Redes de Bravais

Juan Diego Figueroa Hernández

Juan Andrés Guarín Rojas

15 de noviembre de 2021

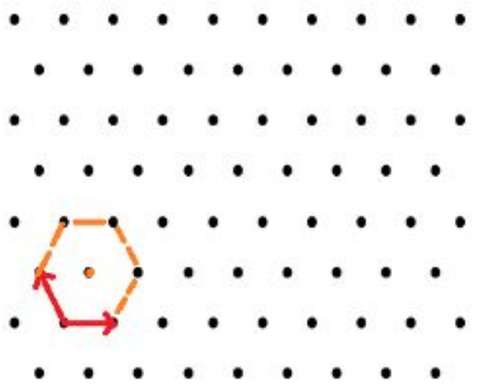
Universidad Industrial de Santander

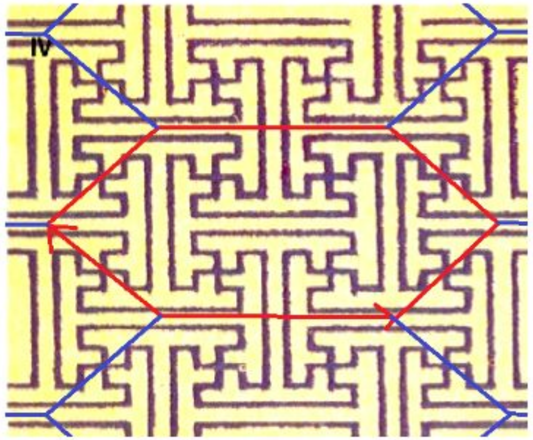
72 años Universidad Industrial de Santander Patrimonio educativo y cultural

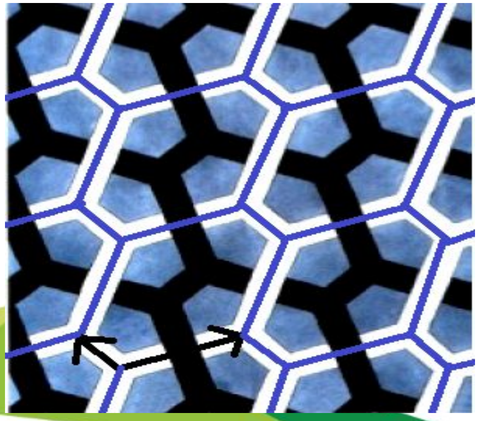
#LaUISqueQueremos

Redes aplicadas a mosaicos

En estos casos, se buscaron patrones que generara toda la red por medio de celdas primitivas, que al trasladarlas construyeran la figura.







- Son celdas mínimas
- Se pueden trasladar, más no rotar para generar toda la figura
- Cuando se trasladan no se solapan
- Se hicieron coincidir con Redes de Bravais bidimensionales [1].

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Redes_de_Bravais

Volúmenes Redes de Bravais Tridimensionales

Un resultado general [2] que sirvió de ayuda fue

$$V = a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$$

$$V^2 = det(M)\ det(M^T) = det(MM^T) = \begin{vmatrix} a \cdot a & a \cdot b & a \cdot c \\ b \cdot a & b \cdot b & b \cdot c \\ c \cdot a & c \cdot b & c \cdot c \end{vmatrix}$$

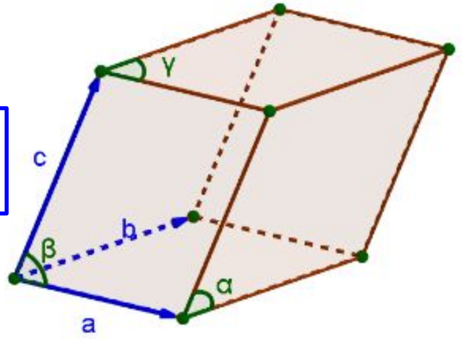
Triclínico

$$\boxed{V = |a||b||c|\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}$$

$$\boxed{V = |a|^3\sqrt{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}}$$

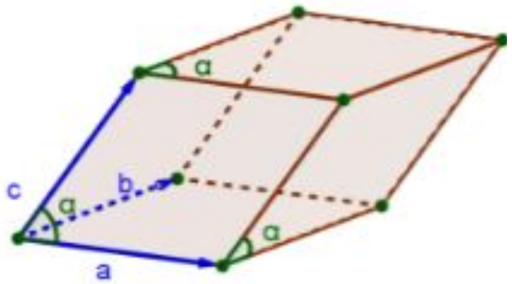
Romboédrico

- Esta demostración parte del producto mixto entre los vectores base
- La expresión general se cumple también para cualquier paralelepípedo



Triclínico

$|a|$, $|b|$, $|c|$ y α,β,γ son parámetros libres



Romboédrico

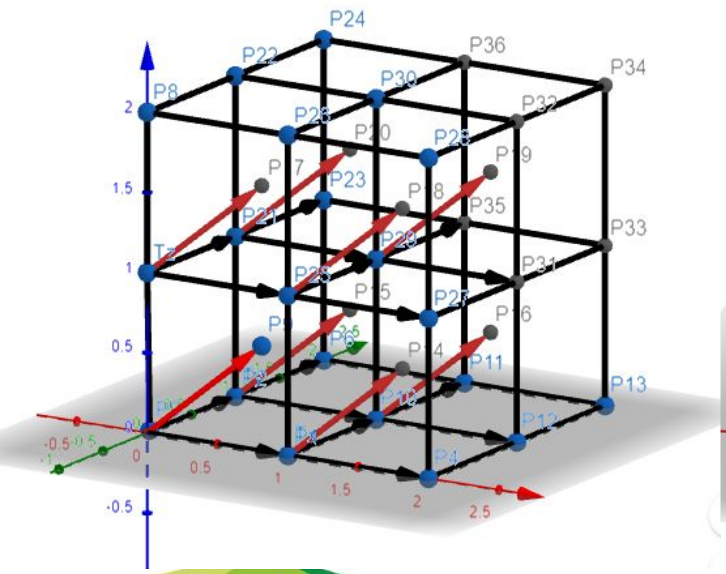
$|a|=|b|=|c|$, con ángulos iguales a α entre cada vector

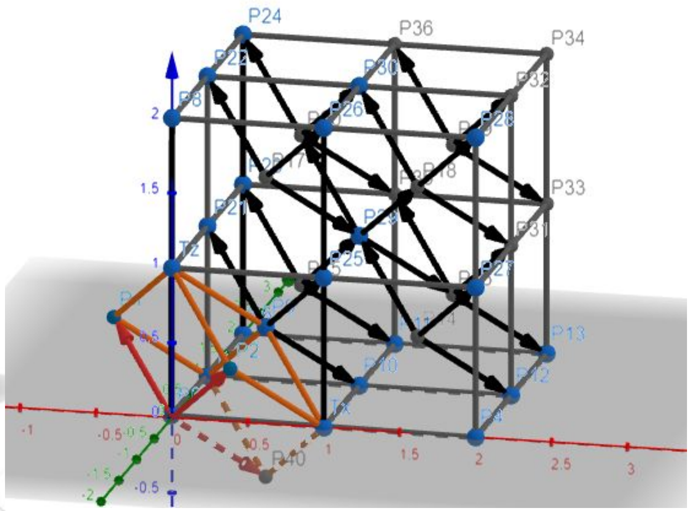
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Parallelepiped

Bases Sistemas cúbico simple, bcc, y fcc

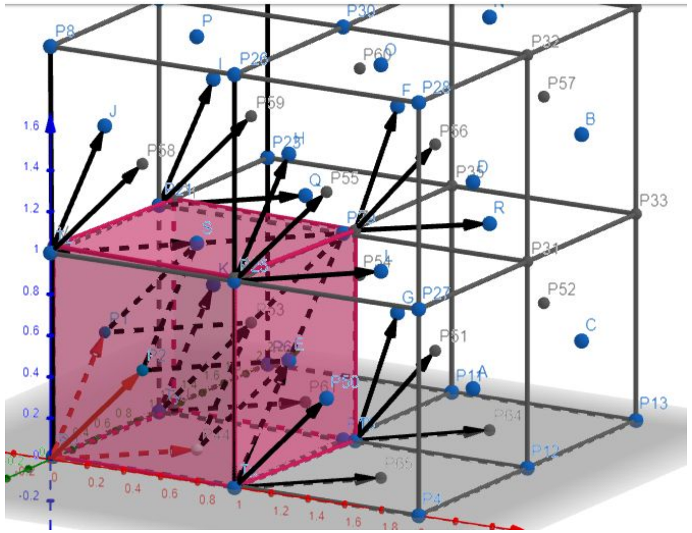
Se abordó el problema de hallar los vectores que describen una base primitiva de la red cúbica simple (cP) y sus variaciones *bcc* (cI) y *fcc* (cF).

Ejemplares para variación bcc





Ejemplar para variación fcc

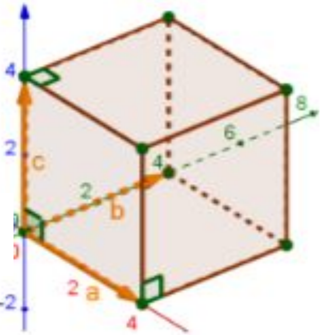


Bases recíprocas

Las bases recíprocas generan un sistema de bases donde el volumen de la celda pasa a ser el inverso del original. Las bases reciprocas se obtienen mediante las siguientes ecuaciones [3]:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}$$

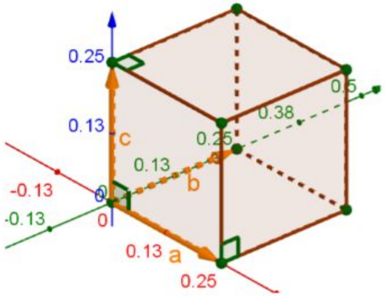
$$V = a^3$$



Cúbico simple

a⊥b b⊥c a⊥c

|a|=|b| = |c|



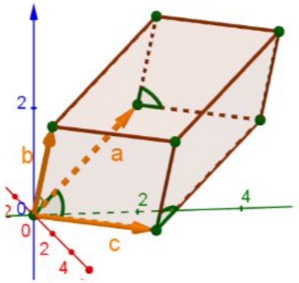
Cúbico simple reciproco

a⊥b b⊥c a⊥c

$|a|=|b| = |c|=\frac{1}{a}$

$$V = \frac{1}{a^3}$$

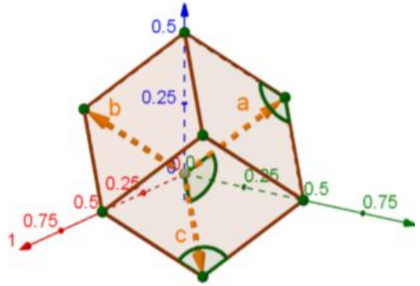
$$V = \frac{a^3}{4}$$



Sistema fcc

angulos entre vectore iguales a 60°

$|a|=|b| =|c| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$



Sistema fcc reciproco

angulos iguales a acos(1/3)≈109.5°

$|a|=|b| =|c| = \frac{\sqrt{3}}{a}$

$$V = \frac{4}{a^3}$$

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{b} = a\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{c} = a\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{i}} \quad \mathbf{b}' = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{j}} \quad \mathbf{c}' = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{k}}$$

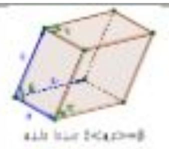
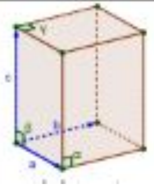
$$\mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{b} = a(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})/2$$

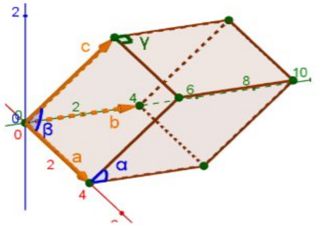
$$\mathbf{a}' = \frac{1}{a}(\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{i}}) \quad \mathbf{b}' = \frac{1}{a}(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{i}}) \quad \mathbf{c}' = \frac{1}{a}(-\hat{\mathbf{k}}+\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})$$

[3] Hernándes H, Núñez L (2021) Matemáticas avanzadas: de los espacios lineales al análisis vectorial, con aplicaciones en Maxima (Universidad industrial de Santander - Universidad de los Andes), , Chapter 1,

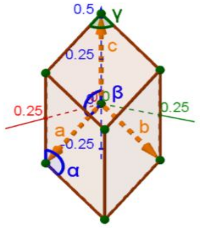
Conclusiones

- Se logró una comprensión geométrica de una aplicación del álgebra vectorial enfocada en redes de Bravais.
- Se obtuvieron expresiones volumétricas para los distintos sistemas de las redes de Bravais con ayuda gráfica del software GeoGebra.
- Se obtuvieron vectores base para las redes tridimensionales de Bravais en los casos cúbico simple y sus variaciones Bcc y Fcc.
- Finalmente, se halló una estrecha relación entre el triple producto escalar, el volúmen de las celdas primitivas, y los vectores recíprocos.

Monoclínico		$\|a\|\|b\|\|c\| \sin \beta$
Ortorrómbico		$\|a\|\|b\|\|c\|$



Sistema bcc



Sistema bcc reciproco

Gracias!

Universidad Industrial de Santander

Somos **el mejor** escenario de creación e innovación.

www.uis.edu.co