Algoritmos e Estrutura de Dados

Fabrício Olivetti de França

02 de Fevereiro de 2019

UFABC

CMCC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Center for Mathematics, Computation and Cognition

Topics

1. Algoritmos de Ordenação

2. Algoritmos Simples

Algoritmos de Ordenação

O problema de ordenação

Ordenação: *substantivo feminino*, arranjo, distribuição metódica, organizada; ordem.

O problema de ordenação

Ordenação (na computação): organizar registros em ordem ascendente ou descendente.

O problema de ordenação

- Encontrar registros similares (de acordo com sua chave).
- Rank de pontuação (ex.: Enem, competição, etc.)
- Interseção de arquivos.
- Busca (nossas melhores buscas partiam de registros ordenados).

O problema de ordenação

Dado um conjunto de registros:

$R_1, R_2, \ldots, R_n$

cada qual com uma chave K_i.

O problema de ordenação

Desejamos encontrar uma permutação $\pi(R)$ tal que:

$K_{\pi(1)} \leq K_{\pi(2)} \leq \ldots \leq K_{\pi(n)}$

O problema de ordenação

Para isso precisamos estabelecer uma relação binária $(K, \leq)$ de tal forma que seja possível ordenar nosso conjunto.

Pre-ordem

Essa relação é uma **pré-ordem** se temos as propriedades:

- **Identidade:** para todo $K_i \in K$, $K_i \leq K_i$.
- **Transitividade:** se $K_i \leq K_j$ e $K_j \leq K_l$, então $K_i \leq K_l$.
- **Associatividade:** $(K_i \leq K_j) \leq K_l \implies K_i \leq (K_j \leq K_l)$.

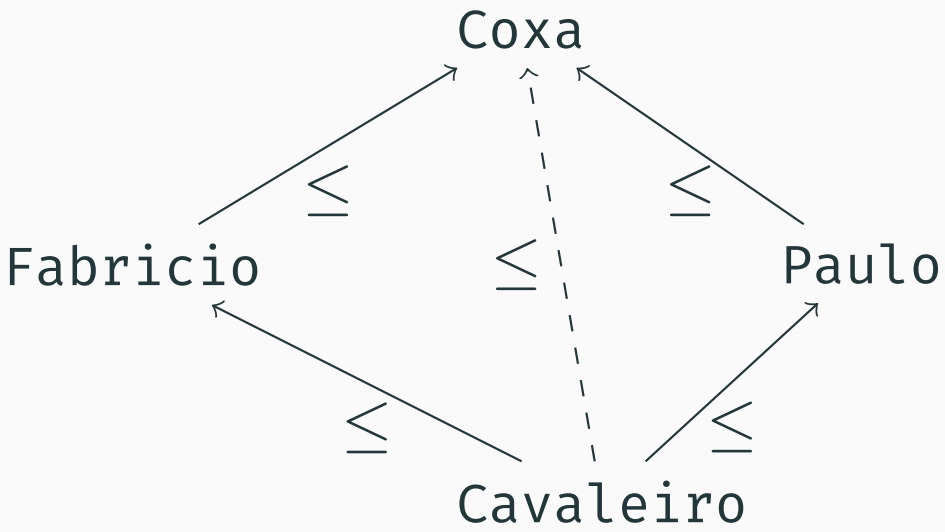
Notem que na pré-ordem podemos ter casos em que um certo K_i não tem relação com um K_j.

Ordem parcial

Essa relação se torna uma **ordem parcial** ou **poset** (*partially ordered set*) se incluírmos a propriedade:

$$K_i \leq K_j, K_j \leq K_i \implies K_i = K_j$$

Poset



Ordem total

Finalmente, a **ordem total** ou **ordem linear** acrescenta:

$$\forall K_i, K_j \in K : K_i \leq K_j \vee K_j \leq K_i$$

Para nossos algoritmos assumiremos uma ordem total das chaves dos registros.

O problema de ordenação

O algoritmo de ordenação é dito **estável** se os registros com chaves idênticas mantém sua ordem relativa inicial.

O problema de ordenação

O algoritmo de ordenação é dito **in-place** se ele ordena sem uso de memória adicional (exceto por uma constante).

O problema de ordenação

O algoritmo de ordenação é dito **adaptável** se a ordenação atual dos dados influencia a sequência de operações realizadas.

O problema de ordenação

O algoritmo de ordenação é dito **online** se ele realiza a operação de ordenação enquanto recebe novos elementos.

O problema de ordenação

Esses algoritmos também podem ser classificados como:

- **Ordenação interna:** quando todos os registros estão armazenados na memória RAM.
- **Ordenação externa:** quando apenas parte dos registros podem ser alocados na memória RAM.

O problema de ordenação

Os algoritmos de ordenação possuem um limitante em sua complexidade, as classes de algoritmos baseadas em comparação não conseguem ser melhor do que $O(n \cdot \log n)$, enquanto os algoritmos baseado em contagem podem chegar a $O(n)$ (mas com implicações).

Exercício

Dado um conjunto de cinco registros R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 contendo chaves numéricas, escreva um algoritmo para ordenar essas chaves em ordem crescente.

Exercício

Dado o tempo curto para resolver o problema, as soluções mais prováveis criadas por vocês são:

1. **Insertion sort:** cada item é considerado um de cada vez e inserido em sua posição correta (como você ordena uma mão de baralho).
2. **Exchange sort:** se dois itens estão fora de ordem em relação um ao outro, troca a posição desses.
3. **Selection sort:** encontra o menor valor e insere na posição inicial, depois o segundo menor e assim por diante.
4. **Enumeration sort:** cada item é comparado com todos os outros para determinar sua posição.

Exercício

5. **Algoritmo específico:** feito com *if-else* exclusivamente para cinco valores.
6. **Preguiçoso:** você ignorou o pedido em fazer o exercício e só esperou a resposta (sinta-se envergonhado!)
7. **Um novo algoritmo melhor que todos os outros existentes:** saia imediatamente da aula e vá escrever um artigo!

O problema de ordenação

Existem diversos algoritmos de ordenação, e não existe um algoritmo supremo!

Cada algoritmo possui vantagens em relação a outros dependendo da situação. É importante conhecer tais características para escolher o algoritmo que irá utilizar.

Tipos de Algoritmos de Ordenação

Os algoritmos de ordenação podem ser agrupados como (em itálico os algoritmos que aprenderemos no curso):

- **Contagem:** counting sort.
- **Inserção:** *insertion sort*, binary insertion sort, shellsort.
- **Troca:** *bubble sort*, *quick sort*.
- **Seleção:** *selection sort*, *heap sort*.
- **Mistura:** *merge sort*
- **Distribuição:** radix sort, *bucket sort*.

Base dos algoritmos de ordenação

Vamos supor uma estrutura de registro com uma chave e um campo de dados:

```
typedef struct registro {
    int key;
    int data;
} registro;
```

Base dos algoritmos de ordenação

Todo algoritmo de ordenação terá a seguinte assinatura de função:

```
void sort(registro *base, int n);
```

No laboratório vamos ver como deixar o algoritmo genérico para qualquer estrutura.

Algoritmos Simples

Algoritmos Simples

Na aula de hoje iremos aprender sobre três algoritmos simples, e ineficientes de ordenação: **insertion sort**, **bubble sort** e **selection sort**.

Insertion Sort

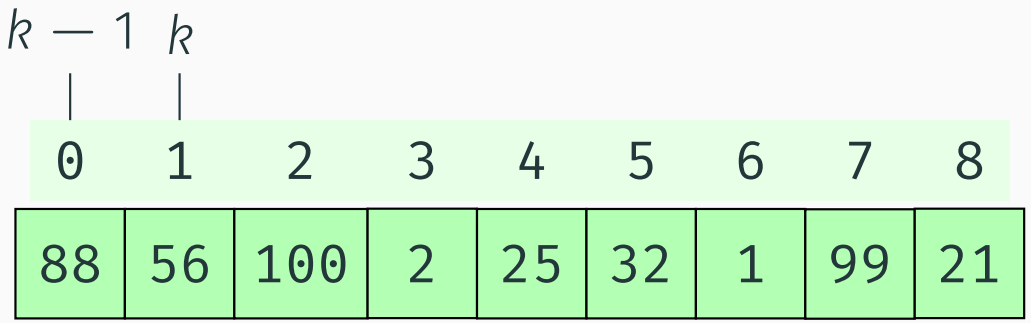
Talvez a ideia mais trivial é a de ordenar os elementos assim como ordenamos uma mão de cartas de baralho.

Insertion Sort

Parte da premissa que se os elementos de 0 a $k - 1$ já estão ordenados, o próximo passo consiste em mover o elemento k para sua posição correta.

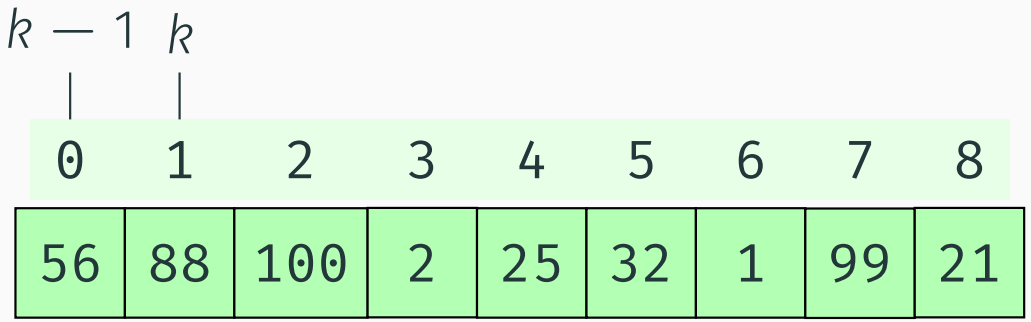
Insertion Sort

Para $k = 1$, temos que a lista até $k - 1$ possui um único elemento, e ela está ordenada!



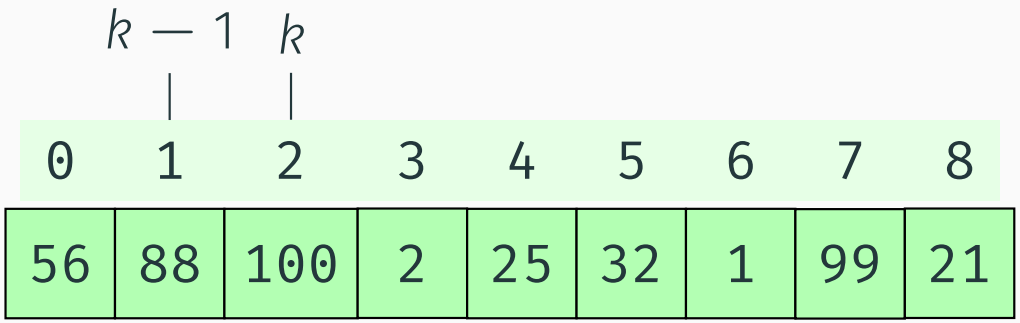
Insertion Sort

Ao inserir o elemento k na posição correta, temos que a lista de 0 a k agora está ordenada!



Insertion Sort

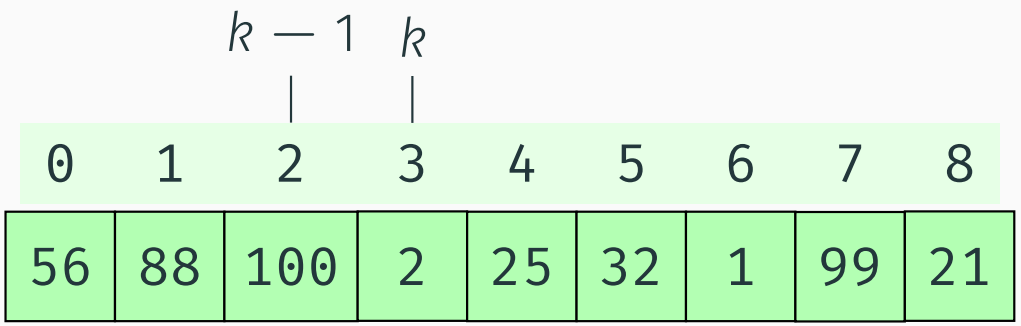
Repetimos para $k = 2$.



Nada a fazer!

Insertion Sort

Repetimos para $k = 3$.



Qual procedimento utilizar?

Insertion Sort

Basta começar de $i = k - 1$ e fazer a troca entre os elementos i e $i + 1$ caso $K_i > K_{i+1}$. Ao encontrar um caso falso, pare! (Por que?)

Insertion Sort

Com esse procedimento, temos que fazer três atribuições por movimento (o `swap`). Podemos melhorar!

Insertion Sort

Armazenamos o registro $i + 1$ em uma variável e simplesmente movemos uma casa para direita todo registro $i = k - 1 \ldots 0$ cuja chave seja maior que a chave armazenada.

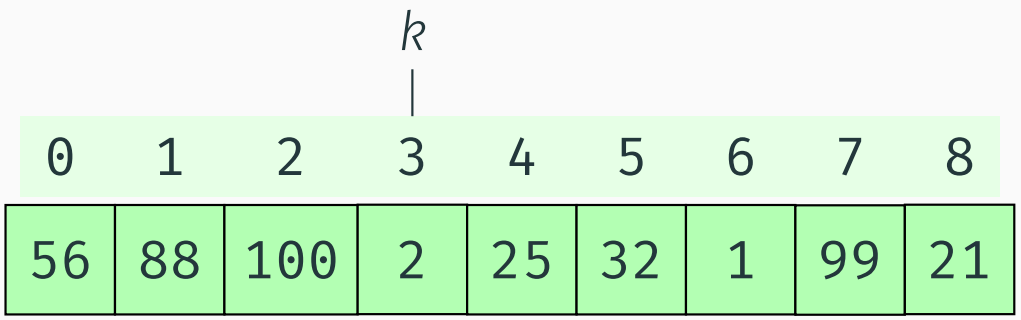
Insertion Sort

```
void insert(registro *base, int k) {
      registro x = base[k];
      --k;

      while (k >= 0 && base[k].key > x.key)
      {
          base[k+1] = base[k];
          --k;
      }
      base[k+1] = x;
}
```

Insertion Sort

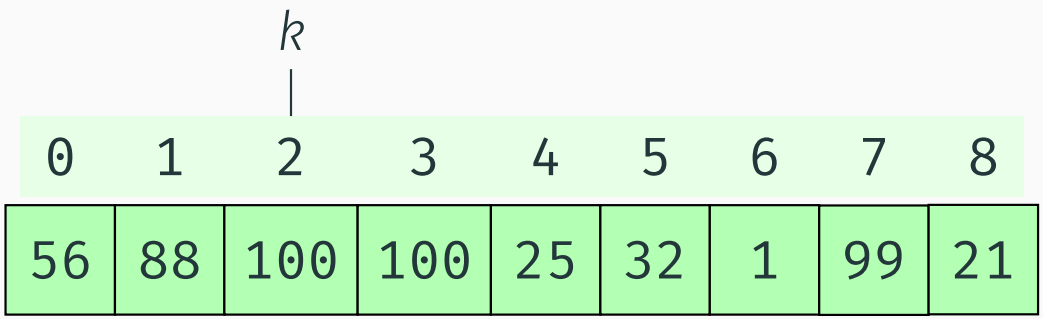
Repetimos para $k = 3$. Guardamos o registro com chave 2 e movemos os elementos maiores para direita.



2

Insertion Sort

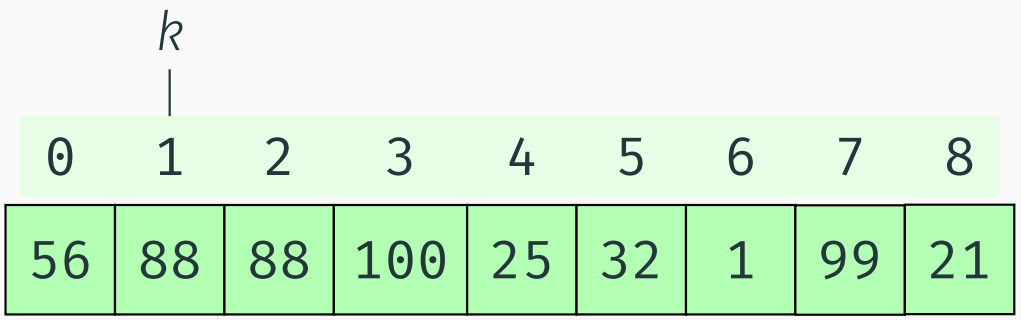
Repetimos para $k = 3$. Guardamos o registro com chave 2 e movemos os elementos maiores para direita.



2

Insertion Sort

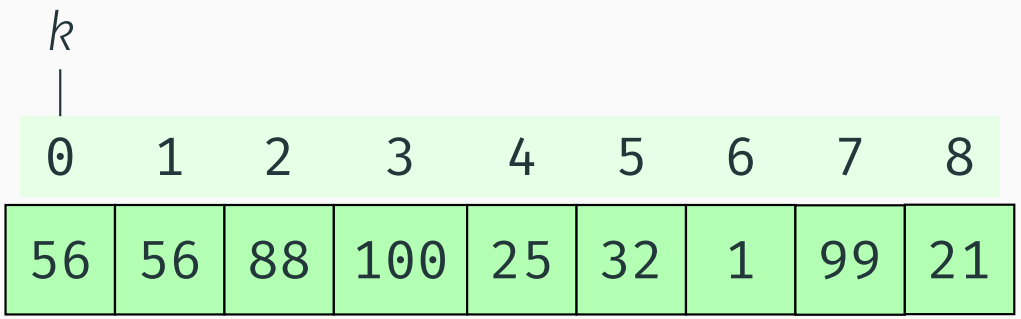
Repetimos para $k = 3$. Guardamos o registro com chave 2 e movemos os elementos maiores para direita.



2

Insertion Sort

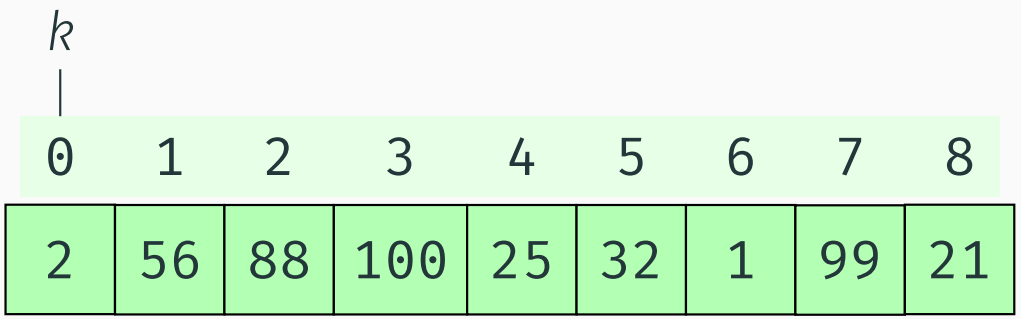
Repetimos para $k = 3$. Guardamos o registro com chave 2 e movemos os elementos maiores para direita.



2

Insertion Sort

Repetimos para $k = 3$. Guardamos o registro com chave 2 e movemos os elementos maiores para direita.



2

Insertion Sort

Com essa operação bem definida, o algoritmo de ordenação **Insertion Sort** é a repetição desse movimento iniciando em $k = 1$ até n:

```
void insertionSort(registro *base, int n) {
    int k = 1;

    while (k < n)
    {
      insert(base, k);
      ++k;
    }
}
```

Insertion Sort

	Insert
estável	✓
in-place	✓
online	✓
adaptivo	✓

Complexidade Assintótica

Para cada um dos n elementos precisamos fazer até k operações, com isso esse algoritmo tem complexidade $O\big(k \cdot n\big)$. Mas quanto é o valor de k?

No melhor, os registros já estão ordenados, então não temos que fazer nada e $k = 1$, temos então uma complexidade $O(n)$.

No pior, temos os registros em ordem inversa, então temos que os valores de k seguem a sequência $1, 2, 3, \ldots, n$. Com isso temos:

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Ou seja, no pior temos complexidade $O(n^2)$.

No médio, vamos imaginar uma variável x_{ij} que tem valor 1 caso $K_i > K_j$ e, portanto, o elemento i será movido para direita, e 0, caso contrário.

Precisamos descobrir o valor esperado da somatória de todos os pares i, j para determinar quantas trocas faremos em média:

$$m = E[\sum x_{ij}] = \sum_{E[x_{ij}]} = \sum_{\frac{1}{2}} = \frac{n \cdot (n+1)}{4}$$

Ou seja, temos um médio $O(n^2)$.

Complexidade Assintótica

O algoritmo Insertion Sort é mais rápido do que muitos algoritmos de menor complexidade para os casos em que:

- A lista já está quase ordenada.
- A lista é pequena (o quão pequena depende do processador, compilador e outros fatores, uma regra do dedão diz que $n = 10$).

Complexidade Assintótica

	Insertion
melhor	$O(n)$
pior	$O(n^2)$
médio	$O(n^2)$

Bubble Sort

No algoritmo Insertion Sort, pegamos um elemento e *afundamos* ele até seu lugar na parte mais baixa de nossa `array`.

Uma outra estratégia simples é pegar cada elemento e *flutuarmos* ele até seu lugar na parte mais alta, essa estratégia é conhecida como **Bubble Sort**.

Bubble Sort

Basicamente, o algoritmo pode ser descrito em sua forma mais abstrata como:

```
void bubbleSort(registro *base, int n) {
    while (bubbleUp(base, n));
}
```

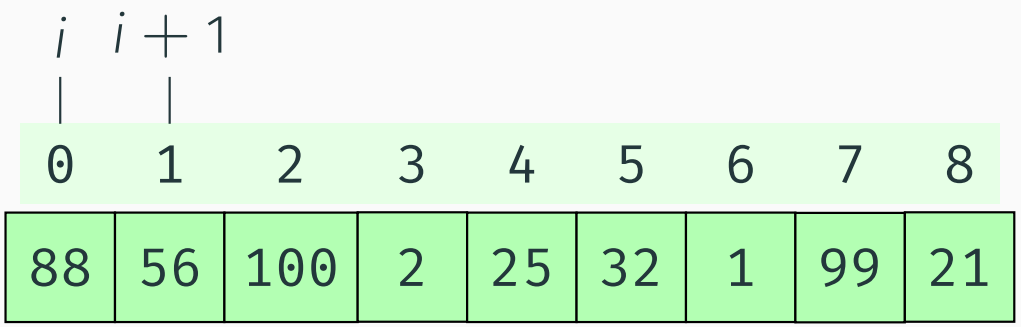
Bubble Sort

A cada passo da repetição, trocamos (`swap`) cada elemento i pelo seu vizinho $i + 1$ caso eles estejam desordenados.

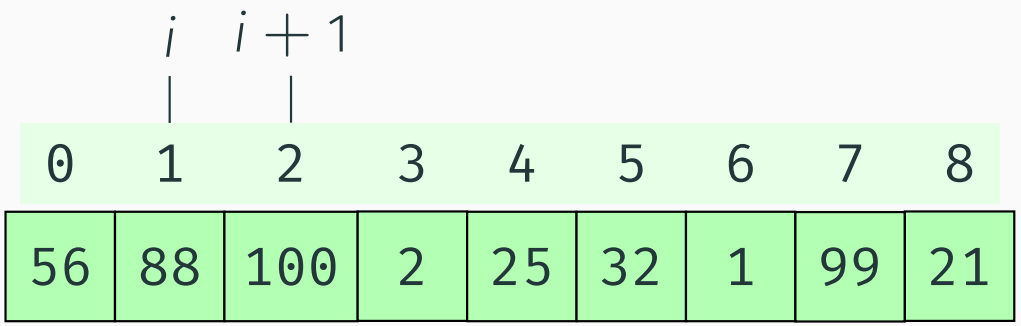
Bubble Sort

```
char bubbleUp(registro *base, int n) {
    char changed = 0;
    for (int i=0; i<n-1; i++)
    {
        if (base[i].key > base[i+1].key)
        {
            swap(base+i, base+i+1);
            changed = 1;
        }
    }
    return changed;
}
```

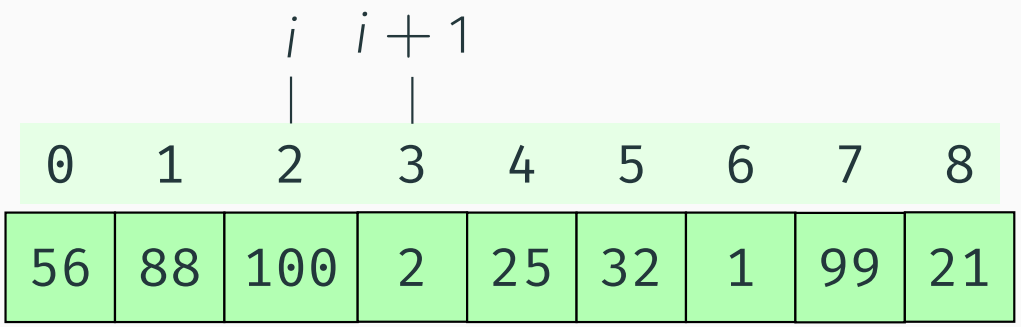
Bubble Sort



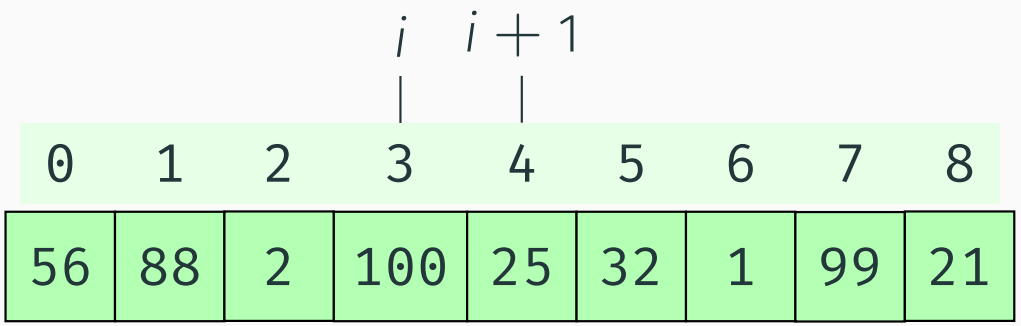
Bubble Sort



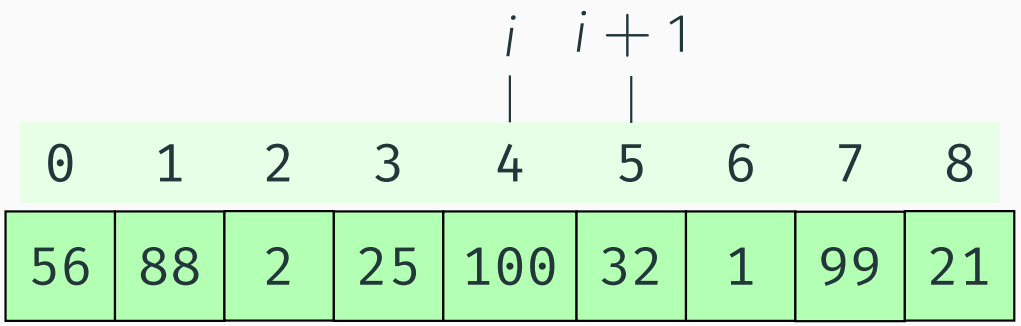
Bubble Sort



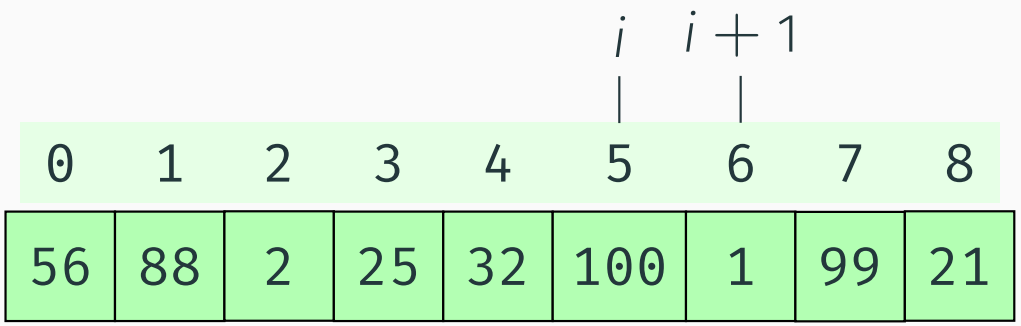
Bubble Sort



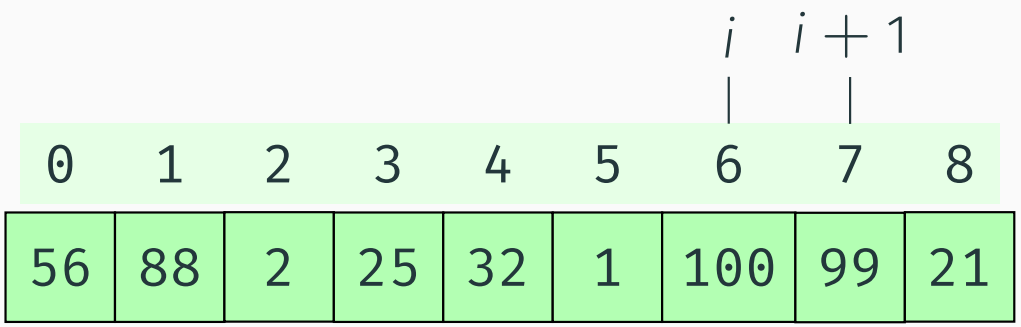
Bubble Sort



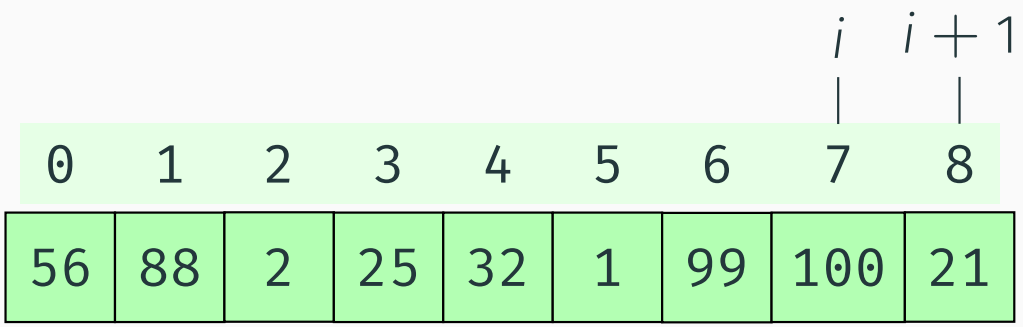
Bubble Sort



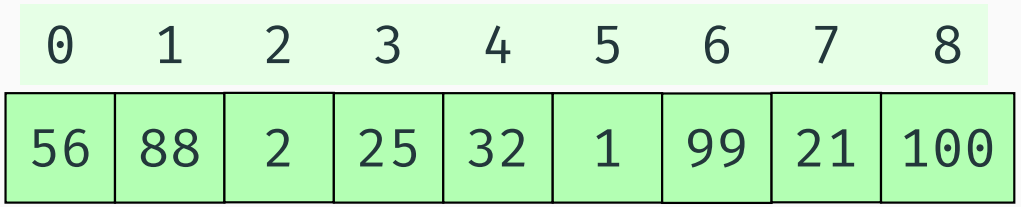
Bubble Sort



Bubble Sort



Bubble Sort



Bubble Sort

Otimização: note que a função `bubbleUp` sempre deixa o último elemento na posição correta, portanto não precisamos fazer as comparações dos elementos já ordenados. A cada passo i, verificamos apenas até $n - i$.

Bubble Sort

	Insert	Bubble
estável	✓	✓
in-place	✓	✓
online	✓	
adaptivo	✓	✓

Complexidade Assintótica

	Insert	Bubble
melhor	$O(n)$	$O(n)$
pior	$O(n^2)$	$O(n^2)$
médio	$O(n^2)$	$O(n^2)$

Selection Sort

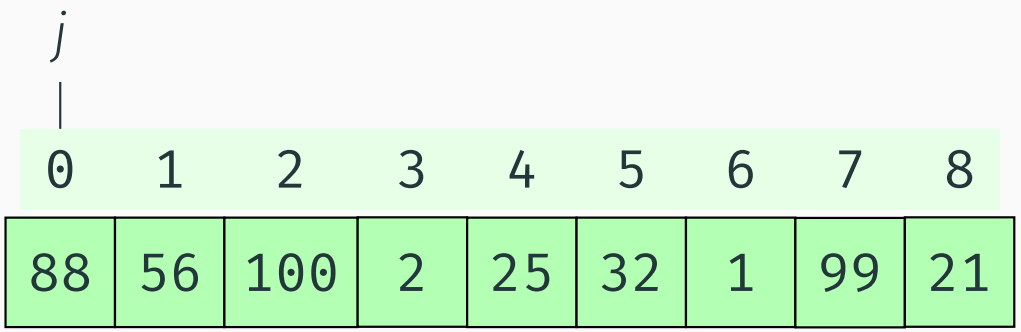
Um outro algoritmo simples de ordenação é o **Selection Sort**, a ideia é simplesmente repetir a busca pelo menor elemento da lista, e colocá-lo na *i*-ésima posição, depedendo da iteração.

Selection Sort

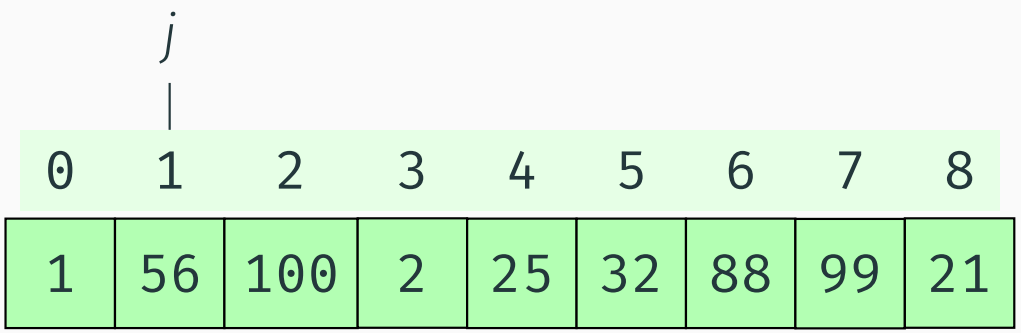
```
void selectionSort(registro *base, int n) {
    int i, j, i_min;

    for (j=0; j<n-1; j++)
    {
        i_min = find_min(base + j, n-j) + j;
        if (i_min != j) swap(base+i_min, base+j);
    }
}
```

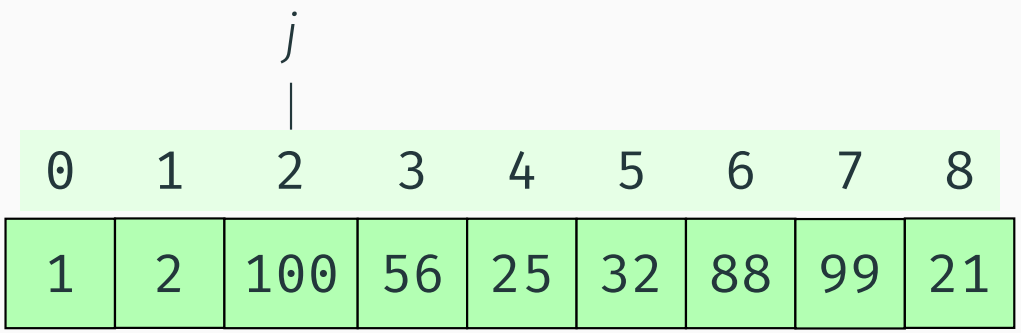
Selection Sort



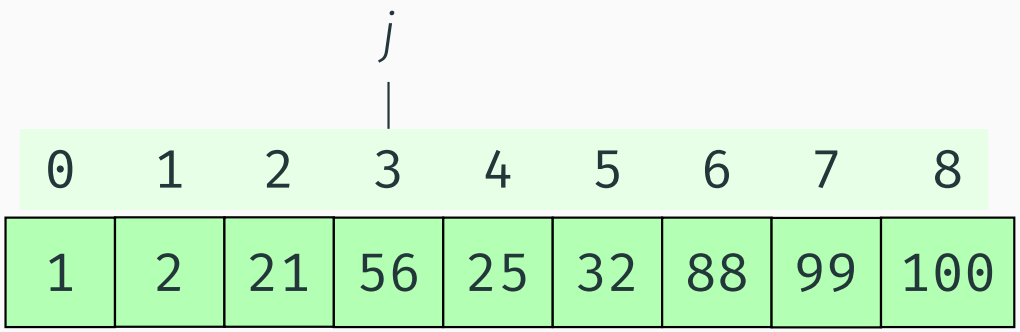
Selection Sort



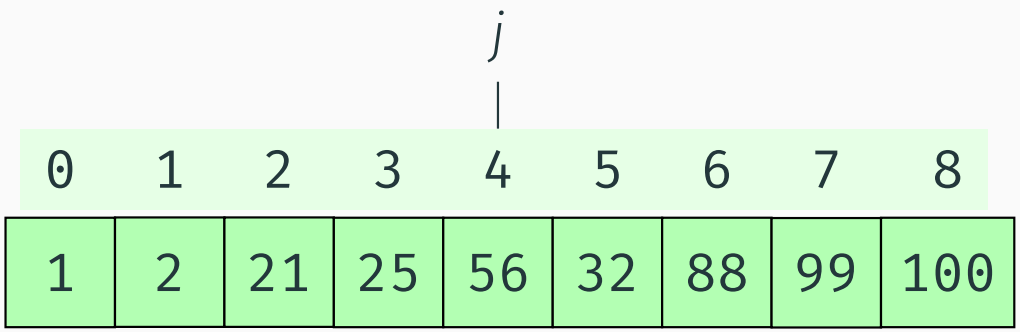
Selection Sort



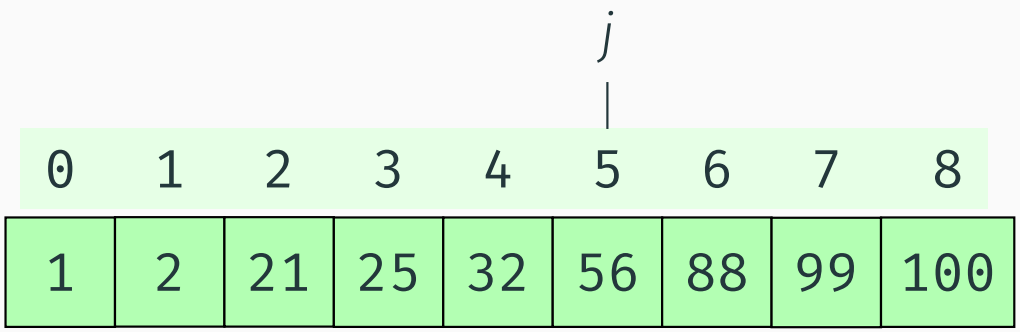
Selection Sort



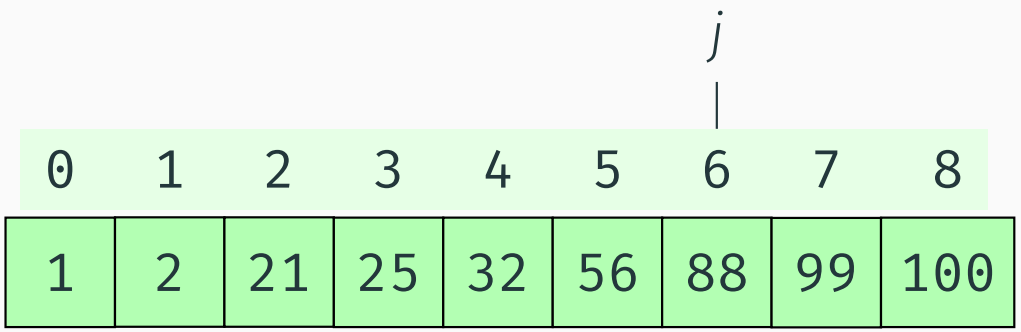
Selection Sort



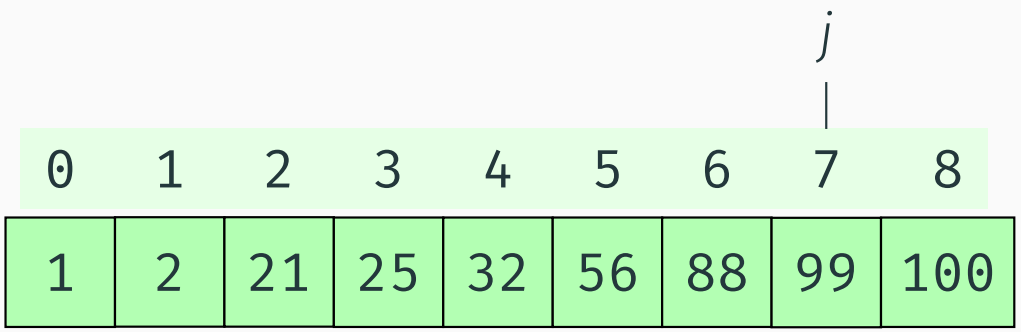
Selection Sort



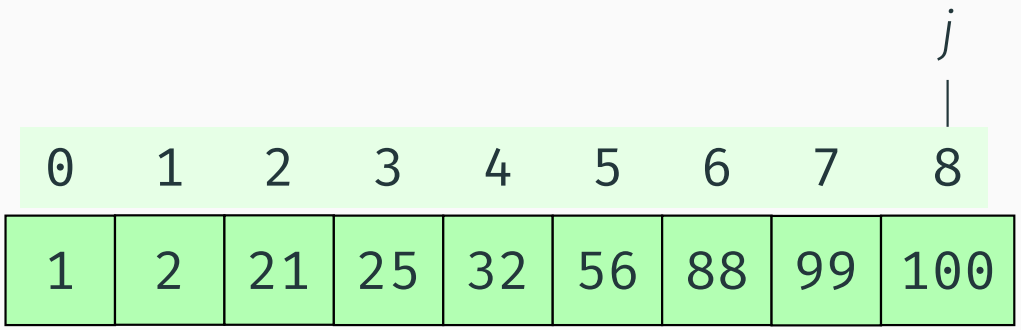
Selection Sort



Selection Sort



Selection Sort



Selection Sort

	Insert	Bubble	Select
estável	✓	✓	
in-place	✓	✓	✓
online	✓		
adaptivo	✓	✓	

Exercício

Verifique a estabilidade do Selection Sort para a sequência $4, 2, 3, 4, 1$.

Complexidade Assintótica

	Insert	Bubble	Select
melhor	$O(n)$	$O(n)$	$O(n^2)$
pior	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
médio	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$

Próxima aula

Na próxima aula aprenderemos os algoritmos **quick sort** e **merge sort**.