Метод деления отрезка пополам

Допустим, что мы нашли отрезок $[a; b]$, в котором расположено искомое значение корня $x = x^*$, т.е. $a < x^* < b$.

Пусть для определенности $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ (рис. 2.1). В качестве начального приближения корня x_0 принимается середина этого отрезка, т.е. $x_0 = (a+b)/2$. Далее исследуем значение функции $F(x)$ на концах отрезков $[a; x_0]$ и $[x_0; b]$. Тот из них, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень. Поэтому его принимаем в качестве нового отрезка. Вторую половину отрезка $[a; b]$ отбрасываем. В качестве первой итерации корня принимаем середину нового отрезка и т. д.

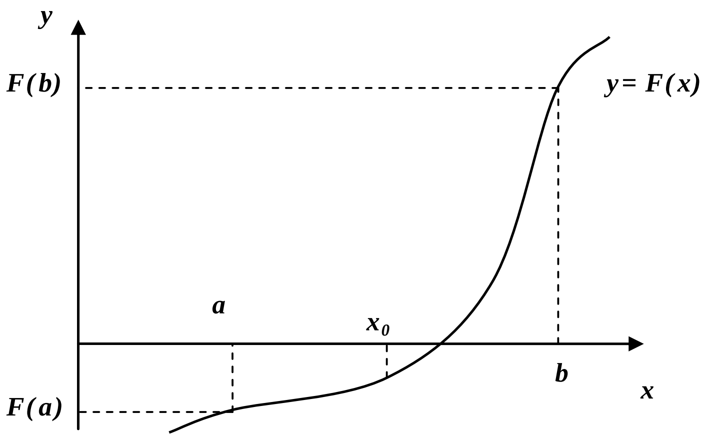


Рис. 2.1 Метод деления отрезка пополам.

Таким образом, после каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое, т.е. после n итераций он сокращается в 2^n раз. Если длина полученного отрезка становится меньше допустимой погрешности, т.е. $|b - a| < \varepsilon$, счет прекращается.

Метод Ньютона (метод касательных)

Суть метода состоит в том, что на k-й итерации в точке $(x_k;\ F(x_k))$ строится касательная к кривой $y = F(x)$ и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (рис. 2.6). Если задан интервал изоляции корня $[a;\ b]$, то за начальное приближение x_0 принимается тот конец отрезка, на котором

$$F(x_0)F''(x_0) > 0\,. \qquad (2.1)$$

Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = F(x)$ в точке M_0 с координатами x_0 и $F(x_0)$, имеет вид:

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) \tag{2.2}$$

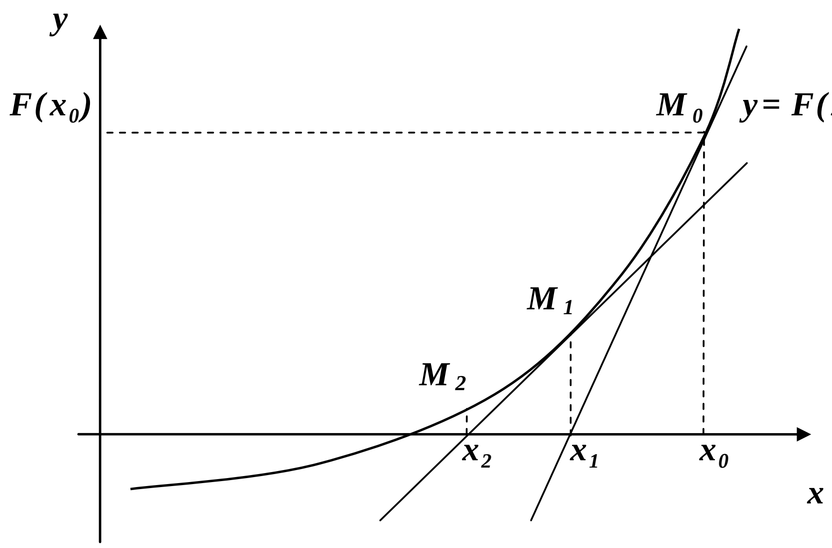


Рис. 2.6. Метод касательных.

За следующее приближение корня x_1 примем абсциссу точки пересечения касательной с осью *OX*. Из (1.2) при $x = x_1$, $y = y_1 = 0$ получим

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \tag{2.3}$$

При этом необходимо, чтобы $F'(x_0) \neq 0$.

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пересечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках M_1, M_2 и т.д. Формула для $k+1$-го приближения имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \tag{2.4}$$

Для завершения итерационного процесса можно использовать условия $|F(x_k)| < \varepsilon$ или $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Объем вычислений в методе Ньютона больше, чем в других методах, поскольку приходится находить значение не только функции $F(x)$, но и ее производной. Однако скорость сходимости здесь значительно выше.

Метод простой итерации

Для использования этого метода исходное нелинейное уравнение $F(x)=0$ необходимо привести к виду $x=\varphi(x)$.

В качестве $\varphi(x)$ можно принять функцию $\varphi(x)=x-F(x)/M$**,** где M - неизвестная постоянная величина, которая определяется из условия сходимости метода простой итерации $0<|\varphi'(x)|<1$. При этом для определения M условие сходимости записывается в следующем виде:

$$|1-F'(x_0)/M|<1 \text{ или } M=1{,}01\cdot F'(x_0)\,. \qquad (2.5)$$

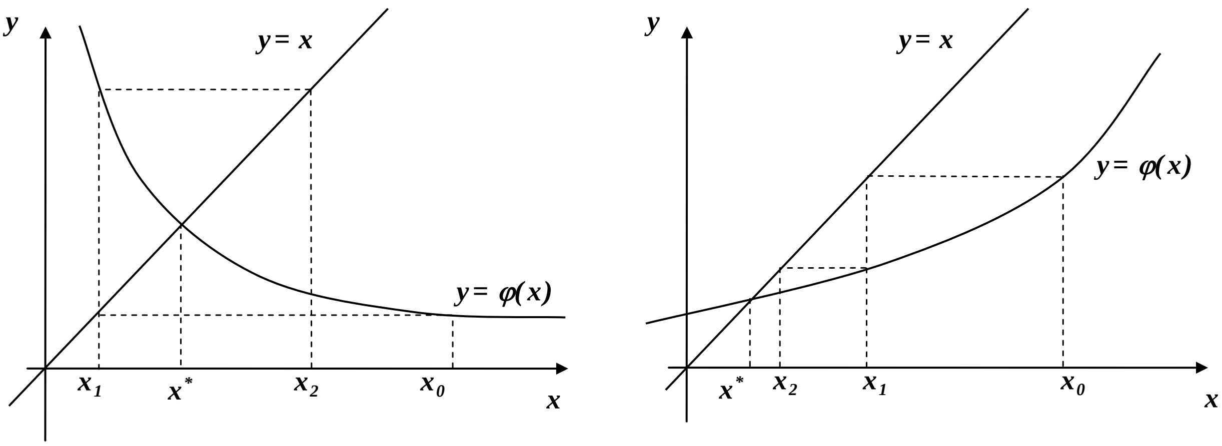
Если известно начальное приближение корня $x = x_0$, подставляя это значение в правую часть уравнения $x = \varphi(x)$, получаем новое приближение $x_1 = \varphi(x_0)$.

Далее подставляя каждый раз новое значение корня в уравнение $x = \varphi(x)$, получаем последовательность значений:

$$x_2 = \varphi(x_1),\ x_3 = \varphi(x_2),\ldots,\ x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки, т.е. $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Геометрическая интерпретация метода простой итерации. Построим графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Корнем x^* уравнения $x = \varphi(x)$ является абсцисса пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 2.9). Взяв в качестве начальной точки x_0, строим ломаную линию. Абсциссы вершин этой ломаной представляют собой последовательные приближения корня x^*. Из рисунка видно, что если $-1 < \varphi'(x) < 0$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 2.9а), то последовательные приближения $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ колеблются около корня. Если же производная $0 < \varphi'(x) < 1$ (рис. 2.9б), то последовательные приближения сходятся монотонно.



а) б)

Рис. 2.9. Геометрическая интерпретация метода простой итерации.

Численные методы решения нелинейных уравнений

Определить корни уравнения графически и уточнить один из них итерационными методами (методом деления отрезка пополам, методом Ньютона, методом простой итерации) с точностью 0,01:

1. $x^3+2x+2=0$
2. $x^3-2x+2=0$
3. $x^3+3x-1=0$
4. $x^3+x-3=0$
5. $x^3+2x+4=0$
6. $(x+1)^2=\frac{1}{x}$
7. $x=(x+1)^3$
8. $x^3+4x-4=0$
9. $x^3+6x-1=0$
10. $x^3+12x-12=0$
11. $x^3+0{,}4x-1{,}2=0$
12. $x^3+0{,}5x-1=0$
13. $x^3+2x-4=0$
14. $x^3+0{,}4x+2=0$
15. $x^3+9x-11=0$
16. $x^3+6x+3=0$
17. $x^3+5x-1=0$
18. $x^3+9x-3=0$
19. $x^3+10x-5=0$
20. $x^3+13x-13=0$
21. $x^3+7x-7=0$
22. $x^3+4x-2=0$
23. $x^3+5x-4=0$
24. $x^3+8x-6=0$
25. $x^3+2{,}5x-4=0$
26. $x^3+2{,}5x-5=0$
27. $x^3+5{,}5x-2=0$
28. $x^3+7x-3=0$
29. $x^3+8x-5=0$
30. $x^3+15x-10=0$
31. $\ln x-\frac{1}{x}=0$
32. $\cos x+2x-1{,}5=0$
33. $\ln x-\sin x=0$
34. $\ln x-\cos x=0$
35. $\cos x-x=0$
36. $\sin x+x-1=0$
37. $\ln x-\frac{x}{2}-\frac{m}{2}=0$
38. $x^3-5x^2+2x+8=0$
39. $\sin x-\sqrt{1-x^2}=0,\ \ 0\le x\le 1$
40. $x^3-2x^2-5x+6=0$