ПРЕДЕЛЫ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Пределы в конечной точке

Пример 1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-1}{2^x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3^{2x}\left(\cos 2x+2x^2\right)\right)$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-1}{2^x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2^x+3\right)}=\left[\dfrac{1^2+2\cdot 1-1}{2^1+3}\right]=\dfrac{2}{5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3^{2x}\cdot\left(\cos 2x+2x^2\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0}3^{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x^2\right)=$

$=\left[3^0\cdot\left(\cos 0+2\cdot 0\right)\right]=1\cdot 1=1.$

.

Пример 2. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^3-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{4x^2-5x+1}$.

Решение. 1) Подставляя вместо x предельное значение $x=2$, получим неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{x^3-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+1)}{\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{7}{12}.$$

2) Подставляя вместо x предельное значение $x=1$, получим неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Выделим в числителе и знаменателе множитель $x-1$, для чего числитель разделим на $x-1$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2+2x+2 \\
\quad 2x^2-2 & \\
\quad \underline{2x^2-2x} & \\
\qquad 2x-2 & \\
\qquad \underline{2x-2} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Тогда $x^3+x^2-2=(x-1)\left(x^2+2x+2\right)$.

Знаменатель разложим на множители, используя формулу

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, которые находятся по следующим формулам:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\ D=b^2-4ac.$$

Решаем квадратное уравнение:

$4x^2-5x+1=0$,
$D=25-16=9$,
$x_{1,2}=\frac{5\pm 3}{8}$, $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=1$.

Тогда $4x^2-5x+1=4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)=(4x-1)(x-1)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{4x^2-5x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}{(4x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x+2}{4x-1}=\frac{5}{3}.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

Решение. Первый способ.

При $x=4$ числитель и знаменатель дроби равны нулю. Домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю ($\sqrt{2x+1}+3$), получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}=\left[\frac{2}{3+3}\right]=\frac{1}{3}.$$

В преобразованиях использовали формулу

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b.$$

Второй способ.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\sqrt{2x+1}=t,\ x=\dfrac{t^2-1}{2}\\ x\to 4,\ t\to 3\end{array}\right|=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{\dfrac{t^2-1}{2}-4}=\lim_{t\to 3}\frac{2(t-3)}{t^2-9}=$$

$$\lim_{t\to 3}\frac{2(t-3)}{(t-3)(t+3)}=\lim_{t\to 3}\frac{2}{(t+3)}=\left[\frac{2}{6}\right]=\frac{1}{3}.$$

2. Пределы на бесконечности

Пример 1. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+3x^2-5}{2x+7x^3+3x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x^2-1}{x^5+2x+3}$.

Решение.

1) разделим числитель и знаменатель дроби на x^4, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+3x^2-5}{2x+7x^3+3x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^4}}{\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x}+3}=\left[\frac{4+0+0}{0+0+3}\right]=\frac{4}{3};$$

2) разделим числитель и знаменатель дроби на x^5, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{x^5+2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^5}}{1+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}=\left[\frac{0+0+0}{1+0+0}\right]=0.$$

Пример 2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-5}}{\sqrt[3]{x^3+2x+1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^6+2x+1}}{\sqrt[4]{x^4+2x^2+4}}$;

Решение.

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-5}}{\sqrt[3]{x^3+2x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{x\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=\left[\frac{\sqrt{4+\frac{2}{\infty}-\frac{5}{\infty}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}}\right]=\left[\frac{\sqrt{4+0+0}}{\sqrt[3]{1+0+0}}\right]=\left[\frac{2}{1}\right]=2.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^6+2x+1}}{\sqrt[4]{x^4+2x^2+4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6\left(4+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)}}{\sqrt[4]{x^4\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|^3\cdot\sqrt{4+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}}}{|x|\cdot\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^6}}}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}}}=\left[\infty\cdot\frac{\sqrt{4+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{\infty}+\frac{4}{\infty}}}\right]=[\infty\cdot 2]=\infty$$

3. Вычисление пределов с использованием 1-го замечательного предела

Пример 1. Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. Применяем первый замечательный предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=\left[\dfrac{1}{1}\right]=1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{5\cos 2x}{2}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 2x}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Пример 7. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\operatorname{tg}3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}$.

Решение.

1) первый способ:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{\frac{\sin 7x}{7x}}}^{1}\cdot 7x}{\underbrace{\boxed{\frac{\sin 5x}{5x}}}_{1}\cdot 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{5x}=\frac{7}{5}.$$

(при решении разделили каждый синус на аргумент и домножили на него и использовали первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$);

второй способ:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{5x}=\dfrac{7}{5}$, т. к. $\sin 7x \sim 7x$, $\sin 5x \sim 5x$ при $x \to 0$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\mathrm{tg} 3x}= \quad =\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{3x}=\dfrac{7}{3}$ т. к. $\arcsin 7x \sim 7x$, при $x \to 0$, $\mathrm{tg}3x \sim 3x$.

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{\sin^2 8x}==\lim_{x\to 0}\frac{2\overbrace{\boxed{\dfrac{\sin^2 3x}{(3x)^2}}}^{1}(3x)^2}{\underbrace{\boxed{\dfrac{\sin^2 8x}{(8x)^2}}}_{1}\cdot(8x)^2}=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 9x^2}{64x^2}=\dfrac{9}{32}$ (при вычислении предела использовали формулу $1-\cos\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$).

Аналогично, используя эквивалентные при $x \to 0$ *бмф* $1-\cos 6x \sim \dfrac{1}{2}(6x)^2$, $\sin 8x \sim 8x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 8x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{(8x)^2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 36}{64}=\frac{9}{32}.$$

4. Вычисление пределов с использованием 2-го замечательного предела

Пример 1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+4)-\ln 4}{x}$.

Решение.

1) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{(x+2)}{x-1}\cdot 4}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}}=e^4;$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+4)-\ln 4}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+4}{4}\right)}{x}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}=\frac{1}{4}.$$

При нахождении предела в примере 1) мы первоначально в скобках добавили и вычли единицу, вычислили разность и разделили на четыре, затем показатель умножили и разделили на $\frac{x-1}{4}$. Другими словами, свели ко второму замечательному пределу, после чего воспользовались свойством $\lim\limits_{x\to a}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$.

При нахождении предела в примере 2), выполнив необходимые преобразования, мы свели его к одному из пределов, вытекающих из второго замечательного предела.

Пример 2. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$.

Решение.

1) т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, имеем неопределенность вида $[1^\infty]$, для раскрытия которой используем второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{3x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x}}}=e^3;$$

2) поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{2+\frac{3}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)=\infty$, то имеем неопределенность вида $[1^{\infty}]$, для раскрытия которой используем второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+2}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5}{2x+3}-1\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5-2x-3}{2x+3}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{2}}\right)^{\frac{2(x+2)}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+4}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}}}=e;$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(x+3)-\ln x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+3}{x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^{x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\ln e^{3}=3.$$

Здесь использовали свойства логарифмов и второй замечательный предел.

5. Раскрытие неопределенностей вида $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$

Пример 1. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$;2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x}{x^3-1}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\operatorname{tg}x+2x^2\right)$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$. Т. к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, то имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Выполним следующее преобразование:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

Получили неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Раскроем ее

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=$$

$$=\left[\frac{1+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}+1}\right]=\left[\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}\right]=\frac{1}{2};$$

2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x}{x^3-1}\right)$. Т. к. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x}{x^3-1}=\infty$, то имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Выполним следующее преобразование:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^2+2x}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2+x+1-x^2-2x}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{-x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right).$$

Получили неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Раскроем ее

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{-x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x^2+x+1}=-\frac{1}{3};$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\operatorname{tg}x+2x^2\right)$. Непосредственная подстановка предельного значения $x=0$ приводит к неопределенности вида $[0\cdot\infty]$. Преобразовав данное выражение, получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(\operatorname{tg}x+2x^2\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+2x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x+2x^2}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=\left|\operatorname{tg}x\sim x\right|=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2}\right)+2=\infty.$$

6. Вычисление пределов с использованием эквивалентных бесконечно малых

Пример 1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$.

Решение.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}=\left|\begin{matrix}\sin 5x\sim 5x\\ \ln(1+4x)\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}=\left|\begin{matrix}\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\dfrac{x+x^2}{2}\\ \sin 4x\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+x^2}{2}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{8x}=\frac{1}{8}.$$