ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§1. Периодические функции и их свойства

Многие процессы, протекающие в реальной действительности, обладают свойством повторяться через определенные промежутки времени. Такие процессы называются ***периодическими***. Математически, такие процессы описываются периодическими функциями. Функцию, определяющую периодический процесс, представляют как сумму конечного или бесконечного числа простых периодических функций $Asin(\omega x+\varphi_0)$ (либо $A\,cos(\omega x+\varphi_0)$), называемых ***гармониками***, где:

постоянная *A* называется ***амплитудой***;

постоянная ω называется ***частотой***;

величина $(\omega x+\varphi_0)$ называется ***фазой***;

постоянная φ_0 называется ***начальной фазой***;

постоянная $T=\frac{2\pi}{\omega}$ называется ***периодом***.

Сложные периодические процессы, например, волновые, описываются дифференциальными уравнениями. Решение таких уравнений получают как сумму (конечную или бесконечную) простых гармоник.

Далее будем иметь дело с периодическими функциями. Напомним определение и свойства периодических функций.

Определение. Функция *f(x)* называется ***периодической периода T≠0***, если выполнены следующие условия:

1. для $\forall\, x\in D(f)\Longrightarrow x-T, x+T$ также принадлежат области определения функции *f(x);*
2. $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$.

Как правило, ***периодом функции*** называют наименьший положительный период, если он существует. Например, функция *f(x)*=5, согласно определению, периодическая любого периода *T*≠0, но наименьшего периода для неё не существует.

Свойства периодических функций

1. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода *T* есть периодическая функция периода *T*.
2. Если функция *y=f(x)* имеет период *T,* то функция *y=f(ax)* (*a*≠0) имеет период $\frac{T}{|a|}$.
3. Определенный интеграл от периодической функции *y=f(x)* с периодом *T* по любому отрезку длиной *T* имеет одно и тоже значение, то есть для любого *x* справедливо равенство

$$\int_{x}^{x+T} f(t)dt=\int_{0}^{T} f(t)dt\,.$$

Замечание. Если функция $f(x)$ является периодической периода T_1, а функция $g(x)$ является периодической периода T_2 и эти периоды соизмеримы, то есть $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ – рациональное число, то сумма, разность, произведение и частное этих двух функций есть функция периодическая периода $T=mT_2=n\,T_1$. Если же отношение периодов есть число иррациональное, то сумма, разность, произведение и частное этих двух функций не будет периодической функцией.

Можно доказать, что алгебраическая сумма любого конечного, а также бесконечного числа (если ряд сходится), периодических функций с соизмеримыми периодами, есть функция периодическая. Поставим обратную задачу: ***представить любую периодическую функцию в виде ряда простейших периодических функций, например, гармоник.*** Введем предварительно некоторые вспомогательные соотношения и понятия, которые понадобятся в дальнейшем.

§2. Ортогональные системы функций

Рассмотрим множество кусочно-непрерывных на $[a,b]$ функций (то есть непрерывных на $[a,b]$ всюду за исключением конечного числа точек разрыва первого рода). По достаточному признаку интегрируемости по Риману существуют конечные интегралы

$$\int_a^b f(x)dx \text{ и } \int_a^b f^2(x)dx,$$

то есть кусочно-непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция является ***интегрируемой с квадратом функцией*** на этом же отрезке. Введем на множестве кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ операцию скалярного произведения. То есть такую операцию, которая паре указанных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ставит в соответствие число (φ,ψ) и удовлетворяющую следующим свойствам:

1. $(\varphi,\psi) = (\psi,\varphi)$;
2. $(\varphi_1 + \varphi_2,\psi) = (\varphi_1,\psi) + (\varphi_2,\psi)$,
3. $(\lambda\varphi,\psi) = (\varphi,\lambda\psi) = \lambda(\varphi,\psi)$ для $\forall\lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(\varphi,\varphi) \geq 0$, причем $(\varphi,\varphi) = 0 \iff \varphi = 0$.

Скалярным произведением функций $\varphi(x)$ ***и*** $\psi(x)$ ***на отрезке*** $[a,b]$ будем называть число, равное

$$(\varphi,\psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\,.$$

Очевидно, что таким образом введенное число удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения. Число

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx} = \sqrt{(\varphi,\varphi)}$$

называется ***нормой функции*** $\varphi(x)$, Множество всех кусочно-непрерывных на $[a,b]$ функций, с введенным таким образом скалярным произведением и нормой элемента, называется ***пространством интегрируемых с квадратом функций*** и обозначается $L_2[a,b]$. Очевидно, что пространство непрерывных функций уже, чем пространство интегрируемых с квадратом функций: $\mathbb{C}[a,b] \subset L_2[a,b]$.

Система (конечная или бесконечная) функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \in L_2[a,b]$$

называется ***ортогональной на*** отрезке $[a,b]$, если все функции этой системы ортогональны на этом отрезке, то есть их скалярное произведение

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, k \neq m, \\ \neq 0, k = m. \end{cases}$$

Если при этом для любого k выполняется равенство

$$\|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_k^2(x)dx = 1,$$

то система функций называется ***ортонормированной на*** $[a,b]$**.**

Понятие ортогональности функций введено по аналогии с ортогональностью векторов, для которых необходимым и достаточным условием ортогональности было равенство нулю их скалярного произведения.

В качестве примеров ортогональных систем функций можно рассмотреть следующие:

1. ***Тригонометрическая система функций***: 1, *cosx, sinx, cos*2*x, sin*2*x,…*

Несложно убедиться в том, что это ортогональная система на любом отрезке [-π,π], так как для любых целых *k, n*

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosnxdx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} sinkxdx = 0,$$

как определенный интеграл от тригонометрической функции по полному периоду, а для любых отличных от нуля целых $k \neq m$ несложно получить

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmxsinkxdx = \int_{-\pi}^{\pi} cosmxcoskxdx = \int_{-\pi}^{\pi} sinmxsinkxdx = 0$$

При отличных от нуля целых $k \neq m$ последние три формулы можно заменить следующими:

$$\int_{-\pi}^{\pi} coskx \cdot sinkxdx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} cos^2kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2kxdx = \pi$$

Эти формулы получаются непосредственным интегрированием подынтегральных тригонометрических выражений. То есть, тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длины 2π, причем, норма первого элемента равна $\sqrt{2\pi}$, а всех остальных $\sqrt{\pi}$.

2. ***Основная тригонометрическая система функций***

$$1, cos\frac{\pi x}{l}, sin\frac{\pi x}{l}, cos\frac{2\pi x}{l}, sin\frac{2\pi x}{l}, cos\frac{3\pi x}{l}, sin\frac{3\pi x}{l}, \dots$$

является ортогональной на любом отрезке длины $2l$, например $[-l,l]$, причем норма первого члена $\sqrt{2l}$, а всех остальных $\sqrt{l}$.

3. ***Система многочленов Лежандра***

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Выпишем несколько первых членов это системы:

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 \cdot 0!}(x^2-1)^0 = 1;$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 \cdot 1!}(x^2-1)' = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\left((x^2-1)^2\right)'' = \frac{1}{2}(3x^2-1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!}\left((x^2-1)^3\right)''' = \frac{1}{4}(5x^3-3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4 \cdot 4!}\left((x^2-1)^4\right)^{IV} = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

Можно показать, что система многочленов Лежандра ортогональна на $\left[-1;1\right]$.

§3. Разложение 2π – периодической функции в ряд Фурье

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + (a_1cosx + b_1sinx) + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (1)$$

Числа a_k и b_k называются ***коэффициентами ряда***.

Преобразуем выражение, стоящее под знаком ряда:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \left| A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right| = A_n(cos\varphi_n \cos nx + sin\varphi_n \sin nx) =$$

$$= A_n cos(nx - \varphi_n), \text{ где } cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}},\ sin\varphi_n = \frac{b_n}{A_n} = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}.$$

С учетом последнего равенства ряд (1) можно переписать в следующем виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n cos(nx-\varphi_n)\ . \qquad (2)$$

Члены ряда (1) являются 2π–периодическими функциями. Поэтому сумма этого ряда (если он будет сходиться) также будет 2π–периодической. Рассмотрим 2π–периодическую функцию $f(x)\in L_2[-\pi,\pi]$ и выясним при каких условиях (налагаемых на функцию) она разложима в тригонометрический ряд (1), то есть представима в виде суммы тригонометрического ряда

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (3)$$

Предположим, что ряд (3) сходится равномерно и определим в этом случае коэффициенты a_n и b_n. Так как равномерно сходящиеся ряды можно почленно интегрировать, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\ \ dx\right)=\pi a_0\,.$$

Следовательно,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \qquad (4)$$

Умножая, далее, равенство (3) на $\cos kx$ и интегрируя по отрезку $[-\pi,\pi]$ (с учетом формул §2 для интегралов тригонометрической системы, которая является ортогональной), имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx\ \ dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\ \ dx\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\quad dx\right)=\begin{cases}0, k\neq n\\ \pi, k=n\end{cases}\ (k,n=1,2,3,\dots)$$

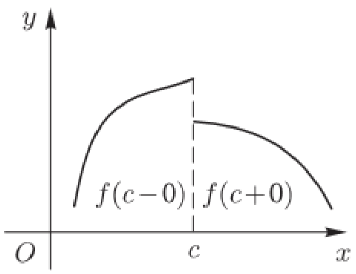
Умножим (3) на $\sin kx$ и проинтегрировав, получим окончательно формулы

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ \ (n=1,2,3,\dots) \qquad (5)$$

То есть, е*сли 2π–периодическая функция f(x) является суммой равномерно сходящегося тригонометрического ряда* (1)*, то коэффициенты этого ряда определяются по формулам* (4), (5). При этом коэффициенты, определяемые этими формулами, называются ***коэффициентами Эйлера-Фурье,*** а тригонометрический ряд – ***рядом Фурье функции*** *f(x).*

Естественно возникает вопрос, при каких условиях ряд Фурье, построенный для функции *f(x)* (то есть коэффициенты этого ряда (1) вычислены по формулам (4), (5)), сходится, и если он сходится, то будет ли его сумма равна данной функции *f(x)*. Чтобы ответить на этот вопрос, введем следующее понятие. Будем говорить, что ***функция f(x) удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке*** $[-\pi,\pi]$, если:

- на этом отрезке функция *f(x)* непрерывна или имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода;
- в указанном интервале функция *f(x)* имеет лишь конечное число экстремумов (или, другими словами, кусочно-монотонна на этом отрезке).



Напомним, что $x=c$ называется точкой разрыва первого рода функции *f(x)*, если существуют конечные односторонние пределы этой функции в этой точке:

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c-0),\ \lim_{x\to c+0} f(x) = f(c+0)$$

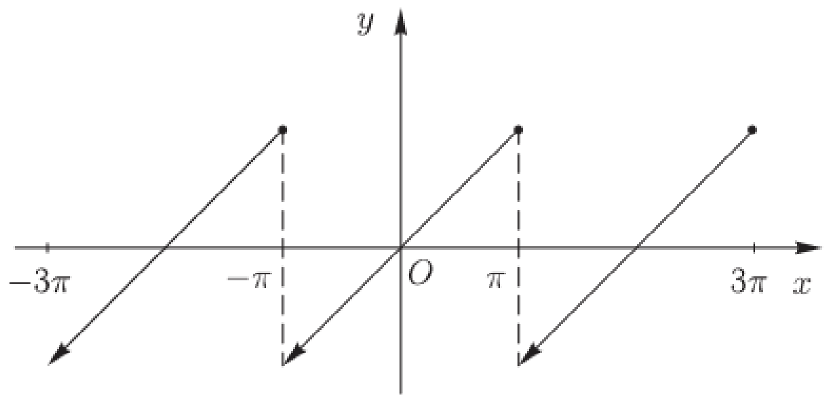
и они не равны между собой.

Модуль разности этих односторонних пределов (называется скачком функции *f(x)* в точке $x=c$) есть величина конечная.

Без доказательства приведем следующую теорему.

Теорема Дирихле. Если периодическая с периодом 2π функция *f(x)* удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-\pi,+\pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма $S(x)$ этого ряда равна заданной функции во всех точках *x*, в которых *f(x)* непрерывна, и $S(x)\Big|_{x\,=\,c} = \frac{f(x-c)+f(x+c)}{2}$ если $x=c$ есть точка разрыва первого рода функции *f(x)*.

Пример. Пусть периодическая функция *f(x)* с периодом 2π задана в интервале $(-\pi,\pi]$ формулой $f(x)=x$, $-\pi < x \le \pi$. Разложить ее в ряд Фурье.



Продолжим функцию на всю числовую ось: для интервалов $(-5\pi,-3\pi]$, $(-3\pi,-\pi]$, $(\pi,3\pi]$, $(3\pi,5\pi]$, ... график получится параллельным переносом. Из рисунка видно, что $x=\pi$ является точкой разрыва первого рода, причем предел слева $f(\pi-0)=\pi$, а предел справа $f(\pi+0)=-\pi$. Аналогично $x=-\pi$ также является точкой разрыва первого рода, для которой $f(-\pi-0)=\pi$, $f(-\pi+0)=-\pi$. Функция $f(x)=x$ является непрерывной в интервале $-\pi < x < \pi$. Внутри указанного интер-

вала функция возрастает и экстремумов не имеет. Таким образом, для рассматриваемой функции выполняются условия Дирихле на отрезке $[-\pi,+\pi]$. Найдем по формулам (4)–(5) коэффициенты Фурье функции.
По формуле (5) имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx\,dx \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\,\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos \pi n\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Первоначально воспользовались известным свойством определенного интеграла: интеграл по симметричному относительно начала координат промежутку от четной функции равен двум интегралам по половине промежутка. Затем применили формулу интегрирования по частям в определенном интеграле. Окончательно получили:

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Так как определенный интеграл по симметричному относительно начала координат промежутку от нечетной функции равен нулю, то коэффициенты $a_0=0$ и $a_n=0$. Таким образом, ряд Фурье для рассматриваемой функции примет вид

$$2sinx - sin2x + \frac{2}{3}sin3x + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Заданная функция удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому ряд сходится всюду. Так как в интервале $-\pi<x<\pi$ функция $f(x)=x$ непрерывна, то сумма ряда равна этой функции, то есть выполняется равенство

$$x = 2sinx - sin2x + \frac{2}{3}sin3x + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx + \cdots, -\pi < \text{x} < \pi\,.$$

В точке $x=\pi$ все члены ряда обращаются в нуль, поэтому сумма ряда равна нулю. С другой стороны, эта точка есть точка разрыва первого рода, и для нее $\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{\pi-\pi}{2} = 0$, то есть эта полусумма равна значению суммы ряда в точке $x=\pi$, что согласуется с утверждением теоремы Дирихле.

Из решения примера несложно сделать вывод, что ***если периодическая функция является нечетной, то ряд Фурье для нее будет состоять из синусов (то есть все коэффициенты Фурье $a_i=0$), а если разлагается четная функция, то разложение будет содержать только косинусы.***

§4. Ряды Фурье для функции с произвольным периодом

Пусть функция $f(x)$ имеет период $T=2l$, где $l>0$, то есть для любого x выполняется $f(x)=f(x\pm 2l)$. Положим $x = \frac{lt}{\pi}$, тогда $t = \frac{\pi x}{l}$. Рассмотрим функцию

$F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$. Легко проверить, что *F(t)* имеет период, равный 2π. Разложим ее в ряд Фурье на интервале $[-\pi,+\pi]$

$$F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt=\left|\begin{array}{ll} x=\dfrac{lt}{\pi} & dt=\dfrac{\pi}{l}dx \\ t=\pi & x=l \\ t=-\pi & x=-l\end{array}\right|=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx.$$

Аналогично выводятся формулы

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Тогда, учитывая замену переменной, получим ряд Фурье в следующей форме

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Так как $l=\frac{T}{2}$, то $\frac{n\pi x}{l}=n\frac{2\pi}{T}x=\left|\omega=\frac{2\pi}{T}\text{ круговая частота}\right|=n\omega x$ и ряд Фурье перепишется в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x),$$

где коэффициенты Эйлера-Фурье вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx\,,a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos n\omega x\,dx\,,b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin n\omega x\,dx.$$

Формально ряд Фурье можно записать для любой функции $f(x)$, если она интегрируема на $[-l;l]$. Но естественно возникают вопросы:

1) сходится ли полученный ряд?;

2) можно ли поставить знак равенства между функцией и ее рядом Фурье?

Ответ на эти вопросы дает, как и в предыдущем параграфе, теорема Дирихле.

Теорема Дирихле (достаточное условие сходимости ряда Фурье)**.** Пусть функция $f(x)$ имеет период $T=2l$ и удовлетворяет условиям:

1) кусочно-непрерывна на $[-l;l]$, то есть непрерывна на этом отрезке или имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода;

2) кусочно-монотонна на $[-l;l]$, т. е. монотонна на этом отрезке или отрезок можно разбить на конечное число интервалов, на которых она монотонна.

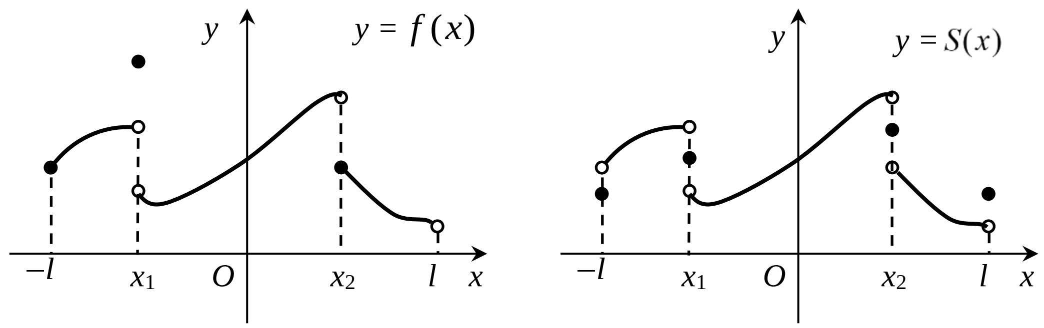
Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и его сумма $S(x)$ равна:

1) $S(x_0) = f(x_0)$, если в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ непрерывна;

2) $S(x_0) = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$, если $x = x_0$ – точка разрыва функции $f(x)$;

3) $S(l) = \dfrac{f(l-0) + f(-l+0)}{2}$.

Отличие такой формулировки от ранее введённой состоит только в детализации условий Дирихле и, в случае сходимости ряда к функции, детализирует поведение суммы тригонометрического ряда в точках разрыва. Важность этой теоремы заключается в том, что большинство функций, которые встречаются в технических приложениях, удовлетворяют условиям теоремы Дирихле. На рисунке приведена геометрическая интерпретация теоремы.

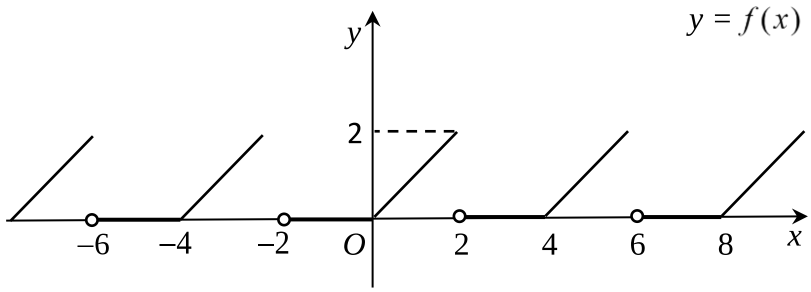


Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 4$) функцию, заданную на интервале $\left(-2, 2\right]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 < x \le 0, \\ x & \text{при } 0 < x \le 2; \end{cases}$$

и изобразить графики функции и суммы полученного ряда.

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рисунке.



Поскольку $T = 2l = 4$, то $l = 2$. Рассчитаем коэффициенты ряда Фурье по полученным ранее формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2} xdx\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x\cos\frac{\pi nx}{2}dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos\dfrac{\pi n}{2}xdx; & v = \displaystyle\int\cos\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 - \frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{2}\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\pi n - 0 + \frac{4}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n - \cos 0)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\cdot 0 + \frac{4}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi^2(2k-1)^2}, & \text{если } n = 2k-1. \end{cases}$$

Так как при расчете коэффициентов ряда Фурье использовали соотношения

$$\sin\pi n = 0, \quad \cos\pi n = (-1)^n.$$

Далее находим

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x\sin\frac{\pi nx}{2}dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = \sin\dfrac{\pi n}{2}xdx; & v = \displaystyle\int\sin\frac{\pi nx}{2}dx = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{2}\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2\right) =$$

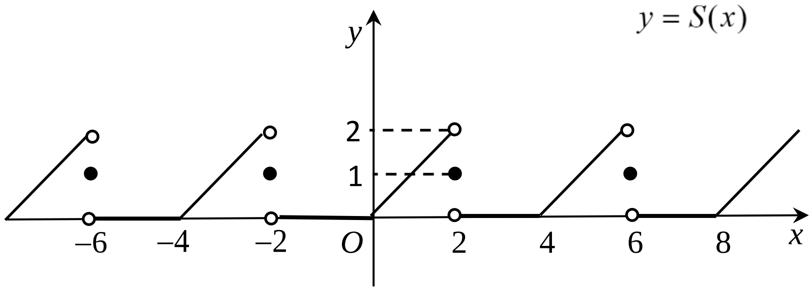
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}\cos\pi n-0+\frac{4}{\pi^2 n^2}(\sin\pi n-\sin 0)\right)=-\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^n=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Окончательно, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}$$

или

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$



В силу теоремы Дирихле график суммы $S(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ имеет вид, представленный на рисунке. Полученное разложение в ряд Фурье позволяет к тому же вычислить суммы некоторых числовых рядов. Например, подставим в полученный ряд $x=0$:

$$S(0)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos 0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin 0=$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

С другой стороны, из теоремы Дирихле следует, что $S(0)=0$, как точки непрерывности исходной, подлежащей разложению функции. Поэтому

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^2}=0,$$

откуда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

или

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+...=\frac{\pi^2}{8}.$$

При $x = 1$ получим:

$$S(1) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\frac{\pi(2k-1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Поскольку $\cos\frac{\pi(2k-1)}{2} = 0$ и

$$\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} \sin\frac{\pi(2k-1)}{2} = (-1)^{k+1}, & \text{если } n = 2k-1 - \text{нечетное}, \\ \sin\frac{\pi \cdot 2k}{2} = \sin \pi k = 0, & \text{если } n = 2k - \text{четное}, \end{cases}$$

то

$$S(1) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{2k}}{\pi(2k-1)} \cdot (-1)^{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

По теореме Дирихле, $S(1) = 1,$ поэтому

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4};$$

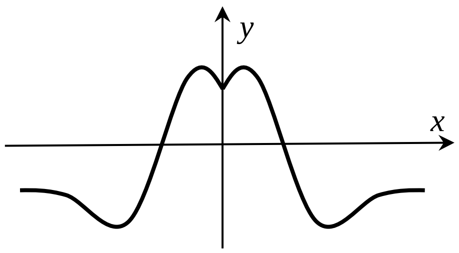
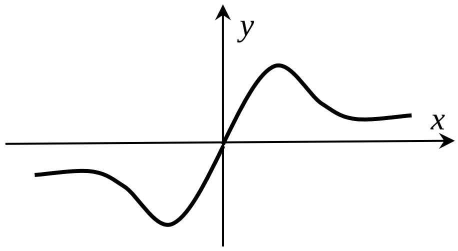
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Имеющиеся на данный момент знания по теории числовых рядов не позволяли нам получить этот результат.

§5. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных периодических функций

Напомним основные свойства четных и нечетных функций.

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если ее область определения симметрична относительно 0 и $f(-x) = f(x)$ для всех x из области определения функции.	Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если ее область определения симметрична относительно 0 и $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения функции.
График четной функции симметричен относительно Oy.	График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Интеграл по симметричному относительно начала координат промежутку:</td></tr>
<tr><td>$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx,$
если $f(x)$ – четная функция.</td><td>$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0,$
если $f(x)$ – нечетная функция.</td></tr>
</table>

Сформулируем для случая нечетных и четных периодических функций две теоремы, которые следуют непосредственно из их свойств.

Теорема. Если $f(x)$ – четная, периодическая с периодом $T = 2l$ функция, то ее ряд Фурье содержит только косинусы и имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Теорема. Если $f(x)$ – нечетная, периодическая с периодом $T = 2l$ функция, то она разлагается в ряд по синусам:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

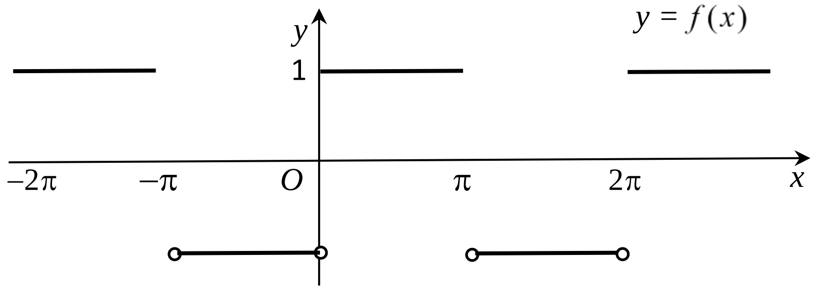
$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \le x \le \pi; \end{cases}$$

и рассмотреть графики частичных сумм этого ряда.

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рисунке.



Так как $f(x)$ – нечетная функция, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Вычислим коэффициенты Фурье

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx = -\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}(\cos\pi n - 1) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k - \text{четное}, \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & \text{если } n = 2k-1 - \text{нечетное}, \end{cases}$$

получим ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} =$$

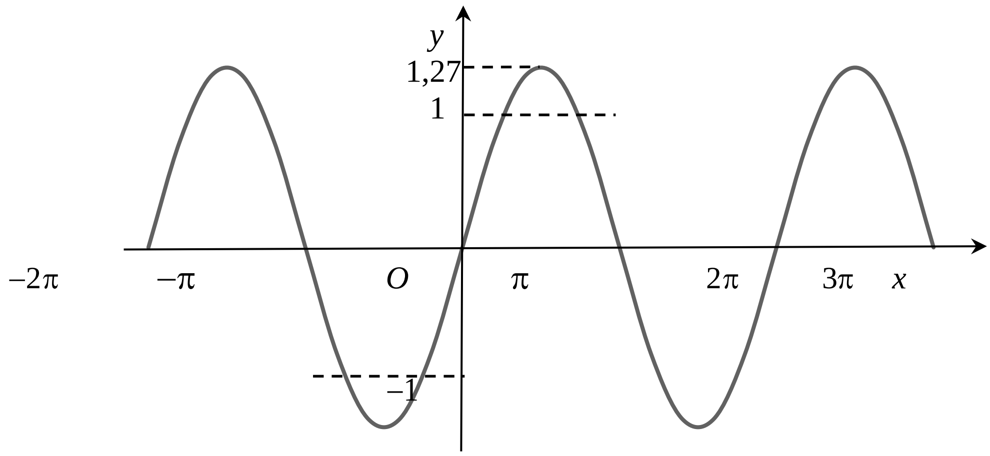
$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots + \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \ldots\right).$$

Рассмотрим частичные суммы полученного ряда Фурье

$$S_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin x;\ \ S_3(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right);$$

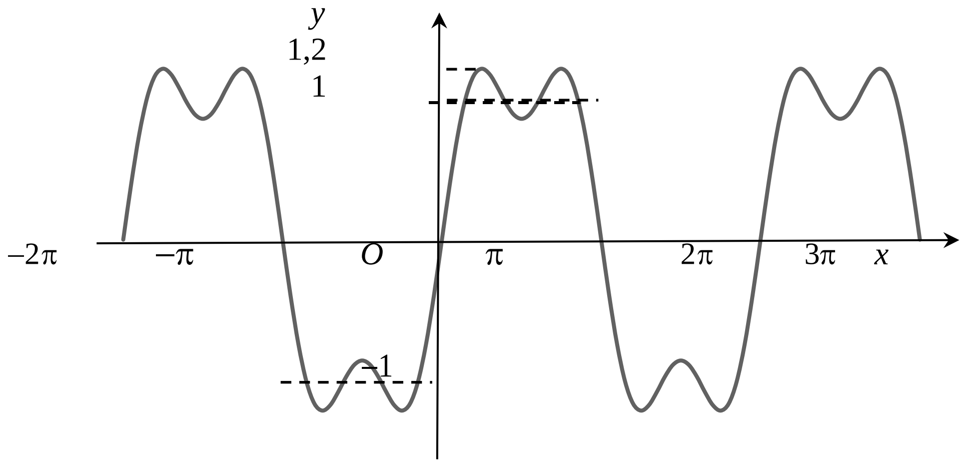
$$S_5(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right); \ldots;$$

на рисунке изображены графики частичных сумм $S_1(x), S_3(x), S_5(x),\ S_{15}(x),$ а также график суммы ряда $S(x)$.



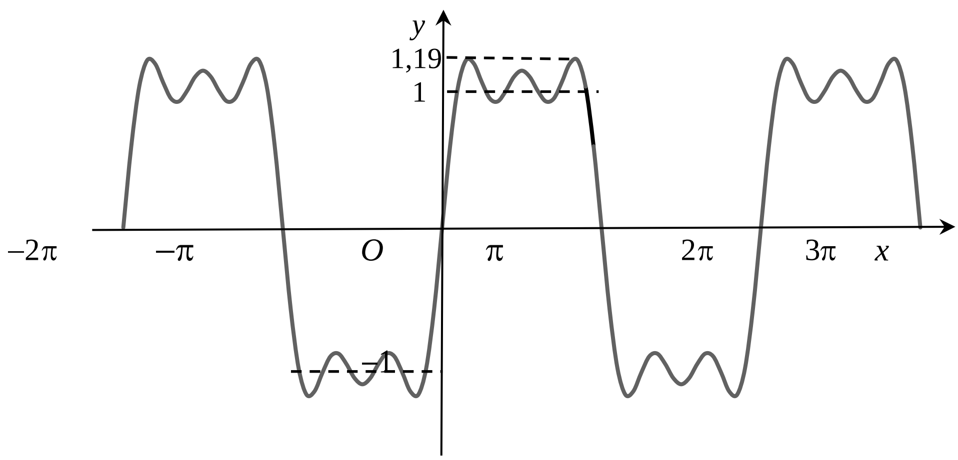
а

График $S_1(x)=\dfrac{4}{\pi}\sin x$



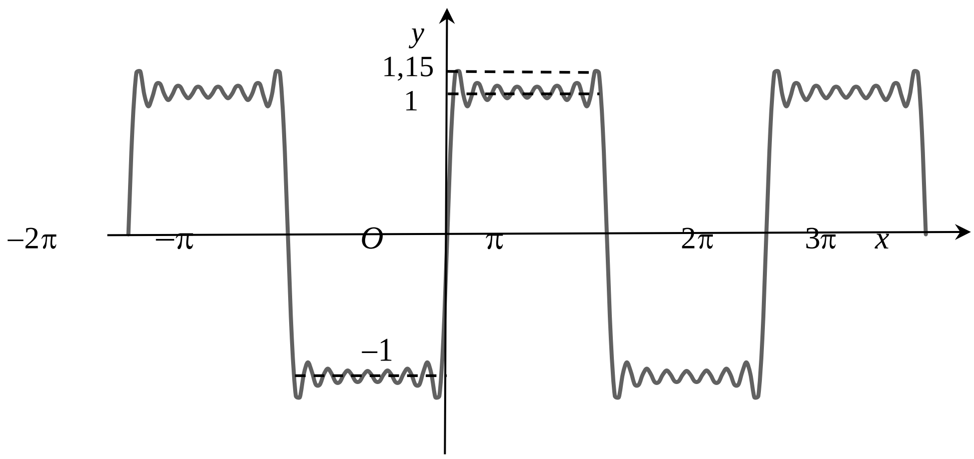
б

График $S_3(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x\right)$



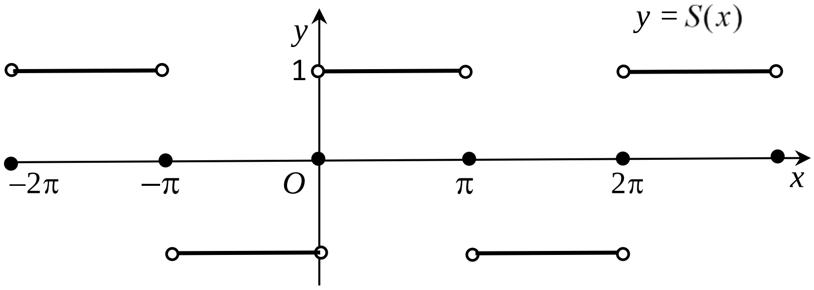
в

График $S_5(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{5}\sin 5x\right)$



г

График $S_{15}(x)$



д

График суммы ряда $S(x)$

Графики на рисунке иллюстрируют процесс приближения частичных сумм ряда Фурье к исходной функции $f(x)$. При аппроксимации разрывной функции тригонометрическим рядом Фурье имеет место так называемое *явление Гиббса*, которое иллюстрируется рассмотренным примером. С увеличением числа членов в частичной сумме аппроксимирующая кривая приближается к графику исходной функции во всех точках, кроме точек разрыва. Вблизи точек разрыва появляются небольшие выступы, причем с ростом числа слагаемых в частичной сумме выступы не уменьшаются по высоте, а только становятся более узкими и сдвигаются к точкам разрыва. Доказано, что величина выступа зависит от величины скачка функции в точке разрыва: если этот скачок равен δ, то величина выступа для функции периода 2π составляет около $0{,}0895\delta$. Таким образом, для каждой фиксированной точки x (за исключением точек разрыва) $S_n(x)\underset{n\to\infty}{\to} S(x)=f(x)$.

§6. Разложение в ряд Фурье непериодических функций

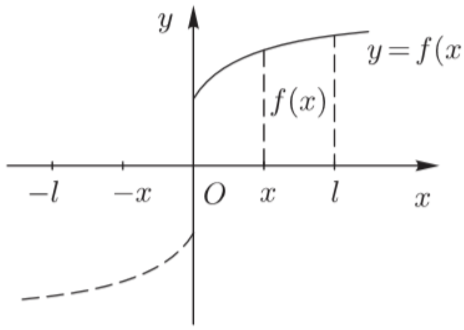
В предыдущих частях в ряд Фурье разлагали только периодические функции, так как если ряд сходится, то его сумма есть функция периодическая. Если функция *f(x)* задана только на некотором конечном отрезке, то она не является периодической. Следовательно, разложить в ряд Фурье ее нельзя. Построим вспомогательную функцию, которая в области определения $[a,b]$ совпадает с функцией *f(x)* и является периодической периода $T=2l=|b-a|$. В этом случае говорят, что ***функцию f(x) периодически продолжили на всю числовую ось***. Так как вспомогательная функция является периодической, то её можно разложить в ряд Фурье, коэффициенты которого (в силу того, что $b=2a+l$) имеют вид

$$a_0 = \frac{2}{|b-a|}\int_a^b f(x)dx\,, a_n = \frac{2}{|b-a|}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{|b-a|}dx,$$

$$b_n = \frac{2}{|b-a|}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{|b-a|}dx.$$

На отрезке $[a,b]$ разложение в ряд Фурье сходится к функции *f(x)*. За пределами отрезка разложение нам не представляет интереса в силу того, что там функция задана изначально не была.

Рассмотрим частный случай, когда функция *f(x)* задана в интервале $0 < x < l$. Будем считать, что *f(x)* удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $(0,l)$, принимая на концах интервала значения $f(0)=f(0+0)$, $f(l)=f(l-0)$. Заметим, что если x – любая точка этого интервала (как показано на рисунке), то $-x$ точка интервала $(-l,0)$.



В интервале $(-l,0)$ исходную функцию доопределим по закону $f(-x)=-f(x)$. Заданная таким образом функция будет нечетной, график ее симметричен относительно начала координат. Далее, предположим, что доопределенная указанным способом функция является $2l$-периодической, иначе говоря, будем считать, что она *продолжена периодически на всю действительную ось*.

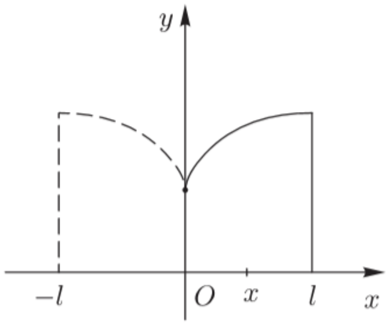
Построенная таким образом функция *f(x)* является нечетной и периодической с периодом $2l$. Такая функция разлагается в ряд Фурье по синусам по формуле

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, 0 < x < l,$$

а коэффициенты ряда находятся по формулам

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Результат разложения рассматриваем только в интервале задания функции. При этом коэффициенты b_n разложения выражаются только через значения функции в интервале $(0,l)$, в котором задается *f(x)*. Таким образом, формулы дают разложение функции *f(x)* в ряд Фурье, когда эта функция задана в интервале $(0,l)$.



Можно поступить иначе, продолжив исходную функцию в интервал $(-l,0)$ по закону $f(-x)=f(x)$, при этом получим четную функцию. Далее функцию считаем периодической с периодом $2l$, поэтому можно воспользоваться формулами

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx\,,a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

Тогда ряд Фурье имеет вид

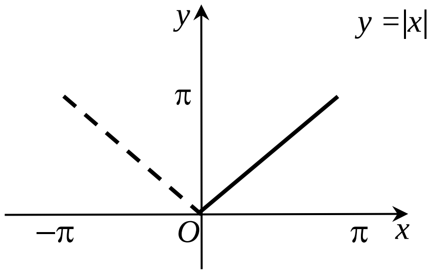
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},0<x<l.$$

Последние формулы дают разложение функции *f(x)*, заданной в интервале $(0,l)$, по косинусам, причем здесь используются значения *f(x)* лишь в интервале $(0,l)$, где она задана.

Итак, одну и ту же функцию *f(x)*, заданную в интервале $(0,l)$, можно разложить в ряд Фурье как по синусам, так и по косинусам. Ясно, что разложения справедливы только для точек *x*, в которых функция *f(x)* непрерывна.

Пример. Разложить функцию $f(x)=x$ на промежутке $[0;\pi)$ в тригонометрический ряд Фурье: **а)** по косинусам; **б)** по синусам.

Решение. **а)** Чтобы получить разложение в ряд Фурье, содержащий только косинусы, доопределим функцию так, чтобы функция $f_1(x)$ была четная. Тогда $f_1(x)=|x|$ при $x\in(-\pi;\pi)$.



В этом случае

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\pi\sin\pi n+\frac{1}{n^2}(\cos\pi n-\cos 0)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

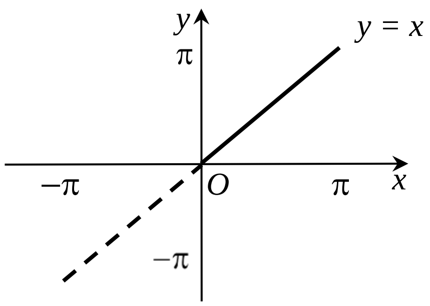
Таким образом, в этом случае ряд Фурье имеет вид

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},$$

То есть для всех $x\in[0;\pi]$ имеет место соотношение

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\ldots.$$

б) Для разложения функции в ряд Фурье по синусам доопределим ее так, чтобы функция $f_1(x)$ была нечетная, то есть $f_1(x)=x$ при $x\in(-\pi;\pi)$.



В этом случае

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos\pi n+\frac{1}{n^2}(\sin\pi n-\sin 0)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{(-1)^n\pi}{n}\right)=\frac{(-1)^{n+1}2}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье по синусам имеет вид

$$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

То есть при всех $x\in[0;\pi)$ справедливо равенство

$$x=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin 4x\dots .$$

Если $f(x)$ задана на промежутке $(0;l),$ то выбор вида ее разложения в ряд Фурье (ряд по косинусам или ряд по синусам) определяется свойствами функции на концах промежутка (в точках $x=0$ и $x=l$). Если функция в этих точках не равна нулю, то ее раскладывают в ряд по косинусам, так как для разложения по синусам приходится заменять $f(x)$ разрывной функцией. Если функция $f(x)$ на концах промежутка равна нулю, ее следует раскладывать в ряд синусов, поскольку при нечетном продолжении получается непрерывная функция $f_1(x)$ с непрерывной производной, а при четном продолжении – непрерывная функция с разрывной производной, то есть ряд по синусам быстрее сходится к $f(x),$ чем ряд по косинусам. Оба эти ряда (по косинусам и по синусам) сходятся к $f(x)$ на $(0;l)$ и имеют противоположные по знаку суммы на $(-l;0)$.

§7. Приближение заданной функции с помощью тригонометрического многочлена

Представление функции бесконечным рядом (Фурье, Тейлора и т. д.) имеет на практике тот смысл, что n-я частичная сумма ряда является приближенным выражением разлагаемой функции, причем это приближение можно сделать сколь угодно точным, выбирая достаточно большое достаточно большое число членов ряда n. Характер приближения может быть различным, так как погрешность приближения функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ можно оценивать по-разному. Например, за меру погрешности можно взять наибольшее уклонение функции $\varphi(x)$ от $f(x)$:

$$\Delta_1(\varphi)=\max_{x\in[a;\,b]}|\varphi(x)-f(x)|.$$

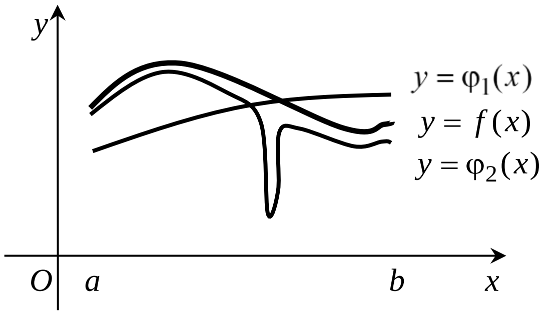
В некоторых случаях более естественно использовать среднее квадратичное уклонение.

$$\Delta_2(\varphi)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b(\varphi(x)-f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

На рисунке кривая $y=\varphi_2(x)$ значительно отличается от $y=f(x)$ только на узком участке и поэтому в некотором смысле приближает кривую $y=f(x)$ лучше, чем кривая $y=\varphi_1(x)$. При этом

$$\Delta_1(\varphi_1)<\Delta_1(\varphi_2);$$

$$\Delta_2(\varphi_1)>\Delta_2(\varphi_2).$$



Теорема **(минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье).** Если $f(x)$ – периодическая с периодом $T=2l$ функция, то среди всех тригонометрических многочленов порядка n

$$\varphi_n(x)=A_0+\sum_{k=1}^{n}A_k\cos\frac{k\pi x}{l}+B_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

наименьшее среднее квадратичное уклонение от функции $f(x)$ имеет тот многочлен, коэффициенты которого есть коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Можно показать, что это уклонение удовлетворяет соотношению

$$\Delta_2^2=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geq 0.$$

Отсюда следует ***неравенство Бесселя***

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$

Более того, можно показать, что

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$

Это соотношение называется ***равенством Парсеваля***.

Следовательно, из необходимого условия сходимости ряда вытекает, что при условии, что $\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx < \infty,$ имеют место соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0;$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.$

§8. Обобщенные ряды Фурье

Систему функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...$ будем называть ***ортогональной*** на отрезке $[a; b],$ если интеграл по отрезку $[a; b]$ от произведения любых двух различных функций этой системы равен 0:

$$\int\limits_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \text{ при } n \neq m.$$

Примерами ортогональных систем функций являются, например:
тригонометрические системы вида

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, ..., \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, ...;$$

система многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

и другие.

Обобщенным рядом Фурье функции $f(x)$ ***по ортогональной на отрезке*** $[a; b]$ ***системе функций*** $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...$ называется ряд вида

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

в котором коэффициенты вычисляются по формулам.

$$c_n = \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx}.$$

Теорема. Среди всех обобщенных многочленов вида

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

наименьшее среднее квадратичное уклонение от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет тот многочлен, коэффициенты которого есть коэффициенты обобщенного ряда Фурье, то есть находятся по вышеприведенной формуле.

§9. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть функция *f(t)* удовлетворяет условиям Дирихле и является периодической периода *T*. Тогда в точках непрерывности этой функции она разложима в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – частота, а коэффициенты Эйлера-Фурье вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt\,, a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t\, dt\,, b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t\, dt.$$

В электро- и радиотехнике часто используют другую форму ряда Фурье – комплексную, которую можно получить, используя формулы Эйлера:

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Тогда

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \frac{a_n}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}\right) =$$
$$= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t}.$$

Введем следующие обозначения

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\,, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}\,, n = 1, 2, \ldots$$

С учетом введенных обозначений, рад Фурье примет вид

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}\right)$$

или, если проанализировать коэффициенты, окончательно получим

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***комплексной формой Ряда Фурье***. Получим формулы для вычисления коэффициентов c_n (*n*=0, ±1, ±2, ±3, …):

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t\, dt - i\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\underbrace{[\cos n\omega t - i\sin n\omega t]}_{e^{-in\omega t}}\,dt\,.$$

Следовательно,

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt\ ,(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

При использовании рядов Фурье в комплексной форме выражения $e^{in\omega t}$ называют ***гармониками***, $\alpha_n = n\omega$ – ***волновыми числами функции f(t)***, а множество всех волновых чисел – ***спектром***, коэффициенты c_n – ***комплексными амплитудами.***

§10. Предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье.

Рассмотрим функцию *f(t),* которая описывает некоторый непериодический процесс на промежутке конечной длины. Для исследования этого процесса можно разложить функцию на заданном интервале в ряд Фурье. А как быть, если функция задана на всей числовой оси и, естественно, не является на ней периодической? В таком случае ее нельзя продолжить периодически и, следовательно, нельзя разложить в ряд Фурье. Выходом из положения является предельный переход. Предположим условно, что период этой функции равен *T,* а затем совершим предельный переход при $T \to \infty$.

Пусть функция *f(t)* является непериодической и заданной на множестве $\mathbb{R}$. Предположим, далее, что на любом конечном отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \subset \mathbb{R}$ она удовлетворяет условиям Дирихле и, кроме того, абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = M < +\infty\,.$$

Ряд Фурье для этой функции имеет вид

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\,, \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{1}$$

где коэффициенты Эйлера-Фурье вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)d\tau\,, a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\cos n\omega\tau\,d\tau\,, b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\sin n\omega\tau\,d\tau.$$

Подставляя значение коэффициентов в выражение (1) и используя формулу косинуса разности $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, получим

$$f(t)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)d\tau+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\cos n\omega(t-\tau)\,d\tau. \qquad (2)$$

Проанализируем последнее равенство при $T\to\infty$.

$$\left|\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)d\tau\right|\le\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(\tau)|d\tau\le\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\tau)|d\tau=\frac{M}{T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Рассмотрим второе слагаемое из выражения (2)

$$\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\cos n\omega(t-\tau)\,d\tau=|\text{умножим и разделим на }\pi|=$$

$$=\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\cos n\omega(t-\tau)\,d\tau=\left|\begin{array}{c}\text{при } n=1 \text{ частота } \omega=\frac{2\pi}{T}\\ \text{при } n=2 \text{ частота } 2\omega=\frac{4\pi}{T}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \text{приращение частоты } \Delta\omega=\frac{2\pi}{T}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\cos n\omega(t-\tau)\,d\tau\right)}_{\text{обозначим через }\varphi(\omega)}\Delta\omega=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega)\,\Delta\omega.$$

Так как $\omega=\frac{2\pi}{T}$ то $\omega\xrightarrow[T\to\infty]{}0$ и, следовательно, частоту ω можно рассматривать изменяющейся непрерывно в пределах от 0 до $+\infty$ при $T\to\infty$. В этом случае последнее выражение можно рассматривать, как интегральную сумму для функции $\varphi(\omega)$. Поэтому

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega)\,\Delta\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\underbrace{\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right\}}_{\substack{\text{интеграл понимается в сысле}\\ \text{главного значения}}}d\omega.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right\}d\omega, \qquad (3)$$

а в точках разрыва первого рода *f(t)* заменено на $\frac{1}{2}(f(t-0)+f(t+0))$. Правая часть формулы (3) называется ***интегралом Фурье для функции*** *f(t)*. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема. Если непериодическая функция *f(t)* удовлетворяет следующим условиям:

1. *f(t)* абсолютно интегрируема на всем множестве $\mathbb{R}$;
2. на любом конечном отрезке из множества $\mathbb{R}$ она удовлетворяет условиям Дирихле

тогда при любом *t*, для которого *f(t)* непрерывна, имеет место равенство

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau \right\} d\omega.$$

В точках разрыва *f(t)* заменяется на $\frac{1}{2}(f(t-0)+f(t+0))$.

Если ввести следующие обозначения

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\,, B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau, \qquad (4)$$

то равенство (3) можно переписать в виде

$$f(t) = \int_0^{+\infty} [A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t]\, d\omega. \qquad (5)$$

По аналогии с рядом Фурье, подынтегральную функцию можно представить в виде гармоник

$$A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t = M(\omega)\sin(\omega t + \varphi_\omega),$$

где $M(\omega) = \sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}$, $\varphi_\omega = arctg\,\frac{A(\omega)}{B(\omega)}$,

и формула (5) примет следующий вид

$$f(t) = \int_0^{+\infty} M(\omega)\sin(\omega t + \varphi_\omega)\, d\omega. \qquad (6)$$

Эта формула сходна с рядом Фурье. Однако, в ряде Фурье изменение частоты происходит дискретным образом, а в интеграле – непрерывным, то есть интеграл Фурье задает непериодическую функцию суммой гармоник с непрерывной последовательностью частот.

Основные отличия ряда от интеграла Фурье:

1. ряд представляет периодическую функцию, как сумму периодических составляющих, а интеграл – непериодическую функцию суммой периодических составляющих;
2. ряд содержит бесконечное счетное множество гармоник, а интеграл бесконечное несчетное множество гармоник.

Представление функции *f(t)* значительно упрощается, если эта функция является четной или нечетной. Если *f(t)* – четная, то

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\,, B(\omega) = 0$$

и формула (5) примет вид

$$f(t) = \int_0^{+\infty} A(\omega)\cos\omega t\, d\omega.$$

Введем следующее обозначение

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Функция $F(\omega)$ называется ***косинус преобразованием функции*** *f(t)*. Через нее исходная функция выражается по следующей формуле

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F(\omega)\cos\omega\tau d\tau.$$

Из анализа двух последних формул видим, что они взаимно обратны. Это позволяет изучение процесса по времени свести к изучению процесса по частоте и наоборот.

Если функция *f(t)* – нечетная, то приходим к ***синус преобразованию Фурье***

$$\Phi(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

и исходная функция

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \Phi(\omega)\, sin\,\omega\tau d\tau.$$

Если функция *f(t)* задана только на интервале (0,+∞), то ее можно продолжить на интервал (–∞,0) четным или нечетным образом, то есть представить синус или косинус преобразованием Фурье.

Пример. Найти косинус и синус преобразование Фурье для функции $f(t) = e^{-t}, t \geq 0$.

Решение. Заданная функция является гладкой и абсолютно интегрируемой на [0,+∞). Если ее продолжить на всю числовую ось четным образом, то получим косинус преобразования Фурье:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos\omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-t}\cos\omega t\,\Big|_0^b - \omega\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin\omega t dt\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b}\cos\omega b + 1 - \omega\left[-e^{-t}\cos\omega t\,\Big|_0^b + \omega\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos\omega t dt\right]\right) =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - \omega^2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos\omega t dt\right)$$

Выражая отсюда искомый интеграл, получаем косинус преобразование

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\omega^2} \text{ и } e^{-t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{1+\omega^2} d\omega.$$

Аналогично находим и синус преобразование

$$\Phi(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{1+\omega^2} \text{ и } e^{-t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{1+\omega^2} d\omega.$$

§11. Комплексная форма интеграла Фурье. Прямое и обратное преобразование Фурье.

Если функция *f(t)* является непериодической, заданной на всей числовой оси $\mathbb{R}$, на любом конечном отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \subset \mathbb{R}$ она удовлетворяет условиям Дирихле и, кроме того, абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то ее можно представить интегралом Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega (t-\tau) d\tau \right\} d\omega$$

Внутренний интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega (t-\tau) d\tau$$

является четной по переменной ω функцией, поэтому интеграл Фурье можно переписать в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega (t-\tau) d\tau \right\} d\omega.$$

Согласно формулам Эйлера имеем, что $\cos \omega(t-\tau) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega(t-\tau)} + e^{-i\omega(t-\tau)}\right)$.
Подставляя это соотношение в последнюю формулу, получим

$$f(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \right\} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau \right\} d\omega.$$

Нетрудно убедиться, что интегралы, стоящие в правой части, равны друг другу. Поэтому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau \right\} d\omega.$$

Правая часть этой формулы называется ***интегралом Фурье в комплексной форме для функции*** *f(t)*. Перепишем эту формулу в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Если ввести обозначение

$$F(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

То последняя формула перепишется в виде

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1)$$

Функция $F(i\omega)$ называется ***преобразованием Фурье функции*** *f(t).* А формула (1) – ***обратным преобразованием Фурье.*** При этом часто функцию *f(t)* называют ***прообразом,*** а $F(i\omega)$ – ***образом.***

Таким образом, преобразование Фурье – операция, сопоставляющая одной функции вещественной переменной, другую функцию вещественной переменной (в отличие от преобразования Лапласа). Эта новая функция описывает коэффициенты («амплитуды») при разложении исходной функции на элементарные составляющие – гармонические колебания с разными частотами. Разные литературные источники могут давать определения, отличающиеся от приведённого выше выбором коэффициента перед интегралом, а также знака «–» в показателе экспоненты. Но все свойства будут те же, хотя вид некоторых формул может измениться. Используя таблицу и свойства преобразования Фурье, можно находить как прямое, так и обратное преобразование Фурье.

Преобразование Фурье закладывает основы многих методов, применяющихся в области цифровой обработки сигналов. Преобразование Фурье позволяет сопоставить сигналу, заданному во временной области, его эквивалентное представление в частотной области, а обратное преобразование Фурье позволяет по частотной характеристике сигнала определить соответствующий сигнал во временной области.

Интегральное (непрерывное) преобразование Фурье используется в теоретических исследованиях, когда известно аналитическое задание функции $f(x)$. На практике обычно имеют дело с дискретными данными, то есть функция $f(x)$ задается таблично набором ее эмпирических (полученных опытным путем) значений $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$ на некоторой сетке узлов (чаще всего равномерной). В этом случае приходится считать, что за пределами этой сетки функция равна 0, и заменять интеграл интегральной суммой.

В случае равномерной сетки ***дискретное преобразование Фурье*** задается формулой:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, \mathrm{e}^{-2\pi i \cdot \frac{kn}{N}}, \quad 0 \le n \le N-1,$$

и сводится к умножению вектора значений функции $f(x)$ на матрицу с элементами $e^{-2\pi i\cdot\frac{kn}{N}}$, что требует $O(N^2)$ арифметических операций. Однако можно существенно сократить число операций, используя *метод быстрого преобразования Фурье*. Если размерность вектора исходных данных $N = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$, то этот метод выполняет дискретное преобразование Фурье за $O((n_1 + n_2 + \ldots + n_k)N)$ операций и при этом повышает точность вычислений.