Algoritmos e Estrutura de Dados

Fabrício Olivetti de França

02 de Fevereiro de 2019

Topics

1. Algoritmos de Ordenação Eficientes

Algoritmos de Ordenação Eficientes

Heap Sort

Na primeira aula de ordenação aprendemos sobre o Selection Sort. A limitação desse algoritmo estava justamente na busca pelo menor valor, que sempre demandava n comparações, levando a uma complexidade $O(n^2)$.

Heap Sort

E se pudessemos encontrar o menor ou maior valor de uma lista de forma eficiente?

Heap Sort

Isso é possível utilizando a árvore **Max-Heap**!

Max-Heap

Uma Max-Heap é uma árvore binária completa, ou seja, todos os seus níves, exceto o último, possuem todos os nós. Além disso, no último nível os nós estão sempre a esquerda.

Max-Heap

Um outro pré-requisito é que:

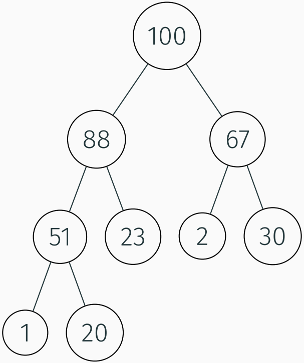
$pai(i) > i$

para todos os nós i.

Max-Heap

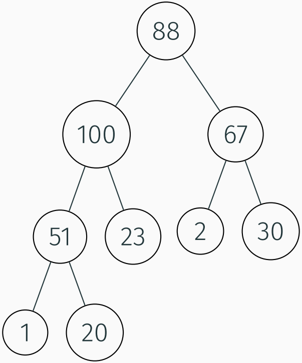
Com isso garantimos que a raiz da árvore **sempre** conterá o maior elemento.

Max-Heap



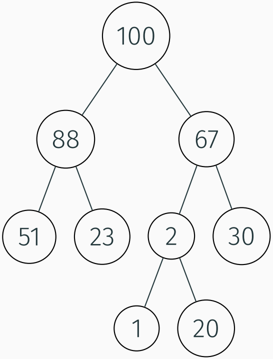
Max-Heap

Essa não é uma max-heap!



Max-Heap

Essa não é uma max-heap!



Max-Heap

Por ser uma árvore binária completa, podemos representá-la em forma de array de tal forma que:

- $right(i) = 2 * i + 1$
- $left(i) = 2 * i + 2$

Max-Heap

Para transformar uma lista em uma Max-Heap, devemos aplicar um algoritmo de *reparação* da metade até o começo.

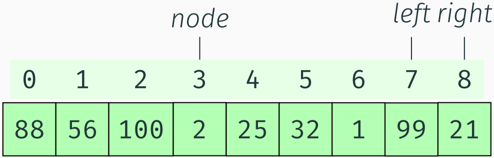
Max-Heap

Esse algoritmo verificar se um certo nó está na posição correta, caso não esteja, move ele para baixo até atingir uma posição que satisfaça as condições do Max-Heap.

Max-Heap

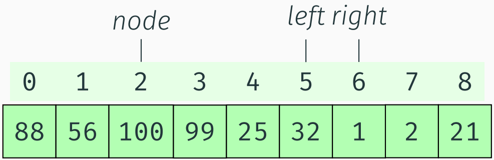
```c
void max_heapify(registro *base, int node, int n) {
    int left = 2*node + 1,right = 2*node + 2;
    int largest = node;
    if (left<n && base[left].key > base[largest].key])
        largest = left;
    if (right <n && base[right].key > base[largest].key])
        largest = right;

    if (largest != node)
    {
        swap(base+node, base+largest);
        max_heapify(base, largest, n);
    }
}
```

Heapify



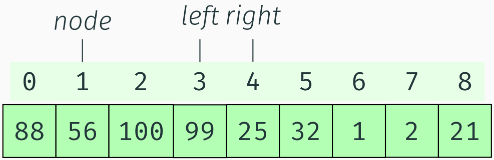
0	1	2	3	4	5	6	7	8
88	56	100	2	25	32	1	99	21

Heapify



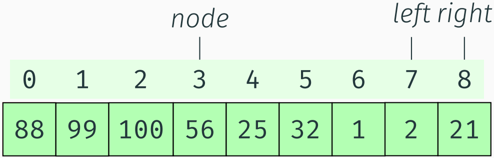
0	1	2	3	4	5	6	7	8
88	56	100	99	25	32	1	2	21

Heapify



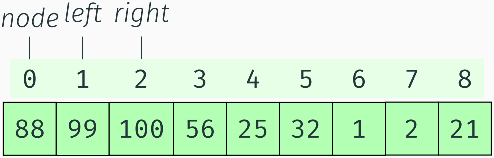
	node		*left*	*right*				
0	1	2	3	4	5	6	7	8
88	56	100	99	25	32	1	2	21

Heapify



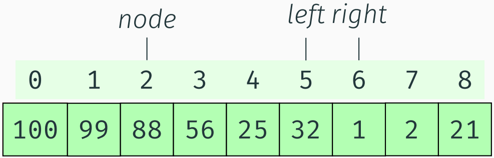
0	1	2	3	4	5	6	7	8
88	99	100	56	25	32	1	2	21

Heapify



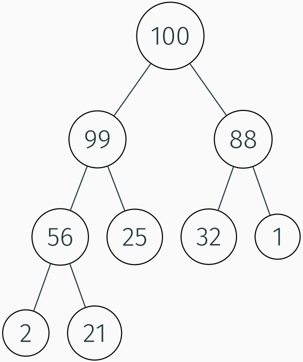
0	1	2	3	4	5	6	7	8
88	99	100	56	25	32	1	2	21

Heapify



		node			*left*	*right*		
0	1	2	3	4	5	6	7	8
100	99	88	56	25	32	1	2	21

Heapify



Heap Sort

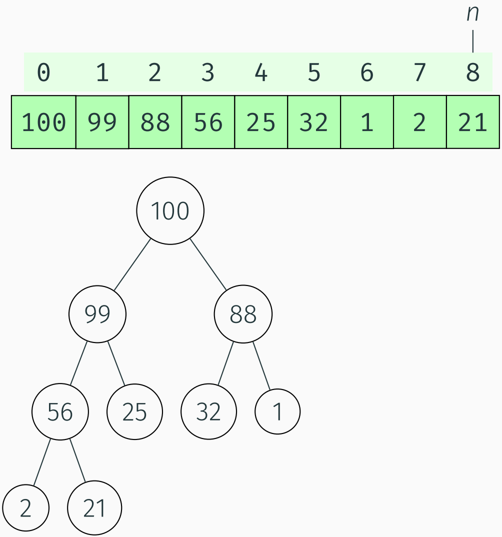
Com isso, basta repetir n vezes o procedimento:

- Troca o primeiro elemento pelo último (o último está na posição correta)
- Reduz n em 1
- Aplica `heapify` na raiz

Heap Sort

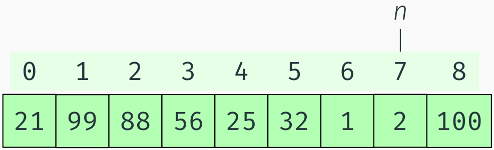
```
void heapSort(registro *base, int n) {
    for (int i=n/2-1; i>=0; i--)
        max_heapify(base, i, n);

    for (int i=n-1; i>0; i--)
    {
        swap(base, base+i);
        --n;
        max_heapify(base, 0, n);
    }

}
```

Heap Sort

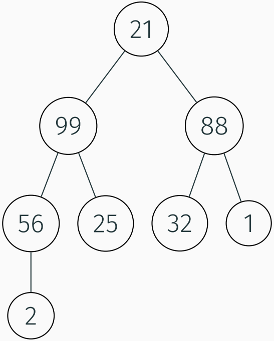


0	1	2	3	4	5	6	7	8
100	99	88	56	25	32	1	2	21

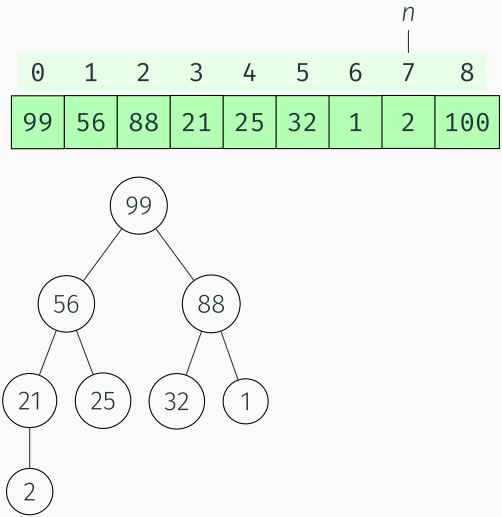
Heap Sort



0	1	2	3	4	5	6	7	8
21	99	88	56	25	32	1	2	100

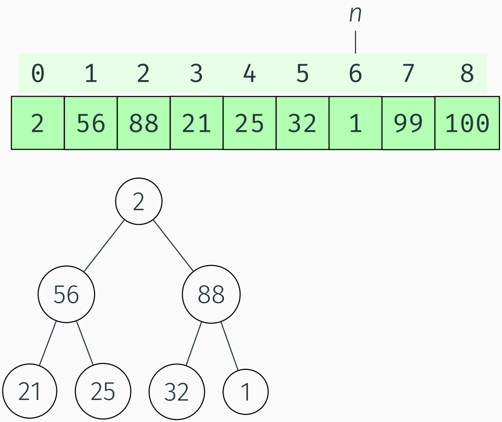


Heap Sort



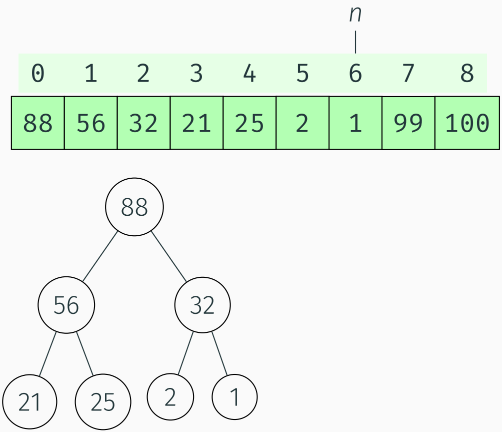
0	1	2	3	4	5	6	7	8
99	56	88	21	25	32	1	2	100

Heap Sort



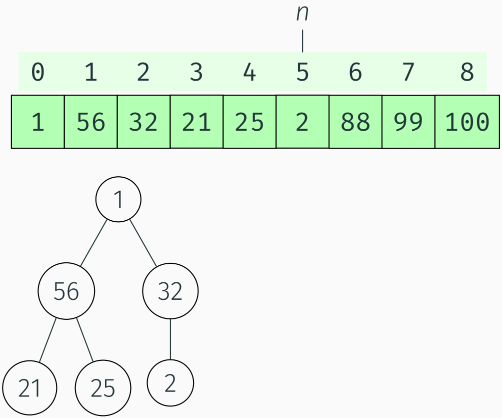
0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	56	88	21	25	32	1	99	100

Heap Sort



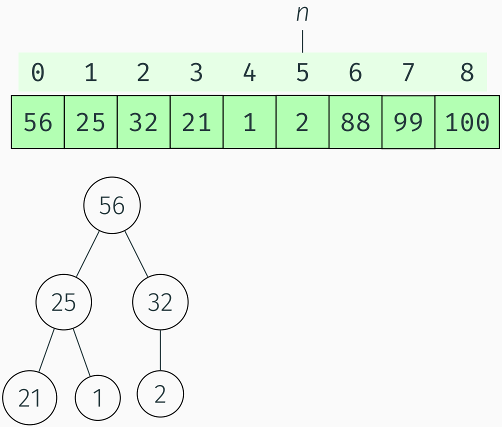
0	1	2	3	4	5	6	7	8
88	56	32	21	25	2	1	99	100

Heap Sort



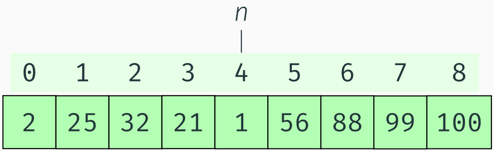
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	56	32	21	25	2	88	99	100

Heap Sort

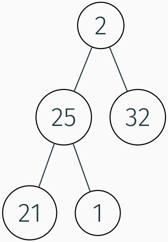


0	1	2	3	4	5	6	7	8
56	25	32	21	1	2	88	99	100

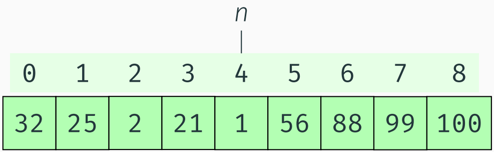
Heap Sort



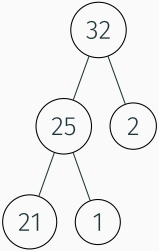
0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	25	32	21	1	56	88	99	100



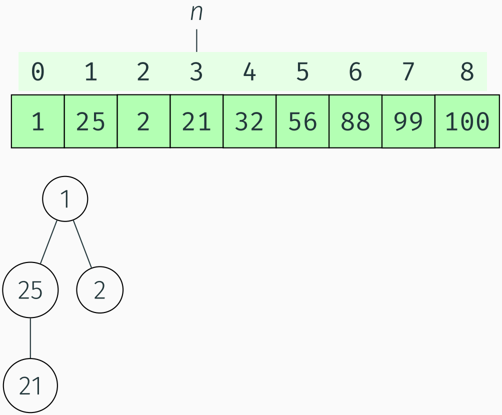
Heap Sort



0	1	2	3	4	5	6	7	8
32	25	2	21	1	56	88	99	100

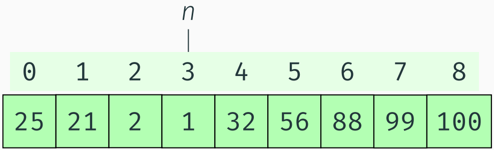


Heap Sort

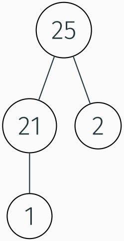


0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	25	2	21	32	56	88	99	100

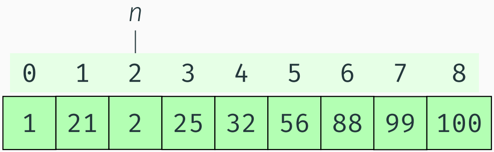
Heap Sort



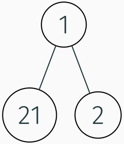
0	1	2	3	4	5	6	7	8
25	21	2	1	32	56	88	99	100



Heap Sort



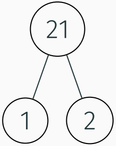
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	21	2	25	32	56	88	99	100



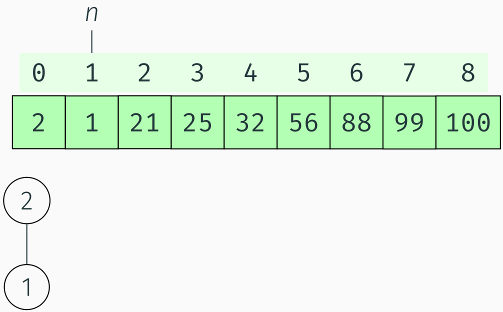
Heap Sort

n

0	1	2	3	4	5	6	7	8
21	1	2	25	32	56	88	99	100

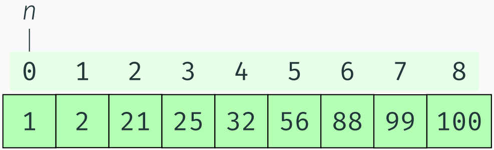


Heap Sort



0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	21	25	32	56	88	99	100

Heap Sort



0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	21	25	32	56	88	99	100

Heap Sort

	Insert	Bubble	Select	Quick	Merge	Heap
estável	✓	✓			✓	
in-place	✓	✓	✓	✓		✓
online	✓					
adaptivo	✓	✓				

Complexidade Assintótica

Cada chamada de `heapify` tem complexidade $O(\log n)$, esse procedimento é chamado n vezes, sendo assim temos complexidade $O(n \log n)$ em todos os casos.

Complexidade Assintótica

	Insert	Bubble	Select	Quick	Merge	Heap
melhor	$O(n)$	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
pior	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
médio	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$

Bucket Sort

Até então os melhores algoritmos tem um melhor caso de $O(n \log n)$, podemos fazer melhor?

Bucket Sort

Em casos específicos em que:

- Os dados estão bem distribuídos
- Sabemos a faixa de valores

Podemos construir um algoritmo com complexidade $O(n)$.

Bucket Sort

Um desses algoritmos é chamado **Bucket Sort**. A ideia geral é criar k baldes sendo que cada balde representa uma faixa de valores.

Bucket Sort

Para cada registro da lista, insere ele no balde correspondente.

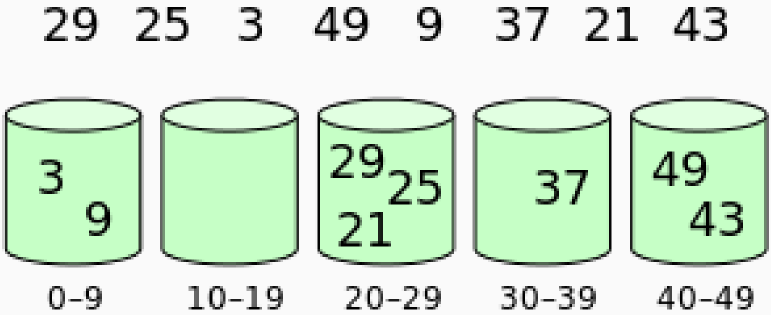


Figura 1: FONTE: https://en.wikipedia.org/wiki/Bucket_sort

Bucket Sort

No caso de cada balde conter apenas um registro, basta retirá-los na ordem dos baldes e eles estarão ordenados.

Bucket Sort

Caso contrário, basta ordenar os registros dentro de cada balde e depois desempacotá-los.

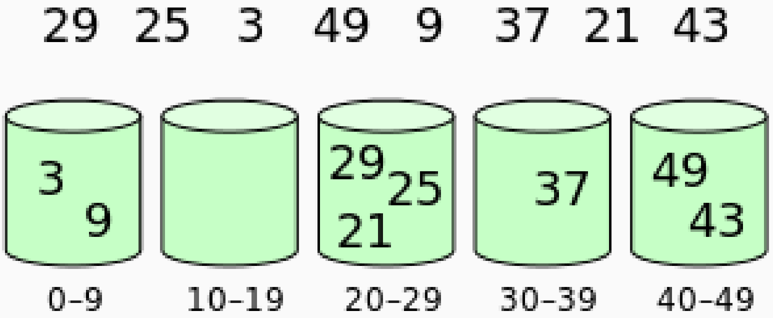


Figura 2: FONTE: https://en.wikipedia.org/wiki/Bucket_sort

Bucket Sort

A quantidade de operações para colocar cada registro dentro do balde é na ordem de $O(n)$.

Para retirá-los, também $O(n)$.

A ordenação, podemos utilizar Insertion Sort que, para poucos elementos e quase ordenados, tem custo $O(k \cdot n)$.

Bucket Sort

```
void bucketSort(registro *base, int n, int n_buckets) {
    info ** buckets = malloc(sizeof(info *)*n_buckets);
    registro * x = malloc(sizeof(registro)*n);
    int k, j, M=base[0].key;

    for (int i=1; i<n; i++) M = MAX(base[i].key, M);
```

Bucket Sort

```
/* coloca no balde */
for (int i=0; i<n; i++)
{
    k = floor((float)base[i].key / M *
                 (n_buckets-1));
    buckets[k] = insere_fim(buckets[k], i);
}
```

Bucket Sort

```
/* remove do balde e ordena */
k=0; j=0;
for (int i=0; i<n_buckets; i++)
{
    while (buckets[i]!=NULL)
    {
        x[k] = base[buckets[i]->x];
        buckets[i] = buckets[i]->prox;
        ++k;
    }
    insertionSort(x + j, k - j);
    j = k;
}
```

Bucket Sort

	Insert	Bubble	Select	Quick	Merge	Heap	Bucket
estável	✓	✓			✓		
in-place	✓	✓	✓	✓		✓	
online	✓						
adaptivo	✓	✓					

Complexidade Assintótica

Apesar de o melhor caso e caso médio a complexidade ser da ordem de $O(n)$, no pior caso temos que todos os elementos são alocados para um único balde e, nesse caso, a complexidade é a mesma do Insertion Sort, $O(n^2)$.

Uma análise cuidadosa dos dados pode evitar o pior caso.

Complexidade Assintótica

	Insert	Bubble	Select	Quick	Merge	Heap	Bucket
melhor	$O(n)$	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
pior	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
médio	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$

Limites da ordenação por comparação

Considere o algoritmo que determine o maior valor entre dois números:

```
int maior(int x, int y) {
    if (x>y) return x;
    return y;
}
```

Limites da ordenação por comparação

E se quisermos adaptar para três números?

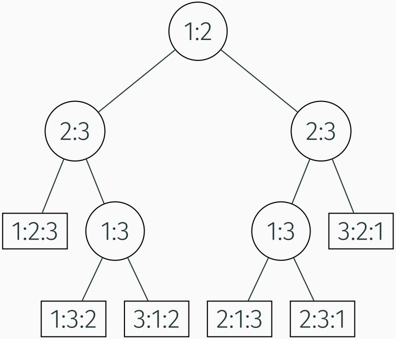
```
int maior(int x, int y, int z) {
    if (x>y)
    {
       if (x>z) return x;
       return z;
    } else {
       if (y>z) return y;
       return z;
    }
}
```

Limites da ordenação por comparação

Quantas comparações precisamos fazer para n elementos?

Limites da ordenação por comparação

Podemos representar isso como uma árvore de comparações (vamos alterar nosso problema para ordenação):



Limites da ordenação por comparação

Cada nó externo dessa árvore representa uma permutação dos elementos de uma lista, e cada nó interno uma comparação feita para ganhar informação.

Limites da ordenação por comparação

Com isso segue que temos $n!$ nós externos em uma árvore que ordena n elementos sem redundância. Sendo essa uma árvore binária, temos então um limitante em $O(\log n!)$ comparações.

Limites da ordenação por comparação

Sabemos que:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

e

$\log 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log n$

Limites da ordenação por comparação

Como estamos fazendo uma análise assintótica, podemos dizer que $O(\log n!) = O(n \log n)$.

Ou seja, os algoritmos de comparação estão limitados nessa ordem de complexidade.