Раздел 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей – это раздел современной математики, в котором изучаются закономерности случайных явлений. Под случайным явлением понимают явление с неопределенным исходом, происходящее при неоднократном воспроизведении определенного комплекса условий.

Возникновение теории вероятностей как науки относится к XVII в. Первые работы по теории вероятностей представляли собой попытки создания теории азартных игр с целью дать рекомендации игрокам.

Так, 1654 годом датируется переписка Блеза Паскаля (1623–1662) и Пьера Ферма (1601–1665), в которой обсуждаются некоторые задачи, связанные с азартными играми. В частности, так называемая «задача об очках», которую поставил перед Паскалем известный французский игрок XVII в. шевалье де Мере: *сколько раз нужно бросать две кости, чтобы ставить на одновременное выпадение хотя бы раз двух шестерок было выгодно?*

Под влиянием поднятых в дискуссии Паскаля и Ферма вопросов решением тех же задач занимался и голландский ученый Христиану Гюйгенсу (1629–1695). Подробностей переписки он не знал, поэтому методику решения изобрел самостоятельно и опубликовал свои результаты в книге «О расчетах в азартных играх» (1657 г.), которую можно считать первым трактатом по теории вероятностей. В предисловии Гюйгенс пишет: «Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории».

Известны также работа итальянского математика Джероламо Кардано (1501–1576) «Книга об игре в кости», опубликованная в 1563 г., и исследование Галилео Галилея (1564–1642) «Об открытиях, совершенных при игре в кости», написанная между 1613 г. и 1624 г.

Мощным стимулом развития теории вероятностей явились также запросы страхового дела, которое зародилось еще в XIV в. С конца XVII в. на научной основе стало производиться страхование от несчастных случаев и стихийных бедствий. В XVI–XVII вв. во всех странах Западной Европы получило распространение страхование судов и страхование от пожара. В XVIII в. были созданы многочисленные страховые компании и лотереи в Италии, Фландрии, Нидерландах.

В 1713 г. в трактате «Искусство предположений» известного швейцарского математика Якоба Бернулли (1654–1705) была сформулирована и строго доказана первая предельная теорема теории вероятностей – *Закон больших чисел*.

Точное определение вероятности впервые было сформулировано французским математиком Пьером Симоном Лапласом (1749–1827), сейчас оно называется *классическим определением вероятности*.

Построение строгой математической теории вероятностей было осуществлено лишь в XX в. В 1933 г. была издана книга советского академика А.Н. Колмогорова (1903–1987) «Основные понятия теории вероятностей», в которой было дано аксиоматическое построение теории вероятностей, основанное на теории множеств.

§ 1. Множество элементарных событий. Классическое определение вероятности

Опр. 1. ***Достоверным*** называется событие, которое обязательно произойдет при данном комплексе условий (в данном случайном испытании, в данном случайном эксперименте).

Опр. 2. ***Невозможным*** называется событие, которое при данном комплексе условий заведомо не может произойти.

Опр. 3. ***Случайным*** называется событие, которое при данном комплексе условий может как произойти, так и не произойти.

Мера возможности осуществления случайного события – это и есть его вероятность.

Для обозначения случайных событий используются, как правило, большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.; достоверное событие будем обозначать Ω, а невозможное – $\varnothing$.

Опр. 4. События A и B называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же случайном испытании, т. е. они не могут произойти вместе в одном испытании. События A и B называются ***совместными***, если они могут появиться вместе в одном испытании.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***попарно несовместными***, если любые два из них несовместны.

Пример 1. Пусть подброшен правильный игральный кубик. Рассмотрим события:

A = {выпало 3 очка};

B = {выпало не более 2 очков};

C = {выпало 2 очка}.

Здесь события A и B несовместны; события A и C несовместны; события B и C совместны.•

Опр. 5. Несколько событий образуют ***полную группу событий*** для данного испытания, если они попарно несовместны и в результате испытания обязательно появится одно из них.

Иными словами, в результате испытания должно произойти одно и только одно из этих событий.

Пример 1 (продолжение). События A, B и C не образуют полную группу событий, поскольку они не являются попарно несовместными и, кроме того, не исчерпывают все возможные исходы испытания.

Введем событие D = {выпало более 3 очков}. Тогда события A, B, D образуют полную группу событий.

Однако события A, B, C и D не являются полной группой событий, так как события B и C совместны. •

Для одного и того же испытания можно рассматривать различные полные группы событий. Частным случаем полной группы событий являются противоположные события.

Опр. 6. Два события называются ***противоположными***, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$.

Опр. 7. Несколько событий в данном испытании называются ***равновозможными***, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т. е. если условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед остальными.

Пример 1 (продолжение). При однократном бросании игральной кости события $A_1, A_2, A_3, ..., A_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. до шести – образуют полную группу событий и являются равновозможными событиями.•

Классическое определение вероятности

Всякое случайное испытание связано с некоторой совокупностью исходов – результатов испытания, т. е. событий. Во многих случаях бывает возможно перечислить все события, которые могут быть исходами данного испытания.

Опр. 8. Пусть проводится испытание с конечным числом *попарно несовместных равновозможных* исходов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, образующих полную группу событий. Такие исходы называются ***элементарными исходами***, или ***элементарными событиями***. При этом говорят, что *испытание сводится к схеме случаев*. Множество всех элементарных исходов (которое называют также ***пространством элементарных исходов***) будем обозначать $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

Опр. 9. Элементарный исход ω_i называется ***благоприятствующим появлению события*** *A*, если наступление исхода ω_i влечет за собой наступление события *A*.

Классическое определение вероятности: ***вероятность*** $P(A)$ ***случайного события*** *A* равна

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n},}$$

где $m = m_A$ – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события *A*, n – общее число равновозможных элементарных исходов испытания.

Пример 1 (продолжение). Найдем вероятности событий *A*, *B*, *C*, *D*.

Решение. Множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6\}$, содержит 6 равновозможных событий $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. до шести, поэтому $n = 6$.

Чтобы найти вероятности событий с помощью классического определения вероятности, определим для каждого события благоприятствующие ему элементарные исходы:

$$A = \{\omega_3\} \quad \Rightarrow \quad m_A = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{6};$$

$$B=\{\omega_1,\omega_2\} \quad \Rightarrow \quad m_B=2 \quad \Rightarrow \quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

$$C=\{\omega_2\} \quad \Rightarrow \quad m_C=1 \quad \Rightarrow \quad P(C)=\frac{1}{6};$$

$$D=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\} \quad \Rightarrow \quad m_D=3 \quad \Rightarrow \quad P(D)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}. \bullet$$

Замечание. Поскольку результаты случайного испытания не всегда образуют конечное множество равновозможных несовместных исходов, то классическое определение вероятности нельзя считать определением в полном смысле этого слова, а можно только использовать как метод вычисления вероятности для испытаний, сводящихся к схеме случаев.

Легко видеть, что из классического определения вероятности вытекают следующие свойства, справедливые и в общем случае.

Вероятность любого события удовлетворяет условию

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1.}$$

Вероятность достоверного события равна 1: $P(\Omega)=1$; вероятность невозможного события равна 0: $P(\varnothing)=0$.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются методы подсчета числа различных комбинаций (сколькими различными способами можно составить множества (комбинации), удовлетворяющие определенным условиям, из элементов заданного множества).

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух простых правил.

Правило произведения: если объект типа X можно выбрать n способами и при каждом таком выборе объект типа Y можно выбрать m способами, то выбор пары (X, Y) в указанном порядке можно осуществить nm способами.

Правило суммы: если объект типа X можно выбрать n способами, а объект типа Y – m способами, то выбор объекта типа X или Y можно осуществить $n + m$ способами.

Пример 2. Из пункта *M.* в пункт *N.* и обратно можно добраться тремя способами: поездом, автобусом или самолетом; из *N.* в *L.* можно доехать автобусом или дойти пешком. Сколько различных по способу передвижения маршрутов можно организовать: **а)** из *M.* в *L.* через *N.*; **б)** из *N.* либо в *M.*, либо в *L.*?

Решение. **а)** Нужные маршруты легко перечислить: 1) из *M.* в *N.* самолетом, далее автобусом; 2) из *M.* в *N.* самолетом, далее пешком; 3) поездом – автобусом; 4) поездом – пешком; 5) автобусом – автобусом; 6) автобусом – пешком.

Число маршрутов можно определить, не перечисляя их. Имеется 3 способа добраться из *M.* в *N.* и 2 способа из *N.* в *L.* На каждый способ добраться из *M.* в *N.* приходится два способа добраться в *L.* По правилу произведения получаем $3 \cdot 2 = 6$ способов.

б) Нужно выбрать либо один из 3 вариантов добраться из *N.* в *M.*, либо один из 2 вариантов путешествия из *N.* в *L.* Применяя правило суммы, получаем всего 3 + 2 = 5 вариантов. •

Пример 3. Сколько можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5: **а)** трехзначных чисел, **б)** трехзначных чисел, состоящих из различных цифр?

Решение. **а)** Каждую цифру можно выбрать 5 способами, следовательно, по правилу произведения получаем, что всего таких чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

б) Первую цифру можно выбрать 5 способами; на каждый способ выбора первой цифры приходится 4 способа выбора второй цифры (можно взять любую цифру, кроме той которую выбрали первый раз); на каждый способ выбора первых двух цифр приходится 3 способа выбора третьей цифры. По правилу произведения получаем всего $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов. •

Опр. 10. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждая *упорядоченная* комбинация, содержащая m элементов из этих n, называется ***размещением*** из n элементов по m. Число размещений (упорядоченных комбинаций) из n различных элементов по m элементам (местам), отличающихся либо самими элементами, либо их порядком, называется ***числом размещений из*** n **по** m и обозначается A_n^m.

Можно сказать, что число размещений A_n^m – это *число способов разместить m из n элементов по m местам*. С помощью правила произведения легко вычислить

$$\boxed{A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}_{m\text{ множителей}} = \frac{n!}{(n-m)!}.}$$

Опр. 11. Размещения из n элементов по n называются ***перестановками*** (из n элементов). ***Число*** P_n ***перестановок*** из n элементов равно

$$\boxed{P_n = n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!.}$$

Опр. 12. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. *Неупорядоченные* комбинации (порядок не имеет значения), содержащие m элементов из данных n, называются ***сочетаниями*** из n элементов по m. ***Число сочетаний из*** n **по** m обозначается C_n^m.

Таким образом, число сочетаний C_n^m – это *число способов выбрать* m элементов из данных n элементов (порядок выбранных элементов не учитывается).

Пример 4. Пусть дано множество из 4 элементов: $D = \{a, b, c, d\}$.

Перечислим все сочетания из 4 данных элементов по 3. Это все возможные подмножества, содержащие 3 элемента:

$$\{a,b,c\};\quad \{a,b,d\};\quad \{a,c,d\};\quad \{b,c,d\}.$$

Всего имеется 4 сочетания из 4 по 3, так как эти множества должны отличаться составом элементов. Такие комбинации, как, например, abc и acb, отличающиеся только порядком элементов, представляют собой различные размещения, но одно и то же сочетание.

Выпишем все размещения из 4 по 3. Это можно сделать, переставив всеми возможными способами элементы каждого сочетания. Каждому сочетанию (неупорядоченному множеству элементов) будет соответствовать $3! = 6$ размещений, различающихся между собой порядком элементов, поэтому всего получится $A_n^m = 4\cdot 6 = 24$ размещений:

abc	abd	acd	bcd
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb

$$\begin{array}{cccc} cab & dab & dac & dbc \\ cba & dba & dca & dcb \end{array} \quad \bullet$$

Аналогично рассмотренному примеру, в общем случае подсчитать число A_n^m всех возможных размещений из n по m можно следующим образом: сперва найти число всех неупорядоченных множеств, содержащих m элементов из данных n (таких множеств будет C_n^m), а затем вычислить число возможных перестановок в каждом неупорядоченном множестве (это число равно P_m). Следовательно, по правилу произведения получаем: $A_n^m = C_n^m P_m = C_n^m m!$. Отсюда

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.}$$

Замечание 1. Напомним, что $\boxed{0! = 1.}$

Замечание 2. Числа C_n^m называют также ***биномиальными коэффициентами*** в соответствии с биномом Ньютона:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^m x^m + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m.$$

Свойства чисел C_n^m (биномиальных коэффициентов).

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

2. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

3. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Пример 5. Сколько существует способов распределения 3 наград между 10 участниками соревнования, если: **а)** награды различные; **б)** все награды одинаковые?

Решение. Число способов распределения 3 наград между 10 участниками соревнования равно числу способов выбрать трех участников из десяти и разместить их по трем местам, т. е.

а) числу размещений $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ (порядок важен);

б) числу сочетаний $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ (порядок не учитывается).•

§ 2. Методы задания вероятностей

1. Классическое определение вероятности: ***вероятность*** $P(A)$ ***случайного события*** A равна

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n},}$$

где $m=m_A$ – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n – общее число равновозможных элементарных исходов испытания.

Для того, чтобы можно было применить классическое определение вероятности, необходимо, чтобы случайный эксперимент сводился к схеме случаев, т. е.:

1) элементарные исходы эксперимента должны быть равновозможны;

2) элементарные исходы должны образовывать конечное (или счетное) множество.

Пример 1. В урне содержится N шаров, из них M белых, остальные – черные. Наудачу вынимают n шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров m белых?

Решение. Имеет место следующая схема:

Имеем:	M белых	$+ (N-M)$ черных	$= N$ шаров
Извлечь:	m белых	$+ (n-m)$ черных	$= n$ шаров
$P(A) =$	C_M^m	$\cdot\ C_{N-M}^{n-m}$	$/\ C_N^n$

Число элементарных исходов – это число способов извлечь (выбрать) n шаров из имеющихся N шаров, т. е. C_N^n. Число благоприятствующих исходов – это число способов выбрать m шаров из имеющихся M белых шаров и при каждом этом выборе извлечь $n-m$ шаров из имеющихся $N-M$ черных шаров. В силу правила произведения, число благоприятствующих исходов равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$. Обозначая через A событие, вероятность которого надо найти, получаем

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \bullet$$

2. Геометрическая вероятность может использоваться, если исходы случайного эксперимента равновозможны, но образуют бесконечное несчетное пространство элементарных исходов, которое можно представить в виде некоторой геометрической фигуры – области на числовой прямой, на плоскости или в пространстве.

Опр. 1. Пусть G – геометрическая фигура (область), представляющая пространство элементарных исходов данного эксперимента; g – область, представляющая все элементарные исходы, благоприятствующие событию A (рис. 1). ***Геометрической вероятностью*** события A называется отношение меры области g к мере области G:

$$\boxed{P(A) = \frac{\mu(g)}{\mu(G)}.}$$

При этом если G – отрезок или кривая, то $\mu(G)$ – длина отрезка или кривой; если G – плоская область, то $\mu(G)$ – площадь этой области; если G – пространственное тело, то $\mu(G)$ – объем этого тела.

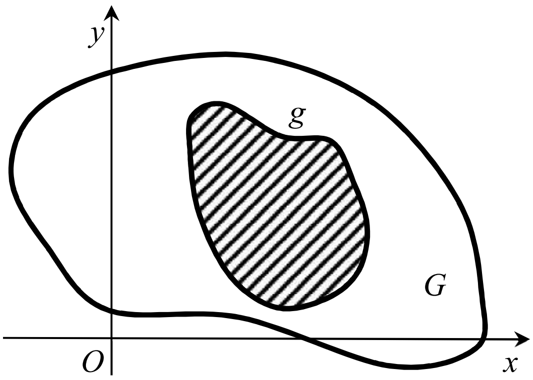


Рис. 1. Геометрическая вероятность.

Пример 2. В квадрат со стороной a наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что она попадет на вписанный в квадрат круг?

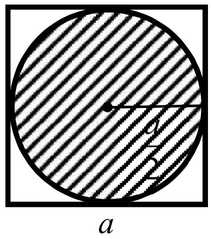


Рис. 2. Круг, вписанный в квадрат со стороной a

Решение. Площадь квадрата равна $S_{кв} = a^2$, площадь круга $S_{кр} = \pi r^2$, где $r = \dfrac{a}{2}$ – радиус круга (см. рис. 2). Применяя геометрическую вероятность, получим

$$P(A) = \frac{S_{кр}}{S_{кв}} = \frac{\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}. \bullet$$

Пример 3 (задача о встрече). Два лица И. и М. договорились встретиться в течение определенного часа, в пределах которого они приходят случайным образом (наудачу), причем И. ждет 20, а М. – 10 минут. Найдем вероятность того, что они встретятся.

Решение. Пусть x – время прихода И., а y – время прихода М. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат Oxy. Областью возможных значений является множество точек (x; y), $0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60$ (в качестве единиц масштаба возьмем минуты), т. е. множество элементарных исходов эксперимента описывается квадратом Ω со стороной 60 (см. рис. 3), площадь квадрата равна $S_\Omega = 60^2 = 3600$.

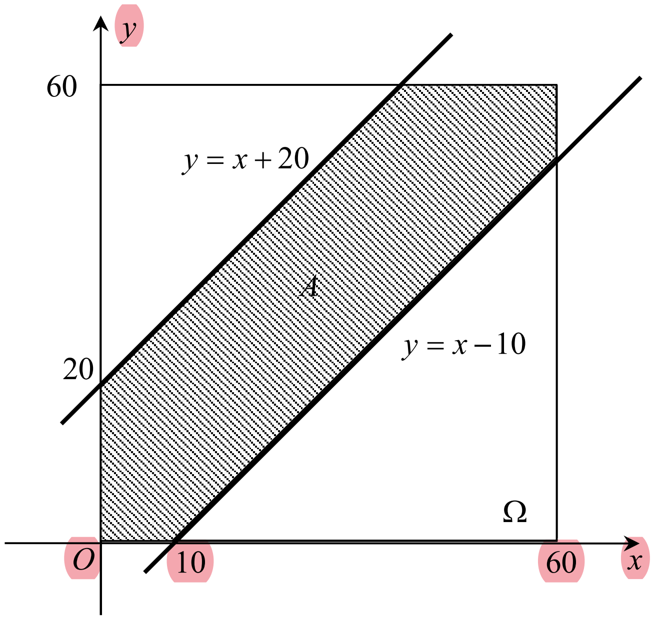


Рис. 3. Задача о встрече

Событие $A = \{$встреча состоится$\}$ произойдет, если каждое лицо придет не позже, чем другое уйдет после ожидания, т. е. $x \le y + 10,\ y \le x + 20.$ Таким образом, исходы, благоприятствующие событию A, расположены в заштрихованной полосе между прямыми $y = x - 10$ и $y = x + 20$ (см. рис. 3), причем площадь S_A благоприятствующей событию A области равна площади S_Ω квадрата Ω за вычетом площадей двух прямоугольных треугольников с катетами по 40 и 50 единиц. Тогда

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{3600 - \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50}{3600} = \frac{31}{72} \approx 0{,}43. \bullet$$

3. Статистическая вероятность.

Классическое определение вероятности неприменимо, если исходы случайного эксперимента не равновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадения ее различных граней не равновозможны. В таких случаях иногда используют понятие статистической вероятности.

Опр. 2. Пусть при проведении n испытаний событие A появилось в m испытаниях. Отношение $w(A) = \dfrac{m}{n}$ называется

относительной частотой появления события A в данной серии испытаний.

Относительная частота не является величиной постоянной. Если мы проведем еще одну серию из n или n_1 испытаний, то событие A появится m_1 раз, причем $\frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m}{n}$, но если n и n_1 достаточно велики и условия эксперимента достаточно стабильны, то $\frac{m_1}{n_1} \approx \frac{m}{n}$.

Опр. 3. Если относительная частота события обладает свойством статистической устойчивости, т. е. в различных сериях испытаний изменяется незначительно, в качестве ***статистической вероятности*** события принимают относительную частоту или ее приближенное значение.

Пример 4. Известно, что среди новорожденных больше мальчиков, чем девочек. По официальным статистическим данным, относительная частота рождения девочек в Беларуси в 2003–2018 гг. варьировалась следующим образом:

2003 – 0,485;	2004 – 0,487;	2005 – 0,487;	2006 – 0,485;
2007 – 0,485;	2008 – 0,485;	2009 – 0,485;	2010 – 0,484;
2011 – 0,486;	2012 – 0,485;	2013 – 0,485;	2014 – 0,483;
2015 – 0,484;	2016 – 0,485;	2017 – 0,486;	2018 – 0,487.

Это дает основания считать вероятность рождения девочек приблизительно равной 0,485.●

§ 3. Соотношения между событиями

Случайные события можно рассматривать как подмножества некоторого множества – пространства элементарных исходов Ω. Соотношения между случайными событиями аналогичны соотношениям между множествами. События и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью *диаграмм Эйлера*: достоверное событие Ω изображают прямоугольником; элементарные исходы – точками прямоугольника; случайное событие – областью внутри него.

Опр. 1. Говорят, что событие A ***влечет за собой событие*** B, или что событие A ***входит в*** B, или что событие B ***включает в себя*** событие A, если при наступлении события A обязательно наступает и событие B. Обозначается: $A \subset B$.

На рис. 4 представлена геометрическая интерпретация этого понятия.

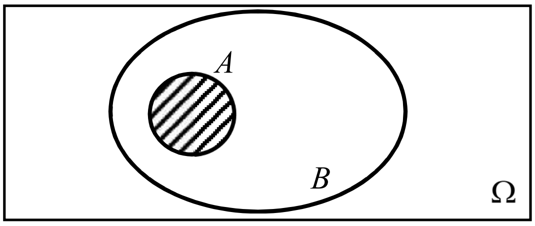


Рис. 4. Событие A влечет за собой событие B: $A \subset B$

Пример 1. Пусть подброшен правильный игральный кубик. Рассмотрим события:

A = {выпало 1 очко};

B = {выпало нечетное число очков}.

Здесь событие A влечет за собой событие B (событие A входит в B): $A \subset B$.•

Опр. 2. События A и B называются ***равносильными*** (***равными***), если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$.

Опр. 3. ***Суммой*** (***объединением***) событий A и B называется событие $C = A + B$ ($C = A \cup B$), состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A *или* B. Иными словами, событие C состоит в том, что произошло или событие A, или событие B, или события A и B одновременно (рис. 5).

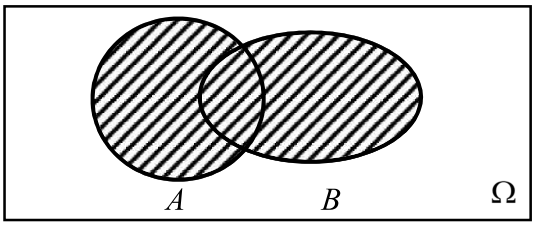


Рис. 5. Сумма $A + B$ событий A и B

Опр. 4. ***Произведением*** (***пересечением***) событий A и B называется событие $C = AB$ ($C = A \cap B$), которое наступает, когда происходят оба события A *и* B (рис. 6).

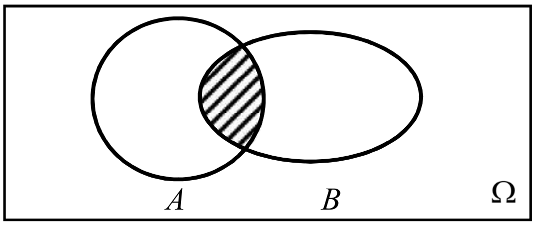


Рис. 6. Произведение AB событий A и B

Пример 1 (продолжение). Найдем сумму и произведение событий D = {выпало не более 3 очков}; K = {выпало не менее 3 очков}.

Множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6\}$ содержит 6 элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. до шести. Перечислим элементарные исходы, благоприятствующие каждому из событий:

$$D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}; \qquad K = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Тогда сумма событий включает все исходы, которые благоприятствуют либо одному событию, либо второму, либо обоим событиям одновременно, поэтому

$$D + K = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega;$$

произведение событий включает только те исходы, которые благоприятствуют обоим событиям одновременно, т. е.

$$DK = \{\omega_3\}.$$

Заметим, что для событий $A = \{$выпало 1 очко$\} = \{\omega_1\}$ и $B = \{$выпало нечетное число очков$\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ получим $A + B = B,\ AB = A.$ •

Замечание. Раньше мы ввели понятие несовместных событий: события A и B называются несовместными, если они не могут произойти вместе в одном испытании. Таким образом, события A и B являются несовместными тогда и только тогда, когда их произведение является невозможным событием: $AB = \varnothing$.

Опр. 5. ***Разностью*** событий A и B называется событие $C = A \backslash B$ ($C = A - B$), которое произойдет, если произойдет событие A, но не произойдет событие B (рис. 7).

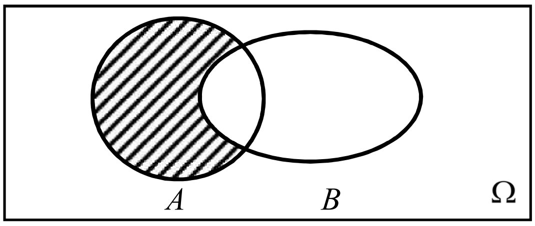


Рис. 7. Разность $C = A \backslash B$ событий A и B

Пример 1 (продолжение). Для введенных выше событий A, B, D, K получим:

$$A \backslash B = \varnothing; \quad B \backslash A = \{\omega_3, \omega_5\}; \quad D \backslash K = \{\omega_1, \omega_2\}; \quad K \backslash D = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}. \bullet$$

Понятие разности событий позволяет представить событие $\overline{A}$, противоположное событию A, в виде $\overline{A} = \Omega \backslash A$ (рис. 8).

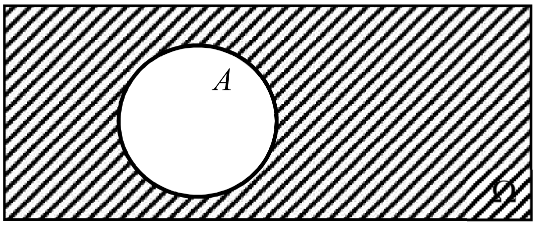


Рис. 8. Событие $\overline{A} = \Omega \backslash A$, противоположное событию A

§ 4. Аксиоматическое построение теории вероятностей

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Элементарная теория вероятностей – та часть теории вероятностей, в которой приходится иметь дело с вероятностями лишь конечного числа событий. В общем случае теория вероятностей как математическая дисциплина базируется на системе аксиом. Это означает, что, после того как даны названия изучаемым объектам и их основным отношениям, а также аксиомы, которым эти отношения должны подчиняться, все дальнейшее изложение теории должно основываться исключительно лишь на этих аксиомах, не опираясь на обычное конкретное значение этих объектов и их отношений.

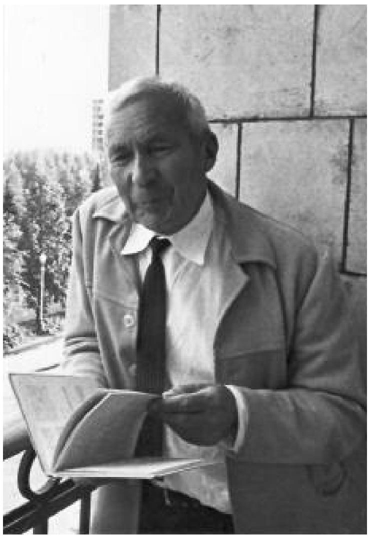
Задача аксиоматизации теории вероятностей была сформулирована в 1900 г. на II Международном математическом конгрессе как часть одной из знаменитых *проблем Гильберта*. Немецкий математик Д. Гильберт (1862–1943) в своем докладе представил список двадцати трех нерешенных проблем, послуживший направляющим указателем приложения усилий математиков на протяжении всего XX в.

Аксиоматизация теории вероятностей может быть проведена различными способами как в отношении выбора аксиом, так и выбора основных понятий и основных соотношений. Если преследовать цель возможной простоты как самой системы аксиом, так и построения на ней дальнейшей теории, то представляется наиболее целесообразным ввести в качестве базовых понятия случайного события и его вероятности.

Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматизации, предложенной А. Н. Колмогоровым в монографии «Основные понятия теории вероятностей», первое издание которой опубликовано в 1933 г. на немецком языке. В этой работе А. Н. Колмогоров заложил фундамент современной теории вероятностей, основанной на теории множеств и теории меры. Аксиомы теории вероятностей вводятся так, чтобы вероятность события обладала основными свойствами статистической вероятности, характеризующей ее практический смысл. Сформулированная А. Н. Колмогоровым простая система аксиом позволила описать уже существовавшие к тому времени классические разделы теории вероятностей и дать толчок развитию ее новых разделов, например, теории случайных процессов.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Андре́й Никола́евич Колмого́ров

(1903–1987)

русский советский математик, один из крупнейших математиков XX в.

Один из основоположников современной теории вероятностей, им получены фундаментальные результаты во многих областях математики и ее приложений, в том числе в геометрии, математической логике, классической механике, теории сложности алгоритмов, теории информации, теории тригонометрических рядов, теории приближения функций, теории множеств, теории дифференциальных уравнений, функциональном анализе. Автор новаторских работ по философии, истории, методологии и преподаванию математики.

Академик Академии наук СССР, президент Московского математического общества в 1964–1966 гг. и 1974–1985 гг. Иностранный член Национальной академии наук США, Лондонского королевского общества, Французской (Парижской), Венгерской и Польской академий наук, Нидерландской королевской академии наук, Академий наук ГДР и Финляндии, Румынской академии, член Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина», почетный член Американской академии искусств и наук, член Лондонского

математического общества, Индийского математического общества, иностранный член Американского философского общества.
W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Пусть задано некоторое множество Ω исходов эксперимента, которое мы будем называть ***пространством элементарных исходов***. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс (система, множество) случайных событий, т. е. подмножеств множества Ω.

Опр. 1. Класс событий $\mathfrak{F}$ называется σ***-алгеброй*** событий, если:

1) $\Omega \in \mathfrak{F}$ (достоверное событие принадлежат классу $\mathfrak{F}$);

2) если $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A + B$, AB, $A \backslash B \in \mathfrak{F}$ (если A и B являются событиями, то их сумма $A + B$, произведение AB и разность $A \backslash B$ также являются событиями);

3) если $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathfrak{F}$, то $A_1 + A_2 + ... + A_n + ... \in \mathfrak{F}$; $A_1 A_2 ... A_n ... \in \mathfrak{F}$ (сумма и произведение счетного числа событий также являются событиями).

Пример 1. Наиболее простыми примерами σ-алгебр являются:

1) $\mathfrak{F}$ – множество всех подмножеств множества Ω;

2) $\mathfrak{F} = \{\varnothing; \Omega\}$;

3) $\mathfrak{F} = \{\varnothing; A; \overline{A}; \Omega\}$, где A – некоторое подмножество множества Ω. •

Опр. 2. ***Вероятностью*** (или ***вероятностной мерой***) называется числовая функция $P : \mathfrak{F} \to [0;1]$, определенная для каждого события $A \in \mathfrak{F}$ и удовлетворяющая следующим условиям (*аксиомам вероятности*):

А1. *Аксиома неотрицательности*: вероятность любого события неотрицательна, т. е. $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in \mathfrak{F}$;

А2. *Аксиома нормированности*: вероятность достоверного события равна 1, т. е. $P(\Omega) = 1$;

А3. *Аксиома аддитивности*: вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей, т. е. если события $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathfrak{F}$ попарно несовместны ($A_i A_k = \varnothing$ при всех $i \neq k$), то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$$

Опр. 3. Тройка объектов $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, где Ω – некоторое множество, называемое пространством элементарных исходов; $\mathfrak{F}$ – σ-алгебра событий (подмножеств множества Ω); P – вероятность (вероятностная мера), определенная на классе событий $\mathfrak{F}$, называется ***вероятностным пространством***.

§ 5. Основные теоремы о вероятности

В качестве следствий аксиом вероятности можно получить следующие основные свойства вероятности.

Свойства вероятности

1. Вероятность невозможного события равна 0: $P(\varnothing)=0$.

2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$\boxed{P(A)+P(\overline{A})=1}$$

для любого события A.

3. Вероятность любого события не меньше 0 и не больше 1:

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1}$$

для любого события A.

Упражнение. Вывести свойства 1, 2, 3 из аксиом вероятности.

Теорема сложения вероятностей

Т 1 (теорема сложения вероятностей). Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения: для любых событий A и B

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).}$$

Доказательство. Действительно, это вытекает из представления событий $A+B$ и B посредством суммы несовместных событий: $A+B=A+B\overline{A}$, $B=B\overline{A}+AB$ (см. рис. 9).

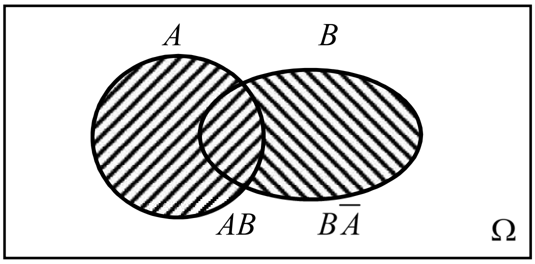


Рис. 9. К доказательству теоремы сложения вероятностей

Тогда в силу аксиомы А3 аддитивности вероятности получим:

$$P(A+B)=P(A)+P(B\overline{A});$$

$$P(B)=P(B\overline{A})+P(AB).$$

Следовательно,

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB);$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \lhd$$

Упражнение 1. Показать, что

$$P(A+B+C)=$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

В случае несовместных событий *A* и *B* имеем $AB=\varnothing$, поэтому формула для вероятности суммы событий упрощается.

Следствие 1 (теорема сложения вероятностей несовместных событий). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей: если события *A* и *B* *несовместны*, то

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B).}$$

Отметим, что это утверждение является частным случаем аксиомы А3 аддитивности вероятности.

Следствие 2 (свойство полной группы событий). Сумма вероятностей событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий, равна 1:

$$\boxed{P(H_1)+P(H_2)+...+P(H_n)=1.}$$

Упражнение 2. Доказать следствие 2.

Условная вероятность

Пример 1. Подброшен правильный игральный кубик. Обозначим элементарные исходы опыта через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_6$ – соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. до шести.

Рассмотрим события:

A = {выпало нечетное число очков} $= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$;

B = {выпало не более 3 очков} $= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Несложно видеть, что $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Найдем вероятность события A *при условии*, что произошло событие B. Такая вероятность обозначается

$$P(A \mid B) = P\left\{\begin{array}{l}\text{выпало нечетное число очков, если известно,}\\ \text{что выпало не более 3 очков}\end{array}\right\}.$$

Для вычисления этой вероятности применим классическое определение вероятности: $P(A \mid B) = \dfrac{m'}{n'}$, где m' – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n' – общее число равновозможных элементарных исходов испытания. При этом множество элементарных исходов совпадает со множеством исходов, благоприятствующих событию B, т. е.

$$\Omega' = B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \quad \Rightarrow \quad n' = 3;$$

$$A' = \{\omega_1, \omega_3\} \quad \Rightarrow \quad m' = 2,$$

поэтому $P(A \mid B) = \dfrac{2}{3}$. •

Пример 2. В области Ω наудачу выбирается точка (рис. 10). Обозначим через A событие, состоящее в том, что точка принадлежит области A. В силу геометрического определения вероятности, вероятность события A равна отношению площадей этих областей, т. е. $P(A) = \dfrac{S_A}{S_\Omega}$.

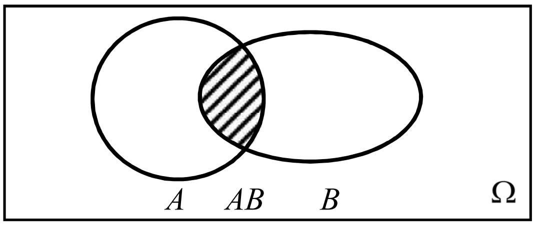


Рис. 10. К понятию условной вероятности

Применяя геометрическое определение вероятности для нахождения условной вероятности $P(A\,|\,B)$ того, что точка принадлежит области *A*, если известно, что она принадлежит области *B*, получим

$$P(A\,|\,B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{S_{AB}/S_\Omega}{S_B/S_\Omega} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \bullet$$

Полученное в примере 2 соотношение принимается за определение условной вероятности.

Опр. 1. ***Условной вероятностью*** $P(A\,|\,B)$ события *A* при условии, что произошло событие *B* $(P(B) \neq 0),$ называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события *B*:

$$\boxed{P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.}$$

Упражнение 3. Применить эту формулу для нахождения условной вероятности в примере 1.

Теорема умножения вероятностей

Из определения условной вероятности вытекает следующее утверждение.

Т 2 (теорема умножения вероятностей). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B\,|\,A).}$$

Следствие 1. $P(ABC) = P(A)P(B\,|\,A)P(C\,|\,AB).$

Пример 3. Студент знает ответы на 15 вопросов из 20. Какова вероятность того, что он ответит на три предложенных ему вопроса?

Решение. Рассмотрим событие

A = {студент ответит на три предложенных ему вопроса}.

Введем более простые события

A_i = {студент ответит на i-й вопрос}, где i = 1; 2; 3.

Тогда $A = A_1 A_2 A_3$. По теореме умножения вероятностей имеем

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2).$$

Используя классическое определение вероятности, вычислим: $P(A_1) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$; $P(A_2 \mid A_1) = \frac{14}{19}$, так как после первого вопроса остается n = 19 вопросов, из которых студент знает ответы (при условии, что произошло событие A_1) на $m = 14$ вопросов; $P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{13}{18}$, так как после второго вопроса остается n = 18 вопросов, из которых студент знает ответы (при условии, что произошли события A_1 и A_2) на m = 13 вопросов.

Следовательно, $P(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} \approx 0{,}4.$ •

Упражнение 4. Решить эту задачу, используя только классическое определение вероятности.

Опр. 2. Событие A называется ***независимым*** от события B, если $P(A \mid B) = P(A)$.

Иными словами, событие A не зависит от события B, если вероятность его появления не зависит от того, произошло или не произошло событие B.

Упражнение 5. Показать, что если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от A, т. е. если $P(A \mid B) = P(A)$, то $P(B \mid A) = P(B)$.

Таким образом, зависимость или независимость событий всегда взаимны, поэтому мы можем говорить, что события A и B независимы.

Для независимых событий теорема умножения вероятностей принимает особенно простой вид.

Следствие 2 (теорема умножения вероятностей независимых событий). Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: если события A и B *независимы*, то

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B).}$$

Замечание. При решении задач о независимости событий судят по смыслу условия задачи.

Пример 4. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Рассмотрим события

A_1 = {первый стрелок попал в мишень};

A_2 = {второй стрелок попал в мишень}.

Пусть $P(A_1) = 0{,}8;\ P(A_2) = 0{,}6.$ Найдем $P(A_1 + A_2).$

Решение. 1 способ. По теореме сложения вероятностей

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92,$$

поскольку по смыслу задачи события A_1 и A_2 независимы.

2 способ. Во многих случаях бывает полезно представить событие, вероятность которого требуется найти, в виде суммы несовместных событий. Запишем событие

$A = A_1 + A_2$ = {хотя бы один стрелок попал в мишень}

как сумму несовместных событий: $A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2 + A_1A_2.$ Тогда, применяя теорему сложения вероятностей *несовместных* событий и теорему умножения вероятностей *независимых* событий, получаем

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2 + A_1A_2) =$$

$$= P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) + P(A_1)P(A_2) =$$

$$= 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}6) + (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92.$$

3 способ. Для вычисления вероятности события

A = {хотя бы один стрелок попал в мишень}

удобно перейти к противоположному событию

$\overline{A}$ = {ни один стрелок не попал в мишень}.

Тогда $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2$, поэтому

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}92. \bullet$$

Пример 5. Три стрелка, вероятности попадания которых в мишень соответственно равны 0,7, 0,8 и 0,9, произвели по одному выстрелу (независимо друг от друга). Найдем вероятности следующих событий:

A = {только один стрелок попал в мишень},

B = {хотя бы один стрелок попал в мишень}.

Решение. По условию известны вероятности событий

A_i = {i-й стрелок попал} ($i = 1, 2, 3$):

$$P(A_1) = 0{,}7,\ P(A_2) = 0{,}8,\ P(A_3) = 0{,}9.$$

Выразим события, вероятности которых нужно найти, через эти события.

Событие A означает, что один стрелок попал, а два не попали в мишень, представим его в виде суммы несовместных событий:

$$A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$$

(либо попал только первый стрелок (произошло событие $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$), либо попал только второй стрелок (событие $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$), либо попал только третий стрелок (событие $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$)). Поскольку слагаемые попарно несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы, то

$$P(A) = 0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 + 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 = 0{,}092.$$

Для вычисления вероятности события B удобнее перейти к противоположному событию

$\overline{B}$ = {ни один стрелок не попал в мишень}.

Тогда $\overline{B} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, поэтому

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 1 - 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}994.$ •

Формула полной вероятности

Т 3 (формула полной вероятности). Если событие A может наступить при появлении одного из n попарно несовместных событий (***гипотез***) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$\boxed{P(A) = P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2) + ... + P(H_n)P(A\,|\,H_n).}$$

Доказательство. Гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, т. е. они попарно несовместны и $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega.$ Тогда событие A можно представить в виде $A = \Omega A = H_1 A + H_2 A + \ldots + H_n A,$ причем слагаемые попарно несовместны. Следовательно, применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, а затем теорему умножения вероятностей, получим

$$P(A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \ldots + P(H_n A) =$$

$$= P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2) + ... + P(H_n)P(A\,|\,H_n). \lhd$$

Пример 6. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1 : 4 : 5. Практика показала, что среди телевизоров, поступающих от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, соответственно 98%, 88% и 92% не требуют ремонта в течение гарантийного срока. Найдем вероятность того, что проданный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение. Пусть событие A = {проданный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока}. По условию известен для каждого поставщика процент телевизоров, выдерживающих гарантийный срок без ремонта, т. е. известны условные вероятности события A при условии осуществления гипотез H_i = {проданный телевизор поступил от i-го поставщика} (i = 1; 2; 3):

$$P(A|H_1) = 0{,}98;\ P(A|H_2) = 0{,}88;\ P(A|H_3) = 0{,}92.$$

Чтобы найти $P(A)$ по формуле полной вероятности, найдем вероятности гипотез. Пусть от 1-го поставщика поступило k телевизоров, тогда от 2-го – $4k$, от 3-го – $5k$, всего – $10k$ телевизоров. Применяя классическое определение вероятности, получим:

$$P(H_1) = \frac{k}{10k} = 0{,}1;\quad P(H_2) = \frac{4k}{10k} = 0{,}4;\quad P(H_3) = \frac{5k}{10k} = 0{,}5.$$

Контроль: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$ (сумма вероятностей гипотез должна быть равна 1).

По формуле полной вероятности находим

$$P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 + 0{,}4 \cdot 0{,}88 + 0{,}5 \cdot 0{,}92 = 0{,}91. \bullet$$

Формула Байеса

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

То́мас Ба́йес
(англ. *Thomas Bayes*)
(1702–1761)
британский математик, пресвитерианский священник.

Формула Байеса применяется, если событие A *произошло* и требуется *переоценить* вероятности гипотез, т. е. найти $P(H_k|A)$.

Т 4 (формула Байеса). Если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий, то

$$\boxed{P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}.}$$

Доказательство. Используя определение условной вероятности, теорему умножения вероятностей и формулу полной вероятности, имеем

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}. \triangleleft$$

Вероятности $P(H_k)$, известные до проведения опыта, называются ***априорными*** (лат. *a priori* – буквально «от предшествующего») вероятностями гипотез, вероятности $P(H_k|A)$ называются ***апостериорными*** (лат. *a posteriori* – от последующего).

Пример 6 (продолжение). Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

Решение. Найдем апостериорные вероятности гипотез $P(H_k \mid \overline{A})$, где $\overline{A} = \{$проданный телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока$\}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,09.$

По формуле Байеса получим:

$$P(H_1 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_1)P(\overline{A} \mid H_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0,1 \cdot 0,02}{0,09} \approx 0,022;$$

$$P(H_2 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_2)P(\overline{A} \mid H_2)}{P(\overline{A})} = \frac{0,4 \cdot 0,12}{0,09} \approx 0,533;$$

$$P(H_3 \mid \overline{A}) = \frac{P(H_3)P(\overline{A} \mid H_3)}{P(\overline{A})} = \frac{0,5 \cdot 0,08}{0,09} \approx 0,445.$$

Следовательно, наиболее вероятно, что данный телевизор поступил от 2-го поставщика.•

§ 6. Схема Бернулли

Опр. 1. Пусть проводится n *независимых в совокупности* испытаний, в каждом из которых возможно только два исхода: появление некоторого события A – *успех* и его непоявление $\overline{A}$ – *неуспех*, причем вероятность наступления успеха в каждом испытании постоянна и равна p. Такая последовательность испытаний называется ***схемой Бернулли***.

Итак, вероятность успеха в каждом испытании постоянна и равна $P(A) = p$; следовательно, вероятность неудачи (неуспеха) во всех испытаниях тоже постоянна и равна $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Пример 1. 1) Несколько последовательных бросаний монеты представляют собой независимые испытания.

2) Несколько последовательных выниманий карты из колоды представляют собой независимые опыты при условии, что вынутая карта каждый раз возвращается в колоду и карты перемешиваются; в противном случае это – зависимые опыты.

3) Несколько выстрелов представляют собой независимые опыты только в случае, если прицеливание производится заново перед каждым выстрелом; в случае, когда прицеливание производится один раз перед всей стрельбой или непрерывно осуществляется в процессе стрельбы (стрельба очередью, бомбометание серией), выстрелы представляют собой зависимые опыты. •

Т 1. В схеме Бернулли вероятность $P_n(k)$ наступления k успехов в n независимых испытаниях – вероятность того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно k раз, вычисляется по ***формуле Бернулли***:

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},} \qquad (1)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $p = P(A)$ – вероятность успеха в одном испытании; $q = 1 - p$ – вероятность неуспеха в одном испытании.

Доказательство. Если в результате n независимых испытаний по схеме Бернулли событие A произошло k раз (неважно в каком порядке), то это означает, что совместно наступили k событий A и $(n-k)$ событий $\overline{A}$. Так как все n событий независимы, то по теореме умножения вероятность появления в определенной последовательности k раз события A и $(n-k)$ раз события $\overline{A}$ равна $p^k q^{n-k}$.

Однако событие A может появляться ровно k раз в n опытах совершенно в разных последовательностях (комбинациях), чередуясь с противоположным событием $\overline{A}$. Число таких возможных последовательностей совпадает с числом способов, которыми можно выбрать k мест из имеющихся n, не учитывая их порядка. Поэтому это число равно числу сочетаний из n по k, т. е. C_n^k.

Все C_n^k вариантов появления ровно k раз события A представляют собой несовместные события, вероятность каждого из которых равна $p^k q^{n-k}$. Поэтому по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность $P_n(k)$ равна сумме вероятностей всех указанных несовместных событий, т. е. $C_n^k p^k q^{n-k}$, в результате получаем формулу Бернулли (1). ◁

Пример 2. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найдем вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: **а)** ровно четыре; **б)** не менее четырех.

Решение. **а)** Мы имеем схему Бернулли с n = 5 испытаниями (посеяно пять семян). Событие A = {семя взошло}. По условию задачи $p = P(A) = 0{,}9$, тогда $q = 1 - p = 0{,}1$. Искомую вероятность $P_5(4)$ находим по формуле Бернулли:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}32805.$$

б) Искомое событие состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P_5(k \geq 4) = P_5(4) + P_5(5)$. Первое слагаемое найдено. Для вычисления второго слагаемого применяем снова формулу Бернулли:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^0 = 1 \cdot 0{,}9^5 \cdot 1 = 0{,}59049.$$

Следовательно, $P_5(m \geq 4) = 0{,}32805 + 0{,}59049 = 0{,}91854$. •

Пример 3. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. По мишени производится шесть независимых выстрелов. Найдем вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Решение. Пусть событие B – хотя бы одно попадание. Задачу удобнее решать при помощи нахождения вероятности противоположного события, т. е. события $\overline{B}$ – ни одного попадания в мишень. В данном примере $n = 6$; $p = 0{,}4$; $q = 1 - p = 0{,}6$. Применяя формулу Бернулли, получаем

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_6(0) = 1 - 0{,}6^6 \approx 0{,}953. \bullet$$

Предельные теоремы в схеме Бернулли

Точная формула Бернулли используется при сравнительно небольших сериях испытаний ($n < 20$). При *больших* значениях числа испытаний n для вычисления вероятностей $P_n(k)$ используются асимптотические (приближенные) формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

1. Формула Пуассона.

Т. 2 [Пуассон]. Если $n \to \infty$ и $p = p_n \to 0$ так, что $np_n \to a$, то при любом постоянном значении $k = 0; 1; 2; \ldots$

$$P_n(k) \to \frac{a^k \mathrm{e}^{-a}}{k!} \text{ при } n \to \infty.$$

Из этой теоремы вытекает ***формула Пуассона***: если в схеме Бернулли число испытаний n *велико*, а вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний *очень мала*, то

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{a^k\,\mathrm{e}^{-a}}{k!}, \quad a = np.}$$

Замечание 1. Формулу Пуассона применяют, когда событие A является *редким*, т. е. вероятность p *очень мала* (как правило, $p < 0{,}1$), но количество испытаний n *велико* и *среднее число успехов* $a = np$ незначительно ($a \le 10$).

Замечание 2. Если в схеме Бернулли вероятность p появления события A близка к 1, а число испытаний n велико, для вычисления вероятности $P_n(k)$ также можно использовать формулу Пуассона (считая успехом событие $\overline{A}$).

Пример 4. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найдем вероятность попадания в цель хотя бы двумя пулями, если число выстрелов равно 5000.

Решение. По условию $n = 5000$, $p = 0{,}001$. Поскольку число n велико, вероятность p мала, рассматриваемые события (попадания в цель при разных выстрелах) независимы, то применима формула Пуассона. Найдем $a = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$.

В Великой Отечественной войне реальное осуществление условий этого примера имело место при обстреливании самолета из пехотного оружия. Пулей самолет может быть подбит лишь при попадании в немногие уязвимые места – мотор, летчик, бензобаки и проч. Вероятность попадания в эти уязвимые места отдельным выстрелом весьма мала, но, как правило, по самолету вело огонь целое подразделение, и общее количество выстрелов, выпущенных по самолету, было значительным. В результате вероятность попадания хотя бы одной или двумя пулями имела заметную величину. Это обстоятельство было подмечено и практически.

Найдем вероятность $P_{5000}(k \ge 2)$ попадания в цель хотя бы 2 пулями. События $\{k \ge 2\}$ = {не менее 2 попаданий в цель} и $\{k < 2\}$ = {менее 2 попаданий в цель} – противоположные, поэтому $P_{5000}(k \ge 2) = 1 - P_{5000}(k < 2)$.

Вычислим вероятность того, что будет менее двух попаданий, т. е. либо ровно одно, либо ни одного:

$$P_{5000}(k<2) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) \approx \frac{5^0 \cdot \mathrm{e}^{-5}}{0!} + \frac{5^1 \cdot \mathrm{e}^{-5}}{1!} =$$
$$= \mathrm{e}^{-5} + 5\mathrm{e}^{-5} = 6\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}0404.$$

Следовательно, $P_{5000}(k \ge 2) \approx 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596.$ •

Оценка погрешности формулы Пуассона:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|P_n(k)-\frac{a^k e^{-a}}{k!}\right|\le\frac{2a}{n}\min\{a;\,2\}.$$

2. Локальная формула Муавра – Лапласа используется, если в схеме Бернулли число испытаний n *велико*, а вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний *значительно отличается от* 0 *и* 1 (*не очень мала и не очень велика*, $0{,}1<p<0{,}9$). Тогда

$$\boxed{P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)},$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ – ***функция Гаусса***.

Замечание 1. Существуют таблицы значений этой функции. При использовании этих таблиц следует иметь в виду следующие свойства функции Гаусса:

1) $\varphi(x)$ – четная функция, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

2) $\varphi(x)$ непрерывна и монотонно убывает при $x\ge 0$;

3) $\varphi(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

В силу последнего свойства на практике обычно полагают $\varphi(x)\approx 0$ при $x\ge 4$.

Замечание 2. Для того чтобы локальная формула Муавра – Лапласа давала хороший результат (довольно точное значение вероятности), нужно чтобы $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ было достаточно мало по абсолютной величине.

3. Интегральная формула Муавра – Лапласа используется при тех же предположениях, что и локальная (в схеме Бернулли n *велико*, p *не очень мало и не очень велико*). Тогда вероятность того, что число успехов (т. е. появлений события A) в n независимых испытаниях будет заключено в пределах от k_1 до k_2, может быть вычислена по формуле

$$\boxed{P_n(k_1 \le k < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt$ – ***функция Лапласа***.

Замечание 1. Существуют таблицы значений функции Лапласа, поскольку интеграл $\int \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt$ – неберущийся. При использовании таблиц следует иметь в виду следующие свойства функции Лапласа:

1) $\Phi(x)$ – нечетная функция, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
2) $\Phi(x)$ непрерывна и монотонно возрастает при $x \in \mathbb{R}$;
3) $\Phi(x) \to 0{,}5$ при $x \to +\infty$.

В силу последнего свойства на практике обычно полагают $\Phi(x) \approx 0{,}5$ при $x \ge 5$.

Замечание 2. Более точное значение искомой вероятности получается по формуле

$$P_n(k_1 \le k < k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Замечание 3. При использовании таблиц необходимо следить за тем, какая именно функция затабулирована и какие свойства имеет эта функция. В некоторых учебниках функция Лапласа определяется иначе, например,

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{2} + \Phi(x);$$

$$\Phi_2(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = 2\Phi(x)$$

и т. д. Тогда интегральная формула Муавра – Лапласа может изменить свой вид. Например,

$$P_n(k_1 \le k < k_2) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi_2\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_2\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)\right),$$

в случае функции $\Phi_1(x)$ вид формулы не изменяется.

Пример 5. Какова вероятность того, что при 400 независимых подбрасываниях правильной монеты герб выпадет: **а)** ровно 195 раз; **б)** не менее 195 раз?

Решение. **а)** По условию задачи n = 400 – велико; p = 0,5 – не очень мало; $q = 1 - p = 0{,}5$; k = 195. Применим локальную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_{400}(195) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \varphi\left(\frac{195 - 400 \cdot 0{,}5}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \right) = \frac{1}{10} \varphi(-0{,}5).$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(-0{,}5) = \varphi(0{,}5) \approx 0{,}3521$. Следовательно,

$$P_{400}(195) \approx \frac{1}{10} \cdot 0{,}3521 = 0{,}03521.$$

б) В этом случае применима интегральная формула Муавра-Лапласа, так как требуется найти $P_{400}(k \geq 195) = P_{400}(195 \leq k \leq 400)$. По условию задачи n = 400; p = 0,5; k_1 = 195; k_2 = 400. Учитывая свойства функции Лапласа, получим

$$P_{400}(195 \leq k \leq 400) \approx \Phi\left(\frac{400 - 400 \cdot 0{,}5}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \right) - \Phi\left(\frac{195 - 400 \cdot 0{,}5}{\sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \right) =$$

$$= \Phi(20) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(20) + \Phi(0{,}5) \approx 0{,}5 + 0{,}1915 = 0{,}6915. \bullet$$

Оценка погрешности интегральной формулы Муавра – Лапласа следует из теоремы Берри – Эссеена:

$$\max_{x>0} \left| P_n(k < x) - \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}} \right) + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}.$$

§ 7. Понятие случайной величины. Способы задания случайных величин

До сих пор мы рассматривали случайные события и их вероятности. Случайные события – это, по сути, качественная характеристика случайного результата опыта, но этот результат можно характеризовать и количественно.

Перейдем к рассмотрению *случайных величин* (СВ), т. е. таких величин, которые принимают те или иные числовые значения в зависимости от исхода случайного эксперимента, причем до проведения эксперимента нельзя определить, какое именно значение примет эта величина.

Пример 1. 1) Число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть СВ, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

2) число успехов в n испытаниях в схеме Бернулли – СВ, принимающая значения 0, 1, …, n;

3) число бракованных изделий в данной партии – СВ, принимающая целые значения от 0 до n, где n – объем партии;

4) число промахов до первого попадания – СВ, принимающая целые значения 0, 1, 2, …;

5) если точка брошена наудачу в круг радиуса R, то расстояние от центра круга до этой точки, – СВ, принимающая значения из промежутка $[0; R]$;

6) прирост веса домашнего животного за месяц есть СВ, которая может принять значение из некоторого промежутка;

7) дальность броска мяча – СВ, принимающая неотрицательные значения.•

Случайность величин имеет ту же природу, что и случайность событий, а различаются они лишь математической природой. Случайная величина – это, по сути, числовая функция элементарного события, определенное обобщение понятия случайного события.

Принятие случайной величиной конкретного значения представляет собой некоторое событие, следовательно все теоремы, рассмотренные ранее, можно применять для случайных величин.

Будем обозначать случайные величины греческими буквами ξ, η, ζ и т. д.

Дадим строгое определение случайной величины.

Опр. 1. Пусть задано некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. ***Случайной величиной* (*СВ*)** называется числовая функция $\xi = \xi(\omega)$, заданная на множестве Ω элементарных событий:

$$\xi = \xi(\omega) : \Omega \to \mathbb{R},$$

и обладающая тем свойством, что для любого действительного x существует (определена) вероятность

$$P(\xi < x) = P(\text{СВ } \xi \text{ примет значение меньше } x),$$

т. е. событие $A = \{\omega : \xi(\omega) < x\} = \{$СВ ξ примет значение меньше $x\} \in \mathfrak{F}$.

Замечание. Если пространство Ω элементарных событий конечно или счетно, то любая функция, определенная на Ω, будет случайной величиной.

В общем случае необходимо требовать, чтобы функция была *измеримой*, т. е. обладала указанным свойством.

Мы будем рассматривать два основных типа случайных величин: *дискретные* и *непрерывные*.

Опр. 2. СВ называется ***дискретной***, если она принимает конечное или счетное множество отдельных изолированных значений.

Непрерывная СВ принимает все значения из некоторого промежутка (конечного или бесконечного) или объединения промежутков. Строгое определение непрерывной СВ будет дано ниже.

Пример 1 (продолжение). СВ в пунктах **1)**, **2)**, **3)**, **4)** – дискретные; в пунктах **5)**, **6)**, **7)** – непрерывные.•

Опр. 3. ***Законом распределения СВ*** называется всякое соответствие между возможными значениями СВ и соответствующими им вероятностями. О СВ говорят, что она *распределена* по данному закону или *подчинена* данному закону распределения.

Закон распределения полностью задает СВ.

Функция распределения

Универсальным способом задания закона распределения СВ является функция распределения, поскольку она может быть определена для любой случайной величины.

Опр. 4. ***Функцией распределения*** СВ ξ называется функция, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$ с помощью равенства

$$\boxed{F(x) = P(\xi < x),} \tag{1}$$

т. е. при каждом $x \in \mathbb{R}$ значение $F(x)$ выражает вероятность того, что СВ ξ примет значение, меньшее x.

Геометрически равенство (1) можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что СВ ξ примет значение, которое изображается на числовой прямой точкой, лежащей левее точки x, т. е. случайная точка с абсциссой ξ попадет в интервал $(-\infty;\ x)$ (см. рис. 11).

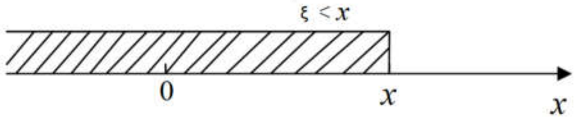


Рис. 11. К понятию функции распределения

Опр. 5. СВ называется ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна во всех точках и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Основные свойства функции распределения СВ.

1. Функция $F(x)$ ограничена: $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из того, что значение $F(x)$ выражает вероятность.

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$.

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим события $A = \{\xi < x_1\}$, $B = \{x_1 \le \xi < x_2\}$, $C = \{\xi < x_2\}$. Тогда $C = A + B$, причем события A и B несовместны, поэтому $P(C) = P(A) + P(B)$. Поскольку $P(C) = F(x_2)$, $P(A) = F(x_1)$, то $F(x_2) = F(x_1) + P(B)$. Учитывая, что $P(B) \ge 0$, получаем $F(x_1) \le F(x_2)$.

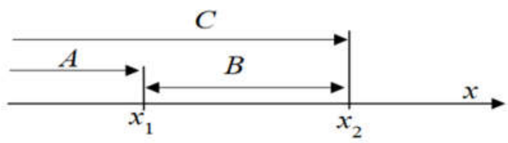


Рис. 12. К доказательству свойств функции распределения

Кроме того, геометрически (рис. 12) очевидно, что при перемещении точки x вправо по числовой оси вероятность попадания случайной точки с абсциссой ξ в интервал $(-\infty;\, x)$ не может уменьшаться. ◁

3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

При неограниченном перемещении точки x влево по числовой оси (рис. 11) попадание случайной точки с абсциссой ξ левее x в пределе становится невозможным событием; естественно полагать, что вероятность этого события стремится к 0. Аналогично, при неограниченном перемещении точки x вправо по числовой оси попадание случайной точки с абсциссой ξ левее x в пределе становится достоверным событием, вероятность которого равна 1.

4. Функция $F(x)$ непрерывна слева в каждой точке x, т. е. $F(x-0)=F(x), x\in\mathbb{R}$.

Замечание. Всякая функция $F(x)$, обладающая свойствами 1–4, может быть функцией распределения некоторой СВ.

5. Вероятность попадания СВ ξ в полуинтервал $[x_1; x_2)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах полуинтервала:

$$\boxed{P(x_1\le\xi<x_2)=F(x_2)-F(x_1).} \qquad (2)$$

Доказательство следует из доказательства свойства 2, где было показано, что если $B=\{x_1\le\xi<x_2\}$, то $P(B)=F(x_2)-F(x_1)$. ◁

6. $P(\xi=x_0)=F(x_0+0)-F(x_0)$.

Доказательство следует из свойства 5 при $x_1=x_0; x_2=x\to x_0+0$:

$$P(\xi=x_0)=\lim_{x\to x_0+0}P(x_0\le\xi<x)=$$

$$=\lim_{x\to x_0+0}(F(x)-F(x_0))=F(x_0+0)-F(x_0). \triangleleft$$

Отметим, что значение этого предела зависит от того, непрерывна ли функция $F(x)$ в точке x_0 или терпит разрыв. Если функция в точке x_0 совершает скачок, то предел равен величине этого скачка. Если же $F(x)$ непрерывна в точке x_0, то вероятность того, что СВ ξ примет значение в точности равное x_0, равна 0. Последнее утверждение не означает, что событие $\{\xi=x_0\}$ невозможно; оно возможно, но с нулевой вероятностью.

Следствие 1. Если СВ ξ непрерывная, то $P(\xi=x_0)=0$.

Следствие 2. Для непрерывной СВ ξ формула (2) справедлива с любыми знаками неравенств, как со строгими, так и с нестрогими.

Действительно, если ξ – непрерывная СВ, то $P(\xi=x_1)=0$, $P(\xi=x_2)=0$ и

$$P(x_1\le\xi\le x_2)=P(x_1\le\xi<x_2)+P(\xi=x_2)=F(x_2)-F(x_1);$$

$$P(x_1<\xi<x_2)=P(x_1\le\xi<x_2)-P(\xi=x_1)=F(x_2)-F(x_1);$$

$$P(x_1 < \xi \le x_2) = P(x_1 \le \xi < x_2) - P(\xi = x_1) + P(\xi = x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Ряд распределения дискретной случайной величины

Для описания дискретных СВ на ряду с функцией распределения $F(x)$ используется ряд распределения вероятностей.

Если СВ ξ принимает конечное или счетное число отдельных значений, т. е. если это дискретная СВ, то для того, чтобы она была полностью задана, достаточно перечислить все ее возможные значения x_k, $k = 1, 2, \ldots,$ и указать, с какими вероятностями p_k она их принимает.

Опр. 6. ***Рядом распределения*** дискретной СВ ξ называется таблица, в которой перечислены все возможные значения x_k, $k = 1, 2, \ldots,$ этой СВ и соответствующие им вероятности $p_k = P(\xi = x_k)$, причем: 1) $p_k \ge 0$; 2) $p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots = 1$.

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$

Пример 2. Правильную монету подбросили наудачу 3 раза. Рассмотрим СВ ξ – число выпавших гербов. Найдем ряд распределения и функцию распределения этой СВ.

Решение. Чтобы составить ряд распределения СВ ξ, определим, какие значения может принимать эта СВ и с какими вероятностями. При трех бросках монеты герб может выпасть от 0 до 3 раз включительно, это и есть возможные значения СВ ξ.

Для нахождения вероятностей заметим, что мы имеем схему Бернулли с $n = 3$ испытаниями (монета подброшена 3 раза) и $p = \dfrac{1}{2}$ (вероятность выпадения герба). Тогда $q = 1 - p = \dfrac{1}{2}$. Искомые вероятности каждого из возможных значений СВ ξ находим по формуле Бернулли:

$$P(\xi = 0) = C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125;$$

$$P(\xi=1)=C_3^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}=0{,}375;$$

$$P(\xi=2)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}=0{,}375;$$

$$P(\xi=3)=C_3^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

Следовательно, закон распределения СВ ξ может быть задан таблицей

ξ	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Заметим, что сумма вероятностей различных значений дискретной СВ ξ равна 0,125 + 0,375 + 0,375 + 0,175 = 1.

Найдем значение функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ для каждого действительного x. Из ряда распределения в таблице видно, что СВ ξ может принимать значения 0, 1, 2, 3. Для вычисления вероятностей $P(\xi < x)$ нужно определить, какие значения x_m СВ ξ удовлетворяют неравенству $x_k < x$, и просуммировать их вероятности. В зависимости от значения x получим:

при $x \le 0$ имеем $F(x) = 0$, так как ни одно из значений 0, 1, 2, 3 не удовлетворяет указанному неравенству;

при $0 < x \le 1$ получим $F(x) = P(\xi = 0) = 0{,}125$ (условию $x_k < x$ удовлетворяет только значение $x_k = 0$);

при $1 < x \le 2$: $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}5$ (значения 0 и 1 удовлетворяют неравенству $x_k < x$);

при $2 < x \le 3$: $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875$;

при $x > 3$: $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 + 0{,}125 = 1$.

Получаем:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 0{,}125 & \text{при} \quad 0<x\le 1,\\ 0{,}5 & \text{при} \quad 1<x\le 2,\\ 0{,}875 & \text{при} \quad 2<x\le 3,\\ 1 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

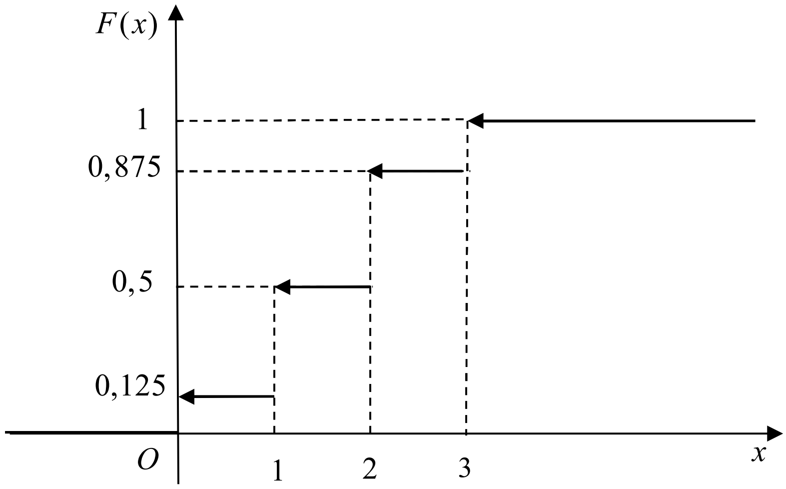


Рис. 13. График функции распределения дискретной СВ

График функции распределения представлен на рис. 13. •

Замечание. График функции распределения любой дискретной СВ имеет ступенчатый вид, причем функция распределения терпит разрывы в точках x_k со скачками $p_k = P(\xi = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Для непрерывной СВ, принимающей значения из некоторого интервала, перечислить все ее возможные значения и составить ряд распределения, невозможно.

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Закон распределения непрерывной СВ обычно задают функцией распределения или плотностью распределения.

Пусть имеется непрерывная случайная величина ξ с функцией распределения $F(x)$, которую мы предположим непрерывной и дифференцируемой. Для непрерывной функции распределения

$F(x)$ вероятность любого отдельного значения случайной величины должна быть равна нулю, т. е. не должно быть скачков ни в одной точке. Такие события – возможные, но с нулевой вероятностью – появляются только при рассмотрении опытов, не сводящихся к схеме случаев. Это аналогично телу, имеющему определенную массу, но ни одна из точек внутри тела конечной массой не обладает. Малый объем обладает конечной массой, но она приближается к нулю по мере уменьшения объема и в пределе равна нулю для точки. То есть при непрерывном распределении вероятностей вероятность попадания на сколь угодно малый участок отлична от нуля, тогда как вероятность попадания в строго определенную точку в точности равна нулю.

Вычислим вероятность попадания этой случайной величины на участок от x до $x + \Delta x$:

$$P(x \le \xi < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

т. е. эта вероятность равна приращению функции распределения на этом участке. Рассмотрим отношение этой вероятности к длине участка $\dfrac{P(x \le \xi < x + \Delta x)}{\Delta x}$, т. е. *среднюю вероятность*, приходящуюся на единицу длины на этом участке, и будем приближать Δx к 0. В пределе получим производную от функции распределения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x).$$

Функция $f(x)$ – производная функции распределения – характеризует как бы *плотность*, с которой распределяются значения вероятности СВ в данной точке.

Опр. 7. ***Плотностью распределения*** (или ***плотностью вероятностей***) непрерывной СВ ξ называется производная ее функции распределения:

$$\boxed{f(x) = F'(x).}$$

Утв. 1. Вероятность попадания непрерывной СВ ξ в промежуток $[x_1; x_2)$ равна интегралу от плотности распределения по этому промежутку:

$$\boxed{P(x_1 \le \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx.} \tag{3}$$

Доказательство. Функция распределения является первообразной для плотности распределения, поэтому по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1),$$

что, в силу свойства (2) функции распределения, равно вероятности $P(x_1 \le \xi < x_2)$. ◁

Геометрически вероятность попадания СВ ξ на промежуток $[x_1; x_2)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятности, осью абсцисс и отрезками прямых $x = x_1$ и $x = x_2$.

Поскольку вероятность того, что непрерывная СВ примет заранее указанное значение, равна нулю, т. е. $P(\xi = x_0) = 0$ (хотя это событие не обязательно невозможное), то для непрерывной СВ

$$P(x_1 \le \xi \le x_2) = P(x_1 < \xi \le x_2) = P(x_1 \le \xi \le x_2) =$$

$$= P(x_1 \le \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Из (3) и свойств функции распределения можно вывести формулу, выражающую функцию распределения через плотность распределения.

Утв. 2. Значение $F(x)$ функции распределения непрерывной СВ ξ равно интегралу от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до x:

$$\boxed{F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.} \tag{4}$$

Функция распределения и плотность распределения выражаются друг через друга и, следовательно, для непрерывной СВ каждая из них является исчерпывающей характеристикой. В отличие от функции распределения, плотность распределения не является универсальным способом задания закона распределения СВ, поскольку она существует только для непрерывных СВ.

Замечание. Иногда функцию $f(x)$ называют также ***дифференциальной функцией распределения***, а $F(x)$ – ***интегральной функцией распределения*** непрерывной СВ ξ.

Основные свойства плотности распределения.

1. Плотность распределения есть неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Это свойство вытекает из того, что функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция.

2. Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Это следует из формулы (3) и из того, что $F(+\infty) = 1$.

Геометрически эти два свойства означают, что график плотности распределения лежит не ниже оси Ox и площадь под графиком плотности равна единице.

Пример 3. Плотность распределения СВ ξ задана формулой $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$, $-\infty < x < +\infty$. Найдем: **а)** значение константы C; **б)** вид функции распределения; **в)** вероятность попадания СВ ξ в интервал $(-1; 1)$.

Решение. **а)** Значение константы C найдем из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Вычисляя

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2}dx = C \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = C\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = C\pi = 1,$$

получим $C = \dfrac{1}{\pi}$. Следовательно, плотность распределения СВ ξ имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$.

б) Учитывая связь между плотностью и функцией распределения, по формуле (4) найдем

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}t\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}.$$

в) Вероятность попадания СВ ξ в интервал $(-1;1)$ вычислим по формуле (3):

$$P(-1<\xi<1)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.\bullet$$

§ 8. Числовые характеристики случайных величин

Ряд распределения, функция распределения или плотность вероятностей полностью задают СВ. Однако часто встречаются задачи, когда достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, которые описывают существенные свойства распределения СВ.

Основными числовыми характеристиками СВ являются *математическое ожидание* и *дисперсия*. Математическое ожидание – это в некотором смысле среднее значение СВ (с учетом ее более и менее вероятных значений). Дисперсия характеризует степень разброса значений СВ относительно ее математического ожидания.

Математическое ожидание случайной величины

Опр. 1. ***Математическим ожиданием дискретной СВ*** ξ называется число, равное сумме произведений всех значений СВ ξ на соответствующие им вероятности:

$$\boxed{M\xi=\sum_k x_k p_k=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_kp_k+\ldots} \qquad (1)$$

(предполагается, что ряд в правой части этого равенства абсолютно сходится).

Опр. 2. ***Математическим ожиданием непрерывной СВ*** ξ называется число, равное

$$\boxed{M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx,} \qquad (2)$$

где $f(x)$ – плотность распределения вероятностей СВ ξ, при условии, что этот несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < \infty.$

Математическое ожидание $M\xi$ характеризует среднее значение СВ ξ (с учетом ее более и менее вероятных значений).

Замечание. Существуют случайные величины, не имеющие математического ожидания, так как интеграл (2) или ряд (1) в случае дискретной СВ, имеющей бесконечное множество значений, могут быть расходящимися.

Пример 1. Дискретная СВ, заданная рядом распределения

ξ	2	4	8	…	2^k	…
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…	$\frac{1}{2^k}$	…

не имеет математического ожидания, так как соответствующий ряд расходится:

$$M\xi = 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{8} + \ldots + 2^k\cdot\frac{1}{2^k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty. \bullet$$

Пример 2. Непрерывная СВ, заданная плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < +\infty$, не имеет математического ожидания, так как соответствующий интеграл расходится:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int\limits_A^B \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\Big|_A^B =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\lim_{B\to+\infty} \ln(1+B^2) - \lim_{A\to-\infty} \ln(1+A^2) \Big),$$

поскольку оба предела равны ∞. •

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной, т. е. если $P(\xi = c) = 1$, то $M\xi = c$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(c\xi) = cM\xi, \text{ если } c = \text{const}.$$

Упражнение. Доказать свойства 1, 2.

3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных величин ξ и η равно сумме (разности) их математических ожиданий:

$$M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta.$$

4. Математическое ожидание произведения двух *независимых* случайных величин ξ и η равно произведению их математических ожиданий:

$$M(\xi\eta) = M\xi M\eta, \text{ если } \xi \text{ и } \eta - \textit{независимые} \text{ СВ}.$$

Опр. 3. Две случайные величины ξ и η называются ***независимыми***, если для любых числовых множеств X и Y события $A = \{\xi \in X\}$ и $B = \{\eta \in Y\}$ являются независимыми.

Иными словами, две СВ независимы, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

5. Если $g(x)$ – произвольная числовая функция, то:

$Mg(\xi) = \sum\limits_k g(x_k)p_k$ для дискретной СВ ξ;

$Mg(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ для непрерывной СВ ξ.

Дисперсия случайной величины

Опр. 4. ***Дисперсией*** СВ ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения этой СВ от ее математического ожидания:

$$\boxed{D\xi = M(\xi - M\xi)^2.}$$

Дисперсия СВ ξ характеризует разброс (рассеяние) значений СВ ξ вокруг ее математического ожидания.

Для вычисления дисперсии в большинстве случаев удобнее использовать следующую формулу.

Т 1. Дисперсия СВ равна разности математического ожидания квадрата СВ и квадрата математического ожидания СВ:

$$\boxed{D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2.}$$

Доказательство. Обозначим $M\xi = a.$ Тогда, используя свойства математического ожидания, получим

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi - a)^2 = M(\xi^2 - 2a\xi + a^2) =$$

$$= M(\xi^2) - 2aM\xi + a^2 = M(\xi^2) - 2a \cdot a + a^2 = M(\xi^2) - a^2. \triangleleft$$

Свойства дисперсии.

1. $D\xi \geq 0.$

2. Дисперсия постоянной величины равна 0: если $P(\xi = c) = 1,$ то $D\xi = 0.$

3. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате:

$$D(c\xi) = c^2 D\xi, \text{ если } c = \text{const}.$$

4. Дисперсия суммы двух *независимых* случайных величин ξ и η равна сумме их дисперсий:

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

5. Дисперсия разности двух *независимых* случайных величин ξ и η равна сумме их дисперсий:

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta.$$

Доказательство.

$$D(\xi - \eta) = D(\xi + (-\eta)) = D\xi + D(-1 \cdot \eta) = D\xi + (-1)^2 D\eta = D\xi + D\eta,$$

если ξ и η – независимые СВ. $\triangleleft$

Упражнение. Доказать свойства 1–4.

Среднее квадратическое отклонение

Математическое ожидание СВ измеряется в тех же единицах, что и сама СВ, а дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности СВ. Это значит, что если рассматриваемая СВ –

дальность прыжка спортсмена, измеряемая в метрах, то ее математическое ожидание будет измеряться в метрах, а дисперсия – в метрах квадратных.

Для того чтобы получить оценку рассеяния, имеющую ту же размерность, что и сама СВ, вводят понятие стандартного или среднего квадратического отклонения.

Опр. 5. ***Средним квадратическим отклонением*** СВ ξ называется квадратный корень из дисперсии этой СВ:

$$\boxed{\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}.}$$

Из определения следует, что $\sigma_\xi \geq 0$ для любой СВ.

§ 9. Основные законы распределения дискретных случайных величин

Для того чтобы задать закон распределения дискретной СВ, достаточно задать ее ряд распределения, т. е. перечислить все возможные значения, которые может принимать эта СВ, и соответствующие им вероятности. Некоторые типы распределений встречаются наиболее часто и имеют свои названия.

1. Равномерное дискретное распределение.

Опр. 1. Дискретная СВ ξ ***распределена равномерно*** на множестве $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$, если она принимает значения из этого множества с одинаковыми вероятностями, т. е.

$$P(\xi = x_1) = P(\xi = x_2) = ... = P(\xi = x_n) = \frac{1}{n}.$$

Ряд распределения такой СВ имеет вид:

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

Проверим *корректность определения*: $\sum_{k=1}^{n} p_k = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Математическое ожидание и дисперсия этой СВ равны

$$M\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k; \qquad D\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2.$$

Пример 1. Число очков, выпавших при одном подбрасывании правильного кубика – СВ, распределенная равномерно на множестве $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.•

2. Бернуллиевские СВ.

Опр. 2. СВ ξ, принимающая только два значения 0 и 1 с вероятностями $P(\xi = 1) = p; P(\xi = 0) = 1 - p = q,$ называется ***бернуллиевской СВ*** с параметром p.

Запишем ряд распределения этой СВ:

ξ	0	1
P	q	p

Очевидно, $\sum_{k=1}^{n} p_k = q + p = 1.$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию этой СВ:

$$M\xi = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

$$D\xi = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Таким образом, для бернуллиевской СВ

$$M\xi = p; \qquad D\xi = pq.$$

3. Биномиальное распределение (распределение Бернулли).

Опр. 3. СВ ξ имеет ***биномиальное распределение*** с параметрами n и p, если она принимает значения $0; 1; 2; ...; n$ с вероятностями

$$\boxed{P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p, k = 0; 1; 2; ...; n.}$$

Ряд распределения биномиальной СВ имеет вид:

ξ	0	1	…	k	…	n
P	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Корректность определения следует из формулы бинома Ньютона, так как

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = q^n + npq^{n-1} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + p^n = (q+p)^n = 1.$$

Биномиальный закон распределения имеет место в том случае, когда СВ ξ выражает число появлений события A (число успехов) при n независимых испытаниях в схеме Бернулли.

Утв. 1. Математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p, равны

$$\boxed{M\xi = np; \quad D\xi = npq.}$$

Доказательство. Представим СВ ξ, имеющую биномиальное распределение с параметрами n и p, как сумму СВ:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

где

$$\xi_i = \begin{cases} 1, \text{ если событие } A \text{ в } i\text{-м испытании произошло,} \\ 0, \text{ если событие } A \text{ в } i\text{-м испытании не произошло.} \end{cases}$$

Тогда $P(\xi_i = 1) = p; P(\xi_i = 0) = q,$ т. е. ξ_i – бернуллиевские СВ с параметром p. При этом все слагаемые $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно независимы, поэтому

$$M\xi = M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n = p + p + \ldots + p = np;$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n = pq + pq + \ldots + pq = npq.$$

$\triangleleft$

4. Распределение Пуассона.

Опр. 4. СВ ξ распределена по ***закону Пуассона*** с параметром a, если она принимает значения $0; 1; 2; \ldots; k; \ldots$ с вероятностями

$$\boxed{P(\xi = k) = \frac{a^k \mathrm{e}^{-a}}{k!}, \text{ где } k = 0; 1; 2; \ldots.}$$

Ряд распределения пуассоновской СВ имеет вид:

ξ	0	1	2	…	k	…

P	e^{-a}	$a\,e^{-a}$	$\dfrac{a^2 e^{-a}}{2!}$	$\ldots$	$\dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$	$\ldots$

Докажем *корректность определения*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k e^{-a}}{k!} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} e^{a} = 1.$$

Утв. 2. Математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей распределение Пуассона с параметром a, равны

$$\boxed{M\xi = a; \quad D\xi = a.}$$

Доказательство.

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{a^k e^{-a}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k e^{-a}}{(k-1)!} = a\,e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= a\,e^{-a} \left(\frac{a^0}{0!} + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^k}{k!} + \ldots \right) = a\,e^{-a} e^{a} = a;$$

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{a^k e^{-a}}{k!} = e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)+1}{(k-1)!} a^k = e^{-a} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{(k-2)!} + e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{(k-1)!} =$$

$$= a^2 e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} + a = a^2 + a,$$

откуда $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = a^2 + a - a^2 = a.$ ◁

Закон распределения Пуассона является хорошим приближением для биномиального распределения при больших n и малых p (или $1 - p$). Поэтому закон распределения Пуассона называют *законом редких явлений*.

По закону Пуассона, например, распределены: число вызовов, регистрируемых в call-центре за определенный промежуток времени; число родившихся за определенный период (день, неделю) близнецов; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии; число α-частиц, испускаемых радиоактивным источником, и т. д. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной *средней интенсивностью*, характеризующейся параметром $a = np$.

Часто закон Пуассона используется в теории массового обслуживания, так как считается, что число требований на обслуживание, поступивших за единицу времени, распределено по закону Пуассона.

5. Геометрическое распределение.

Пример 2. Составим ряд распределения СВ ξ – числа промахов до первого попадания, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна p.

Решение. Рассмотрим события

A_i = {попадание при i-м выстреле}, $i = 0; 1; 2; ...$.

Тогда $P(A_i) = p; P(\overline{A_i}) = 1 - p = q.$

СВ ξ может принимать значения $0; 1; 2; ...; k; ...$. Определим вероятности этих значений:

$$P(\xi = 0) = P(A_1) = p;$$

$$P(\xi = 1) = P(\overline{A_1} A_2) = qp;$$

$$P(\xi = 2) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3) = q^2 p;$$

$$\ldots;$$

$$P(\xi = k) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_k} A_{k+1}) = q^k p.$$

Следовательно, закон распределения СВ ξ может быть задан таблицей

ξ	0	1	2	…	k	…
P	p	qp	q^2p	…	q^kp	…

Заметим, что сумма вероятностей различных значений СВ ξ равна (в силу формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p = p + qp + q^2 p + \ldots + q^k p + \ldots = \frac{p}{1-q} = 1. \bullet$$

Опр. 5. Дискретная СВ ξ имеет ***геометрическое распределение*** с параметром p, если она принимает значения $0; 1; 2; ...; k; ...$ с вероятностями

$$P(\xi = k) = q^k p, \text{ где } q = 1 - p, \; k = 0; 1; 2; ....$$

Геометрическое распределение имеет СВ ξ, равная числу испытаний Бернулли до первого успешного.

Название «геометрическое распределение» объясняется тем, что вероятности различных значений этой СВ образуют геометрическую прогрессию p, qp, q^2p, q^3p, ...

Утв. 3. Математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей геометрическое распределение с параметром p, равны

$$M\xi = \frac{q}{p}; \qquad D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

Доказательство.

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = qp\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = qp\sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'_q = qp\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'_q =$$

$$= qp\left(\frac{q}{1-q}\right)'_q = qp\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = qp\frac{1}{(1-q)^2} = qp\frac{1}{p^2} = \frac{q}{p};$$

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k p = qp\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = qp\sum_{k=1}^{\infty} (kq^k)'_q =$$

$$= qp\left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^k\right)'_q = qp\left(q\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\right)'_q = qp\left(q \cdot \frac{1}{(1-q)^2}\right)'_q =$$

$$= qp\left(\frac{1}{(1-q)^2} + q \cdot \frac{2}{(1-q)^3}\right) = qp \cdot \frac{1-q+2q}{(1-q)^3} = qp\frac{1+q}{p^3} = \frac{q+q^2}{p^2},$$

откуда $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \dfrac{q+q^2}{p^2} - \dfrac{q^2}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$. $\triangleleft$

6. Гипергеометрическое распределение.

Пример 3. В урне N шаров, из них K белых. Из урны один за другим извлекают n шаров. Определим вероятность того, что среди них ровно k белых шаров, если выбор производится: **а)** без возвращения; **б)** с возвращением.

Решение. Рассмотрим СВ ξ – число белых шаров среди извлеченных. Найдем вероятность $P(\xi = k)$ в каждом случае.

а) По классическому определению вероятности получим

$$P(\xi = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

б) Производится *n* извлечений в одних и тех же условиях, вероятность извлечения белого шара каждый раз одна и та же $p = \frac{K}{N}$, т. е. имеет место схема Бернулли, поэтому искомая вероятность

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}. \bullet$$

Опр. 6. Пусть *n*, *K*, *N* – натуральные числа, $K \le N, n \le N, n + K \le N$. СВ ξ имеет ***гипергеометрическое распределение*** с параметрами *n*, *K*, *N*, если она принимает значения $0; 1; 2; ...; \min\{n; K\}$ с вероятностями

$$P(\xi = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, \text{ где } k = 0; 1; 2; ...; \min\{n; K\}.$$

Утв. 4. Математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами *n*, *K*, *N*, равны

$$M\xi = n\frac{K}{N}; \quad D\xi = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Гипергеометрическое распределение является основным в практике статистического приемочного контроля качества продукции и в задачах, связанных с организацией выборочных обследований.

В предельном случае, когда $N \to \infty$, но $p = \frac{K}{N}$ и *n* остаются фиксированными, гипергеометрическое распределение сходится к биномиальному. Рекомендуется применять биномиального распределение вместо гипергеометрического, если $n < 0{,}1N$.

Пример 3 (продолжение). В урне $N = 100$ шаров, из них $K = 40$ белых. Из урны один за другим извлекают $n = 10$ шаров. Сравним вероятности того, что среди них ровно *k* белых шаров, если выбор производится: **а)** без возвращения; **б)** с возвращением.

k	0	1	2	3	4	5

а)	0,004	0,034	0,115	0,220	0,264	0,208
б)	0,006	0,040	0,121	0,215	0,251	0,201

k	6	7	8	9	10
а)	0,108	0,037	0,008	0,0009	0,00005
б)	0,111	0,042	0,011	0,0016	0,0001

Таким образом, при таком соотношении параметров задачи законы распределения СВ, имеющих гипергеометрический и биномиальный законы распределения, различаются незначительно.•

§ 10. Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Для того чтобы задать закон распределения непрерывной СВ, достаточно задать ее функцию распределения или плотность распределения. Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся непрерывные распределения.

1. Непрерывное равномерное распределение.

Опр. 1. Непрерывная СВ ξ ***распределена равномерно*** на отрезке $[a;b]$, если ее плотность распределения постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю.

Таким образом, плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} c & \text{при } x\in[a;b], \\ 0 & \text{при } x\notin[a;b], \end{cases}$$

причем значение константы c можно определить из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Вычисляя

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{a} 0dx+\int\limits_{a}^{b} cdx+\int\limits_{b}^{+\infty} 0dx=0+c(b-a)+0=c(b-a)=1,$$

получим $c=\dfrac{1}{b-a}$. Следовательно, плотность распределения имеет вид

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in[a;b],\\ 0 \quad \text{при } x\notin[a;b];\end{cases}}$$

график плотности распределения изображен на рис. 14.

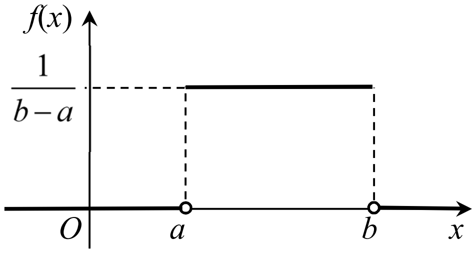


Рис. 14. Плотность равномерного на $[a;b]$ распределения

Для того чтобы СВ подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала и были равновероятны внутри этого интервала. Примером равномерно распределенной СВ может служить время ожидания пассажиром транспорта, курсирующего с определенным интервалом, или ошибка округления. Так, ошибка округления числа до ближайшего целого есть СВ, распределенная равномерно на промежутке $[-0{,}5;\,0{,}5)$; если мы измеряем некоторую физическую величину, например, длину с точностью до 1 см, то ошибка округления этой величины (длины) будет распределена равномерно на $[-0{,}5 \text{ см};\,0{,}5 \text{ см})$.

Пример 1. Поезда метрополитена идут с интервалом 5 мин. Какова вероятность того, что пассажир, приходя на станцию метро в случайный момент времени, будет ожидать поезд не более 2 мин?

Решение. Пусть ξ – время ожидания. СВ ξ распределена равномерно на промежутке $[0;\,5)$. Тогда плотность вероятностей этой СВ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5} & \text{при } x\in[0;\,5),\\ 0 \quad \text{при } x\notin[0;\,5);\end{cases}$$

вероятность того, что СВ примет значение не более 2, равна

$$P(\xi \le 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{5} dx = 0,4. \bullet$$

Равномерно распределенная на $[a;\ b]$ СВ характеризуется тем свойством, что вероятность ее попадания в некоторый интервал, *лежащий внутри отрезка* $[a;\ b]$, зависит только от длины этого интервала и не зависит от его положения:

$$\boxed{P(x_1 < \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}, \quad \text{если} \quad a \le x_1 < x_2 \le b.}$$

Найдем функцию распределения равномерно распределенной на $[a;\ b]$ СВ, используя формулу, выражающую функцию распределения через плотность распределения. Рассмотрим три случая:

если $x < a$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$

при $x \in [a; b]$ получим

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dx = \frac{x-a}{b-a};$$

при $x > b$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} dx + \int_{b}^{x} 0dx = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{при} \quad x \in [a;b], \\ 1 \quad \text{при} \quad x > b; \end{cases}$$

ее график изображен на рис. 15.

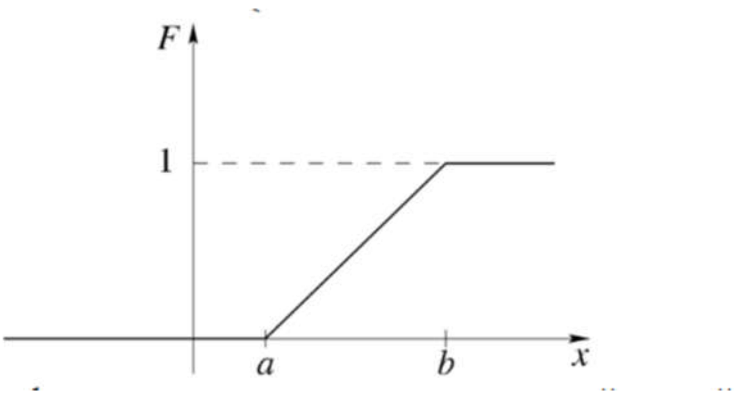


Рис. 15. Функция равномерного на $[a;b]$ распределения

Утв. 1. Числовые характеристики равномерного распределения:

$$\boxed{M\xi = \frac{a+b}{2}; \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma_\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.}$$

Доказательство.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx + \int_b^{+\infty} 0dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b + 0 = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2};$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3},$$

тогда

$$D\xi = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12} =$$

$$= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12},$$

а значит, $\sigma_\xi = \sqrt{\dfrac{(b-a)^2}{12}} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$. ◁

2. Показательное (экспоненциальное) распределение.

Опр. 2. Непрерывная СВ ξ имеет ***показательное (экспоненциальное) распределение*** с параметром λ, если ее плотность распределения имеет вид

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\ge 0,\\ 0 \quad \text{при} \quad x<0.\end{cases}}$$

Упражнение 1. Доказать корректность определения, т. е. показать, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

Упражнение 2. Показать, что функция показательного распределения имеет вид

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\ge 0,\\ 0 \quad \text{при} \quad x<0.\end{cases}}$$

Графики плотности и функции показательного закона распределения приведены на рис. 16.

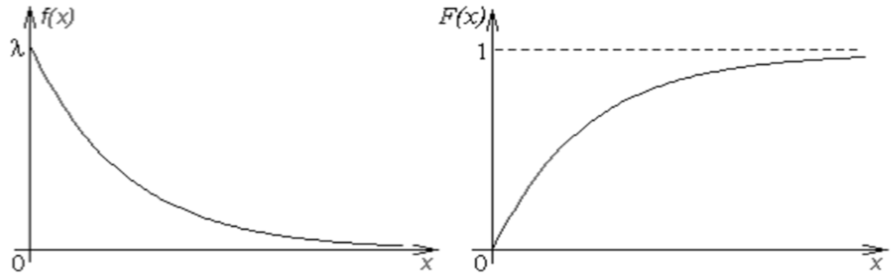


Рис. 16. Плотность и функция показательного распределения

Показательное распределение является одним из основных в теории массового обслуживания и теории надежности. Примером СВ, имеющей показательное распределение, является время ожидания редких явлений: время между двумя вызовами на call-центр, продолжительность безотказной работы приборов, время между двумя авариями на дороге в определенном месте, длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания и т. д.

Утв. 2. Числовые характеристики показательного распределения равны

$$\boxed{M\xi=\frac{1}{\lambda},\quad D\xi=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma_\xi=\frac{1}{\lambda}.}$$

Доказательство. Найдем

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} x\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{B} x\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx; & v = -\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{vmatrix} = \lim_{B\to+\infty}\left(-x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^B + \int_0^B \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx \right) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(-B\,\mathrm{e}^{-\lambda B} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^B \right) = \lim_{B\to+\infty}\left(-B\,\mathrm{e}^{-\lambda B} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda B} + \frac{1}{\lambda} \right) =$$

$$= -\lim_{B\to+\infty}\frac{B}{\mathrm{e}^{\lambda B}} - \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda B}} + \frac{1}{\lambda} = 0 - 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Упражнение 3. Интегрируя по частям дважды, показать, что $D\xi = \dfrac{1}{\lambda^2}$. ◃

Пример 2. Установлено, что время горения электрической лампочки является СВ, распределенной по показательному закону. Считая, что среднее значение этой величины равно 6 месяцам, найдем вероятность того, что лампочка будет исправна более года.

Решение. Так как среднее значение, т. е. математическое ожидание СВ, равно 6 месяцев, то $M\xi = \dfrac{1}{\lambda} = 6$, а значит, $\lambda = \dfrac{1}{6}$, поэтому функция распределения СВ ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{6}}, \text{ если } x \ge 0, \\ 0, \text{ если } x < 0. \end{cases}.$$

Тогда

$$P(\xi > 12) = P(12 < \xi < +\infty) = F(+\infty) - F(12) =$$
$$= 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{12}{6}}\right) = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135. \bullet$$

3. Нормальное распределение (распределение Гаусса).

Нормальное распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения.

Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов распределения СВ, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются, при весьма часто встречающихся типичных условиях, многие другие законы распределения. В частности, при достаточно общих предположениях сумма большого числа независимых СВ имеет распределение, близкое к нормальному.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Впервые нормальное распределение как предел биномиального распределения рассматривалось А. Муавром еще в 1733 г. (теорема Муавра – Лапласа). Некоторое время спустя нормальное распределение было снова открыто и изучено независимо друг от друга К. Гауссом (1809 г.) и П. Лапласом (1812 г.) в связи с работами по теории ошибок наблюдений. Их идея объяснения механизма формирования нормально распределенных СВ заключалась в следующем: постулировалось, что значения исследуемой непрерывной СВ формируются под воздействием очень большого числа независимых случайных факторов, причем сила воздействия каждого отдельного фактора мала и не может превалировать среди остальных, а характер воздействия – аддитивный (суммарный).

Во многих СВ, изучаемых в экономике, технике, медицине, биологии и других областях, естественно видеть суммарный аддитивный эффект большого числа независимых причин. Кроме этого, полнота теоретических исследований, относящихся к нормальному закону, а также сравнительно простые математические свойства делают его наиболее привлекательным и удобным в применении. Даже в случае отклонения исследуемых экспериментальных данных от нормального закона существует по крайней мере два пути его целесообразной эксплуатации: а) использовать его в качестве первого приближения; при этом нередко оказывается, что подобное допущение дает достаточно точные с точки зрения конкретных целей исследования результаты; б) подобрать такое преобразование исследуемой случайной величины ξ, которое видоизменяет исходный закон распределения, превращая его в нормальный. С теоретической точки зрения закон нормального распределения имеет большое значение, поскольку с его помощью выведен целый ряд других важных распределений и построены различные статистические критерии (например, χ^2-, t- и F-распределения и опирающиеся на них критерии).

Существует известное высказывание Липмана (цитируемое А. Пуанкаре в труде «Исчисление вероятностей», 1912 г.): «Каждый уверен в справедливости нормального закона: экспериментаторы – потому, что они думают, что это математическая теорема; математики – потому, что они думают, что это экспериментальный факт». Как отмечает Г. Крамер, «обе стороны совершенно правы, если только это их убеждение не слишком безусловно: математическое доказательство говорит нам, что при некоторых ограничительных условиях мы вправе ожидать нормальное распределение, а статистический опыт показывает, что в действительности распределения являются приближенно нормальными».

Опр. 3. Распределение непрерывной СВ ξ называется ***нормальным*** (или ***распределением Гаусса***) с параметрами a и $\sigma > 0$ (обозначается $\xi \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$), если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in(-\infty;+\infty).}$$

Проверим *корректность определения*, т. е. убедимся, что функция $f(x)$ обладает обоими основными свойствами плотности распределения СВ. Очевидно, $f(x)>0$ при всех $x\in\mathbb{R}$.

Для проверки выполнения условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ будем использовать *интеграл Пуассона* $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}.}$

Интеграл от функции $f(x)$ сводится к интегралу Пуассона с помощью замены переменных $t=\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} \\ x=a+\sqrt{2}\sigma t \\ dx=\sqrt{2}\sigma\,dt \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\sigma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1,$$

что доказывает корректность использования функции $f(x)$ в качестве плотности распределения.

Параметры a и σ имеют смысл математического ожидания и среднего квадратического отклонения СВ ξ: $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$.

Утв. 3. Числовые характеристики нормального распределения равны

$$\boxed{M\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2, \quad \sigma_\xi = \sigma.}$$

Доказательство. Найдем

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} \\ x = a + \sqrt{2}\sigma t \\ dx = \sqrt{2}\sigma\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\sigma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a + \sqrt{2}\sigma t)\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}\sigma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} a\sqrt{\pi} + 0 = a.$$

Здесь упростили вычисления с помощью замены переменной, затем использовали интеграл Пуассона и свойство равенства 0 интеграла от нечетной функции по симметричному относительно 0 промежутку. Аналогично, применяя замену переменных, а затем формулу интегрирования по частям,

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} \\ x = a + \sqrt{2}\sigma t \\ dx = \sqrt{2}\sigma\, dt \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma^2 t^2\, \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B t^2\, \mathrm{e}^{-t^2}\, dt =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & du = dt \\ dv = t\,\mathrm{e}^{-t^2}\, dt; & v = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2} \end{array} \right| = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \left(-\frac{1}{2} t\,\mathrm{e}^{-t^2} \Big|_A^B + \frac{1}{2}\int_A^B \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \right) =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-\lim_{B\to+\infty} \frac{B}{2\,\mathrm{e}^{B^2}} + \lim_{A\to-\infty} \frac{A}{2\,\mathrm{e}^{A^2}} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \right) =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(0 + 0 + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \right) = \sigma^2. \triangleleft$$

График плотности нормального распределения изображен на рис. 17 и называется ***нормальной кривой***, или ***кривой Гаусса***.

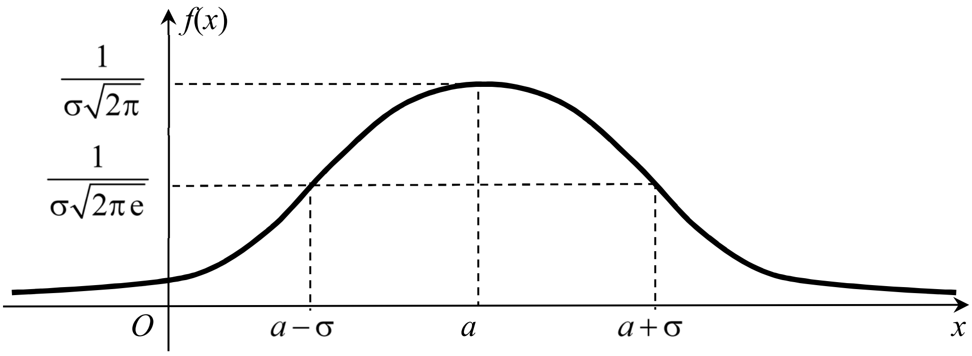


Рис. 17. График плотности нормального распределения $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

Кривая Гаусса имеет точку максимума при $x = a$ и две точки перегиба при $x = a \pm \sigma$.

Укажем влияние параметров a и σ на вид кривой нормального распределения:

1) график симметричен относительно прямой $x = a$; при изменении параметра a кривая смещается вдоль оси Ox;

2) при увеличении значения σ график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается (см. рис 18).

При этом площадь под кривой Гаусса всегда равна 1, так как это площадь под графиком плотности распределения.

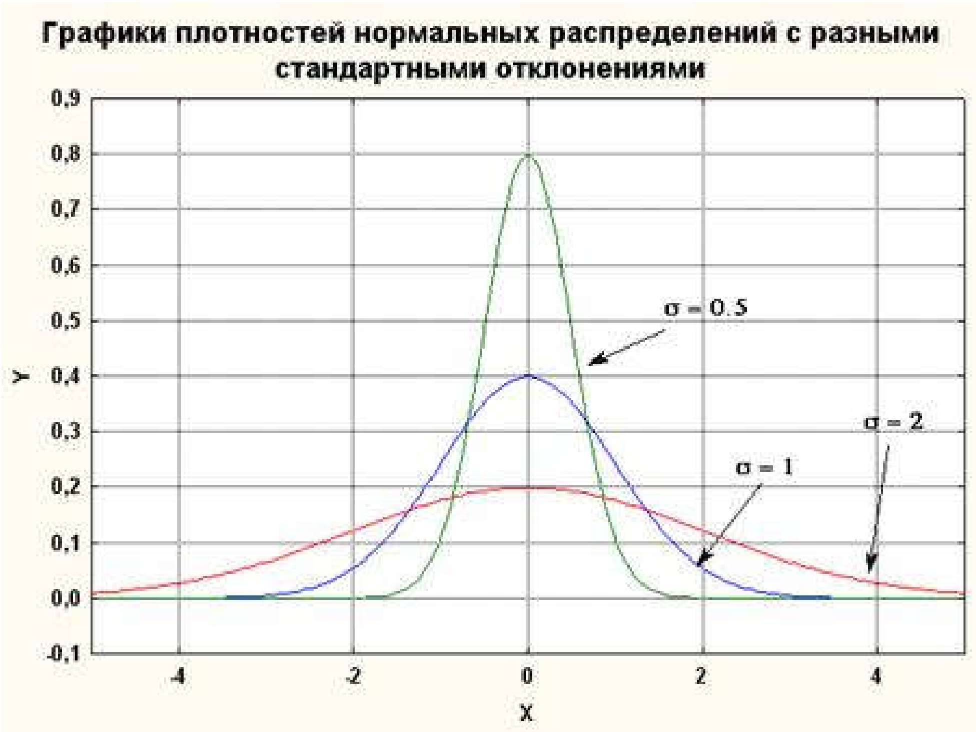


Рис. 18. Влияние параметра σ на вид кривой нормального распределения

Найдем функцию нормального распределения:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{x-a}{\sigma} \\ x=a+\sigma t \\ dx=\sigma\, dt \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sigma\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Здесь первый интеграл сведем к интегралу Пуассона, используя свойство интеграла от четной функции по симметричному относительно 0 промежутку, а затем замену переменной:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left| \begin{array}{l} \tau = \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ d\tau = \dfrac{dt}{\sqrt{2}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2}\,d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1}{2},$$

а второй интеграл представляет собой значение функции Лапласа в точке $\dfrac{x-a}{\sigma}$.

Таким образом, функция распределения СВ ξ, имеющей нормальное распределением с параметрами a и σ, имеет вид

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ – функция Лапласа.

График функции нормального распределения изображен на рис. 19.

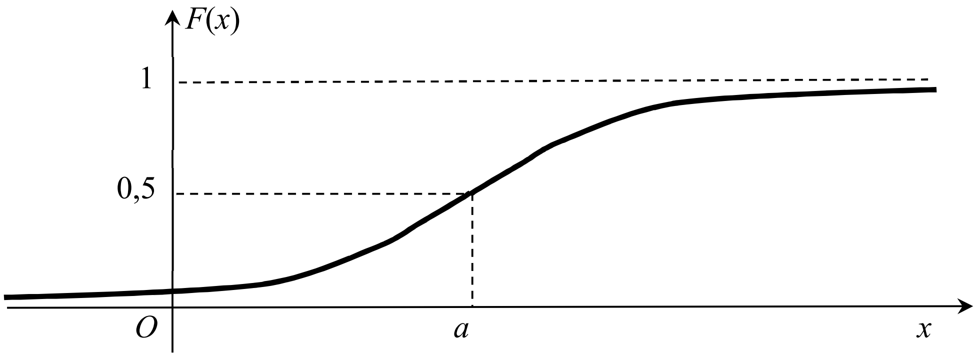


Рис. 19. График функции нормального распределения

Нормальное распределение имеет большое теоретическое и прикладное значение. В частности, считается, что погрешности измерения различных физических величин, ошибки, порожденные большим количеством случайных причин, распределены по нормальному закону.

Вероятность попадания СВ $\xi \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$ на заданный интервал $(x_1; x_2)$ выражается через значения функции Лапласа следующим образом:

$$\boxed{P(x_1 < \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).} \tag{1}$$

Упражнение 4. Показать справедливость формулы (1), используя выражение для функции нормального распределения.

Замечание. В силу непрерывности СВ формула (1) справедлива как со строгими, так и с нестрогими знаками неравенств.

Пример 3. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная СВ ξ с параметрами a = 173 см и $\sigma = 6$ см, найдем:

а) выражения для плотности и функции распределения;

б) доли костюмов 3-го роста (170–176 см) и 4-го роста (176–182 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.

Решение. **а)** Запишем выражения для плотности и функции распределения СВ $\xi \sim \mathcal{N}(173; 6)$ подставив известные значения параметров распределения:

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-173)^2}{72}}; \quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-173}{6}\right).$$

б) По формуле (1) найдем вероятности

$$P(170 \le \xi \le 176) = \Phi\left(\frac{176-173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-173}{6}\right) =$$

$$= \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) = 2\Phi(0,5) \approx 2 \cdot 0,1915 = 0,383;$$

$$P(176 \le \xi \le 182) = \Phi\left(\frac{182-173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{176-173}{6}\right) =$$

$$= \Phi(1,5) - \Phi(0,5) =\approx 0,4332 - 0,1915 = 0,2417.$$

Таким образом, в общем объеме производства костюмов для данной возрастной группы нужно предусмотреть 38% изделий 3-го роста и 24% – 4-го роста. •

Найдем вероятность того, что СВ $\xi \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$ отклонится от своего математического ожидания менее, чем на ε:

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < \xi - a < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon) =$$

$$= \Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Таким образом,

$$P(|\xi - M\xi| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

При $\varepsilon = \sigma$ имеем

$$P(|\xi - a| < \sigma) = 2\Phi(1) \approx 0{,}6827,$$

т. е. 68% значений нормальной СВ отклоняются от математического ожидания не более, чем на среднее квадратическое отклонение.

Если $\varepsilon = 2\sigma$, то

$$P(|\xi - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) \approx 0{,}9545,$$

а значит, 95% значений нормальной СВ отклоняются от математического ожидания не более, чем на 2σ.

Полагая $\varepsilon = 3\sigma$, получим

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973,$$

т. е. 99,7% значений нормальной СВ отклоняются от математического ожидания не более, чем на 3σ. Это свойство нормального распределения имеет специальное название.

***Правило трех сигм*:** Если СВ ξ распределена нормально с параметрами a и σ, то попадание ее в интервал $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$ является практически достоверным событием, а значит, вероятность противоположного события ничтожно мала и на практике таким событием пренебрегают.

Отметим еще некоторые свойства нормального распределения.

Т 1. Если $\xi \sim \mathcal{N}(a;\sigma)$, то $\dfrac{\xi - a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Опр. 4. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ называется ***стандартным нормальным распределением***.

Теорема 1 утверждает, что любую нормальную СВ можно преобразовать к стандартной нормальной СВ.

Более того, линейная комбинация *независимых* нормальных СВ также является нормальной СВ.

Т 2. Если ξ_1 и ξ_2 – независимые СВ, $\xi_1 \sim \mathcal{N}(a_1;\sigma_1)$, $\xi_2 \sim \mathcal{N}(a_2;\sigma_2)$, c_0, c_1, c_2 – некоторые числа, то

$$c_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 \sim \mathcal{N}(c_0 + c_1a_1 + c_2a_2; \sqrt{c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2}).$$

§ 11. Закон больших чисел и центральная предельная теорема

Группа теорем, устанавливающих связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками СВ при большом числе испытаний над ними, а также теорем о предельных законах распределения, объединяется под общим названием *предельных теорем теории вероятностей*. Эти теоремы составляют основу математической статистики. Предельные теоремы условно делят на две группы: законы больших чисел (ЗБЧ) и центральная предельная теорема (ЦПТ).

Под ***законом больших чисел*** (ЗБЧ) понимают общий принцип, согласно которому совместное действие большого числа случайных факторов приводит (при некоторых весьма общих условиях) к результату, почти не зависящему от случая.

Центральная предельная теорема (ЦПТ) устанавливает условия, при которых закон распределения суммы большого числа СВ неограниченно приближается к нормальному закону распределения.

Неравенство Чебышева

Рассмотрим сначала вспомогательную теорему – неравенство Чебышева, с помощью которого легко доказывается закон больших чисел в форме Чебышева.

Т 1 (неравенство Чебышева). Для любой СВ ξ, имеющей конечные математическое ожидание и дисперсию, вероятность того, что отклонение СВ ξ от ее математического ожидания превзойдет по абсолютной величине положительное число $\varepsilon,$ не больше дисперсии этой СВ, деленной на ε^2 :

$$P\left(\left|\xi - M\xi\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство (для случая непрерывной СВ ξ). Пусть $f(x)$ – плотность распределения непрерывной СВ ξ. Тогда, разбивая область интегрирования на две области и отбрасывая один из интегралов как неотрицательный (за счет неотрицательности подынтегральной функции), получим следующую оценку дисперсии:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_{|x-M\xi|\le\varepsilon} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx + \int_{|x-M\xi|>\varepsilon} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx \ge$$

$$\ge 0 + \int_{|x-M\xi|>\varepsilon} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx \ge \int_{|x-M\xi|>\varepsilon} \varepsilon^2 f(x)\,dx = \varepsilon^2 P(|\,\xi - M\xi\,| > \varepsilon).$$

Выражая вероятность, получим требуемое неравенство.

Доказательство для дискретных СВ проводится аналогично. ⊲

Неравенство Чебышева лежит в основе качественных и количественных утверждений закона больших чисел. Замечательно, что неравенство Чебышева дает оценку вероятности события для СВ, распределение которой может быть неизвестно, известны лишь ее математическое ожидание и дисперсия. Неравенство Чебышева даст довольно слабую оценку вероятности, но этот недостаток теоремы связан с ее общностью: добиться лучшей оценки сразу для всех СВ невозможно.

Понятие сходимости по вероятности

Опр. 1. Последовательность СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ ***сходится по вероятности*** к СВ ξ (обозначается $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$), если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность того, что отклонение СВ ξ_n от СВ ξ превзойдет по абсолютной величине $\varepsilon,$ стремится к 0:

$$P\left(\left|\xi_n - \xi\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Сходимость по вероятности отличается от обычного понятия предела в математическом анализе, где $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тогда и только тогда когда для любого $\varepsilon > 0$ для *всех n*, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$. Если же $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \xi$, то это означает, что неравенство $\left|\xi_n - \xi\right| \le \varepsilon$ в *отдельных* случаях может не выполняться, однако вероятность его выполнения стремится к 1, т. е. выполнение этого неравенства является *практически достоверным* событием.

Закон больших чисел

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – попарно независимые СВ. Обозначим

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Т 2 [Чебышев, 1866] (ЗБЧ в форме Чебышева). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – попарно независимые СВ, причем существует такое число *C*, что $D\xi_i \le C$ для всех *i* (т. е. дисперсии этих СВ ограничены одной и той же постоянной). Тогда среднее арифметическое этих СВ сходится по вероятности к среднему их математических ожиданий, т. е.

$$S_n - MS_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0.$$

Доказательство. Нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|S_n - MS_n\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Применяя неравенство Чебышева и используя свойства дисперсий, в силу независимости СВ, получим

$$P\left(\left|S_n - MS_n\right| > \varepsilon\right) \le \frac{DS_n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} D\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2} D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}(D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}(C + C + \ldots + C) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} nC = \frac{C}{\varepsilon^2 n} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что и требовалось доказать. ◁

Следствие. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – попарно независимые СВ с одинаковыми математическими ожиданиями: $M\xi_i = a$ и одинаково ограниченными дисперсиями: $D\xi_i \le C$ для всех i при некотором $C > 0.$ Тогда среднее арифметическое этих СВ сходится по вероятности к их общему математическому ожиданию a:

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a.$$

Теорема 2 и ее следствие являются теоретическим обоснованием принципа среднего арифметического в теории измерений.

Пусть производится n измерений некоторой величины, истинное значение a которой неизвестно. Результат каждого измерения – это некоторая СВ ξ_i, вызванная случайными погрешностями (прибора и человека). Если измерения выполняются без систематической ошибки (т. е. не происходит искажения результата в одну и ту же сторону), то можно считать, что $M\xi_i = a$ (математическое ожидание каждого измерения есть истинное значение измеряемой величины).

Согласно ЗБЧ в форме Чебышева, при достаточно большом числе измерений почти достоверно, что их среднее арифметическое как угодно мало отличается от истинного значения измеряемой величины, поэтому в качестве оценки для величины a можно взять среднее арифметическое результатов всех измерений:

$$a \approx \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Еще одним следствием ЗБЧ в форме Чебышева является следующая теорема.

Т 3 [Я. Бернулли, 1713] (ЗБЧ в форме Я. Бернулли). Относительная частота появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых это событие появляется с одной и той же вероятностью p, при неограниченном увеличении числа испытаний n сходится по вероятности к вероятности p этого события:

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p.$$

Эта теорема является теоретическим обоснованием статистического метода задания вероятности, согласно которому в качестве приближенного значения вероятности события можно взять относительную частоту $\frac{m}{n}$ появления этого события при достаточно большом числе n независимых испытаний.

Доказательство. Рассмотрим СВ

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ в } i\text{-м испытании произошло,} \\ 0, & \text{если событие } A \text{ в } i\text{-м испытании не произошло.} \end{cases}$$

Тогда $P(\xi_i = 1) = p$; $P(\xi_i = 0) = q$, т. е. ξ_i – попарно независимые бернуллиевские СВ с $M\xi_i = p$, $D\xi_i = pq$.

Поскольку относительную частоту появления события A в n независимых испытаниях можно представить в виде среднего арифметического этих СВ: $\frac{m}{n} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$, то утверждение теоремы Бернулли следует из теоремы Чебышева. ◁

Центральная предельная теорема

ЗБЧ устанавливает факт приближения среднего арифметического СВ к определенному числу. Оказывается, что при определенных условиях, а именно, если суммируемые СВ равноправны, никакая из них не является доминирующей, распределение среднего арифметического этих СВ сходится к нормальному распределению независимо от того, каков закон распределения слагаемых. В этом заключается смысл ЦПТ, и в этом – причина важности нормального распределения.

Сформулируем ЦПТ для частного случая – независимых одинаково распределенных СВ.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – взаимно независимые одинаково распределенные СВ, $M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$ для всех i. Найдем числовые характеристики СВ $S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$:

$$MS_n = \frac{M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n}{n} = \frac{a + a + \ldots + a}{n} = a;$$

$$DS_n = \frac{D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n}{n^2} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Т 4 (ЦПТ для независимых одинаково распределенных СВ). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – взаимно независимые одинаково распределенные СВ, $M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$ для всех i. Тогда функция распределения СВ $\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}$ сходится при $n \to \infty$ к функции стандартного нормального распределения, т. е. при любом значении x

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x\right) \to \frac{1}{2} + \Phi(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Иными словами, среднее арифметическое $S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$ независимых одинаково распределенных СВ с $M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$ имеет приближенно нормальное распределение с параметрами a и $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Нормальный закон возникает во всех случаях, когда исследуемая СВ может быть представлена в виде суммы достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) элементарных слагаемых, каждое из которых в отдельности сравнительно мало влияет на сумму. Поэтому нормальный закон является самым распространенным из законов распределения.

Пусть производится измерение некоторой физической величины. Любое измерение дает приближенное значение, так как на результат измерения влияют очень многие независимые факторы: температура, влажность, колебания прибора и т.д. Каждый из факторов порождает ничтожно малую ошибку. Так как число факторов велико, то их совокупное действие порождает уже заметную «суммарную ошибку», которая имеет распределение близкое к нормальному распределению.

Следствиями ЦПТ являются рассмотренные ранее локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Опыт показывает, что ЦПТ можно пользоваться и для суммы сравнительно небольшого числа СВ.