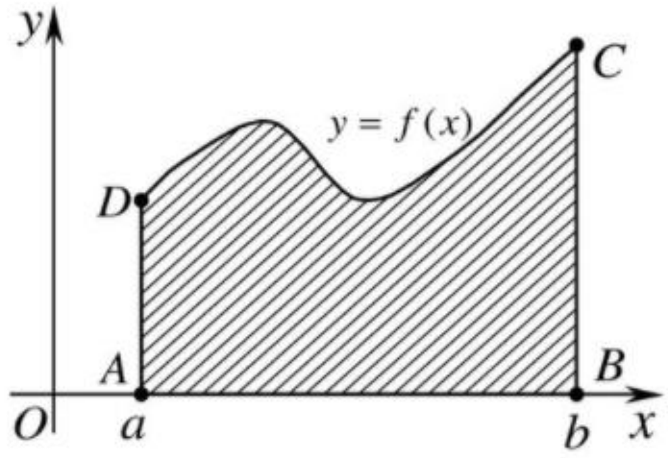
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

§1.1. Площадь криволинейной трапеции.

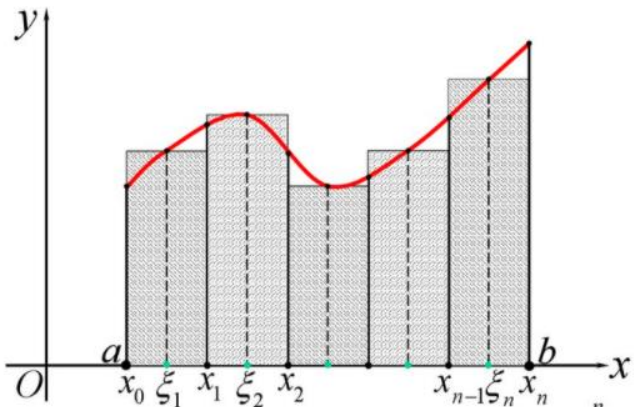
Пусть на отрезке $[a;b]$ определена некоторая неотрицательная непрерывная функция $y = f(x) \in C[a,b]$. Фигура $ABCD$, ограниченная графиком неотрицательной непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, называется ***криволинейной трапецией.***



Вычислим площадь криволинейной трапеции. Для этого разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками $x_0, x_1, ..., x_n$ и обозначим это разбиение $\tau_n = \left\{ x_0, x_1, ..., x_n \middle| a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \right\}$. В результате криволинейная трапеция разобьется на n криволинейных трапеций с площадями равными ΔS_k, а площадь всей криволинейной трапеции

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k.$$

Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину i-го промежутка и наибольшую d_n из этих длин назовем ***диаметром разбиения***: $d_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. На каждом из частичных промежутков (x_{k-1}, x_k) выберем произвольно точку $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ и вычислим значение функции в этой точке. Оно выражает соответствующую ординату кривой $y = f(x)$.



Далее каждую элементарную криволинейную трапецию ΔS_k заменим прямоугольником с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Его площадь равна $f(\xi_k)\ \Delta x_k$. То есть

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Сумма, стоящая в правой части приближенного равенства, представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке. Очевидно, что эта площадь зависит от способа разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k внутри них. С уменьшением диаметра разбиения d_n точность формулы растет (площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции) и за точное значение площади криволинейной трапеции можно принять предел

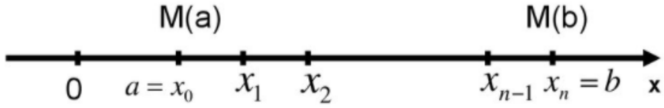
$$S = \lim_{d_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Таким образом, нахождение площади криволинейной трапеции свелось к нахождению предела от некоторой специальным образом построенной суммы.

§1.2. Задача о работе переменной силы.

Рассмотрим задачу об определении работы силы. Если под действием некоторой постоянной силы $\vec{F}$ материальная точка *M* движется прямолинейно и направление силы совпадает с направлением движения, причем сила постоянна на всем пути l, то работа силы равна $|\vec{F}|l$. Рассмотрим далее случай, когда сила изменяется по модулю на всем пути, но направление ее постоянно. И пусть материальная точка M перемещается при этом по прямой вдоль линии действия силы из положения $M(a)$ в положение $M(b)$. Примем эту прямую за ось *Ox*. Начало пути примем за $x = a$, а конец за $x = b$.

Так как сила является переменной, то в каждой точке отрезка $[a,b]$ модуль силы является непрерывной функцией абсциссы x: $|\vec{F}| = f(x)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками $x_0, x_1, ..., x_n$, обозначим это разбиение $\tau_n = \{x_0, x_1, ..., x_n | a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$.



Работа A на всем пути равна сумме работ ΔA_k на маленьких участках:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k.$$

На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ длины $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ сила является переменной (не постоянной), но если длина Δx_k мала, то из непрерывности функции $f(x)$ следует, что сила $|\vec{F}| = f(x)$ на каждом частичном отрезке изменяется незначительно. Выберем внутри каждого интервала (x_{k-1}, x_k) произвольным образом точку $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ и предположим, что модуль силы имеет на нем постоянное значение $|\vec{F_k}| = f(\xi_k)$. Тогда работа на нем $\Delta A_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k$ и, следовательно,

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Чем меньше длина частичного отрезка Δx_k, тем точнее эта приближенная формула:

$$A = \lim_{d_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Задачи совершенно разные по содержанию, а полученные суммы похожи.

§2. Определенный интеграл. Его геометрический и механический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$, $a < b$. Проделаем над функцией $f(x)$ и отрезком $[a,b]$ следующие действия (в дальнейшем будем их называть операцией **Р.В.С.**):

Р. Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$ и обозначим это разбиение через

$$\tau_n = \{x_0, x_1, ..., x_n | a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

Через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ обозначим длины частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$.

В. Выберем произвольным образом внутри элементарных интервалов разбиения точки $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ и вычислим значение функции $f(\xi_k)$ в этих точках.

С. Составим сумму вида

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Она называется ***интегральной суммой Римана для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, соответствующей данному разбиению τ_n отрезка $[a,b]$ и выбору точек ξ_k***. Число $d_n = max\{\Delta x_k\}$ называют ***диаметром разбиения***.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{d_n \to +0} \sigma_n$ интегральных сумм σ_n, когда диаметр d_n разбиения стремится к нулю, и этот предел *не зависит* от:

а) *способа разбиения отрезка на элементарные;*

б) *выбора точек* ξ_i *на частичных промежутках,*

то этот предел называется ***определенным интегралом (ОИ) от функции $f(x)$ по промежутку*** $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, при этом ***функция*** $f(x)$ ***называется интегрируемой (по Риману) по промежутку (на промежутке)*** $[a,b]$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d_n \to +0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

здесь $f(x)$ – *подынтегральная функция,*

$f(x)dx$ – *подынтегральное выражение,*

x – *переменная интегрирования,*

a – *нижний,* b – *верхний пределы интегрирования.*

В отличие от неопределенного интеграла, который был функцией, определенный интеграл – это число. Интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначается аргумент данной функции. Поэтому и ее предел не зависит от наименования переменной интегрирования.

Из рассмотренных выше задач следует

Геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Механический смысл ОИ:

1. работа переменной силы на отрезке равна определенному интегралу по этому отрезку от данной функции.

2. если $f(x) = \rho(x)$ – плотность (линейная) в точке x материального стержня $[a;b]$, то интеграл от плотности по промежутку $[a;b]$ выражает массу $m_{[a;b]}$ этого материального стержня $[a;b]$:

$$\int_a^b \rho(x)dx = m_{[a;b]}.$$

Из определения ОИ вытекает ***необходимое условие интегрируемости***: если функция интегрируема по промежутку, то она ограничена на этом промежутке.

Имеет место **достаточное условие интегрируемости**: если функция непрерывна на промежутке (отрезке), то она интегрируема по этому промежутку.

Если функция ограничена на промежутке и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.

§3. Свойства определенного интеграла.

В дальнейшем будем считать рассматриваемые функции интегрируемыми на соответствующих промежутках. Тогда имеют места следующие ***свойства определенного интеграла***:

1. Интеграл от единичной функции выражает *длину* отрезка $[a;b]$: $\int_a^b dx = b-a.$ Кроме этого, по определению:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \ \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2. *Линейность*: $\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\cdot\int_a^b f(x)dx, C-\mathrm{const}$ (постоянную можно выносить за знак интеграла);

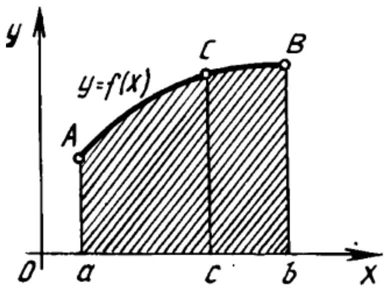
$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

(интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций).

3. *Аддитивность*: интеграл по промежутку $[a;b]=[a;c]\cup[c;b]$ равен сумме интегралов по составляющим промежуткам:

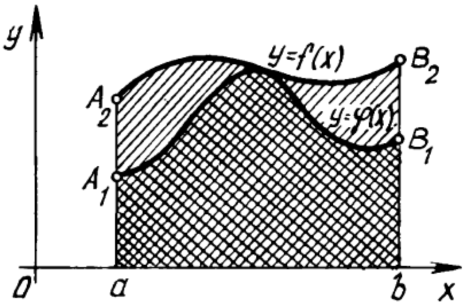
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Геометрический смысл этого свойства состоит в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a,b]$ равен сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a,c]$ и $[c,b]$.



4. *Монотонность*: если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in [a;b]$ и $a < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

На рисунке дана геометрическая интерпретация свойства монотонности: так как $f(x) \geq g(x)$, то площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b

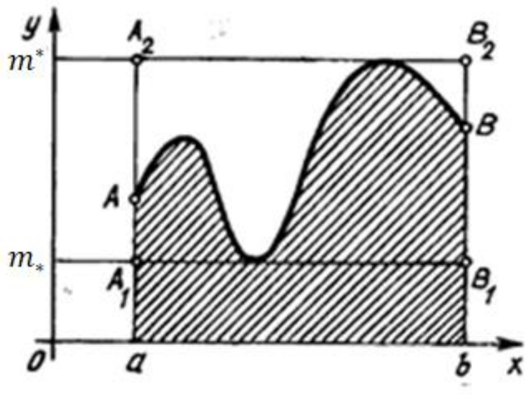


Как следствие из свойства монотонности для непрерывной на $[a;b]$ функции f можно получить *теорему об оценке определенного интеграла*:

$$m_*(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq m^*(b-a),$$

где $m_* = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$, $m^* = \max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$.

На рисунке дана геометрическая интерпретация этой теоремы в случае неотрицательной подынтегральной функции: площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m_*(b-a)$, а площадь прямоугольника aA_2B_2b – $m^*(b-a)$. Из неравенства теоремы следует, что Площадь криволинейной трапеции $aABb$ не меньше площади первого прямоугольника и не больше площади второго.



5. *Теорема о среднем*. Если функция f непрерывна на $[a;b]$, то найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

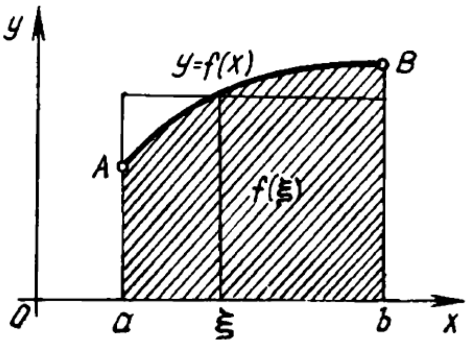
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Число

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

называется ***интегральным средним значением*** функции f на промежутке $[a;b]$.

Геометрический смысл теоремы о среднем: в случае неотрицательной на $[a;b]$ функции f найдется точка $\xi \in (a;b)$ такая, что площадь соответствующей криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$.



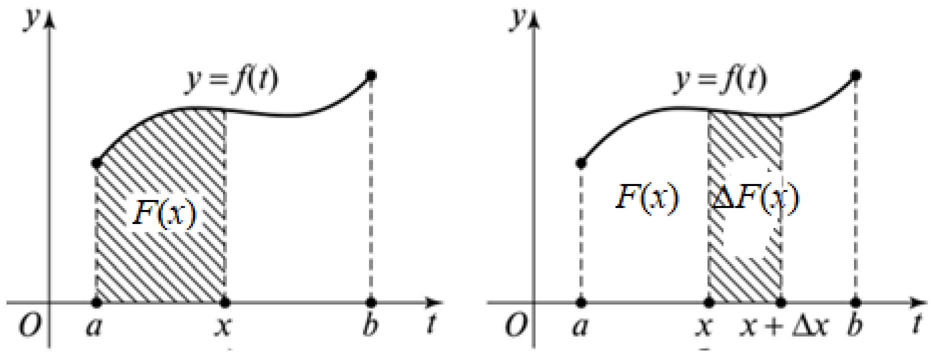
В случае, когда промежуток $[-a;a]$ интегрирования симметричен относительно начала координат и интегрируемая на нем функция f является либо четной, либо нечетной, имеют место равенства:

1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ для *нечетной* функции;

2) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{-a} f(x)dx$ для *четной* функции.

§4. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и для каждого $x \in [a;b]$ рассмотрим интеграл $\int_a^x f(t)dt = F(x)$ – называемый ***определенным интегралом с переменным верхним пределом***. С геометрической точки зрения, функция $F(x)$ представляет собой площадь заштрихованной криволинейной трапеции (для неотрицательной подынтегральной функции $f(t)$).



Пусть $f(x) \in C[a,b]$. Выберем произвольную точку $x \in [a,b]$ и придадим ей приращение Δx таким образом, чтобы приращенная точка $x+\Delta x \in [a,b]$. Тогда функция $F(x)$ получит приращение $\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) =$

$$\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt = \int\limits_a^{x} f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Применяя теорему о среднем имеем

$$\Delta F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x,$$

где $\xi \in [x, x+\Delta x]$. Но, если $\Delta x \to 0$, то $x+\Delta x \to x$ и, следовательно, $\xi \to x$. В силу непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$: $f(\xi) \to f(x)$. Отсюда

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x).$$

Таким образом доказали следующую теорему

Теорема о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Производная определенного интеграла от непрерывной функции $f(t)$ по его переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x f(t)dt\right) = F'(x) = f(x), x \in (a,b).$$

Пример. Найти производную $\displaystyle \frac{d}{dx}\int\limits_{-x^2}^{\sin^4 x} e^{-t^2}dt.$

Решение. Имеем: $\displaystyle \frac{d}{dx}\int\limits_{-x^2}^{\sin^4 x} e^{-t^2}dt = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_{-x^2}^{0} e^{-t^2}dt + \int\limits_{0}^{\sin^4 x} e^{-t^2}dt\right) =$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int\limits_{0}^{\sin^4 x} e^{-t^2}dt - \int\limits_{0}^{-x^2} e^{-t^2}dt\right) = (F(\sin^4 x) - F(-x^2))' = e^{-(\sin^4 x)^2} \cdot (\sin^4 x)' -$$

$$-e^{-(-x^2)^2}\cdot(-x^2)'=e^{-\sin^8 x}\cdot 4\sin^3 x\cdot\cos x-e^{-x^4}(-2x)=$$
$$=4e^{-\sin^8 x}\sin^3 x\cos x+2xe^{-x^4}.$$

Из теоремы непосредственно следует, что ***определённый интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции***. Таким образом устанавливается связь между определённым и неопределённым интегралом

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+C$$

Поставим обратную задачу: *зная какую-либо из первообразных подынтегральной функции вычислить определённый интеграл от нее на заданном отрезке.* Пусть $F(x)$ – произвольная первообразная для непрерывной функции $f(x)$, то есть $F'(x)=f(x), x\in[a;b]$. Тогда $\int_a^x f(t)dt$ и $F(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$. Поэтому они различаются (по свойствам первообразных), разве лишь, на постоянную: $\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$, откуда, полагая $x=a$, находим $C=-F(a)$, затем, полагая $x=b$, получаем одну из основных формул интегрального исчисления, ***формулу Ньютона-Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)$ – произвольная первообразная для $f(x)$: $F'(x)=f(x)$,
$F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ – *двойная подстановка*.

Отсюда получаем *связь* $\int_a^b f(x)dx=\left[\int f(x)dx\right]_a^b$ определенного с неопределенным интегралом и, как следствие, ***основной метод вычисления*** определенного интеграла:

1) находим соответствующий неопределенный интеграл $\int f(x)dx=F(x)+C$, то есть некоторую первообразную $F(x)$,

2) вычисляем определенный интеграл, выполняя двойную подстановку $F(b)-F(a)$.

Пример. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$.

Решение. Находим неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int x\sin x\,dx = \left[\begin{matrix} u = x, du = dx \\ \sin x dx = dv, v = -\cos x \end{matrix}\right] = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Вычисляем определенный интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\ dx = \left[-x\cos x + \sin x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - (-0\cos 0 + \sin 0) = 1.$$

Как уже отмечалось, формула Ньютона-Лейбница позволяет свести вычисление определенного интеграла к нахождению соответствующих неопределенных интегралов и, таким образом, позволяет применить все известные для неопределенного интеграла методы интегрирования, в частности, интегрирование по частям и заменой переменной. Однако зачастую оказывается более удобным применить эти методы непосредственно для определенного интеграла.

§5. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле

Для неопределённого интеграла была введена формула замены переменной. Используя формулу Ньютона-Лейбница можно пользоваться этой формулой и для вычисления определённого интеграла. Однако, вычислить определенный интеграл можно и проще (применяя эту формулу) на основании следующей теоремы.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1, t_2]$, причем $\varphi([t_1, t_2]) = [a, b]$ и $\varphi(t_1) = a,\ \varphi(t_2) = b$, то справедлива следующая формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется ***формулой замены переменной в определённом интеграле***. Для ее применения необходимо проделать следующие операции:

1) сделать замену $x = \varphi(t)$;
2) вычислить $dx = \varphi'(t)dt$;
3) найти пределы переменной t решив уравнения $\varphi(t_1) = a$ и $\varphi(t_2) = b$.

Замечание. При интегрировании заменой переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения изменяются и пределы интегрирования (правило: новая буква – новые пределы интегрирования).

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left|\begin{matrix} x = t^2 & x = 0, t = 0 \\ dx = 2tdt & x = 4, t = 2 \end{matrix}\right| = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2(t - \ln(1+t))\Big|_0^2 = 4 - 2ln3.$$

Замена переменной в определенном интеграле обладает тем преимуществом, по сравнению с неопределенным интегралом, что не требуется возвращаться к исходной переменной, однако, при этом приходится пересчитывать пределы интегрирования. Поэтому, по возможности, удобнее пользоваться поднесением под дифференциал, не вводя новых букв.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cosxdx}{sin^2x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(sinx)}{sin^2x} = -\frac{1}{sinx}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}.$$

Получим далее формулу интегрирование по частям в определенном интеграле. Предположим, что $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые на промежутке $[a;b]$ функции. Тогда, по формуле дифференциала произведения двух функций, имеем $d(uv) = udv + vdu$. Проинтегрируем обе части последнего равенства на $[a;b]$:

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu.$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b d(uv) = uv\Bigg|_a^b$$

и формула окончательно примет вид

$$\int_a^b udv = uv\Bigg|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Она называется ***формулу интегрирования по частям в определённом интеграле.***

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{cos^2x} = \begin{vmatrix} u = x & dv = \dfrac{dx}{cos^2x} \\ du = dx & v = tgx \end{vmatrix} = xtgx\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx =$$

$$\frac{\pi}{4} + ln|cosx|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

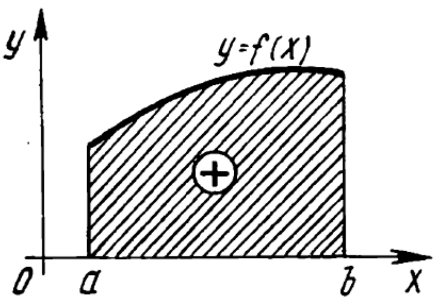
§6. Вычисление площади плоской фигуры.

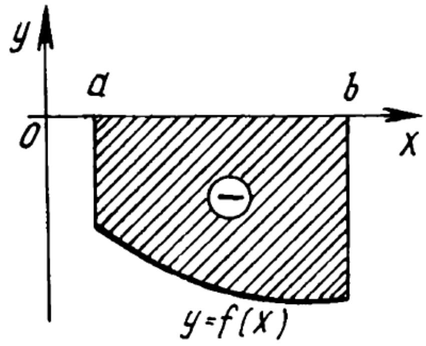
Рассмотрим некоторую ограниченную фигуру в плоскости Oxy и через S обозначим ее площадь. Тогда в зависимости от способа задания этой фигуры различают следующие формулы применения определенного интеграла при вычислении площади.

§6.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат

Из геометрического смысла определенного интеграла следует, что если $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx.$$

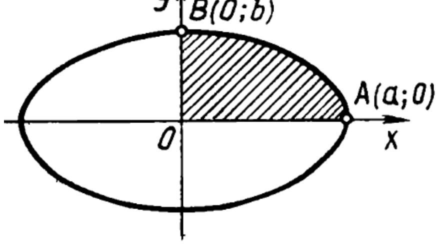




Если $f(x) < 0 \ \forall x \in [a,b]$, то интеграл будет отрицательным, следовательно в этом случае

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b ydx.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры $D = \left\{(x;y): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1, a > 0, b > 0\right\}$, ограниченной эллипсом.



Фигура D симметрична относительно координатных осей. Поэтому можно вычислить площади части фигуры (расположенной в первой четверти) – криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции

$y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0;a]$. Имеем:

$$S_D=|D|=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{ll} x=a\sin t, & dx=a\cos t\,dt \\ 0=a\sin t_1, & a=a\sin t_2 \\ t_1=0, & t_2=\frac{\pi}{2} \end{array}\right]=4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t dt=$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=2ab\left[t+\tfrac{1}{2}\sin 2t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2ab\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{2}\sin\pi-0-\tfrac{1}{2}\sin 0\right)=$$

$$=ab\pi.$$

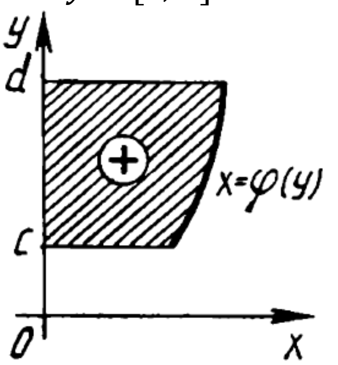
Если же криволинейная трапеция ограничена кривой $x=\varphi(y)$, осью ординат Oy и прямыми $y=c$, $y=d$, то ее площадь определяется формулами:

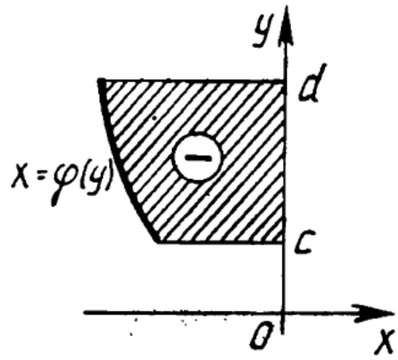
$$S=\int_c^d \varphi(y)dy=\int_c^d xdy,$$

если $\varphi(y)\geq 0\ \forall y\in[c,d]$ и

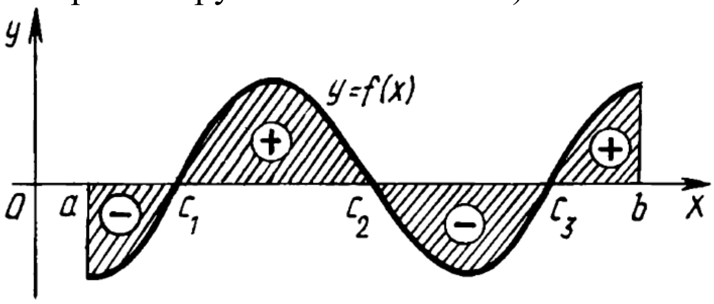
$$S=\left|\int_c^d \varphi(y)dy\right|=-\int_c^d xdy,$$

если $\varphi(y)<0\ \forall y\in[c,d]$.





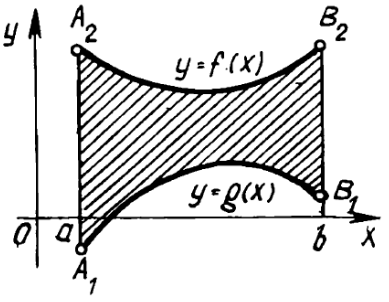
Если подынтегральная функция $y=f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a,b]$, то площадь равна сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций, лежащих над осью Ox (интегралы берутся со знаком «+») и под этой осью (интегралы берутся со знаком «–»).

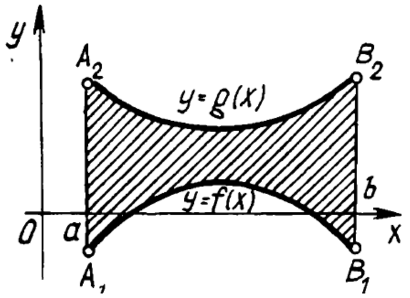


Для того, чтобы получить общую площадь заштрихованной фигуры, отрезок интегрирования $[a,b]$ надо разбить на частичные отрезки, на которых функция $y=f(x)$ сохраняет знак, и применить соответствующие формулы. Для приведенного рисунка формула имеет вид

$$S=-\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx-\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx+\int_{c_3}^{b} f(x)dx.$$

Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$, то эту площадь рассматривают как разность площадей двух криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b.





В этом случае можно воспользоваться одной из формул

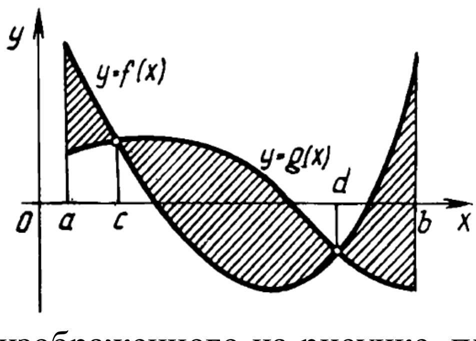
$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx,$$

если $f(x)\geq g(x)\ \ \forall x\in[a,b]$, или

$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx,$$

если $g(x)\geq f(x)\ \ \forall x\in[a,b]$. То есть от «большей» (та, график которой выше) функции под интегралом вычитаем «меньшую».

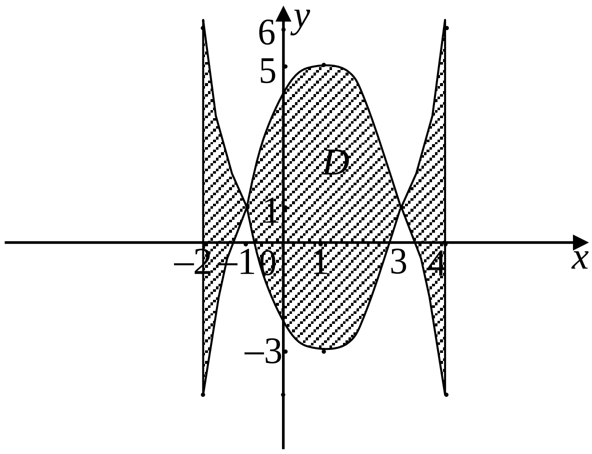
В случае, когда разность $f(x)-g(x)$ не сохраняет знак на отрезке $[a,b]$, этот отрезок разбивают на частичные отрезки, на каждом из которых разность функций сохраняет свой знак.



Например, для случая, изображенного на рисунке, площадь заштрихованной фигуры находится по формуле

$$S=\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^d (g(x)-f(x))dx+\int_d^b (f(x)-g(x))dx.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x-2,\ \ y=-x^2+2x+4,\ \ x=-2,\ \ x=4$.



Решение. Найдем точки пересечения парабол и прямых.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2, \\ y = -x^2 + 2x + 4; \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2x + 4, \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ y_1 = 1,\ y_2 = 1.\ \begin{cases} y = x^2 - 2x - 2, \\ x = -2; \end{cases} y = 6;\ \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 4, \\ x = -2; \end{cases} y = -4;$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2, \\ x = 4; \end{cases} y = 6;\ \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 4, \\ x = 4; \end{cases} y = -4.$$

Из рисунка видно, что криволинейная трапеция симметрична относительно прямой $x = 1$, поэтому найдем площадь при изменении x от 1 до 4 и увеличим ее в 2 раза.

$$S_D = |D| = 2\int_1^4 \left| x^2 - 2x - 2 - \left(-x^2 + 2x + 4\right) \right| dx =$$

$$= 2\int_1^3 \left(-x^2 + 2x + 4 - \left(x^2 - 2x - 2\right)\right) dx + 2\int_3^4 \left(x^2 - 2x - 2 - \left(-x^2 + 2x + 4\right)\right) dx =$$

$$= 2\int_1^3 \left(-2x^2 + 4x + 6\right) dx + 2\int_3^4 \left(2x^2 - 4x - 6\right) dx =$$

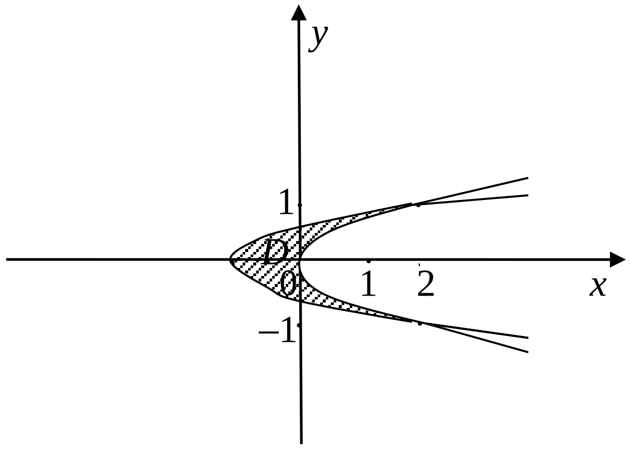
$$= 2\left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right]\Bigg|_1^3 + 2\left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right]\Bigg|_3^4 =$$

$$= 2\left(-\frac{2}{3}\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 6\cdot 3 + \frac{2}{3} - 2 - 6\right) +$$

$$+2\left(\frac{2}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4^2 - 6\cdot 4 - \frac{2}{3}\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 6\cdot 3\right) = \frac{92}{3}.$$

Аналогичным образом эта формула работает и в случае криволинейной трапеции ориентированной относительно оси Oy, то есть ограниченной графиками функций $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$.

Пример. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной линиями $x = 2y^2$, $x = 3y^2 - 1$.



Решение. Найдем точки пересечения парабол

$$\begin{cases} x = 2y^2, \\ x = 3y^2 - 1; \end{cases} \Rightarrow 2y^2 = 3y^2 - 1, \Leftrightarrow y^2 = 1,\ y_1 = -1,\ y_2 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 2.$$

Так как D симметрична относительно оси Ox, то площадь найдем при изменении y от 0 до 1 и результат умножим на 2.

$$S_D = |D| = 2\int_0^1 \left|3y^2 - 1 - 2y^2\right| dy = 2\int_0^1 \left(2y^2 - 3y^2 + 1\right) dy = 2\int_0^1 \left(1 - y^2\right) dy =$$

$$= 2\left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Если криволинейная трапеция ограничена линией L, заданной в параметрической форме

$$L\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t_1 \le t \le t_2,$$

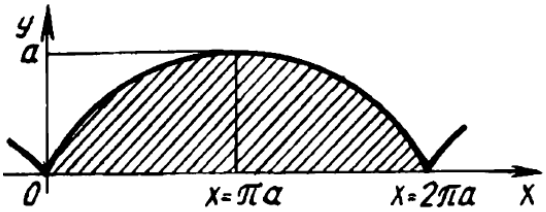
осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, причем $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$, то ее площадь S при $y(t) \ge 0$ вычисляется по формуле (так как $dx = x'(t)dt$)

$$S = \int_a^b y(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Пример. Найти площадь фигуры D, ограниченной одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

и осью абсцисс.



Решение. Одна арка циклоиды образуется, когда параметр t изменяется, например, от 0 до 2π. Тогда

$$S_D = |D| = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\left(a(t-\sin t)\right)' dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

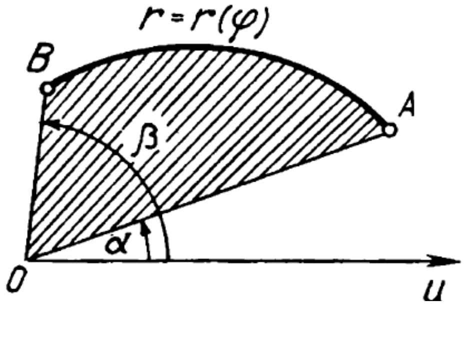
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi - \frac{3}{2}\cdot 0 + 2\sin 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right) = 3a^2\pi.$$

§6.2. Вычисление площадей плоских фигур в полярной системе координат

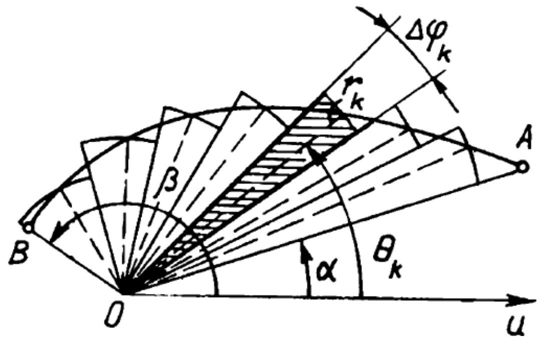
Полярную систему координат (O, r, φ) определяет точка O, называемая полюсом, и луч, исходящий из этой точки. Полярными координатами точки M называют упорядоченную пару чисел $M(r, \varphi)$, выражающую расстояние r до точки (полярный радиус) и угол φ, на который нужно довернуть полярную ось до совпадения с лучом OM. Из смысла определения следует, что $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ либо $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Если начало декартовой системы координат совместить с полюсом полярной системы координат, а ось абсцисс с полярной осью, то связь между декартовой и полярной системами координат описывается следующим образом $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линией l, заданной в полярной системе координат (O, r, φ) уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Фигура, ограниченная линией $r = r(\varphi)$ и радиус векторами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ называется ***криволинейным сектором***.



Для вычисления площади криволинейного сектора OAB применим алгоритм составления интегральных сумм с последующим переходом к определенному интегралу:

1. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частичных отрезков точками $\alpha = \varphi_0 < \cdots < \varphi_n = \beta$. Обозначим $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$. Проведем лучи $\varphi = \varphi_k$, $k = \overline{1, n}$. Тогда криволинейный сектор OAB разобьется на n частичных криволинейных секторов.



2. На каждом частичном отрезке $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$, $k = \overline{1, n}$ выберем произвольным образом точку θ_k и найдем значение функции $r(\varphi)$ в этих точках: $r_k = r(\theta_k)$.

3. Предположим, что на каждом из частичных отрезков $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ функция $r = r(\varphi)$ постоянна и совпадает со значением $r_k = r(\theta_k)$. Тогда каждый частичный криволинейный сектор можно заменить круговым сектором с радиусом $r_k = r(\theta_k)$ и центральным углом $\Delta\varphi_k$. Площадь такого кругового сектора равна

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k.$$

За площадь S криволинейного сектора OAB приближенно примем площадь фигуры, состоящей из n частичных круговых секторов

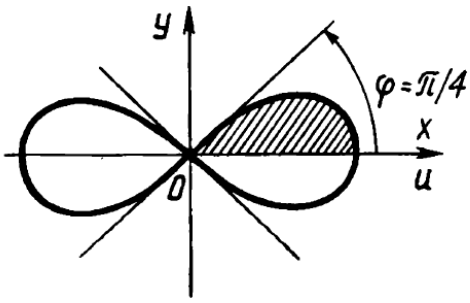
$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k.$$

Имеем интегральную сумму для функции $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. За точное значение площади S криволинейного сектора примем предел этой интегральной суммы при диаметре разбиения стремящемся к нулю. Окончательно

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\,\varphi.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Решение. Так как переменные x и y входят в уравнение в четных степенях, то кривая, ограничивающая фигуру, симметрична относительно осей координат. Следовательно, для решения задачи достаточно вычислить площадь четвертой части фигуры, расположенной в первом квадранте, и полученный результат умножить на четыре.



Для простоты расчетов, запишем уравнение лемнискаты Бернулли в полярной системе координат. Для этого сделаем замену $x = rcos\varphi,\ y = rsin\varphi.$ Тогда $(x^2+y^2)^2 = r^4$, $x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2\cos 2\varphi$ и исходное уравнение кривой примет вид

$$r^4 = a^2r^2\cos 2\varphi \Longrightarrow r^2 = a^2\cos 2\varphi \Longrightarrow r = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Первому квадранту декартовой системы координат соответствует изменение полярного угла φ от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Используя формулу площади криволинейного сектора в полярных координатах

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = 2a^2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\, d(2\varphi) = a^2\sin 2\varphi\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

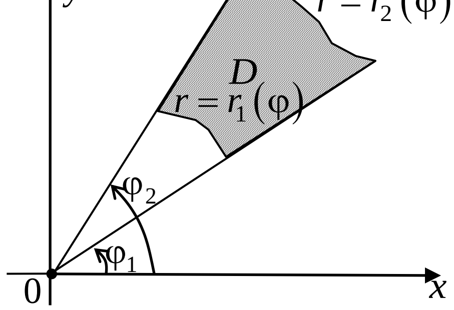
$$= a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = a^2.$$

Из примера видим, что ***переходить от прямоугольных координат к полярным при вычислении площадей имеет смысл если фигура является кругом (его частью) либо уравнения линий, ограничивающих искомую площадь, содержат слагаемые вида*** $(x^2+y^2)^k, k \in \mathbb{Z}$.

По аналогии с формулами вычисления площади плоской фигуры, заданной в прямоугольной системе координат, имеем формулу вычисления площади

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)\right)d\varphi$$

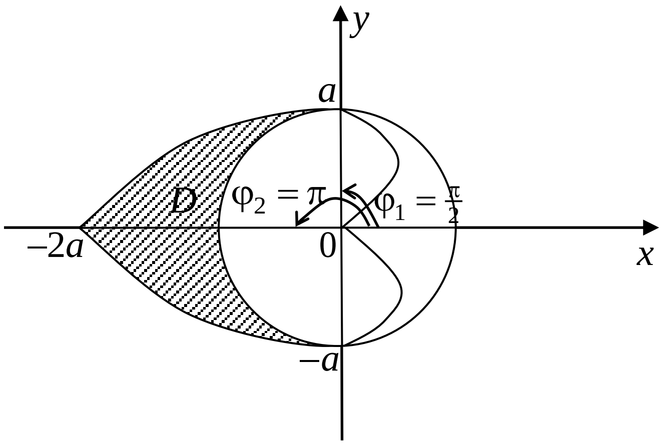
если D – фигура, ограниченная лучами $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ и кривыми $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ $(r_2(\varphi) \geq r_1(\varphi), \forall\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2])$.



Пример. Вычислить площадь фигуры D ограниченной линиями

$$r = a(1-\cos\varphi),\ r = a\ (r \geq a,\ a > 0)$$

в полярной системе координат.



Решение. Фигура D ограничена кардиоидой $r = a(1-\cos\varphi)$, окружностью $r = a$ и симметрична относительно луча $\varphi = \pi$, поэтому найдем площадь при изменении φ от $\frac{\pi}{2}$ до π и результат увеличим в 2 раза.

$$S_D = |D| = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(a^2(1-\cos\varphi)^2 - a^2\right)d\varphi = a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = a^2\left[-2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= a^2\left(-2\sin\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\pi + 2\sin\tfrac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi\right) =$$

$$= a^2\left(0 + \frac{\pi}{2} + 0 + 2 - \frac{\pi}{4} - 0\right) = a^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\right).$$

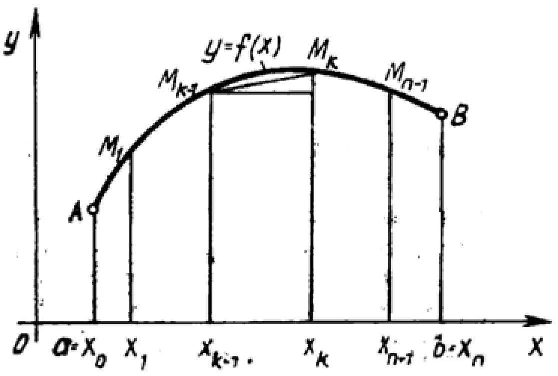
§7. Вычисление длины дуги плоской кривой.

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, а кривая l – график этой функции. Требуется найти длину дуги плоской кривой l, заключенной между прямыми $x = a$ и $x = b$.

Определимся вначале, что будем понимать под длиной дуги AB плоской кривой l. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 \underline{<} \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$. Через точки x_k проведем вертикальные прямые, параллельные оси ординат до пересечения с кривой l. Тогда дуга AB разобьется на n частей точками M_i, $i = \overline{1,n}$. Соединив каждые две соседние точки разбиения кривой l отрезками, получим ломаную $AM_1M_2 \ldots M_{n-2}M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB.



Обозначим длину ломаной через l_n

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k,$$

где Δl_k длина хорды $|M_{k-1}M_k|$,стягивающей дугу $M_{k-1}M_k$. Длина ломанной является приближенным значением длины дуги AB: $l \approx l_n$. Через λ обозначим $\lambda = \max\limits_{[a,b]}|\Delta x_k|$. Под ***длиной l дуги кривой*** понимают предел вписанных в эту дугу длин ломаных, когда наибольшая из длин звеньев ломаных стремится к нулю

$$l = \lim_{\lambda \to 0} l_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k.$$

Если этот предел существует и конечен, то дугу называют ***спрямляемой.***

Покажем, что если функция $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ (непрерывно дифференцируема на отрезке), то кривая является спрямляемой. Вычислим длину хорды $\Delta l_k = |M_{k-1}M_k|$. По теореме Пифагора

$$\Delta l_k = |M_{k-1}M_k| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k.$$

По теореме Лагранжа (о конечных приращениях)

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Следовательно,

$$\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$$

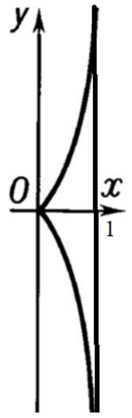
или

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k\,.$$

В правой части стоит интегральная сумма для функции $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ на отрезке $[a,b]$. Доказали следующий факт: если функция имеет на отрезке $[a,b]$ *непрерывную* производную, то дуга AB – спрямляемая и ее длина вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой $l{:}y^2=x^3$ отсекаемую прямой $x=1$.



Решение. Дуга лежит в первой и четвертой четвертях и симметрична относительно оси Ox. Поэтому можно вычислить длину дуги в первой четверти и результат удвоить. Имеем:

$$l=2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=2\cdot\frac{4}{9}\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(\frac{9}{4}x+1\right)=$$

$$=2\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\,\Bigg|_0^1=\frac{16}{27}\left(\frac{13}{8}\cdot\sqrt{13}-1\right).$$

Рассматриваемая далее случай, когда ***кривая l задана параметрически***: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причем $x'(t)\neq 0\ \forall t\in[t_1,t_2]$. По формуле дифференцирования функции, заданной параметрически $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$. Тогда, с учетом того что $dx=x'(t)dt$, из формулы длины дуги имеем

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\,x'(t)dt$$

или окончательно

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt.$$

Пример. Вычислить длину циклоиды $L:\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t,\end{cases}\ t\in[0;2\pi].$

Решение. $|L|=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left((t-\sin t)'_t\right)^2+\left((1-\cos t)'_t\right)^2}\,dt=$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=$$

$$=-4\left[\cos\frac{t}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=-4(\cos\pi-\cos 0)=8.$$

Из формулы вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически можно получить формулу для ***вычисления длины дуги, заданной в полярных***

координатах, если в качестве параметра t принять полярный угол φ. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Связь между декартовыми и полярными координатами имеет вид

$$\begin{cases} x = r(\varphi)cos\varphi, \\ y = r(\varphi)sin\varphi. \end{cases}$$

Дифференцируя полученные выражения по переменной φ, возводя в квадрат и суммируя, получаем

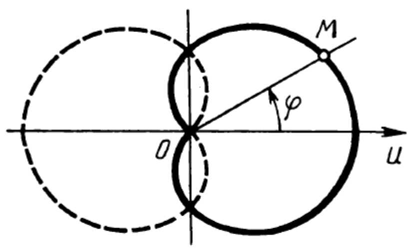
$$\left.\begin{aligned} x'_\varphi &= r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi &= r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 = r'^2 + r^2.$$

Следовательно,

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(r)^2 + (r')^2} d\varphi.$$

Пример. Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 + cos\varphi)$.

КАРДИОИДА



$r = a(1 \pm \cos\varphi)$

Решение. Изменяя угол в пределах $[0, \pi]$ найдем половину длины искомой кривой. Так как $r' = -asin\varphi$, $r^2 + r'^2 = 2a^2(1 + cos\varphi) = 4a^2cos^2\frac{\varphi}{2}$ по формуле длины кривой

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = 4a \int_0^\pi cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a.$$

Вернемся к формуле для длины дуги в декартовых координатах

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

где $y = f(x)$, $x\epsilon[a, b]$. Зафиксируем нижний предел, а верхний оставим переменным. Тогда длина дуги будет функцией верхнего предела

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2} dt.$$

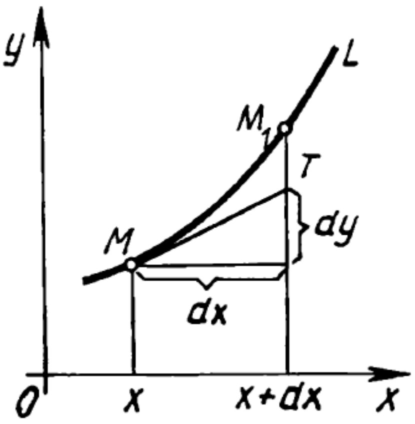
Функция $l(x)$ дифференцируемая, а ее производная (производная интеграла с переменным верхним пределом) равна

$$l'(x) = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

и, так как $dl = l'(x)dx$ получим ***дифференциал длины дуги кривой***

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx.$$

Но так как $y' = \frac{dy}{dx} \Longrightarrow dl^2 = dx^2 + dy^2$, называемую ***Теоремой Пифагора для дифференциалов***.

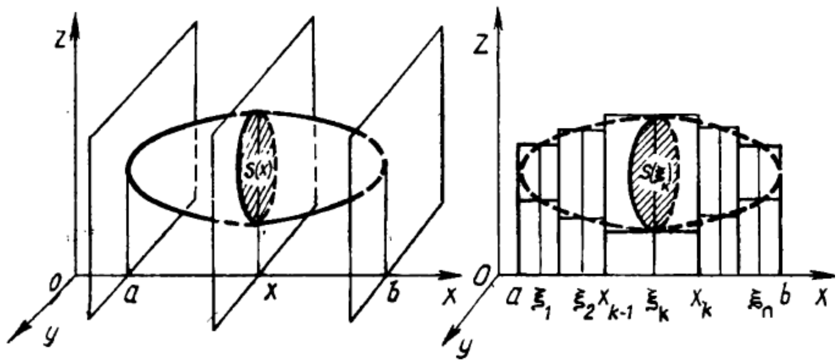


Из этой формулы следует, что с геометрической точки зрения дифференциал дуги в точке M с абсциссой x равен длине соответствующего отрезка касательной к линии L в точке $M(x, y)$. Это отрезок MT. Таким образом, за приближенное значение дуги MM_1 при достаточно малом Δx принимается дифференциал этой дуги, то есть отрезок касательной.

§8. Вычисление объемов пространственных тел

§8.1. Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям.

Пусть дано тело T, ограниченное замкнутой поверхностью. Предположим, что известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной, например, оси Ox. Это сечение называют ***поперечным сечением***. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox.



Площадь S изменяется с изменением абсциссы x, и, следовательно, $S=S(x)$ – функция переменной x. Будем считать, что функция $S=S(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, где a и b – абсциссы крайних точек сечений тела T. Для вычисления объема V тела T применим алгоритм составления интегральной суммы (алгоритм **Р.В.С**., где **Р,** – разбиение, **В,** – выбор, **С.** – суммирование) и предельного перехода к определенному интегралу.

Р. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda = \max\limits_{[a,b]}|\Delta x_k|$, $k = \overline{1,n}$. Через точки разбиения x_k, $k = \overline{1,n}$, проведем плоскости, перпендикулярные к оси Ox. Семейство плоскостей $x = x_k$ разобьет данное тело T на слои, толщина каждого из которых равна $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$.

В. На каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольным образом точку ξ_k и найдем значение $S(\xi_k)$ функции $S(x)$ в этих точках.

С. Предположим, что на каждом из частичных отрезков $x_{k-1}, x_k]$ функция $S(x)$ постоянна и равна $S(\xi_k)$. Тогда каждый слой тела T представляет собой прямой цилиндр с основанием $S(\xi_k)$ и образующими, параллельными оси Ox. Объем такого частичного прямого цилиндра вычисляется по формуле

$$\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k,$$

где Δx_k – высота частичного цилиндра.

Объем V всего тела T приближенно равен объему фигуры, состоящей из n ступенчатых частичных цилиндров:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k.$$

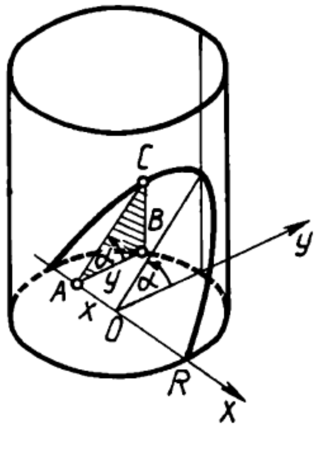
Приближенное равенство тем точнее, чем меньше диаметр разбиения отрезка $\lambda = \max\limits_{[a,b]}|\Delta x_k|$. За точное значение искомого объема примем

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k.$$

Сумма, стоящая под знаком предела является интегральной суммой для непрерывной функции $S(x)$ на отрезке $[a,b]$, следовательно

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Пример. Найти объем клина, отсеченного от кругового цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр его основания и наклоненной к основанию под углом α. Радиус основания равен R.



Решение. За ось Ox примем диаметр основания, по которому секущая плоскость пересекает основание. Ось Oy проведем через центр основания перпендикулярно оси Ox таким образом, что обе оси находятся в плоскости основания. Тогда для всех точек основания клина $x^2+y^2=R^2$. Площадь сечения ABC, отстоящего на x от точки O равна

$$S(x) = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB||BC| = \frac{1}{2}y \cdot ytg\alpha =$$

$$= \frac{y^2}{2} tg\alpha = \frac{R^2 - x^2}{2} tg\alpha$$

Следовательно, искомый объем клина

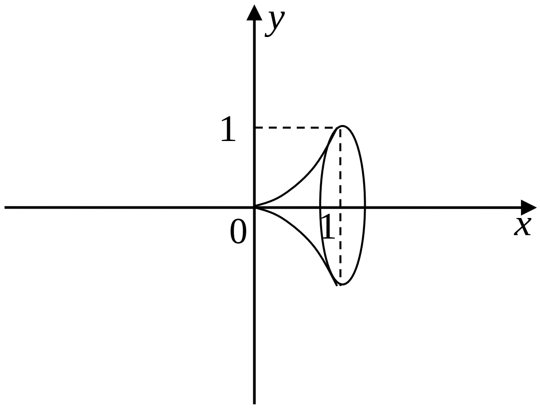
$$V = \int_{-R}^{R} \frac{y^2}{2} tg\alpha dx = 2\int_{0}^{R} \frac{1}{2}(R^2 - x^2) tg\alpha dx = tg\alpha \int_{0}^{R} (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} tg\alpha R^3.$$

§8.2. Вычисление объемов тел вращения.

Предположим, что тело T получено вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x) \geq 0,\ y = 0,\ x = a,\ x = b,$ вокруг оси Ox. Тогда площадь поперечного сечения равна $S(x) = \pi y^2(x)$ – площадь круга и *объем* V этого тела выражается формулой $V_x = \pi\int\limits_a^b y^2(x)dx = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Аналогично $V_y = \pi\int\limits_c^d x^2(y)dy$ – *объем* тела вращения вокруг оси Oy фигуры ограниченной линиями $x = x(y) \geq 0,\ x = 0,\ y = c,\ y = d$.

Пример. Найти объем тела, образованного вращением дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсекаемой прямой $x = 1$.



Решение. Имеем: $V_x = \pi\int\limits_a^b y^2(x)dx = \pi\int\limits_0^1 x^3 dx = \pi \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

§9. Понятие несобственного интеграла первого рода (по неограниченному промежутку) и его вычисление

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы, предполагалось, что выполнены следующие два условия:

- пределы интегрирования a и b конечны;
- подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода (с конечным скачком).

В этом случае интеграл называется ***собственным***. Если хоть одно из этих двух условий не выполнено, то определение интеграла через предел интегральной суммы теряет смысл. В случае бесконечного отрезка интегрирования его нельзя разбить на n частичных отрезков конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на бесконечном промежутке $[a, +\infty]$. Тогда она непрерывна на любом конечном отрезке $[a,b]$, $a<b$. Для непрерывной функции $y=f(x)$ на $[a,b]$ существует определенный интеграл $I(b)$ зависящий от верхнего предела интегрирования

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

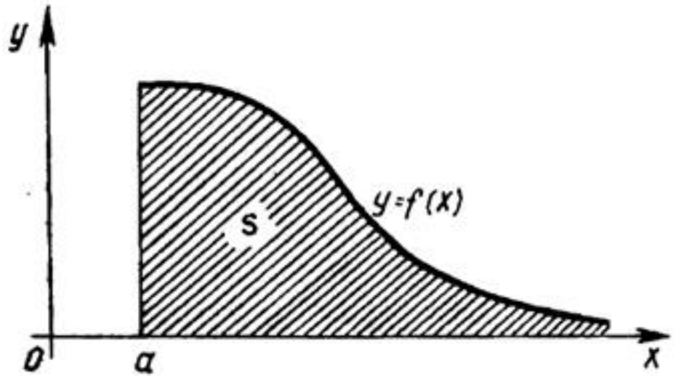
Этот интеграл определяет некоторую величину, например, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс. Будем неограниченно увеличивать b. Возможны следующие варианты:

$I(b)$ при $b \to \infty$ имеет конечный предел;

$I(b)$ при $b \to \infty$ не имеет конечного предела.

Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования (несобственным интегралом первого рода) от непрерывной функции $y=f(x)$ на промежутке $[a, +\infty]$ называется предел $I(b)$ при $b \to \infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$



С геометрической точки зрения, существование этого несобственного интеграла означает, что фигура, ограниченная непрерывной кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $y = 0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Ox, имеет конечную площадь.

Аналогично определяется ***несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования***

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

и его геометрический смысл.

Если пределы в правых частях последних формул существуют и конечны, то соответствующие ***несобственные интегралы называются сходящимися.*** В противном случае – ***расходящимися***.

Рассмотрим, далее, несобственный интеграл от непрерывной функции с обоими бесконечными пределами и воспользуемся свойством аддитивности определённого интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами называется сходящимся, если оба предела в правой части существуют и конечны. В противном случае – расходящимся.

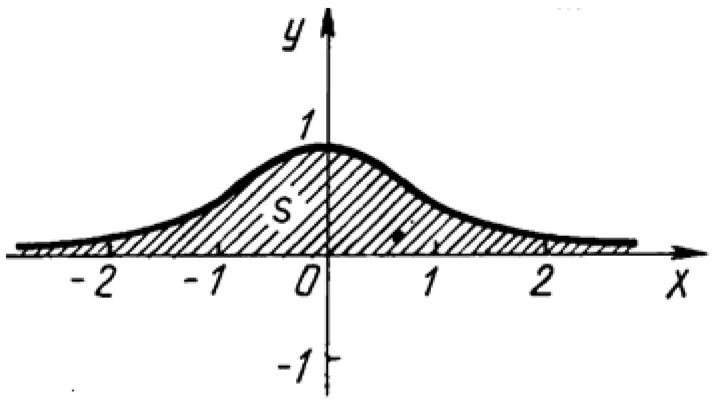
Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty}(arctg0 - arctga) +$$

$$\lim_{b\to+\infty}(arctgb - arctg0) = -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

То есть данный интеграл сходится и определяет площадь S бесконечной криволинейной трапеции, изображенной на рисунке.



Несобственный интеграл первого рода обладает рядом свойств присущих определенным интегралам. В частности, основная формула интегрирования Ньютона-Лейбница в случае сходящегося несобственного интеграла имеет вид

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(\infty) - F(a), \text{где } F(\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b).$$

Из этой формулы следует, что несобственный интеграл сходится, когда существует конечный предел $F(b)$ при $b \to +\infty$.

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}, x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Очевидно, что сходимость этого интеграла зависит от значения, которое принимает постоянная α:
$\alpha \neq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, \alpha > 1 \\ \infty, \quad\quad \alpha < 1 \end{cases}$$

$\alpha = 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Bigg|_1^{+\infty} = \infty.$$

Окончательно,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \text{сходится, при } \alpha > 1, \\ \text{расходится, при } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

В дальнейшем этот пример будем использовать для определения сходимости других несобственных интегралов.

Достаточно часто, в технических и физических задачах, представляет интерес не точное значение несобственного интеграла, а сам факт сходимости (либо расходимости) этого интеграла. Приведем без доказательства три теоремы, с помощью которых можно исследовать вопрос о сходимости некоторых несобственных интегралов первого рода.

Теорема (признак сравнения). Если на промежутке $[a, +\infty]$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a, b]$, причем $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ для всех $x \geq a$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

а из расходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

следует расходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

В качестве функции для сравнения часто выбирается функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}.$$

Решение. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

для любого $x \geq 1$ и несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

сходится, то, следовательно, сходится и интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}.$$

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x\sqrt{x}}.$$

Решение. Так как

$$\frac{x+3}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x\sqrt{x}} > \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

для всех $x \geq 1$, а интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

расходится, то расходится и исходный.

Теорема (предельный признак сравнения). Если на промежутке $[a, +\infty]$ определены две положительные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a, b]$, и существует конечный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0,$$

то несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ и } \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_{1}^{+\infty}\left(1-cos\frac{4}{x}\right)dx.$$

Решение. Сравним подынтегральную и функцию $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-cos\frac{4}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2sin^2\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\left|sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{x}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=8>0.$$

Так как

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$$

сходится, то сходится и исходный интеграл.

Особенностью этих двух теорем является то, что они верны только для положительных функций. Если функция не обладает знакопостоянством, то прибегаем к следующей теореме.

Теорема. Если несобственный интеграл

$$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|dx$$

сходится, то сходится также и несобственный интеграл

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx.$$

Несобственный интеграл

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$$

называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится интеграл

$$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|dx.$$

Если интеграл

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$$

сходится, а интеграл

$$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|dx$$

расходится, то интеграл называется ***условно сходящимся.***

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{sin^3 x}{x^2} dx.$$

Решение. Так как

$$\left|\frac{sin^3 x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

для всех $x \ge 1$ и интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится, то исходный интеграл абсолютно сходится.

Рассмотрим далее следующий пример, показывающий специфику исследования на сходимость несобственного интеграла с двумя бесконечными пределами.

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinxdx.$$

Решение.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sinxdx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} sinxdx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} sinxdx =$$

$$\lim_{a\to-\infty} (-cosc + cosa) + \lim_{b\to+\infty} (-cosb + cosc)$$

Предел не существует, так как функция косинус на бесконечности предела не имеет. Рассмотрим этот пример, когда *a*=*b*, то есть стремление к положительной и отрицательной бесконечностям осуществляется с одинаковой скоростью. В этом случае предел равен нулю и интеграл сходится. Это произошло, так как рассматривался предел

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

Пришли к другому типу сходимости. Если существует конечный предел

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx,$$

то говорят, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

сходится ***в смысле главного значения*** и обозначают

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

Очевидно, что всякий сходящийся несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

сходится и в смысле главного значения. Обратное в общем случае неверно. Если функция нечетная *f(–x)= –f(x)*, то

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

Если подынтегральная функция четная, то

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

и сходимость исходного интеграла определяется сходимостью интеграла

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx,$$

то есть конечностью величины $F(+\infty)$. Несложно показать, что

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} cosxdx$$

не существует.

§10. Несобственные интегралы второго рода (несобственные интегралы от неограниченных функций)

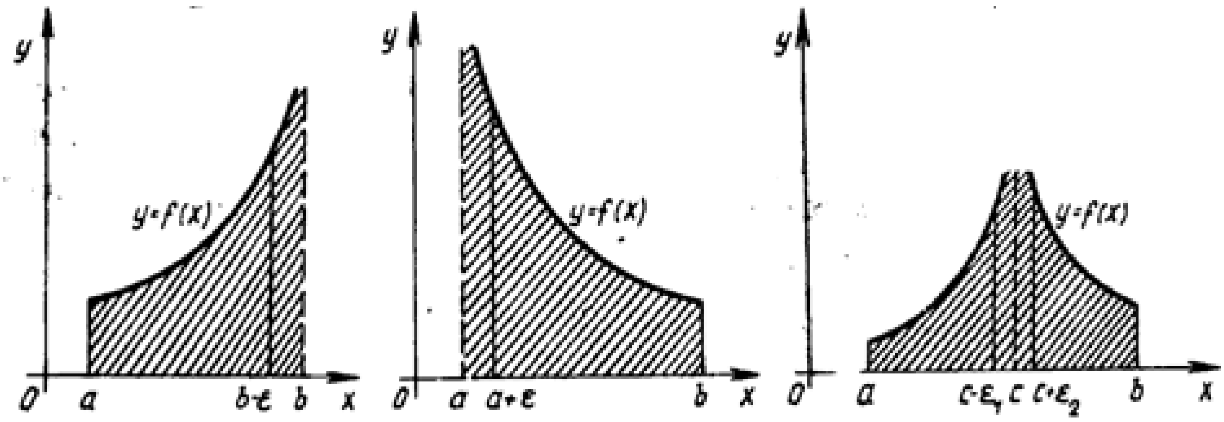
Пусть на промежутке $I=(a;b]$, $I=[a;b)$ или $I=[a;b]$ задана функция $y=f(x)$ которая имеет на этих промежутках единственную точку *c* в окрестности которой функция является неограниченной. Точка $c=a$ для первого, $c=b$ для второго и $c\in(a,b)$ для третьего промежутков. Предположим далее, что функция $y=f(x)$ интегрируема на любом замкнутом промежутке, целиком лежащем в I. Тогда можно определить ***несобственные интегралы второго рода*** (от неограниченной функции) вида:

1) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, если $I=(a,b]$;

2) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, если $I=[a,b)$;

3) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$, если $I=[a,b]$.

Если пределы существует и конечны, то в этом случае соответствующие ***интегралы называется сходящимся***. В противном случае (если предел не существует или не является конечным) ***интеграл считается расходящимся***. С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл второго рода означает, что фигура, ограниченная кривой *y=f(x)*, прямыми $x=a$ и $x=b$ и бесконечно вытянутая в положительном направлении оси *Oy* имеет конечную площадь.



Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}.$$

Решение. Имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} f(x) = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{\varepsilon}^{1}, & \alpha\neq 1 \\ \left.\ln|x|\right|_{\varepsilon}^{1}, & \alpha = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \text{сходится к } \dfrac{1}{1-n} & \text{при } \alpha<1, \\ \text{расходится} & \text{при } \alpha\geq 1. \end{cases}$$

Пример. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\right) = 2,$$

интеграл сходится к 2.

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2-1}$.

Решение. Имеем: $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2-1}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{x^2-1}=$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{-1+\varepsilon}^{0}=\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(\ln|2-\varepsilon|-\ln|\varepsilon|)=-\infty,$ интеграл расходится.

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon_1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to+0}3\sqrt[3]{x}\,\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_1\to+0}3\sqrt[3]{x}\,\Bigg|_{0+\varepsilon_1}^{1}=6$$

интеграл сходится.

Из приведенных примеров видно, что если для функции *y=f(x)* существует первообразная *F(x)*, то

$$\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx=F(x)\Bigg|_{a}^{b-\varepsilon}$$

и существование несобственного интеграла равносильно существованию конечного предела $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}F(b-\varepsilon)$. Если последний существует, то его принимают за значение *F(b)* и для несобственного интеграла имеет место формула Ньютона-Лейбница. Эта формула имеет место и для случая, когда особая точка лежит внутри промежутка интегрирования или при наличии нескольких особых точек, но при условии, что первообразная *F(x)* непрерывна всюду на промежутке интегрирования, в том числе и в особых точках. Существование такой первообразной обеспечивает существование несобственного интеграла.

Пример. Вычислить

$$\int\limits_{-2}^{2}\frac{2xdx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|\,\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 3)=0$$

НЕВЕРНО, так как в особых точках для интеграла $x=\pm1$ первообразная $\ln|x^2-1|$ не является непрерывной функцией.

Если при исследовании сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций представляют интерес не значения интеграла, а только вопрос о его сходимости, то можно пользоваться признаками сходимости (по аналогии НИ-1). Сформулируем их в виде теорем

Теорема ***(признак сравнения)***. Пусть $0\le f(x)\le g(x),\ x\in I$; тогда:

если сходится интеграл от функции $g(x)$ по промежутку I, то сходится и интеграл от функции $f(x)$ по этому промежутку;

если же расходится интеграл от функции $f(x)$ по промежутку I, то расходится и интеграл от функции $g(x)$ по этому промежутку.

Теорема (***предельный признак сравнения)***. Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ne 0,$ где $c=a$ в случае $I=(a;b],\ c=b$ для $I=[a;b)$ и $c\in(a;b)$ для $I=[a;b]$, то несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ по промежутку I сходятся (или расходятся) одновременно.

Интеграл вида

$$\int_0^b \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

часто используется при применении признаков сравнения для несобственных интегралов от неограниченных функций.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}+x^2}$.

Решение. Нетрудно убедиться, что подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв на нижнем пределе интегрирования. Преобразуем исходный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}+x^2}=\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{4}}+x^2}=\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+3+x^{2-\frac{1}{4}}\right)}=$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{12}}+3+x^{\frac{11}{4}}\right)}.$$

Используя предельный признак сходимости, сравним исходный несобственный интеграл с интегралом $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^{\frac{1}{4}}}$. Для этого найдем предел

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{12}}+3+x^{\frac{11}{4}}\right)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{12}}+3+x^{\frac{11}{4}}}=\dfrac{1}{3}\neq 0.$ Так как интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^{\frac{1}{4}}}$ – сходится, то по предельному признаку сходимости сходится и исходный интеграл.

Теорема 3. Если сходится интеграл

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx,$$

то сходится и интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если наряду со сходимостью интеграла от функции $f(x)$ по промежутку I имеет место сходимость интеграла от модуля этой функции, то такая ***сходимость называется абсолютной***, а ***функция называется абсолютно интегрируемой***. Обратное, вообще говоря неверно.

Пример. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^2\left(2x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right)dx$$

Решение. Особой точкой этого интеграла является x=0:

$$\int\limits_0^2\left(2x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right)dx=x^2\sin\frac{\pi}{x^2}\Bigg|_0^2=2\sqrt{2}$$

на нижнем пределе интегрирования получаем ноль как произведение ограниченной функции (синуса) на бесконечно малую. Интеграл же от модуля функции расходится (функция под модулем меняет знак бесконечное число раз при стремлении к нулю). То есть имеет место условная сходимость.

По аналогии с НИ-1 для НИ-2 можно ввести понятие сходимости в смысле главного значения. Предположим, что на $[a,b]$ задана функция, которая имеет лишь одну особую точку c внутри промежутка интегрирования и интегрируема в каждой части отрезка, не содержащей эту точку. Если существует и конечен предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

то его называют ***главным значением несобственного интеграла*** и обозначают

$$V.P.\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Наряду с рассмотренными несобственными интегралами от неограниченных функций и по бесконечному промежутку, встречаются и интегралы смешанного типа.