НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Исследовать на непрерывность в точке $x=1$ следующие функции: 1) $y=\dfrac{3}{x-1}$; 2) $y=\begin{cases} x-2, & \text{если } x<1, \\ x^2, & \text{если } x\geq 1; \end{cases}$ 3) $y=x^2-5$.

Решение

1) Функция $y=\dfrac{3}{x-1}$ определена в окрестности точки $x=1$, но в самой точке $x=1$ она не определена, следовательно, в этой точке она не является непрерывной (не выполнено первое условие непрерывности). Поскольку

$$y(1-0)=\lim_{x\to 1-0} y(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{3}{x-1}=-\infty,$$

$$y(1+0)=\lim_{x\to 1+0} y(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{3}{x-1}=+\infty,$$

т.е. односторонние пределы функции в точке $x=1$ равны бесконечности, то точка $x=1$ является точкой бесконечного разрыва этой функции.

2) В точке $x=1$ функция $y=\begin{cases} x-2, & \text{если } x<1, \\ x^2, & \text{если } x\geq 1; \end{cases}$ определена ($f(1)=1^2=1$), т. е. первое условие непрерывности выполнено; второе условие также выполняется:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x-2)=-1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} f(x)==\lim_{x\to 1-0} x^2=1=f(1);$$

третье условие непрерывности не выполняется, т. к. $f(1-0)\neq f(1+0)$. Следовательно, данная функция не является непрерывной в точке $x=1$ (однако функция непрерывна в точке $x=1$ справа). Так как односторонние пределы данной функции в точке $x=1$ существуют и конечны, то точка $x=1$ является для этой функции точкой разрыва 1-го рода; а поскольку конечные односторонние пределы не равны между собой, то это точка неустранимого разрыва.

3) Функция $y=x^2-5$ является непрерывной в точке $x=1$, т. к. выполнены все три условия непрерывности: она определена в точке $x=1$ и ее окрестности; существуют односторонние пределы

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -4$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -4$; эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1) = -4$.

Пример 2. Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$ функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решение. Здесь $x_0 = 0$ – точка разрыва: в этой точке функция не определена, существуют односторонние пределы $f(x_0 - 0) = f(-0) = \lim\limits_{x\to -0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $f(x_0 + 0) = f(+0) = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, равные между собой. Точка $x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва. Если эту функцию доопределить в точке $x = 0$, то полученная функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ станет в точке $x_0 = 0$ непрерывной (см. рис. 1).

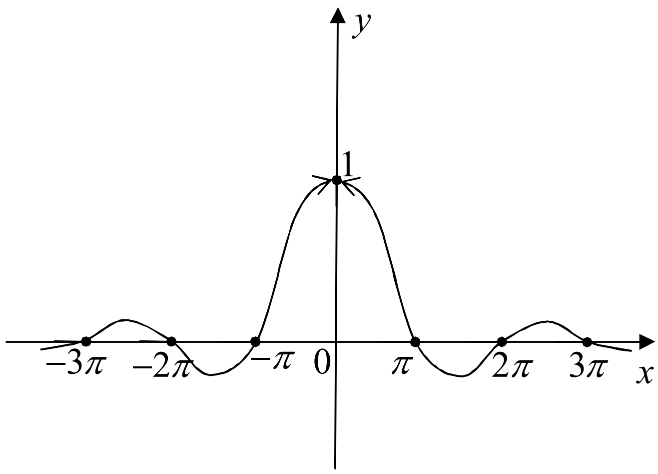

Рис. 1. График функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$

Пример 3. Найти точки разрыва и определить их тип для функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x < 0, \\ x^2 - 1, & \text{если } 0 \le x < 2, \\ 5 - x, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$, т. к. на каждом из этих интервалов она задана элементарными функциями.

Следовательно, точками разрыва данной функции могут быть только те точки, в которых функция меняет свое аналитическое задание, т. е. точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x_1 = 0$:

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}(x+1) = 1, \; f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}(x^2-1) = -1.$$

Т. к. односторонние пределы существуют и конечны, но не равны между собой, то точка $x_1 = 0$ является точкой конечного разрыва.

Для точки $x_2 = 2$ находим:

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x^2-1) = 3,$$
$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(5-x) = 3, \; f(2) = (5-x)\big|_{x=2} = 3.$$

Таким образом, имеем: $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$. Следовательно, в точке $x_2 = 2$ наша функция является непрерывной.

График данной функции изображен на рис. 2.

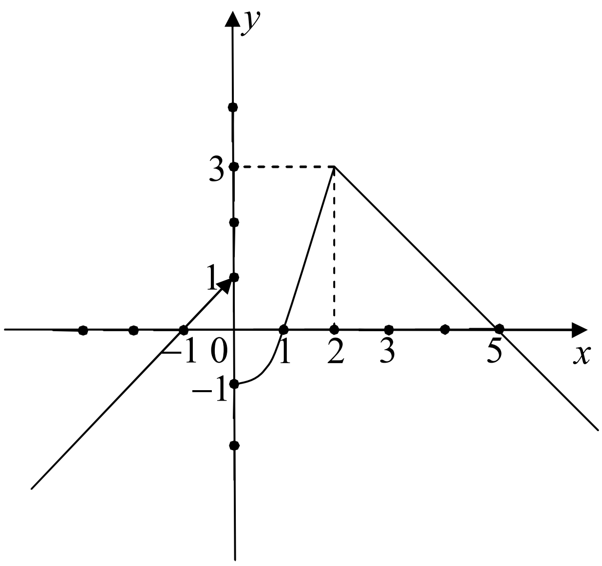

Рис. 2. График функции из примера 3

Пример 4. Найти точки разрыва функции и определить их тип:

$$f(x)=\begin{cases}-3x, & \text{если } x\ge -1,\\ \dfrac{x}{x+4}, & \text{если } x<-1.\end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ на интервалах $(-\infty;-4)$, $(-4;-1)$ и $(-1;+\infty)$ определена и непрерывна, т. к. она задана элементарными функциями.

В точке $x_2=-4$ функция не определена, значит точка $x_2=-4$ является точкой разрыва.

Определим ее тип:

$$f(-4-0)=\lim_{x\to -4-0} f(x)=\lim_{x\to -4-0}\frac{x}{x+4}=+\infty,\ f(-4+0)=\lim_{x\to -4+0}\frac{x}{x+4}=-\infty.$$

Следовательно, в точке $x_2=-4$ функция терпит бесконечный разрыв.

В точке $x_1=-1$ функция меняет свое аналитическое задание, следовательно, в этой точке возможен разрыв.

Найдем односторонние пределы:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{x}{x+4}=-\frac{1}{3},$$
$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(-3x)=3,\ f(-1)=(-3x)\big|_{x=-1}=3.$$

Т. к. $f(-1-0)\ne f(-1+0)$, то точка $x_1=-1$ является точкой конечного разрыва.

График данной функции изображен на рис. 3.

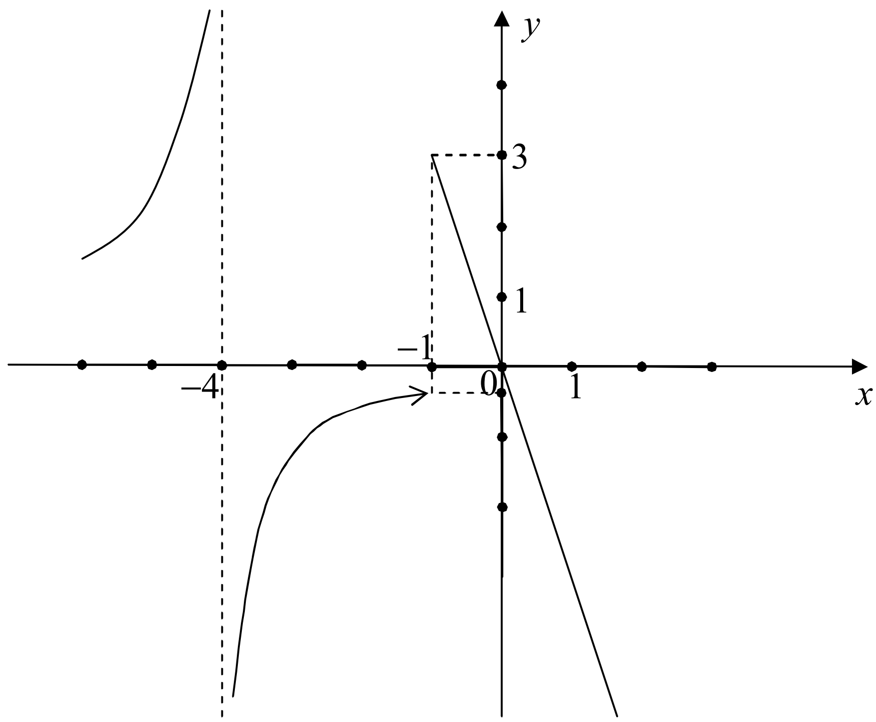

Рис. 3. График функции из примера 4

Пример 5. Найти точки разрыва функции и определить их тип для функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Решение. Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ определена для всех значений *x*, за исключением $x = 0$. Точка $x = 0$ есть точка разрыва II рода, так как при $x \to 0$ как справа, так и слева значения функции $\sin\frac{1}{x}$, колеблясь между -1 и +1, не приближаются ни к какому числовому значению. Другими словами, односторонние пределы не существуют, т.е. $x = 0$ - точка несуществования.

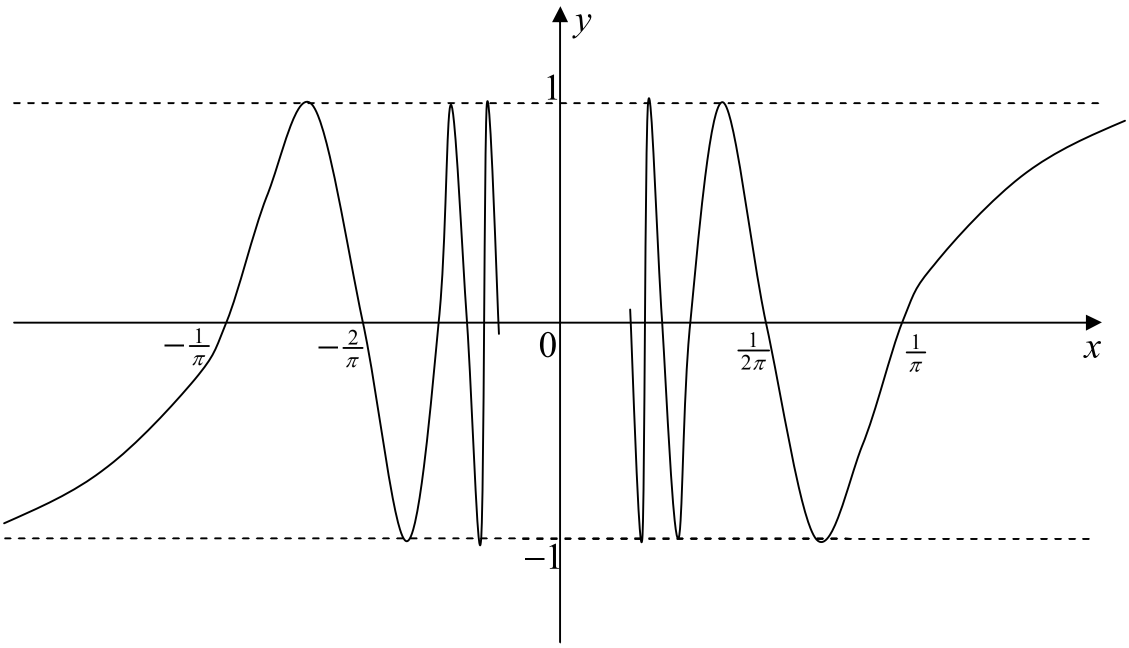

Рис. 4. График функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$