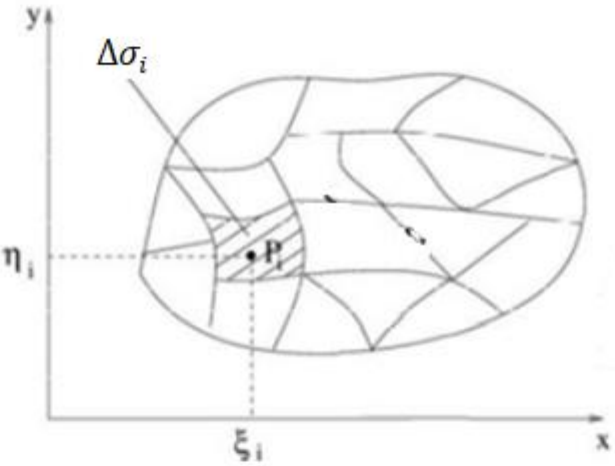
ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Определение двойного интеграла

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой замкнутой области *D* плоскости *xOy* (то есть вместе с границей). Предположим далее, что эта функция ограничена в этой области. Более того, предположим, что граница области ***кусочно-гладкая***, то есть имеет касательные почти во всех точках и их положение (касательных) меняется непрерывно при переходе от одной точки границы к другой за исключением конечного числа точек. К тому же функция $z = f(x, y)$ непрерывна и имеет конечное число гладких кусков.

Проделаем следующие операции:

P. Разобьем область *D* на конечное число элементарных областей (ячеек) $D_1, D_2, \ldots, D_n$ не имеющих общих внутренних точек. Площади этих ячеек обозначим $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$. Максимальное расстояние между любыми двумя точками на границе ячейки обозначим $d_1, d_2, \ldots, d_n$ назовем диаметром ячейки. Через d обозначим число $d = \max\limits_{i=1,n}\{d_i\}$, называемое ***диаметром разбиения***.



B. Выберем в каждой из элементарных ячеек D_i произвольным образом точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ и вычислим значение функции $f(\xi_i, \eta_i)$, $i = \overline{1, n}$.

C. Составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i,$$

называемую ***интегральной суммой функции*** $z = f(x, y)$ ***по области D***.

Определение. Если существует *конечный* предел интегральных сумм при *диаметре разбиения, стремящемся к нулю*, не зависящий от *способа разбиения* области *D* на элементарные области D_i и *выбора точек* (ξ_i, η_i) в них, то этот предел называется ***двойным интегралом*** от функции $z = f(x, y)$ по области *D* и обозначается

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

Если область *D* разбивать на ячейки линиями, параллельными осям координат, то все элементарные области, за исключением может быть граничных, имеют вид прямоугольников, и, следовательно, $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$ и интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i.$$

Переходя к пределу при $d \to 0$ также получим двойной интеграл, который обозначают

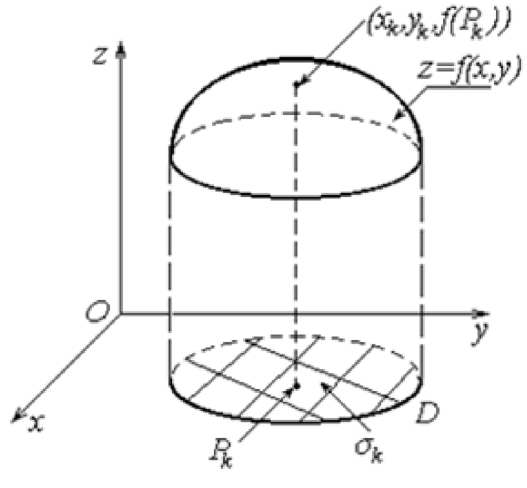
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta x_i \Delta y_i\,.$$

Если предел интегральных сумм существует и конечен, то $z = f(x,y)$ называют ***подынтегральной функцией,*** *D* ***– областью интегрирования,*** *x* ***и*** *y* ***– переменными интегрирования,*** $d\sigma = dxdy$ ***– элементом площади.*** При этом функцию $z = f(x,y)$ называют ***интегрируемой в области D.***

Геометрический смысл двойного интеграла:

Пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывная неотрицательная функция в некоторой замкнутой области *D*. Тогда двойной интеграл численно равен объему *V* цилиндрического тела, ограниченного:

1. сверху поверхностью *z=f(x,y)*;
2. снизу областью *D* на плоскости *xOy*;
3. сбоку цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси *Oz* и направляющей линией, являющейся границей области *D*.



Из геометрического смысла двойного интеграла следует, что при *f(x,y)*=1

$$S_D = \iint\limits_D dxdy$$

– площадь области *D*.

Физический смысл двойного интеграла

1. Если *D* – плоская материальная пластинка с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$, то масса пластинки находится по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy\,.$$

2. Статические моменты пластинки относительно осей *Ox* и *Oy* находят по формулам

$$S_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)\,dx\,dy,\ S_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)\,dx\,dy.$$

3. Координаты центра масс: $x_c = \frac{S_x}{m}$, $y_c = \frac{S_x}{m}$.

4. Моменты инерции I_x, I_y, I_o относительно осей *Ox*, *Oy* и начала координат *O(0,0)*

$$I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)\,dx\,dy, I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)\,dx\,dy\,, I_o = I_x + I_y\,.$$

§2. Основные свойства двойных и тройных интегралов

Если существует двойной интеграл, то функция называется интегрируемой в области *D*. Очевидно, что если на ограниченной, замкнутой, связной области *D* функция *f(x,y)* непрерывна, то интеграл по этой области от функции *f(x,y)* существует. Рассмотрим далее основные свойства, присущие двойному интегралу, считая рассматриваемые функции интегрируемыми.

Основные свойства двойного интеграла.

1. ***Линейность***: если функции *f(x,y)* и *g(x,y)* интегрируемы в области *D*, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные, то

$$\iint\limits_D \big(C_1 f(x,y) + C_2 g(x,y)\big)dxdy = C_1 \iint\limits_D f(x,y)dxdy + C_2 \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

(интеграл от линейной комбинации интегрируемых функций равен линейной комбинации от этих функций).

2. ***Аддитивность***: если область интегрирования *D* разделена на области D_1 и D_2 не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

3. ***Знакопостоянство***: если функция *f(x,y)* в области *D* не меняет свой знак, то двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

сохраняет тот же знак, что и функция. В частности, если для $\forall(x,y) \in D$ $f(x,y) \geq 0$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

4. ***Монотонность:*** если *f(x,y)* ≤ *g(x,y)* для $\forall(x,y) \in D$, то имеет место неравенство

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

5. ***Оценка двойного интеграла***: для непрерывной на замкнутой области *D* функции *f(x,y)* имеет место неравенство

$$mS_D \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS_D,$$

где *m* и *M* – наименьшее и наибольшее значения функции *f(x,y)* на множестве *D*, S_D – площадь области *D*.

6. Теорема о среднем. Если функция *f(x,y)* непрерывна в замкнутой области *D*, то в этой области найдется по крайней мере одна такая точка (ξ,η), такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)S_D.$$

При этом число

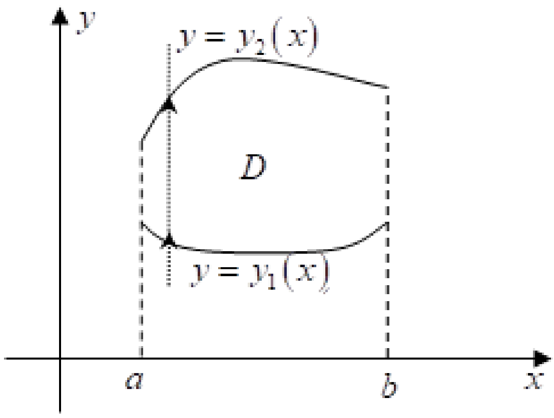
$$\delta = \frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

называют ***интегральным средним значением функции*** *f(x,y)* ***в области*** *D*.

§3. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах

Пусть требуется вычислить двойной интеграл по замкнутой области $D \subset xOy$ от функции $z = f(x,y)$. Как и ранее, предположим, что граница области является кусочно-гладкой кривой. Введем понятие *стандартной* (*правильной*) области. Область $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, где $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ – взаимно однозначные, непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, называется ***стандартной (правильной)*** относительно оси *Oy*.

Другими словами, область является стандартной относительно оси *Oy*, если она расположена между прямыми $x=a$, $x=b$ и ограничена снизу линией $y=y_1(x)$, а сверху $y=y_2(x)$.



Особенности стандартной области относительно оси Oy:

1. Всякая прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку с абсциссой x ($a<x<b$) пересекает границу области только в двух точках $M_1(x_1,y_1)$ – «точке входа» и $M_2(x_2,y_2)$ – «точке выхода», как их иногда называют. При этом нижнюю линию $y=y_1(x)$ часто называют ***«линией входа»***, а верхнюю $y=y_2(x)$ – «***линией выхода***».

2. Линия выхода (входа) задается одним уравнением в явном виде.

Теорема. Если функция $z = f(x,y)$ интегрируема в стандартной области $D = \{(x,y)|a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ относительно оси Oy, то двойной интеграл по этой области от функции $f(x,y)$ вычисляется по формуле

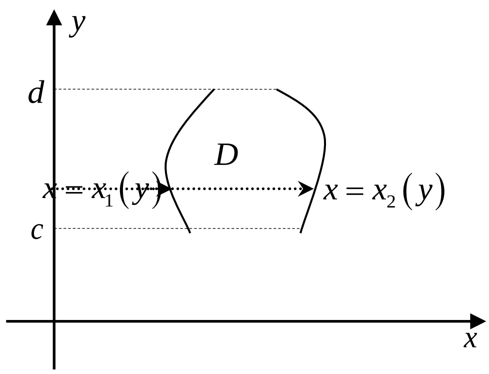
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Правую часть этой формулы называют ***повторным*** или (***двукратным***) ***интегралом***. Интеграл

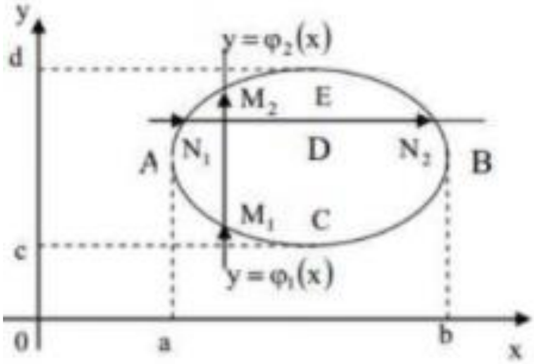
$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

называют ***внутренним***, а интеграл по dx – внешним интегралом. В процессе вычисления вначале находится внутренний интеграл (в общем случае функция от x), а затем – внешний.

Аналогичным образом, ***областью стандартной (правильной) относительно оси Ox*** называют область $D = \{(x,y)|c \le x \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, где функции $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ являются непрерывными и однозначными функциями на отрезке [c,d].



Область, стандартную как относительно оси *Ox,* так и относительно оси *Oy* называют ***стандартной областью.***



Если область *D* не является стандартной ни относительно оси *Ox,* ни относительно оси *Oy,* то ее разбивают на конечное число областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, не имеющих общих внутренних точек, стандартных относительно одной из координатных осей, и используют свойство аддитивности двойного интеграла.

Двойной интеграл по области стандартной в направлении оси *Ox* вычисляется через повторный интеграл аналогично

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Разница только в том, что внутренний интеграл вычисляется по переменной *x,* а внешний – по переменной *y*. Процесс расстановки пределов интегрирования для внутреннего и внешнего интегралов называют ***приведением двойного интеграла к повторному***, а переход от одного повторного интеграла ко второму – ***изменением порядка интегрирования.*** Следует помнить, что

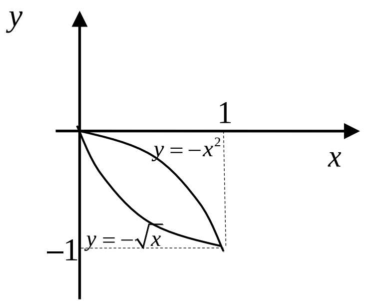
1***. Пределы интегрирования в повторных интегралах зависят только от вида области интегрирования и не зависят от подынтегральной функции.***

2***. В повторных интегралах сначала вычисляются внутренние интегралы, как обычные определенные интегралы, а затем – внешние. Пределы у внешних интегралов всегда постоянны, а пределы внутреннего интеграла в общем случае переменные (некоторые функции).***

3*. **Внутренние и внешние пределы в повторных интегралах (в декартовых координатах) постоянны тогда и только тогда, когда область D является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат.***

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{D}(x+2y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=-x^2,\quad y=-\sqrt{x}$.

Решение. Построим область интегрирования D и перейдем к повторному интегралу:



$$\iint\limits_{D}(x+2y)dxdy=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{-x^2}(x+2y)dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(xy+y^2)\Big|_{-\sqrt{x}}^{-x^2}dx=\int\limits_{0}^{1}((-x\cdot x^2+x^4)-$$

$$-(-x\cdot\sqrt{x}+x))dx=\int\limits_{0}^{1}(-x^3+x^4+x\sqrt{x}-x)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^{5/2}}{5/2}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}=$$

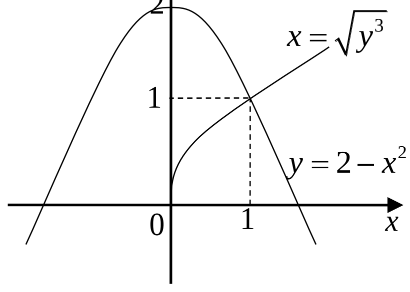
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{5}-\frac{3}{4}=-\frac{3}{20}.$$

Пример. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y^3}}f(x;y)dx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}}f(x;y)dx.$$

Решение. Строим область $D\colon x_1=0, x_2=\sqrt{y^3}$ для $0\le y\le 1$ и $D\colon x_1=0, x_2=\sqrt{2-y}$ для $1\le y\le 2$, то есть область не является стандартной в направлении оси *Ox*. В направлении же оси *Oy* – она стандартная:

$$D=\Big\{(x,y)\,\Big|\,0\le x\le 1, \sqrt[3]{x^2}\le x\le 2-x^2)\Big\}.$$

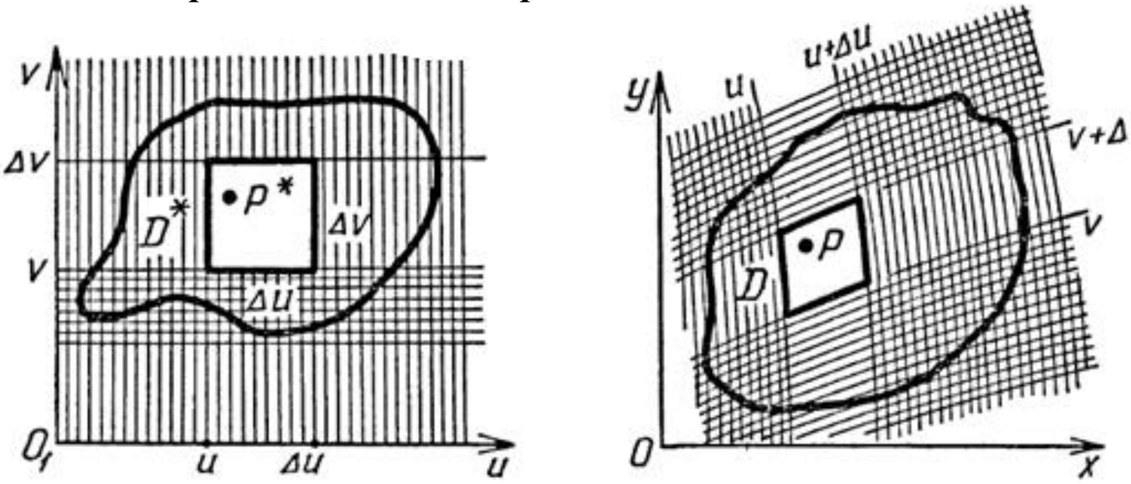


$$\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y^3}}f(x;y)dx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}}f(x;y)dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\sqrt[3]{x^2}}^{2-x^2}f(x;y)dy.$$

§4. Вычисление двойных интегралов в полярных координатах

Пусть в плоскости *Oxy* дана область *D*, ограниченная замкнутой линией *L*. Предположим, что координаты x и y являются функциями переменных u и *v*: *x=x(u,v), y=y(u,v).* Причем функции эти взаимно однозначные и дифференцируемые в некоторой области D^*. Таким образом, эти формулы устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками области D и D^*: $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$. Если в плоскости *Oxy* точка опишет кривую *L*, то в плоскости O^*uv соответствующая точка опишет некоторую кривую L^*. В общем случае прямым линиям *u=const*, *v=const* на плоскости O^*uv будут соответствовать кривые на плоскости *Oxy*, называемые ***координатными линиями на*** *Oxy для новых координат (u,v).* Таким образом, для $\forall P(x, y) \in D$ имеем, что $P(x, y) = P\big(x(u, v), y(u, v)\big) = P(u, v)$, где $(u, v) \in D^*$. Координаты *(u,v)* точки $P(x, y) \in D$ называются ***криволинейными координатами на плоскости.***



При замене прямоугольных координат x и y на новые u и *v* происходит замена области D в плоскости *Oxy* более простой областью D^* в плоскости O^*uv. В результате такой замены происходит искажение области и элемент площади $dS = |I(u, v)|dS^*$, где $I(u, v)$ – ***коэффициент искажения области***, который называется ***якобианом преобразования*** функций *x=x(u,v), y=y(u,v)* по переменным u и *v*. Для его нахождения требуется вычислить определитель

$$I = I(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

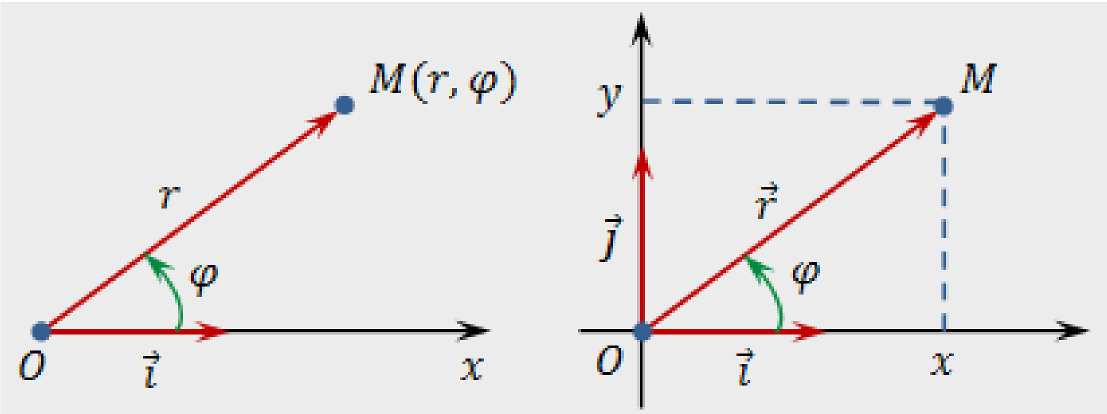
Окончательно формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u, v), y(u, v))|I(u, v)|dudv.$$

Целью замены переменных в двойном интеграле является не упрощение подынтегральной функции, а переход к более простой области интегрирования, то есть упрощение расстановки пределов интегрирования в двойном интеграле.

Простейшим примером криволинейных координат на плоскости является полярная система координат (O, r, φ). Если полюс O совпадает с началом координат декартовой системы координат, а полярный луч с осью абсцисс, то связь между этими системами координат следующая

$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases}, r \in [0, +\infty), \varphi \in [0,2\pi] \text{ или } \varphi \in [-\pi, \pi].$$



Так как $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = arctg\frac{y}{x}$, то приравняв из их к постоянным, получим на плоскости Oxy ***семейство координатных линий***:
– $x^2 + y^2$=$(const)^2$ – семейство окружностей с центром в начале координат.
– $y = x(tgconst)$ – семейство лучей, проходящих через начало координат.
Поэтому, ***полярные координаты при вычислении двойного интеграла целесообразно применять в том случае, когда область интегрирования является кругом или некоторой его частью, либо когда в уравнениях линий, ограничивающих область интегрирования, содержатся выражения*** $(x^2 + y^2)^k, k \in \mathbb{N}$.
Якобиан преобразования в полярных координатах

$$I = I(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -rsin\varphi \\ sin\varphi & rcos\varphi \end{vmatrix} = r$$

и элемент площади в полярных координатах $|I(r, \varphi)|drd\varphi$=$rdrd\varphi$, а формула замены

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(rcos\varphi, rsin\varphi)rdrd\varphi.$$

Интеграл в правой части следует сводить к повторному, расставляя пределы изменения (r, φ).

На практике, как правило, пределы изменения (r, φ) определяют по виду области *D* на плоскости *Oxy* и не используют изображение области в полярной системе координат.

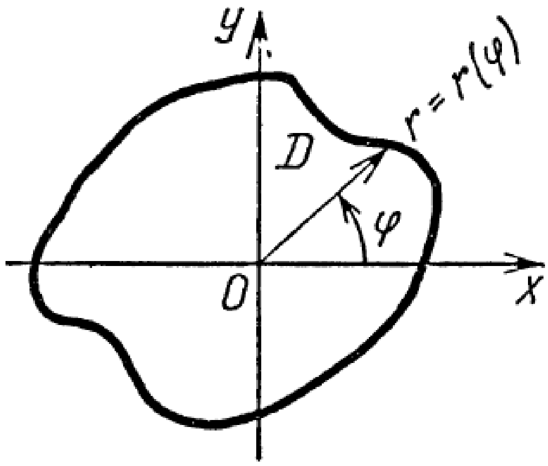
Схема расстановки пределов интегрирования в двойном интеграле при

переходе к полярной системе координат.

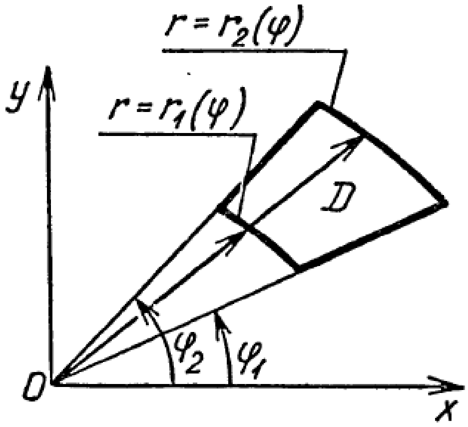
1. Изобразить область D на плоскости Oxy.

2. Записать уравнения линий, ограничивающих область, в поляной системе координат. Для чего заменить формально $x \to rcos\varphi, y \to rsin\varphi, x^2 + y^2 \to r^2$.

3. Определить нижний и верхний предел r_1, r_2 изменения переменной $r = r(\varphi)$, для чего из начала координат проводим луч, проходящий через область D. Если начало координат $O(0,0)$ лежит внутри области D или на ее границе, то считаем $r_1 = 0$, а r_2 определяем из уравнения линии через которую луч выходит из области D.

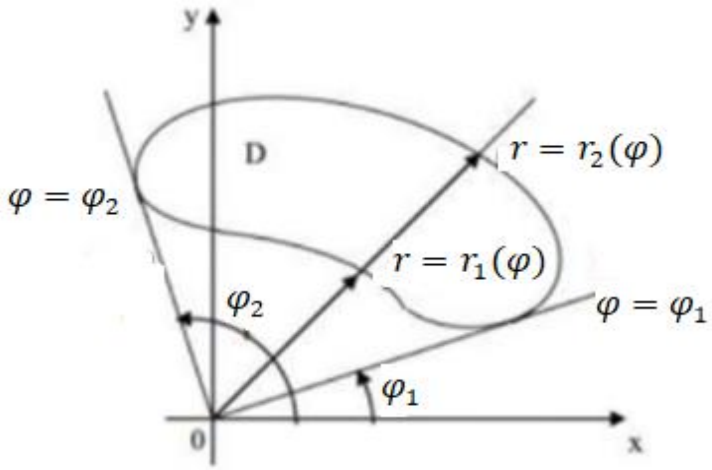


Если начало координат $O(0,0)$ лежит вне области D, то r_1 определяем из уравнения линии, через которую луч входит в область D.

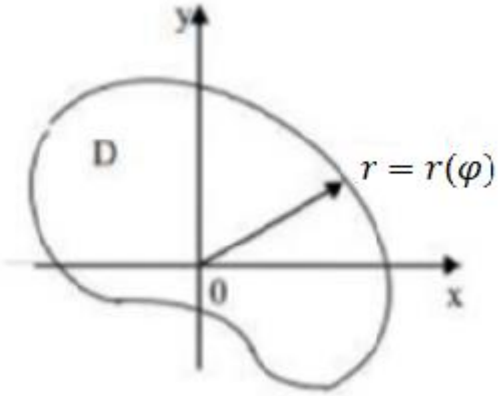


***В общем случае* $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ *зависят от* $\boldsymbol{\varphi}$.**

4. Определить наименьшее φ_1 и наибольшее φ_2 значения полярного угла φ для области D: φ_1 и φ_2 – полярные углы крайних радиус векторов касающихся области D.



Если начало декартовой системы координат лежит внутри области D, то ***всегда*** $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi$.

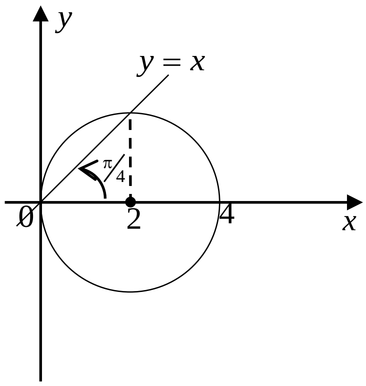


5. Провести вычисления по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_н}^{r_в} f(rcos\varphi, rsin\varphi)rdr$$

Пример. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ расставить пределы интегрирования, если область D определяется неравенствами: $x^2 + y^2 \le 4x, y \ge x$.

Решение. Построим границы области: $x^2 + y^2 = 4x, y = x$. Преобразуем первое уравнение: $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0,\ (x-2)^2 + y^2 = 4$. Это уравнение окружности с центром в точке (2;0) и радиуса 2. Строим область D:



Запишем уравнение окружности и прямой в полярной системе координат:

$$x^2+y^2=4x, r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4r\cos\varphi,$$

$$r=4\cos\varphi.$$

$$y=x, r\sin\varphi=r\cos\varphi, \varphi={}^{\pi}\!/_{4}.$$

Проведя из полюса луч, пересекающий область интегрирования, видим, что он входит в область при $r=0$ и выходит при $r=4\cos\varphi$. Следовательно,

$$\iint_D f(x;y)dxdy=\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)rdr\ .$$