевидно, что при умножении линейного оператора на число получается линейный оператор.

*Замечание*. Множество $L(L_1 \to L_2)$ всех линейных операторов, действующих из линейного пространства $L_1$ в линейное пространство $L_2$, также является линейным пространством.

**Опр. 7.** ***Произведением*** (***композицией***) линейного оператора $f : L_1 \to L_2$ на линейный оператор $g : L_2 \to L_3$ называется оператор $h = g \circ f : L_1 \to L_3$, действие которого заключается в последовательном действии операторов $f$ и $g$, т. е. $h(\overline{x}) = g(f(\overline{x}))$ для любого $\overline{x} \in L_1$.

Произведение оператора $f$ на оператор $g$ обозначают $h = g \circ f$ или $h = gf$.

*Замечание 1*. Оператор, действующий первым, записывается справа.

*Замечание 2*. Как правило, $gf \neq fg$, т. е. *операция умножения операторов не коммутативна*.

*Упражнение*. Проверить, что произведение линейных операторов является линейным оператором.

**Пример 5 (продолжение).** Зная явный вид операторов:

$$f_1(x_1; x_2; x_3) = (3x_2 - 2x_3; -3x_1 + x_3; 2x_1 - x_2);$$

$$f_2(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; -x_3)$$

для всех $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L_1$, определим явный вид оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$.

*Решение*. Найдем явный вид оператора $h_1 = f_2 \circ f_1$. Пусть $\overline{y} = f_1(\overline{x})$, $\overline{z} = f_2(\overline{y})$. Тогда координаты элементов $\overline{x} = (x_1;\, x_2;\, x_3)$, $\overline{y} = (y_1;\, y_2;\, y_3)$, $\overline{z} = (z_1;\, z_2;\, z_3)$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_2 - 2x_3, \\ y_2 = -3x_1 + x_3, \\ y_3 = 2x_1 - x_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = -y_3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} z_1 = 3x_2 - 2x_3, \\ z_2 = -3x_1 + x_3, \\ z_3 = -2x_1 + x_2, \end{cases}$$

поэтому $h_1(x_1;\, x_2;\, x_3) = (3x_2 - 2x_3;\, -3x_1 + x_3;\, -2x_1 + x_2)$.

Найдем явный вид оператора $h_2 = f_1 \circ f_2$. Пусть теперь $\overline{y} = f_2(\overline{x})$, $\overline{z} = f_1(\overline{y})$. Тогда координаты элементов $\overline{x} = (x_1;\, x_2;\, x_3)$, $\overline{y} = (y_1;\, y_2;\, y_3)$, $\overline{z} = (z_1;\, z_2;\, z_3)$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = -x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 3y_2 - 2y_3, \\ z_2 = -3y_1 + y_3, \\ z_3 = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{cases} z_1 = 3x_2 + 2x_3, \\ z_2 = -3x_1 - x_3, \\ z_3 = 2x_1 - x_2, \end{cases}$$

а значит, $h_2(x_1;\, x_2;\, x_3) = (3x_2 + 2x_3;\, -3x_1 - x_3;\, 2x_1 - x_2)$.

Теперь найдем координаты элемента $\overline{z} = h(\overline{x}) = h_1(\overline{x}) - h_2(\overline{x})$:

$$\begin{cases} z_1 = 3x_2 - 2x_3 - (3x_2 + 2x_3) = -4x_3, \\ z_2 = -3x_1 + x_3 - (-3x_1 - x_3) = 2x_3, \\ z_3 = -2x_1 + x_2 - (2x_1 - x_2) = -4x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Следовательно, $h(x_1;\, x_2;\, x_3) = (-4x_3;\, 2x_3;\, -4x_1 + 2x_2)$. •

**Опр. 8.** Оператор $\varphi : L \to L$ называется ***обратным*** к данному оператору $f : L \to L,$ если $\varphi \circ f = I$ и $f \circ \varphi = I.$

Оператор, обратный к оператору $f$, обозначается $f^{-1}$.

**Пример 6.** Найдем $f^{-1}$, если

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3; x_3; x_2)$$

для всех $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3) \in L.$

*Решение.* Пусть $\overline{y} = f(\overline{x})$. Тогда координаты элементов $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)$ и $\overline{y} = (y_1; y_2; y_3)$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_3, \\ y_3 = x_2, \end{cases}$$

Выразим из этих соотношений координаты элемента $\overline{x} = f^{-1}(\overline{y})$ через $y_1, y_2, y_3$:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2x_2 - x_3, \\ x_3 = y_2, \\ x_2 = y_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_3 - y_2, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = y_2; \end{cases}$$

поэтому $f^{-1}(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + 2x_3 - x_2; x_3; x_2).\bullet$

**Утв. 2.** Если $f : L \to L$ – линейный оператор и оператор $f^{-1}$ существует, то $f^{-1}$ – тоже линейный оператор.

**Утв. 3.** Если $f : L \to L$ – линейный оператор, то обратный оператор $f^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $f$ – взаимно однозначный оператор.

### *Матрицы линейных операторов*

Пусть $f : L_1 \to L_2$ – линейный оператор и линейные пространства $L_1$ и $L_2$ конечномерны.

Выберем базисы: $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – базис линейного пространства $L_1$; $\mathcal{F} = \left\{\overline{f_1}; \overline{f_2}; ...; \overline{f_m}\right\}$ – базис линейного пространства $L_2$.

Элементы $f(\overline{e_1}),\ f(\overline{e_2}),...,\ f(\overline{e_n})$ (образы базисных векторов линейного пространства $L_1$ при отображении $f$) являются элементами линейного пространства $L_2$, а значит, их можно разложить по базису $\mathcal{F}$:

$$f(\overline{e_1}) = a_{11}\overline{f_1} + a_{21}\overline{f_2} + ... + a_{m1}\overline{f_m},$$
$$f(\overline{e_2}) = a_{12}\overline{f_1} + a_{22}\overline{f_2} + ... + a_{m2}\overline{f_m},$$
$$\dots,$$
$$f(\overline{e_n}) = a_{1n}\overline{f_1} + a_{2n}\overline{f_2} + ... + a_{mn}\overline{f_m}.$$

**Опр. 9.** Матрица

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой состоят из координат векторов $f(\overline{e_1}),\ f(\overline{e_2}),...,\ f(\overline{e_n})$, называется ***матрицей линейного оператора*** $f$.

**Утв. 4.** Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}$ – столбцы координат элемента $\overline{x} \in L_1$ в базисе $\mathcal{E}$ и его образа $\overline{y} = f(\overline{x}) \in L_2$ в базисе $\mathcal{F}$ соответственно, то $Y = A_f X$.

**Утв. 5.** Действиям над линейными операторами соответствуют такие же действия над их матрицами (в соответствующих базисах):

**1)** $A_{f+g} = A_f + A_g$;

**2)** $A_{\lambda f} = \lambda A_f$ ($\lambda$ – число);

**3)** $A_{g \circ f} = A_g A_f$;

**4)** $A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1}$;

**5)** матрица тождественного оператора является единичной: $A_I = E$.

Таким образом, линейные преобразования описываются с помощью матриц и действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

**Пример 5 (продолжение).** Зная явный вид операторов:

$$f_1(x_1;\, x_2;\, x_3) = (3x_2 - 2x_3;\, -3x_1 + x_3;\, 2x_1 - x_2);$$

$$f_2(x_1;\, x_2;\, x_3) = (x_1;\, x_2;\, -x_3)$$

для всех $\overline{x} = (x_1;\, x_2;\, x_3) \in L_1$, найдем их матрицы, а также определим матрицу и явный вид оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$.

*Решение*. Выберем базис $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1};\, \overline{e_2};\, \overline{e_3}\right\}$ линейного пространства $L_1$ и найдем матрицу $A_{f_1}$ линейного оператора $f_1$ в этом базисе. Пусть

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} -$$

матрица линейного оператора $f_1$ и столбцы координат элемента $\overline{x}$ и его образа $\overline{y} = f_1(\overline{x})$ в базисе $\mathcal{E}$. Согласно утверждению 4, $Y = A_{f_1} X$, т. е.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

С другой стороны, из условия вытекает, что координаты элемента $\overline{x}$ и его образа $\overline{y} = f_1(\overline{x})$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} y_1 = 3x_2 - 2x_3, \\ y_2 = -3x_1 + x_3, \\ y_3 = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Отсюда получим $A_{f_1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Аналогично найдем $A_{f_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Чтобы найти матрицу $A_h$ оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$, вычислим сначала матрицы операторов $f_2 \circ f_1$ и $f_1 \circ f_2$, используя утверждение 5:

$$A_{f_2 f_1} = A_{f_2} A_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{f_1 f_2} = A_{f_1} A_{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A_h = A_{f_2 f_1} - A_{f_1 f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, явный вид оператора $h = f_2 \circ f_1 - f_1 \circ f_2$ задается соотношением $h(x_1; x_2; x_3) = (-4x_3; 2x_3; -4x_1 + 2x_2)$. •

**Опр. 10.** Линейный оператор $f : L \to L$ называется ***невырожденным***, если его матрица невырожденная, т. е. $\det A_f \neq 0$.

**Утв. 6.** Линейный оператор $f : L \to L$ является невырожденным тогда и только тогда, когда $f$ – взаимно однозначный оператор.

## *Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базиса*

Пусть $\mathcal{E}=\left\{\overline{e_1};\overline{e_2};...;\overline{e_n}\right\}$ – базис линейного пространства $L$; $\mathcal{E}'=\left\{\overline{e_1'};\overline{e_2'};...;\overline{e_n'}\right\}$ – новый базис линейного пространства $L$, $T=T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.

**Утв. 7.** Если $f:L\to L$ – линейный оператор и $A_f$ – матрица линейного оператора $f$ в базисе $\mathcal{E}$, а $A_f'$ – матрица линейного оператора $f$ в базисе $\mathcal{E}'$, то

$$\boxed{A_f'=T^{-1}A_fT.}$$

*Доказательство*. Пусть $X$ и $Y$ – столбцы координат элемента $\overline{x}\in L$ и его образа $\overline{y}=f(\overline{x})$ в базисе $\mathcal{E}$, а $X'$ и $Y'$ – столбцы координат элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}=f(\overline{x})$ в базисе $\mathcal{E}'$. Тогда, в силу теоремы 5 §3, $X=TX'$ и $Y=TY'$.

Если $A_f$ – матрица линейного оператора $f$ в базисе $\mathcal{E}$, то, согласно утверждению 4, $Y=A_fX$. Выражая $X$ и $Y$ через $X'$ и $Y'$, получим

$$TY'=A_fTX' \quad\Leftrightarrow\quad Y'=T^{-1}A_fTX',$$

откуда, в силу $Y'=A_f'X'$, получим $A_f'=T^{-1}A_fT$. ◁

**Пример 7.** Пусть $A_f=\begin{pmatrix}8&4\\5&2\end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора $f$ в базисе $\mathcal{E}=\left\{\overline{e_1};\overline{e_2}\right\}$. Найдем матрицу $A_f'$ этого линейного оператора в базисе $\mathcal{E}'=\left\{\overline{e_1'};\overline{e_2'}\right\}$, где $\overline{e_1'}=2\overline{e_1}+\overline{e_2};\overline{e_2'}=6\overline{e_1}+4\overline{e_2}$.

*Решение*. Согласно утверждению 7, $A_f'=T^{-1}A_fT$, где $T=T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.

Матрица $T=T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ состоит из координат векторов нового базиса $\mathcal{E}'$ в старом базисе $\mathcal{E}$, записанных по столбцам, поэтому

$$T=\begin{pmatrix}2&6\\1&4\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу $T^{-1}$ по формуле

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{T}.$$

Вычислим определитель матрицы $T$ и алгебраические дополнения к элементам этой матрицы:

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{11} = 4; \qquad A_{21} = -6;$$
$$A_{12} = -1; \qquad A_{22} = 2.$$

Следовательно, $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$A'_f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \bullet$$