Równania kwadratowe z parametrem

Przykłady z rozwiązaniami

Aleks Zieliński

4.06.2025

Równania kwadratowe z parametrem pojawiają się na maturze rozszerzone jako równanie kwadratowe z parametrem m przy zmiennych wraz z warunkami jakie mają spełniać rozwiązania tego równania. Naszym zadaniem jest policzenie w jakich przedziałach znajduję się m z którym równianie spełnia dane warunki. Rozwiązanie składa się ze trzech etapów:

Etap 1: Rozwiązanie nierówności o ilości rozwiązań równania (najczęściej $\Delta > 0$)
Etap 2: Wyznaczenie zbioru(ów) wartości parametru spełniającego dany warunek
Etap 3: Odpowiedź to część wspólna (przekrój) zbiorów z etapu 1 i 2

Ważne wzory:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1x_2 = \frac{c}{a}$
- $\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac}$
- $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Omówione zadania:

- Matura maj 2024 (formuła 2023) [6pkt]
- Matura maj 2020 [4pkt]
- Matura maj 2017 [5pkt]
- Matura próbna grudzień 2022 [5pkt]
- Matura czerwiec 2023 [5pkt]
- Matura stara maj 2015 [6pkt]

Matura maj 2024 (formuła 2023) [6pkt]

Równanie: $x^2 - (3m+1)x + 2m^2 + m + 1 = 0$
Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2
Warunek 2: $x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$
Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\Delta = (-(3m+1))^2 - 4 * 1 * (2m^2 + m + 1) > 0$$
$$(3m+1)^2 - 4(2m^2 + m + 1) > 0$$
$$9m^2 + 6m + 1 - 8m^2 - 4m - 4 > 0$$
$$m^2 + 2m - 3 > 0$$
$$(m-1)(m+3) > 0$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$
Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2
$x_1 + x_2 = 3m + 1$ oraz $x_1x_2 = 2m^2 + m + 1$, zatem

$$x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$
$$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^2 - 9x_1x_2 \leq 3m - 7$$
$$(x_1 + x_2)^3 - 9x_1x_2 \leq 3m - 7$$
$$(3m+1)^3 - 9(2m^2 + m + 1) - 3m + 7 \leq 0$$
$$27m^3 + 27m^2 + 9m + 1 - 18m^2 - 9m - 9 - 3m + 7 \leq 0$$
$$27m^3 + 9m^2 - 3m - 1 \leq 0$$

Znajdujemy pierwiastki wielomianu dowolną metodą
Jak się dobrze popatrzy to można pogrupować ten wielomian

$$(3m)^3 - 1^3 + 3m(3m-1) \leq 0$$
$$(3m-1)(9m + 3m + 1) + 3m(3m-1) \leq 0$$
$$(3m-1)(9m + 3m + 1 + 3m) \leq 0$$
$$(3m-1)(9m + 6m + 1) \leq 0$$
$$(3m-1)(3m+1)^2 \leq 0$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in (-\infty; \frac{1}{3}]$
Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć
Odpowiedź to $m \in (-\infty; -3)$

Matura maj 2020 [4pkt]

Równanie: $x^2-(3m+2)x+2m^2+7m-15=0$
Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2
Warunek 2: $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$
Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta>0$

$$\Delta=(-(3m+2))^2-4*1*(2m^2+7m-15)>0$$
$$(3m+2)^2-4(2m^2+7m-15)>0$$
$$9m^2+12m+4-8m^2-28m+60>0$$
$$m^2-16m+64>0$$
$$(m-8)^2>0$$

Z wykresu odczytujemy że $m\in\mathbb{R}\setminus\{8\}$, inaczej $m\neq 8$
Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2
$x_1+x_2=3m+2$ oraz $x_1x_2=2m^2+7m-15$, zatem

$$2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$$
$$2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+x_1x_2=2$$
$$2(x_1+x_2)^2+x_1x_2-2=0$$
$$2(3m+2)^2+2m^2+7m-15-2=0$$
$$2(9m^2+12m+4)+2m^2+7m-17=0$$
$$18m^2+24m+8+2m^2+7m-17=0$$
$$20m^2+31m-9=0$$

Rozwiązujemy deltę od zmiennej m

$$\sqrt{\Delta_m}=\sqrt{31^2-4*20*(-9)}=\sqrt{961-80*(-9)}=\sqrt{961+720}=\sqrt{1681}=41$$
$$m_1=\tfrac{-31-41}{2*20}=\tfrac{-72}{40}=-\tfrac{9}{5}\text{ oraz }m_2=\tfrac{-31+41}{2*20}=\tfrac{10}{40}=\tfrac{1}{4}$$

Otrzymujemy że $m\in\{-\frac{9}{5};\frac{1}{4}\}$
Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć
Odpowiedź to $m\in\{-\frac{9}{5};\frac{1}{4}\}$

Matura maj 2017 [5pkt]

Równanie: $4x^2 - 6mx + (2m+3)(m-3) = 0$
Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2
Warunek 2: $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$
Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\Delta = (-6m)^2 - 4*4*(2m+3)(m-3) > 0$$
$$36m^2 - 16(2m^2 - 6m + 3m - 9) > 0$$
$$36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) > 0$$
$$36m^2 - 32m^2 + 48m + 144 > 0$$
$$4m^2 + 48m + 144 > 0$$
$$4(m^2 + 12m + 36) > 0$$
$$4(m+6)^2 > 0$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$, inaczej $m \neq -6$
Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2
$x_1 + x_2 = -\frac{-6m}{4} = \frac{3m}{2}$ oraz $x_1x_2 = \frac{(2m+3)(m-3)}{4} = \frac{2m^2-6m+3m-9}{4} = \frac{2m^2-3m-9}{4}$, zatem

$$(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$$
$$(4(x_1 - x_2) - 1)(4(x_1 - x_2) + 1) < 0$$
$$16(x_1 - x_2)^2 - 1 < 0$$
$$16(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 1 < 0$$
$$16(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2) - 1 < 0$$
$$16((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2) - 1 < 0$$
$$16((\frac{3m}{2})^2 - 4(\frac{2m^2-3m-9}{4}) - 1) < 0$$
$$16(\frac{9m^2}{4} - (2m^2 - 3m - 9)) - 1 < 0$$
$$16(\frac{9m^2}{4} - 2m^2 + 3m + 9) - 1 < 0$$
$$36m^2 - 32m^2 + 48m + 144 - 1 < 0$$
$$4m^2 + 48m + 143 < 0$$

Rozwiązujemy deltę od zmiennej m

$$\sqrt{\Delta_m} = \sqrt{48^2 - 4*4*143} = \sqrt{2304 - 16*143} = \sqrt{2304 - 2288} = \sqrt{16} = 4$$
$$m_1 = \frac{-48-4}{2*4} = \frac{-52}{8} = -\frac{13}{2} \text{ oraz } m_2 = \frac{-48+4}{2*4} = \frac{-44}{8} = -\frac{11}{2}$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in (-\frac{13}{2}; -\frac{11}{2})$
Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć
Odpowiedź to $m \in (-\frac{13}{2}; -6) \cup (-6; -\frac{11}{2})$
Alternatywnie można napisać $m \in (-\frac{13}{2}; -\frac{11}{2}) \setminus \{-6\}$

Matura próbna grudzień 2022 [5pkt]

Równanie: $x^2-(m-4)x+m^2-7m+12=0$
Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2
Warunek 2: $x_1^3+x_2^3<5x_1^2x_2+5x_1x_2^2$
Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta>0$

$$\Delta=(-(m-4))^2-4*1*(m^2-7m+12)>0$$
$$(m-4)^2-4(m^2-7m+12)>0$$
$$m^2-8m+16-4m^2+28m-48>0$$
$$-3m^2+20m-32>0$$

Rozwiązujemy deltę od zmiennej m i otrzymujemy że

$$\sqrt{\Delta_m}=\sqrt{20^2-4*(-3)*(-32)}=\sqrt{400-4*96}=\sqrt{400-384}=\sqrt{16}=4$$
$$m_1=\frac{-20-4}{2*(-3)}=\frac{-24}{-6}=\frac{12}{3}=4 \text{ oraz } m_2=\frac{-20+4}{2*(-3)}=\frac{-16}{-6}=\frac{8}{3}$$

Z wykresu odczytujemy że $m\in(\frac{8}{3};4)$
Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2
$x_1+x_2=m-4$ oraz $x_1x_2=m^2-7m+12$, zatem

$$x_1^3+x_2^3<5x_1^2x_2+5x_1x_2^2$$
$$(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)<5x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$(x_1+x_2)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)<5x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)<5x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$(m-4)((m-4)^2-3(m^2-7m+12))<5(m^2-7m+12)(m-4)$$
$$(m-4)(m^2-8m+16-3m^2+21m-36)-(5m^2-35m+60)(m-4)<0$$
$$(m-4)(-2m^2+13m-20)+(-5m^2+35m-60)(m-4)<0$$
$$(m-4)(-2m^2+13m-20-5m^2+35m-60)<0$$
$$(m-4)(-7m^2+48m-80)<0$$

Rozwiązujemy drugą deltę od zmiennej m i otrzymujemy że

$$m_3=4$$
$$\sqrt{\Delta_m}=\sqrt{48^2-4*(-7)*(-80)}=\sqrt{2304-4*560}=\sqrt{2304-2240}=\sqrt{64}=8$$
$$m_1=\frac{-48+8}{2*(-7)}=\frac{-40}{-14}=\frac{20}{7} \text{ oraz } m_2=\frac{-48-8}{2*(-7)}=\frac{-56}{-14}=4$$
$$(m-4)*(-7)(m-4)(m-\frac{20}{7})<0$$
$$-7(m-4)^2(m-\frac{20}{7})<0$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m\in(\frac{20}{7};4)\cup(4,+\infty)$
Alternatywnie można napisać $m\in(\frac{20}{7};+\infty)\setminus\{4\}$
Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć
Odpowiedź to $m\in(\frac{20}{7};4)$

Matura czerwiec 2023 [5pkt]

Równanie: $mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$
Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2
Warunek 2: $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ oraz $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$
Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\Delta = (-(m+1))^2 - 4 * m * (-2m+3) > 0$$
$$(m+1)^2 - 4m(-2m+3) > 0$$
$$m^2 + 2m + 1 + 8m^2 - 12m > 0$$
$$9m^2 - 10m + 1 > 0$$
$$(m-1)(9m-1) > 0$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in (-\infty; \frac{1}{9}) \cup (1; +\infty)$
Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2
$x_1 + x_2 = \frac{m+1}{m}$ oraz $x_1x_2 = \frac{-2m+3}{m}$ i $\mathbf{m \neq 0}$ aby nie było dzielenia przez 0, zatem

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$$
$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} < 1$$

$\mathbf{m \neq \frac{3}{2}}$ aby nie było dzielenia przez 0 bo $(x_1x_2 = \frac{-2m+3}{m})$

$$x_1^2 + x_2^2 < x_1^2 x_2^2$$
$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 < x_1^2x_2^2$$
$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < x_1^2x_2^2$$
$$(\frac{m+1}{m})^2 - 2(\frac{-2m+3}{m}) < (\frac{-2m+3}{m})^2$$
$$\frac{m^2+2m+1}{m^2} + \frac{4m-6}{m} < \frac{4m^2-12m+9}{m^2}$$
$$\frac{m^2+2m+1}{m^2} + \frac{4m^2-6m}{m^2} < \frac{4m^2-12m+9}{m^2}$$
$$\frac{m^2+2m+1}{m^2} + \frac{4m^2-6m}{m^2} - \frac{4m^2-12m+9}{m^2} < 0$$
$$m^2 + 2m + 1 + 4m^2 - 6m - (4m^2 - 12m + 9) < 0$$
$$5m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 12m - 9 < 0$$
$$m^2 + 8m - 8 < 0$$

Rozwiązujemy drugą deltę od zmiennej m i otrzymujemy że

$$\sqrt{\Delta_m} = \sqrt{8^2 - 4 * 1 * (-8)} = \sqrt{64 + 32} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$
$$m_1 = \frac{-8-4\sqrt{6}}{2*1} = \frac{-8-4\sqrt{6}}{2} = -4 - 2\sqrt{6} \text{ oraz } m_2 = \frac{-8+4\sqrt{6}}{2*1} = \frac{-8+4\sqrt{6}}{2} = -4 + 2\sqrt{6}$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in (-4 - 2\sqrt{6}; 0) \cup (0; -4 + 2\sqrt{6})$
Etap 3: Bierzemy częśc wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć
Odpowiedź to $m \in (-4 - 2\sqrt{6}; 0) \cup (0; \frac{1}{9})$

Matura stara maj 2015 [6pkt]

Równanie: $(m^2 - m)x^2 - x + 1 = 0$
Warunek 1: Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2
Warunek 2: $\frac{1}{x_1+x_2} \leq \frac{m}{3} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
Etap 1: Równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste gdy $\Delta > 0$

$$\Delta_1 = -(-1)^2 - 4 * (m^2 - m) * 1 > 0$$
$$1 - 4(m^2 - m) > 0$$
$$1 - 4m^2 + 4m > 0$$
$$\Delta_2 = 4^2 - 4 * (-4) * 1 = 16 + 16 = 32$$
$$m_1 = \frac{-4-\sqrt{32}}{2*(-4)} = \frac{-4-4\sqrt{2}}{-8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \text{ oraz } m_2 = \frac{-4+\sqrt{32}}{2*(-4)} = \frac{-4+4\sqrt{2}}{-8} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$
$$-4(m - \frac{1+\sqrt{2}}{2})(m - \frac{1-\sqrt{2}}{2}) > 0$$

Z wykresu odczytujemy że $m \in (\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2})$
Etap 2: Zajmiemy się teraz najciekawszą częścią czyli warunkiem 2
$x_1 + x_2 = -\frac{-1}{m^2-m} = \frac{1}{m^2-m}$ oraz $x_1x_2 = \frac{1}{m^2-m}$ oraz $\mathbf{m \neq 1}$ i $\mathbf{m \neq 0}$ aby nie bylo dzielenia przez 0, zatem zaczniemy od lewej nierówności

$$\frac{1}{x_1+x_2} \leq \frac{m}{3}$$
$$3 \leq m(x_1 + x_2)$$
$$3 \leq m(\frac{1}{m^2-m})$$
$$3(m^2 - m) \leq m$$
$$3m^2 - 3m - m \leq 0$$
$$3m^2 - 4m \leq 0$$
$$3m(m - \frac{4}{3}) \leq 0$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in [0; \frac{4}{3}]$
Teraz pora na prawą nierówność

$$\frac{m}{3} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$
$$m \leq 3(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2})$$
$$m \leq 3(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2})$$
$$m \leq 3(\frac{\frac{1}{m^2-m}}{\frac{1}{m^2-m}})$$
$$m \leq 3(\frac{1}{m^2-m} * \frac{m^2-m}{1})$$
$$m \leq 3(\frac{1}{1} * \frac{1}{1})$$
$$m \leq 3$$

Rysujemy wykres wielomianu i otrzymujemy że $m \in (-\infty; 3]$
Etap 3: Bierzemy część wspólną naszych zbiorów, najlepiej narysować na osi i zaznaczyć
Odpowiedź to $m \in (0; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{2}}{2})$
Alternatywnie można napisać $m \in (0; \frac{1+\sqrt{2}}{2}) \setminus \{1\}$