ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§1. Множества и операции над ними

Понятие множества является одним из основных первоначальных понятий математики. Поэтому его нельзя определить ни через какие другие более простые понятия. Его можно лишь охарактеризовать или описать. Под ***множеством*** понимают совокупность объектов (предметов) произвольной природы вполне определенных и отличных друг от друга, объединенных в целое по каким-либо признакам. Эти объекты называются ***элементами*** множества. Например, множество студентов в данной аудитории, содержимое рюкзака какого-либо студента из данной аудитории, множество деталей в телефоне определенного студента и так далее. Как синонимы слова множество употребляют слова ***совокупность, семейство, класс, группа***.

Множества обозначаются обычно заглавными латинскими буквами: A, B, C и так далее, а их элементы – строчными: a, b, c,...(возможны индексы). *Задается множество* либо перечислением всех элементов (если это возможно)

$$A = \{a_1, a_2, a_3\},$$

либо указанием некоторого характерного признака, присущего всем его элементам.

В случае, когда объект a является элементом множества A (говорят, что a принадлежит множеству A) или объект b не является элементом множества A (говорят, что b не принадлежит множеству A), то используются соответствующие обозначения: $a \in A$, $b \notin A$. Например, $1 \in \{-1,0,1\}$, $5 \notin \{-1,0,1\}$. Если множество состоит из конечного числа элементов, оно называется ***конечным***, в противном случае – ***бесконечным.*** Если элементами множества являются числа, то множество называется ***числовым***.

Основные числовые множества:

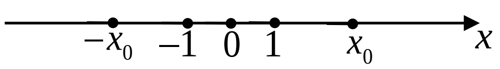
$\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}$ - ***множество натуральных чисел***;

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ - ***множество целых чисел***;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ - ***множество рациональных чисел*** (множество обыкновенных несократимых дробей или периодических десятичных дробей);

множество иррациональных чисел – множество чисел, которые не являются рациональными (например, $\sqrt{2}$) – множество бесконечных непериодических десятичных дробей;

$\mathbb{R}$ - ***множество действительных (вещественных) чисел*** - множество периодических и непериодических десятичных дробей – множество точек числовой оси (прямой) – множество рациональных и иррациональных чисел:



$\mathbb{R}_+$ - множество положительных действительных чисел;

$\mathbb{R}_-$ - множество отрицательных действительных чисел.

$\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел.

Если элементы бесконечного множества можно пересчитать – пронумеровать, то есть поставить во взаимнооднозначное соответствие с множеством натуральных чисел, то такое множество называется ***счетным***. Можно показать, что множества целых и рациональных чисел являются счетными, а множество действительных чисел не является счетным, то есть множество действительных чисел является бесконечным несчетным (или множеством ***меры континуум***).

Важнейшее свойство действительных чисел – ***свойство непрерывности (принцип вложенных промежутков)****: если имеется множество замкнутых промежутков, каждый последующий из которых является подмножеством предыдущего, то найдется, по крайней мере, одно действительное число, принадлежащее всем промежуткам.*

Множество действительных чисел является также ***всюду плотным множеством****: между любыми двумя несовпадающими действительными числами содержится бесконечное множество действительных чисел.*

Рассмотрим некоторое произвольное множество M. Оно считается полностью определенным, если относительного любого объекта x можно сказать является он элементом этого множества или же нет. Если P – это некоторое свойство, присущее всем элементам множества M, то будем использовать обозначения: $\{x|x \in M, P(x)\}$ или $\{x: x \in M, P(x)\}$. Например, множество $\{x|x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 = 0\}$ (множество действительных корней уравнения $x^2 + 2x + 1 = 0$) состоит только из одного элемента {-1}. Множество, состоящее из одного элемента, называется ***одноэлементным***. Но не всегда заранее известно, сколько элементов содержит множество. Например, множество $\{x|x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\}$ не содержит ни одного элемента. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается символом $\varnothing$.

Рассмотрим, далее, два множества и определим каким образом они могут соотноситься между собой.

Множество B называется ***подмножеством*** множества A (другими словами, множество B включается в множество A или A содержит множество B) и обозначается $B \subset$ A, если каждый элемент множества B является также и элементом множества A. Например, $A = \{-1, 4\}$, $B = \{-1, 4, 8, 10\}$: $A \subset B$. Считается, что ***пустое множество $\emptyset$ и само множество A является подмножеством множества A:*** $\emptyset \subset$ A, $\boldsymbol{A} \subset$ A. Пустое множество $\emptyset$ и само множество A часто называют ***несобственными подмножествами множества A***. Все другие подмножества называют ***собственными подмножествами***. Для подмножеств выполняется ***свойство транзитивности***: если $B \subset$ A, а $A \subset C$, то $B \subset C$.

Два ***множества A*** и ***B называются равными*** (и записывается *A=B)*, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Из определения следует, что два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов. Например, следующие множества $A = \{x \in \mathbb{R}|(x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ равно множеству $B = \{x \in \mathbb{N}|0 < x < 4\}$.

Для сокращения записей в дальнейшем изложении введем обозначение логических операторов.

Символ	Название	Пример применения	Читается
$\wedge$	***конъюнкция***	$A \wedge B$ истинно, когда и ***A*** и ***B*** истинны	«***A и B***»
$\vee$	***дизъюнкция***	$A \vee B$ истинно, когда ***A*** или ***B, или A*** и ***B*** истинны	«***A или B***»
$\Rightarrow$	***импликация следование***	$A \Rightarrow B$ (если A истинно, то истинно B)	«из ***A следует B***», ***B следствие A***
$\Leftrightarrow$	***эквивалентность равносильность***	$A \Leftrightarrow B$ (А равносильно В)	«***A тогда и только тогда, когда B***», «A эквивалентно B»
$\forall$	***квантор общности***	$\forall x:\ A(x)$	«**Для любого *x*** справедливо $A(x)$»
$\exists$	***квантор существования***	$\exists x : A(x)$	«**Существует** такое ***x*** (хотя бы одно), что справедливо $A(x)$»

Используя логические операции, сформулируем ***свойства равенства множеств***:

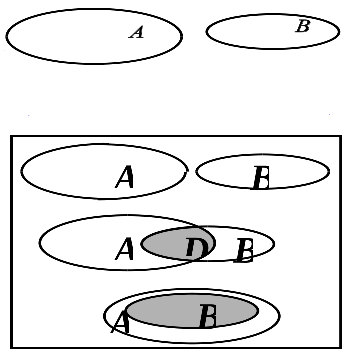
Рефлексивность: для $\forall A \ \Longrightarrow A = A$;

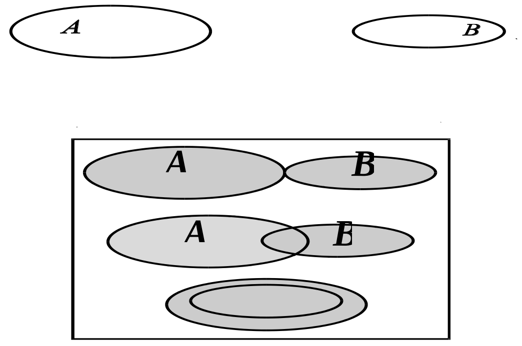
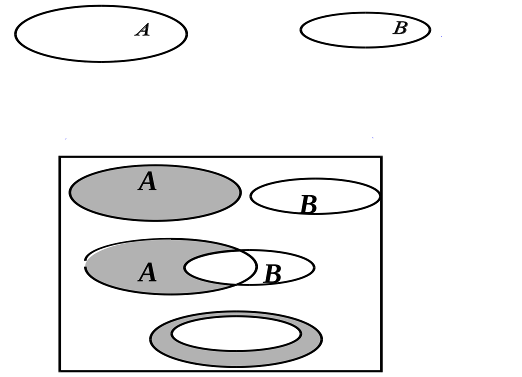
Транзитивность: для $\forall A, B, C$ если $A = B$, а $B = C \Longrightarrow A = C$;

Симметричность: для $\forall A, B$ если $A = B \Longrightarrow B = A$.

В качестве замечания отметим, что множества не обязательно находятся в каком-либо отношении включения. Они могут быть несравнимыми.

Также, как и над числами, над множествами вводятся операции, схожие с арифметическими.

Пересечением (***произведением***) множеств A и B называется множество $A \cap B$, содержащее элементы, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B: $A \cap B = \{x \mid x \epsilon A \wedge x \epsilon B\}$. Множества A и B называются ***непересекающимися***, если $A \cap B = \emptyset$	 $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset, A \cap B = \mathrm{D},}$ $\boldsymbol{A \cap B = B}$

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, то есть множеству A или B, или и множеству A и множеству B, если таковые имеются: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.	
Разностью $A \setminus B$ множеств A и B ***(дополнением*** C_{AB} ***множества*** B ***до множества*** A***)*** называется множество**,** состоящее из элементов множества A, которые множеству B не принадлежат: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ Если ясно, о каком множестве A идет речь, вместо C_{AB} используется обозначение $\overline{B}$	

Пример: Пусть $X = \{1,2,3,0,9\}$ и $Y = \{1,3,4,5,7\}$, тогда $X \cup Y = \{0,1,2,3,4,5,7,9\}$ и $X \cap Y = \{1,3\}$.

Операции объединения и пересечения множеств обладают свойствами***:***

коммутативность: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

дистрибутивность: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

законы двойственности: $\left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$.

Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называется множество упорядоченных (первый из первого, второй из второго множества) пар элементов X и Y: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Пример. Декартово произведение двух числовых осей (прямых) – числовая плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ – множество упорядоченных пар действительных чисел. Аналогично $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ – множество упорядоченных троек действительных чисел - трехмерное пространство.

$\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ - n-мерное числовое (евклидово) пространство.

§2. Грани числовых множеств. Символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ и их свойства.

Числовое множество $A \subset \mathbb{R}$ считается ***ограниченным сверху***, если существует число $b \in \mathbb{R}$, называемое ***верхней границей множества*** A такое, что $a \leq b$ для всех $a \in A$. Очевидно, что существует бесконечное множество верхних границ, так как любое число $b_1 > b$ тоже является верхней границей множества A. Наименьшая среди верхних границ ограниченного сверху множества называется ***точной верхней гранью*** множества A и обозначается $\sup A$ (от лат. supremum - наивысшее). Например, множество правильных дробей A ограничено сверху числом единица, причем $\sup A = 1$. Аналогично определяется множество, ***ограниченное снизу***, а также его ***нижняя и точная нижняя грань***. Обозначается точная нижняя грань $\inf A$ (от лат. infimum - наинизшее). Множество называется ***ограниченным***, если оно ограничено и снизу, и сверху.

Если числовое множество A не ограничено сверху, то, по определению, полагаем, что $\sup A = +\infty$; если множество A не ограничено снизу, то полагаем $\inf A = -\infty$. Эти понятия можно ввести и формальным образом, как формальные символы, удовлетворяющие следующим условиям (постулатам):

1) $-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$;
2) $x + (\pm\infty) = \pm\infty$;
3) $x - (\pm\infty) = \mp\infty$;
4) $x \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, 0 < x < \infty, \\ \mp\infty, -\infty < x < 0; \end{cases}$
5) $\frac{x}{\pm\infty} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Аналогично введем символ бесконечности ∞.

1) $\frac{x}{\infty} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
2) $x \cdot \infty = \infty, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
3) $\frac{x}{0} = \infty, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Выражения вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, ∞^0, 0^0 считаются неопределенными (***неопределенностями***) и обычно обозначаются $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]\left[\frac{0}{0}\right]$ и так далее. Иногда бывает удобно числовую прямую расширить, рассматривая в качестве ее элементов наряду с числами (конечными точками) и символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ (вместе или по отдельности) – ***несобственные*** (бесконечные точки). Все такие числовые множества объединяются под общим названием ***расширенной числовой прямой***.

§3. Функция одной переменной и способы ее задания

Пусть X и Y – произвольные множества. Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие (по некоторому правилу f) единственный элемент y множества Y, то говорят, что задано ***отображение множества X в множество Y***, которое обозначается $f: X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$, или $y = f(x)$, $x \in X$. Здесь X – ***множество определения*** (часто обозначается

D_f), $R_f = \{y | y = f(x), x \in X\}$ – ***множество значений*** (используется также обозначение E_f). Под числовой функцией (или просто функцией) будем понимать отображение числовых множеств.

Примеры:

1) m – *вектор-функция* n *переменных*: $y = f(x)$,
где $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

2) *скалярная функция* n *переменных*: $y = f(x)$,
где $y \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

3) m – -*вектор-функция скалярного переменного*: $y = f(x)$,
где $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}$;

4) *действительнозначная функция действительной переменной (функция одной переменной)*: $y = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Остановимся более подробно на функциях одной действительной переменной, которые будем называть просто функциями. Рассмотрим функцию $y = y(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, то есть правило, по которому каждому действительному числу x из множества X поставлено в соответствие единственное действительное число y из множества Y. Тогда величина x называется ***аргументом функции*** $y = y(x)$ ***или независимой переменной***, а y - ***зависимой переменной***. При этом говорят, что $y = y(x)$ есть ***функция*** величины x, или, что величины x и y связаны между собой ***функциональной зависимостью***. ***Графиком*** этой зависимости (функции) является множество всех точек (x, y) плоскости Oxy, для каждой из которых значение аргумента x является абсциссой, а значение $y = y(x)$ функции – ординатой:

$$Grf = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y : \forall x \in X, y = y(x)\}.$$

Функция $y = y(n), n \in \mathbb{N}$, натурального аргумента, то есть функция, определенная на множестве натуральных чисел, называется ***числовой последовательностью*** и записывается $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ или кратко $\{y_n\}$. Элементы $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ этого множества называются ***членами последовательности.***

Например, $\{\dots - 1, 1, -1, \dots - 1, \dots\}$ или $y_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Зачастую функция задается только зависимостью $y = f(x)$. Тогда под ее множеством определения понимают ***естественную область*** определения E_f, то есть множество всех тех действительных x для которых $f(x)$ имеет смысл. ***Задать функцию*** – это, по существу, указать множество ее определения и правило, при помощи которого по данному значению независимой переменной находятся соответствующие ему значения функции.

Способы задания функций одной переменной:

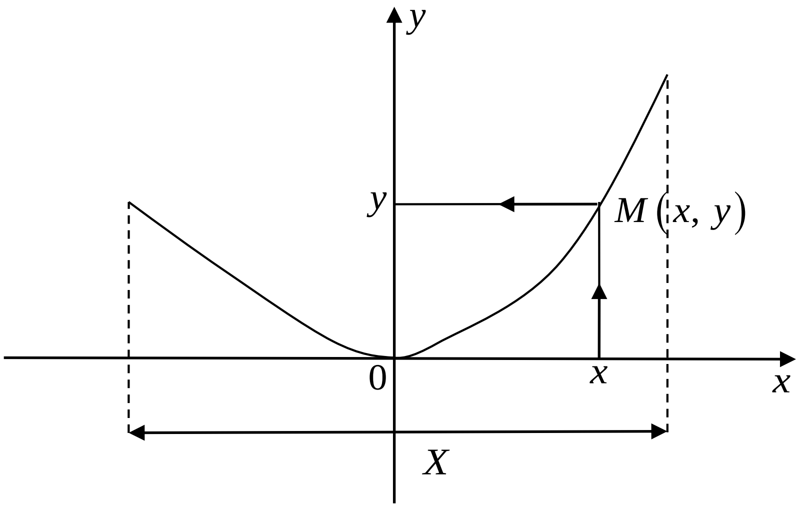
а) ***табличный*** – заключается в перечислении n значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n$ и соответствующим им n значений функции $y_1, y_2, \dots, y_n$. Проще всего записывать в виде таблицы, где первая строка – аргументы, вторая – соответствующие им значения функций, например,

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	1	0	1	4	9	3.14	2010

правило f: каждому $x \in X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ соответствует единственное число y из множества $\{1,\ 0,\ 4,\ 9,\ 3.14,\ 2010\}$.

Табличное задание чаще всего используется для записи результатов эмпирических (получаемых опытным путем) исследований, то есть проведения экспериментальных работ. *Удобство* табличного способа задания функции: для значений аргумента из таблицы сразу имеем значение функции без дополнительных вычислений. *Недостатки*: *a*) отсутствие наглядности (трудно судить о поведении функции, области определения, множестве значений); *b*) невозможность определения промежуточных (не из таблицы) значений функции; *c*) невозможность непосредственного применения к табличной функции математического аппарата.

б) ***графический*** – состоит в представлении функции графиком в некоторой системе координат, то есть множеством точек, координаты которых (в заданной системе координат) связаны искомым функциональным соотношением. Например, в декартовой системе координат на плоскости задана графически функция $y = f(x)$.



В этом способе правило f заключается в следующем: на оси Ox берется любая точка с абсциссой $x \in X$, через которую параллельно оси Oy проводится прямая до пересечения с графиком функции в точке M, через точку M параллельно оси Ox проводится прямая до пересечения с осью Oy в точке с координатой y, в результате получаем табличную зависимость $y = f(x)$.

Графический способ задания функции обладает наглядностью, но:

не всякая линия на плоскости является графиком некоторой функции (если одному значению *x* соответствует несколько значений *y*);

невозможно применить математический аппарат:

не всякая функция может быть задана графически, например, функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{, если } x \text{ рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число.} \end{cases}$$

в) ***аналитический*** – с помощью формулы конкретно устанавливается алгоритм вычисления значения функции $f(x)$ для $\forall x \in X$. Этот способ имеет разновидности:

в$_1$) ***явный способ задания*** - с помощью одного или нескольких аналитических выражений $y = y(x), x \in X \subset \mathbb{R}$, например,

1) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in X = [0, 1]$; 2) $y = |x| = \sqrt{x^2}, x \in \mathbf{R}$;

3) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} x^2, |x| \le 1, \\ \dfrac{1}{x}, |x| \ge 1. \end{cases}$

в$_2$) ***неявный,*** то есть с помощью уравнения $F(x, y) = 0, x \in X, y \in Y$, разрешая которое относительно y или x (что, вообще говоря, не всегда возможно) получим неявно заданную функцию $y = y(x)$, или $x = x(y)$, соответственно, например,

1) $x^2 + y^2 - 1 = 0, x \in X = [0,1], y \in Y = [0,1]$ (задает $y = y(x)$ как неявную функцию x и $x = x(y)$ как неявную функцию y;

2) $x^2 + y^2 = 1, x \in X = [-1,1], y \in Y = [-1,0]$ (задает $y = y(x)$ как неявную функцию x;

3) $x + y^2 = 1, x \in X = [0,1], y \in Y = [0,1]$ (задает $y = y(x)$ как неявную функцию x и $x = x(y)$**.** как неявную функцию y.

в$_3$) ***параметрический*** - с помощью системы $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in T = [t_0, t_1]$, содержащей переменные x, y и параметр t, исключая который (если это возможно) можно получить $y = y(x)$ как функцию x или $x = x(y)$, как функцию y, например,

1) $\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases}$ $t \in [0, 1]$ ($y = \sqrt{1 - x^2}$ - функция x, $x \in [0, 1]$);

2) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in [\pi, 2\pi]$ ($y = -\sqrt{1 - x^2}$ - функция x, $x \in [-1, 1]$);

3) $\begin{cases} x = t^4 + 1, \\ y = t^2, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ ($x = y^2 + 1$ - функция y, $y \in [0, +\infty]$).

Замечание. Отметим, что выражение $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1]$ и $x^2 + y^2 = 1$ для $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, а также $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, равносильны и задают одну и ту же функцию, но в первом случае явно, во втором – неявно, в третьем – параметрически.

Рассмотрим выражение $x^2 + y^2 = 1,\ x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1]$. Оно не определяет ни y как неявную функцию x, ни x как неявную функцию y. Существует бесконечное число функций вида $y = y(x)$ таких, что

$$x^2 + \left(y(x)\right)^2 = 1,\ x \in [-1, 1],$$

в частности, две:

$$y = \sqrt{1 - x^2}\,,\ y = -\sqrt{1 - x^2}\,,\ x \in [-1, 1];\ y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 0], \\ -\sqrt{1 - x^2},\ x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Существуют и другие способы задания функции: ***программный способ*** задания функции (задается с помощью программы на некотором языке программирования), ***словесный*** (описывается словами закон соответствия *f*, позволяющий по данному $x \in X$ определить соответствующее значение функции *y*, например, функцию Дирихле) и так далее.

Пусть функция $y = \varphi(x)$ отображает числовое множество $X = D_\varphi$ в множество $Y = R_\varphi$**,** а функция *z=f(y)* отображает множество $R_\varphi = D_f$ в множество R_f. Тогда функция $z = f\left(\varphi(x)\right)$ называется ***сложной функцией*** (***или композицией, или суперпозицией***) функций φ и *f*. Она определена на множестве X и отображает его в множество R_f. Функция $y = \varphi(x)$ при этом называется ***промежуточным аргументом*** для функции $z = f\left(\varphi(x)\right)$.

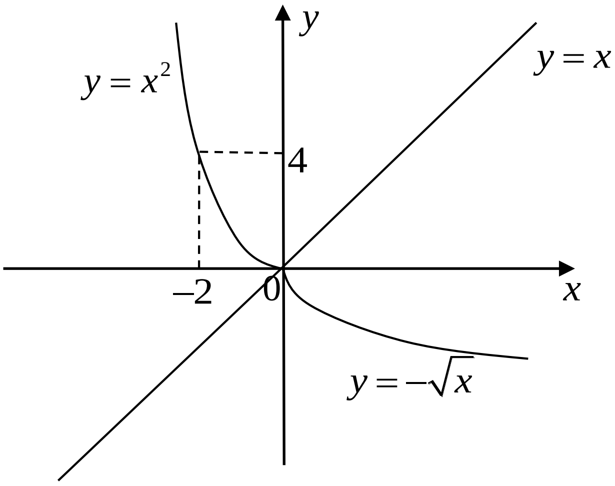
Например, функцию $z = \sin 2x$ можно рассматривать как сложную, образованную суперпозицией функций $y = 2x$ и $z = \sin y$.

Пусть функция $y = f(x)$ задает ***взаимнооднозначное соответствие*** между множеством определения D_f и множеством значений R_f, то есть каждому числу $x \in D_f$ соответствует единственное число $y \in R_f$ и наоборот. Это эквивалентно выполнению следующих двух условий:

1) для $\forall y_0 \in R_f\ \exists x_0 \in D_f$ такое, что $y(x_0) = y_0$;
2) для $\forall x_1 \neq x_2 \in D_f$ выполняется неравенство $y(x_1) \neq y(x_2)$.

Так как при этом каждому числу $y \in R_f$ ставится в соответствие единственное число $x \in D_f$, то можно говорить, что на множестве R_f определена функция $x = f^{-1}(y)$, ***обратная*** по отношению к данной функции $y = f(x),\ x \in D_f$. Поскольку и прямая и обратная функции выражают одну и ту же связь между переменными, то графики функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ совпадают, а графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$, так как при переходе от функции к ее обратной оси абсцисс и ординат меняются местами.

Например, функция $y = x^2,\ D_f = [-2,0],\ \mathrm{R}_f = [0,4]$ на отрезке $[-2,0]$ имеет обратную функцию $y = -\sqrt{x}$**,** $D_f = [0,4],\ \mathrm{R}_f = [-2,0]$.



Отметим, что функция $y = x^2$ на промежутке $[-2,\,2]$ не имеет обратной, так как, например, значению $y = 1{,}8$ соответствует два значения $x = \pm\sqrt{1{,}8}$, что нарушает однозначность соответствия между множествами D_f и R_f.

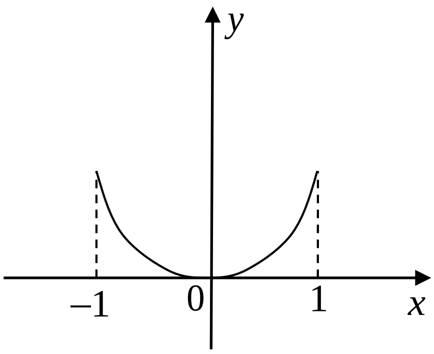
§4. Свойства функции одной переменной

§4.1. Четность

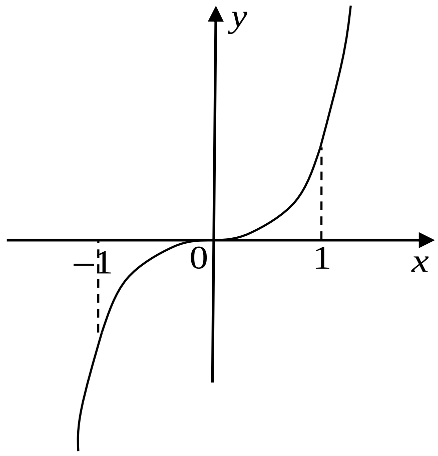
Пусть область определения функции $y=f(x)$ симметрична относительно начала отсчета, то есть для $\forall x \in D_f \Longrightarrow \forall(-x) \in D_f$. Если при этом $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$, то функция называется ***четной,*** если же $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$, то функция называется ***нечетной.***

Из определения четности функции следует, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной - относительно начала координат.

Например, функция $y = x^2,\ x \in [-1,\,1]$, является четной



функция $y = x^3, x \in \mathbb{R}$, является нечетной

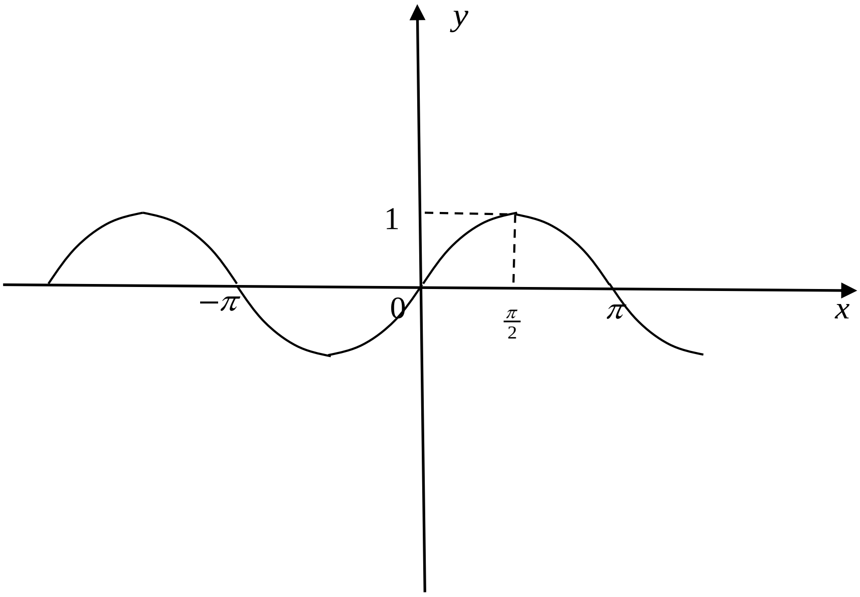


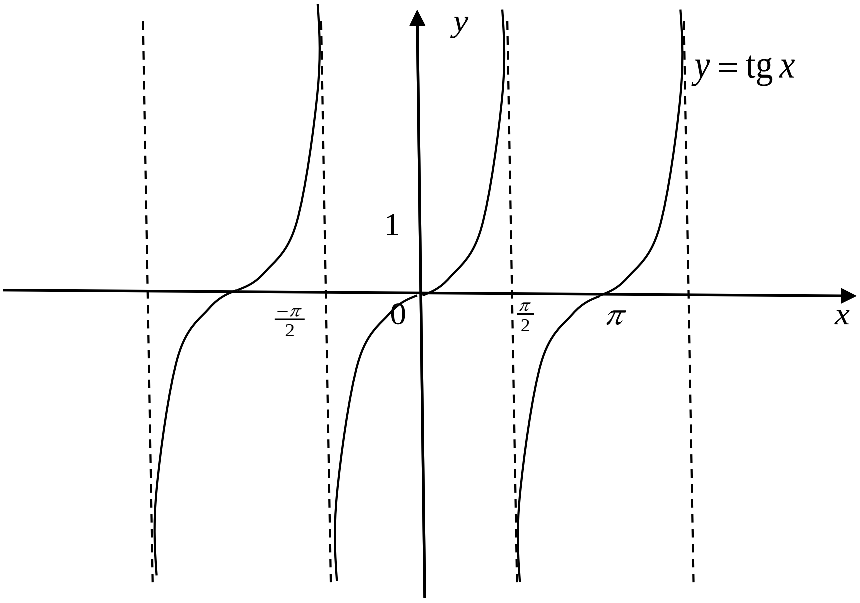
функция $y = x^2 + 2x + 1,\ x \in [-1, 1]$, не является ни четной, ни нечетной (функцией общего вида).

§4.1. Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если для нее существует такое число $T > 0$, называемое ***периодом функции,*** что при любых x из области определения функции числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Примерами периодических функций являются тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ с наименьшими периодами 2π и π соответственно



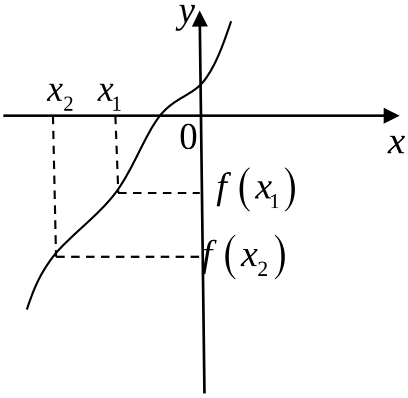


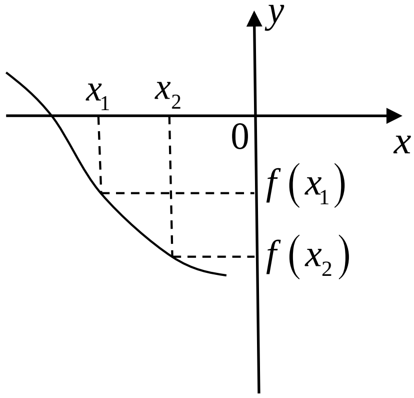
§4.3. Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ является ***возрастающей*** (***убывающей***) на некотором множестве $A \subset D_f$, если большему значению аргумента из множества A соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$, то есть:

$f(x)$ возрастает на $A \subset D_f \iff (\forall x_1, x_2 \in A),\ (x_1 > x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

$f(x)$ убывает на $A \subset D_f \iff (\forall x_1, x_2 \in A),\ (x_1 > x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

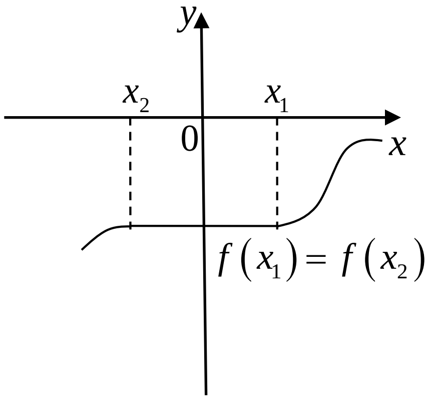


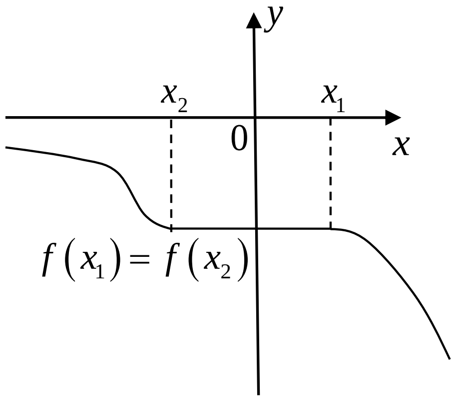


Аналогично вводятся понятия ***неубывающей*** и ***невозрастающей функций***:

$f(x)$ не убывает на $A \subset D_f \iff (\forall x_1, x_2 \in A),\ (x_1 > x_2) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

$f(x)$ не возрастает на $A \subset D_f \iff (\forall x_1, x_2 \in A), (x_1 > x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.





Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются ***монотонными.***

§4.4. Ограниченность функции

Ф*ункция* $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху (снизу)*** на множестве $A \subset D_f$, если существует такое число ***M***, что для любых ***x*** из этого множества выполняется условие $f(x) \le M$ $(f(x) \ge M)$. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной на множестве*** $A \subset D_f$, если существует положительное число ***M***, что $\left| f(x) \right| \le M, \quad \forall x \in A$.

Примеры:

1) функция $y = x^2, x \in \mathbb{R}$ ограничена снизу на всей числовой оси;
2) $y = x$ ограничена сверху на множестве $(-\infty, 0]$
3) $y = \sin x$ ограничена на множестве $\mathbb{R}$.

§5. Элементарные функции

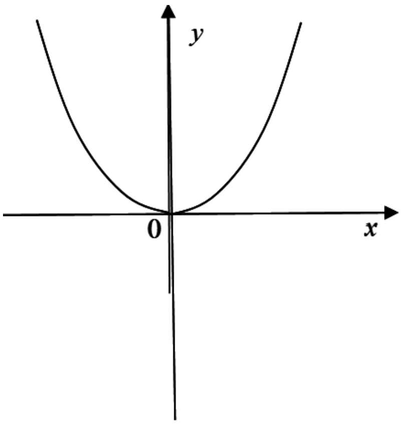
К ***основным элементарным функциям*** относятся:

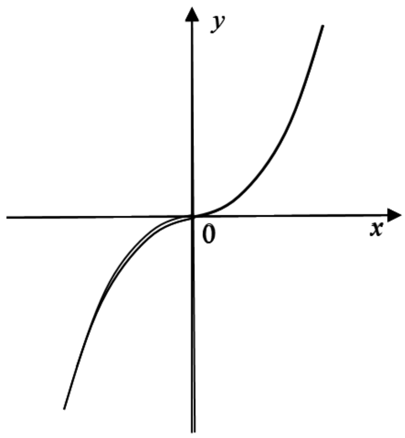
1) $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ – (***степенная функция***);
2) $y = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ – (***показательная функция***);
3) $y = \log_a x$, $a > 0, a \ne 1$, $x \in \mathbb{R}$ – ***логарифмическая функция***);
4) *y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx* – ***тригонометрические функции***;
5) *y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx* – ***обратные тригонометрические функции***.

Приведем графики некоторых элементарных функций

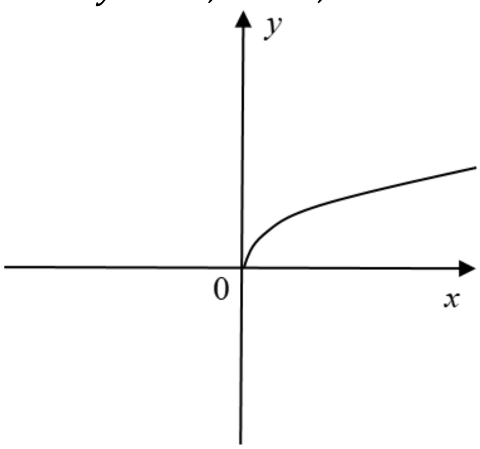
- ***степенная функция***;

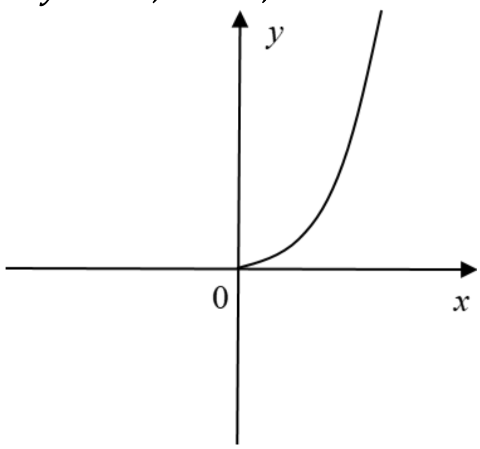
$y = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $y = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$





$y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$ $\qquad$ $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$





Графики степенной функции

– ***показательная функция***: $y = a^x, \; a > 0, \; a \neq 1;$

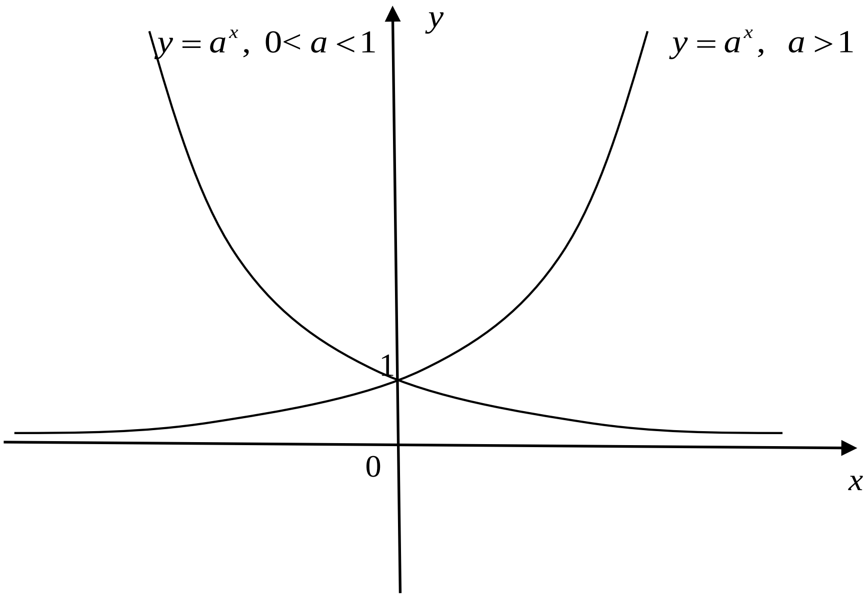


График показательной функции

– ***логарифмическая функция***: $y = \log_a x, \; a > 0, \; a \neq 1;$

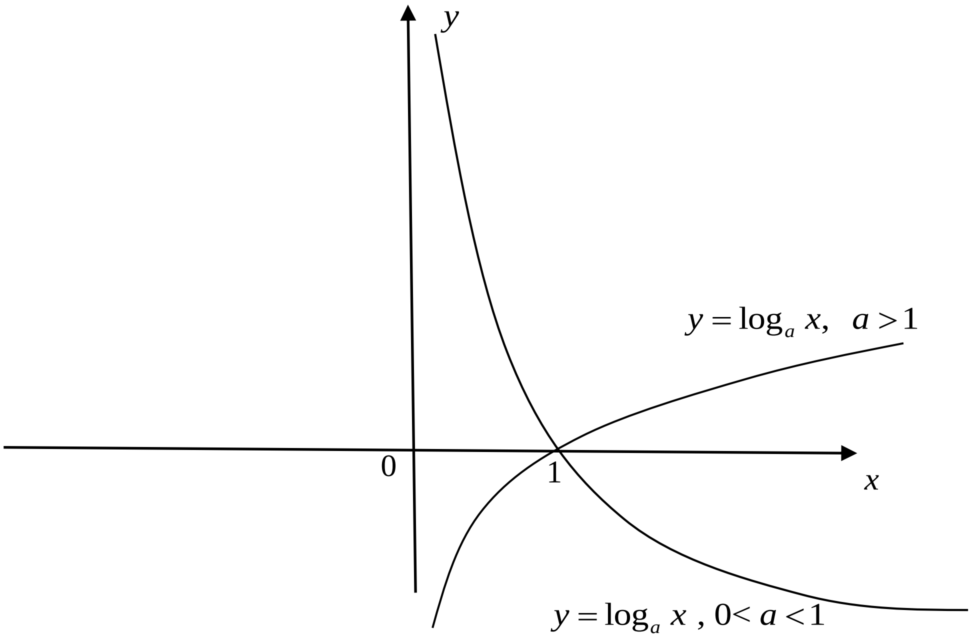
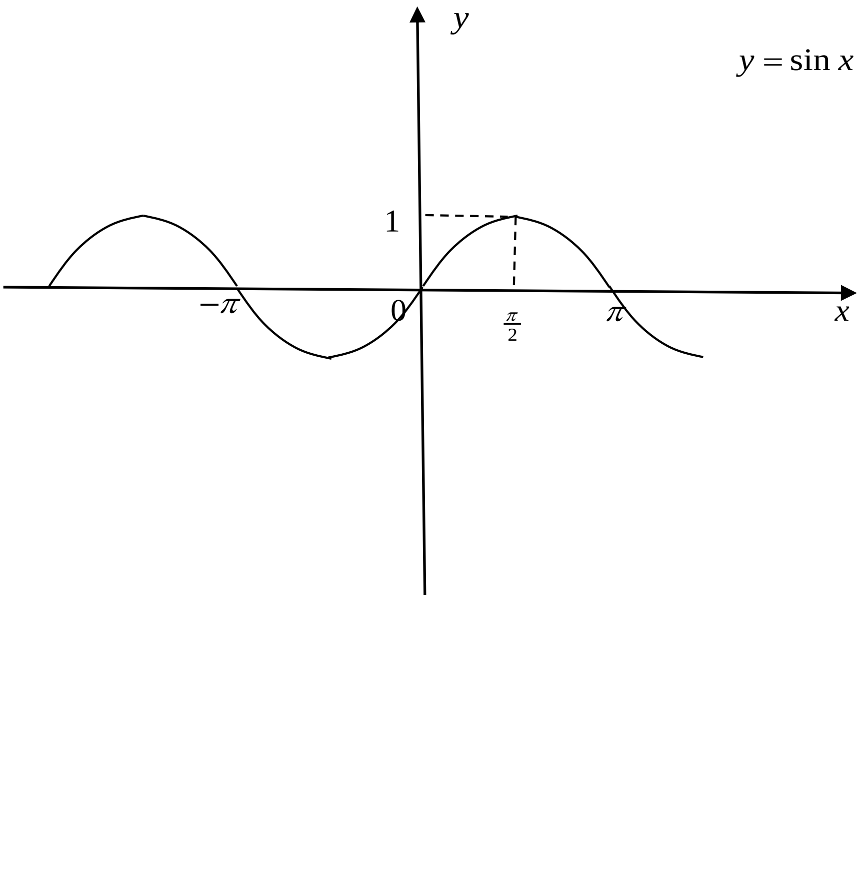
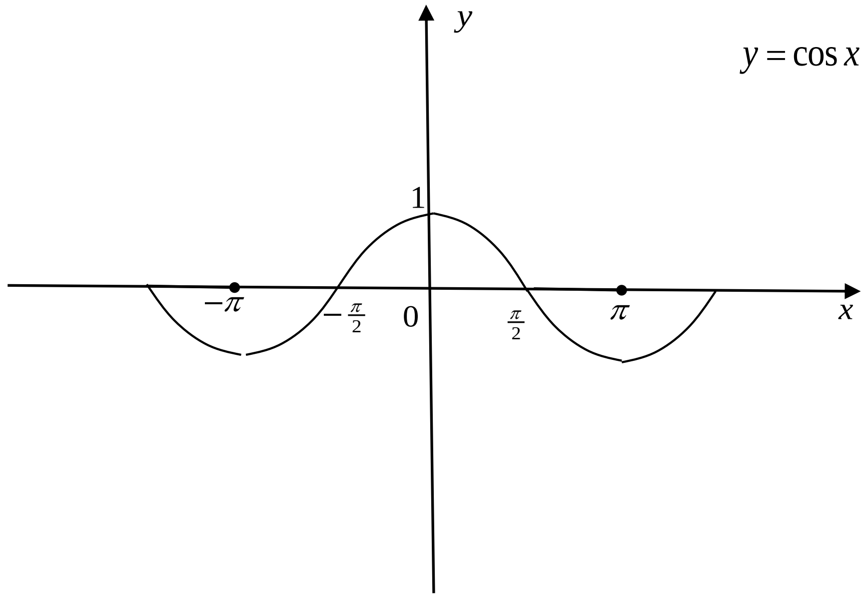
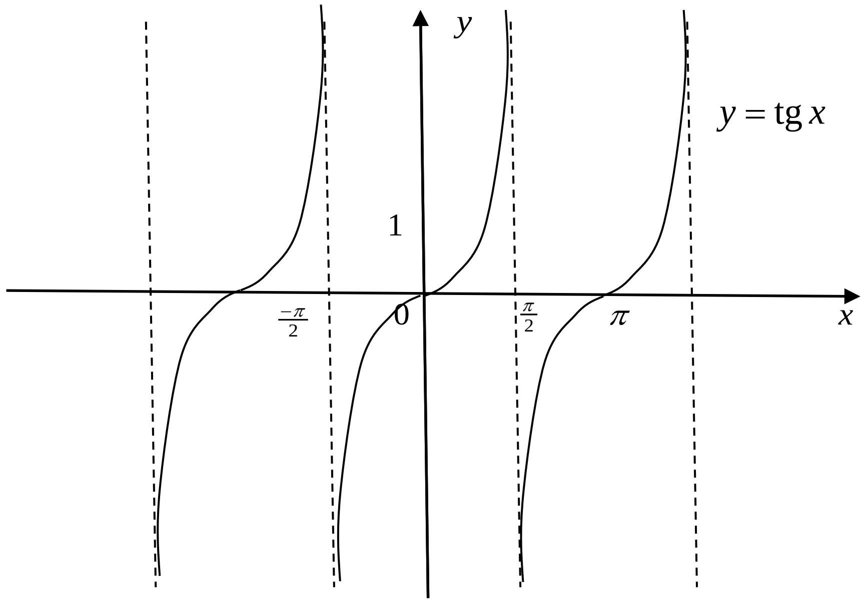


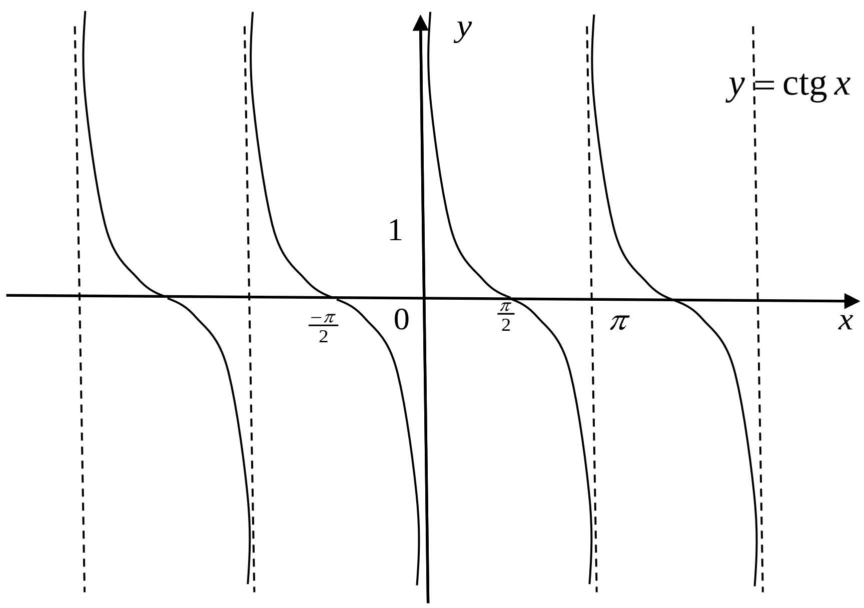
График логарифмической функции

– ***тригонометрические функции***:

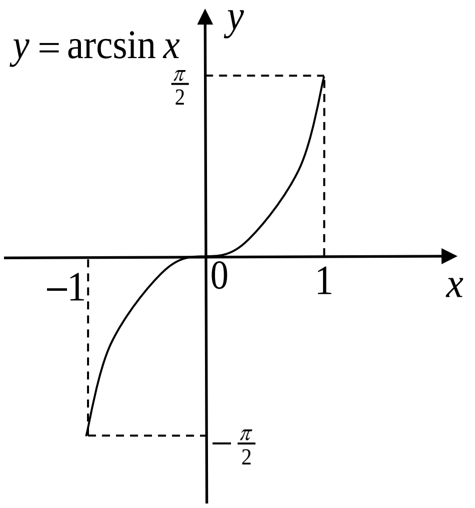


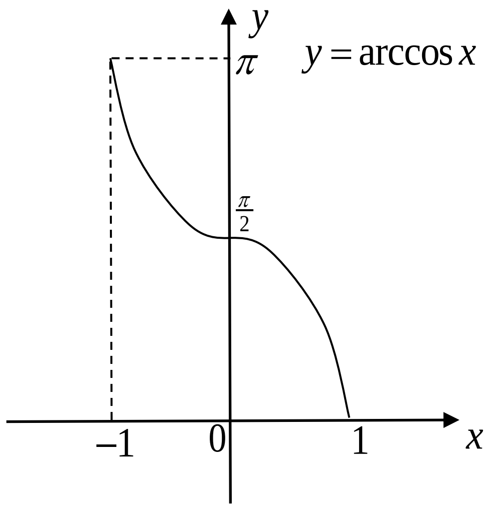

$y = \cos x$
y
1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x

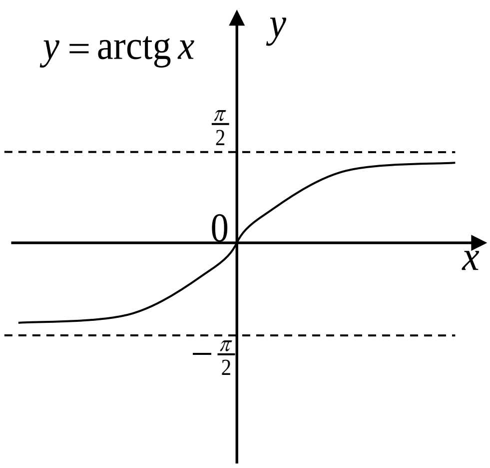

$y = \operatorname{tg} x$
y
1
$\frac{-\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x

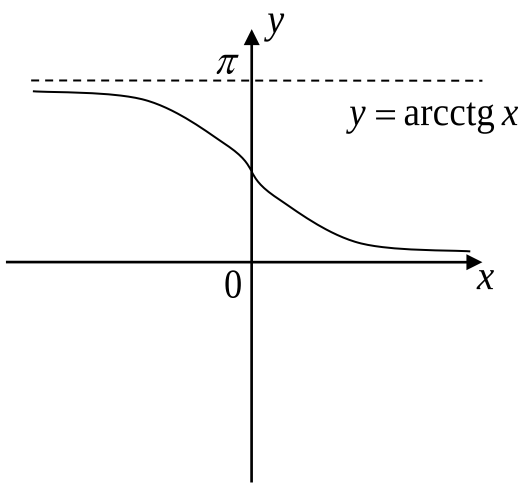

$y = \operatorname{ctg} x$
y
1
$\frac{-\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x

- ***обратные тригонометрические функции***:
$$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\operatorname{arctg} x,\ y=\operatorname{arcctg} x$$









Элементарными функциями называются все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий с применением действительных коэффициентов и образования сложной функции.

Некоторые элементарные функции:

линейная функция $y=ax+b$.

квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$.

целые рациональные функции – многочлены с действительными коэффициентами

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

дробно-рациональные функции (рациональные дроби) – отношение многочленов:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

иррациональные функции – функции в которых используется операция извлечения корня.

Не все известные функции являются элементарными. Неэлементарными функциями, в частности, являются:

функция знака $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

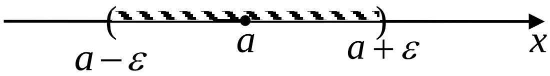
дробная часть числа $y = \{x\} = x - [x]$, где $[x]$ означает целую часть x.

функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{ рациональное,} \\ 0, & x - \text{иррациональное.} \end{cases}$

Теория пределов

§1. Предел функции в точке и на бесконечности

Окрестностью $B(a)$ ***конечной точки*** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ называется любой открытый интервал, содержащий эту точку. ***ε-окрестностью*** $\boldsymbol{B_\varepsilon(a)}$ ***конечной точки*** a называется интервал вида $(\boldsymbol{a-\varepsilon, a+\varepsilon})$

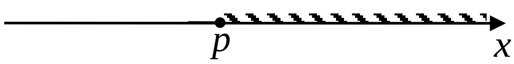


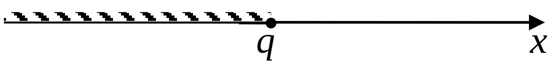
Если из окрестности $B(a)$ или $B_\varepsilon(a)$ саму точку $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ удалить, то получим соответственно ***проколотую окрестность*** $\boldsymbol{\dot{B}(a)}$ или ***проколотую ε-окрестность*** $\boldsymbol{\dot{B}_\varepsilon(a)}$ этой точки: $\boldsymbol{\dot{B}_\varepsilon(a) = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \varepsilon\}}$.

В случае, если точка a не является конечной, понятие окрестности приобретает немного другой смысл. ***Окрестность бесконечно удаленной точки***:

$B(+\infty) = (p, +\infty) = \{x | \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, x > p\}$, p - любое действительное число;

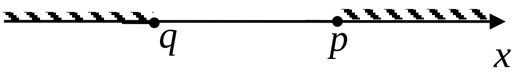
$B(-\infty) = (-\infty, q) = \{x | \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, x < q\}$, q - любое действительное число;

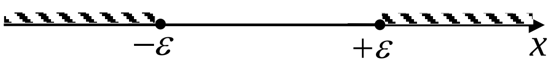




$B(\infty) = (-\infty, q) \cup (p, +\infty)$, $q<p$ - любые действительные числа);

$\boldsymbol{\dot{B}_\varepsilon(a)} = (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty) = \boldsymbol{\{x | x \in \mathbb{R}, |x| > \varepsilon\}}$, где $\varepsilon > 0$.





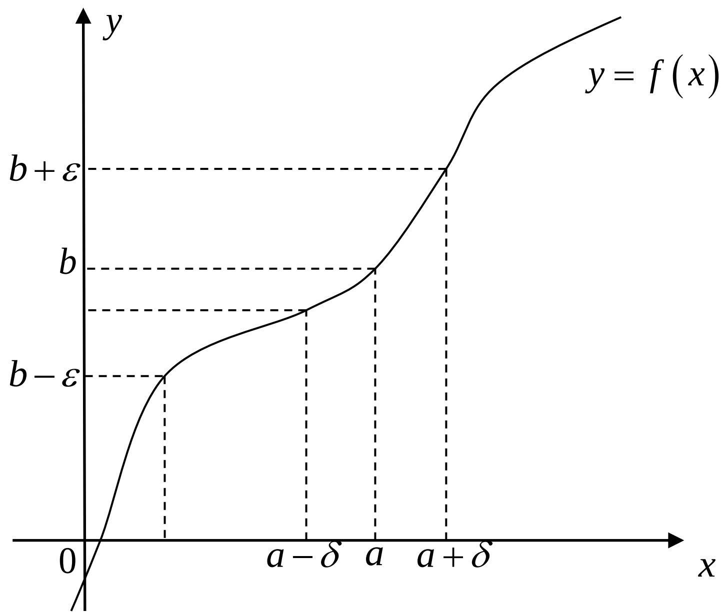
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\boldsymbol{\dot{B}_\varepsilon(a)}$ точки a (причем, точка может быть как конечной, так и бесконечной).

Определение. *Число* b *называется пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to a$, *если для любой окрестности* $B(b)$ *точки* b *найдется такая проколотая окрестность* $\boldsymbol{\dot{B}_\varepsilon(a)}$ *точки a, что как только* $x \in \boldsymbol{\dot{B}_\varepsilon(a)}$, *то* $f(x) \in B(b)$, *что обозначается* $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *или* $f(x) \to b$ *при* $x \to a$ ($f(x)$ *стремится к* b *при x стремящемся к a).*

С помощью логической символики определение предела записывается следующим образом: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall B(b), \exists \boldsymbol{\dot{B}_\varepsilon(a)}, \forall x \in \boldsymbol{\dot{B}_\varepsilon(a)} \Rightarrow f(x) \in B(b)$. Часто это определение предела называют «определением предела в окрестностях». В нем точки a, b могут быть как конечные, так и бесконечные. Рассмотрим частные случаи этого определения:

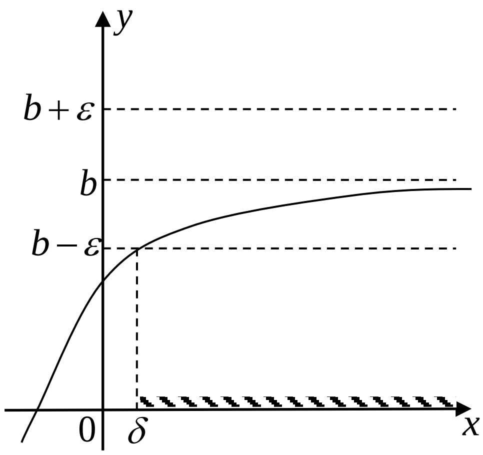
1) ***Конечные пределы в конечной точке*** ($a \neq \infty$, $b \neq \infty$). В качестве окрестностей точек a и b можно взять δ - и ε -окрестности и тогда определение

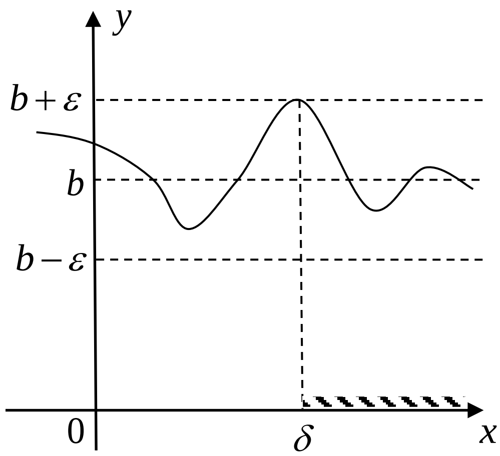
предела удобно записывается на языке “$\varepsilon-\delta$” (определение предела по Коши): $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\boldsymbol{a},\varepsilon)>0,\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon$. Таким образом, число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$, если для любого, как угодно малого положительного $\varepsilon>0$, найдется такое число $\delta>0$, вообще говоря зависящее от a и от ε,что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta, x\neq a$ будет выполняться неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.



Геометрическая интерпретация предела функции в точке: любому x из проколотой дельта окрестности точки a соответствует значение функции, попадающее в эпсилон окрестность точки b, то есть происходит выбор окрестности точки a по заданной **ε**-окрестности точки b.

б) ***Конечные пределы на бесконечности*** (a – бесконечно, b – конечно). В частности: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b \iff \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0, \forall x,\ x>\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon$. Или словами, число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если для любого, как угодно малого положительного $\varepsilon>0$, найдется такое число $\delta>0$, вообще говоря зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих условию $x>\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.



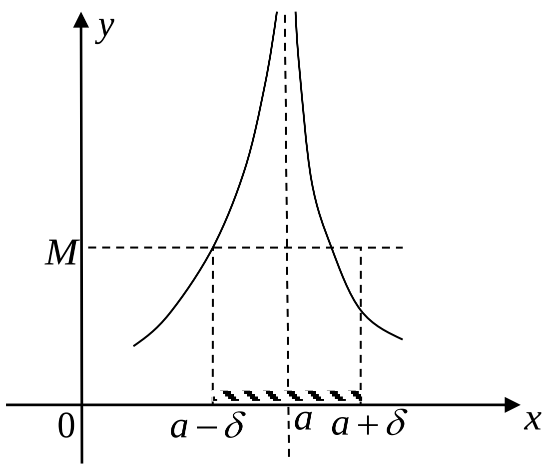


Остальные частные случаи пределов запишем в сжатой форме, с помощью логической символики:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

3) ***Бесконечные пределы в конечной точке*** (a – конечная, b – бесконечная). В этом случае в качестве окрестности точки a можно взять δ - окрестность: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta = \delta(a, M) > 0, \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Таким образом, функция $y = f(x)$ при $x \to a$ имеет предел равный $+\infty$, если для любого, как угодно большого $M > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta, x \neq a$ будет выполнятся неравенство $f(x) > M$



Остальные частные случаи пределов вводятся следующим образом:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists\delta = \delta(a, M) > 0, \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M;$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta = \delta(a, M) > 0, \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

4) ***Бесконечные пределы на бесконечности*** запишем в сжатой форме, с помощью логической символики:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon < 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, x > \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon < 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) < 0, \forall x, x < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) < 0, \forall x, x < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon;$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Важным частным случаем понятия предела функции является понятие предела последовательности, то есть функции, определенной на множестве натуральных чисел. Конечное число *a* называется ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число $n_0(\varepsilon)$, что все члены этой последовательности с номерами $n > n_0(\varepsilon)$ удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ (при $n \to +\infty$) и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n) имеет предел *a*. Для случая последовательности часто вместо $n \to +\infty$ пишут $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon.$$

Говорят, что ***числовая последовательность*** $\{x_n\}$ **стремится к** $+\infty$ (аналогично $(-\infty)$), что записывается $x_n \to +\infty$ (соответственно $x_n \to -\infty$), если для любого наперед заданного как угодно большого положительного числа *M*, найдется такое натуральное число $n_0 = n_0(M)$, что для всех $n > n_0$ члены этой последовательности удовлетворяют неравенству $x_n > M$ (соответственно, $x_n < -M$).

Следует отметить, что для существования предела функции при $x \to a$ не требуется, чтобы функция была определена в точке *a*. При нахождении предела рассматриваются значения функции в точках из окрестности точки *a*, отличные от *a*.

Поясним это на примере.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. При $x = 2$ она не определена. Покажем что $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$. Для этого достаточно для любого $\varepsilon > 0$, найти такое $\delta > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих условию $|x - 2| < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Имеем:

$$|f(x) - 5| = \left|\frac{(x+3)(x-2)}{x-2} - 5\right| = |(x+3) - 5| = |x - 2| < \varepsilon.$$

Возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда для $|x - 2| < \varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Наряду с введенным понятием предела функции в точке, рассматривают так называемые односторонние пределы функции – предел справа и предел слева. Если значения функции $y = f(x)$ стремятся к пределу b_1 *при* $x \to a$ причем, ***x*** принимает только значения мен*ьше a,* то записывают $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b_1$ и b_1 называют ***пределом слева в точке*** *a.* Если ***x*** принимает только значения большие чем ***a***, то записывают $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ *и* b_2 называют ***пределом справа в точке*** *a*. Односторонние пределы часто записывают следующим образом:

для предела слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$

для предела справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$.

Можно доказать, что конечный предел функции в точке существует тогда и только тогда, когда существуют односторонние пределы и они равны между собой.

§2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y=\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой (бмф)*** при $x\to a$ (или в точке $x=a$), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ (то есть для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такая проколотая окрестность точки *a*, что для всех *x* из этой окрестности справедливо неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$).

Пример. Функция $y=4-x$ является бмф при $x\to 4$, так как $\lim\limits_{x\to 4}(4-x)=0$, а функция $y=\dfrac{1}{x^2}$ является бмф при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

Рассмотрим далее две степенные функции $\alpha(x)=x$ и $\beta(x)=x^{100}$. Они обе являются бесконечно малыми функциями при $x\to 0$. Естественно возникает вопрос, а какая из них «меньше»? Другими словами, необходимо ввести критерий для сравнения бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$ и предел их отношения существует и равен *A*: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=A$.

Тогда, если

A=1, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми функциями*** при $x\to a$ (используется обозначение $\alpha(x)\sim\beta(x)$);

$A\neq 0$ и $A\neq\infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – ***бесконечно малые функции одного порядке малости*** при $x\to a$;

$A=0$, то $\beta(x)$ есть ***бесконечно малая функция более высокого порядка малости,*** чем $\alpha(x)$ при $x\to a$ (обозначается $\beta(x)=o(\alpha(x))$);

$A=\infty$, то $\alpha(x)$ есть ***бесконечно малая функция более высокого порядка малости,*** чем $\beta(x)$ при $x\to a$ (обозначается $\alpha(x)=o(\beta(x))$).

Если вернуться к примеру со степенными функциями $\alpha(x)=x$ и $\beta(x)=x^{100}$, которые являются бесконечно малыми функциями при $x\to 0$, то по введенному выше критерию $\beta(x)$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем $\alpha(x)$. Рассмотрим вторую пару бесконечно малых при $x\to 0$ функций $\alpha(x)=x$ и $\gamma(x)=x^{200}$. Очевидно, что $\gamma(x)$ также является бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ при $x\to 0$. То есть, введенный критерий не позволяет судить на сколько эти функции «меньше» функции $\alpha(x)$ при $x \to 0$. Введем еще один критерий сравнения.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$ и существует конечный предел их отношения $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = A \neq 0$, k>0, то $\alpha(x)$ называется ***функцией k-го порядка малости по сравнению с функцией*** $\beta(x)$ при $x \to a$.

Замечание. Если предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ отношения бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ не существует, то их считают ***несравнимыми*** между собой при $x \to a$.

Свойства бесконечно малых функций.

1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

2) Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая.

Как частный случай можно сформулировать следующее свойство: *произведение бесконечно малых функций при $x \to a$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.* Оно непосредственно вытекает из ограниченности бесконечно малой при $x \to a$ функции в окрестности точки *x=a.*

3) Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

4) Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ и $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

5) Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) = o(\beta(x))$.

6). Если $\alpha(x) \sim \alpha'(x)$, и $\beta(x) \sim \beta'(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}$. То есть, *предел отношения бесконечно малых при $x \to a$ функций, равен пределу отношения им эквивалентных при $x \to a$ функций.*

При раскрытии неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ в ряде случаев удобно пользоваться таблицей эквивалентностей. Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Тогда:

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	2) $\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$
3) $1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$	4) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
5) $\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
7) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$	8) $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$

Пример. Вычислить

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{tg(4-x^2)}=\left[\frac{0}{0}\right]=|\text{при } x\to 2, tg(4-x^2)\sim 4-x^2|=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{(4-x^2)}=$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)(2+x)}=-\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(2+x)}=\frac{1}{4}$$

Рассмотрим другой пример $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{tgx-sinx}$. Возникает вопрос, как здесь использовать таблицу эквивалентностей и можно ли ей воспользоваться вообще? Если в знаменателе каждое слагаемое заменить ему эквивалентным, то окажется, что $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{tgx-sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{0}$, что смысла не имеет. Преобразуем знаменатель $tgx-sinx=\frac{sinx-sinxcosx}{cosx}=\frac{sinx(1-cosx)}{cosx}$ и подставим это выражение в условие $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{tgx-sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4cosx}{sinx(1-cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4cosx}{x(\frac{x^2}{2})}=0$. Здесь уже воспользовались свойством, что предел отношения бесконечно малых равен пределу отношения им эквивалентных бесконечно малых функций. Заодно отследили следующий факт: если в числителе и знаменателе содержится алгебраическая сумма бесконечно малых функций, то при вычислении пределов нельзя заменять отдельные слагаемые эквивалентными им бесконечно малыми функциями, так как это может привести к неправильному результату либо к потере смысла.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to a$ функции, причем $\alpha(x)=o(\beta(x))$. Рассмотрим предел $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}+1\right)=1$. То есть $\alpha(x)+\beta(x)\sim\beta(x)$. Доказали следующую теорему.

Теорема. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ различных порядков малости эквивалентна слагаемому низшего порядка малости.

Замечание. Слагаемое, эквивалентное алгебраической сумме бесконечно малых функций, называется ***главной частью этой суммы***.

В приведенном выше примере в знаменателе стояла разность бесконечно малых функций одного порядка малости. Относительно этого случае в теореме указаний не содержится. Разность оказалась бесконечно малой функцией третьего порядка малости, хотя слагаемые имели первый порядок малости: $tgx-sinx\sim\frac{x^3}{2}$ при $x\to 0$.

Следует отметить, что частное от деления бесконечно малых при $x\to a$ функций не обязательно бесконечно малая функция.

Пример. Рассмотрим функции: $\alpha(x)=\frac{1}{x}$, $\beta(x)=\frac{1}{x^2}$, $\gamma(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$. Тогда $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to\infty$, $\beta(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to\infty$, $\gamma(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to\infty$.

Частное $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=x$ есть функция бесконечно большая при $x\to\infty$; частное $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{x}$ есть бесконечно малая функция при $x\to\infty$; частное $\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=1+\dfrac{1}{x}$ есть функция**,** имеющая конечный предел при $x\to\infty$.

Функция $y=\beta(x)$ называется ***бесконечно большой (ббф)*** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a}|\beta(x)|=+\infty$.

Пример. Функция $y=4-x$ является бесконечно большой функцией при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}(4-x)=\infty$, а функция $y=\dfrac{1}{x^2}$ является бесконечно большой функцией при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Свойства бесконечно больших функций.

1) Если $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x\to a$, то $\beta(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция при $x\to a$ и наоборот.

Эти свойства символически записываются $\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$ и $\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$.

2) Произведение бесконечно большой функции на функцию $|f(x)|>M\neq 0$ есть функция бесконечно большая. В частности, произведение бесконечно больших функций есть бесконечно большая функция.

3) Сумма бесконечно большой и ограниченной функций есть функция бесконечно большая.

4) Сумма двух бесконечно больших функций одинакового знака есть функция бесконечно большая.

Следует отметить, что разность двух бесконечно больших функций одинакового знака не обязательно бесконечно большая функция.

Пример. Рассмотрим бесконечно большие функции при $x\to\infty$:

$$\alpha(x)=x^2,\ \beta(x)=x^2+x,\ \gamma(x)=x^2+3,\ \mu(x)=x^2+\frac{1}{x},\ \nu(x)=x^3.$$

При $x\to\infty$ разность $\beta(x)-\alpha(x)=x$ есть бесконечно большая функция при $x\to\infty$; разность $\mu(x)-\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$ есть бесконечно малая функция при $x\to\infty$; разность $\gamma(x)-\alpha(x)=3$ есть постоянная функция**.**

Частное $\frac{\nu(x)}{\alpha(x)} = x$ есть бесконечно большая функция при $x \to \infty$; частное $\frac{\alpha(x)}{\nu(x)} = \frac{1}{x}$ есть бесконечно малая функция при $x \to \infty$; частное $\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 + \frac{3}{x^2}$ есть функция**,** имеющая конечный предел при $x \to \infty$.

Классификация бесконечно больших функций проводится аналогично классификации бесконечно малых функций через предел отношения бесконечно больших функций. Отличаются только лишь названия: бесконечно большие функции одного порядка роста, эквивалентные, более высокого порядка роста, *k*-го порядка роста. Также верна и теорема о том, что предел отношения бесконечно больших функций равен пределу отношения им эквивалентных. Но сумма конечного числа бесконечно больших функций различных порядков роста эквивалентна бесконечно большой функции более высокого порядка роста. Все эти факты несложно получить из связи бесконечно малых и бесконечно больших функций. Следует только осознавать, что понятия бесконечно большой и бесконечно малой функций нельзя отрывать от точки, в которой они рассматриваются, так как одна и та же функция в разных точках может быть, как бесконечно большой, так и бесконечно малой. Например, функция $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ при $x \to 2$ бесконечно малая функция, а при $x \to -2$ – бесконечно большая.

§3. Основные теоремы о пределах

Предположим, что существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$. Тогда имеют место следующие основные свойства конечных пределов.

Теорема 1. Функция в точке имеет только один предел.

Другими словами, если предел функции в точке существует, то он единственен.

Теорема 2. Для того, чтобы при $x \to a$ существовал (конечный) предел функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы в некоторой достаточно малой проколотой окрестности $\dot{B}(a)$ точки a выполнялось равенство $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x \to a$

Более кратко эту теорему можно записать следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x), \forall x \in \dot{B}(a)$$

где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x \to a$.

Теорема 3. Для существования конечного предела b функции $y = f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой конечные односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \neq \infty \Leftrightarrow f(a-0) = f(b+0) = b.$$

Теорема 4 (предельный переход в неравенствах). Если функции *f(x)* и *g(x)* имеют конечный предел при $x \to a$ и в некоторой проколотой окрестности $\dot{B}(a)$ для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Замечание. Следует отметить, что строгое неравенство может переходить в равенство. Например, рассмотрим две функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ и $g(x) = \frac{1}{x}$. При $x \to \infty$ имеем строгое неравенство *f(x)<g(x),* но $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Теорема 5 (лемма о сжатой переменной). Если в некоторой проколотой окрестности $\dot{B}(a)$ для функций $f(x), u(x), g(x)$ выполняется неравенство $f(x) \leq u(x) \leq g(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то существует $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ и также равен b.

Теорема 6. Если функция *f(x)* имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

***Теорема** 7* (арифметические операции над пределами). Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a \neq \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \neq \infty$ то:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = a \pm b$;

$\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$;

$\lim\limits_{x\to a}(C \cdot g(x)) = C \cdot a$, где *C=const* – постоянная;

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{a}{b}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Замечание 1. В случае неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty \cdot \infty]$, $[0 \cdot \infty]$ последняя теорема неприменима.

Замечание 2. Первое и второе утверждения теоремы 7 верны для любого конечного числа слагаемых и сомножителей, соответственно. Поэтому $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = a^n$ $(n \in \mathbb{N}, a > 0)$ и $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$ (*a*>0, если *n* – четное). Более того, можно доказать, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$, то:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a}(f(x))^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Следует иметь в виду, что последнее равенство не позволяет раскрывать неопределенности вида: $[0^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$.

Для раскрытия некоторых вышеперечисленных неопределенностей можно использовать, так называемые, ***замечательные пределы.*** В частности, при вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$, называемый ***первым замечательным пределом.***

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{tg2x}$.

Применяем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{tg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin5x\cdot cos2x}{sin2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin5x}{5x}\cdot\frac{2x}{sin2x}\cdot\frac{5cos2x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sin5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{sin2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5cos2x}{2}=\frac{5}{2}.$$

Вторым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

где число ***e*** - предел числовой последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1,2,3,...$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

является числом иррациональным, e= 2,718281828459045…. При практических вычислениях обычно ограничиваются первыми двумя-тремя знаками после запятой. Число ***e*** играет очень важную роль в математическом анализе. Показательная функция с основанием ***e,*** $y=e^x$ называется ***экспонентой.*** Логарифм по основанию ***e*** называется ***натуральным (или неперовым) логарифмом*** и обозначается $lnx=\log_e x$.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=[1^\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{x+2}{x-1}\cdot 4}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}}=e^4.$$

При нахождении предела первоначально в скобках добавили и вычли единицу, вычислили разность и разделили на четыре, затем показатель степени умножили и разделили на $\frac{x-1}{4}$. Другими словами, свели ко второму замечательному пределу, после чего воспользовались свойством $\lim\limits_{x\to a}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$.

Из второго замечательного предела можно получить пределы, которые применяются для раскрытия неопределенностей:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-ln4}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-ln4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+4}{4}\right)}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}.$$

При нахождении этого предела, выполнив необходимые преобразования, мы свели предел к одному из пределов, вытекающих из второго замечательного предела.

§4. Вычисление пределов

Отметим некоторые общие методы вычисления пределов.

1. Использование основных теорем о пределах. Поскольку для основных элементарных функций во всех точках их области определения (для элементарных функций во всех точках из интервала их области определения) имеет место свойство $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, то при вычислении пределов, прежде всего вместо x подставляем предельное значение $x=a$ и, если значение $f(a)$ определено, то применяем основные теоремы о пределах.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{x^2}(cosx+8x)\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{x^2}(cosx+8x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}2^{x^2}\lim\limits_{x\to 0}(cosx+8x)=[2^0(cos0+8\cdot 0)]=1.$

Если при подстановке в $f(x)$ вместо x предельного значения a получаются выражения вида: $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $[0\cdot\infty]$; $\left[1^{\infty}\right]$; $[\infty-\infty]$ и другие неопределенностями, то их необходимо «раскрывать» специальными методами.

2. Использование односторонних пределов.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}\ при\ |x|<1\ и\ x\neq 0,\\ x^2\ при\ |x|\geq 1,\end{cases}$$

при: а) $x_0=1$, б) $x_0=0$, в) $x_0=-1$.

Решение.

а) $f(x_0-0)=f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 1-0}1=1,$

$f(x_0+0)=f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}x^2=1.$

Таким образом, $f(1-0)=f(1+0)=1$, следовательно $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

б) $f(x_0-0)=f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\frac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to -0}\frac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to -0}(-1)=-1,$

$$f\left(x_0+0\right)=f\left(+0\right)=\lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+0}1=1$$

Таким образом, $f\left(-0\right)\neq f\left(+0\right)$ и следовательно $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)$ не существует.

в) $f\left(x_0-0\right)=f\left(-1-0\right)=\lim\limits_{x\to-1-0}x^2=1,$

$$f\left(x_0+0\right)=f\left(-1+0\right)=\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to-1+0}(-1)=-1.$$

Так как, $f\left(-1-0\right)\neq f\left(-1+0\right)$, то, следовательно, $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)$ не существует.

3. Использование определение предела.

Пределы можно также вычислять ***по определению предела,*** например, с использованием языка "$\varepsilon-\delta$"- окрестностей, однако это, как правило, требует более основательной математической техники, поэтому используется на практике достаточно редко. Чаще этот способ применяют для доказательства факта, что предел не существует.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2+2x+1\right)$, если $x_0=-1$.

Решение. Значение $f\left(-1\right)=0$ существует. Покажем, что $\lim\limits_{x\to-1}f\left(x\right)=0$. Рассмотрим условие: $f\left(x\right)\in B_\varepsilon\left(0\right)=\left(0-\varepsilon,0+\varepsilon\right)$, что равносильно $\left|x^2+2x+1+0\right|<\varepsilon$, или $|x+1|^2<\varepsilon$, или $|x+1|<\sqrt{\varepsilon}$. Полагая $\delta=\delta_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}$, имеем $0<\left|x-\left(-1\right)\right|<\delta_\varepsilon\Rightarrow\left|f\left(x\right)-0\right|<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to-1}f\left(x\right)=0$.

4. Использование эквивалентных бесконечно малых функций.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{sin4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{sin4x}=\left|\begin{array}{c}\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\frac{x+x^2}{2}\\ sin4x\sim4x\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x+x^2}{2}}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2}{8x}=\frac{1}{8}.$$

Применяя таблицу эквивалентных бесконечно малых раскрыли неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Рассмотрим далее более подробно раскрытие некоторых видов неопределенностей. При вычислении пределов функций удобно использовать таблицу, в которой приведены соотношения пределов суммы, произведения, частного двух функций $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$, свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	$\lim\limits_{x\to a}g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$
b	$c\neq0$	$b+c$	bc	$\frac{b}{c}$

$b \neq \infty$	∞	∞	∞, если $b \neq 0$	$\left[b/_{\infty} \right] = 0$
∞	c	∞	∞ если $c \neq 0$	$\left[\infty/_{c} \right] = \infty$, если $c \neq 0$
0	0	0	0	Неопределенность $\left[0/_{0} \right]$
b	0	b	0	$\left[b/_{0} \right] = \infty$, если $b \neq 0$
0	∞	∞	Неопределенность $[0 \cdot \infty]$	$\left[0/_{\infty} \right] = 0$
∞	0	∞	Неопределенность $[\infty \cdot 0]$	$\left[\infty/_{0} \right] = \infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	Неопределенность $[\infty - \infty]$	$-\infty$	Неопределенность $\left[\infty/_{\infty} \right]$

§5. Раскрытие некоторых неопределенностей

§5.1. Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0} \right]$.

1. Использование первого замечательного предела. При вычислении предела дроби, содержащей тригонометрические функции, в случае, когда предел и числителя, и знаменателя равен нулю, можно использовать первый замечательный предел или эквивалентные бесконечно малые.

Пример. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{\operatorname{tg} 3x}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{\sin^2 8x}$.

Решение.

а) 1-й способ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{\boxed{\dfrac{\sin 7x}{7x}} \cdot 7x}{\boxed{\dfrac{\sin 5x}{5x}} \cdot 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{7x}{5x} = \frac{7}{5}.$$

(при решении разделили каждый синус на аргумент и домножили на него и использовали первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$);

2-й способ:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{5x}=\dfrac{7}{5}$, так как $\sin 7x\sim 7x$, $\sin 5x\sim 5x$ при $x\to 0$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\mathrm{tg}3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{3x}=\dfrac{7}{3}$ так как $\arcsin 7x\sim 7x$, при $x\to 0$, $\mathrm{tg}3x\sim 3x$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 3x}{\sin^2 8x}==\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\,\dfrac{\sin^2 3x}{(3x)^2}(3x)^2}{\dfrac{\sin^2 8x}{(8x)^2}\cdot(8x)^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 9x^2}{64x^2}=\dfrac{9}{32}$ (при вычислении предела использовали формулу $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$).

Аналогично, используя эквивалентные при $x\to 0$ бесконечно малые функции, $1-\cos 6x\sim\dfrac{1}{2}(6x)^2$, $\sin 8x\sim 8x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{(8x)^2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 36}{64}=\frac{9}{32}.$$

2. При нахождении $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, если $P(a)=Q(a)=0$, то следует числитель и знаменатель дроби разделить на разность $(x-a)$ один или несколько раз, пока не исчезнет неопределенность.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{4x^2-5x+1}$.

Решение. Подставляя вместо x предельное значение $x=1$ получим неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Выделим в числителе и знаменателе множитель $x-1$, для чего числитель разделим на $x-1$ «уголком»:

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-2 & x-1 \\ \hline \underline{x^3-x^2} & x^2+2x+2 \\ \quad 2x^2-2 & \\ \quad \underline{2x^2-2x} & \\ \qquad\quad 2x-2 & \\ \qquad\quad \underline{2x-2} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Тогда $x^3+x^2-2=(x-1)\cdot(x^2+2x+2)$.

Знаменатель разложим на множители, используя формулу

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, которые находятся по следующим формулам:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ D=b^2-4ac.$$

Решаем квадратное уравнение:

$$4x^2-5x+1=0,$$
$$D=25-16=9,$$
$$x_{1,2}=\frac{5\pm 3}{8},\ x_1=\frac{1}{4},\ x_2=1.$$

Тогда $4x^2-5x+1=4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)=(4x-1)(x-1)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{4x^2-5x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^2+2x+2)}{(4x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+2}{4x-1}=\frac{5}{3}.$$

3. При раскрытии неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ в случае иррациональных выражений в числителе и (или) знаменателе следует избавиться от иррациональности путем умножения на соответствующее сопряженное выражение или производя замену переменных.

Пример. Вычислить $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

Решение. Первый способ. При $x=4$ числитель и знаменатель дроби равны нулю. Домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю ($\sqrt{2x+1}+3$), получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}=\left[\frac{2}{3+3}\right]=\frac{1}{3}.$$

В преобразованиях использовали формулу

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b.$$

Второй способ.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}\sqrt{2x+1}=t, x=\dfrac{t^2-1}{2}\\ x\to 4,\quad t\to 3\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{\dfrac{t^2-1}{2}-4}=\lim_{t\to 3}\frac{2(t-3)}{t^2-9}=$$

$$\lim_{t\to 3}\frac{2(t-3)}{(t-3)(t+3)}=\lim_{t\to 3}\frac{2(t-3)}{(t-3)(t+3)}=\lim_{t\to 3}\frac{2}{(t+3)}=\left[\frac{2}{6}\right]=\frac{1}{3}.$$

§5.2. Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

1. При нахождении предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ отношения двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби целесообразно разделить на x^n, где – n высшая степень этих многочленов.

Пример 16. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+3x^2-5}{2x+7x^3+3x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{x^5+2x+3}$.

Решение.

а) разделим числитель и знаменатель дроби на x^4, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+3x^2-5}{2x+7x^3+3x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{x^4}}{\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{7}{x}+3}=\left[\frac{4+0+0}{0+0+3}\right]=\frac{4}{3};$$

б) разделим числитель и знаменатель дроби на x^5, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{x^5+2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}{1+\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}}=\left[\frac{0+0+0}{1+0+0}\right]=0.$$

Для практических целей можно использовать следующую схему. Если многочлен в числителе $P_n(x)$ имеет степень n, а в знаменателе $Q_m(x)$ – степень $m,$ то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0, & \text{если } m>n;\\ \dfrac{a_n}{b_n}, & \text{если } m=n;\\ \infty, & \text{если } m<n,\end{cases}$$

где a_n и b_n коэффициенты при старшей степени x^n и x^m многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, соответственно.

2. При раскрытии неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ в случае иррациональных выражений в числителе и знаменателе дроби выделяются множители x^m, x^n, где m, n - максимально возможные показатели степеней $((m,n)\in\mathbb{Q})$. Затем производится сокращение на $x^p\left(p=\min(m,n)\right)$.

Пример. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-5}}{\sqrt[3]{x^3+2x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^6+2x+1}}{\sqrt[4]{x^4+2x^2+4}}$;

Решение.

а) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-5}}{\sqrt[3]{x^3+2x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{x\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=\left[\frac{\sqrt{4+\frac{2}{\infty}-\frac{5}{\infty}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}}\right]=\left[\frac{\sqrt{4+0+0}}{\sqrt[3]{1+0+0}}\right]=\left[\frac{2}{1}\right]=2.$$

б)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^6+2x+1}}{\sqrt[4]{x^4+2x^2+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6\left(4+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)}}{\sqrt[4]{x^4\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|^3\cdot\sqrt{4+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}}}{|x|\cdot\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}}}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}}}=\left[\infty\cdot\frac{\sqrt{4+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{\infty}+\frac{4}{\infty}}}\right]=\left[\infty\cdot 2\right]=\infty$$

§5.3. Неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$.

Для раскрытия неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$ часто используется второй замечательный предел и следствия из него:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{nx}=e^{kn},\ \lim_{x\to 0}\left(1+kx\right)^{n/x}=e^{kn}.$$

Пример. Найти пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{x};\ \text{б) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2};\ \text{в) } \lim_{x\to\infty}x\left(\ln\left(x+3\right)-\ln x\right).$$

Решение.

а) так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, имеем неопределенность вида $[1^{\infty}]$, для раскрытия которой используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{3x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x}}}=e^{3};$$

б) поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x}}{2+\frac{3}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2\right)=\infty$, то имеем неопределенность вида $[1^{\infty}]$, для раскрытия которой используем второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5}{2x+3}-1\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5-2x-3}{2x+3}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{2}}\right)^{\frac{2(x+2)}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+4}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}}}=e;$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln\left(x+3\right)-\ln x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\dfrac{x+3}{x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^{x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\ln e^{3}=3.$$

Здесь использовали свойства логарифмов и второй замечательный предел.

§5.3. Неопределенности вида $\left[\infty-\infty\right]$, $\left[0\cdot\infty\right]$.

Неопределенности таких видов раскрываются сведением, с помощью преобразований, к неопределенностям $\left[\dfrac{0}{0}\right],\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ и другим.

Пример. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x^2+2x-2}{x^3-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\left(\operatorname{tg}x+2x^2\right)$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, то имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Выполним следующее преобразование:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

Получили неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Раскроем ее

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=$$

$$=\left[\frac{1+\dfrac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}}+1}\right]=\left[\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}\right]=\frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x^2+2x-2}{x^3-1}\right)$. Так как $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-2}{x^3-1}=\infty$, то имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Выполним следующее преобразование:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x-2}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x-2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x+1-x^2-2x+2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{-x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right).$$

Получили неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Раскроем ее

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{-x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x^2+x+1}=-\frac{1}{3}.$$

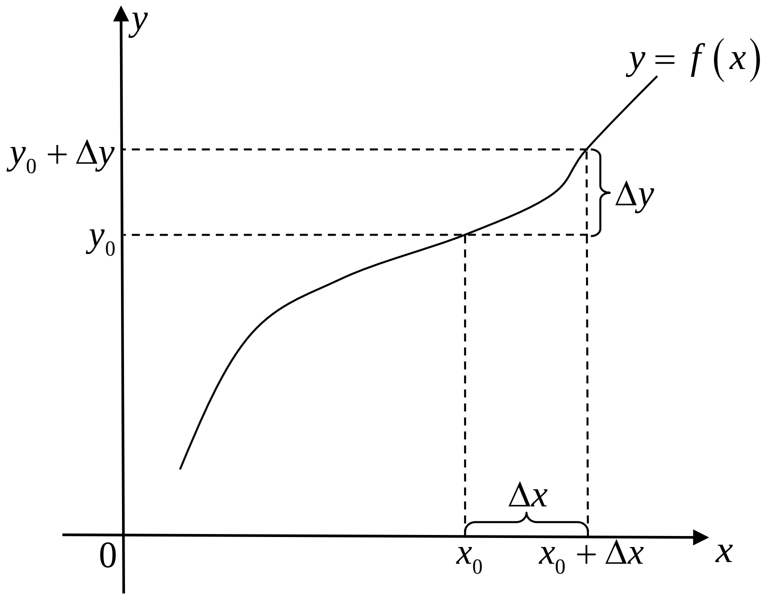
в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\operatorname{tg}x+2x^2\right)$. Непосредственная подстановка предельного значения $x=0$ приводит к неопределенности вида $[0\cdot\infty]$. Преобразовав данное выражение, получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(tgx+2x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{tgx+2x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=|tgx\sim x, x\to 0|=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}+2=\infty.$$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция *y*=*f*(*x*) определена в некоторой окрестности точки x_0. Придадим аргументу x_0 приращение Δx. Тогда функция *y*=*f*(*x*) получит приращение $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



Определение 1. Функция *y*=*f*(*x*) называется ***непрерывной в точке*** x_0, если:

1) функция *y*=*f*(*x*) определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) существует коечный предел функции *y*=*f*(*x*) при $x \to x_0$ и он равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если нарушено хотя бы одно из условий определения, то точка x_0 называется ***точкой разрыва функции*** *y*=*f*(*x*).

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то условие 2) можно переписать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0).$$

Это означает, *что* ***для непрерывной функции знаки предела и функции можно переставлять, чем мы и пользовались ранее при вычислении пределов от элементарных функций (элементарные функции непрерывны во всех конечных точках из своей области определения).***

Воспользовавшись определением предела функции по Коши, можно дать эквивалентное определение предела функции в точке.

Определение 2. Функция *y*=*f*(*x*) называется ***непрерывной в точке*** x_0 из области определения функции, если для $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, что для $\forall x$, такого что $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Отметим, что определении требуется не только существование, но и конечность предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в точке из области определения. Это равносильно существованию предела $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0}\Delta y = 0$. Сформулируем еще одно эквивалентное определение предела функции в точке.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 из области определения функции, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Пример. Доказать, что функция $y = x^3$ непрерывна в любой точке области определения.

Решение. Дадим аргументу x приращение Δx в точке x_0 и найдем приращение функции Δy:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3 =$$
$$= x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) = 3x_0^2\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + 3x_0\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2 +$$
$$+\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^3 = 3x_0^2\cdot 0 + 3x_0\cdot 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$, а это и означает, что функция $y = x^3$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Определение. Если функция $y = f(x)$ определена в левосторонней окрестности точки *x₀* и $\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0)$ (аналогично $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = f(x_0)$), то функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 ***слева*** *(соответственно* ***справа****).*

Из связи существования конечного предела в конечной точке с существованием односторонних пределов в этой точке функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа. Отсюда получаем еще одно эквивалентное определение непрерывности функции в точке или, как его иногда называют, ***критерий непрерывности функции в точке.***

Определение 4. Функция $y = f(x)$ ***непрерывна при*** $x = x_0 \neq \infty$ если выполнены следующие условия:

1) функция определена в точке x_0;
2) существуют конечные односторонние пределы функции в точке x_0:
$$f(x_0-0),\ f(x_0+0);$$
3) односторонние пределы равны между собой:
$$f(x_0-0)=f(x_0+0);$$
4) односторонние пределы равны значению функции в этой точке:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то x_0 – точка разрыва функции.

Это определение непрерывности удобно для классификации точек разрыва функции и для исследования на непрерывность составных функций (заданных с помощью фигурной скобки).

Пример. Исследовать на непрерывность в точке $x=1$ следующие функции: а) $y=\frac{3}{x-1}$; б) $y=\begin{cases} x-2, \text{при } x<1, \\ x^2, \quad \text{при } x\geq 1; \end{cases}$ в) $y=x^2-5$.

Решение а). Функция $y=\frac{3}{x-1}$ определена в окрестности точки $x=1$, но в самой точке $x=1$ она не определена, следовательно, в этой точке она не является непрерывной.

Решение б). Для исследования на непрерывность воспользуемся условиями непрерывности. В точке $x=1$ функция $y=\begin{cases} x-2, \text{при } x<1, \\ x^2, \quad \text{при } x\geq 1; \end{cases}$ определена ($f(1)=1^2=1$), то есть первое условие из определения непрерывности выполнено; второе условие определения также выполняется: $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x-2)=-1$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0} x^2=1$; третье условие непрерывности не выполняется, так как $f(1-0)\neq f(1+0)$. Следовательно, данная функция не является непрерывной в точке $x=1$, однако функция непрерывна в точке $x=1$ справа.

Решение в). Функция $y=x^2-5$ является непрерывной в точке $x=1$, так как выполнены все условия непрерывности: она определена в точке $x=1$ и ее окрестности; существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-4$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-4$; эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=f(1)=-4$.

§2. Свойства функций непрерывных в точке и на отрезке

Так как понятие непрерывности функции в точке вводится через понятие предела, то очевидны (с учетом свойств пределов) следующие

<u>*Свойства функций, непрерывных в точке*</u>:

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то $f(x)\pm g(x)$, $c\cdot f(x)$ (с – постоянная), $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии что $g(x_0)\neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

2. Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком числа $f(x_0)$.

Последнее свойство имеет в основном теоретический характер. Оно доказывается достаточно просто. Из определения непрерывности в точке следует, что для $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, что для $\forall x$, такого что $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Последнее неравенство равносильно выполнению двойного неравенства $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ для всех значений аргумента x из некоторой окрестности точки $x=x_0$. Из этого неравенства непосредственно следует $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a,b), в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

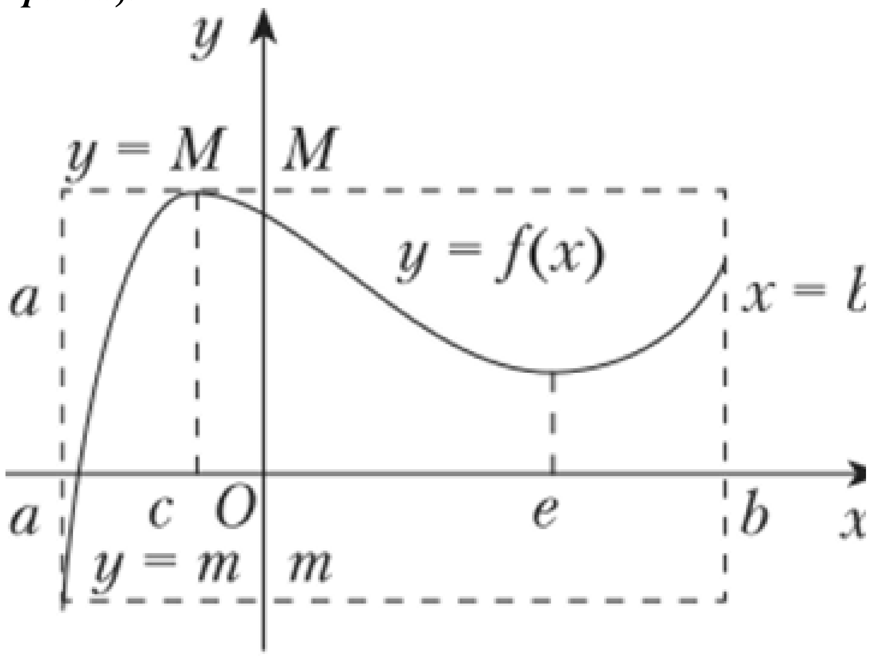
Свойства функций, непрерывных на отрезке:

1) Основные элементарные функции непрерывны в области их определения.

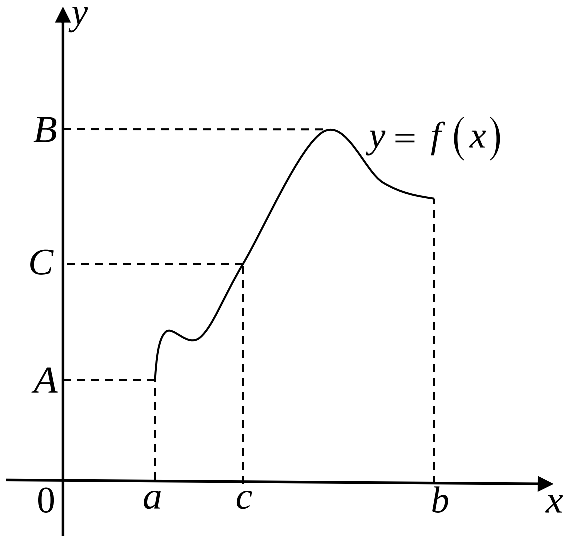
2) Элементарные функции непрерывны на каждом из интервалов, целиком лежащих в области определения.

3) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке (***первая теорема Вейерштрасса***).

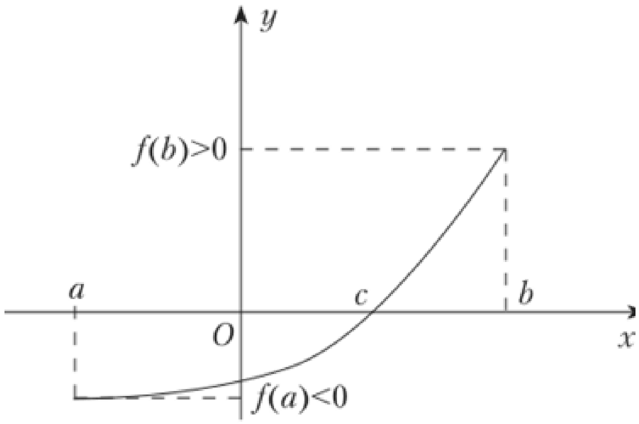
4) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке она достигает своего наименьшего m и наибольшего M значения (***вторая теорема Вейерштрасса***).



5) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, , то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется по крайней мере одна такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c)=C$ (***теорема Коши о промежуточном значении***).



6) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значения различных знаков ($f(a)f(b) < 0$), то внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$.



§3. Точки разрыва функции и их классификация

Если для функции $y = f(x)$ не выполняется хотя бы одно из условий определения непрерывности в точке $x = x_0$, то эта точка является точкой разрыва функции. Проще всего классифицировать точки разрыва функции по определению 4 (напомним, что все приведенные определения непрерывности в точке являются эквивалентными и отличаются лишь степенью детализации условий). Точки разрыва функции классифицируются следующим образом.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют односторонние конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, они равны между собой: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но сама функция $y = f(x)$ не определена в точке x_0, или определена, но ее значение не равно односторонним пределам: $f(x_0 - 0)$=$f(x_0 + 0)$$\neq f(x_0)$.

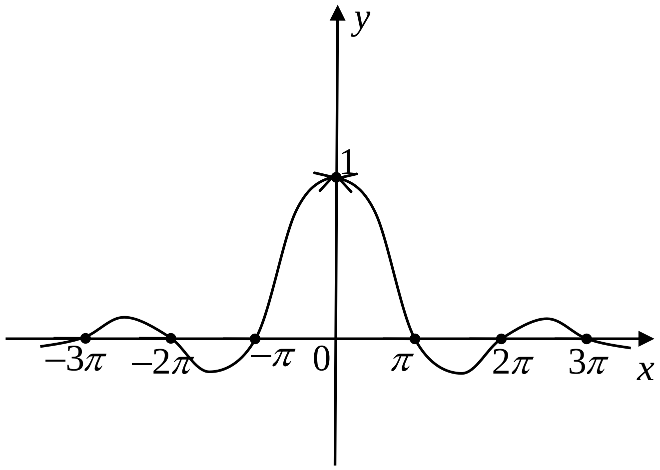
Если в точке устранимого разрыва функцию доопределить или значение сделать равным односторонним пределам, то функция в этой точке станет непрерывной.

Пример. Исследовать на непрерывность в точке $x=0$ функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. Здесь $x_0=0$ – точка разрыва: в этой точке функция не определена, существуют односторонние пределы $f(x_0-0)=f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и $f(x_0+0)=f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, равные между собой. Точка $x_0=0$ является точкой устранимого разрыва. Если эту функцию доопределить в точке $x=0$, то полученная функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sinx}{x}, \text{если } x\neq 0,\\ 1 \quad, \text{если } x=0;\end{cases}$$

станет в точке $x_0=0$ непрерывной то есть устраним разрыв в точке.



Определение. Точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода (точкой конечного разрыва, конечного скачка)*** функции $y=f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, но они не равны между собой: $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$. Разность (или модуль разности) $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется ***скачком функции*** $y=f(x)$ в точке x_0.

Пример. Найти точки разрыва и определить их тип для функции

$$f(x)=\begin{cases}x+1\ , & \text{если } x<0,\\ x^2-1, & \text{если } 0\leq x<2,\\ 5-x, & \text{если } x\geq 2.\end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;2)$ и $(2;+\infty)$, так как на каждом из этих интервалов она задана элементарными функциями. Следовательно, точками разрыва данной функции могут быть только те точки, в которых функция меняет свое аналитическое задание, то есть точки x_1=0 и $x_2 = 2$. Найдем односторонние пределы функции в точке $x_1 = 0$:

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (x+1) = 1,$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x^2 - 1) = -1.$$

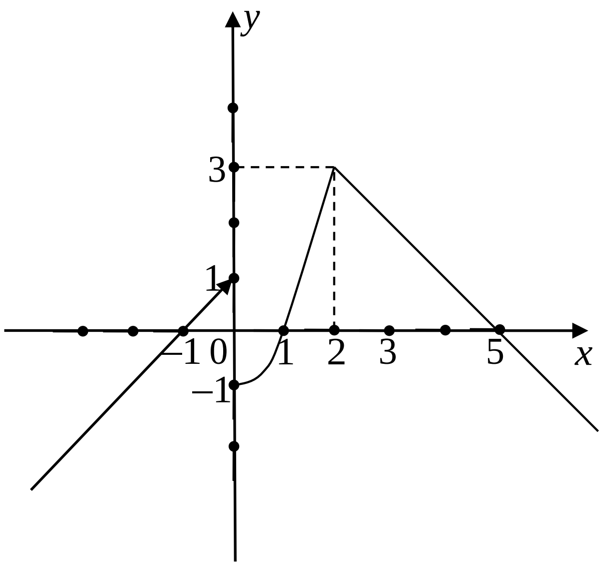
Так как односторонние пределы существуют и конечны, но не равны между собой, то точка $x_1 = 0$ является точкой разрыва первого рода.

Для точки $x_2 = 2$ находим:

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x^2 - 1) = 3,$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (5-x) = 3,\ f(2) = (5-x)\big|_{x=2} = 3.$$

Таким образом, имеем: $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$. Следовательно, в точке $x_2 = 2$ наша функция является непрерывной.



Функция $y = f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной*** на $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[a,b]$, за исключением конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода и устранимый разрыв, и, кроме того, имеет односторонние пределы на концах отрезка. Функция из примера является кусочно-непрерывной на множестве действительных чисел.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода (точкой бесконечного разрыва, бесконечного скачка)*** функции $y = f(x)$, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует.

Пример. Найти точки разрыва функции и определить их тип:

$$f(x) = \begin{cases} -3x, \text{если } x \geq -1, \\ \dfrac{x}{x+4}, \text{если } x < -1. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ на интервалах $(-\infty; -4)$, $(-4; -1)$ и $(-1; +\infty)$ определена и непрерывна так как она задана элементарными функциями.

В точке $x_2 = -4$ функция не определена, значит точка $x_2 = -4$ является точкой разрыва. Определим ее тип:

$$f(-4-0) = \lim_{x \to -4-0} f(x) = \lim_{x \to -4-0} \frac{x}{x+4} = +\infty, \; f(-4+0) = \lim_{x \to -4+0} \frac{x}{x+4} = -\infty.$$

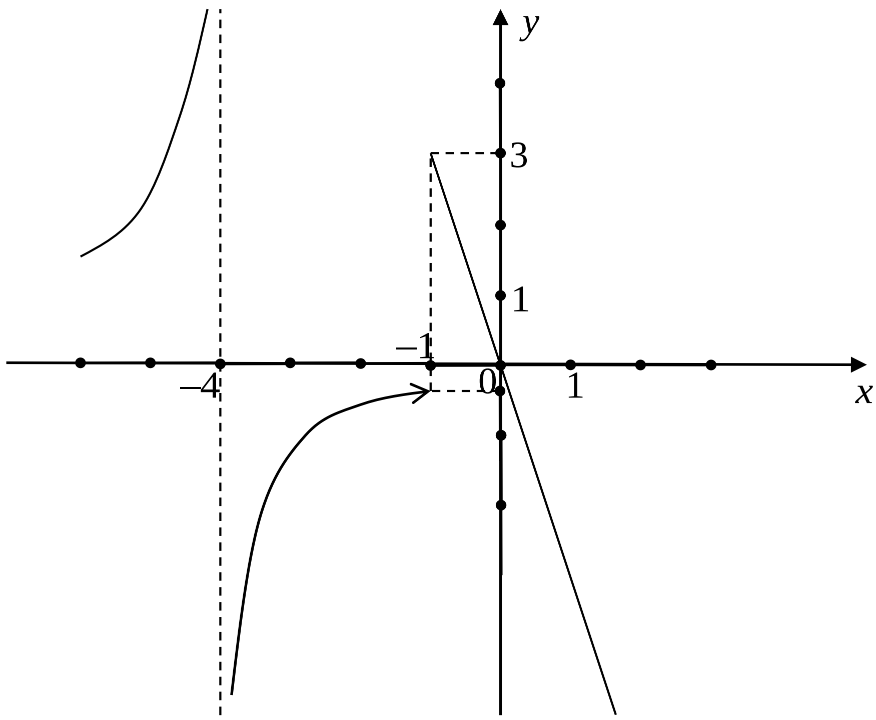
Следовательно, в точке $x_2 = -4$ функция терпит разрыв второго рода.

В точке $x_1 = -1$ функция меняет свое аналитическое задание, следовательно, в этой точке возможен разрыв. Найдем односторонние пределы:

$$f(-1-0) = \lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x}{x+4} = -\frac{1}{3},$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} (-3x) = 3, \; f(-1) = (-3x)\Big|_{x=-1} = 3.$$

Так как $f(-1-0) \neq f(-1+0)$, то точка $x_1 = -1$ является точкой разрыва первого рода.



Пример. Найти точки разрыва функции и определить их тип для функции $f(x) = sin\frac{1}{x}$.

Решение. Функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ определена для всех значений *x,* за исключением $x = 0$. Точка $x = 0$ есть точка разрыва II рода, так как при $x \to 0$ как справа, так и слева, функция $\sin\frac{1}{x}$, колеблясь между –1 и +1, не приближается ни к какому числовому значению. Другими словами, односторонние пределы не существуют.