СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} 2x + y + 3z = 3, \\ 4x - 2z = 2, \\ -x + 3y + 4z = -3 \end{cases}$

а) методом Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса.

Решение. а) Вычислим определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 3 -$$

$$-(-1 \cdot 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \cdot 2) = 0 + 2 + 36 - (0 + 16 - 12) = 34.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – определители, полученные из Δ заменой соответственно 1-го, 2-го и 3-го столбца столбцом свободных членов системы. Вычислим эти определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) \cdot (-3) + 2 \cdot 3 \cdot 3 -$$

$$-(-3 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \cdot 3) = 0 + 6 + 18 - (0 + 8 - 18) = 34;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot (-3) -$$

$$-(-1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) \cdot (-3)) = 16 + 6 - 36 - (-6 + 48 + 12) = -68;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot(-3)+1\cdot 2\cdot(-1)+4\cdot 3\cdot 3-$$

$$-(-1\cdot 0\cdot 3+4\cdot 1\cdot(-3)+3\cdot 2\cdot 2)=0-2+36-(0-12+12)=34.$$

Таким образом, решение системы имеет вид

$$x=\frac{34}{34}=1,\quad y=\frac{-68}{34}=-2,\quad z=\frac{34}{34}=1.$$

б) Решение системы матричным методом определяется по формуле $X = A^{-1}\cdot B$, где $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}. Поскольку $\det A = 34 \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует и может быть найдена по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left[A_{ij}\right]^T,$$

где матрица $\left[A_{ij}\right]$ составлена из алгебраических дополнений к элементам матрицы A. Для случая матрицы 3-го порядка формула примет вид

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=6,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=5,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-14, A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=11, A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=16,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=12, A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-7,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=-4.$$

Подставляя найденные значения в формулу, получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -14 & 11 & 16 \\ 12 & -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы получить решение системы по формуле $X = A^{-1} \cdot B$, перемножим матрицы:

$$X = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -14 & 11 & 16 \\ 12 & -7 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \\ -14 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 16 \cdot (-3) \\ 12 \cdot 3 - 7 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 34 \\ -68 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, $x = 1, \quad y = -2, \quad z = 1.$

в) При решении СЛАУ методом Гаусса (или методом последовательного исключения неизвестных) система приводится к равносильной системе специального ступенчатого вида с помощью следующих преобразований: перестановка двух уравнений; умножение уравнения на число, отличное от 0; прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число. Эти преобразования эквивалентны элементарным преобразованиям расширенной матрицы системы, поэтому на практике удобнее оперировать с матрицами.

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 12 & 14 & -10 \\ 0 & 7 & 11 & -3 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & 7 & -5 \\ 0 & 7 & 11 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 11 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Здесь последовательно проведены следующие преобразования:

1) поменяли местами 1-ю и 3-ю строки (чтобы в 1-й строке был удобный для расчетов 1-й элемент -1;
2) к элементам 2-й строки прибавили соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 4, а к элементам 3-й строки - соот-

ветствующие элементы 1-й строки, умноженные на 2;

3) элементы 2-й строки сократили на 2;
4) к элементам 2-й строки, умноженным на -1, прибавили соответствующие элементы 3-й строки (это сделано для того, чтобы в начале 2-й строки стоял удобный элемент 1 и можно было избежать вычислений с дробями);
5) от элементов 3-й строки отняли соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на 7;
6) элементы 3-й строки разделили на -17.

Итак, расширенная матрица исходной системы приведена к ступенчатому виду. Это означает, что система также приведена к ступенчатому виду, когда из всех уравнений, кроме первого, исключена первая неизвестная x и из всех уравнений, кроме первого и второго, исключена вторая неизвестная y. Запишем систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} -x+3y+4z=-3, \\ \quad y+4z=2, \\ \quad z=1. \end{cases}$$

На втором этапе метода Гаусса идет последовательное определение неизвестных из полученной системы, начиная с последних по номеру. Значение переменной z уже определено. Подставляя найденное значение z во 2-е уравнение, находим y. Наконец, по имеющимся значениям y и z из 1-го уравнения определяем величину неизвестной x.

$$\begin{cases} -x+3y+4z=-3, \\ y=2-4z=2-4\cdot 1=-2, \\ z=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3+3y+4z=3+3\cdot(-2)+4\cdot 1=1, \\ y=-2, \\ z=1. \end{cases}$$

Итак, система имеет единственное решение $x=1, \quad y=-2, \quad z=1$.

Пример 2. Найти решения систем 2-го порядка; дать геометрическую интерпретацию полученного результата:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x+2y=5, \\ 4x+5y=2, \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 2x-3y=1, \\ 4x-6y=8, \end{cases} \qquad \text{в) } \begin{cases} 2x-3y=1, \\ 4x-6y=2. \end{cases}$$

Решение. а) Определитель системы равен $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7 \neq 0$.

Следовательно, система имеет единственное решение и может быть решена методом Крамера.

Т. к. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 4 = 21, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14,$

то $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{21}{7} = 3,\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -\dfrac{14}{7} = -2.$

Найденное решение $(3; -2)$ – точка пересечения прямых $3x + 2y = 5$ и $4x + 5y = 2$.

б) Поскольку определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$, решить систему по формулам Крамера нельзя.

Однако можно легко исследовать эту систему, исходя из того, что каждое уравнение системы – это уравнение прямой. Прямые $2x - 3y = 1$ и $4x - 6y = 8$ (или $2x - 3y = 4$) параллельны и не имеют общих точек. Следовательно, данная система несовместна.

в) В этом случае определитель системы также равен нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$, но в отличие от решения второй системы оба уравнения $2x - 3y = 1$ и $4x - 6y = 2$ определяют одну и ту же прямую (сократив обе части второго уравнения на 2, получим первое). Следовательно, данная система имеет бесчисленное множество решений – ими будут все точки прямой $2x - 3y = 1$. Эти решения можно записать в виде:

$$y = c,\ x = \frac{1+3c}{2}, \text{ т. е. } \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}c, \\ y = c, \end{cases} \quad c \in \mathbf{R}.$$

Пример 3. Решить систему методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x + y + 5z = 13, \\ 4x - y + 3z = 5, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-3y+z=-2, \\ 5x-2y+3z=11, \\ x+4y+z=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-4y+z+5t=3, \\ 3z-y=2, \\ 5y-4x+7z-10t=0, \\ 2x-y-8z+5t=-3. \end{cases}$

Решение. а) Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

Здесь последовательно проведены следующие преобразования:

1) от элементов 2-й строки отняли соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 2, а от элементов 3-й строки - соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 3;
2) к элементам 3-й строки прибавили соответствующие элементы 2-й строки.

Запишем систему, соответствующую последней матрице, и проведем обратный ход метода Гаусса для последовательного определения значений неизвестных:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3, \\ -x_2+x_3=4, \\ -x_3=-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3, \\ x_2=x_3-4=-2, \\ x_3=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=3-2x_2-2x_3=3-2\cdot(-2)-2\cdot 2=3, \\ x_2=x_3-4=-2, \\ x_3=2. \end{cases}$$

Итак, система имеет единственное решение $x_1=3,\quad x_2=-2,\quad x_3=2.$

б) Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 5 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Здесь последовательно проведены следующие преобразования:

1) поменяли местами 1-ю и 3-ю строки (чтобы в дальнейшем оперировать с целыми числами);
2) от элементов 2-й строки отняли соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 2, а от элементов 3-й строки - соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 4;
3) от элементов 3-й строки отняли соответствующие элементы 2-й строки.

Запишем систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ -3y + z = -3, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

В системе с тремя неизвестными осталось два уравнения. Обозначим $z = c$ (c - любое действительное число, переменная z может принимать любое значение) и выразим две другие неизвестные через c):

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ y = -\frac{1}{3}(-3 - z) = \frac{1}{3}(3 + c) = 1 + \frac{1}{3}c, \\ z = c; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(4 - y - z) = \frac{1}{2}(4 - 1 - \frac{1}{3}c - c) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}c, \\ y = 1 + \frac{1}{3}c, \\ z = c. \end{cases}$$

Итак, система имеет бесчисленное множество решений: $x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}c, \quad y = 1 + \frac{1}{3}c, \quad z = c, \quad c \in \mathbf{R}.$

в) Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 11 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -22 & -2 & 6 \\ 0 & -11 & -1 & -4 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & -1 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right].$$

Здесь последовательно проведены следующие преобразования:

1) поменяли местами 1-ю и 3-ю строки (чтобы оперировать с целыми числами);
2) от элементов 2-й строки отняли соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 5, а от элементов 3-й строки - соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 2;
3) сократили элементы 2-й строки на 2;
4) от элементов 3-й строки отняли соответствующие элементы 2-й строки.

Запишем систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 1, \\ -11y - z = 3, \\ 0 = -7. \end{cases}$$

Последнее равенство не верно, поэтому система не имеет решений (система несовместна).

г) Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ 2 & -1 & -8 & 5 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -9 & 0 & -6 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Здесь последовательно проведены следующие преобразования:

1) к элементам 3-й строки прибавили соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 2, а от элементов 3-й строки отняли соответствующие элементы 1-й строки;
2) прибавили к элементам 4-й строки соответствующие элементы 3-й строки и отняли от элементов 3-й строки соответствующие

элементы 2-й строки, умноженные на 3.

Запишем систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} 2x-4y+z+5t=3, \\ \quad -y+3z=2, \\ \qquad 0=0, \\ \qquad 0=0. \end{cases}$$

В системе с четырьмя неизвестными осталось два уравнения. Переменные z и t можно считать свободными, поскольку из 1-го уравнения легко выразить неизвестную x через остальные переменные, а из 2-го уравнения можно выразить y через z и t (в данном примере только через z). Обозначим $z=c_1, t=c_2$ (переменные z и t могут принимать любые действительные значения независимо друг от друга) и выразим две другие неизвестные через c_1, c_2:

$$\begin{cases} 2x-4y+z+5t=3, \\ y=3z-2=3c_1-2, \\ \qquad z=c_1, \\ \qquad t=c_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(3+4y-z-5t)=\frac{1}{2}(3+12c_1-8-c_1-5c_2)=-\frac{5}{2}+\frac{11}{2}c_1-\frac{5}{2}c_2, \\ \qquad y=3c_1-2, \\ \qquad z=c_1, \\ \qquad t=c_2. \end{cases}$$

Итак, система имеет бесчисленное множество решений: $x=-\frac{5}{2}+\frac{11}{2}c_1-\frac{5}{2}c_2,\ y=3c_1-2,\ z=c_1,\ t=c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.