# СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

*ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ*

*Пример 1.* Задан закон распределения двумерной СВ $(\xi;\eta)$:

| $\xi \setminus \eta$ | -2 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,15 | $\lambda$ | 0 |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 3 | $\lambda$ | 0,1 | 0,25 |

Требуется:

**а)** определить значение параметра $\lambda$;

**б)** найти законы распределения компонент двумерной СВ;

**в)** выяснить, зависимы ли компоненты двумерной СВ $(\xi;\eta)$;

**г)** вычислить математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$;

**д)** вычислить дисперсии $D\xi$ и $D\eta$;

**е)** найти коэффициент корреляции между $\xi$ и $\eta$;

**ж)** найти $P(\eta \geq \xi)$.

*Решение.* **а)** Для нахождения значения параметра $\lambda$ воспользуемся условием нормировки $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$ (сумма всех вероятностей должна быть равна 1):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 0{,}15 + \lambda + 0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + \lambda + 0{,}1 + 0{,}25 = 0{,}9 + 2\lambda = 1.$$

Следовательно, $\lambda$=0,05.

**б)** Подставив найденное значение параметра $\lambda$ в таблицу, получим закон распределения двумерной СВ $(\xi;\eta)$. Суммируя вероятности по строкам, получим вероятности различных значений СВ $\xi$; суммируя по столбцам − вероятности для СВ $\eta$.

| $\xi \setminus \eta$ | -2 | 0 | 2 | $p^{*}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,15 | 0,05 | 0 | 0,2 |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |
| 3 | 0,05 | 0,1 | 0,25 | 0,4 |
| $p^{**}$ | 0,3 | 0,35 | 0,35 | |

Законы распределения компонент двумерной СВ $(\xi;\eta)$ запишутся в следующем виде:

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,2 | 0,4 | 0,4 |

| $\eta$ | -2 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,3 | 0,35 | 0,35 |

**в)** Для проверки зависимости СВ $\xi$ и $\eta$ используем критерий независимости дискретных СВ: СВ $\xi$ и $\eta$ с совместным распределением $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, независимы тогда и только тогда, когда $p_{ij} = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)$ для всех $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$. Поскольку

$$P(\xi = 1; \eta = -2) = 0{,}15 \ne P(\xi = 1) \cdot P(\eta = -2) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06,$$

то СВ $\xi$ и $\eta$ зависимы.

**г)** Зная законы распределения СВ $\xi$ и $\eta$, вычислим их математические ожидания:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i^* = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}4 = 2{,}2;$$

$$M\eta = \sum_{j=1}^{m} y_j p_j^{**} = -2 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}35 + 2 \cdot 0{,}35 = 0{,}1.$$

**д)** Для вычисления дисперсий воспользуемся формулой $D\xi = M\left(\xi^2\right) - \left(M\xi\right)^2$:

$$M\left(\xi^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i^* = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}4 + 3^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 + 1{,}6 + 3{,}6 = 5{,}4;$$

$$D\xi = 5{,}4 - (2{,}2)^2 = 5{,}4 - 4{,}84 = 0{,}56;$$

$$M\left(\eta^2\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_j^{**} = (-2)^2 \cdot 0{,}3 + 0^2 \cdot 0{,}35 + 2^2 \cdot 0{,}35 = 1{,}2 + 1{,}4 = 2{,}6;$$

$$D\eta = 2{,}6 - (0{,}1)^2 = 2{,}59.$$

**е)** Для вычисления коэффициента корреляции найдем:

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j-1}^{m} x_i y_j p_{ij} = 1 \cdot (-2) \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 2 \cdot 0 +$$

$$+ 2 \cdot (-2) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot (-2) \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}25 =$$

$$= -0{,}3 + 0 + 0 - 0{,}4 + 0 + 0{,}4 - 0{,}3 + 0 + 1{,}5 = 0{,}9;$$

$$r_{\xi;\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{0{,}9 - 2{,}2 \cdot 0{,}1}{\sqrt{0{,}56 \cdot 2{,}59}} \approx 0{,}5646.$$

Поскольку $r_{\xi;\eta} \neq 0$, это также свидетельствует о том, что СВ $\xi$ и $\eta$ зависимы.

**ж)** Для вычисления вероятности $P(\eta \geq \xi)$ выберем те пары значений СВ $\xi$ и $\eta$, которые удовлетворяют неравенству $\eta \geq \xi$:

$$P(\eta \geq \xi) = P(\xi = 1; \eta = 2) + P(\xi = 2; \eta = 2) = 0 + 0{,}1 = 0{,}1.$$

*Пример 2.* Задана плотность распределения двумерной СВ $(\xi;\eta)$

$$p(x;y) = \begin{cases} axy, & \text{если } (x;y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x;y) \notin D, \end{cases}$$

где $D$ — треугольник, ограниченный осями координат и прямой $x + y = 1$.

Требуется найти:

**а)** коэффициент $a$;

**б)** математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$;

**в)** дисперсии $D\xi$ и $D\eta$;

**г)** коэффициент корреляции между $\xi$ и $\eta$;

**д)** выяснить, зависимы ли компоненты двумерной СВ $(\xi;\eta)$;

**е)** найти плотности распределения СВ $\xi$ и $\eta$;

**ж)** вероятность $P(\xi + \eta < 0{,}5)$.

*Решение.* **а)** Для нахождения значения параметра $a$ воспользуемся свойством плотности распределения: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x;y)dxdy = 1$.

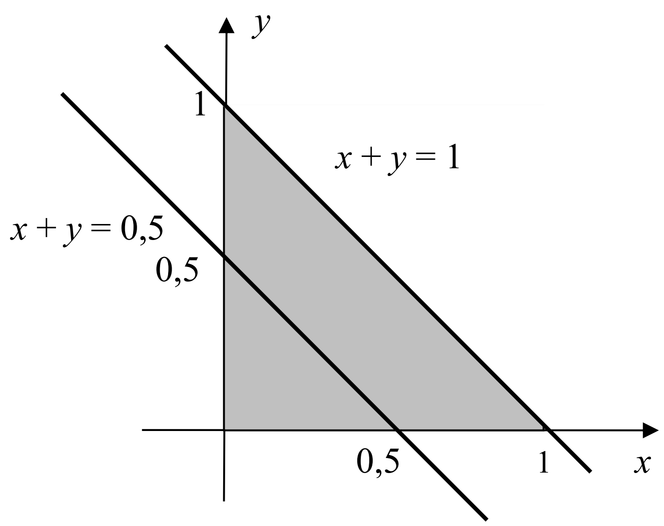

Рис. 1. Область интегрирования

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x;y)dxdy = a\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xydy = a\int_0^1 \frac{xy^2}{2}\bigg|_0^{1-x} dx = a\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}dx =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^1 \left(x-2x^2+x^3\right)dx = \frac{a}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\bigg|_0^1 = \frac{a}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{a}{24} = 1.$$

Следовательно, $a = 24$.

**б)** Вычислим математическое ожидание СВ $\xi$:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x;y)dxdy = 24\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2ydy = 24\int_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= 24\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{2}dx = 12\int_0^1 \left(x^2-2x^3+x^4\right)dx = 12\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\bigg|_0^1 =$$

$$= 12\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = 12\cdot\frac{1}{30} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Аналогично получим $M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x;y)dxdy = 24\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xy^2dy = 0{,}4$.

**в)** Поскольку

$$M\left(\xi^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x;y)dxdy = 24\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^3ydy = 24\int_0^1 \frac{x^3y^2}{2}\bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= 24\int_0^1 \frac{x^3(1-x)^2}{2}dx = 12\int_0^1 \left(x^3-2x^4+x^5\right)dx = 12\cdot\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right)\bigg|_0^1 =$$

$$= 12\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right) = 12\cdot\frac{1}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$D\xi = 0{,}2-\left(0{,}4\right)^2 = 0{,}2-0{,}16 = 0{,}04.$$

Аналогично имеем $M\left(\eta^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2p(x;y)dxdy = 24\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xy^3dy = 0{,}2$;

$D\eta = 0{,}2-\left(0{,}4\right)^2 = 0{,}2-0{,}16 = 0{,}04$.

**г)** Для вычисления коэффициента корреляции найдем:

$$M\left(\xi\eta\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x;y)dxdy = 24\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2y^2dy = 24\int_0^1 \frac{x^2y^3}{3}\bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= 24\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^3}{3}dx = 8\int_0^1 \left(x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5\right)dx = 8\cdot\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 8\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = 8\cdot\frac{1}{60} = \frac{2}{15};$$

$$r_{\xi;\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M\xi\cdot M\eta}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}} = \frac{\frac{2}{15} - \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\sqrt{0{,}04\cdot 0{,}04}} = -\frac{2}{3}.$$

**д)** Поскольку $r_{\xi;\eta} \neq 0$, то СВ $\xi$ и $\eta$ зависимы.

**е)** Найдем плотность распределения СВ $\xi$ по формуле $p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x;y)dy$:

если $x \in [0;1]$, то $p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x;y)dy = 24x\int\limits_0^{1-x} ydy = 24x\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} = 12x(1-x)^2$;

если $x \notin [0;1]$, то $p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x;y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0$.

Таким образом, $p_\xi(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & \text{если } x \in [0;1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0;1]. \end{cases}$

Аналогично получаем, что $p_\eta(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & \text{если } y \in [0;1], \\ 0, & \text{если } y \notin [0;1]. \end{cases}$

**ж)** Вычислим вероятность

$$P(\xi + \eta < 0{,}5) = \iint\limits_{x+y<0{,}5} p(x;y)dxdy = 24\int\limits_0^{0{,}5} dx \int\limits_0^{0{,}5-x} xydy = 24\int\limits_0^{0{,}5} \frac{xy^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}5-x} dx =$$

$$= 24\int\limits_0^{0{,}5} \frac{x(0{,}5-x)^2}{2}dx = 12\int\limits_0^{0{,}5}\left(\frac{x}{4} - x^2 + x^3\right)dx = 12\left(\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= 12\cdot\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64}\right) = 12\cdot\frac{1}{192} = \frac{1}{16}.$$