2.1.5/10)

a) $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

$h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$

$g(x) + h(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + ... + (a_n+b_n)x^n$

$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n = y(x) \in \mathbb{P}_n>$

→Es cerrado bajo la suma

$h(x) + g(x) = (b_0+a_0) + (b_1+a_1)x + (b_2+a_2)x^2 + ... + (b_n+a_n)x^n$

$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n = y(x) = g(x) + h(x)$

→La operación suma es conmutativa

$(g(x)+h(x)) + k(x) = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n) + d_0 + d_1x + d_2x^2 + ... + d_nx^n$

$= (c_0+d_0) + (c_1+d_1)x + (c_2+d_2)x^2 + ... + (c_n+d_n)x^n$

$= e_0 + e_1x + e_2x^2 + ... + e_nx^n$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + (h(x) + k(x))$

$= g(x) + (h(x) + k(x))$

→La suma es asociativo

$c(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$

$g(x) + c(x) = (a_0+0) + (a_1+0)x + (a_2+0)x^2 + ... + (a_n+0)x^n$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = g(x)$

→Tiene como elemento neutro a $c(x)$

$z(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - ... - a_nx^n$

$g(x) - z(x) = (a_0-a_0) + (a_1-a_1)x + (a_2-a_2)x^2 + ... + (a_n-a_n)x^n$

$= 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n = c(x)$

→Existe un elemento simetrico para cada elemento de $\mathbb{P}_n>$

→$\alpha(\beta g(x)) = \alpha(\beta a_0 + \beta a_1x + \beta a_2x^2 + ... + \beta a_nx^n)$

$= \alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1x + \alpha\beta a_2x^2 + ... + \alpha\beta a_nx^n$

$= (\alpha\beta)g(x)$

→$(\alpha+\beta)g(x) = (\alpha+\beta)a_0 + (\alpha+\beta)a_1x + (\alpha+\beta)a_2x^2 + ... + (\alpha+\beta)a_nx^n$

$= \alpha a_0 + \beta a_0 + \alpha a_1x + \beta a_1x + \alpha a_2x^2 + \beta a_2x^2 + ... + \alpha a_nx^n + \beta a_nx^n$

$= \alpha g(x) + \beta g(x)$

→ $\alpha(g(x)+h(x)) = \alpha(a_0+b_0)+\alpha(a_1+b_1)x+\alpha(a_2+b_2)x^2+\dots+\alpha(a_n+b_n)x^n$

$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots + \alpha a_n x^n + \alpha b_0 + \alpha b_1 x + \alpha b_2 x^2 + \dots + \alpha b_n x^n$

$= \alpha g(x) + \alpha h(x)$

→ $1 \cdot g(x) = 1a_0 + 1a_1 x + 1a_2 x^2 + \dots + 1a_n x^n$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = g(x)$

Entonces $|P_n\rangle$ es un espacio vectorial

b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$\alpha m(x) \Rightarrow$ debe pertenecer a $|P_n\rangle$, pero si $\alpha = \frac{1}{2}$ y

$m(x) = 1 + 3x$.

$\alpha m(x) = \frac{1}{2}(1+3x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$, los coeficientes a_i no son enteros, entonces si los coeficientes de P_n son enteros, no es espacio vectorial

c) I. Sabiendo que contiene al elemento cero, solo resta demostrar que $\alpha|q(x)\rangle + \beta|r(x)\rangle \in P_{n-1}$

$q(x) = z_0 + z_1 x + z_2 x^2 + \dots + z_{n-1}x^{n-1}$

$r(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \dots + y_{n-1}x^{n-1}$

$\alpha|q(x)\rangle + \beta|r(x)\rangle = (\alpha z_0 + \beta y_0) + (\alpha z_1 + \beta y_1)x + (\alpha z_2 + \beta y_2)x^2 + \dots$

$+ (\alpha z_{n-1} + \beta y_{n-1})x^{n-1}$

$= V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + \dots + V_{n-1}x^{n-1} \in P_{n-1}$

Entonces si es subespacio.

II. $s(x) = s_0 + s_2 x^2 + \dots + s_k x^k$, k es par $\leq n$

$t(x) = t_0 + t_2 x^2 + \dots + t_m x^m$, m es par $\leq n$

$\alpha|s(x)\rangle + \beta|t(x)\rangle = (s_0+t_0) + (s_2+t_2)x^2 + \dots + (s_k+t_k)x^k + \dots + t_m x^m$

$= u_0 + u_2 x^2 + \dots + u_k x^k + \dots + u_m x^m = w(x)$

$w(x)$ pertenece a los polinomios de grado par, entonces si es subespacio

III. Si todos los coeficientes del polinomio $A(x)$ son cero, entonces:

$A(x) = 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n = 0 \rightarrow$ Existe el polinomio cero.

$C(x) = C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n$, $D(x) = D_1x + D_2x^2 + \ldots + D_nx^n$

$$\alpha C(x) + \beta D(x) = \alpha C_1x + \alpha C_2x^2 + \ldots + \alpha C_nx^n + \beta D_1x + \beta D_2x^2 + \ldots + \beta D_nx^n$$
$$= (\alpha C_1 + \beta D_1)x + (\alpha C_2 + \beta D_2)x^2 + \ldots + (\alpha C_n + \beta D_n)x^n$$
$$= B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n \in$$ polinomios con x como factor

Entonces sí es subespacio.

IV. $F(x) = (x-1)(F_0 + F_1x + \ldots + F_nx^n)$

$G(x) = (x-1)(G_0 + G_1x + \ldots + G_nx^n)$

$a(x) = (x-1)(0 + 0x + \ldots + 0x^n) = (x-1)(0) = 0$, hay existencia del polinomio cero

$$\alpha F(x) + \beta G(x) = (x-1)(\alpha F_0 + \alpha F_1x + \ldots + \alpha F_nx^n)$$
$$+ (x-1)(\beta G_0 + \beta G_1x + \ldots + \beta G_nx^n)$$
$$= (x-1)[(\alpha F_0 + \beta G_0) + (\alpha F_1 + \beta G_1)x + \ldots + (\alpha F_n + \beta G_n)x^n]$$
$$= (x-1)(H_0 + H_1x + \ldots + H_nx^n) \in$$ polinomios con $x-1$ como factor

Por ende, es un subespacio

2.2.4

6. a) Dados $|a\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle$ y $|b\rangle = b^\alpha|q_\alpha\rangle$

$\rightarrow |a\rangle + |b\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle + b^\alpha|q_\alpha\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle = c^\alpha|q_\alpha\rangle = |c\rangle \in \mathbb{H}$

Llamando $\mathbb{H}$ al conjunto de los cuaterniones ✓

$\rightarrow |b\rangle + |a\rangle = (b^\alpha + a^\alpha)|q_\alpha\rangle \Rightarrow$ Como b^α y a^α son $\in \mathbb{R}$, sabemos que la suma ~~de~~ estos es conmutativa, por lo tanto:

$$= (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle = |c\rangle \in \mathbb{H}$$ ✓

$\rightarrow (|a\rangle + |b\rangle) + |d\rangle = c^\alpha|q_\alpha\rangle + d^\alpha|q_\alpha\rangle = (c^\alpha + d^\alpha)|q_\alpha\rangle = e^\alpha|q_\alpha\rangle$

$|a\rangle + (|b\rangle + |d\rangle) = a^\alpha|q_\alpha\rangle + f^\alpha|q_\alpha\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle + b^\alpha|q_\alpha\rangle + d^\alpha|q_\alpha\rangle$

y como es conmutativa, podemos empezar sumando $|a\rangle$ y $|b\rangle$

$\rightarrow (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle + d^\alpha|q_\alpha\rangle = e^\alpha|q_\alpha\rangle = (|a\rangle + |b\rangle) + |d\rangle$ ✓

$\rightarrow |N\rangle = N^{\alpha}|q_\alpha\rangle = 0 + 0|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle = 0|q_\alpha\rangle$

$|a\rangle + |N\rangle = (a^{\alpha} + N^{\alpha})|q_\alpha\rangle = a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = |a\rangle$, $\exists\, |N\rangle$ como elemento neutro

$\rightarrow |A\rangle = A^{\alpha}|q_\alpha\rangle = -a^{\alpha}|q_\alpha\rangle$

$|a\rangle + |A\rangle = (a^{\alpha} + A^{\alpha})|q_\alpha\rangle = (a^{\alpha} - a^{\alpha})|q_\alpha\rangle = 0|q_\alpha\rangle = |N\rangle$

$\rightarrow \alpha(\beta|a\rangle) = \alpha(\beta a^{\alpha}|q_\alpha\rangle)$, como α, β y a^{α} son reales, sabemos que la multiplicación entre estos es asociativa y conmutat.

$\Rightarrow \alpha(\beta a^{\alpha}|q_\alpha\rangle) = (\alpha\beta)a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = (\alpha\beta)|a\rangle$

$\rightarrow (\alpha+\beta)|a\rangle = (\alpha+\beta)a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = \alpha a^{\alpha}|q_\alpha\rangle + \beta a^{\alpha}|q_\alpha\rangle$
$= \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

$\rightarrow \alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha(a^{\alpha}|q_\alpha\rangle + b^{\alpha}|q_\alpha\rangle) = \alpha a^{\alpha}|q_\alpha\rangle + \alpha b^{\alpha}|q_\alpha\rangle$
$= \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

$\rightarrow$ Si $\beta = 1$,

$\beta|a\rangle = 1 \cdot a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = a^{\alpha}|q_\alpha\rangle = |a\rangle$

Entonces el conjunto de cuaterniones con suma y multiplicación por escalar definidos de esa forma es un espacio vectorial.

b) $|b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + \mathbf{b})(r^0 + \mathbf{r}) = b^0 r^0 + b^0\mathbf{r} + r^0\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{r}$

$\mathbf{b}\mathbf{r} = (b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k})(r_1\hat{\imath} + r_2\hat{\jmath} + r_3\hat{k})$
$= -(b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3) + (b_2 r_3 - b_3 r_2)\hat{\imath} + (b_3 r_1 - b_1 r_3)\hat{\jmath}$
$+ (b_1 r_2 - b_2 r_1)\hat{k}$

$= -(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{r})$

$\therefore |b\rangle \odot |r\rangle = b^0 r^0 + b^0\mathbf{r} + r^0\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{r})$

Separando parte escalar y vectorial:

$\Rightarrow (b^0 r^0 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}),\ b^0\mathbf{r} + r^0\mathbf{b} + (\mathbf{b}\times\mathbf{r}))$

c) $|b\rangle \circ |r\rangle = |d\rangle = d^0 + \mathbf{d}^j$

$d^0 = b^0 r^0 - b^j r^j$, $\mathbf{d}^j = \underbrace{r^0 b^j + b^0 r^j}_{\text{simétrico}} + \underbrace{\varepsilon_{ijk} b^j r^k}_{\text{antisimétrico}}$

a) $|q_0\rangle$ corresponde a la parte escalar:

$a = b^0 r^0 - b^j r^j$

Con respecto a $S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle$, δ^0_α selecciona solo $\alpha = 0$, entonces queda $S^{(0j)} |q_j\rangle$, lo que corresponde a la parte simétrica:

$$S^{(0j)} |q_j\rangle = r^0 b^j + b^0 r^j$$

Y por ultimo nos queda la parte antisimétrica:

$$A^{[jk]i} b_j r_k = \varepsilon_{ijk} b^j r^k = (\mathbf{b} \times \mathbf{r})^i$$

d) En el punto anterior ya igualé las cantidades en términos de componentes, entonces solo resta definir que es $|d\rangle$. No es un vector puro (porque incluye el escalar), no es un pseudovector por más que dentro incluya un producto cruzado.

$|d\rangle$ es un cuaternión, con una parte escalar y una parte vectorial

e) Para demostrar si forman base de los cuaterniones deben cumplir que:

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, tomamos las matrices de Pauli como bases de cuaterniones

$$(\sigma_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$(\sigma_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$(\sigma_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

No dan $-I$, sin embargo si multiplicamos las matrices de Pauli por $i = \sqrt{-1}$, $(i\sigma_1)^2 = (i\sigma_2)^2 = (i\sigma_3)^2 = -I$

$$|b\rangle = \begin{bmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{bmatrix} = x\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} + y\underbrace{\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}}_{i\sigma_3} + a\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{i\sigma_2} + b\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}}_{i\sigma_1}$$

$|b\rangle$ puede ser expresada como combinación lineal de la base de cuaterniones:

$$|b\rangle = q = x + y\hat{k} + a\hat{j} + b\hat{i} = x + b\hat{i} + a\hat{j} + y\hat{k}$$

f) Se debe verificar que $|q_1\rangle^2 = |q_2\rangle^2 = |q_3\rangle^2 = -I$

$$|q_1\rangle^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$|q_2\rangle^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$|q_3\rangle^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

Ahora, que $|q_1\rangle|q_2\rangle = |q_3\rangle$ y $|q_2\rangle|q_1\rangle = -|q_3\rangle$

$$|q_1\rangle|q_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = |q_3\rangle$$

$$|q_2\rangle|q_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -|q_3\rangle$$

Y $|q_1\rangle|q_2\rangle|q_3\rangle = |q_3\rangle|q_3\rangle = |q_3\rangle^2 = -I$, entonces sí forman base para los cuaterniones

g) El resultado de dicho producto interno:

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^* \odot |b\rangle$$

da un cuaternión, por ende no es buena definición de producto interno, ya que este debe resultar en un escalar.

h)

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[|c\rangle - |q_1\rangle \odot |c\rangle \odot |q_1\rangle\right] \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left[|c\rangle - |q_1\rangle \odot (c_0 + c_i|q_i\rangle) \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|c\rangle - (-c^1 + c^0|q_1\rangle - c^3|q_2\rangle + c^2|q_3\rangle) \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|c\rangle - (-c^0 - c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c^3|q_3\rangle)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[c^0 + c_1|q_1\rangle + \cancel{c_2|q_2\rangle} + \cancel{c_3|q_3\rangle} + c^0 + c^1|q_1\rangle - \cancel{c^2|q_2\rangle} - \cancel{c^3|q_3\rangle}\right]$$

$$= c^0 + c_1|q_1\rangle \in \mathbb{C}$$

$\rightarrow \langle a|a\rangle \geq 0$

$$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a|a\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|a\rangle} \odot |q_1\rangle\right]$$

$$\widetilde{\langle a|a\rangle} = |a\rangle^* \odot |a\rangle = (a_0^2 + \|a\|^2, -\cancel{a_0 a} + \cancel{a_0 a} + \overset{0}{\cancel{(-a\times a)}})$$

$$\Rightarrow \langle a|a\rangle = \frac{1}{2}\left[a_0^2 + \|a\|^2 - |q_1\rangle \odot (a_0^2 + \|a\|^2) \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a_0^2 + \|a\|^2 - (-(a_0^2) - (\|a\|^2))\right]$$

$$= a_0^2 + \|a\|^2 \geq 0 \checkmark$$

$\rightarrow \langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^* \odot |b\rangle = (a_0 b_0 + a\cdot b,\ a_0 b - b_0 a + (-a\times b)) = (c_0, c_i|q_i\rangle)$$

$$\widetilde{\langle b|a\rangle} = |b\rangle^* \odot |a\rangle = (b_0 a_0 + b\cdot a,\ b_0 a - a_0 b + (-b\times a))$$

$$= (a_0 b_0 + a\cdot b, -(a_0 b - b_0 a + (-a\times b))) = (c_0, -c_i|q_i\rangle)$$

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |c\rangle = \widetilde{\langle b|a\rangle}^*$$

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[|c\rangle - |a_1\rangle \odot |c\rangle \odot |a_1\rangle] = c_0 + c_1|a_1\rangle$$

$$\langle b|a\rangle = \frac{1}{2}[|c\rangle^* - |a_1\rangle \odot |c^*\rangle \odot |a_1\rangle] = c_0 - c_1|a_1\rangle$$

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^* \checkmark$$

$\rightarrow |a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in H, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$

$$\langle a|\alpha b + \beta c\rangle = \frac{1}{2}\left[\widehat{\langle a|\alpha b+\beta c\rangle} - |a_1\rangle \odot \widehat{\langle a|\alpha b+\beta c\rangle} \odot |a_1\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \Big[(a_0(\alpha b_0 + \beta c_0) + \mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}), a_0(\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}) - (\alpha b_0 + \beta c_0)\mathbf{a} + \mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c})\Big]$$

$$= [\alpha(a_0b_0 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + \beta(a_0c_0 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}), \alpha(a_0\mathbf{b} - b_0\mathbf{a}) + \beta(a_0\mathbf{c} - c_0\mathbf{a}) + \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \beta(\mathbf{a}\times\mathbf{c})]$$

$$= \alpha[a_0b_0 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, a_0\mathbf{b} - b_0\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{b}] + \beta[a_0c_0 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, a_0\mathbf{c} - c_0\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}]$$

$$= \alpha\widehat{\langle a|b\rangle} + \beta\widehat{\langle a|c\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle a|\alpha b+\beta c\rangle = \frac{1}{2}\left[(\alpha\widehat{\langle a|b\rangle} + \beta\widehat{\langle a|c\rangle}) - |a_1\rangle \odot (\alpha\widehat{\langle a|b\rangle} + \beta\widehat{\langle a|c\rangle}) \odot |a_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\alpha\widehat{\langle a|b\rangle} + \beta\widehat{\langle a|c\rangle}) - |a_1\rangle \odot \alpha\widehat{\langle a|b\rangle} \odot |a_1\rangle - |a_1\rangle \odot \beta\widehat{\langle a|c\rangle} \odot |a_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\left[\widehat{\langle a|b\rangle} - |a_1\rangle \odot \widehat{\langle a|b\rangle} \odot |a_1\rangle\right] + \frac{1}{2}\beta\left[\widehat{\langle a|c\rangle} - |a_1\rangle \odot \widehat{\langle a|c\rangle} \odot |a_1\rangle\right]$$

$$= \alpha\langle a|b\rangle + \beta\langle a|c\rangle$$

$\rightarrow$

$$\langle \alpha a + \beta b|c\rangle = \langle c|\alpha a + \beta b\rangle^* = (\alpha\langle c|a\rangle + \beta\langle c|b\rangle)^*$$

Por propiedades de complejos:

1) $(z+w)^* = z^* + w^*$
2) $(zw)^* = z^* w^*$

$$\Rightarrow (\alpha\langle c|a\rangle + \beta\langle c|b\rangle)^* = \alpha^*\langle c|a\rangle^* + \beta^*\langle c|b\rangle^*$$

$$\Rightarrow \langle \alpha a + \beta b|c\rangle = \alpha^*\langle a|c\rangle + \beta^*\langle b|c\rangle \checkmark$$

Continuación h)

$\rightarrow |a\rangle, |0\rangle \in \mathbb{H}$

$$\langle a|0\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \widetilde{a|0}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a|0}\rangle \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\overset{0}{\cancel{a^* \odot 0}}) - |q_1\rangle \odot (\overset{0}{\cancel{a^* \odot 0}}) \odot |q_1\rangle\right]$$

$$= 0$$

$$\langle 0|a\rangle = \frac{1}{2}\left[\cancel{\langle \widetilde{0|a}\rangle} - |q_1\rangle \odot \cancel{\langle \widetilde{0|a}\rangle} \odot |q_1\rangle\right] = 0$$

$\therefore \quad \langle a|0\rangle = \langle 0|a\rangle = 0$

i) $\| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

$$|a\rangle^* \odot |a\rangle = (a_0^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, -\cancel{a_0\mathbf{a}} + \cancel{a_0\mathbf{a}} + (-\cancel{\mathbf{a}\times\mathbf{a}}))$$
$$= (a_0^2 + \|\mathbf{a}\|^2, 0) \to \text{Número real convencional}$$

$\| |a\rangle \| = \sqrt{a_0^2 + \|a\|^2}$, los cuadrados indican positividad, por lo que $a_0^2 + \|a\|^2 \geq 0$, solamente 0 si $|a\rangle = (0, \vec{0})$

→ $\| \alpha |a\rangle \|$, definimos $\alpha |a\rangle = |\mathbf{c}\rangle = (\alpha a_0, \alpha \mathbf{a})$

$$\| \alpha |a\rangle \| = \| |c\rangle \| = \sqrt{|c\rangle^* \odot |c\rangle}$$
$$|c\rangle^* \odot |\mathbf{c}\rangle = (\alpha^2 a_0^2 + \alpha^2 \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \vec{0}) = \alpha^2 (a_0^2 + \|a\|^2, \vec{0})$$

$\| \alpha |a\rangle \| = \sqrt{\alpha^2 (a_0^2 + \|a\|^2)} = |\alpha| \sqrt{a_0^2 + \|a\|^2} = |\alpha| \| |a\rangle \|$ cumple

→ $|d\rangle = (d_0, \mathbf{d})$

$$\| |a\rangle + |d\rangle \|^2 \leq (\| |a\rangle \| + \| |d\rangle \|)^2$$
$$(|a\rangle + |d\rangle)(|a\rangle^* + |d\rangle^*) = \| |a\rangle \|^2 + \| |d\rangle \|^2 + |a\rangle \odot |d\rangle^* + |d\rangle \odot |a\rangle^*$$
$$= \| |a\rangle \|^2 + \| |d\rangle \|^2 + \underbrace{2(a_0 d_0 + a \cdot d, \vec{0})}_{2R_e(|a\rangle \odot |d\rangle^*)}$$

$$\cancel{\| |a\rangle \|^2} + \cancel{\| |d\rangle \|^2} + 2R_e(|a\rangle \odot |d\rangle^*) \leq \cancel{\| |a\rangle \|^2} + 2 \| |a\rangle \odot |d\rangle \| + \cancel{\| |d\rangle \|^2}$$
$$\cancel{2} R_e(|a\rangle \odot |d\rangle^*) \leq \cancel{2} \| |a\rangle \odot |d\rangle \|$$

Dada la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\langle q|r\rangle| \leq \| |q\rangle \| \cdot \| |r\rangle \|$
y en este caso $\langle q|r\rangle = R_e(|q\rangle \odot |r\rangle)$

Sabemos que $R_e(|a\rangle \odot |d\rangle^*) \leq |R_e(|a\rangle \odot |d\rangle^*)|$, por lo que es coherente pensar que:

$$R_e(|a\rangle \odot |d\rangle^*) \leq \| |a\rangle \| \cdot \| |d\rangle \|$$

Se cumple, ∴, es una buena definición de norma

$j)\ |a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = |a\rangle \odot \frac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2} = \frac{1}{\||a\rangle\|^2} \underbrace{(|a\rangle \odot |a\rangle^*)}_{\||a\rangle\|^2} = \frac{\||a\rangle\|^2}{\||a\rangle\|^2} = 1$

Por lo tanto $|\bar{a}\rangle$ es el elemento simétrico de $|a\rangle$.

$k) \rightarrow |a\rangle = a_0 + \mathbf{a}\ ,\ |b\rangle = b_0 + \mathbf{b}$

$|a\rangle \odot |b\rangle = (\underbrace{a_0 b_0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}_{c_0}, \underbrace{a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}) = (c_0, \mathbf{c}) = |c\rangle \in \mathbb{H}$

$\rightarrow |a\rangle = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 i & a_2 + a_3 i \\ -a_2 + a_3 i & a_0 - a_1 i \end{bmatrix} = M_1\ ,\ |b\rangle = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 i & b_2 + b_3 i \\ -b_2 + b_3 i & b_0 - b_1 i \end{bmatrix} = M_2$

$|d\rangle = \begin{bmatrix} d_0 + d_1 i & d_2 + d_3 i \\ -d_2 + d_3 i & d_0 - d_1 i \end{bmatrix} = M_3$

$|a\rangle \odot (|b\rangle \odot |d\rangle) = (|a\rangle \odot |b\rangle) \odot |d\rangle$

$M_1(M_2 M_3) = (M_1 M_2) M_3$, y sabemos que la multiplicación de matrices es asociativa por lo que la de los cuaterniones también.

$\rightarrow |n\rangle = 1 + \vec{0}$

$|a\rangle \odot |n\rangle = (1 \cdot a_0 - \mathbf{a}\cdot\vec{0}, a_0\vec{0} + 1\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\vec{0}) = (a_0, \mathbf{a}) = |a\rangle$

$\rightarrow$ Sobre la existencia de un elemento inverso, el del punto j), es decir $|\bar{a}\rangle$:

$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = |n\rangle = 1\ ,\ |\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2}$

Por lo que la multiplicación sí forma grupo

$\odot$	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

I) $\| |v'\rangle \| = \| |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle \| = \| |\bar{a}\rangle \| \cdot \| |v\rangle \| \cdot \| |a\rangle \|$

Para que la norma se mantenga, $\| |v'\rangle \| = \| |v\rangle \|$, entonces el vector $|a\rangle$ y $|\bar{a}\rangle$ deben ser unitarios para que su norma sea igual a 1

$$\| |v'\rangle \| = \cancelto{1}{\| |\bar{a}\rangle \|} \cdot \| |v\rangle \| \cdot \cancelto{1}{\| |a\rangle \|}$$

$$\| |v'\rangle \| = \| |v\rangle \|$$

En el caso de que dichos no sean unitarios, la norma no se conservará.