

Równania kwadratowe z parametrem

Przykłady z rozwiązaniami

Aleks Zieliński

7.06.2025

Równania kwadratowe z parametrem pojawiają się na maturze rozszerzone jako równanie kwadratowe z parametrem m przy zmiennych wraz z warunkami jakie mają spełniać rozwiązania tego równania. Naszym zadaniem jest policzenie w jakich przedziałach znajdują się m z którym równanie spełnia dane warunki. Rozwiązanie składa się ze trzech etapów:

Etap 1: Rozwiązanie nierówności o ilości rozwiązań równania (najczęściej $\Delta > 0$)

Etap 2: Wyznaczenie zbioru(ów) wartości parametru spełniającego dany warunek

Etap 3: Odpowiedź to część wspólna (przekrój) zbiorów z etapu 1 i 2

Ważne wzory:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$
- $\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac}$
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Omówione zadania:

- Matura maj 2024 (formuła 2023) [6pkt]
- Matura maj 2020 [4pkt]
- Matura maj 2017 [5pkt]
- Matura próbna grudzień 2022 [5pkt]
- Matura czerwiec 2023 [5pkt]
- Matura stara maj 2015 [6pkt]

Matura maj 2024 (formuła 2023) [6pkt]

Równanie: $x^2 - (3m + 1)x + 2m^2 + m + 1 = 0$

Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2

Warunek 2: $x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$

Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(3m + 1))^2 - 4 * 1 * (2m^2 + m + 1) > 0 \\ (3m + 1)^2 - 4(2m^2 + m + 1) &> 0 \\ 9m^2 + 6m + 1 - 8m^2 - 4m - 4 &> 0 \\ m^2 + 2m - 3 &> 0 \\ (m - 1)(m + 3) &> 0\end{aligned}$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2

$x_1 + x_2 = 3m + 1$ oraz $x_1x_2 = 2m^2 + m + 1$, zatem

$$\begin{aligned}x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2 - 3) &\leq 3m - 7 \\ x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 - 9x_1x_2 &\leq 3m - 7 \\ (x_1 + x_2)^3 - 9x_1x_2 &\leq 3m - 7 \\ (3m + 1)^3 - 9(2m^2 + m + 1) - 3m + 7 &\leq 0 \\ 27m^3 + 27m^2 + 9m + 1 - 18m^2 - 9m - 9 - 3m + 7 &\leq 0 \\ 27m^3 + 9m^2 - 3m - 1 &\leq 0\end{aligned}$$

Znajdujemy pierwiastki wielomianu dowolną metodą

Jak się dobrze popatrzy to można pogrupować ten wielomian

$$\begin{aligned}(3m)^3 - 1^3 + 3m(3m - 1) &\leq 0 \\ (3m - 1)(9m + 3m + 1) + 3m(3m - 1) &\leq 0 \\ (3m - 1)(9m + 3m + 1 + 3m) &\leq 0 \\ (3m - 1)(9m + 6m + 1) &\leq 0 \\ (3m - 1)(3m + 1)^2 &\leq 0\end{aligned}$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in (-\infty; \frac{1}{3}]$

Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć

Odpowiedź to $m \in (-\infty; -3)$

Matura maj 2020 [4pkt]

Równanie: $x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$

Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2

Warunek 2: $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$

Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(3m + 2))^2 - 4 * 1 * (2m^2 + 7m - 15) > 0 \\ (3m + 2)^2 - 4(2m^2 + 7m - 15) &> 0 \\ 9m^2 + 12m + 4 - 8m^2 - 28m + 60 &> 0 \\ m^2 - 16m + 64 &> 0 \\ (m - 8)^2 &> 0\end{aligned}$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$, inaczej $m \neq 8$

Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2

$x_1 + x_2 = 3m + 2$ oraz $x_1x_2 = 2m^2 + 7m - 15$, zatem

$$\begin{aligned}2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 &= 2 \\ 2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + x_1x_2 &= 2 \\ 2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 - 2 &= 0 \\ 2(3m + 2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 - 2 &= 0 \\ 2(9m^2 + 12m + 4) + 2m^2 + 7m - 17 &= 0 \\ 18m^2 + 24m + 8 + 2m^2 + 7m - 17 &= 0 \\ 20m^2 + 31m - 9 &= 0\end{aligned}$$

Rozwiązujemy deltę od zmiennej m

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta_m} &= \sqrt{31^2 - 4 * 20 * (-9)} = \sqrt{961 - 80 * (-9)} = \sqrt{961 + 720} = \sqrt{1681} = 41 \\ m_1 &= \frac{-31-41}{2*20} = \frac{-72}{40} = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{-31+41}{2*20} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Otrzymujemy że $m \in \{-\frac{9}{5}; \frac{1}{4}\}$

Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć

Odpowiedź to $m \in \{-\frac{9}{5}; \frac{1}{4}\}$

Matura maj 2017 [5pkt]

Równanie: $4x^2 - 6mx + (2m + 3)(m - 3) = 0$

Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2

Warunek 2: $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$

Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-6m)^2 - 4 * 4 * (2m + 3)(m - 3) > 0 \\ 36m^2 - 16(2m^2 - 6m + 3m - 9) &> 0 \\ 36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) &> 0 \\ 36m^2 - 32m^2 + 48m + 144 &> 0 \\ 4m^2 + 48m + 144 &> 0 \\ 4(m^2 + 12m + 36) &> 0 \\ 4(m + 6)^2 &> 0\end{aligned}$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$, inaczej $m \neq -6$

Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2

$x_1 + x_2 = -\frac{-6m}{4} = \frac{3m}{2}$ oraz $x_1x_2 = \frac{(2m+3)(m-3)}{4} = \frac{2m^2-6m+3m-9}{4} = \frac{2m^2-3m-9}{4}$, zatem

$$\begin{aligned}(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) &< 0 \\ (4(x_1 - x_2) - 1)(4(x_1 - x_2) + 1) &< 0 \\ 16(x_1 - x_2)^2 - 1 &< 0 \\ 16(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 1 &< 0 \\ 16(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2) - 1 &< 0 \\ 16((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2) - 1 &< 0 \\ 16\left(\left(\frac{3m}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{2m^2-3m-9}{4}\right) - 1\right) &< 0 \\ 16\left(\frac{9m^2}{4} - (2m^2 - 3m - 9)\right) - 1 &< 0 \\ 16\left(\frac{9m^2}{4} - 2m^2 + 3m + 9\right) - 1 &< 0 \\ 36m^2 - 32m^2 + 48m + 144 - 1 &< 0 \\ 4m^2 + 48m + 143 &< 0\end{aligned}$$

Rozwiązujemy deltę od zmiennej m

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta_m} &= \sqrt{48^2 - 4 * 4 * 143} = \sqrt{2304 - 16 * 143} = \sqrt{2304 - 2288} = \sqrt{16} = 4 \\ m_1 &= \frac{-48-4}{2*4} = \frac{-52}{8} = -\frac{13}{2} \text{ oraz } m_2 = \frac{-48+4}{2*4} = \frac{-44}{8} = -\frac{11}{2}\end{aligned}$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in (-\frac{13}{2}; -\frac{11}{2})$

Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć

Odpowiedź to $m \in (-\frac{13}{2}; -6) \cup (-6; -\frac{11}{2})$

Alternatywnie można napisać $m \in (-\frac{13}{2}; -\frac{11}{2}) \setminus \{-6\}$

Matura próbna grudzień 2022 [5pkt]

Równanie: $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$

Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2

Warunek 2: $x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2$

Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(m-4))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 7m + 12) > 0 \\ (m-4)^2 - 4(m^2 - 7m + 12) &> 0 \\ m^2 - 8m + 16 - 4m^2 + 28m - 48 &> 0 \\ -3m^2 + 20m - 32 &> 0\end{aligned}$$

Rozwiązujemy deltę od zmiennej m i otrzymujemy że

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta_m} &= \sqrt{20^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-32)} = \sqrt{400 - 4 \cdot 96} = \sqrt{400 - 384} = \sqrt{16} = 4 \\ m_1 &= \frac{-20-4}{2 \cdot (-3)} = \frac{-24}{-6} = \frac{12}{3} = 4 \text{ oraz } m_2 = \frac{-20+4}{2 \cdot (-3)} = \frac{-16}{-6} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in (\frac{8}{3}; 4)$

Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2

$x_1 + x_2 = m - 4$ oraz $x_1x_2 = m^2 - 7m + 12$, zatem

$$\begin{aligned}x_1^3 + x_2^3 &< 5x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2 \\ (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) &< 5x_1x_2(x_1 + x_2) \\ (x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2) &< 5x_1x_2(x_1 + x_2) \\ (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) &< 5x_1x_2(x_1 + x_2) \\ (m-4)((m-4)^2 - 3(m^2 - 7m + 12)) &< 5(m^2 - 7m + 12)(m-4) \\ (m-4)(m^2 - 8m + 16 - 3m^2 + 21m - 36) - (5m^2 - 35m + 60)(m-4) &< 0 \\ (m-4)(-2m^2 + 13m - 20) + (-5m^2 + 35m - 60)(m-4) &< 0 \\ (m-4)(-2m^2 + 13m - 20 - 5m^2 + 35m - 60) &< 0 \\ (m-4)(-7m^2 + 48m - 80) &< 0\end{aligned}$$

Rozwiązujemy drugą deltę od zmiennej m i otrzymujemy że

$$\begin{aligned}m_3 &= 4 \\ \sqrt{\Delta_m} &= \sqrt{48^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-80)} = \sqrt{2304 - 4 \cdot 560} = \sqrt{2304 - 2240} = \sqrt{64} = 8 \\ m_1 &= \frac{-48+8}{2 \cdot (-7)} = \frac{-40}{-14} = \frac{20}{7} \text{ oraz } m_2 = \frac{-48-8}{2 \cdot (-7)} = \frac{-56}{-14} = 4 \\ (m-4) \cdot (-7)(m-4)(m-\frac{20}{7}) &< 0 \\ -7(m-4)^2(m-\frac{20}{7}) &< 0\end{aligned}$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in (\frac{20}{7}; 4) \cup (4, +\infty)$

Alternatywnie można napisać $m \in (\frac{20}{7}; +\infty) \setminus \{4\}$

Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć

Odpowiedź to $m \in (\frac{20}{7}; 4)$

Matura czerwiec 2023 [5pkt]

Równanie: $mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$

Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2

Warunek 2: $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ oraz $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$

Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(m+1))^2 - 4 * m * (-2m+3) > 0 \\ (m+1)^2 - 4m(-2m+3) &> 0 \\ m^2 + 2m + 1 + 8m^2 - 12m &> 0 \\ 9m^2 - 10m + 1 &> 0 \\ (m-1)(9m-1) &> 0\end{aligned}$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in (-\infty; \frac{1}{9}) \cup (1; +\infty)$

Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2

$x_1 + x_2 = \frac{m+1}{m}$ oraz $x_1 x_2 = \frac{-2m+3}{m}$ i $m \neq 0$ aby nie było dzielenia przez 0, zatem

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} &< 1 \\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} &< 1\end{aligned}$$

$m \neq \frac{3}{2}$ aby nie było dzielenia przez 0 bo ($x_1 x_2 = \frac{-2m+3}{m}$)

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &< x_1^2 x_2^2 \\ x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 &< x_1^2 x_2^2 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 &< x_1^2 x_2^2 \\ (\frac{m+1}{m})^2 - 2(\frac{-2m+3}{m}) &< (\frac{-2m+3}{m})^2 \\ \frac{m^2+2m+1}{m^2} + \frac{4m-6}{m} &< \frac{4m^2-12m+9}{m^2} \\ \frac{m^2+2m+1}{m^2} + \frac{4m^2-6m}{m^2} &< \frac{4m^2-12m+9}{m^2} \\ \frac{m^2+2m+1}{m^2} + \frac{4m^2-6m}{m^2} - \frac{4m^2-12m+9}{m^2} &< 0 \\ m^2 + 2m + 1 + 4m^2 - 6m - (4m^2 - 12m + 9) &< 0 \\ 5m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 12m - 9 &< 0 \\ m^2 + 8m - 8 &< 0\end{aligned}$$

Rozwiązujemy drugą deltę od zmiennej m i otrzymujemy że

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta_m} &= \sqrt{8^2 - 4 * 1 * (-8)} = \sqrt{64 + 32} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \\ m_1 = \frac{-8-4\sqrt{6}}{2*1} = \frac{-8-4\sqrt{6}}{2} &= -4 - 2\sqrt{6} \text{ oraz } m_2 = \frac{-8+4\sqrt{6}}{2*1} = \frac{-8+4\sqrt{6}}{2} = -4 + 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in (-4 - 2\sqrt{6}; 0) \cup (0; -4 + 2\sqrt{6})$

Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć

Odpowiedź to $m \in (-4 - 2\sqrt{6}; 0) \cup (0; \frac{1}{9})$

Matura stara maj 2015 [6pkt]

Równanie: $(m^2 - m)x^2 - x + 1 = 0$

Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2

Warunek 2: $\frac{1}{x_1+x_2} \leq \frac{m}{3} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -(-1)^2 - 4 * (m^2 - m) * 1 > 0 \\ 1 - 4(m^2 - m) &> 0 \\ 1 - 4m^2 + 4m &> 0 \\ \Delta_2 &= 4^2 - 4 * (-4) * 1 = 16 + 16 = 32 \\ m_1 &= \frac{-4 - \sqrt{32}}{2 * (-4)} = \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{-8} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \text{ oraz } m_2 = \frac{-4 + \sqrt{32}}{2 * (-4)} = \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{-8} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \\ -4(m - \frac{1 + \sqrt{2}}{2})(m - \frac{1 - \sqrt{2}}{2}) &> 0\end{aligned}$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in (\frac{1 - \sqrt{2}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2}}{2})$

Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2

$x_1 + x_2 = -\frac{-1}{m^2 - m} = \frac{1}{m^2 - m}$ oraz $x_1 x_2 = \frac{1}{m^2 - m}$ oraz $m \neq 1$ i $m \neq 0$ aby nie było dzielenia przez 0, zatem zaczniemy od lewej nierówności

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1 + x_2} &\leq \frac{m}{3} \\ 3 &\leq m(x_1 + x_2) \\ 3 &\leq m(\frac{1}{m^2 - m}) \\ 3(m^2 - m) &\leq m \\ 3m^2 - 3m - m &\leq 0 \\ 3m^2 - 4m &\leq 0 \\ 3m(m - \frac{4}{3}) &\leq 0\end{aligned}$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in [0; \frac{4}{3}]$

Teraz pora na prawą nierówność

$$\begin{aligned}\frac{m}{3} &\leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \\ m &\leq 3(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}) \\ m &\leq 3(\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}) \\ m &\leq 3(\frac{\frac{1}{m^2 - m}}{\frac{1}{m^2 - m}}) \\ m &\leq 3(\frac{1}{m^2 - m} * \frac{m^2 - m}{1}) \\ m &\leq 3(\frac{1}{1} * \frac{1}{1}) \\ m &\leq 3\end{aligned}$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in (-\infty; 3]$

Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć

Odpowiedź to $m \in (0; 1) \cup (1; \frac{1 + \sqrt{2}}{2})$

Alternatywnie można napisać $m \in (0; \frac{1 + \sqrt{2}}{2}) \setminus \{1\}$