1-2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Действие автоматического устройства можно описать функциональными зависимостями между величинами на его входах и выходах. Входные и выходные переменные величины, называемые также сигналами, могут иметь непрерывный или дискретный характер. В дискретной форме переменная величина выражается конечным (или счетным) числом ее значений. Устройства, сигналы на выходах которых могут принимать лишь конечные числа (как правило, 2 или 3) значений, называются *устройствами релейного действия* или просто *релейными устройствами*. Релейные устройства, осуществляющие логические преобразования сигналов, называются *логическими устройствами*. В дальнейшем рассматриваются только такие логические устройства, в которых каждая переменная может принимать лишь одно из двух возможных значений, обозначаемых цифрами 0 и 1.

Математическим аппаратом анализа и синтеза логических устройств служит *двузначная алгебра логики (булева алгебра)*, которая изучает связи между переменными, принимающими только два значения. Этим двум значениям ставятся в соответствие различные взаимоисключающие действия, условия или состояния в логических устройствах. Например: замыкание контакта — размыкание контакта; наличие сигнала — отсутствие сигнала; замкнутая цепь — разомкнутая цепь.

Необходимо подчеркнуть, что цифры 0 и 1 не выражают здесь количественных соотношений и являются не числами, а символами, и, следовательно, алгебра логических устройств является не алгеброй чисел, а *алгеброй состояний*.

Управляющее логическое устройство обычно содержит следующие основные части:

1. Входные элементы, воспринимающие входные воздействия от аппаратов управления и датчиков и преобразующие их с помощью согласующих элементов в сигналы, обозначаемые цифрами 0 и 1.

2. Промежуточные (логические) элементы, преобразующие в соответствии с заданной программой работы входные сигналы в выходные сигналы двух значений, также обозначаемые цифрами 0 и 1.

3. Усилители, повышающие мощность выходных сигналов.

4. Исполнительные элементы, воспринимающие выходные сигналы и выполняющие функции, для которых предназначено устройство. Ими являются контакторы, электромагниты, сигнальные лампы и т. п.

Элементы и сигналы (переменные) обозначаются обычно буквами латинского алфавита. В данной главе применяются в основном следующие обозначения:

Входные элементы	$A, B, C \ldots$
Контакты входных элементов:	
замыкающие	$a, b, c \ldots$
размыкающие	$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \ldots$
Входные переменные	$a, b, c \ldots$
Промежуточные элементы и промежуточные функции	$P_1, P_2, P_3 \ldots$
Промежуточные переменные	$p_1, p_2, p_3 \ldots$
Исполнительные элементы и выходные функции	$Z, Y, X \ldots$
Контакты исполнительных элементов:	
замыкающие	$z, y, x \ldots$
размыкающие	$\bar{z}, \bar{y}, \bar{x} \ldots$
Выходные переменные	$z, y, x \ldots$

Однако данная система буквенных обозначений не является обязательной, в иных случаях целесообразно применять другие обозначения, как, например, в § 1-10.

1-3. ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Логической переменной называется величина, которая может принимать только два значения — 0 или 1. Логические переменные обозначаются буквами латинского алфавита.

Логической функцией (функцией алгебры логики) называется функция, которая, как и ее аргументы (логические переменные), может принимать только два значения — 0 или 1. Логические функции выражают зависимость выходных переменных от входных переменных. Эти функции в зависимости от числа входных переменных делятся на функции одной переменной, двух переменных и многих переменных.

Различные комбинации значений входных переменных в логических функциях называются *наборами*. Функция является *полностью заданной*, если указаны ее значения для всех наборов.

Например, три входные переменные, принимая значения 0 или 1, могут дать всего восемь различных сочетаний нулевых и единичных значений, т. е. восемь наборов. Сопоставляя каждому набору значение функции, равное 0 или 1, можно получить табличное задание данной функции (табл. 1-2). Такая таблица называется *таблицей истинности* или таблицей соответствия.

Таблица 1-2

a	b	c	$f(a, b, c)$	a	b	c	$f(a, b, c)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0

Для упорядочения записи наборов в таблицах их можно записывать в виде целых положительных чисел в двоичной системе счисления, располагаемых в порядке их возрастания.

Обозначим через m_n число различных наборов для n входных переменных.

Для одной входной переменной возможны два набора: 0 и 1, $m_1=2$.

Для двух переменных — четыре набора: 00, 01, 10, 11, $m_2=m_1\cdot 2=2\cdot 2=2^2=4$.

Для трех переменных — восемь наборов: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, $m_3=m_2\cdot 2=4\cdot 2=2^3=8$.

Для n входных переменных число различных наборов конечно и равно $m_n=2^n$.

Задавая то или иное конкретное значение функции для каждого из 2^n наборов, можно тем самым задавать одну из возможных функций n переменных. Но так как каждому набору может соответствовать одно из двух значений (0 или 1) функции независимо от ее значений при других наборах, то число N различных логических функций от n переменных конечно и равно 2^{2^n}, поэтому прямое изучение логических функций с помощью таблиц практически возможно лишь до $n=3$. Для описания логических функций от большего числа переменных используют *принцип суперпозиции,* который состоит в подстановке в функцию новых функций вместо аргументов. Например, функция от трех переменных $f(a, b, c)$ может быть преобразована в две функции от двух переменных $f[g(a, b), c]$ и $g(a, b)$.

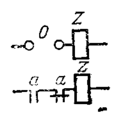
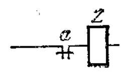
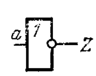
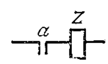
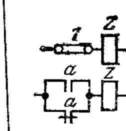
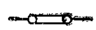
Поэтому в алгебре логики очень важную роль играют логические функции одной и двух переменных, с помощью которых, используя принцип суперпозиции, можно построить все логические функции от любого числа переменных.

Функции одной переменной

Рассмотрим *функции одной переменной* $f(a)$. Так как входная переменная a может иметь значения 0 или 1, существуют четыре функции одной переменной (табл. 1-3).

Функция $f_0=0$, называемая *нулевой,* и функция $f_3=1$, называемая *единичной,* не зависят от значений входной переменной и, следовательно, являются постоянными или функциями-константами.

Таблица 1-3

Функция	Таблица истинности			Символическое обозначение	Содержание логической функции	Структурная формула	Контактная схема	Условное обозначение
	a	1	0					
Нулевая	f_0	0	0	0	Функция никогда не имеет значение 1, каким бы ни было значение переменной	$f_0(Z)=0;$ $f_0(Z)=a\bar{a}$		
Инверсия (функция НЕ)	f_1	0	1	$\bar{a}$	Функция имеет значение, обратное значению переменной	$f_1(Z)=\bar{a}$		
Повторение	f_2	1	0	a	Функция повторяет значение переменной a	$f_2(Z)=a$		
Единичная	f_3	1	1	1	Функция всегда имеет значение 1, каким бы ни было значение переменной	$f_3(Z)=1;$ $f_3(Z)=a+\bar{a}$		

Функция $f_1=\bar{a}$ называется *инверсией*, она является одной из основных в алгебре логики. Ее называют также отрицанием, дополнением или просто *функцией НЕ*. Среди ее обозначений еще встречаются: $\neg a$, a', $\sim a$.

Функция $f_2=a$ называется *повторением*, поскольку ее значение является повторением значения входной переменной. Ее называют еще тождеством или тождественностью.

Функции двух переменных

Функции двух переменных $f(a, b)$ являются основными функциями алгебры логики. Четырем наборам двух входных переменных соответствует 16 возможных логических функций, которые приведены в табл. 1-4. Можно заметить, что шесть из них встречались среди функций одной переменной. Функции f_0 и f_{15} являются соответственно нулевой и единичной функциями.

Функции f_{10} и f_{12} являются функциями повторения и зависят каждая только от одной из двух входных переменных.

Функции f_3 и f_5 есть инверсии одной из входных переменных, т. е. являются фактически функциями только одной переменной.

Из остающихся десяти функций две (f_2 и f_{13}) не являются единственными, так как они отличаются от соответствующих им функций f_4 и f_{11} лишь порядком расположения входных переменных.

Для оставшихся теперь восьми оригинальных функций двух переменных (f_1, f_4, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{11}, f_{14}) можно указать некоторые их свойства, а также встречающиеся в литературе их названия и обозначения, выбрав для дальнейшего изложения те, которые наиболее соответствуют смыслу и содержанию логической функции и являются наиболее употребительными в технических приложениях алгебры логики.

Функция $f_1 = a \downarrow b$ называется *стрелкой Пирса.* Ее еще называют инверсией суммы, функцией ИЛИ—НЕ, функцией НИ ... НИ ..., функцией Даггера, функцией Вебба. Иногда ее обозначают как $a \bigcirc b$, $a \overline{\vee} b$. Для этой функции имеют место следующие соотношения:

$$a \downarrow 0 = \bar{a};\ a \downarrow 1 = 0;\ a \downarrow a = \bar{a};\ a \downarrow \bar{a} = 0.$$

Функцию $f_4 = a \leftarrow b$ в технических приложениях называют запретом. Иногда ее называют инверсией импликации. Встречаются еще ее обозначения в виде $a \underline{\rightarrow} b$, $a \overline{\rightarrow} b$. Для нее справедливы следующие соотношения:

$$a \leftarrow 0 = a;\quad a \leftarrow 1 = 0;$$
$$a \leftarrow a = 0;\quad a \leftarrow \bar{a} = a;\quad 1 \leftarrow a = \bar{a}.$$

Функция $f_6 = a \oplus b$ называется *неэквивалентностью.* Еще ее называют *исключающим ИЛИ,* неравнозначностью, альтернативой, сложением по модулю 2, разноименностью и обозначают посредством символов $\not\equiv$, ∇, Δ, $\not\approx$. Для этой функции имеют место соотношения

$$a \oplus 0 = a;\ a \oplus 1 = \bar{a};$$
$$a \oplus a = 0;\ a \oplus \bar{a} = 1.$$

Функция $f_7 = a/b$ называется *штрихом Шеффера,* а также инверсией произведения, *функцией И—НЕ,* несовместностью. Для нее справедливы следующие соотношения:

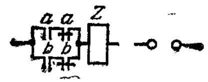
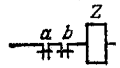
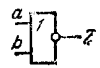
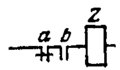
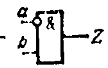
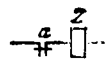
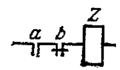
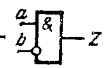
$$a/0 = 1;\ a/1 = \bar{a};$$
$$a/a = \bar{a};\ a/\bar{a} = 1.$$

Функция $f_8 = a \cdot b$ называется *конъюнкцией.* Ее еще называют произведением, логическим умножением, *функцией И,* пересечением и обозначают с помощью символов $\wedge$, $\cap$, &. Для этой функции справедливы следующие соотношения:

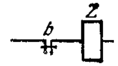
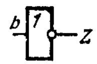
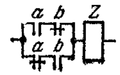
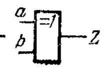
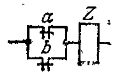
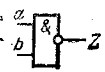
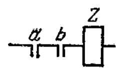
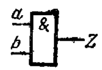
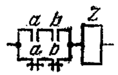
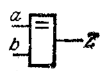
$$a \cdot 0 = 0;\ a \cdot 1 = a;$$
$$a \cdot a = a;\ a \cdot \bar{a} = 0;$$

Таблица 1-4

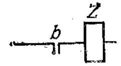
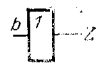
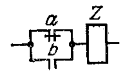
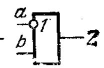
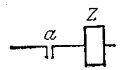
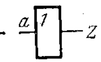
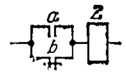
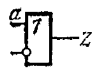
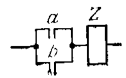
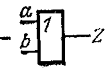
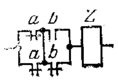
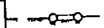
Функции двух переменных

Функция	Таблица истинности					Символическое обозначение	Содержание логической функции	Структурная формула	Контактная схема	Условное обозначение	Совершенные нормальные формы	
	a	1	1	0	0						дизъюнктивная	конъюнктивная
	b	1	0	1	0							
Нулевая	f_0	0	0	0	0	0	Функция никогда не имеет значения 1, какими бы ни были значения переменных	$f_0(Z)=$ $=a\bar{a}+b\bar{b}$			—	$(a+b)(a+\bar{b})\times$ $\times(\bar{a}+b)(\bar{a}+\bar{b})$
Стрелка Пирса (функция ИЛИ-НЕ)	f_1	0	0	0	1	$a\downarrow b$	Функция имеет значение 1 тогда и только тогда, когда обе переменные имеют значение 0	$f_1(Z)=\bar{a}\bar{b}$; $f_1(Z)=\overline{a+b}$;			$\bar{a}\bar{b}$	$(a+\bar{b})(\bar{a}+b)\times$ $\times(\bar{a}+\bar{b})$
Запрет a	f_2	0	0	1	0	$b\leftarrow a$	Функция имеет значение 0, если переменная a имеет значение 1, каким бы при этом ни было значение переменной b. Значения функции совпадают со значениями переменной b, если переменная a имеет значение 0	$f_2(Z)=\bar{a}b$			$\bar{a}b$	$(a+b)(\bar{a}+b)(a+$ $+\bar{b})$
Инверсия a (функция НЕ a)	f_3	0	0	1	1	$\bar{a}$	Функция имеет значение, обратное значению переменной a, и не зависит от значения переменной b	$f_3(Z)=\bar{a}$			$\bar{a}b+\bar{a}\bar{b}$	$(\bar{a}+b)(\bar{a}+\bar{b})$
Запрет b	f_4	0	1	0	0	$a\leftarrow b$	Функция имеет значение 0, если переменная b имеет значение 1, каким бы при этом ни было значение переменной a. Значения функции совпадают со значениями переменной a, если переменная b имеет значение 0	$f_4(Z)=a\bar{b}$			$a\bar{b}$	$(a+b)(a+\bar{b})\times$ $\times(\bar{a}+\bar{b})$

Продолжение табл. 1-4

Функция	Таблица истинности					Символическое обозначение	Содержание логической функции	Структурная формула	Контактная схема	Условное обозначение	Совершенные нормальные формы	
	a	1	1	0	0						дизъюнктивная	конъюнктивная
	b	1	0	1	0							
Инверсия b (функция НЕ b)	f_5	0	1	0	1	$\bar{b}$	Функция имеет значение, обратное значению переменной b, и не зависит от значения переменной a	$f_5(Z)=\bar{b}$			$a\bar{b}+\bar{a}\bar{b}$	$(a+\bar{b})\times(\bar{a}+\bar{b})$
Неэквивалентность (исключающая ИЛИ)	f_6	0	1	1	0	$a\oplus b$	Функция имеет значение 1 тогда и только тогда, когда либо переменная a, либо переменная b имеет значение 1 (но не обе вместе)	$f_6(Z)=a\bar{b}+\bar{a}b$			$a\bar{b}+\bar{a}b$	$(a+b)\times(\bar{a}+\bar{b})$
Штрих Шеффера (функция И—НЕ)	f_7	0	1	1	1	a/b	Функция имеет значение 0 тогда, и только тогда, когда обе переменные имеют значение 1	$f_7(Z)=\bar{a}+\bar{b}$; $f_7(Z)=\overline{ab}$			$a\bar{b}+\bar{a}b+\bar{a}\bar{b}$	$(\bar{a}+\bar{b})$
Конъюнкция (функция И)	f_8	1	0	0	0	ab	Функция имеет значение 1 тогда и только тогда, когда и переменная a, и переменная b имеют значение 1	$f_8(Z)=ab$			ab	$(a+b)\times(a+\bar{b})\times(\bar{a}+b)$
Эквивалентность (равнозначность)	f_9	1	0	0	1	$a\sim b$	Функция имеет значение 1 тогда и только тогда, когда обе переменные имеют одинаковое значение, и значение 0, когда переменные имеют разное значение	$f_9(Z)=ab+\bar{a}\bar{b}$			$ab+\bar{a}\bar{b}$	$(a+\bar{b})(\bar{a}+b)$

Продолжение табл. 1-4

Функция	Таблица истинности					Символическое обозначение	Содержание логической функции	Структурная формула	Контактная схема	Условное обозначение	Совершенные нормальные формы	
	a	1	1	0	0						дизъюнктивная	конъюнктивная
	b	1	0	1	0							
Повторение *b*	f_{10}	1	0	1	0	b	Функция повторяет значение переменной *b* независимо от значения переменной *a*	$f_{10}(Z)=b$			$ab+\bar{a}b$	$(a+b)(\bar{a}+b)$
Импликация *b*	f_{11}	1	0	1	1	$a\to b$	Функция имеет значение 0 тогда и только тогда, когда переменная *a* имеет значение 1, а переменная *b* имеет значение 0	$f_{11}(Z)=\bar{a}+b$			$ab+\bar{a}b+$ $+\bar{a}\bar{b}$	$(\bar{a}+b)$
Повторение *a*	f_{12}	1	1	0	0	a	Функция повторяет значение переменной *a*, независимо от значения переменной *b*	$f_{12}(Z)=a$			$ab+a\bar{b}$	$(a+b)(a+\bar{b})$
Импликация *a*	f_{13}	1	1	0	1	$b\to a$	Функция имеет значение 0 тогда и только тогда, когда переменная *b* имеет значение 1, а переменная *a* имеет значение 0	$f_{13}(Z)=a+\bar{b}$			$ab+a\bar{b}+$ $+\bar{a}\bar{b}$	$(a+\bar{b})$
Дизъюнкция (функция ИЛИ)	f_{14}	1	1	1	0	$a+b$	Функция имеет значение 0 тогда и только тогда, когда обе переменные имеют значение 0. Функция имеет значение 1, когда или переменная *a*, или переменная *b*, или обе вместе имеют значение 1	$f_{14}(Z)=a+b$			$ab+a\bar{b}+$ $+\bar{a}b$	$(a+b)$
Единичная	f_{15}	1	1	1	1	1	Функция всегда имеет значение 1, какими бы ни были значения переменных	$f_{15}(Z)=(a+$ $+\bar{a})(b+\bar{b})$			$ab+a\bar{b}+$ $+\bar{a}b+$ $+\bar{a}\bar{b}$	—

Функция $f_9 = a \sim b$ называется *эквивалентностью*, а также равнозначностью. Для ее обозначения употребляют также символы $\equiv$, $\rightleftarrows$. Для нее имеют место соотношения

$$a \sim 0 = \bar{a};\quad a \sim 1 = a;$$
$$a \sim a = 1;\quad a \sim \bar{a} = 0.$$

Функция $f_{11} = a \to b$ называется *импликацией* (иногда включением). Для нее справедливы соотношения

$$a \to 0 = \bar{a};\quad a \to 1 = 1;\quad a \to a = 1;$$
$$a \to \bar{a} = \bar{a};\quad 0 \to a = 1;\quad 1 \to a = a.$$

Функция $f_{14} = a + b$ называется *дизъюнкцией*, а также суммой, логическим сложением, *функцией ИЛИ*, объединением. Для ее обозначения применяются также символы $\vee$, $\cup$. Для дизъюнкции справедливы следующие равенства:

$$a + 0 = a;\quad a + 1 = 1;$$
$$a + a = a;\quad a + \bar{a} = 1.$$

Логические функции и реализующие их схемы

Логические функции подразделяются на два класса: комбинационные и последовательностные. *Комбинационными* называются логические функции, значения которых определяются только комбинациями значений входных переменных вне зависимости от последовательности появления этих комбинаций.

Последовательностными называются логические функции, значения которых зависят не только от комбинаций входных переменных, но и от последовательности появления этих комбинаций, т. е. содержат элемент ПАМЯТЬ.

Комбинационные и последовательностные функции реализуются соответственно *однотактными* и *многотактными* схемами релейного действия.

Многотактные схемы, или схемы с обратными связями, являются основными схемами промышленной автоматики.

Условия работы однотактных схем могут быть заданы таблицами истинности. Условия работы многотактных схем, записанные в виде такой таблицы, будут содержать противоречивые строки и называться нереализуемыми. Нереализуемые условия работы схемы можно перевести в реализуемые, вводя дополнительные переменные с таким расчетом, чтобы различным комбинациям значений выходных переменных соответствовали различные комбинации значений входных и дополнительных входных переменных. Дополнительные входные переменные носят название *промежуточных* переменных. Они могут быть получены за счет образования обратных связей, посредством которых сигналы с выходов схемы или от промежуточных элементов подаются на входы соответствующих элементов схемы. Если использование имеющихся в схеме промежуточных и выходных сигналов не позволяет сделать ее реализуемой, следует вводить дополнительные промежуточные элементы, с выходов которых будут вводиться в схему необходимые промежуточные переменные. В качестве промежуточных переменных в первую очередь используются выходные переменные.

1-4. ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Алгеброй принято называть любое множество (совокупность) *элементов,* на котором заданы некоторые *операции* над элементами множества и *аксиомы* (правила), которым подчиняются эти операции.

Элементы алгебры могут быть произвольной природы: числа, буквы, высказывания, функции некоторого класса, матрицы, векторы и т. д.

Операции представляют собой действия, с помощью которых из конечного числа некоторых заданных элементов алгебры строятся новые элементы той же алгебры.

Аксиомы определяют свойства операций и отношения операций между собой.

В современной математике изучается много различных алгебр: алгебра чисел, алгебра поля, алгебра колец, алгебра групп, алгебра векторных пространств, алгебра матриц, алгебра логики и т. д.

Но, как это следует из самого определения понятия алгебры, все эти алгебры строятся исходя из трех основных принципов:

задание множества элементов, на которых строится алгебра;

задание операций над элементами множества;

задание аксиом, которым подчиняются операции.

Алгебра логики также построена на основе этих принципов.

Множеством элементов алгебры логики является множество всех логических функций. При этом константы 0, 1 и просто логические переменные (рассматриваемые как функции одной переменной, равные самим себе) входят сюда как частные случаи логической функции.

В алгебре логики имеется множество операций. Наиболее употребительными операциями являются инверсия, конъюнкция и дизъюнкция. Они позволяют построить любую логическую функцию.

В алгебре логики введена следующая система аксиом, определяющая свойства и отношения основных операций:

$$a+b=b+a; \tag{1-2}$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c; \tag{1-3}$$

$$a+b\cdot c=(a+b)\cdot(a+c); \tag{1-3'}$$

$$a+a\cdot\bar{a}=a; \tag{1-4}$$

$$a+\bar{a}=b+\bar{b}; \tag{1-5}$$

$$a\cdot\bar{a}=b\cdot\bar{b}. \tag{1-5'}$$

Применение алгебры логики для математического исследования релейных устройств [51, 98] основывается на следующей системе аксиом, отражающих упоминавшиеся ранее (см. § 1-2) основные идеи теории релейных устройств, когда любая переменная величина (a, b ...) представляет собой или условие работы, или состояние релейного элемента или схемы.

1. Существуют такие 0 и 1, что

$$\bar{0}=1;$$

$$\bar{1}=0.$$

2. Переменная может принимать лишь одно из двух возможных значений:

$$a=0, \text{ если } a \neq 1;$$

$$a=1, \text{ если } a \neq 0.$$

3. $$0 \cdot 0=0; \quad (1\text{-}6)$$

$$1+1=1. \quad (1\text{-}6')$$

4. $$1 \cdot 1=1; \quad (1\text{-}7)$$

$$0+0=0. \quad (1\text{-}7')$$

5. $$1 \cdot 0=0 \cdot 1=0; \quad (1\text{-}8)$$

$$0+1=1+0=1. \quad (1\text{-}8')$$

Каждая из аксиом (1-6)—(1-8) состоит из двух частей, что соответствует правилу инверсии, которое заключается в том, что любая аксиома может быть преобразована в другую аксиому одновременной заменой цифры 0 на цифру 1 и операции конъюнкции на дизъюнкцию и наоборот.

На основе этих аксиом выводятся все теоремы, выражающие основные *законы алгебры логики.* Их еще называют системой равносильных преобразований функций или просто равносильностями.

Во избежание многократного применения скобок для записи формул и выражений алгебры логики условимся, что знак инверсии (—) связывает более тесно, чем все другие знаки; знак конъюнкции (·) связывает более тесно, чем знак дизъюнкции (+); последний же связывает теснее всех оставшихся знаков; все знаки связывают теснее, чем знак равенство (=). Условимся также, что наряду с круглыми скобками при написании формул могут использоваться квадратные и фигурные скобки; внешние скобки в формуле могут опускаться.

Тогда, например, выражение

$$[(\bar{a} \cdot d) + (\bar{b} \cdot c)] \to e$$

можно записать в виде

$$\bar{a}d + \bar{b}c \to e,$$

предусматривающем следующий порядок выполнения операций: 1) операция инверсии над a; 2) операция инверсии над b; 3) операция конъюнкции над $\bar{a}$ и d; 4) операция конъюнкции над $\bar{b}$ и c; 5) операция дизъюнкции над $\bar{a}d$ и $\bar{b}c$; 6) операция импликации над $\bar{a}d+\bar{b}c$ и e.

Законы алгебры логики

1. Законы *нулевого множества:*

$$0+a=a; \quad (1\text{-}9)$$

$$0 \cdot a=0; \quad (1\text{-}9')$$

$$0 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot w=0,$$

т. е. конъюнкция любого числа переменных обращается в нуль, если какая-либо одна переменная имеет значение 0, независимо от значений других переменных.

2. Законы *универсального множества:*

$$1 \cdot a=a; \quad (1\text{-}10)$$

$$1+a=1; \quad (1\text{-}10')$$

$$1+a+b+c+\ldots+w=1,$$

т. е. дизъюнкция любого числа переменных обращается в единицу, если хотя бы одна из ее переменных имеет значение 1, независимо от значений других переменных.

3. Законы *идемпотентности* (повторения, тавтологии):

$$aa=a; \tag{1-11}$$

$$aa\ldots a=a^n=a;$$

$$a+a=a; \tag{1-11'}$$

$$a+a+\ldots+a=na=a.$$

4. Закон *двойной инверсии:*

$$\bar{\bar{a}}=a, \tag{1-12}$$

т. е. двойную инверсию можно снять.

5. Законы *дополнительности:*

логическое противоречие:

$$a\bar{a}=0, \tag{1-13}$$

т. е. конъюнкция любой переменной и ее инверсии есть 0;

закон *исключенного третьего:*

$$a+\bar{a}=1, \tag{1-13'}$$

т. е. дизъюнкция любой переменной и ее инверсии есть 1.

6. *Коммутативные* (переместительные) законы:

$$ab=ba; \tag{1-14}$$

$$a+b=b+a, \tag{1-14'}$$

т. е. результаты выполнения операций конъюнкции и дизъюнкции не зависят от того, в каком порядке следуют переменные.

7. *Ассоциативные* (сочетательные) законы:

$$a(bc)=(ab)c=abc; \tag{1-15}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c, \tag{1-15'}$$

т. е. для записи конъюнкции или дизъюнкции скобки можно опустить.

8. *Дистрибутивные* (распределительные) законы:

конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$a(b+c)=ab+ac; \tag{1-16}$$

дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$a+bc=(a+b)(a+c). \tag{1-16'}$$

9. Законы *поглощения:*

$$a(a+b)=a,$$

$$a(a+b)(a+c)\ldots(a+w)=a; \tag{1-17}$$

$$a+ab=a,$$

$$a+ab+ac+\ldots+aw=a. \tag{1-17'}$$

10.

$$a(\bar{a}+b)=ab; \tag{1-18}$$

$$a+\bar{a}b=a+b. \tag{1-18'}$$

11. Законы *склеивания* (распространения):

$$ab+a\bar{b}=a; \tag{1-19}$$

$$(a+b)(a+\bar{b})=a. \tag{1-19'}$$

12. Законы *обобщенного склеивания:*

$$ab+\bar{a}c+bc=ab+\bar{a}c; \tag{1-20}$$

$$(a+b)(\bar{a}+c)(b+c)=(a+b)(\bar{a}+c). \tag{1-20'}$$

13.

$$(a+b)(\bar{a}+c)=ac+\bar{a}b. \tag{1-21}$$

14. Законы *де Моргана* (законы инверсии):

для двух переменных:

$$\overline{ab}=\bar{a}+\bar{b}, \tag{1-22}$$

т. е. инверсия конъюнкции есть дизъюнкция инверсий;

$$\overline{a+b}=\bar{a}\bar{b}, \tag{1-23}$$

т. е. инверсия дизъюнкции есть конъюнкция инверсий;

для n переменных:

$$\overline{abc\ldots w}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\ldots+\bar{w}; \tag{1-24}$$

$$\overline{a+b+c+\ldots+w}=\bar{a}\bar{b}\bar{c}\ldots\bar{w}; \tag{1-25}$$

обобщение законов де Моргана, предложенное Шенноном,

$$\overline{f(a,\ b,\ c,\ldots,w,\ \cdot,+)}=f(\bar{a},\ \bar{b},\ldots,\bar{w},\ +,\cdot), \tag{1-26}$$

т. е. инверсия любой функции получается заменой каждой переменной ее инверсией и одновременно взаимной заменой символов конъюнкции и дизъюнкции.

15. Теорема *разложения*

$$f(a,\ b,\ldots,w)=af(1,\ b,\ldots,w)+\bar{a}f(0,\ b,\ldots,w); \tag{1-27}$$

$$f(a,\ b,\ldots,w)=[a+f(0,\ b,\ldots,w)]\cdot[\bar{a}+f(1,\ b,\ldots,w)]. \tag{1-28}$$

Доказательство этих равенств состоит в приведении их к тождествам путем подстановки в каждое из выражений вначале $a=1$ и $\bar{a}=0$, а затем $a=0$ и $\bar{a}=1$. Функции, содержащиеся в членах правой части, в свою очередь могут быть разложены по любой из оставшихся переменных. Продолжение процесса разложения последовательно по каждой из первоначальных n переменных приведет к полному разложению в ряд. Если функция разложена на основе теоремы (1-27), то полученное выражение, называемое совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ), имеет вид дизъюнкции конъюнкций, каждый член которой содержит каждую из n переменных или ее инверсию. При использовании теоремы (1-28) полное разложение приводит к совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ) в виде конъюнкции дизъюнкций, каждая из которых содержит каждую из n переменных или ее инверсию. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы будут рассмотрены ниже (см. § 1-6).

Пример 1-1. Разложить функцию $f(a, b, c)$ по переменным a и b. В соответствии с (1-27)

$$f(a, b, c)=abf(1, 1, c)+a\bar{b}f(1, 0, c)+\bar{a}bf(0, 1, c)+\bar{a}\bar{b}f(0, 0, c).$$

16.

$$af(a, \bar{a}, b, c, \ldots, w)=af(1, 0, b, c, \ldots, w); \quad (1\text{-}29)$$

$$\bar{a}f(a, \bar{a}, b, c, \ldots, w)=\bar{a}f(0, 1, b, c, \ldots, w); \quad (1\text{-}30)$$

$$a+f(a, \bar{a}, b, c, \ldots, w)=a+f(0, 1, b, c, \ldots, w); \quad (1\text{-}31)$$

$$\bar{a}+f(a, \bar{a}, b, c, \ldots, w)=\bar{a}+f(1, 0, b, c, \ldots, w). \quad (1\text{-}32)$$

Таковы основные законы (равносильности) алгебры логики. Следует подчеркнуть, что все эти законы остаются справедливыми при замене фигурирующих в них переменных a, b, c любыми формулами (функциями) алгебры логики.

Справедливость любого закона алгебры логики можно доказать разными методами.

Законы 1—5 доказываются путем прямой подстановки вместо двоичной переменной a значений 0 или 1, что непосредственно приводит к принятым аксиомам.

Формальный (аналитический) метод доказательства законов состоит в том, что справедливость каждого доказывается на основе аксиом и ранее доказанных законов. Доказательство заключается в приведении обеих частей выражения к одному виду с помощью последовательных преобразований.

Приведенные ниже доказательства некоторых законов можно рассматривать также как примеры равносильных преобразований функций.

Закон поглощения (1-17). Для левой части на основании (1-16) можно записать:

$$a(a+b)=aa+ab.$$

Затем на основании (1-11)

$$aa+ab=a+ab;$$

на основании (1-10)

$$a+ab=a\cdot 1+ab;$$

на основании (1-16)

$$a\cdot 1+ab=a(1+b);$$

на основании (1-10)

$$a(1+b)=a\cdot 1=a.$$

Следовательно,

$$a(a+b)=a.$$

Закон 10 (1-18′).

На основании (1-16′), (1-13′), (1-10)

$$a+\bar{a}b=(a+\bar{a})(a+b)=1(a+b)=a+b.$$

Закон 13 (1-21)

На основании последовательного применения (1-16), (1-13), (1-19), (1-13), (1-10), (1-16), (1-14), (1-16), (1-10), (1-14) получим:

$$(a+b)(\bar{a}+c)=(a+b)\bar{a}+(a+b)c=a\bar{a}+\bar{a}b+ac+bc=0+\bar{a}b+ac+bc=$$

$$=\bar{a}b+ac+bc=\bar{a}b+ac+bc(a+\bar{a})=\bar{a}b+ac+abc+\bar{a}bc=\bar{a}b+\bar{a}bc+ac+acb=$$

$$=\bar{a}b(1+c)+ac(1+b)=\bar{a}b+ac=ac+\bar{a}b.$$

Ряд законов доказывается методом перебора всех значений, который состоит в том, что составляются все возможные комбинации (наборы) значений переменных и для них проверяется справедливость закона. Доказательство ведется обычно в табличной форме путем построения и сравнения таблиц истинности. Для доказательства законов достаточно показать тождественность выражений, образующих левую и правую стороны доказываемого соотношения при всех наборах переменных, принимающих значения 0 или 1. Ниже приведены примеры доказательств.

Закон де Моргана (1-22). Для доказательства построена совмещенная таблица истинности (табл. 1-5).

Закон де Моргана (1-23) (табл. 1-6).

Таблица 1-5

a	b	ab	$\overline{ab}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}+\bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

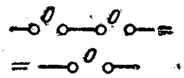
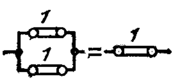
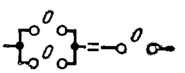
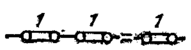
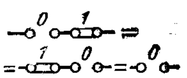
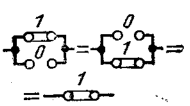
Таблица 1-6

a	b	$a+b$	$\overline{a+b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}\bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Совпадение значений обеих частей при одинаковых наборах переменных доказывает справедливость этих законов.

Справедливость законов алгебры логики можно установить также путем рассмотрения контактных схем, соответствующих левым и правым частям равносильных выражений.

Таблица 1-7

Номер аксиомы	Формула аксиомы	Схема	Словесная формулировка
1	$\bar{0}=1$ $\bar{1}=0$	—	Существуют два взаимоисключающих состояния схемы: разомкнутое 0 и замкнутое 1
2	$a=0$ при $a\neq 1$; $a=1$ при $a\neq 0$	—	Схема может находиться только в одном из двух возможных состояний
3	$0\cdot 0=0$;		Разомкнутая схема, соединенная последовательно с разомкнутой схемой, есть разомкнутая схема.
	$1+1=1$		Замкнутая схема, соединенная параллельно с замкнутой схемой, есть замкнутая схема
4	$0+0=0$;		Разомкнутая схема, соединенная параллельно с разомкнутой схемой, есть разомкнутая схема.
	$1\cdot 1=1$		Замкнутая схема, соединенная последовательно с замкнутой схемой, есть замкнутая схема.
5	$0\cdot 1=1\cdot 0=0$;		Разомкнутая схема, соединенная последовательно с замкнутой схемой в любом порядке, есть разомкнутая схема,
	$1+0=0+1=1$		Замкнутая схема, соединенная параллельно с разомкнутой схемой в любом порядке, есть замкнутая схема

Логические функции инверсии, конъюнкции и дизъюнкции естественны и удобны для выражения свойств релейно-контактных схем с последовательно-параллельной структурой.

Для физической интерпретации законов алгебры логики посредством релейно-контактных схем вводится следующая совокупность правил:

проводимость контакта или группы контактов равна 0 для разомкнутой цепи и равна 1 для замкнутой цепи;

элементы схемы обозначаются в соответствии со сказанным в § 1-2;

последовательному соединению контактов соответствует конъюнкция переменных, сопоставленных с этими контактами, а параллельному соединению контактов — дизъюнкция переменных;

замыкающему контакту сопоставляется переменная без инверсии, размыкающему контакту — инверсия переменной.

Иллюстрация аксиом контактными схемами приведена в табл. 1-7.

Доказательства справедливости основных законов алгебры логики применительно к преобразованию контактных схем приведены в табл. 1-8.

Между равносильными по действию схемами на рисунках указан знак равенства. Контактные структуры являются простым и удобным средством иллюстрации законов алгебры логики. Однако те же законы, как будет показано в последующих главах, применимы и к структурам, построенным из бесконтактных логических элементов.

Понятие о принципе двойственности

Две функции алгебры логики называются *двойственными*, если одна получается из другой заменой каждой операции конъюнкции на операцию дизъюнкции и наоборот. Нетрудно заметить, что почти все вышеприведенные законы алгебры логики обладают свойством двойственности.

Например, для функции $F(a, b) = ab + \bar{a}b$ двойственной является функция $F^*(a, b) = (a+b)(\bar{a}+b)$.

Принцип двойственности формулируется так: если функции F_1 и F_2 равносильны, то равносильны и двойственные им функции F_1^* и F_2^*.

Следует отличать двойственные формы функции от *инверсных* функций, которые получаются из исходных их инверсированием. При этом не только все операции заменяются на двойственные, но и все переменные заменяются их инверсиями.

Например, для функции $F(a, b) = ab + \bar{a}b$ инверсной является функция $\bar{F}(a, b) = \overline{ab + \bar{a}b} = (\bar{a}+\bar{b})(a+\bar{b})$.

Очевидно, что инверсная функция и двойственная форма функции связаны отношением

$$\bar{F}(a, b, \dots, w) = F^*(\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{w}).$$

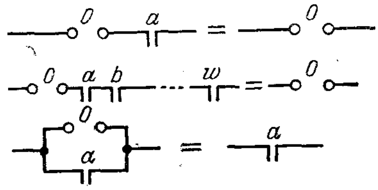
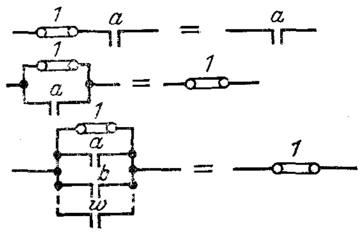
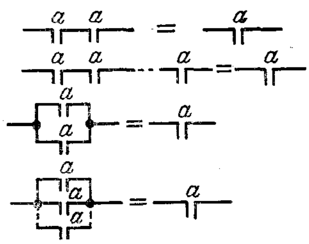
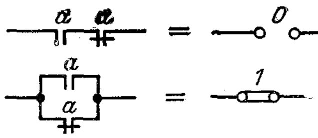
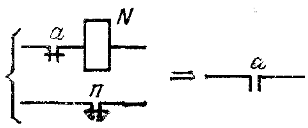
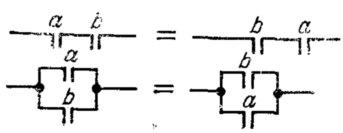
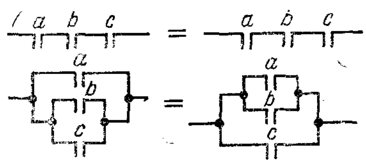
Выше были изложены законы алгебры логики, основанные на логических операциях инверсии, конъюнкции и дизъюнкции.

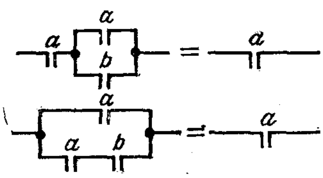
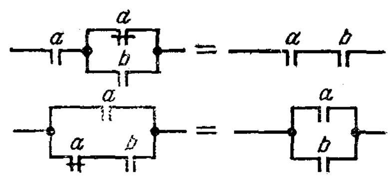
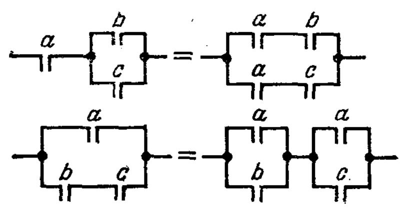
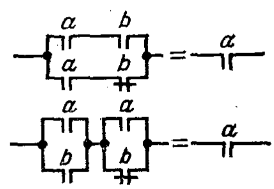
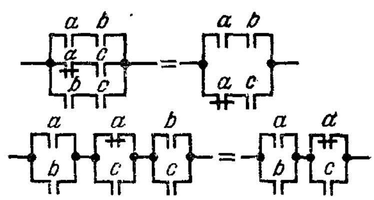
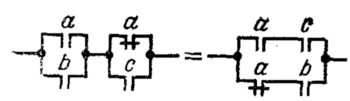
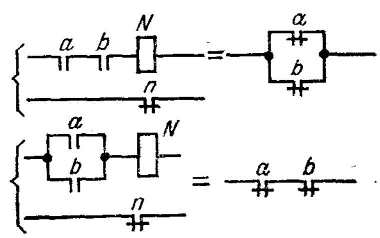
Рассмотрим справедливость коммутативного, ассоциативного и дистрибутивного законов алгебры логики для некоторых других логических функций, приведенных в табл. 1-4.

1. Для функций стрелки Пирса и штриха Шеффера имеет место коммутативный закон

$$a \downarrow b = b \downarrow a; \quad a/b = b/a. \tag{1-33}$$

Таблица 1-8

Формула закона	Эквивалентная схема
$0\cdot a=0;$ $0\cdot ab\ldots w=0;$ $0+a=a$	
$1\cdot a=a;$ $1+a=1;$ $1+a+b+\ldots+w=1$	
$aa=a;$ $aa\ldots a=a;$ $a+a=a;$ $a+a+\ldots+a=a$	
$a\bar{a}=0;$ $a+\bar{a}=1$	
$a=a$	
$ab=ba;$ $a+b=b+a$	
$a(bc)=(ab)c;$ $a+(b+c)=(a+b)+c$	

Формула закона	Эквивалентная схема
$a(a+b)=a$; $a+ab=a$	
$\overline{a}(a+b)=ab$; $a+\overline{a}b=a+b$	
$a(b+c)=ab+ac$; $a+bc=(a+b)(a+c)$	
$ab+a\overline{b}=a$; $(a+b)(a+\overline{b})=a$	
$ab+\overline{a}c+bc=ab+\overline{a}c$; $(a+b)(\overline{a}+c)(b+c)=(a+b)(\overline{a}+c)$	
$(a+b)(\overline{a}+c)=ac+\overline{a}b$	
$\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$; $\overline{a+b}=\overline{a}\,\overline{b}$	

Ассоциативный закон для них несправедлив:

$$\left.\begin{array}{l} a \downarrow (b \downarrow c) \neq (a \downarrow b) \downarrow c; \\ a/(b/c) \neq (a/b)/c. \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}34)$$

Дистрибутивный закон для этих функций относительно друг друга имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} a \downarrow (b/c) = (\bar a/b) \downarrow (\bar a/c); \\ a/(b \downarrow c) = (\bar a \downarrow b)/(\bar a \downarrow c). \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}35)$$

Для функции стрелки Пирса и штриха Шеффера имеют место соотношения:

$$\overline{a \downarrow b} = a + b; \ \overline{a/b} = ab. \qquad (1\text{-}36)$$

Доказательство: по определению функций

$$a \downarrow b = \bar a \bar b; \ a/b = \bar a + \bar b;$$

тогда

$$\overline{a \downarrow b} = \overline{\bar a \bar b}; \ \overline{a/b} = \overline{\bar a + \bar b},$$

откуда по закону де Моргана

$$\overline{\bar a \bar b} = \bar{\bar a} + \bar{\bar b} = a + b;$$

$$\overline{\bar a + \bar b} = \bar{\bar a}\bar{\bar b} = ab;$$

следовательно,

$$\overline{a \downarrow b} = a + b;$$

$$\overline{a/b} = ab.$$

Отсюда очевидно и обратное, т. е.

$$a \downarrow b = \overline{a + b}; \ a/b = \overline{ab}. \qquad (1\text{-}37)$$

На основании этого нетрудно показать справедливость соотношений (1-35). Докажем, например, справедливость равенства

$$a/(b \downarrow c) = (\bar a \downarrow b)/(\bar a \downarrow c).$$

Для этого преобразуем обе части к выражениям, содержащим только конъюнкцию, дизъюнкцию и инверсию:

$$a/(b \downarrow c) = a/\overline{b + c} = \overline{a\,\overline{(b + c)}} = \bar a + b + c;$$

$$(\bar a \downarrow b)/(\bar a \downarrow c) = \overline{\overline{(\bar a + b)}\,\overline{(\bar a + c)}} = \overline{(a\bar b)\,a\bar c} = \overline{a\bar b\bar c} = \bar a + b + c.$$

Совпадение левой и правой частей доказывает справедливость равенства.

Функции стрелки Пирса и штриха Шеффера связаны между собой соотношениями, аналогичными формулам де Моргана для функций конъюнкции и дизъюнкции:

$$\overline{a \downarrow b} = \bar a/\bar b; \ \overline{a/b} = \bar a \downarrow \bar b. \qquad (1\text{-}38)$$

Доказательство: согласно (1-36) левую часть соотношений (1-38) можно записать как

$$\overline{a \downarrow b} = a + b; \ \overline{a/b} = ab;$$

для правой части по определению функции находим:

$$\bar a/\bar b = \bar{\bar a} + \bar{\bar b} = a + b;$$

$$\bar a \downarrow \bar b = \bar{\bar a}\bar{\bar b} = ab.$$

Следовательно, равенства (1-38) справедливы.

2. Для функций неэквивалентности и эквивалентности справедливы коммутативный и ассоциативный законы, а также дистрибутивный закон конъюнкции относительно функции неэквивалентности:

$$\left.\begin{aligned} & a \oplus b = b \oplus a; \\ & a \sim b = b \sim a; \\ & a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c; \\ & a \sim (b \sim c) = (a \sim b) \sim c; \\ & a(b \oplus c) = ab \oplus ac. \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}39)$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$a + b = a \oplus b \oplus ab; \ ab = a \oplus a\bar{b}. \qquad (1\text{-}40)$$

Из этих функций одна является инверсией другой:

$$a \sim b = \overline{a \oplus b}; \ a \oplus b = \overline{a \sim b}. \qquad (1\text{-}41)$$

Доказательство: по определению $a \sim b = ab + \bar{a}\bar{b}$;
тогда

$$\overline{a \sim b} = \overline{ab + \bar{a}\bar{b}} = (\bar{a} + \bar{b})(a + b) =$$
$$= \bar{a}a + a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{b}b = a\bar{b} + \bar{a}b = a \oplus b.$$

3. Для функций импликации и запрета коммутативный и ассоциативный законы несправедливы, т. е.

$$a \to b \neq b \to a; \ a \leftarrow b \neq b \leftarrow a.$$

Для этих функций имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} & a \to b = \bar{b} \to \bar{a}; \ a \to b \to a = a; \\ & \bar{a} \to b = a + b; \ \overline{a \to \bar{b}} = ab; \\ & a \leftarrow b = \bar{b} \leftarrow \bar{a}; \ a \leftarrow b \leftarrow a = a; \\ & a \leftarrow \bar{b} = ab; \ \overline{\bar{a} \leftarrow b} = a + b. \end{aligned}\right. \qquad (1\text{-}42)$$

Между функциями импликации и запрета существует следующая зависимость:

$$a \to b = \overline{a \leftarrow b}; \ a \leftarrow b = \overline{a \to b}. \qquad (1\text{-}43)$$

Кроме того, эти функции связаны между собой соотношениями, подобными формулам де Моргана:

$$\overline{a \to b} = \bar{b} \leftarrow \bar{a}; \ \overline{a \leftarrow b} = \bar{b} \to \bar{a}. \qquad (1\text{-}44)$$

1-5. СУПЕРПОЗИЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если разделить таблицу функций двух переменных на две части по линии, разделяющей функции f_7 и f_8, и принять эту линию за ось симметрии, то нетрудно убедиться, что любая функция, взятая из одной части таблицы, является инверсией симметричной ей функции, принадлежащей другой части таблицы. Это можно записать следующим образом:

$$f_{15-i} = \bar{f}_i, \text{ где } i = 0, 1, 2, \ldots, 15.$$

Отсюда следует, что еще четыре функции из восьми оставленных ранее в рассмотрении функций двух переменных не являются самостоятельными, так как

$$f_1 = \bar{f}_{14}, \text{ т. е. } a \downarrow b = \overline{a + b};$$
$$f_4 = \bar{f}_{11}, \text{ т. е. } a \leftarrow b = \overline{a \to b};$$
$$f_6 = \bar{f}_9, \text{ т. е. } a \oplus b = \overline{a \sim b};$$
$$f_7 = \bar{f}_8, \text{ т. е. } a / b = \overline{ab}.$$

Исключив из рассмотрения операции $\downarrow$, $\leftarrow$, $\oplus$ и $/$, получим следующий набор логических функций:

$$f_8 = ab;\ f_9 = a \sim b;$$
$$f_{11} = a \rightarrow b;\ f_{14} = a + b.$$

Импликация и эквивалентность могут быть выражены через конъюнкцию и дизъюнкцию следующим образом:

$$a \rightarrow b = \bar{a} + b;\ a \rightarrow b = \overline{a\bar{b}};$$

$$a \sim b = (\bar{a} + b)(a + \bar{b});\ a \sim b = \bar{a}\bar{b} + ab.$$

Таким образом, для записи любой логической функции одной и двух переменных достаточно иметь три логические функции:

инверсию $f_3 = \bar{a}$ (или $f_5 = \bar{b}$);

конъюнкцию $f_8 = ab$;

дизъюнкцию $f_{14} = a + b$.

Это хорошо видно из таблицы функций двух переменных, где структурные формулы всех функций и их совершенные нормальные формы записаны через функции инверсии, конъюнкции и дизъюнкции. Логические функции инверсии, конъюнкции и дизъюнкции обладают наиболее простыми и привычными свойствами, почти аналогичными алгебраическим операциям умножения и сложения. Эти функции очень удобны и естественны для выражения свойств параллельного и последовательного соединения замыкающих и размыкающих контактов в релейно-контактных схемах, как это показано в табл. 1-7 и 1-8.

Бесконтактные же логические элементы позволяют непосредственно получать все логические функции, приведенные в таблице функций двух переменных.

Если воспользоваться правилом де Моргана

$$a + b = \overline{\bar{a}\bar{b}};\ ab = \overline{\bar{a} + \bar{b}},$$

позволяющим получать дизъюнкцию через конъюнкцию и инверсию или конъюнкцию через дизъюнкцию и инверсию, то придем к системе, состоящей всего лишь из двух функций:

инверсия $f_3 = \bar{a}$;

конъюнкция $f_8 = ab$ (или дизъюнкция $f_{14} = a + b$), применение которых позволяет записать любую логическую функцию.

В этом отношении интересны также функции запрета и импликация [11].

Если одну из входных переменных импликации сделать постоянно равной нулю, то

$$a \rightarrow 0 = \bar{a} + 0 = \bar{a}.$$

Далее

$$(a \rightarrow 0) \rightarrow b = \bar{\bar{a}} + b = a + b,$$

т. е. из импликации и нулевой функции тоже можно построить любую другую функцию.

Для того чтобы сделать функцию запрета универсальной, к ней нужно добавить единичную функцию

$$1 \leftarrow a = \overline{a}1 = \overline{a};\quad b \leftarrow (1 \leftarrow a) = \overline{\overline{a}}b = ab,$$

что также позволит построить на ней любую функцию.

Из этих двух функций в техническом отношении проще импликация, так как для того, чтобы подавать на вход постоянный нуль, достаточно ничего к нему не присоединять, в то время как для подачи постоянной единицы нужен источник постоянного сигнала.

Функции эквивалентности и неэквивалентности в качестве универсальных функций неудобны, но они интересны тем, что превращают входную переменную в ее инверсию или повторяют ее в зависимости от значения второй входной переменной. В самом деле,

$$a \sim 0 = \overline{a}\overline{0} + a0 = \overline{a};\quad a \sim 1 = \overline{a}\overline{1} + a1 = a;$$

$$a \oplus 0 = \overline{a}0 + a\overline{0} = a;\quad a \oplus 1 = \overline{a}1 + a\overline{1} = \overline{a}.$$

Но особое место среди функций двух переменных занимают стрелка Пирса и штрих Шеффера, отличающиеся тем, что каждая из них в отдельности достаточна для записи любой логической функции. Действительно,

$$a \downarrow a = \overline{a};$$

$$(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b) = \overline{a} \downarrow \overline{b} = \overline{\overline{a}}\,\overline{\overline{b}} = ab,$$

т. е. стрелка Пирса позволяет получить инверсию и конъюнкцию, а этого достаточно для построения любой функции.

Аналогично для штриха Шеффера

$$a/a = \overline{a};$$

$$(a/a)/(b/b) = \overline{\overline{a}} + \overline{\overline{b}} = a + b.$$

Следовательно, штрих Шеффера позволяет получить инверсию и дизъюнкцию, что тоже достаточно для построения любой функции.

Таким образом, выражая одни логические функции через другие и используя принцип суперпозиции, можно аргументами каждой из рассмотренных выше функций одной и двух переменных считать произвольные логические функции и получать многие новые равносильные преобразования функций.

Например, из формул

$$a \oplus b = \overline{a \sim b};$$

$$a \sim b = (\overline{a} + b)(a + \overline{b});$$

$$a \rightarrow b = \overline{a} + b$$

следует:

$$a \oplus b = \overline{(\overline{a} + b)(a + \overline{b})};$$

$$a \sim b = (a \rightarrow b)(b \rightarrow a).$$

Функция, полученная из некоторых функций путем применения принципа суперпозиции, называется *суперпозицией* этих функций.

Все логические функции двух переменных, а также конъюнкции и дизъюнкции n переменных называются *элементарными* логическими функциями. Они позволяют строить любые новые функции алгебры логики, являющиеся суперпозициями элементарных функций.

1-6. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Выше было показано, что все логические функции двух переменных могут быть выражены через одну или несколько (две, три) других функций двух переменных. В связи с этим возникает проблема выбора стандартного набора логических элементов, из которых будет строиться схема логического устройства. Например, если в качестве системы функций выбраны функции инверсии, дизъюнкции и конъюнкции, то это соответствует выбору стандартного набора из логических элементов, выполняющих эти функции. При этом все логические функции, описывающие работу логического устройства, должны быть выражены через выбранные функции инверсии, дизъюнкции и конъюнкции и после этого могут быть реализованы на стандартных логических элементах.

Система элементарных логических функций называется полной, если любая функция алгебры логики может быть представлена в виде суперпозиции функций этой системы.

Понятие о полноте относится не только к элементарным, а к любым булевым функциям.

Критерий полноты системы функций алгебры логики устанавливает теорема Поста — Яблонского [103, 104], утверждающая, что для того, чтобы система функций алгебры логики была полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала функции: не сохраняющую константу нуль, не сохраняющую константу единица, не являющуюся самодвойственной, не являющуюся линейной, не являющуюся монотонной, т. е. чтобы каждое из перечисленных выше свойств не принадлежало какой-либо из функций в этой системе.

Функция называется *сохраняющей константу нуль,* если

$$f(0,\ 0)=0. \qquad (1\text{-}45)$$

Функция называется *сохраняющей константу единица,* если

$$f(1,\ 1)=1. \qquad (1\text{-}46)$$

Примерами функций, сохраняющих константы нуль и единица, являются конъюнкция f_8 и дизъюнкция f_{14}, так как

$$f_8(0,\ 0)=0\cdot 0=0;\ f_{14}(0,\ 0)=0+0=0;$$

$$f_8(1,\ 1)=1\cdot 1=1;\ f_{14}(1,\ 1)=1+1=1.$$

Функция называется *самодвойственной,* если имеет место равенство

$$f(\bar{a},\ \bar{b})=\bar{f}(a,\ b). \qquad (1\text{-}47)$$

Примером самодвойственной функции является функция инверсии, так как

$$f_3(\bar{a})=\bar{f}(a).$$

Функция называется *линейной*, если возможно представление ее в виде

$$f(a,\ b)=k_0 \oplus k_1 a \oplus k_2 b, \tag{1-48}$$

где k_0, k_1, k_2 — двоичные постоянные (0 или 1).

Функция называется *монотонной*, если имеет место равенство

$$f(a_1,\ b_1) \leqslant f(a_2,\ b_2) \tag{1-49}$$

при

$$a_1 \leqslant a_2 \text{ и } b_1 \leqslant b_2.$$

Функции конъюнкции и дизъюнкции являются монотонными, поскольку, например,

$$f_8(0,\ 0) < f_8(1,\ 1);\quad f_{14}(0,\ 0) < f_{14}(1,\ 1).$$

Всякая функция, выраженная только через конъюнкцию и дизъюнкцию, является монотонной.

Перечисленными выше свойствами могут обладать или не обладать не только элементарные, но и любые функции алгебры логики.

Наличие или отсутствие указанных свойств у элементарных функций показано в табл. 1-9, в которой наличие свойства отмечено крестиком.

Таким образом, по теореме Поста — Яблонского пять функций образуют полную систему, если каждая из них не обладает хотя бы одним из пяти перечисленных выше свойств, но это отсутствующее свойство у каждой из функций иное, нежели у остальных четырех.

Из табл. 1-9 видно, что большинство из функций не обладает сразу несколькими свойствами. Поэтому, как доказано С. В. Яблонским

Таблица 1-9

Элементарная функция	Свойства				
	Сохранение константы нуль	Сохранение константы единица	Самодвойственность	Линейность	Монотонность
$f_0=0$	×			×	×
$f_1=a \downarrow b$					
$f_3=\bar{a}$			×	×	
$f_4=a \leftarrow b$	×				
$f_6=a \oplus b$	×			×	
$f_7=a/b$					
$f_8=ab$	×	×			×
$f_9=a \sim b$		×		×	
$f_{11}=a \rightarrow b$		×			
$f_{12}=a$	×	×	×	×	×
$f_{14}=a+b$	×	×			×
$t_{15}=1$		×		×	×

[103], из всякой полной системы, содержащей пять функций, можно образовать полную подсистему не более чем из четырех функций. А если какая-либо функция не обладает ни одним из указанных пяти свойств, то она одна образует полную систему.

Система, состоящая из набора всех элементарных функций, является *максимальной.*

Полная система функций называется *минимальной,* если удаление из нее хотя бы одной любой функции превращает систему в неполную. Минимальные системы могут быть построены с помощью одной, двух, трех и четырех функций.

Так, например, функция Шеффера образует полную систему, ибо она не обладает ни одним из отмеченных пяти свойств. Функции инверсии и дизъюнкции (конъюнкции) образуют полную минимальную систему функций, так как инверсия не сохраняет нуля, не сохраняет единицы и не является монотонной, а дизъюнкция (конъюнкция) не является ни самодвойственной, ни линейной. Функции конъюнкции, неэквивалентности и эквивалентности образуют полную минимальную систему, поскольку для каждого из пяти свойств существует в этой системе такая функция, которая его не имеет.

Минимальная полная система из четырех функций обязательно содержит хотя бы одну функцию, зависящую более чем от двух переменных (кроме конъюнкции, дизъюнкции, нулевой и единичной). В качестве примера такой системы можно привести систему, состоящую из функций:

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 1, \ \varphi_3 = ab, \ \varphi_4 = a \oplus b \oplus c.$$

Из табл. 1-9 видно, что минимальные полные системы элементарных функций могут состоять не более чем из трех функций. Все возможные варианты этих систем приведены в табл. 1-10.

Таблица 1-10

Число функций в системе	Минимальные полные системы элементарных функций
Одна	$\{\downarrow\}$ $\{/\}$
Две	$\{0,\rightarrow\}$ $\{-,\leftarrow\}$ $\{-,\cdot\}$ $\{-,\rightarrow\}$ $\{-,+\}$ $\{\leftarrow,\sim\}$ $\{\leftarrow,\rightarrow\}$ $\{\leftarrow,1\}$ $\{\oplus,\rightarrow\}$
Три	$\{0,\cdot,\sim\}$ $\{0,+,\sim\}$ $\{\oplus,\cdot,\sim\}$ $\{\oplus,+,\sim\}$ $\{\oplus,\cdot,1\}$ $\{\oplus,+,1\}$

В табл. 1-4 структурные формулы элементарных функций представлены в системе $\{-, \cdot, +\}$. Для того чтобы от этой системы перейти к представлению функций в какой-либо минимальной полной системе, необходимо операции инверсии, конъюнкции и дизъюнкции выразить посредством операций выбранной минимальной системы, а затем и каждую из остальных элементарных функций представить только с помощью операций минимальной системы, используя свойства этих операций и законы алгебры логики.

Пример 1-2. Представить все элементарные функции в минимальной полной системе $\{0, \rightarrow\}$.

Сначала, учитывая, что

$$a \to b = \bar{a} + b,$$

получаем:

$$\bar{a} = a \to 0;$$

$$ab = \overline{\overline{ab}} = \overline{\bar{a} + \bar{b}} = \overline{a \to \bar{b}} = [a \to (b \to 0)] \to 0;$$

$$a + b = \bar{\bar{a}} + b = \bar{a} \to b = (a \to 0) \to b.$$

Затем находим:

$$a \downarrow b = \overline{a + b} = \overline{(a \to 0) \to b} = [(a \to 0) \to b] \to 0;$$

$$a \leftarrow b = \overline{a \to b} = (a \to b) \to 0;$$

$$a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b} = b\bar{a} + a\bar{b} = \overline{b \to a} + \overline{a \to b} = (b \to a) \to \overline{(a \to b)} =$$

$$= (b \to a) \to [(a \to b) \to 0];$$

$$a/b = \overline{ab} = \overline{\overline{a \to \bar{b}}} = a \to \bar{b} = a \to (b \to 0);$$

$$a \sim b = (a + \bar{b})(\bar{a} + b) = (\bar{b} + a)(\bar{a} + b) = (b \to a)(a \to b) =$$

$$= \overline{(b \to a) \to \overline{(a \to b)}} = \{(b \to a) \to [(a \to b) \to 0]\} \to 0;$$

$$a = 1 \to a = (0 \to a) \to a = [0 \to (a \to b)] \to a;$$

$$1 = 0 \to a = 0 \to (a \to b).$$

В [39, 72] приведены таблицы, в которых все элементарные функции представлены в каждой из минимальных полных систем.

Таким образом, существуют различные полные системы функций алгебры логики. Каждая из них может быть принята в качестве исходной для выбора стандартного набора логических элементов, и любая функция алгебры логики может быть выражена через функции принятой системы. Выбор той или иной полной системы функций за исходную зависит от характера рассматриваемой задачи и конкретных условий ее решения.

1-7. НОРМАЛЬНЫЕ И СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Элементарные конъюнкция и дизъюнкция

Элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) называется конъюнкция (дизъюнкция) любого числа различных независимых переменных, входящих в данную конъюнкцию (дизъюнкцию) с инверсией или без нее не более одного раза. Например, выражения

$$abc,\ \bar{a}b\bar{c},\ \bar{a}\bar{c},\ \bar{a},\ b,\ c \cdot 1,\ 1$$

являются элементарными конъюнкциями, а выражения

$$(a + \bar{b})c,\ ab\bar{b}c,\ \overline{\bar{a}\bar{c}}$$

не являются элементарными конъюнкциями. Аналогично выражения

$$a + b + c,\ \bar{a} + \bar{c},\ \bar{a} + \bar{b} + c,\ a,\ \bar{b},\ d + 0,\ 0$$

являются элементарными дизъюнкциями, а выражения

$$ab + c,\ a + c + \bar{a},\ a + b + a,\ \overline{a + \bar{b} + c}$$

не являются элементарными дизъюнкциями.

Количество переменных в элементарной конъюнкции (дизъюнкции) называется ее длиной и определяет ее *ранг*. Например, конъюнкция $ab\bar{c}$ является конъюнкцией 3-го ранга.

Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Дизъюнкция любого числа элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Например,

$$a + bc + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c}.$$

Конъюнкция любого числа элементарных дизъюнкций называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ). Например,

$$a(a + b)(\bar{b} + c)(\bar{a} + b + \bar{c}).$$

Для каждой функции может существовать несколько дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм (являющихся равносильными друг другу). Инверсия любой функции, записанной в дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме, может быть записана в конъюнктивной (дизъюнктивной) нормальной форме путем замены знаков «+» на «·» и «·» на «+» и инверсирования каждой переменной. Например, инверсия функции

$$f = a + b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$

имеет вид:

$$\bar{f} = \bar{a}(\bar{b} + c)(a + b + \bar{c}).$$

Логическую функцию, заданную любым аналитическим выражением, можно непосредственно преобразовать к нормальной дизъюнктивной (или конъюнктивной) форме. Для этого необходимо:

выразить все операции через операции конъюнкции, дизъюнкции и инверсии;

избавиться от инверсии над целыми выражениями, перейдя к форме, в которой имеются инверсии только отдельных переменных;

раскрыть скобки, применяя закон дистрибутивности;

привести конъюнкции (дизъюнкции) к элементарным.

Например, для приведения функции

$$f = \overline{a \to (\bar{a} \sim c)}\ (b \to \bar{c}) + \overline{a \to c}$$

к дизъюнктивной нормальной форме необходимо:

исключить операции $\to$ и $\sim$, применяя равносильности

$$a \to b = \bar{a} + b;\ a \sim b = (a \to b)(b \to a),$$

$$f = \overline{\bar{a} + (\bar{\bar{a}} + c)\ (\bar{c} + \bar{a})}\ (\bar{b} + \bar{c}) + \overline{\bar{a} + c};$$

избавиться от знаков инверсии, применяя законы де Моргана:

$$f = \bar{\bar{a}}\ \overline{(\bar{\bar{a}} + c)\ (\bar{c} + \bar{a})}\ (\bar{b} + \bar{c}) + \bar{\bar{a}}\ \bar{c} = a(\overline{a + c} + \overline{\bar{c} + \bar{a}})(\bar{b} + \bar{c}) + a\bar{c} =$$

$$= a(\bar{a}\bar{c} + ca)(\bar{b} + \bar{c}) + a\bar{c};$$

раскрыть скобки, применяя первый закон дистрибутивности:

$$a(b + c) = ab + ac,$$

$$f = (a\bar{a}\bar{c} + aca)(\bar{b} + \bar{c}) + a\bar{c} = a\bar{a}\bar{c}\bar{b} + aca\bar{b} + a\bar{a}\bar{c}\bar{c} + aca\bar{c} + a\bar{c};$$

привести конъюнкции к элементарным, применяя равносильности:

$$aa = a;\ a\bar{a} = 0;\ a \cdot 0 = 0,$$

$$f = 0 \cdot \bar{c}\,\bar{b} + ac\bar{b} + 0 \cdot \bar{c} + a \cdot 0 + a\bar{c} = a\bar{b}c + a\bar{c}.$$

Таким образом,

$$f=\overline{a \to (\bar{a} \sim c)}\,(b \to \bar{c})+\overline{a \to c}=a\bar{b}c+a\bar{c}.$$

Для приведения данной функции к конъюнктивной нормальной форме нужно применить несколько раз второй дистрибутивный закон

$$a+bc=(a+b)(a+c).$$

Тогда

$$f=a\bar{b}c+a\bar{c}=(a\bar{b}c+a)(a\bar{b}c+\bar{c})=(a+a)(a+\bar{b}c)(\bar{c}+a)(\bar{c}+\bar{b}c)=$$

$$=(a+a)(a+\bar{b})(a+c)(\bar{c}+a)(\bar{c}+\bar{b})(\bar{c}+c)=a(a+\bar{b})(a+c)(a+\bar{c})(\bar{b}+\bar{c}).$$

Конституенты единицы и нуля

Если считать в общем случае единицу функцией n переменных, то ее можно разложить на 2^n конституентов (составляющих), т. е. на 2^n дизъюнктивно связанных элементарных конъюнкций n-го ранга, так как количество различных наборов n двоичных переменных равно 2^n. Например, при $n=2$

$$1=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}b+a\bar{b}+ab.$$

Конституентом единицы для данного числа переменных называется всякая конъюнкция всех переменных, взятых по одной с инверсией или без нее. Например, для трех переменных a, b, c конституентами единицы будут конъюнкции abc, $\bar{a}bc$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ и т. д.

Конституент единицы для некоторого набора строится следующим образом: каждая переменная в него входит без инверсии, если значение этой переменной в данном наборе равно единице, или с инверсией, если значение этой переменной в данном наборе равно нулю. Например, набору 00111 соответствует конституент единицы $\bar{a}\bar{b}cde$. Отсюда следует: каждый конституент единицы, как функция переменных, равняется единице только на одном соответствующем ему наборе. На всех остальных наборах данный конституент единицы равен нулю. Действительно, если взять другой набор 00011, то для него значение вышеприведенного конституента единицы $\bar{a}\bar{b}cde$ равно нулю.

Если считать в общем случае нуль функцией n переменных, то его можно разложить на 2^n конституентов (составляющих), т. е. на 2^n конъюнктивно связанных элементарных дизъюнкций n-го ранга, так как количество различных наборов n двоичных переменных равно 2^n. Например, при $n=2$

$$0=(a+b)(a+\bar{b})(\bar{a}+b)(\bar{a}+\bar{b}).$$

Конституентом нуля для данного числа переменных называется всякая дизъюнкция всех переменных, взятых по одной с инверсией или без нее. Например, для трех переменных a, b, c конституентами нуля будут дизъюнкции $a+b+c$, $\bar{a}+b+c$, $\bar{a}+\bar{b}+c$ и т. д.

Конституент нуля для некоторого набора значений строится следующим образом: каждая переменная в него входит без инверсии, если значение этой переменной в данном наборе равно нулю, или с инверсией, если значение этой переменной в данном наборе равно единице. Например, набору 00111 соответствует конституент нуля $a+b+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}$. Отсюда следует: каждый конституент нуля, как функция n переменных, равняется нулю только на одном соответствующем ему наборе. На всех остальных наборах данный конституент нуля равен единице. Действительно, для другого набора 00011 значение вышеприведенного конституента нуля $a+b+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}$ равно единице.

Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Существует один вид дизъюнктивной нормальной формы и один вид конъюнктивной нормальной формы, в которых функция может быть записана только единственным образом. Они называются *совершенными нормальными формами.* В совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме:

каждая элементарная конъюнкция (дизъюнкция) включает все переменные (с инверсиями или без них);

нет одинаковых конъюнкций (дизъюнкций).

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) данной логической функции называется дизъюнкция конституентов единицы тех наборов значений переменных, где данная функция равна единице.

Например, из таблицы истинности (табл. 1-11) для функции $f=a+b$ следует ее запись в СДНФ: $f=\bar{a}b+a\bar{b}+ab$.

Таблица 1-11

a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 1-12

a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Выше было показано, что любую функцию можно привести к ДНФ (или к КНФ). От любой ДНФ можно перейти к СДНФ функции при помощи равносильных преобразований. Такой переход называется *развертыванием.* Для этого необходимо:

ввести недостающие переменные в каждую конъюнкцию умножением ее на равносильность вида $a+\bar{a}=1$, где a — недостающая переменная;

раскрыть скобки, применяя коммутативный закон $(ab=ba)$;

избавиться от повторяющихся конъюнкций на основании закона идемпотентности $(a+a=a)$.

Для рассматривавшегося несколько выше примера была получена ДНФ в виде

$$f=a\overline{bc}+a\bar{c}.$$

Следуя изложенному правилу перехода к СДНФ, получаем:

$$f=a\overline{bc}+a\bar{c}(b+\bar{b})=a\overline{bc}+ab\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}.$$

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) данной логической функции называется конъюнкция конституентов нуля тех наборов, где данная функция равна нулю.

Например, из таблицы истинности (табл. 1-12) для функции $f=ab$ следует ее запись в СКНФ: $f=(a+b)(a+\bar{b})(\bar{a}+b)$.

Переход от КНФ к СКНФ осуществляется по аналогии с переходом от ДНФ к СДНФ. Для этого необходимо:

ввести недостающие переменные в каждую дизъюнкцию, используя закон противоречия $a\bar{a}=0$ (a — недостающая переменная);

произвести преобразования, применяя второй закон дистрибутивности $a+bc=(a+b)\ (a+c)$ и коммутативный закон $a+b=b+a$;

избавиться от повторяющихся дизъюнкций на основании закона идемпотентности $aa=a$.

Например, развертывание КНФ вида

$$f=(a+b)(\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{c})$$

в СКНФ осуществляется следующим образом:

$$f=(a+b+0)(\bar{b}+c+0)(\bar{a}+\bar{c}+0)=(a+b+c\bar{c})(\bar{b}+c+a\bar{a})(\bar{a}+$$
$$+\bar{c}+b\bar{b})=(a+b+c)(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{b}+c)(\bar{a}+$$
$$+b+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}).$$

Совершенные нормальные формы обладают следующими особенностями:

если при каком-то наборе функция равна единице, то в СДНФ только один из ее членов принимает единичное значение;

если функция для данного набора равна нулю, то в СДНФ ни один из членов не принимает единичного значения;

если для данного набора функция равна нулю, то в СКНФ только один из членов принимает нулевое значение;

если для данного набора функция равна единице, то в СКНФ ни один из членов не принимает нулевого значения.

Отсюда следует: СДНФ имеет столько членов, сколько единиц в таблице истинности; СКНФ имеет столько членов, сколько нулей в таблице истинности.

Следует отметить, что сумма числа членов СДНФ и числа членов СКНФ равна 2^n, где n — число переменных данной функции. Очевидно, что если функция тождественно-истинная, т. е. в ее таблице истинности стоят только одни единицы, то число членов СДНФ будет равно 2^n, а число членов СКНФ будет равно нулю. Если же функция тождественно-ложная, то тогда число членов СДНФ будет равно нулю, а число членов СКНФ будет равно 2^n.

Имея в виду правила получения конституентов СДНФ и СКНФ, можно заметить, что дизъюнкции СКНФ могут быть получены инверсированием конъюнкций, не вошедших в СДНФ, т. е. конъюнкций, на которых функция принимает нулевое значение. Поэтому для того, чтобы получить СКНФ из СДНФ, необходимо:

найти не вошедшие в СДНФ конъюнкции;

составить их дизъюнкцию;

взять инверсию от этой дизъюнкции.

Например, имея СДНФ вида $f=ab+a\bar{b}$, для получения СКНФ необходимо:
найти не вошедшие в СДНФ конъюнкции $\bar{a}b$, $\bar{a}\bar{b}$;
составить их дизъюнкцию $\bar{a}b+\bar{a}\bar{b}$;
взять инверсию этой дизъюнкции

$$\overline{\bar{a}b+\bar{a}\bar{b}}=(\bar{\bar{a}}+\bar{b})\ (\bar{\bar{a}}+\bar{\bar{b}})=(a+\bar{b})\ (a+b).$$

Полученное выражение есть СКНФ исходной функции.

Аналогичным образом можно перейти от СКНФ к СДНФ. Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.

Совершенные нормальные формы для элементарных логических функций приведены в табл. 1-4.

Пример 1-3. Для функции

$$f=\{[(\bar{a} \sim c)+(a \downarrow b)]\,(a \oplus b)\} \rightarrow c$$

построить таблицу истинности;
найти СДНФ и СКНФ.

Таблица истинности (табл. 1-13) строится и заполняется следующим образом: выписываются все переменные (a, b, c) и для них составляются все возможные наборы; для каждого набора последовательно определяются значения всех элементарных операций, входящих в заданную формулу функции; в итоге для каждого набора определяется значение функции.

Таблица 1-13

Номер набора	a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{a} \sim c$	$a \downarrow b$	[ ]	$a \oplus b$	{ }	f
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
2	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
3	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
4	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
6	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
7	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1

СДНФ составляется для наборов 1—4, 6—8:

$$f=\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c+\bar{a}b\bar{c}+\bar{a}bc+a\bar{b}c+ab\bar{c}+abc.$$

СКНФ составляется для набора 5:

$$f=\bar{a}+b+c.$$

Совершенные нормальные формы находят широкое применение при логическом синтезе и анализе релейных устройств.

Так, например, при анализе схем часто требуется установить равносильность двух функций. Основные способы выявления равносильностей были приведены выше. Однако они имеют некоторые недостатки. Способ, основанный на сравнении таблиц истинности рассматриваемых функций, наиболее нагляден, но неудобен при большом числе переменных, так как таблицы становятся громоздкими. Формальный способ приведения одной из рассматриваемых функций к виду другой функции в ряде случаев может оказаться удобным, однако он неалгоритмичен, так как нельзя указать общий порядок применения равносильностей. Поэтому нельзя утверждать, что эти функции неравносильны, если не удается привести их к виду одной из них. Указанных недостатков можно избежать, если для доказательства равносильности функций применить способ, состоящий в сравнении их СДНФ или СКНФ. Функции равносильны, если их СДНФ или СКНФ совпадают, в противном случае функции неравносильны.

Проблема разрешимости, т. е. определение того, не приводится ли некоторая сложная функция $f=f(a, b, \ldots, w)$ к виду $f=1$ или $f=0$, решается приведением заданной функции к ДНФ или КНФ.

Задача нахождения для некоторой функции всех наборов, при которых эта функция принимает значение 1 (или 0), также решается приведением заданной функции к СДНФ (или СКНФ).