

Wykres wielomianu

Przykłady z rozwiązaniami

Aleks Zieliński

7.06.2025

Wielomian reprezentuje się w postaci $x^n + x^{n-1} + \dots + x^1 + x^0$ wraz z różnymi współczynnikami przy x^i (jeżeli pierwiastki istnieją w liczbach rzeczywistych to jest to suma krotności pierwiastków tego wielomianu). Nauczmy się rysować wykresy takich potworków ale do tego będziemy potrzebowali aby były w postaci iloczynowej, czyli $k(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_n)$. Aby uzyskać wielomian w takiej formie to wystarczy albo pogrupować go albo znaleźć jego jakiś pierwiastek i podzielić go przez niego aż znajdziemy wszystkie pierwiastki w każdej krotności. Stopień wielomianu to najwyższa potęga przy x . Krotnością pierwiastka wielomianu nazywamy potęgę danego pierwiastka wielomianu w postaci iloczynowej, np. $(x - 3)^5$ to 3 jest pierwiastkiem 5 krotności.

Czas na konkrety:

- Jeżeli stopień wielomianu jest parzysty to oba ramiona są w górę
- Jeżeli stopień wielomianu jest nieparzysty to lewe ramie jest w dół a prawe w górę
- Jeżeli przy największej potędze (w postaci iloczynowej to po prostu przy x) jest minus to ramiona są "do góry nogami"
- Jeżeli w postaci iloczynowej jest minus przy x wewnątrz pierwiastka o parzystej krotności to go ignorujemy (np. $(-x)^2$ ale nie $-x^2$ bo minus nie jest wewnątrz)
- Jeżeli krotność pierwiastka jest parzysta to wykres "odbija się" od osi OX
- Jeżeli krotność pierwiastka jest nieparzysta to wykres zmienia znak w tym pierwiastku
- Jeżeli wielomian nie ma pierwiastków to jego stopień musi być w parzystej potędze albo wielomian jest w wartości bezwzględnej (np. $|x^3| + 1$)

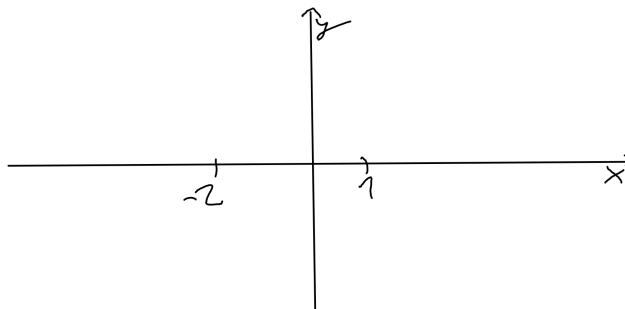
Uwaga: Wykresy są pomocnicze, mają nam pomóc w rozwiązywaniu zadań a nie odzwierciedlać dokładnie wykresu funkcji

Wielomian: $(x - 1)(x - 2)$

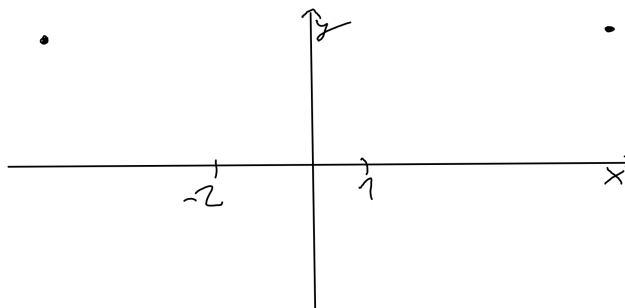
Obserwacje:

- Stopień wielomianu jest parzysty, zatem oba ramiona w górę ($1 + 1 = 2$)
- Zero minusów przy x więc rysujemy ramiona normalnie
- Dwa pierwiastki -2 i 1 , oba są krotności nieparzystej

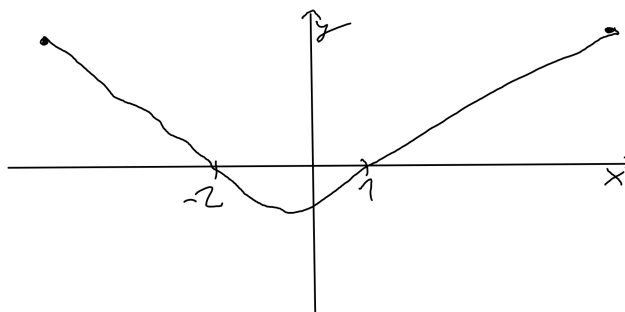
Zacniemy od narysowania układu współrzędnych i zaznaczenia pierwiastków



Zaznaczmy kropki w skrajnych częściach wykresu które oznaczają "koniec ramion", pamiętamy że rysujemy ramiona normalnie



Teraz wystarczy połączyć kropki pamiętając o krotnościach pierwiastków



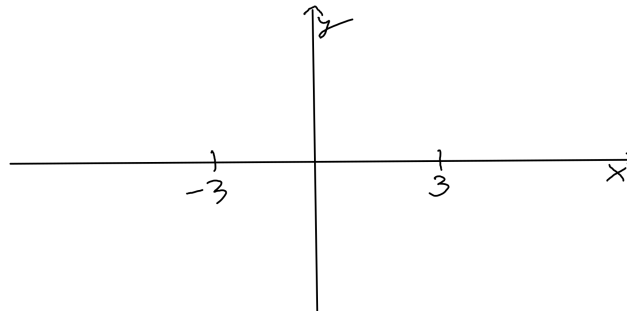
Otrzymaliśmy gotowy pomocniczy wykres naszego wielomianu

Wielomian: $(x - 3)^2(x + 3)$

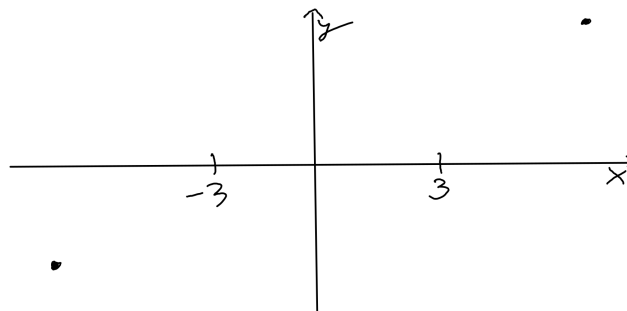
Obserwacje:

- Stopień wielomianu jest nieparzysty, zatem lewe w dół i prawe w górę
($2 + 1 = 3$)
- Zero minusów przy x więc rysujemy ramiona normalnie
- Dwa pierwiastki -3 i 3 , -3 jest krotności nieparzystej i 3 jest krotności parzystej

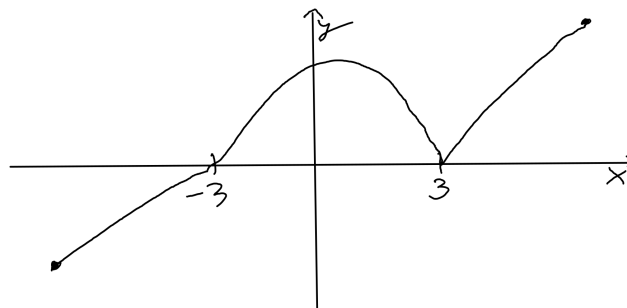
Zaczniemy od narysowania układu współrzędnych i zaznaczenia pierwiastków



Zaznaczmy kropki w skrajnych częściach wykresu które oznaczają "koniec ramion", pamiętamy że rysujemy ramiona normalnie



Teraz wystarczy połączyć kropki pamiętając o krotnościach pierwiastków



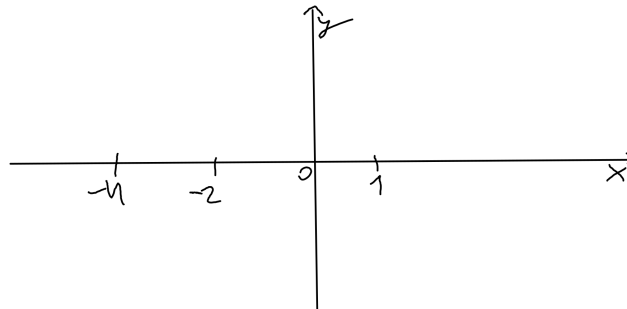
Otrzymaliśmy gotowy pomocniczy wykres naszego wielomianu

Wielomian: $x(x-1)^6(x+2)^3(x+4)$

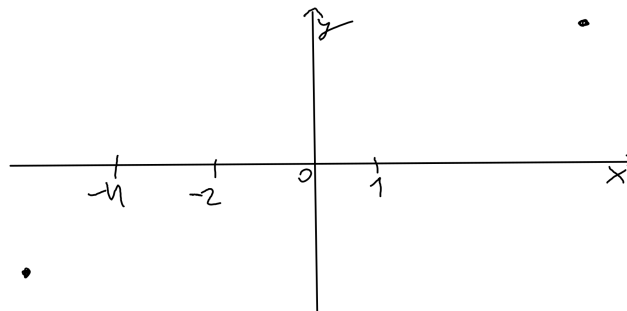
Obserwacje:

- Stopień wielomianu jest nieparzysty, zatem lewe w dół i prawe w górę
($1 + 6 + 3 + 1 = 11$)
- Zero minusów przy x więc rysujemy ramiona normalnie
- Cztery pierwiastki 0, 1, -2 i -4, czyli 0, -2 i -4 są krotności nieparzystej oraz 1 jest krotności parzystej

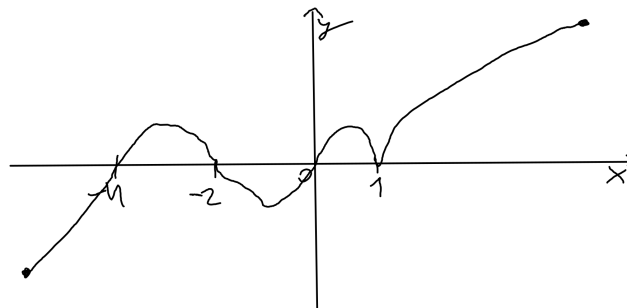
Zacniemy od narysowania układu współrzędnych i zaznaczenia pierwiastków



Zaznaczmy kropki w skrajnych częściach wykresu które oznaczają "koniec ramion", pamiętamy że rysujemy ramiona normalnie



Teraz wystarczy połączyć kropki pamiętając o krotnościach pierwiastków



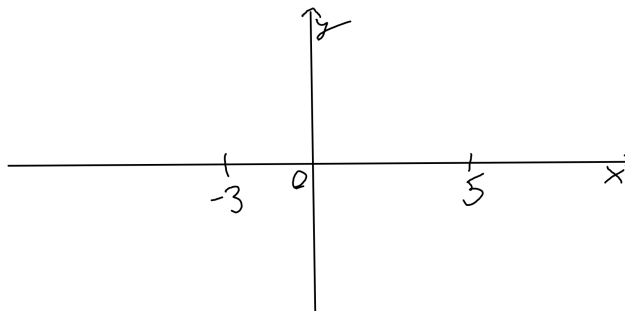
Otrzymaliśmy gotowy pomocniczy wykres naszego wielomianu

Wielomian: $-x(x + 3)(x - 5)$

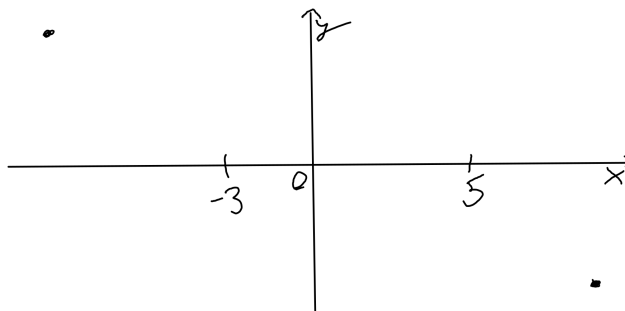
Obserwacje:

- Stopień wielomianu jest nieparzysty, zatem lewe w dół i prawe w górę
($1 + 1 + 1 = 3$)
- Jest minus przy jednym x zatem "odwracamy ramiona do góry nogami"
- Trzy pierwiastki 0, -3 i 5 , wszystkie są krotności nieparzystej

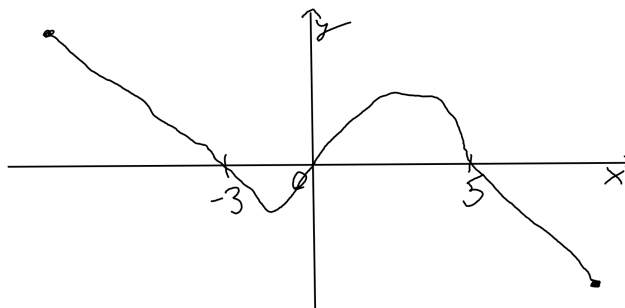
Zaczniemy od narysowania układu współrzędnych i zaznaczenia pierwiastków



Zaznaczmy kropki w skrajnych częściach wykresu które oznaczają "koniec ramion", pamiętamy o minusie więc rysujemy "do góry nogami"



Teraz wystarczy połączyć kropki pamiętając o krotnościach pierwiastków



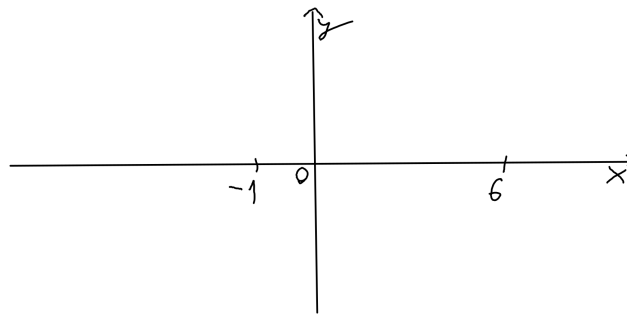
Otrzymaliśmy gotowy pomocniczy wykres naszego wielomianu

Wielomian: $2x(-x - 1)(-x + 6)^2$

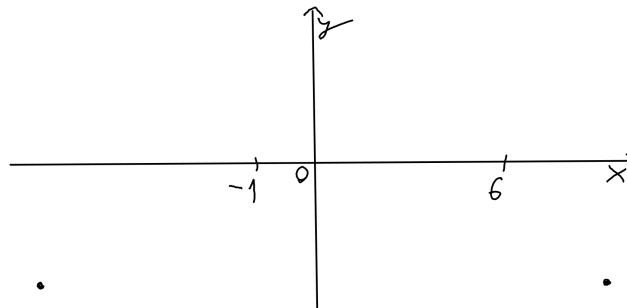
Obserwacje:

- Stopień wielomianu jest parzysty, zatem oba ramiona w górę ($1 + 1 + 2 = 4$)
- Są dwa minusy przy x , jeden wewnątrz nieparzystej krotności i jeden wewnątrz parzystej krotności więc go ignorujemy i zostaje nam ostatecznie jeden minus, zatem odwracamy ramiona "do góry nogami"
- Trzy pierwiastki 0, -1 i 6, czyli 0 i -1 są krotności nieparzystej oraz 6 jest krotności parzystej

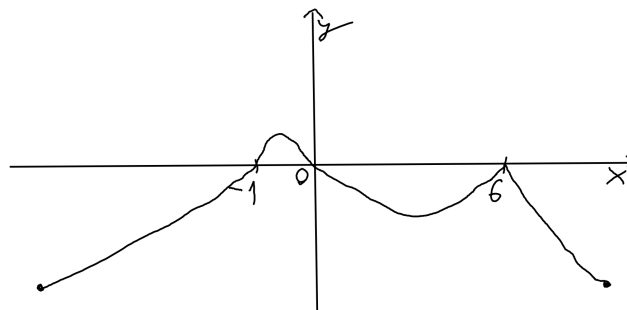
Zaczniemy od narysowania układu współrzędnych i zaznaczenia pierwiastków



Zaznaczmy kropki w skrajnych częściach wykresu które oznaczają "koniec ramion", pamiętamy o minusie więc rysujemy "do góry nogami"



Teraz wystarczy połączyć kropki pamiętając o krotnościach pierwiastków



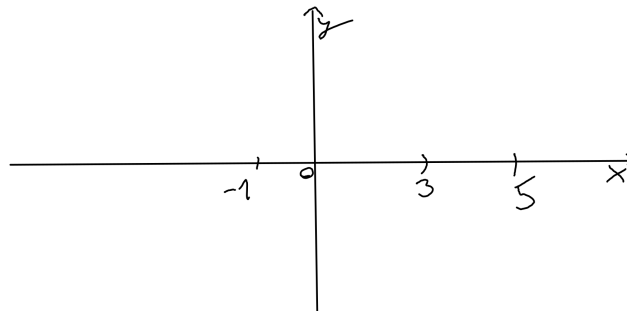
Otrzymaliśmy gotowy pomocniczy wykres naszego wielomianu

Wielomian: $x^2(-x + 3)(-1 - x)(5 - x)$

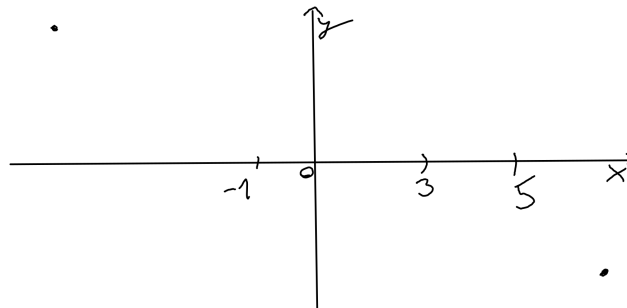
Obserwacje:

- Stopień wielomianu jest nieparzysty, zatem lewe w dół i prawe w górę
($2 + 1 + 1 + 1 = 5$)
- Są trzy minusy przy x , wszystkie wewnątrz nieparzystej krotności i zero wewnątrz parzystej krotności więc zostają nam trzy minusy, zatem odwracamy ramiona "do góry nogami"
- Cztery pierwiastki $0, -1, 3$ i 5 , czyli $-1, 3$ i 5 są krotności nieparzystej oraz 0 jest krotności parzystej

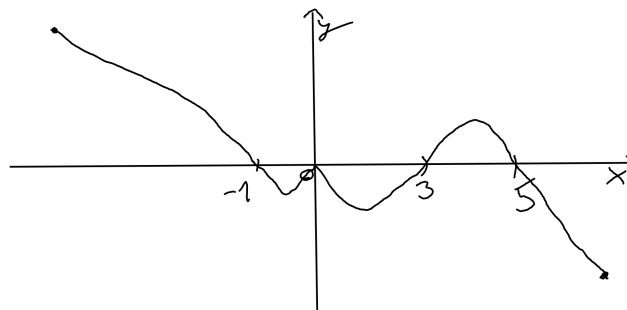
Zaczniemy od narysowania układu współrzędnych i zaznaczenia pierwiastków



Zaznaczmy kropki w skrajnych częściach wykresu które oznaczają "koniec ramion", pamiętamy o minusie więc rysujemy "do góry nogami"



Teraz wystarczy połączyć kropki pamiętając o krotnościach pierwiastków



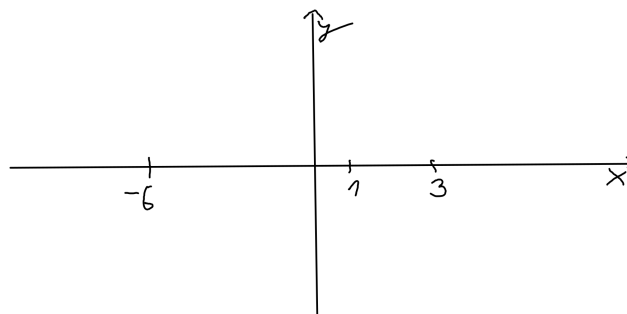
Otrzymaliśmy gotowy pomocniczy wykres naszego wielomianu

Wielomian: $(x - 1)(3 - x)(-6 - x)$

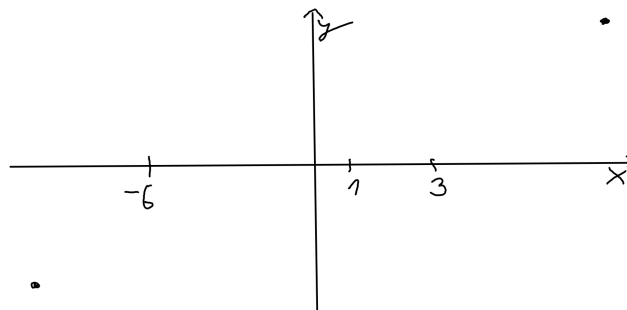
Obserwacje:

- Stopień wielomianu jest nieparzysty, zatem lewe w dół i prawe w górę
($1 + 1 + 1 = 3$)
- Są dwa minusy przy x , wszystkie wewnątrz nieparzystej krotności i zero wewnątrz parzystej krotności więc zostają nam dwa minusy, zatem **nie odwracamy** ramion "do góry nogami"
- Trzy pierwiastki -6 , 1 i 3 , wszystkie są pierwiastki krotności nieparzystej

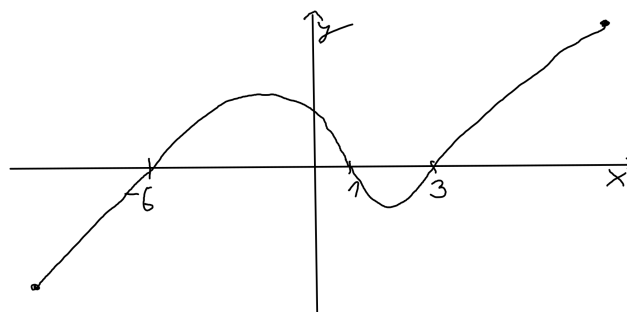
Zaczniemy od narysowania układu współrzędnych i zaznaczenia pierwiastków



Zaznaczmy kropki w skrajnych częściach wykresu które oznaczają "koniec ramion", pamiętamy **że nie** rysujemy "do góry nogami"



Teraz wystarczy połączyć kropki pamiętając o krotnościach pierwiastków



Otrzymaliśmy gotowy pomocniczy wykres naszego wielomianu