Метод Гаусса

Этот метод является одним из наиболее распространенных прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений. В основе метода Гаусса лежит идея последовательного исключения неизвестных.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}: && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\\
&\mathrm{II}: && a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\\
&\mathrm{III}: && a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3
\end{aligned}
\qquad (3.2)
$$

Система уравнений (3.2) приводится к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}: && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\\
&\mathrm{II}': && a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2\\
&\mathrm{III}'': && a''_{33}x_3 = b''_3
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

Достигается это при помощи цепочки элементарных преобразований, при которых из каждой строки вычитаются некоторые кратные величины расположенных выше строк.

Процесс приведения системы (3.2) к системе (3.3) называется прямым ходом, а нахождение неизвестных x_1, x_2, x_3 из системы (3.3) называется обратным ходом.

Прямой ход исключения: Исключаем x_1 из уравнений (II) и (III) системы (3.2). Для этого умножаем уравнение (I) на $d_1 = -a_{21}/a_{11}$ и складываем со вторым, затем умножаем на $d_2 = -a_{31}/a_{11}$ и складываем с третьим.

В результате получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} &\mathrm{II}': \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ &\mathrm{III}': \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из полученной системы (3.4) исключаем x_2. Для этого, умножая новое уравнение на $d_3 = -a'_{32}/a'_{22}$ и складывая со вторым уравнением, получим уравнение:

$$\mathrm{III}'': \quad a''_{33}x_3 = b''_3 \tag{3.5}$$

Взяв из каждой системы (3.2), (3.4) и (3.5) первые уравнения, получим систему уравнений с треугольной матрицей.

Обратный ход: Из уравнения (III″) находим $x_3 = b''_3/a''_{33}$. Из уравнения (II′) находим $x_2 = b'_2 - a'_{23}x_3$. Из уравнения (I) находим $x_1 = b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3$. Коэффициенты a_{11}, a'_{22} называются ведущими элементами 1-го и 2-го шагов исключения неизвестных. Они должны быть отличны от нуля. Если они равны нулю, то, меняя местами строки, необходимо на их место вывести ненулевые элементы.

Аналогичным путем методом Гаусса решаются системы n уравнений с n неизвестными.

Пример 3.1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Решение: Удалить члены с x_1 из 2-го и 3-го уравнений можно, вычитая из 2-й строки 1-ую, умноженную на 2, а из 3-й - первую, умноженную на 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ -7x_2 - 7x_3 &= -21 \\ -13x_2 - 8x_3 &= -19 \end{aligned}$$

2-я строка делится на -7:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ 13x_2 + 8x_3 &= 19 \end{aligned}$$

2-я строка умножается на 13 и вычитается из 3-й:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ -5x_3 &= -20 \end{aligned}$$

3-я строка делится на -5:

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_2 + x_3 = 3$$
$$x_3 = 4$$

Процедура обратного хода дает решение:

$x_3 = 4$;

$x_2 = 3 - x_3 = -1$;

$x_1 = 10 - 4x_2 - 3x_3 = 10 - 4 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = 10 + 4 - 12 = 2$

.

Метод обратной матрицы

Систему можно представить в матричном виде как $AX = B$,

где $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Решение можно выразить, используя умножение на матрицу A^{-1}, обратную к A:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B$$

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Решить систему уравнений методом Гаусса и обратной матрицы:

1. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 8 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 9 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+4x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+8x_3+4x_4=2 \\ 3x_1+4x_2+10x_3+6x_4=3 \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+4x_4=1 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4=1 \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4=2 \\ x_1+3x_2+4x_3+3x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=3 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+7x_4=4 \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_3+3x_4=2 \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+4x_4=2 \\ 3x_1+5x_2+4x_3+4x_4=2 \\ 4x_1+7x_2+6x_3+4x_4=0 \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+3x_2+2x_3+2x_4=-1 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+4x_4=-4 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+5x_4=-5 \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} 5x_1+3x_2+3x_3+3x_4=8 \\ 2x_1-2x_2-3x_3+3x_4=5 \\ 2x_1+2x_2-3x_3+2x_4=4 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=4 \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3+2x_4=6 \\ x_1+4x_2+2x_3+x_4=5 \\ 2x_1+6x_2+x_3+3x_4=8 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+2x_4=7 \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_4=2 \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4=1 \\ x_1+2x_2+5x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+5x_3-x_4=1 \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=5 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+2x_4=7 \\ 3x_1+5x_2+x_3+4x_4=8 \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1+4x_2+4x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+8x_3+4x_4=2 \\ 3x_1+4x_2+10x_3+6x_4=3 \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+4x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4=1 \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+3x_4=2 \\ x_1+3x_2-4x_3+3x_4=2 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+5x_4=3 \\ 3x_1-5x_2+7x_3+7x_4=4 \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} 5x_1+x_2+x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+4x_2+x_3+2x_4=5 \\ x_1+x_2+3x_3+x_4=4 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=0 \end{cases}$$