РЯДЫ

§1. Понятие числового ряда. Сходимость и сумма ряда.

Пусть задана некоторая числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется ***числовым рядом***, числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ - ***членами числового ряда***, число a_n – n-ым или ***общим членом ряда.***

Например,

$$1 + 2 + \cdots . +2^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Если имеем дело с суммой конечного числа членов, то охарактеризовать ее легко – с помощью полученного выражения суммы. В случае бесконечной суммы на помощь приходит предельный переход. Введем в рассмотрение сумму конечного числа первых n членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_k,$$

которую называют ***n-ой частичной суммой ряда***. То есть

$S_1 = a_1,$
$S_2 = a_1 + a_2,$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$
……………………………….
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$
……………………………….

Таким образом, имеем последовательность частичных сумм ряда. Если для этой последовательности S_n существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S \neq \infty$, то ***ряд называют сходящимся***, а число S – ***суммой числового ряда*** и обозначают

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если предел не существует или бесконечен, то ряд называется ***расходящимся.***

Пример. Исследовать на сходимость бесконечную геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

Решение. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии, как известно из курса средней школы, при $|q| \neq 1$ имеет вид

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{если } |q| < 1, \\ \infty, & \text{если } |q| > 1, \end{cases}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{если } |q| < 1, \\ \infty, & \text{если } |q| > 1. \end{cases}$$

При $q = -1$ имеем ряд

$$a - a + a - a + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a$$

для которого $S_{2n-1}=a$, $S_{2n}=0$. Следовательно, последовательность S_n предела не имеет.

При $q = 1$ последовательность $S_n=na$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Окончательно имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{расходится}, & |q| \geq 1. \end{cases}$$

Числовой ряд вида

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

называется n-ым ***остатком числового ряда.***

Тогда любой числовой ряд можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n .$$

Если ряд сходящийся, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Последнее условие является необходимым и достаточным условием для сходимости ряда.

Свойства сходящихся числовых рядов:

1. Перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость).

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$, где c – произвольное число, также сходится и его сумма равна cS. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$ расходится.

3. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, а их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \pm b_n\right)$, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \pm b_n\right)=S_1 \pm S_2$.

Следует, однако, иметь в виду, что из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$$

в общем случае не следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

Например, ряд (1-1)+(1-1)+(1-1)+… сходится, а ряды 1+1+1+…. и -1-1-1-1… расходятся.

§2. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Рассмотрим некоторый числовой ряд и предположим, что он сходится. Тогда по определению сходящегося ряда $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, но $S_n = S_{n-1} + a_n$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема (необходимый признак сходимости ряда). Если числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Как следствие из теоремы можно сформулировать ***достаточный признак расходимости числового ряда.***

Следствие. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не равен нулю или не существует, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Решение. Предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

и, следовательно, ряд расходится.

Теорема является необходимым признаком сходимости, то есть из стремления к нулю общего члена в общем случае не следует сходимость ряда. Покажем это на примере ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Такой ***ряд называется гармоническим***, так как каждый его член, начиная со второго, представляет собой среднее гармоническое двух соседних членов: число c называется средним гармоническим чисел a и b если

$$\frac{1}{\mathrm{c}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Очевидно, что предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Предположим, что ряд сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$$

С дугой стороны,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=|n \text{ слагаемых}|=$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{2n}{n+1}+\frac{2n}{n+2}+\cdots+1\right)=\frac{1}{2n}\left(\frac{n+n}{n+1}+\frac{n+n}{n+2}+\cdots+\frac{n+n}{n+n-1}+1\right)=$$

$$=|\text{слагаемых всего } n \text{ и каждое } \geq 1|\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Предельным переходом при $n\to\infty$ получаем $0\geq\frac{1}{2}$, что неверно и, следовательно, предположение о сходимости гармонического ряда было неверным. Значит, ***гармонический ряд расходится.***

§3. Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

§3.1. Признаки сравнения

Озаботимся, далее, вопросом установления сходимости (или расходимости) ряда. Проще всего этот вопрос решается для рядов, члены которых неотрицательны. Для краткости будем называть такие ***ряды положительными***. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

является положительным. То есть для $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n\geq 0$. Тогда для частичных сумм этого ряда выполняется неравенство $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geq S_n$, то есть последовательность частичных сумм неубывающая. По теореме о пределе монотонной последовательности, приходим к следующей теореме.

Теорема. Для того, чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.

Все признаки сходимости положительных рядов основаны на этой простой теореме. Но непосредственное ее применение лишь в редких случаях позволяет судить о характере сходимости ряда. Это происходит хотя бы потому, что записать формулу последовательности частичных сумм в общем виде для многих рядов достаточно сложно. Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, заведомо сходящимся либо расходящимся. В основе такого сравнения лежит следующая теорема.

Теорема. Пусть заданы два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Если начиная с некоторого номера n_0 для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$, то:

1. из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
2. из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Схема доказательства этой теоремы достаточно проста. Так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда, то, не ограничивая общности, можно считать, что $a_n \leq b_n$ для всех натуральных n. Обозначим частичные суммы рядов через A_n и B_n, соответственно. Тогда очевидно, что $A_n \leq B_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность частичных сумм ограничена, то есть $\exists L = const$, что $B_n \leq L$. Следовательно, и $A_n \leq L$, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Аналогично доказывается и второй пункт теоремы.

На бытовом языке, для облегчения запоминания, этот признак сравнения часто формулируют в следующей форме: ***из сходимости «большего» ряда следует сходимость «меньшего» ряда, а из расходимости «меньшего» ряда следует «расходимость» большего***. Термины не совсем (точнее совсем не) математические, однако, они позволяют осознать следующий факт: из сходимости «меньшего» ряда ничего не следует относительно сходимости или расходимости «большего» ряда, а из расходимости «большего» ничего конкретного нельзя утверждать о сходимости или расходимости «меньшего» ряда.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + a^n}, (a > 0).$$

Решение. Очевидно, что сходимость этого ряда зависит от того, какие значение принимает, a:

1) $0 < a \leq 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a^n} = 1 \neq 0,$$

то есть общий член ряда не стремится к нулю, следовательно, ряд расходящийся;

2) $a > 1$. Очевидно, что

$$\frac{1}{1+a^n} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ – бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{a} < 1$, то есть ряд сходящийся, следовательно, сходится и исходный ряд.

Иногда на практике бывает удобнее пользоваться признаком сравнения, который вытекают из предыдущей теоремы.

Теорема (предельный признак сравнения). Если для членов положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$ (0<L<∞), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$. Тогда по определению предела для $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для $\forall n > n_0 \Longrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$. Следовательно, $L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$ или $b_n(L-\varepsilon) < a_n < b_n(L+\varepsilon)$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)b_n$. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)b_n$ а, следовательно, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Что и требовалось доказать.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}.$$

Решение. Наряду с этим рядом, рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi\neq 0$ (первый замечательный предел) и гармонический ряд расходится, то, следовательно, расходится и исходный ряд.

Замечание. Иногда предельный признак сравнения формулируется по другому: если $\exists\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K$ $(0\leq K\leq\infty)$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ при $K<\infty$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. А из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ при $K>0$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Такая формулировка учитывает два крайних случая, не учтенных в предыдущей формулировке предельного признака если:

- $K=0$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$;
- $K=\infty$, то из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Рассмотрим далее два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. И пусть для всех натуральных чисел n выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$ $(a_n, b_n\neq 0)$. Тогда имеем, что $\frac{a_2}{a_1}\leq\frac{b_2}{b_1}$, $\frac{a_3}{a_2}\leq\frac{b_3}{b_2}$, … , $\frac{a_n}{a_{n-1}}\leq\frac{b_n}{b_{n-1}}$. Перемножив почленно, получаем $\frac{a_n}{a_1}\leq\frac{b_n}{b_1}$ или $a_n\leq\frac{a_1}{b_1}b_n$. Так как $\frac{a_1}{b_1}=const$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{b_1}b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно. Далее, применяя признак сравнения, несложно закончить доказательство следующей теоремы.

Теорема. Если начиная с некоторого номера n_0 для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$ $(a_n, b_n\neq 0)$, то:

- из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$;
- из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Сходимость многих рядов можно исследовать сравнением с:

1. рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$, который сходится при $|q|<1$;

2. гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, который расходится;

3. обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, который сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$ (доказательство этого факта в следующем параграфе).

Вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{P_k(n)}{Q_l(n)}$, где $P_k(n)$ и $Q_l(n)$ – многочлены от n степени k и l соответственно, решается сравнением с обобщенным гармоническим рядом при $\alpha=l-k$.

§3.2. Признак Даламбера

Приведенные выше признаки предусматривают сравнение исследуемого на сходимость ряда с некоторым специальным рядом, относительно которого известно, является он сходящимся либо расходящимся. Подбирать ряд для сравнения не всегда просто. Эта процедура требует навыка. Поэтому хотелось бы иметь признак, который по заданным членам ряда мог ответить на вопрос о сходимости (расходимости) ряда. Признак Даламбера, смысл которого выражает следующая теорема, часто удовлетворяет пожеланиям и его удобно применять в тех случаях, когда в записи общего члена ряда участвуют факториалы и степени.

Теорема (признак Даламбера). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$, существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ (отношения последующего члена ряда к предыдущему), то при:

$l<1$ – ряд сходится;

$l>1$ – ряд расходится.

Доказательство.

1. Пусть $l<1$, тогда $0\le l<1$, ввиду положительности ряда. Выберем некоторое число $0<\varepsilon<1-l$. В этом случае $l+\varepsilon<1$. По определению предела последовательности следует, что для любого сколь угодно малого положительного ε, найдется такой номер n_0, что для всех $n\ge n_0$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon$, или $l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon=q$, следовательно, $a_{n+1}\le q\cdot a_n$.

Придавая n значения 1,2, …, построим серию неравенств:

$$0 < a_2 \le q \cdot a_1 \ ,$$
$$0 < a_3 \le q \cdot a_2 < q \cdot q \cdot a_1 < q^2 \cdot a_1, \ \ldots$$
$$0 < a_n < qa_{n-1} < q^2 a_{n-2} < \ldots < q^{n-1} a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

То есть члены ряда $a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ меньше соответствующих членов ряда $qa_1 + q^2 a_1 + q^3 a_1 + \ldots + q^{n-1} a_1 + \ldots$, который сходится как бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $0 < q < 1$. На основании признака сравнения ряд $a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ сходится.

2. Пусть $l > 1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$. Тогда начиная с некоторого номера *n* будет выполняться неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ или $a_{n+1} > a_n$, то есть члены ряда возрастают с увеличением номера *n*. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$, значит исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Что и требовалось доказать.

Заметим, что при $l = 1$, ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. То есть в этом случае необходимы дополнительные исследования.

Пример. С помощью признака Даламбера исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Решение: Имеем: $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$,

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = \dfrac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Так как $l = 0 < 1$, то по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3n-1}.$$

Решение: Имеем: $a_n = \dfrac{2^n}{3n-1}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{3(n+1)-1} = \dfrac{2^{n+1}}{3n+2}$,

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}}{3n+2} \cdot \dfrac{3n-1}{2^n} = \dfrac{2 \cdot 2^n}{2^n} \cdot \dfrac{3n-1}{3n+2} = 2\dfrac{3n-1}{3n+2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\dfrac{3n-1}{3n+2} = 2$. Так как $l = 2 > 1$, то по признаку Даламбера данный ряд расходится.

§3.3. Интегральный и радикальный признаки Коши

Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражения вида $n!$ или a^n. В некоторых других случаях более рационально применять другие признаки. В частности, радикальный признак Коши, который считается более мощным (с математической точки зрения), чем признак Даламбера.

Теорема (***радикальный признак Коши***). Пусть дан ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда при

$l < 1$ – ряд сходится;
$l > 1$ – ряд расходится.

Как и в случае признака Даламбера, ***при*** $l = 1$ ***необходимы дополнительные исследования.***

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2} \right)^n$.

Решение. Для исходного ряда $a_n = \left(\frac{n}{3n+2} \right)^n$, Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3} < 1,$$

следовательно, данный ряд сходится.

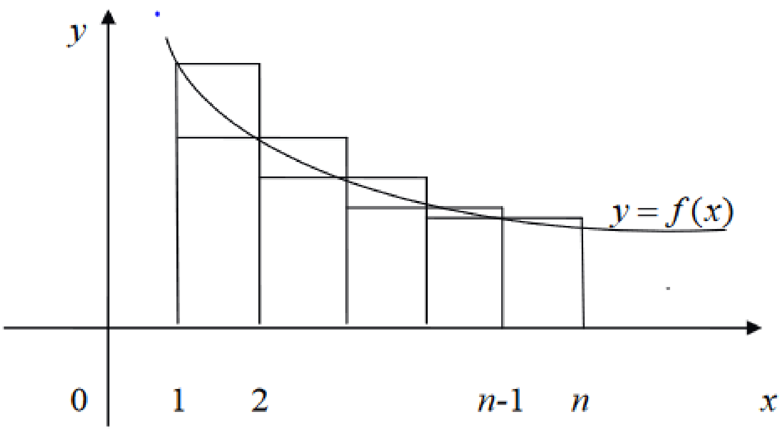
Хоть радикальный признак Коши и более мощный по сравнению с признаком Даламбера (то есть если по радикальному признаку Коши ряд будет сходится, то он является сходящимся и по признаку Даламбера) , но мощность признаков Коши и Даламбера не весьма велика, так как они не позволяют даже судить о сходимости или расходимости такого простого ряда, как гармонический ряд. Более тонкие признаки можно получить, если сравнивать данный ряд с рядами, сходящимися или расходящимися «медленнее», чем ряд из элементов геометрической прогрессии. К более тонким (и соответственно сложным) относятся, например, признаки Раабе, Гаусса, Куммера и другие, не входящие в программу нашего курса. Реально применить один из, который является наиболее простым, суть которого выражает следующая теорема.

Теорема (***интегральный признак Коши***). Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и не возрастают, то есть $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots$ и пусть $f(x)$ – такая непрерывная невозрастающая функция, что $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и исходный ряд;

❖ если несобственный интеграл $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и исходный ряд.

Доказательство.



Изобразим члены ряда геометрически. Площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке, равна $S = \int_{1}^{n} f(x)dx$.

Возьмем n– ю частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$:

$$S_n = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n).$$

Тогда площадь S_+ выступающей фигуры будет равна

$$S_+ = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = S_{n-1},$$

а площадь S_- входящей фигуры $S_- = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = S_n - f(1)$.

Из построения и свойств функции $f(x)$ следует, что $S_- < S < S_+$ и

$$S_n - f(1) < \int_{1}^{n} f(x)dx < S_n, n = 1, 2, \ldots .$$

1. Пусть несобственный интеграл $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{1}^{n} f(x)dx = A$. Так как $\int_{1}^{n} f(x)dx \le A = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ (в силу условия $f(x) > 0$ для $x \in [1; +\infty)$), то из неравенства следует, что

$$S_n < f(1) + \int_{1}^{n} f(x)dx < f(1) + S_n \ .$$

Последовательность (S_n) ограничена и при возрастании n сумма S_n возрастает. Поэтому последовательность имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

2. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится.

Так как по условию $f(x) > 0$ для $x \ge 1$, то ,

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_1^{n} f(x)dx = +\infty .$$

Из неравенства

$$S_n \ge \int\limits_1^{n} f(x)dx,\ n = 1, 2, ...$$

следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Что и требовалось доказать.

Замечание. Вместо интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ можно брать интеграл

$$\int\limits_k^{\infty} f(x)dx,\ k > 1, k \in N .$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ непрерывна, положительна и убывает, так как $f'(x) = -\frac{\ln(x+1)+2}{(x+1)^2\ln^3(x+1)} < 0$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = -\frac{1}{\ln(x+1)}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2},$$

следовательно, интеграл сходится, значит и ряд сходится.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ...$ называется ***обобщенным гармоническим рядом.*** Исследуем его на сходимость.

Если $p \le 0$, то общий член ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится (достаточное условие расходимости).

В случае $p > 0$ применим интегральный признак Коши. Функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ непрерывна, положительна и убывает при $x \ge 1$. При $p \ne 1$ имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}x^{-p}=\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^A=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

Если $p=1$, то $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\ln x\Big|_1^A=\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\ln A-\ln 1\right)=+\infty$. Значит, интеграл, соответственно и данный ряд, сходятся при $p>1$ и расходятся при $p\le 1$. Итак, окончательно: обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{сходится при } p>1;\\ \text{рассходится при } p\le 1\,.\end{cases}$$

§4. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Знакочередующийся ряд – это ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+\left(-1\right)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}u_n\ ,$$

где $u_n>0\ \forall n\in N$.

Теорема Лейбница (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд сходится, если:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает:

$$u_1>u_2>u_3>\ldots>u_n>\ldots\ ;$$

2) общий член ряда стремится к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

При этом сумма S ряда: $0<S<u_1$.

Доказательство.

Рассмотрим сумму $n=2m$ первых членов знакочередующегося ряда:

$$S_{2m}=\left(u_1-u_2\right)+\left(u_3-u_4\right)+\ldots+\left(u_{2m-1}-u_{2m}\right).$$

Так как последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, выражение в каждой скобке положительно, значит, S_{2m} – положительна (S_{2m}>0) и возрастает с увеличением m. Запишем эту же сумму по-другому:

$$S_{2m}=u_1-\left(u_2-u_3\right)-\left(u_4-u_5\right)-\ldots-\left(u_{2m-2}-u_{2m-1}\right)-u_{2m}.$$

В силу 1 условия каждая из скобок положительна, поэтому в результате вычитания этих скобок из u_1 мы получим число, меньшее чем u_1, то есть

$$S_{2m}<u_1.$$

Таким образом, S_{2m} при увеличении m возрастает и ограничена сверху, следовательно, S_{2m} имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S,\ 0<S<u_1$. Доказали, что последовательность «четных» частичных сумм имеет предел S. Докажем теперь, что «нечетные» частичные суммы также стремятся к пределу S. Рассмотрим сумму $n=2m+1$ первых членов ряда (1)

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$

Так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + 0 = S$$

Итак, последовательность «нечетных» частичных сумм имеет предел S. Таким образом, знакочередующийся ряд сходится, что и требовалось доказать.
Замечания:

1. Теорема Лейбница остается справедливой, если неравенства

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$$

выполняются, начиная с некоторого номера N.

2. Теорема Лейбница геометрически иллюстрируется следующим образом. Будем на числовой прямой откладывать частичные суммы:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 - u_2 = S_1 - u_2, S_3 = S_2 + u_3\ ,\ S_4 = S_3 - u_4\ , S_5 = S_4 + u_5\ , \ldots$$

Точки, соответствующие частичным суммам, будут приближаться к некоторой точке S, которая изображает сумму ряда.

Заменим S частичной суммой S_n и оценим ошибку, которую мы допускаем при данной замене. Отброшенный ряд (остаток) представляет собой знакочередующийся ряд $(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$ сумма которого по абсолютной величине меньше первого члена этого ряда (то есть меньше u_{n+1}), то есть $|r_n| \le u_{n+1}$. Значит, ***ошибка, совершаемая при замене S на*** S_n***, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.***

Пример. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\ 3^{n-1}}$ нужно взять, чтобы остаток (ошибка вычислений) не превышал 0,001?

Решение. Поскольку $|r_n| \le |u_{n+1}|$, то найдем такое u_{n+1} , чтобы его величина была меньше 0.001. Рассмотрим $u_6 = \frac{1}{11\cdot 3^5} = \frac{1}{2673} < 0{,}001$. Отметим, что $u_5 = \frac{1}{8\cdot 3^4} = \frac{1}{729} > 0{,}001$. Следовательно, для приближенного вычисления S с точностью 0.001 достаточно взять пять слагаемых (отметим, что $S = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$).

Ряды, для которых выполняется признак Лейбница, называются ***рядами Лейбница (лейбницевского типа).***

§5. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Числовой ряд называется ***знакопеременным***, если его члены есть действительные числа произвольного знака. Особый интерес представляет случай, когда знакопеременный ряд содержит бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Составим ряд из модулей членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то исходный ряд называется ***абсолютно сходящимся***. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то ряд называется ***условно сходящимся.***

Теорема (***достаточный признак сходимости знакопеременного ряда***). Если знакопеременный ряд абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство: Пусть $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|$ n-ные частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, соответственно. Так как ряд сходится абсолютно, то $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, причем $\sigma_n \le \sigma \ \forall n$. Обозначим через $S_n{}'$ сумму положительных членов, а через $-S_n{}''$ сумму отрицательных членов, содержащихся в сумме S_n. Тогда $S_n = S_n{}' - S_n{}''$, $\sigma_n = S_n{}' + S_n{}''$. Из последнего равенства следует, что последовательности $\left(S_n{}'\right)$ и $\left(S_n{}''\right)$ монотонно возрастают при возрастании n, а из того, что $\sigma_n \le \sigma \ \forall n$ следует, что они ограничены, т.е.

$$S_n{}' \le \sigma_n \le \sigma, \ S_n{}'' \le \sigma_n \le \sigma .$$

Следовательно, существуют пределы $\lim_{n\to\infty} S_n' = S'$ и $\lim_{n\to\infty} S_n'' = S''$.

Значит, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n' - S_n''\right) = S' - S''$, то есть ряд сходится.

Что и требовалось доказать.

Пример. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}.$$

Решение. Из неравенства $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \ \forall n \ge 1$ и признака сравнения следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного ряда к положительному ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ могут быть применены все признаки сходимости знакоположительных рядов (то есть сравнения, Коши, Даламбера).

Пример. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}\ .$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$$

и сравним его с гармоническим рядом, воспользовавшись предельным признаком сравнения. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n-\ln n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{\ln n}{n}}=1$$

откуда следует, что ряд не является абсолютно сходящимся.

Исследуем на сходимость исходный знакочередующийся ряд. Покажем, что последовательность (c_n), где $c_n=\dfrac{1}{n-\ln n}$ монотонно убывает. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x-\ln x}$ определенную на полуинтервале$[1,+\infty)$ и найдем ее производную: $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-\ln x)^2}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{x-1}{x(x-\ln x)^2}$.

Так как $f'(x)<0$ для всех $x>1$, то функция $f(x)$ монотонно убывает. Поэтому последовательность (c_n)тоже убывает и ее предел

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0.$$

По признаку Лейбница ряд сходится. Таким образом, ряд сходится условно.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1.(*Теорема Коши*). Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму *S*, то ряд, полученный из данного ряда произвольной перестановкой членов, так же сходится и имеет ту же сумму *S*, что и исходный ряд.

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получится абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна S_1+S_2 (S_1-S_2).

3. Под произведением двух рядов $u_1+u_2+u_3+\dots$ и $v_1+v_2+v_3+\dots$ понимают ряд вида

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\dots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\dots+u_nv_1)+\dots$$

Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1\,S_2$.

Замечание. В случае условно сходящихся рядов вышесформулированные свойства не имеют места.

Теорема Римана. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то путем соответствующей перестановки его членов можно получить ряд с любым наперед заданным значением суммы (конечным или бесконечным).

Таким образом, ***в условно сходящемся ряде перестановка бесконечного числа слагаемых недопустима.*** Теорема Римана показывает, что одно из основных свойств действительных чисел – коммутативность конечного числа слагаемых не переносится на бесконечные суммы, то есть на ряды. С другой стороны, теорема Коши показывает, что среди рядов можно выделить отдельный класс – абсолютно сходящиеся ряды, для которых справедлив коммутативный закон сложения. И, наконец, отметим, что ассоциативный закон сложения справедлив для любых сходящихся рядов. Если же ряд расходится, то это утверждение не верно. Например, ряд

$$1-1+1-1+\ldots+\left(-1\right)^n+\ldots$$

расходится, а ряды

$$\left(1-1\right)+\left(1-1\right)+\ldots+\left(1-1\right)+\ldots,$$
$$1-\left(1-1\right)-\left(1-1\right)-\ldots-\left(1-1\right)-\ldots,$$

полученные из исходного путем расставления скобок, сходятся. При этом сумма первого равна 0, а второго 1.

Для абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}$. Этот ряд есть ряд Лейбница, ибо

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

то есть ряд сходится. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ есть гармонический и расходится, то есть исходный ряд сходится условно. Обозначим его сумму через S. В этом ряде сделаем следующую перестановку членов: за каждым положительным членом поставим два отрицательных. Получим ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots,$$

для которого можно доказать, что он сходится. Тогда группируя его члены, получим ряд $\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots$, который также сходится. Но этот ряд можно записать в виде

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right),$$

откуда следует, что его сумма равна $\frac{S}{2}$. Итак, перестановкой членов исходного ряда мы получили новый ряд, сумма которого в два раза меньше суммы данного ряда.

§6. Функциональные ряды. Основные понятия

Ряд вида $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, где $u_n(x)$ - функции, определенные на некотором множестве X, называется ***функциональным***. Сумма $S_n=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ называется ***n-й частичной суммой ряда***, а выражение

$$r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$$

называется ***остатком ряда***.

При каждом конкретном $x_0\in X$ функциональный ряд превращается в числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Если этот числовой ряд сходится, то говорят, что ***функциональный ряд сходится в точке*** x_0. Совокупность значений $x\in X$, при которых функциональный ряд сходится, называется ***областью сходимости функционального ряда***. Обозначим ее D.

Суммой ряда называется функция $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),\ \ x\in D$. Для сходящегося ряда имеем $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$, где $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Примеры. Исследовать на сходимость и в случае сходимости найти область сходимости указанных рядов.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots$. Так как это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии при $|x|<1$, то имеем $S(x)=\frac{1}{1-x}$, $D=(-1;1)$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}x(1-x)^n$. Очевидно, что $S(0)=S(1)=0$. Для $0<x<1$ этот ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n,$$

где $q=1-x$, то есть

$$S(x)=x\frac{1}{1-(1-x)}=1.$$

Таким образом

$$S(x)=\begin{cases}0, & \text{для } x=0 \text{ и } x=1,\\ 1, & \text{для } 0<x<1.\end{cases}$$

Отметим, что хотя все члены ряда непрерывные функции, $S(x)$ оказалась разрывной.

Функциональный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$.Для определения области сходимости функционального ряда можно использовать признаки сравнения, Коши, Даламбера. С их помощью функциональный ряд исследуется на абсолютную сходимость. Например, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=l(x) \text{ или } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=l(x),$$

то ряд сходится абсолютно для x, удовлетворяющих неравенству $l(x)<1$ и расходится для тех x, при которых $l(x)>1$.

Одним из основных вопросов теории функциональных рядов $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ является вопрос о свойствах суммы $S(x)$ ряда в зависимости от свойств членов этого ряда. В связи с этим возникают следующие вопросы:

1. если члены ряда непрерывные функции, то будет ли $S(x)$ тоже непрерывной?

2. если члены ряда интегрируемые (дифференцируемые) функции на некотором отрезке $[a,b]\in D$, то будет ли сумма ряда интегрируемой (дифференцируемой) функцией на этом отрезке и применимо ли при этом правило «интеграл (производная) суммы равен сумме интегралов (производных)»?

Сходящийся функциональный ряд называется равномерно сходящимся в некоторой области X, если для любого сколь угодно малого положительного $\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$, что при $n>N(\varepsilon) \Rightarrow |r_n(x)|<\varepsilon \ \ \forall x\in X$. То есть номер N зависит только от ε и не зависит от x.

Приведем без доказательства ряд теорем.

Теорема (***признак Вейерштрасса***). Если функции $u_1(x),\ u_2(x),\ldots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел

$a_1, a_2, \dots$, причем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональный ряд сходится в этой области равномерно.

В этом случае говорят, что сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является ***мажорантой для ряда*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Теорема. Сумма $S(x)$ равномерно сходящегося на множестве X ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывных функций $u_n(x)$ есть функция, непрерывная на X.

Из теоремы следует, что если $x_0 \in X$, то

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x),$$

то есть для непрерывных функций сходящегося ряда возможен почленный переход к пределу.

Теорема. Если ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots$, где $u_n(x)$ непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots$$

сходится и имеет сумму $\int_a^b S(x)dx \ \ \forall [a,b] \subset X$.

Теорема. Пусть функции $u_1(x), u_2(x), \dots$ определены в некоторой области X и имеют в этой области непрерывные производные $u_1'(x), u_2'(x), \dots$. Если в этой области ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеет сумму $S(x)$, то исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в X, $S(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и справедлива формула

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Выделение равномерно сходящихся рядов из сходящихся существенно, ибо равномерно сходящиеся ряды ведут себя во многих отношениях так же, как конечные суммы, тогда как о неравномерно сходящихся рядах этого сказать нельзя. Это наглядно иллюстрируется на примере предыдущих теорем. Как и в конечном случае, интеграл от суммы и производная равны сумме интегралов и производных от слагаемых.

§7. Степенные ряды. Теорема Абеля

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$$

(где a_n и α – действительные числа, x – действительная переменная) называется ***степенным рядом по степеням*** $(x-\alpha)$, a_n называются ***коэффициентами степенного ряда,*** а α – ***центром степенного ряда.***
При $\alpha = 0$ получается степенной ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Так как заменой $y = x - \alpha$ первый ряд сводится ко второму, то ограничимся рассмотрением степенных рядов с центром в точке ноль. Придавая x определенное значение x_0, получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0{}^n$, который может быть как сходящимся, так и расходящимся. Если полученный числовой ряд сходится, то будем называть точку x_0 ***точкой сходимости степенного ряда***. Множество всех числовых значений аргумента x, для которых степенной ряд сходится, называется ***областью сходимости*** этого ряда. В области сходимости степенного ряда его *сумма* является некоторой *функцией* $S(x)$ переменной x. Определяется она в области сходимости равенством $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_n x^n$ – n–ая частичная сумма ряда. Очевидно, что ***степенной ряд всегда сходится в точке*** x=0. То есть область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ содержит, по крайней мере, одну точку: $x = 0$. Ответ на вопрос об области сходимости степенного ряда дает следующая теорема.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$; если же ряд расходится при $x = x^*$ то он расходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x^*|$.

Докажем первую часть теоремы. Так как по условию степенной ряд сходится при x_0, то для соответствующего числового ряда выполняется необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Так как всякая сходящаяся к конечному числу последовательность ограничена, то $\exists M > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |a_n x_0^n| \leq M$. Рассмотрим x такие, что $|x| < |x_0|$ и $x_0 \neq 0$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

а это бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, следовательно, этот ряд сходится. Что и требовалось доказать.

Из теоремы Абеля следует, что если степенной ряд сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R>0$ такое, что степенной ряд абсолютно сходится для $\forall x \in (-R, R)$ и расходится для $\forall x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$. При $x = \pm R$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. Неотрицательное число $R>0$ такое, что степенной ряд сходится в интервале $(-R, R)$ и расходится при $|x| > R$ называется ***радиусом сходимости степенного ряда,*** а интервал $(-R, R)$ – ***интервалом сходимости.*** Очевидно, что если степенной ряд сходится только в точке $x=0$, то $R=0$. Если ряд сходится для $\forall x \in \mathbb{R}$, то $R = \infty$.

Замечание. Следует помнить, что интервал сходимости и область сходимости степенного ряда в общем случае не совпадают, так на концах интервала сходимости, то есть в точке $x = \pm R$, степенной ряд может как сходится (абсолютно или условно), так и расходится. Таким образом, ***областью сходимости степенного ряда является интервал сходимости с возможным присоединением одного или двух его концов (тех, где соответствующий числовой ряд сходится)***.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда можно использовать признак Даламбера или радикальный признак Коши. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = L|x|$ и по признаку Даламбера при $L|x| < 1$ степенной ряд сходится, а при $L|x| > 1$ – расходится. Следовательно, радиус сходимости степенного ряда

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Аналогично можно получить формулу для радиуса сходимости степенного ряда, используя радикальный признак Коши:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Однако, если два последних предела не существуют, то интервал сходимости рядов удобно определять с помощью признака Даламбера и радикального признака Коши, непосредственно применяя его к ряду, составленному из модулей членов исходного ряда. Так поступают если, например, степенной ряд содержит не все степени переменной x.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}.$$

Решение. Так как $a_{2n} = \frac{1}{3^n}$, $a_{2n+1} = 0$, то, следовательно, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0.$$

Откуда получаем, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ не существует. То есть, по имеющимся формулам для радиуса сходимости найти его не представляется возможным. Но непосредственно по радикальному признаку Коши $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{3^n}\right|} = \frac{x^2}{3}$ и для $\frac{x^2}{3} < 1$ ряд сходится. Отсюда несложно получить (решая последнее неравенство), что $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ – интервал сходимости данного степенного ряда. При $x = \pm\sqrt{3}$ получается расходящийся числовой ряд (не выполнен необходимый признак сходимости числового ряда) и поэтому область и интервал сходимости совпадают.

Отметим, что степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$$

с помощью замены $y = x - \alpha$ легко сводятся к рядам рассмотренным выше. Если R – радиус сходимости этого ряда, то при $|y| < R$ ряд сходится абсолютно, то есть при $|x - \alpha| < R$, то есть интервал сходимости имеет вид $(\alpha - R, \alpha + R)$.

Степенные ряды внутри интервалов сходимости обладают всеми свойствами абсолютно сходящихся рядов и дополнительно их можно *дифференцировать* и *интегрировать*, при этом радиус сходимости и промежуток сходимости не изменятся, область сходимости может измениться, в частности, дифференцирование не улучшает, а интегрирование не ухудшает сходимости степенного ряда; отметим также, что сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.

§8. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Поставим задачу: представить функцию в виде суммы некоторого степенного ряда. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка (бесконечно дифференцируема). Поставим ей в соответствие степенной ряд

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Этот степенной ряд называется ***рядом Тейлора для функции f(x) в точке*** x_0. Если центр ряда $x_0=0$, то степенной ряд имеет вид

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и называется ***рядом Маклорена.***

Радиус сходимости R ряда Тейлора может быть как равен нулю, так и отличен от нуля. Если $R \neq 0$, то сумма $S(x)$ ряда Тейлора не обязательно совпадает с функцией $f(x)$. Если же сумма ряда Тейлора совпадает с исходной функцией – $S(x)=f(x)$ – на интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, то функция $f(x)$ называется ***разложимой в ряд Тейлора в окрестности точки*** x_0.
Заметим, что частичные суммы ряда Тейлора

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

представляют собой многочлены Тейлора $P_n(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0 и, если ряд сходится к функции $f(x)$, то она может быть представлена в виде

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. Из этого равенства видим, что для сходимости ряда Тейлора к функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$, а следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. То есть верна

Теорема. Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Эта теорема имеет большую теоретическую ценность. На практике чаще пользуются другой теоремой, которая дает достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема. Если для $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той же константой M, то ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Более того, если степенной ряд по степеням $(x - x_0)$ сходится к функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, то он является рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности этой точки. Это означает ***единственность разложения функции в ряд Тейлора: каким бы методом не осуществляли разложение в степенной ряд, в результате получим ряд Тейлора для функции.***

Чтобы получить разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, нужно вычислить значения данной функции и всех ее производных в точке и записать формально ее ряд Тейлора по формуле. Затем найти область сходимости полученного ряда и выяснить, в каких точках из области сходимости суммой ряда будет $f(x)$.

Основные табличные разложения в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; +\infty),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad x \in (-1; 1),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \qquad x \in (-1; 1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad x \in (-1; 1],$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad x \in [-1; 1]$$

§9. *Приложения степенных рядов*

Приближенное вычисление значений функций

Пусть дан степенной ряд функции $y = f(x)$. Задача вычисления значения этой функции при $x = x_0$ заключается в отыскании суммы ряда с заданной точностью $\varepsilon > 0$, которую можно достичь путем оценивания остатка числового ряда, ограничиваясь определенным числом членов ряда.

Пример. Найти $\sin 1$ с точностью до 0,001.

Решение: Воспользуемся разложением в степенной ряд функции $\sin x$, в котором примем $x = 1$. Тогда получим $\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{5!}1^5 - \cdots$. Стоящий справа ряд сходится абсолютно. Так как $\frac{1}{5!} \approx 0{,}008 > 0{,}001$, а $\frac{1}{7!} \approx 0{,}0002 < 0{,}001$, то для нахождения $\sin 1$ с точностью до 0,001 достаточно первых трех слагаемых: $\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0{,}842$. Допускаемая ошибка при этом меньше, чем первый отброшенный член, то есть меньше 0,0002.

Приближенное вычисление определенных интегралов.

Степенные ряды применяются для приближенного вычисления определенных интегралов $\int_a^b f(x)dx$ в случаях, если первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции или нахождение первообразной сложно.

Если подынтегральная функция $f(x)$ разложима в степенной ряд по степеням x и интервал сходимости $(-R;R)$ включает в себя отрезок интегрирования $[a;b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ с точностью до 0,1.

Решение: Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя в соответствующей формуле x на $-x$:

$$\sqrt{x}e^{-x} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right),\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Интегрируя обе части последнего равенства на отрезке $[0;1]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty;+\infty)$, получим:

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{6} + \ldots\right)dx = \left.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}\frac{x^{\frac{9}{2}}}{6} + \ldots\right)\right|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{27} + \ldots.$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{1}{7} = 0{,}14\ldots > 0{,}1$, а $\frac{1}{27} = 0{,}037\ldots < 0{,}1$, то с точностью до 0,1 имеем: $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \approx \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = 0{,}4$.

Приближенное решение дифференциальных уравнений.

В случае, когда точное решение задачи Коши для дифференциального уравнения в элементарных функциях не представляется возможным или оказывается очень сложным, это решение (если оно представимо) удобно искать в виде степенного ряда.

При решении задачи Коши $y' = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0$ используем ряд Тейлора

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots,$$

где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0;y_0)$, а остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2,3,\ldots)$ находят путем последовательного дифференцирования уравнения и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

Пример. Методом последовательного дифференцирования найти три, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x + \frac{1}{y}$, $y(0) = 1$.

Решение ищем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Из уравнения находим, что $y'(0) = 0 + \frac{1}{y(0)} = 1$. Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 1 - \frac{1}{y^2}y',\ y''(0) = 1 - 1 = 0,$$

$$y''' = -\frac{y''y^2 - y' \cdot 2yy'}{y^4},\ y'''(0) = 2.$$

Подставляя найденные значения в ряд, будем иметь

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \ldots = 1 + x + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$