2.3.6.

a) $A = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & a+bi \\ a-bi & z_4 \end{bmatrix}$

Expresamos A como combinación lineal de los matrices de Pauli:

$$A = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\varphi & \beta-i\gamma \\ \beta+i\gamma & \alpha-\varphi \end{bmatrix}$$

$z_1 = \alpha+\varphi$, $a+bi = \beta - i\gamma$, $a-bi = \beta+i\gamma$, $z_4 = \alpha-\varphi$

Como el sistema de ecuaciones tiene solución único para cualquier matriz hermitiana A, las matrices de Pauli generan el espacio.

b) $\langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = Tr(\sigma_i^\dagger \sigma_j) = 0$ cuando $i \neq j$

$\rightarrow \langle \sigma_0 | \sigma_1 \rangle = T_r(\sigma_0^\dagger \sigma_1) = Tr(\sigma_0 \sigma_1)$

$\sigma_0\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Tr(\sigma_0\sigma_1) = 0+0 = 0$

$\rightarrow \langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = Tr(\sigma_1^\dagger \sigma_2) = Tr(\sigma_1\sigma_2)$

$\sigma_1\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $Tr(\sigma_1\sigma_2) = i+(-i) = 0$

$\rightarrow \langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = Tr(\sigma_2^\dagger \sigma_3) = Tr(-\sigma_2\sigma_3)$

$\sigma_2\sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $T_r(-\sigma_2\sigma_3) = 0+0 = 0$

Si realizamos esto para todas las combinaciones de $i \neq j$, el resultado siempre es cero, lo que confirma que la base es ortogonal.

c) Si es solo complejo

$\alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \varphi\sigma_3 = iM$, $M \in M_{2x2}$

$\alpha, \beta, \varphi = 0$

$i\gamma\sigma_2 = iM$

$\gamma\sigma_2 = M$

$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Subespacio es $\begin{bmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{bmatrix}$

Si es solo real, $\gamma = 0$

$\alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \varphi\sigma_3 = M$, $M \in M_{2x2}$

$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

$\alpha + \varphi = A$

$\beta = B = C$

$\alpha - \varphi = D$

$\alpha = \frac{1}{2}(D+A) \Rightarrow \alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \varphi\sigma_3 = \begin{bmatrix} A+D & C \\ C & A+D \end{bmatrix}$

$\varphi = \frac{1}{2}(A-D)$