ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 6. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть $f : L \to L$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве L.

Опр. 1. *Ненулевой* элемент $\overline{x} \in L$ $(\overline{x} \neq \overline{0})$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора $f : L \to L$, если существует такое число λ, что $f(\overline{x}) = \lambda \overline{x}$. Число λ называется ***собственным значением*** (***собственным числом***) линейного оператора f, соответствующим собственному вектору $\overline{x}$.

Иными словами, собственный вектор линейного оператора – это такой вектор, который при действии на него данного оператора лишь масштабируется с коэффициентом λ, а его ориентация остается неизменной.

Такое уникальное свойство собственных векторов линейных операторов используется в самых разных разделах математики и механики: при исследовании поверхностей второго порядка в геометрии, при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, при моделировании вращения твердого тела и малых колебаний механических систем, в квантовой механике и др.

Свойства собственных векторов

1. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

2. Если $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ – два собственных вектора линейного оператора f с одним и тем же собственным значением λ, то $\overline{x_1} + \overline{x_2}$ также является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением λ, т. е.

$$\begin{matrix} f(\overline{x_1}) = \lambda \overline{x_1} \\ f(\overline{x_2}) = \lambda \overline{x_2} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = \lambda(\overline{x_1} + \overline{x_2}).$$

3. Если $\overline{x}$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом λ, то любой вектор $\alpha\overline{x}$ (α – число) является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением λ, т. е.

$$f(\overline{x}) = \lambda\overline{x} \quad \Rightarrow \quad f(\alpha\overline{x}) = \lambda(\alpha\overline{x}).$$

Замечание. Из свойств 2, 3 следует, что *множество собственных векторов данного линейного оператора f, соответствующих одному и тому же собственному числу* λ, *вместе с нулевым элементом образуют линейное подпространство линейного пространства L.*

4. Собственные векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}$ линейного оператора f, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, линейно независимы.

Характеристический многочлен матрицы линейного оператора

Пусть $f: L \to L$ – линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве L. Зафиксируем некоторый базис $\mathcal{E}$ в пространстве L. Поскольку линейный оператор действует из L в L, логично рассматривать векторы и их образы в одном и том же базисе. Тогда матрица $A = A_f$ линейного преобразования состоит из столбцов координат образов базисных векторов в этом же базисе.

Если $\overline{x}$ – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом λ, матрица A – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}$, то $AX = \lambda X$, где X – столбец координат вектора $\overline{x}$ в базисе $\mathcal{E}$.

Опр. 2. Ненулевой столбец $X \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий $AX = \lambda X$ при некотором λ, называется ***собственным вектором*** матрицы A, соответствующим ***собственному значению*** λ.

Рассмотрим способ нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A (а следовательно, и оператора f).

Преобразуем соотношение $AX = \lambda X$, определяющее собственные векторы и собственные значения матрицы, следующим образом:

$$AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad AX = \lambda EX \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)X = O,$$

где E – единичная матрица n-го порядка, O – нулевой столбец из $\mathbb{R}^n$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда последнее матричное уравнение примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Это однородная система линейных алгебраических уравнений. Она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрица этой системы вырожденная, т. е. $\det(A - \lambda E) = 0$. Поэтому для нахождения собственных чисел матрицы A нужно решить уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Опр. 3. Уравнение (1) называется ***характеристическим уравнением*** матрицы A, а его корни называются ***характеристическими числами***, или ***собственными значениями*** матрицы A.

Левая часть характеристического уравнения (1) представляет собой многочлен n-й степени.

Опр. 4. Многочлен n-й степени, стоящий в левой части характеристического уравнения (1), называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A.

Характеристический многочлен имеет n корней, вообще говоря, комплексных, с учетом их кратности.

Замечание. Собственными значениями линейного оператора в *действительном* линейном пространстве являются только *действительные* корни характеристического уравнения.

Т 1. Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть A_f – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}$; A'_f – матрица линейного оператора f в базисе $\mathcal{E}'$; $T = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$. Тогда $A'_f = T^{-1}A_f T$.

Поскольку $E = T^{-1}ET$, то

$$A'_f - \lambda E = T^{-1}A_f T - \lambda T^{-1}ET = T^{-1}(A_f - \lambda E)T.$$

Следовательно,

$$\det(A'_f - \lambda E) = \det(T^{-1}(A_f - \lambda E)T) =$$
$$= \det T^{-1}\det(A_f - \lambda E)\det T = \det(A_f - \lambda E),$$

так как $\det T^{-1} = \dfrac{1}{\det T}$. ◁

Пример 1. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Собственные значения матрицы определяются из условия $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)-2=0;$$

$$6-5\lambda+\lambda^2-2=0;$$

$$\lambda^2-5\lambda+4=0.$$

Решая уравнение, получим собственные значения $\lambda_1=1; \lambda_2=4.$

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A-\lambda E)X=O,$ т. е.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, координаты собственного вектора $X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$ соответствующего собственному числу $\lambda_1=1,$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (2-1)x_1+2x_2=0, \\ x_1+(3-1)x_2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+2x_2=0, \\ x_1+2x_2=0, \end{cases}$$

т. е. $x_1=-2x_2.$ Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Аналогично найдем собственный вектор $X_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$ соответствующий собственному числу $\lambda_2=4,$ из системы

$$\begin{cases} (2-4)x_1+2x_2=0, \\ x_1+(3-4)x_2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1+2x_2=0, \\ x_1-x_2=0, \end{cases}$$

откуда $x_1=x_2.$ Поэтому с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: $\lambda_1 = 1,\ X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = 4,\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ •

Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

Поскольку работать с диагональной матрицей всегда легче, то базис, в котором матрица оператора принимает такой вид, является предпочтительным по сравнению с другими. Этот базис состоит из собственных векторов линейного оператора.

Т 2. Матрица линейного оператора имеет диагональный вид

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда каждый базисный вектор является собственным вектором этого линейного оператора.

В этом случае на главной диагонали матрицы стоят собственные числа:

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Опр. 5. Матрица A_f линейного оператора называется ***приводимой к диагональному виду***, если существует такая невырожденная матрица T (такое преобразование базиса), что матрица $B = T^{-1}A_f T$ является диагональной.

Т 3. Матрица A_f линейного оператора f приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис, состоящий из собственных векторов оператора f.

Замечание. Не каждый линейный оператор n-мерного линейного пространства имеет n линейно независимых собственных векторов, а следовательно, не всегда матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду.

Пример 2. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Собственные значения определим из условия $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)^2 = 0,$$

поэтому собственные значения матрицы равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A - \lambda E)X = O$, т. е., подставляя $\lambda = 1$, для собственного вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, причем в данном случае не существует двух линейно независимых собственных векторов. •

Утв. 1. 1) Если линейный оператор f, действующий в *действительном* линейном пространстве L, $\dim L = n$, имеет n различных действительных собственных значений, то существует базис пространства L из собственных векторов этого оператора, а следовательно, матрица A_f приводима к диагональному виду.

2) Если линейный оператор f, действующий в *комплексном* линейном пространстве L, $\dim L = n$, имеет n различных комплексных собственных значений, то существует базис пространства L из собственных векторов этого оператора, а следовательно, матрица A_f приводима к диагональному виду.

Замечание. Это условие является достаточным, но не является необходимым условием диагонализируемости матрицы линейного оператора. Матрица линейного оператора может быть приводима к диагональному виду и в том случае, когда среди собственных значений оператора есть совпадающие либо когда имеются комплексные корни характеристического уравнения матрицы линейного оператора, действующего в вещественном линейном пространстве.

Пример 3. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Собственные значения определим из условия $\det(A-\lambda E)=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0;$$

$$(-1-\lambda)((5-\lambda)(1-\lambda)+3)-3(-3+3\lambda-3)-(-9+15-3\lambda)=0;$$

$$(-1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)-3(3\lambda-6)-(6-3\lambda)=0;$$

$$-\lambda^2+6\lambda-8-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda-9\lambda+18-6+3\lambda=0;$$

$$-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0;$$

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0.$$

Заметим, что $\lambda_1=1$ является корнем этого уравнения. Разделим характеристический многочлен на $\lambda-1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\lambda^3 & -5\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \lambda-1 \\ \cline{5-5}
\lambda^3 & -\lambda^2 & & & \lambda^2-4\lambda+4 \\ \cline{1-2}
 & -4\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \\
 & -4\lambda^2 & +4\lambda & & \\ \cline{2-3}
 & & 4\lambda & -4 & \\
 & & 4\lambda & -4 & \\ \cline{3-4}
\end{array}$$

$$\overline{\qquad\qquad 0}$$

Таким образом, $(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+4)=0,$ откуда получим собственные значения матрицы: $\lambda_1=1; \lambda_2=\lambda_3=2.$

Собственные векторы удовлетворяют условию $(A-\lambda E)X=O,$ т. е., подставляя $\lambda=1,$ для собственного вектора $X_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ получим

$$\begin{pmatrix}-1-1 & 3 & -1\\ -3 & 5-1 & -1\\ -3 & 3 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x_1+3x_2-x_3=0,\\ -3x_1+4x_2-x_3=0,\\ -3x_1+3x_2=0.\end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 3 & -1 & 0\\ -3 & 4 & -1 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[I'=I-II]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ -3 & 4 & -1 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[\substack{II'=II+3\cdot I\\ III'=III+3\cdot I}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Равносильная система имеет вид

$$\begin{cases}x_1-x_2=0,\\ x_2-x_3=0,\\ 0=0,\end{cases}$$

т. е. $x_1=x_2=x_3.$ Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda=2.$ Их координаты удовлетворяют условию

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 3 & -1 \\ -3 & 5-2 & -1 \\ -3 & 3 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -3x_1+3x_2-x_3=0, \\ -3x_1+3x_2-x_3=0, \\ -3x_1+3x_2-x_3=0, \end{cases}$$

т. е. система равносильна одному уравнению $-3x_1+3x_2-x_3=0$. Полагая $x_1=c_1, x_2=c_2$, получим $x_3=-3c_1+3c_2$. Эти формулы при $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ задают все решения системы и, соответственно, все собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda=2$.

При $c_1=1, c_2=0$ получим собственный вектор $X_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; при $c_1=0, c_2=1$ получим собственный вектор $X_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Несложно видеть, что эти векторы линейно независимы.

Таким образом, собственные векторы X_1, X_2, X_3 линейно независимы, а следовательно, преобразование, задаваемое матрицей A, диагонализируемо, его матрица в базисе $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1=1,\ X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2=2,\ X_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $X_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. •

§ 7. Евклидово пространство

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Евкли́д

(др.-греч. Εὐκλείδης)

(III в. до н. э.)

древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике.

Трактат Евклида «Начала» состоит из 13 книг, Евклид включил в него многое из того, что было создано его предшественниками, обработав этот материал и сведя его воедино. «Начала» Евклида оставались основным учебником по математике в течение более чем двух тысячелетий.

Евклид жил во времена царя Птолемея I, который покровительствовал наукам. Одна из легенд рассказывает, что, решив изучить геометрию, Птолемей спросил Евклида, нет ли более короткого пути изучения, чем «Начала», на что Евклид ответил: «К геометрии нет царской дороги».

Опр. 1. ***Евклидовым пространством*** называется *действительное* линейное пространство L, в котором определена операция скалярного умножения элементов: каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y} \in L$ ставится в соответствие *действительное* число $(\overline{x}, \overline{y})$, которое называется ***скалярным произведением*** элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, причем эта операция удовлетворяет следующим 4 аксиомам: для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$;
2) $(\overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$;
3) $(\alpha\overline{x}, \overline{z}) = \alpha(\overline{x}, \overline{z})$;
4) $(\overline{x}, \overline{x}) \geq 0$, причем $(\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

Пример 1. Евклидовым пространством является множество $\mathcal{V}_3$ свободных векторов в пространстве (или множество $\mathcal{V}_2$ свободных векторов на плоскости) с обычным определением скалярного произведения. •

Пример 2. Евклидовым пространством является пространство $\mathbb{R}^n$, в котором скалярное произведение элементов задается формулой

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

где $\overline{x}=(x_1; x_2; ...; x_n)$, $\overline{y}=(y_1; y_2; ...; y_n)$.

Можно показать, что в этом случае все 4 аксиомы скалярного произведения, указанные в определении 1, выполняются.•

Замечание. В матричной форме записи скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$ находится по формуле $(\overline{x}, \overline{y}) = X^T Y$, где X, Y – столбцы координат элементов $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно.

Упражнение 1. Показать, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ (которое можно трактовать как множество векторов на плоскости) операция

$$\overline{x} \circ \overline{y} = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

удовлетворяет всем четырем аксиомам скалярного произведения.

Опр. 2. Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ евклидова пространства называются ***ортогональными***, если $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.

Замечание. Считается, что нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Т 1. Если ненулевые векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_k}$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

Доказательство. Докажем теорему *методом от противного*. Допустим, векторы линейно зависимы. Тогда существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные 0, что

$$\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + ... + \alpha_k \overline{e_k} = \overline{0}.$$

Умножив это равенство скалярно на $\overline{e_1}$, получим

$$(\overline{e_1}, \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + ... + \alpha_k \overline{e_k}) = (\overline{e_1}, \overline{0}) = 0.$$

С другой стороны, в силу свойств скалярного произведения и ортогональности векторов,

$$(\overline{e_1}, \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + ... + \alpha_n \overline{e_n}) = \alpha_1 (\overline{e_1}, \overline{e_1}) + \alpha_2 (\overline{e_1}, \overline{e_2}) + ... + \alpha_k (\overline{e_1}, \overline{e_k}) =$$
$$= \alpha_1 (\overline{e_1}, \overline{e_1}) + 0 + ... + 0 = \alpha_1 (\overline{e_1}, \overline{e_1}),$$

откуда $\alpha_1 (\overline{e_1}, \overline{e_1}) = 0$, а значит, $\alpha_1 = 0$.

Аналогично доказывается, что $\alpha_2 = 0; ...; \alpha_k = 0$.

Таким образом, предположив, что векторы линейно зависимы, пришли к противоречию. Значит, векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_k$ линейно независимы. ◁

Опр. 3. ***Нормой*** вектора $\bar{x}$ евклидова пространства называется *положительное* число $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$.

Пример 1 (продолжение). Для обычных векторов в трехмерном пространстве норма совпадает с длиной вектора. •

Свойства нормы вектора.

1. $\|\bar{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \bar{0}.$

2. $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha| \|\bar{x}\|$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $(\bar{x}, \bar{y}) \le \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$ (***неравенство Коши – Буняковского***).

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Виктор Яковлевич Буняко́вский

(1804–1889)

русский математик, педагог, историк математики, вице-президент академии наук в 1864–1889 гг. Был почетным членом всех русских университетов: Московского, Санкт-Петербургского, Казанского, Харьковского, Киевского, Новороссийского, многих иностранных и русских ученых обществ.

Начало всемирной известности Буняковского положил появившийся в 1846 г. обширный трактат «Основания математической теории вероятностей», в котором впервые было сведено вместе все, что было выработано по этой теории трудами известных математиков, начиная с Паскаля и Ферма, даны объяснения новых решений самых трудных и запутанных вопросов, указано много практических приложений теории вероятностей, а также приведена история возникновения и развития теории вероятностей.

Все работы Буняковского, ставящие его в число величайших европейских математиков, помимо ценности в научном отношении – по богатству, новизне и оригинальной разработке научно-математических материалов, – отличаются замечательной ясностью и изяществом изложения. Многие из них переведены на иностранные языки.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Доказательство. Рассмотрим вектор $\overline{x}+t\overline{y}$, где t – произвольное действительное число. В силу аксиомы 4, скалярное произведение

$$(\overline{x}+t\overline{y}, \overline{x}+t\overline{y}) \geq 0.$$

Пользуясь аксиомами, перепишем это скалярное произведение в виде

$$(\overline{x}+t\overline{y}, \overline{x}+t\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{x}) + 2t(\overline{x}, \overline{y}) + t^2(\overline{y}, \overline{y}).$$

Таким образом, относительно переменной t получили квадратичное неравенство

$$t^2(\overline{y}, \overline{y}) + 2t(\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{x}, \overline{x}) \geq 0,$$

$$t^2\|\overline{y}\|^2 + 2t(\overline{x}, \overline{y}) + \|\overline{x}\|^2 \geq 0,$$

которое имеет место при любом t. Это означает, что дискриминант квадратного трехчлена меньше или равен нулю, т. е.

$$D = 4(\overline{x}, \overline{y})^2 - 4\|\overline{y}\|^2\|\overline{x}\|^2 \leq 0,$$

откуда получаем доказываемое неравенство. ◃

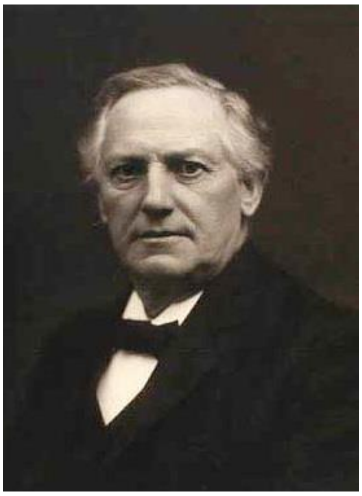
4. $\|\overline{x}+\overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ (***неравенство треугольника***).

Опр. 4. Если $\|\overline{x}\| = 1$, то вектор $\overline{x}$ называется ***нормированным***.

Опр. 5. Система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$ называется ***ортонормированной***, если все ее векторы нормированы и попарно ортогональны.

Т 2. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта



Йёрген Педерсен Грам
(дат. *Jørgen Pedersen Gram*)
(1850–1916)

датский математик. Основные направления исследований – математическая статистика, теория чисел, линейная алгебра.
Работал математиком в страховом обществе; был председателем датского страхового совета. Наряду с прикладными статистическими исследованиями внес заметный вклад в фундаментальную математику.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Эрхард Шмидт
(нем. *Erhard Schmidt*)
(1876–1959)

немецкий математик, с 1917 г. профессор Берлинского университета. В 1946–58 гг. первый директор Института математики АН ГДР. Основные труды по теории функций, интегральным уравнениям, функциональному анализу.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта используется для построения в евклидовом пространстве ортонормированного базиса на основании произвольного базиса этого пространства.

Пусть $\mathcal{F}=\left\{\overline{f_1};\,\overline{f_2};\,...;\,\overline{f_n}\right\}$ – исходный базис n-мерного евклидова пространства. Ортонормированный базис $\mathcal{E}=\left\{\overline{e_1};\,\overline{e_2};\,...;\,\overline{e_n}\right\}$ получается с помощью следующей процедуры:

1) $\overline{e_1}=\dfrac{\overline{f_1}}{\left\|\overline{f_1}\right\|}$;

2) $\overline{g_2} = \overline{f_2} - (\overline{f_2}, \overline{e_1})\overline{e_1};\ \overline{e_2} = \dfrac{\overline{g_2}}{\|\overline{g_2}\|};$

3) $\overline{g_3} = \overline{f_3} - (\overline{f_3}, \overline{e_1})\overline{e_1} - (\overline{f_3}, \overline{e_2})\overline{e_2};\ \overline{e_3} = \dfrac{\overline{g_3}}{\|\overline{g_3}\|};$

…;

n) $\overline{g_n} = \overline{f_n} - (\overline{f_n}, \overline{e_1})\overline{e_1} - (\overline{f_n}, \overline{e_2})\overline{e_2} - ... - (\overline{f_n}, \overline{e_{n-1}})\overline{e_{n-1}};\ \overline{e_n} = \dfrac{\overline{g_n}}{\|\overline{g_n}\|}.$

Пример 3. В евклидовом пространстве $\mathcal{V}_3$ трехмерных векторов применим процесс ортогонализации Грама – Шмидта к базису $\overline{f_1} = \{1; -2; 2\}$; $\overline{f_2} = \{-1; 0; -1\}$; $\overline{f_3} = \{5; -3; -7\}$.

Решение. 1. Найдем норму вектора $\overline{f_1}$ и вектор $\overline{e_1} = \dfrac{\overline{f_1}}{\|\overline{f_1}\|}$:

$$\|\overline{f_1}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3; \qquad \overline{e_1} = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}.$$

2. Чтобы найти вектор $\overline{g_2} = \overline{f_2} - (\overline{f_2}, \overline{e_1})\overline{e_1}$, спроектируем вектор $\overline{f_2}$ на вектор $\overline{e_1}$ и отнимем полученную проекцию от $\overline{f_2}$.

Поскольку $(\overline{f_2}, \overline{e_1}) = -\dfrac{1}{3} + 0 - \dfrac{2}{3} = -1,$ то

$$\overline{g_2} = \overline{f_2} + \overline{e_1} = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}; \|\overline{g_2}\| = 1; \overline{e_2} = \frac{\overline{g_2}}{\|\overline{g_2}\|} = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}.$$

3. Вектор $\overline{g_3} = \overline{f_3} - (\overline{f_3}, \overline{e_1})\overline{e_1} - (\overline{f_3}, \overline{e_2})\overline{e_2}$ равен разности вектора $\overline{f_3}$ и векторов, полученных при его проектировании на $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$.

Вычисляя $\quad (\overline{f_3}, \overline{e_1}) = \dfrac{5}{3} + \dfrac{6}{3} - \dfrac{14}{3} = -1; \quad (\overline{f_3}, \overline{e_2}) = -\dfrac{10}{3} + \dfrac{6}{3} + \dfrac{7}{3} = 1,$ имеем

$$\overline{g_3} = \overline{f_3} + \overline{e_1} - \overline{e_2} = \left\{5 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}; -3 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}; -7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right\} = \{6; -3; -6\};$$

$$\|\overline{g_3}\| = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9; \overline{e_3} = \frac{\overline{g_3}}{\|\overline{g_3}\|} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}.$$

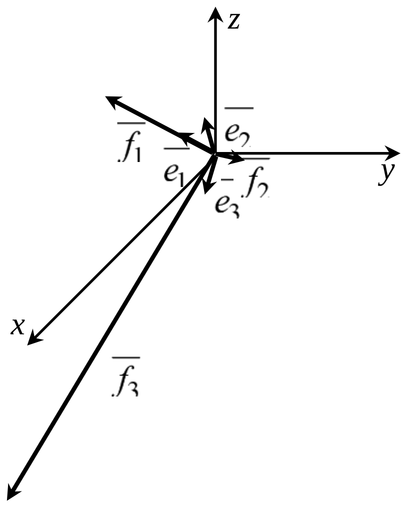


Рис. 2. Построение ортонормированного базиса

Таким образом, векторы $\overline{e_1}=\left\{\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$; $\overline{e_2}=\left\{-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right\}$; $\overline{e_3}=\left\{\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве. ●

Координаты вектора евклидова пространства в ортонормированном базисе

Пусть $\{\overline{e_1},\overline{e_2},...,\overline{e_n}\}$ – *ортонормированный базис* в n-мерном евклидовом пространстве, $\overline{x}=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе, т. е.

$$\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+...+x_n\overline{e_n}.$$

Умножая обе части равенства скалярно на $\overline{e_1}$, получим

$$(\overline{x},\overline{e_1})=x_1(\overline{e_1},\overline{e_1})+x_2(\overline{e_2},\overline{e_1})+...+x_n(\overline{e_n},\overline{e_1})=$$

$$=x_1\cdot 1+x_2\cdot 0+...+x_n\cdot 0=x_1.$$

Аналогично, $(\overline{x},\overline{e_2})=x_2;...;(\overline{x},\overline{e_n})=x_n$.

Таким образом, *координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям вектора на базисные векторы*.

Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе

Пусть даны $\overline{x}=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\overline{y}=\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ – координаты векторов $\overline{x}, \overline{y}$ в *ортонормированном базисе* $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\}$. Тогда

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Замечание 1. В матричном виде $(\overline{x}, \overline{y}) = X^T Y$, где X, Y – столбцы координат элементов $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно.

Замечание 2. В произвольном базисе $\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, ..., \overline{f_n}\}$ эти формулы имеют более сложный вид. Если $\overline{x} = x_1\overline{f_1} + x_2\overline{f_2} + ... + x_n\overline{f_n}$, $\overline{y} = y_1\overline{f_1} + y_2\overline{f_2} + ... + y_n\overline{f_n}$, то

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\overline{f_i}, \overline{f_j}).$$

Комплексное евклидово пространство

Опр. 6. ***Комплексным евклидовым*** (или ***унитарным***) ***пространством*** называется *комплексное* линейное пространство L, в котором определена операция скалярного умножения элементов: каждой паре элементов $\overline{x}, \overline{y} \in L$ ставится в соответствие *комплексное* число $(\overline{x}, \overline{y})$, которое называется ***скалярным произведением*** элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, причем эта операция удовлетворяет следующим 4 аксиомам: для любых $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in L$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}$

1) $(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{(\overline{y}, \overline{x})}$;
2) $(\overline{x}+\overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$;
3) $(\alpha\overline{x}, \overline{z}) = \alpha(\overline{x}, \overline{z})$;
4) $(\overline{x}, \overline{x}) \geq 0$, причем $(\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

Замечание. $(\overline{x}, \overline{x}) \in \mathbb{R}$.

Все определения и результаты, сформулированные для евклидова пространства, остаются справедливыми и для комплексного евклидова пространства.

§ 8. Ортогональные и самосопряженные (симметрические) операторы в евклидовом пространстве

Ортогональные операторы

Пусть L – евклидово пространство.

Опр. 1. Линейный оператор $f : L \to L$ называется ***ортогональным***, если он сохраняет скалярное произведение элементов евклидова пространства L, т. е. если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in L$ выполняется равенство

$$(f(\bar{x}),\ f(\bar{y})) = (\bar{x},\ \bar{y}).$$

Из определения легко следует, что ортогональный оператор сохраняет норму элементов евклидова пространства, поскольку

$$\|f(\bar{x})\| = \sqrt{(f(\bar{x}),\ f(\bar{x}))} = \sqrt{(\bar{x},\ \bar{x})} = \|\bar{x}\|.$$

Верно и обратное, поэтому имеет место следующее утверждение.

Утв. 1. Линейный оператор $f : L \to L$ является ортогональным тогда и только тогда, когда он сохраняет норму элементов евклидова пространства L, т. е. если для любых $\bar{x} \in L$ выполняется равенство $\|f(\bar{x})\| = \|\bar{x}\|$.

Доказательство. Докажем, что если линейный оператор $f : L \to L$ сохраняет норму, то он является ортогональным оператором. Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in L$. В силу определения нормы и свойств скалярного произведения в евклидовом пространстве,

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y},\ \bar{x}+\bar{y}) = (\bar{x},\ \bar{x}) + 2(\bar{x},\ \bar{y}) + (\bar{y},\ \bar{y}) = \|\bar{x}\|^2 + 2(\bar{x},\ \bar{y}) + \|\bar{y}\|^2,$$

откуда

$$(\bar{x},\ \bar{y}) = \frac{1}{2}\left(\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 - \|\bar{x}\|^2 - \|\bar{y}\|^2\right).$$

Следовательно, если оператор f сохраняет норму элементов евклидова пространства L, т. е. $\|f(\overline{x})\| = \|\overline{x}\|$, $\|f(\overline{y})\| = \|\overline{y}\|$, $\|f(\overline{x}+\overline{y})\| = \|\overline{x}+\overline{y}\|$, то $(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = (\overline{x}, \overline{y})$. ◁

Утверждение 1 позволяет привести примеры ортогональных операторов.

Пример 1. В пространствах $\mathcal{V}_2$ и $\mathcal{V}_3$ (в евклидовых пространствах свободных векторов на плоскости и в пространстве) ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние.

Например, ортогональными являются: оператор поворота вектора на фиксированный угол; оператор симметрии относительно прямой на плоскости или относительно плоскости в пространстве.•

Кроме того, ортогональный оператор сохраняет ортогональность элементов евклидова пространства, поскольку если $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, то $(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = 0$.

Таким образом, ортогональный оператор переводит любой *ортонормированный базис* евклидова пространства L в *ортонормированный базис* этого пространства. Верно и обратное утверждение.

Т 1. Линейный оператор $f: L \to L$, действующий в евклидовом пространстве, является ортогональным тогда и только тогда, когда он переводит ортонормированный базис евклидова пространства L в ортонормированный базис этого пространства.

Доказательство. Докажем, что если $\mathcal{E} = \left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – ортонормированный базис евклидова пространства L и линейный оператор f переводит его в ортонормированный базис $\mathcal{E}' = \left\{\overline{e_1'}; \overline{e_2'}; ...; \overline{e_n'}\right\}$, где $\overline{e_1'} = f(\overline{e_1}); \overline{e_2'} = f(\overline{e_2}); ...; \overline{e_n'} = f(\overline{e_n})$, то оператор f – ортогональный, т. е. для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L$ выполняется равенство $(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = (\overline{x}, \overline{y})$.

Напомним, что если даны координаты векторов $\overline{x}, \overline{y}$ в ортонормированном базисе $\mathcal{E}$: $\overline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\overline{y} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, т. е. $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + ... + x_n\overline{e_n}$ и $\overline{y} = y_1\overline{e_1} + y_2\overline{e_2} + ... + y_n\overline{e_n}$, то

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

В силу линейности оператора f получим

$$f(\overline{x}) = x_1 f(\overline{e_1}) + x_2 f(\overline{e_2}) + \ldots + x_n f(\overline{e_n}) = x_1 \overline{e_1'} + x_2 \overline{e_2'} + \ldots + x_n \overline{e_n'};$$

$$f(\overline{y}) = y_1 f(\overline{e_1}) + y_2 f(\overline{e_2}) + \ldots + y_n f(\overline{e_n}) = y_1 \overline{e_1'} + y_2 \overline{e_2'} + \ldots + y_n \overline{e_n'},$$

т. е. координаты образов элементов $\overline{x}, \overline{y}$ в базисе $\mathcal{E}'$ совпадают с координатами исходных элементов $\overline{x}, \overline{y}$ в базисе $\mathcal{E}$. А значит,

$$(f(\overline{x}),\ f(\overline{y})) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = (\overline{x}, \overline{y}),$$

что означает, что оператор f является ортогональным. ◃

Пусть A_f – матрица ортогонального оператора f в ортонормированном базисе $\mathcal{E}$. Напомним, что если X, Y – столбцы координат элементов $\overline{x}, \overline{y}$ соответственно в ортонормированном базисе $\mathcal{E}$, то $(\overline{x}, \overline{y}) = X^T Y$. Тогда

$$(f(\overline{x}),\ f(\overline{y})) = (A_f X)^T A_f Y = X^T A_f^T A_f Y.$$

Поскольку для ортогонального оператора f равенство $(f(\overline{x}),\ f(\overline{y})) = (\overline{x}, \overline{y})$ выполняется для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L$, то $A_f^T A_f = E$.

Опр. 2. Матрица A называется ***ортогональной***, если $A^T A = E$.

Свойства ортогональных матриц.

1. Если A – ортогональной матрица, то $A^{-1} = A^T$.

2. Если A – ортогональной матрица, то $\det A = \pm 1$.

Пример 2. Примерами ортогональных матриц являются:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,6 & -0,8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \bullet$$

Т 2. Линейный оператор f является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе является ортогональной.

Следствие. Если $T = T_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ – матрица перехода от одного *ортонормированного* базиса к другому *ортонормированному* базису, то она является ортогональной матрицей.

Самосопряженные (симметрические) операторы

Опр. 3. Линейный оператор $f: L \to L$ называется ***самосопряженным (симметрическим)***, если для любых $\overline{x}, \overline{y} \in L$

$$(f(\overline{x}), \overline{y}) = (\overline{x}, f(\overline{y})).$$

Упражнение 1. Проверить, что в пространстве $\mathcal{V}_3$ являются симметрическими:

1) $f(\overline{x}) = \lambda \overline{x}$ (где $\lambda \in \mathbb{R}$ – фиксированное число) – оператор растяжения в λ раз;

2) $f(\overline{x}) = (\overline{x}, \overline{e})\overline{e}$ (где $\overline{e}, \|\overline{e}\| = 1,$ – фиксированный вектор) – оператор проектирования на направление вектора $\overline{e}$. •

Опр. 4. Матрица A называется ***симметрической***, если $A^T = A$, т. е. она симметрична относительно главной диагонали.

Т 3. Линейный оператор f является самосопряженным (симметрическим) тогда и только тогда, когда в любом *ортонормированном* базисе его матрица является симметрической.

Утв. 2. Все собственные значения *симметрической* матрицы с действительными элементами являются действительными числами.

Утв. 3. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Т 4. Если f – самосопряженный линейный оператор в евклидовом пространстве L, то в евклидовом пространстве L существует ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора f.

Следствие. Матрица A_f самосопряженного линейного оператора в евклидовом пространстве приводима к диагональному виду.

§ 9. Квадратичные формы

Опр. 1. ***Квадратичной формой от*** n ***действительных переменных*** $x_1, x_2, ..., x_n$ называется сумма вида

$$q(x_1; x_2; ...; x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

т. е.

$$q(x_1; x_2; ...; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n +$$

$$+a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2, \quad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} квадратичной формы – некоторые действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Таким образом, квадратичная форма может быть также записана в виде

$$q(x_1; x_2; ...; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 +$$
$$+2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... + 2a_{n-1;\,n}x_{n-1}x_n.$$

Заметим, что к изучению квадратичных форм от двух и трех переменных приводит задача об определении формы кривых и поверхностей 2-го порядка. Первоначально теория квадратичных форм возникла именно из этих задач, но впоследствии нашла многочисленные применения в математике и ее приложениях.

Опр. 2. ***Матрицей квадратичной формы*** называется матрица, составленная из ее коэффициентов, а именно, квадратичной форме (1) соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что эта матрица является симметрической, так как $a_{ij} = a_{ji}$.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие: каждой квадратичной форме соответствует симметрическая матрица.

В матричном виде квадратичная форма (1) может быть записана как

$$q(X) = X^T AX, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пусть X – столбец координат вектора $\overline{x}$ в некотором *ортонормированном* базисе $\mathcal{E}$, $f : L \to L$ – линейный (самосопряженный) оператор, действующий в евклидовом пространстве L и имеющий в базисе $\mathcal{E}$ матрицу A, тогда запись (1) равносильна

$$q(\overline{x}) = (\overline{x},\ f(\overline{x})),$$

т. е. значение квадратичной формы на векторе $\overline{x}$ равно скалярному произведению вектора $\overline{x}$ и его образа при отображении f.

Пусть $T = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$, X и X' – столбцы координат вектора $\overline{x}$ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ соответственно, тогда, в силу теоремы 5 §3, $X = TX'$, а следовательно, в новых переменных квадратичная форма будет иметь вид

$$q(X) = X^T AX = (TX')^T A(TX') = (X')^T T^T ATX' = q_1(X'),$$

т. е. в новых переменных получается квадратичная форма с матрицей

$$A' = T^T AT.$$

Заметим, что поскольку T – матрица перехода от базиса к базису, то это матрица невырожденного линейного преобразования, а значит $\det T \neq 0$.

Более того, если T – матрица перехода от одного *ортонормированного* базиса к другому *ортонормированному* базису, то она является ортогональной матрицей, а значит, $T^{-1} = T^T$ и

$$A' = T^{-1} AT.$$

Таким образом, *матрица квадратичной формы при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису преобразуется как матрица линейного самосопряженного оператора.*

Как следует из теоремы 4 §8, матрицу линейного самосопряженного оператора, а значит, и матрицу A квадратичной формы можно привести к диагональному виду

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A.

Таким образом, любую квадратичную форму можно привести к виду

$$q_1(x_1'; x_2'; \dots; x_n') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2. \qquad (2)$$

Опр. 3. Если квадратичная форма записана в виде (2), то говорят, что она приведена к ***каноническому виду***.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду

Чтобы определить преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Записать матрицу квадратичной формы и найти собственные значения этой матрицы.

2. Найти собственные векторы матрицы квадратичной формы и нормировать их.

Опр. 4. Направления собственных векторов называются ***главными направлениями*** квадратичной формы.

Замечание. Если среди собственных значений матрицы есть совпадающие, необходимо выбирать соответствующие собственные векторы так, чтобы они были *ортонормированы*.

3. Записать матрицу T, составив ее из полученных нормированных векторов-столбцов.

4. Записать искомое преобразование переменных по формуле $X = TX'$.

Пример 1. Определим преобразование координат, приводящее квадратичную форму

$$q(x_1; x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

к каноническому виду; запишем канонический вид квадратичной формы.

Решение. 1. Запишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы из условия $\det(A - \lambda E) = 0,$ т. е.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(3-\lambda)^2 - 25 = 0;$$

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = 0;$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0.$$

Решая уравнение, получим собственные значения $\lambda_1 = 8; \lambda_2 = -2.$

2. Найдем собственные векторы из условия $(A - \lambda E)X = O,$ т. е.

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, координаты собственного вектора $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$ соответствующего собственному числу $\lambda_1 = 8,$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (3-8)x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + (3-8)x_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. $x_1 = x_2$. Таким образом, с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Норма этого вектора равна $\|X_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, поэтому нормированный собственный вектор найдем как $\overline{e_1} = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Аналогично найдем собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = -2$, из системы

$$\begin{cases} (3+2)x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + (3+2)x_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -x_2$. Поэтому с точностью до числового множителя собственный вектор имеет вид $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Вычисляя норму этого вектора $\|X_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, получим нормированный собственный вектор $\overline{e_2} = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

3. Матрица перехода к новому ортонормированному базису будет иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

4. Связь между новыми и старыми координатами задается формулой $X = TX'$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ – столбцы координат старом и новом базисах соответственно, откуда получим преобразование координат, приводящее квадратичную форму к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2', \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2', \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}, \\ x_2 = \dfrac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

5. Подставим полученные формулы в исходную квадратичную форму и приведем ее к каноническому виду:

$$q(x_1; x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2;$$

$$q_1(x_1'; x_2') = 3\left(\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 10\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}} + 3\left(\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 3\frac{(x_1')^2 - 2x_1'x_2' + (x_2')^2}{2} + 10\frac{(x_1')^2 - (x_2')^2}{2} + 3\frac{(x_1')^2 + 2x_1'x_2' + (x_2')^2}{2} =$$

$$= 3(x_1')^2 + 3(x_2')^2 + 5(x_1')^2 - 5(x_2')^2 = 8(x_1')^2 - 2(x_2')^2.$$

Заметим, что для записи канонического вида квадратичной формы достаточно знать собственные значения матрицы квадратичной формы:

$$q_1(x_1'; x_2') = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 = 8(x_1')^2 - 2(x_2')^2. \bullet$$

Пример 2. Построим линию, которую задает уравнение

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = -8.$$

Решение. Из примера 1 следует, что заданное уравнение равносильно уравнению

$$8(x_1')^2 - 2(x_2')^2 = -8,$$

где x_1', x_2' – координаты точки в базисе

$$\overline{e_1} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}; \quad \overline{e_2} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Разделив обе части уравнения на -8, получим

$$-\frac{(x_1')^2}{1} + \frac{(x_2')^2}{4} = 1.$$

Это уравнение гиперболы с полуосями $a = 1, b = 2,$ действительной осью которой является Ox_2' (см. рис. 3).

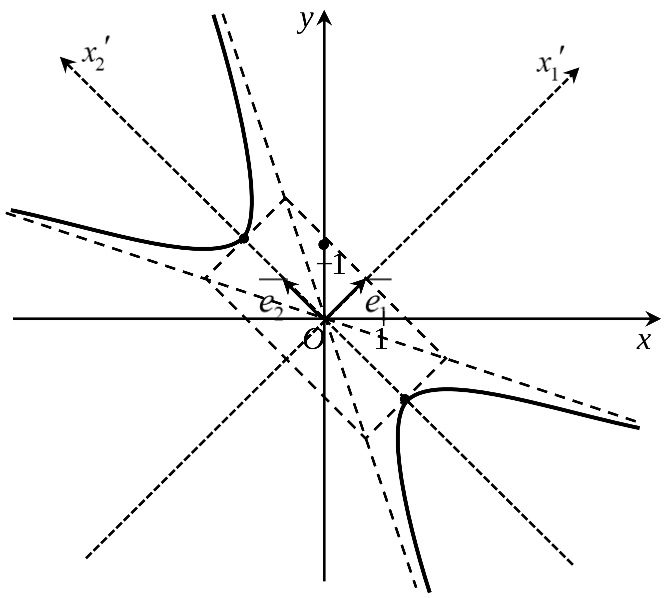


Рис. 3. Гипербола $-\frac{(x_1')^2}{1} + \frac{(x_2')^2}{4} = 1$

•

Пример 3. Построим линию, которую задает уравнение

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Решение. В примере 1 показано, что квадратичная форма $3x^2 + 10xy + 3y^2$ диагонализируется с помощью преобразования

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}, \\ y = \dfrac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

которое сводится к повороту системы координат. Поэтому заданное уравнение равносильно уравнению

$$3\left(\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 10\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}} + 3\left(\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 -$$

$$-2\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}} - 14\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}} - 13 = 0,$$

или

$$8(x_1')^2 - 2(x_2')^2 - 8\sqrt{2}x_1' - 6\sqrt{2}x_2' - 13 = 0.$$

Выделяя полный квадрат по каждой из переменных, получим

$$8((x_1')^2 - \sqrt{2}x_1') - 2((x_2')^2 + 3\sqrt{2}x_2') - 13 = 0;$$

$$8\left((x_1')^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x_1' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 4 -$$

$$-2\left((x_2')^2 + 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}x_2' + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + 9 - 13 = 0;$$

$$8\left(x_1' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(x_2' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8.$$

Введем замену переменных

$$\begin{cases} X = x_1' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = x_2' + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

которая задает преобразование параллельного переноса новой системы координат $Ox_1'x_2'$. (Началом системы координат O_1XY является точка $x_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2' = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.)

Перейдя к новым переменным и разделив обе части уравнения на 8, получим в системе координат O_1XY каноническое уравнение кривой 2-го порядка

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1,$$

а именно, уравнение гиперболы с полуосями $a = 1, b = 2,$ действительной осью которой является O_1X (см. рис. 4).

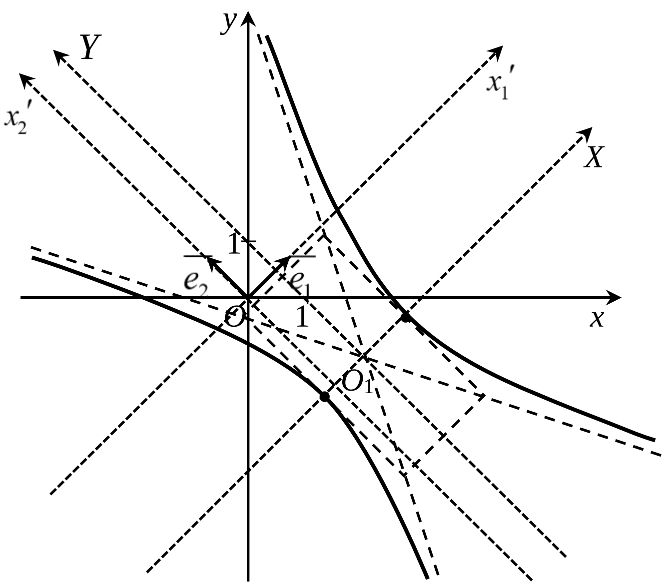


Рис. 4. Гипербола $\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1$

Запишем преобразование, с помощью которого исходное уравнение кривой 2-го порядка приводится к каноническому виду. Поскольку

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1' - x_2'}{\sqrt{2}}, \\ y = \dfrac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \dfrac{x + y}{\sqrt{2}}, \\ x_2' = \dfrac{y - x}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} X = x_1' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ Y = x_2' + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{x + y - 1}{\sqrt{2}}, \\ Y = \dfrac{y - x + 3}{\sqrt{2}}. \end{cases} \bullet$$

Упражнение 1. Определить вид поверхности $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 18$.

Знакоопределенные квадратичные формы

Пусть $\bar{x} = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$.

Опр. 5. Квадратичная форма $q(\bar{x})$ называется:

- ***положительно определенной***, если $q(\bar{x}) > 0$ для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$;

- ***отрицательно определенной***, если $q(\bar{x}) < 0$ для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$;

- ***положительно полуопределенной***, если $q(\bar{x}) \geq 0$ для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$;

- ***отрицательно полуопределенной***, если $q(\bar{x}) \leq 0$ для всех $\bar{x} \neq \bar{0}$;

- ***знаконеопределенной***, если существуют такие $\bar{x}$ и $\bar{y}$ что $q(\bar{x}) > 0$ и $q(\bar{y}) < 0$.

Замечание. Несложно видеть, что знакоопределенность квадратичной формы фактически означает постоянство знаков собственных значений ее матрицы.

Если квадратичная форма	то собственные значения ее матрицы
положительно определена,	все положительны;
отрицательно определена,	все отрицательны;
положительно полуопределена,	все неотрицательны;
отрицательно полуопределена,	все неположительны.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы $q(\overline{x})$.

Опр. 6. ***Главными минорами квадратичной формы*** $q(\overline{x})$ называются миноры матрицы A, стоящие в левом верхнем углу:

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad \Delta_n = \det A.$$

По знакам главных миноров квадратичной формы можно легко проверить знакоопределенность квадратичной формы с помощью критерия Сильвестра.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Джеймс Джо́зеф Сильве́стр
(англ. *James Joseph* Sylvester)
(1814–1897)
известный английский математик.
Известен своими работами в теории матриц, теории чисел и комбинаторике.
В 1878 г. он основал «Американский математический журнал» (*American Journal of Mathematics*) – второй в то время в США.
Лондонское королевское общество учредило бронзовую Медаль Сильвестра, которая вручается с 1901 г. за выдающиеся заслуги в математике.

Т 1 [критерий Сильвестра]. 1) Квадратичная форма $q(\bar{x})$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны;

2) квадратичная форма $q(\bar{x})$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда ее главные миноры нечетного порядка отрицательны, а четного – положительны.

Пример 4. Проверим знакоопределенность квадратичной формы

$$q(x;\, y;\, z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz.$$

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее главные миноры и определим их знаки:

$$\Delta_1 = 6 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 4 = 26 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 210 + 0 + 0 - 20 - 28 - 0 = 162 > 0.$$

Итак, все главные миноры квадратичной формы положительны. Следовательно, в силу критерия Сильвестра делаем вывод, что квадратичная форма $q(x;\, y;\, z)$ положительно определена, т. е. $q(x;\, y;\, z) > 0,$ если значение хотя бы одной из переменных x, y, z не равно 0.•

Замечание. Из примера 4 следует, что все собственные числа матрицы данной квадратичной формы строго положительны, а значит уравнение поверхности $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 18$ (см. упражнение 1) приводится к виду $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = 18,$ где все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ строго положительны, а значит, это уравнение задает в пространстве эллипсоид.