§1. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа

Самым широким из ранее рассмотренных числовых множеств являлось множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. Характерным признаком этого множество являлось то, что все арифметические операции – сложение, вычитание, умножение, деление – на множестве действительных чисел являются замкнутыми. Однако, существуют задачи для решения которых действительных чисел недостаточно. Например, квадратное уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней, так как не существует такого действительного числа квадрат которого равен минус единице. Построим формально расширение множества $\mathbb{R}$, то есть построим новое множество чисел, введя арифметические операции на нем формально.

Определение. ***Комплексным числом*** будем называть упорядоченную пару $(a; b)$ действительных чисел с введенными над ними специальным образом операциями сложения и умножения:

1. суммой двух комплексных чисел $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ называется комплексное число $(a_1 + a_2; b_1 + b_2)$;
2. произведением двух комплексных чисел $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ называется комплексное число $(a_1a_2 - b_1b_2,; a_1b_2 + a_2b_1)$.

Комплексное число вида $(a; 0)$ считаем действительным числом.

Определение. Два комплексных числа $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ будем считать равными тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Заметим, что операции над комплексными числами введены таким образом, что применяя их к двум любым действительным числам, рассмотренным как комплексные числа вида $(a; 0)$, придем к операциям над действительными числами. Следует также иметь в виду, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены. **Понятие «неравенства» для комплексного числа вводится только как отрицание равенства.**

Для сокращения записи комплексное число обозначают одной буквой $z = (a; b)$. Комплексное число $z = (0; 0)$ называют нулем. Очевидно, что оно совпадает с нулем множества действительных чисел. Нетрудно получить формулу разности двух комплексных чисел $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2; b_1 - b_2)$. Формулу частного двух комплексных чисел получим позднее. Непосредственно проверяется, что сумма и произведение двух комплексных чисел обладает теми же свойствами, что сумма и произведение действительных чисел (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность). Множество комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$. Это множество шире, чем ранее рассмотренные числовые множества: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Рассмотрим комплексное число (1;0)=1. По определению оно является действительным числом и называется ***действительной единицей***. Естественно возникает вопрос, а что из себя представляет число (0;1)? Перемножим это число на самоё себя по правилам перемножения комплексных чисел: $(0;1)\cdot(0;1)=(-1;0)=-1$, то есть $(0;1)^2=-1$. Это число обозначают $i=(0;1)$ и называют ***мнимой единицей***. В технической литературе, в частности в радиотехнической, для мнимой единицы используется обозначение j. Следовательно, уравнение $z^2+1=0$ имеет корень $z=i$. Рассмотрим комплексное число $z=(a,b)$ и представим его, используя определение суммы комплексных чисел и умножение комплексного числа на действительное, в виде:

$$z=(a;b)=(a;0)+(0;b)=(a;0)+b(0;1)=a+ib.$$

Полученная форма записи $z=a+ib$ комплексного числа называется ***алгебраической формой комплексного числа***. Здесь,

i – называется ***мнимой единицей***;

$a=Rez$ – называется ***действительной частью комплексного числа*** z;

$b=Imz$ – называется ***мнимой частью комплексного числа*** z.

Комплексные числа вида $z=ib$ называются ***мнимыми числами***.

Алгебраическая форма комплексного числа удобна при выполнении арифметических операций. Сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме можно выполнять формально по правилам сложения и умножения двучленов с заменой i^2 на -1.

Определение. Комплексное число $\bar{z}=(a;-b)=a-ib$ называется ***комплекснosопряженным*** (или ***сопряженным***) с числом $z=(a;b)=a+ib$.

Сопряженное к комплексному числу отличается только знаком мнимой части. Рассмотрим сумму и произведение сопряженных чисел:

$$z+\bar{z}=a+ib+a-ib=2a\in\mathbb{R};$$

$$z\cdot\bar{z}=(a+ib)\cdot(a-ib)=a^2+b^2\in\mathbb{R},$$

то есть ***сумма и произведение двух комплесносопряженных чисел есть число действительное.***

Пользуясь алгебраической формой комплексного числа и понятием сопряженного к нему определим операцию деления двух комплексных чисел

$z_1=(a_1;b_1)$ и $z_2=(a_2;b_2)$:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{{a_2}^2+{b_2}^2}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{{a_2}^2+{b_2}^2}+i\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{{a_2}^2+{b_2}^2}=\left(\frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{{a_2}^2+{b_2}^2};\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{{a_2}^2+{b_2}^2}\right).$$

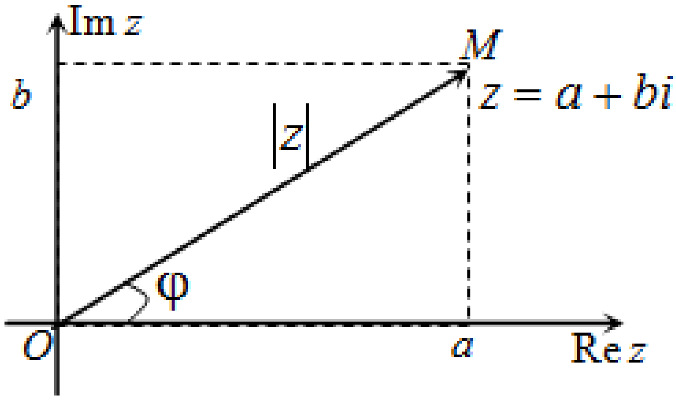
Пример. Найти частное двух комплексных чисел $z_1=1+2i$ и $z_2=2+3i$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2i}{2+3i}=\frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{8+i}{13}=\frac{8}{13}+i\frac{1}{13},$$

$$Re\frac{z_1}{z_2}=\frac{8}{13}, Im\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{13}.$$

§2. Геометрическое изображение комплексного числа. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

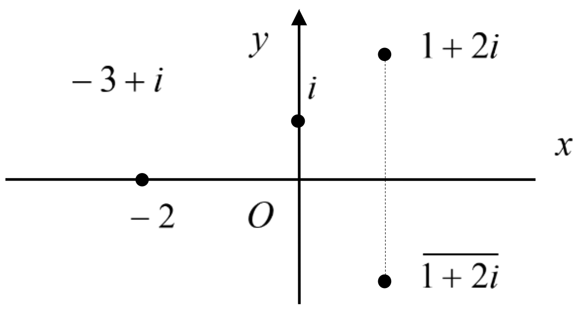
Комплексное число $z = a + ib$ можно изобразить геометрически, то есть точкой $M(a; b)$ с координатами $(a; b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, либо как радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ (вектор, проведенный из начала координат к точке M) этой точки. Ось абсцисс в этом случае называют ***действительной осью*** (и обозначают Rez), а ось ординат – ***мнимой осью*** (и обозначают Imz). Саму плоскость Oxy называют ***комплексной плоскостью.***



При таком способе изображения множество комплексных чисел взаимно однозначно отображается на множество точек координатной плоскости. Операции сложения и вычитания можно интерпретировать, как сложение и вычитание векторов, изображающих эти числа.

Пример. Изобразить числа -2, i, $1+2i$, $-3+i$, $\overline{1+2i}$ на комплексной плоскости.

Решение. Так как $\overline{1+2i} = 1-2i$, имеем



Определение. Расстояние от точки $M(a; b)$ до начала координат называется ***модулем комплексного числа*** $z = a + ib$. Оно обозначается $|z|$ или r и равно длине радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. ***Аргументом комплексного числа*** $z = a + ib$ называется величина угла φ, который образует радиус-вектор точки $M(a; b)$ с положительным направлением оси абсцисс.

Очевидно, что модуль комплексного числа определяется однозначно, а аргумент с точностью до $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi \le \varphi \le \pi$ (либо $0 \le \varphi \le 2\pi$) называется ***главным значением аргумента комплексного числа*** и обозначается $argz$. Множество всех значений аргумента обозначают $Argz = argz + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Для комплексного числа $z = 0$ модуль равен нулю, а аргумент этого числа не определен.

Из соотношений в прямоугольном треугольнике имеем, что

$$\begin{cases} a = |z|cos\varphi, \\ b = |z|sin\varphi. \end{cases}$$

Подставив эти равенства в алгебраическую форму комплексного числа, получаем ***тригонометрическую форму комплексного числа***:

$$z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)\ .$$

Для того, чтобы перейти от алгебраической к тригонометрической форме комплексного числа вначале находим модуль комплексного числа $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а затем из формул

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}\ , \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

следует, что для на аргумента φ верно следующее равенство: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Для главного значения аргумента, удовлетворяющего условию $-\pi \le \varphi \le \pi$, справедливы соотношения

$$argz = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, & a > 0\ (I, IV - \text{четверть}); \\ arctg\dfrac{b}{a} + \pi, & a < 0, b \ge 0\ (II - \text{четверть}); \\ arctg\dfrac{b}{a} - \pi, & a < 0, b < 0\ (III - \text{четверть}); \\ \dfrac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0. \end{cases}$$

Пример. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Модуль этого комплексного числа $r = \sqrt{1+3} = 2$. Для нахождения аргумента по вышеприведенной формуле определяем, что действительная и мнимая части отрицательные, то есть число находится в III четверти. Следовательно, $argz = arctg\frac{b}{a} - \pi = arctg\sqrt{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$ и число в тригонометрической форме имеет вид

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что комплексные числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на период, то есть число, кратное 2π.

Тригонометрическая форма комплексного числа удобна при выполнении операций умножения, деления, возведения в степень:

а) ***при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются***:

$$z_1 \cdot z_2 = \left[r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\right]\cdot\left[r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\right] =$$
$$= r_1 \cdot r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right),$$

б) ***при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются***:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right),\ r_2 > 0,$$

в) ***возведение в степень***:

$$z^n = \left[r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right]^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),\ n\in\mathrm{N}.$$

Эта формула получается если комплексное число z^n рассмотреть как умножение числа z на себя n раз. При $r = 1$ получаем ***формулу Муавра***

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Если воспользоваться ***формулой Эйлера***

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

то можно перейти от тригонометрической формы комплексного числа к ***показательной***

$$z = re^{i\varphi}.$$

Здесь, $r = |z|$ – модуль, $\varphi = Argz = argz + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ – аргумент комплексного числа z.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным аргументом, поэтому формулы умножения, деления и возведения в степень имеют простой вид. Если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, то:

1. $z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;
3. $z^n = r^ne^{in\varphi}$.

§3. Извлечение корней из комплексных чисел

Возведение в степень комплексного числа рассмотрели в предыдущем параграфе, а теперь рассмотрим обратную задачу: извлечение корня из комплексного числа.

Определение. ***Корнем n*** -ой ***степени*** $(n \in \mathbb{N})$ ***из комплексного числа*** z называется любое комплексное число w такое, что $w^n = z$.

Обозначается, как и в действительном анализе: $\sqrt[n]{z} = w$.

Выведем формулу вычисления корня из комплексного числа. Запишем числа z и w в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Тогда по формуле возведения в степень комплексного числа

$$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

и по определению корня из комплексного числа выполняется равенство

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Из дефиниции равенства двух комплексных чисел в тригонометрической форме следует, что их модули равны, то есть $r = \rho^n$, а аргументы либо равны, либо отличаются на число кратное 2π, то есть $n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Отсюда модуль корня $\rho = \sqrt[n]{r}$, а аргумент $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, где $k \in \mathbb{Z}$ и искомое число w примет вид

$$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Проанализируем полученную формулу:

1. Если $z = 0$, то $|z| = 0$ и, следовательно, $\sqrt[n]{z} = 0$. То есть корень n-ой степени из нуля имеет ровно одно значение.

2. Если $z \neq 0$, то существует бесчисленное множество корней $\sqrt[n]{z}$. Так как корень w_n

$$w_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) = w_0$$

равен корню w_0, то различных среди этого множества корней будет только n корней при $k = \overline{0, n-1}$. Таким образом получим n различных значений $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ корня n-ой степени из числа $z \neq 0$. Эти значения различны, так как аргументы двух рядом стоящих корней отличаются на величину $\frac{2\pi}{n}$, модули у них совпадают.

Окончательно, ***число различных комплексных корней из комплексного числа $\boldsymbol{z \neq 0}$ равно показателю степени корня. Геометрически, точки, соответствующие различным корням n-ой степени, располагаются в вершинах правильного n-угольника с центром в точке*** *O* (лежат на окружности $|z| = \sqrt[n]{r}$ в комплексной плоскости)***, причем одна из вершин*** **(***k=0***)** ***имеет полярные координаты*** $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right)}$**.**

Пример. Извлечь корни 3-ей степени из комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$. Главное значение аргументы выбрать для $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Решение. Имеем

$$\sqrt[3]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[3]{2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3} - i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$. Отсюда

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} - i\sin\frac{\pi}{18}\right), \left(\sqrt[3]{z}\right)_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} - i\sin\frac{13\pi}{18}\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} - i\sin\frac{25\pi}{18}\right).$$

Значения $\left(\sqrt[3]{z}\right)_0$, $\left(\sqrt[3]{z}\right)_1$, $\left(\sqrt[3]{z}\right)_2$ на комплексной плоскости изображаются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[3]{2}$ с центром в начале координат.

§4. Многочлены с комплексными коэффициентами.

Многочленом степени $n \in \mathbb{N}$ ***с комплексными коэффициентами*** называется выражение вида

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z^n + a_n\ ,$$

где a_k – комплексные числа, а $z = x + iy$ – комплексная переменная. Очевидно, что $P_0(z) = a_0$, то есть любое комплексное число можно рассматривать как многочлен нулевой степени. ***Два многочлена*** $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ степени n ***называются равными***, если у них равны коэффициенты при соответствующих степенях. ***Комплексное число*** $z_0 = x_0 + iy_0$ ***называется корнем многочлена*** $P_n(z)$ если $P_n(z_0) = 0$. Задача отыскания корней достаточно трудоемкая, поэтому часто приходится использовать численные методы для отыскания приближенных значений корней. Большинство таких методов базируется на следующей теореме.

Теорема. Для того, чтобы комплексное число $z_0 = x_0 + iy_0$ было корнем многочлена $P_n(z)$ необходимо и достаточно, чтобы многочлен $P_n(z)$ делился на $(z - z_0)$, то есть $P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z)$.

Докажем необходимость, а достаточность оставим для самостоятельного рассмотрения. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ – корень многочлена $P_n(z)$. Согласно правилу деления многочлена на многочлен, имеем, что в этом случае многочлен $P_n(z)$ представим в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z) + R_n(z),$$

причем степень многочлена $R_n(z)$ (остатка от деления) ниже степени делителя. Но делитель $(z - z_0)$ – многочлен первой степени. Следовательно остаток $R_n(z)$ является многочленом нулевой степени, то есть числом C. Поэтому $P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z) + C$. Подставим значение корня $z = z_0$ в последнее равенство и получим, что $P_n(z_0) = C$. Но z_0 – корень многочлена и, следовательно, $P_n(z_0) = 0$, что влечет за собой $C = 0$ и представление исходного многочлена имеет вид $P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z)$, что и требовалось доказать.

Таким образом теорема утверждает, что в процессе отыскания корня можно многочлен делить на множитель $(z - z_0)$, на чем и построены методы приближенного вычисления корня. Однако, теорема не дает ответа на вопрос всегда ли существует корень многочлена, а если корни существуют, то сколько их у многочлена. Без доказательства приведем следующую теорему.

***Теорема* (*основная теорема алгебры*).** Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень (он может быть действительным).

Непосредственно из теоремы следует, что многочлен $P_n(z)$ $(n \geq 1)$ имеет по крайней мере один корень $z = z_1$. Следовательно, он делится на одночлен $(z - z_1)$, то есть $P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$. В многочлене $P_{n-1}(z)$ коэффициентом при старшей степени z^{n-1} будет число a_0. Если многочлен $P_{n-1}(z)$ не является многочленом нулевой степени (числом), то по основной теореме алгебры у него по крайней мере имеется один корень $z = z_2$. Поэтому $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)P_{n-2}(z)$, где у многочлена $P_{n-2}(z)$ коэффициентом при старшей степени z^{n-2} будет число a_0. Продолжая процесс, пока это возможно, придем представлению многочлена в следующем виде

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Фактически, обозначена схема доказательства следствия из основной теоремы алгебры.

***Следствие* 1.** Всякий многочлен

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z^n + a_n$$

степени $n \geq 1$ можно единственным образом представить в виде

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – корни многочлена $P_n(z)$.

Непосредственно из этого следствия можно получить следующее

***Следствие* 2.** Всякий многочлен $P_n(z)$ степени $n \geq 1$ имеет ровно *n* корней.

При получении разложения многочлена на произведение корней мы не рассматривали каким образом соотносятся между собой корни многочлена. Другими словами, среди корней z_kмогут быть повторяющиеся. Объединим их между собой и разложение примет вид

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_s)^{k_s},$$

где все $z_1, z_2, \ldots, z_s$ различны и $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$. В этом случае z_j ***называется корнем кратности*** k_j. Если $k_j = 1$, то ***корень называется простым*** или ***однократным.*** С учетом понятия кратности следствие 2 из основной теоремы алгебры можно переформулировать следующим образом: ***всякий многочлен*** $\boldsymbol{P_n(z)}$ ***степени*** $\boldsymbol{n \geq 1}$ ***имеет ровно n корней с учетом их кратности***.

Рассмотрим далее, как определить кратность корня (если его каким-то образом удалось найти). Пусть $z = z_0$ – корень кратности k многочлена $P_n(z)$. Тогда многочлен представим в виде $P_n(z) = (z - z_0)^k Q(z)$, где $Q(z_0) \neq 0$. Найдем производную

$$P_n'(z) = k(z - z_0)^{k-1}Q(z) + (z - z_0)^k Q'(z) =$$
$$= (z - z_0)^{k-1} \underbrace{[kQ(z) + (z - z_0)Q'(z)]}_{\text{обозначим } \varphi(z)} = (z - z_0)^{k-1}\varphi(z).$$

Так как $Q(z_0) \neq 0$, $\varphi(z_0) \neq 0$. Следовательно, $z = z_0$ – корень кратности (k–1) для производной $P_n'(z)$.
Доказали следующую теорему.

Теорема. Если $z = z_0$ – корень кратности k многочлена $P_n(z)$, то он является корнем кратности (k–1) для производной $P_n'(z)$.

Практическую значимость представляет собой следствие из этой теоремы.
Следствие (признак кратности корня)**.** Для того, чтобы комплексное число $z = z_0$ являлось корнем кратности k многочлена $P_n(z)$, необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия

$$P_n(z_0) = P_n'(z_0) = P_n''(z_0) = \cdots = P_n^{(k-1)}(z_0) = 0, P_n^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Следствие сводит задачу отыскания кратности корня к дифференцированию многочлена, что значительно проще многократных делений многочлена на множитель $(z - z_0)$.

Пример. Найти все корни многочлена $P_4(z) = z^4 + 3z^3 + 3z^2 + z$.
Решение. Очевидно, что если вынести z в правой части, то многочлен примет вид $P_4(z) = z(z^3 + 3z^2 + 3z + 1)$. Из его вида следует, что $z = 0$ является простым корнем, так как выражение в скобках при $z_1 = 0$ в ноль не обращается. Осталось найти корни многочлена $P_3(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $z_2 = -1$ также является корнем исходного многочлена. Определим кратность этого корня. Так как

$$P_4(-1) = 0,$$
$$P_4'(z) = 4z^3 + 9z^2 + 6z + 1, P_4'(-1) = 0,$$
$$P_4''(z) = 12z^2 + 18z + 6, P_4''(-1) = 0,$$
$$P_4'''(z) = 24z + 18, P_4'''(-1) = -6 \neq 0,$$

то $z_2 = -1$ является корнем кратности три. Окончательно разложение исходного многочлена можно записать в виде

$$P_4(z) = z^4 + 3z^3 + 3z^2 + z = z(z+1)^3.$$

Кратность корня можно было определить и делением исходного многочлена на линейный множитель $(z + 1)$, но делать это пришлось бы три раза, что потребовало бы больше усилий, чем нахождение трех производных.

§5. Представление многочлена с действительными коэффициентами в виде произведения линейных и квадратичных множителей.

Рассмотрим многочлен

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z^n + a_n \,,$$

где a_k $(k = \overline{0, n})$ – действительные числа, а $z = x + iy$ – комплексная переменная.
Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ – два произвольных комплексных числа, $\bar{z}_1 = a_1 - ib_1$ и $\bar{z}_2 = a_2 - ib_2$ им комплексно сопряженные. Тогда

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \qquad \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2),$$
$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$
$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

то есть результат для $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ и $\bar{z}_1\bar{z}_2$ – является сопряженным с результатом $z_1 + z_2$ и$z_1 z_2$. Так как это выполняется, то значения многочлена с действительными коэффициентами a_k от любого комплексного числа z_0 и комплексно сопряжённого ему $\bar{z}_0$: $P_n(z_0) = p_0 + iq_0,\ P_n(\bar{z}_0) = p_0 - iq_0$ – комплексно сопряженные числа.

Пусть далее z_0 – корень многочлена с действительными коэффициентами $P_n(z)$, то есть по определению $P_n(z_0) = 0$. С учетом вышерассмотренного $P_n(\bar{z}_0) = \overline{(0 + \imath 0)} = 0$. Следовательно, $\bar{z}_0$ – тоже корень этого многочлена. Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема. Если комплексное число $z_0 = \alpha + i\beta$ является корнем многочлена $P_n(z)$ с действительными коэффициентами, то и сопряженное с ним комплексное число $z_0 = \alpha - i\beta$ также является корнем многочлена $P_n(z)$.

Замечание. Сформулированная теорема справедлива только для многочленов $P_n(z)$ с действительными коэффициентами.

Следствие. Многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень (или нечетное число действительных корней). Многочлен четной степени с действительными коэффициентами имеет или четное число действительных корней или вообще их не имеет.

Следствие получается из основной теоремы алгебры. Так как многочлен имеет ровно *n* корней с учетом их кратности и того, что комплексные корни являются комплексно сопряженными, то их число будет четным. Если степень многочлена – нечетная, то обязательно хотя бы один корень должен быть действительным.

Рассмотрим далее многочлен с действительными коэффициентами. Допустим, что нас будут интересовать только действительные корни этого многочлена. То есть многочлен имеет вид

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x^n + a_n\ ,$$

где $a_k\ (k = \overline{0, n})$ – действительные числа, а x – действительная переменная. Этот многочлен имеет *n* корней с учетом их кратности. Среди них могут быть как действительные, так и комплексно сопряженные. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k$ – действительные корни, а $x_{k+1}, \bar{x}_{k+1}, x_{k+2}, \bar{x}_{k+2}, \dots, x_{k+l}, \bar{x}_{k+l}$ – комплексно сопряженные корни. Тогда разложение многочлена по корням можно записать следующим образом

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - \bar{x}_{k+1})\cdots$$
$$\cdots(x - x_{k+l})(x - \bar{x}_{k+l}).$$

Рассмотрим отдельно произведение линейных множителей с комплексно сопряженными корнями

$$(x - x_s)(x - \bar{x}_s) = x^2 - (x_s + \bar{x}_s)x + x_s\bar{x}_s = x^2 + px + q,$$

где p и q – действительные числа, так как сумма и произведение двух комплексно сопряженных чисел есть числа действительные, то есть ***произведение***

любых двух линейных множителей, соответствующих комплексно сопряженным корням многочлена с действительными коэффициентами, дает квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Таким образом, разложение многочлена с действительными коэффициентами можно записать в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)(x^2 + p_1 x + q_1) \cdots$$
$$\cdots (x^2 + p_l x + q_l), \text{где } p_k, q_k \in \mathbb{R}.$$

Обозначили схему доказательства следующей теоремы.

Теорема. Всякий многочлен с действительными коэффициентами единственным образом разлагается в произведение линейных множителей и квадратных трехчленов с комплексно сопряженными корнями.

Замечание. Если в разложении есть совпадающие множители, то их обычно объединяют и разложение в этом случае представляет собой произведение линейных множителей и квадратных трехчленов, не имеющих действительных корней (то есть дискриминант в этом случае отрицательный) в натуральных степенях.