Лабараторна робота №5

З дисципліни «Інтегрування»

За темою «Розв’язування лінійних рівнянь»

Виконав студент 3 курсу

Групи ТТП-32

Пелих Олександр

Київ – 2024

1) Постановка задачі

Варіант 7

1. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу для наближеного інтегралу функції $2 * x^8 + 3 * x^7 + 5 * x^5 - 2$ за цілочисельними вузлами на проміжку [1..5]. Визначити алгебраїчний степінь точності.
2. Наближено оцінити інтеграл з попереднього пункту за формулою середніх прямокутників та Сімпсона.

2) Теоретичні відомості

Тут мала б бути теоретична інформація по цій роботі, але документації і інформацію яку я знайшов не є унікальною, як виявилось. Як Ви вказали на парі, вона йде копіпастом по багатьом роботам, тому тут буде лише ця унікальна текстова вставка, а далі ми вже перейдемо безпосередньо до роботи->

3) Розв'язок

3.1) Побудова квадратурної формули інтерполяційного типу

- Маємо нашу функцію:

$$f(x) = 2x^8 + 3x^7 + 5x^5 - 2$$

- І задані цілочисельні вузли на відрізку [1,5][1, 5][1,5]:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 5$$

- Квадратурна формула інтерполяційного типу базується на інтерполяції функції поліномом Лагранжа:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot l_k(x),\ \text{де } l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

- Визначимо інтеграл:

$$I = \int_1^5 f(x)\,dx \approx \int_1^5 P_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_1^5 l_k(x)\,dx. \qquad A_k = \int_1^5 l_k(x)\,dx,$$

- В результаті маємо вигляд:

$$I \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot A_k.$$

3.2) Наближене обчислення інтегралу

- Формула середніх прямокутників(1) & Формула Сімпсона(2)

$$I \approx h \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \frac{h}{2}\right),$$

де $h = \frac{b-a}{n}$, а n — кількість розбиттів.

$$I \approx \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + 4 \sum_{\text{непарні } i} f(x_i) + 2 \sum_{\text{парні } i} f(x_i) + f(b) \right],$$

де $h = \frac{b-a}{n}$ (кількість розбиттів n повинна бути парною).

- Наближення: (1)

$$I_{\text{середніх}} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \frac{h}{2}\right),$$

де $n = 4$, $h = \frac{5-1}{4} = 1$. Розбиття:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 5.$$

- Обчислення(1)

$$I_{\text{середніх}} = 1 \cdot (f(1.5) + f(2.5) + f(3.5) + f(4.5)).$$

- Наближення: (2)

$$I_{\text{Сімпсона}} = \frac{h}{3} \cdot [f(1) + 4f(2) + 2f(3) + 4f(4) + f(5)].$$

4) Запускаємо програму та обраховуємо результат:

```
1. Квадратурна формула інтерполяційного типу:
   Значення інтегралу: 597078.320809646
   Вагові коефіцієнти: [0.3111142284523623, 1.4222150968732388, 0.533341349348798, 1.422215096873239, 0.3111142284523623]

2. Формула середніх прямокутників:
   Значення інтегралу: 530098.71875

3. Формула Сімпсона:
   Значення інтегралу: 606210.6666666666
```

5) Код програми:

- Код програми знаходиться у репозиторії ГітХаб за посиланням даним посиланням:

  https://github.com/AleksPh/project_Numerical-Methods

6) Висновок

У ході виконання лабораторної роботи було реалізовано чисельне інтегрування функції F(x) = 2x^8 + 3x^7 + 5x^5 – 2 на відрізку [1,5] за різними методами.

- Квадратурна формула інтерполяційного типу була побудована, враховуючи цілочисельні вузли на заданому проміжку. Метод показав, що основою наближеного обчислення інтегралу є інтерполяційні поліноми, які дозволяють звести задачу до суми значень функції у вузлах, помножених на відповідні вагові коефіцієнти. Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули було підтверджено.

- Формула середніх прямокутників дала наближене значення інтегралу Iсередніх=530098.71875I_{\text{середніх}} = 530098.71875Iсередніх=530098.71875. Метод є простим у реалізації, але менш точним через використання значення функції в середній точці кожного підінтервалу.

- Формула Сімпсона дала значення IСімпсона=606210.66667I_{\text{Сімпсона}} = 606210.66667IСімпсона=606210.66667. Цей метод є точнішим завдяки врахуванню квадратичного наближення функції на кожному підінтервалі.

Порівняння методів: Формула Сімпсона забезпечує значно вищу точність у порівнянні з формулою середніх прямокутників, що узгоджується з теоретичними очікуваннями. Це підтверджує, що вибір методу залежить від необхідної точності та обчислювальних ресурсів.

Загальний висновок: Обидва методи дозволяють наближено обчислити визначений інтеграл, але для більш складних функцій або вищих вимог до точності доцільно використовувати методи, що враховують більше.