Лабараторна робота №3

З дисципліни «Чисельні методи»

За темою «Власні значення»

Виконав студент 3 курсу

Групи ТТП-32

Пелих Олександр

Київ – 2024

1) Постановка задачі

Варіант 7

Зайти найменше власне значення степеневим методом та наближення до всіх власних значень методом обертань Якобі (або виконати 3-4 ітерації):

$$\begin{matrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Розв'язати (або виконати 5 ітерацій) методом Ньютона:

$$\begin{cases} 5x - 6y + 20\lg x = -16, \\ 2x + \ \ y - 10\lg y = 4; \end{cases}$$

2) Теоретичні відомості:

2.1) Власні значення і методи їх обчислення

- Власні значення та вектори: Якщо для квадратної матриці AAA існує ненульовий вектор xxx та скаляр λ\lambdaλ, що виконують рівність Ax=λxA x = \lambda xAx=λx, то λ\lambdaλ називається власним значенням матриці AAA, а xxx – відповідним власним вектором.

2.1.1) Степеневий метод (Power Method)

- Цей метод використовується для знаходження найбільшого за модулем власного значення. Щоб знайти найменше власне значення, застосовують ітерації для оберненої матриці A−1A^{-1}A−1.
- Основна ідея: послідовно множимо початковий вектор на матрицю AAA, поки норми вектора не стабілізуються. Найбільше власне значення отримаємо як відношення компонент вектора.

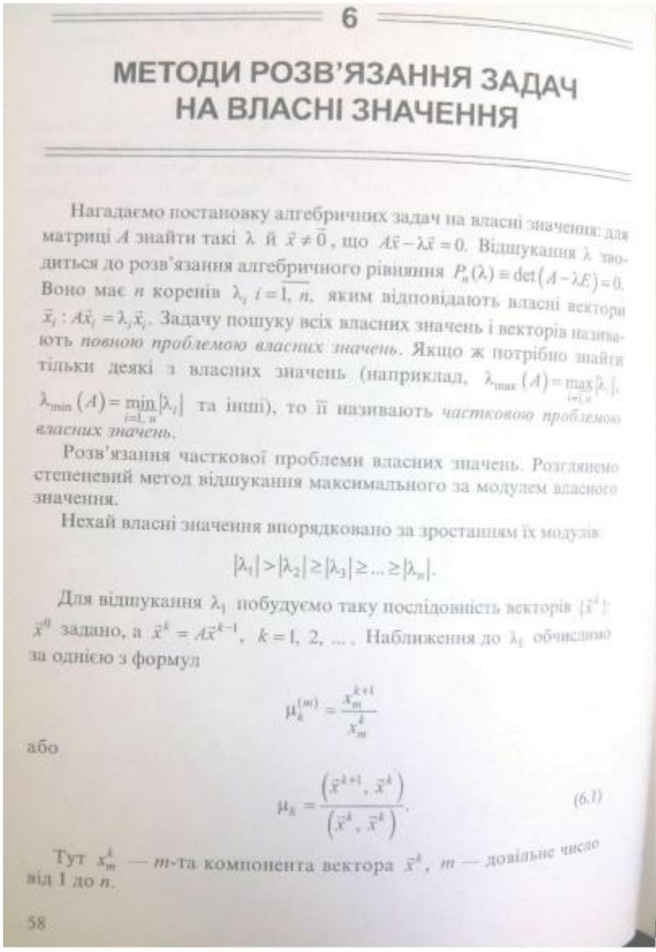
2.1.1) Метод Якобі

- Метод Якобі (обертань) використовується для знаходження всіх власних значень симетричної матриці. Основна ідея методу — перетворити матрицю до діагональної форми за допомогою обертань (ортогональних перетворень), де діагональні елементи є власними значеннями

2.2.1) Розв’язання системи методом Ньютона

- Метод Ньютона застосовується для розв'язання нелінійних систем рівнянь: {f1(x,y)=0f2(x,y)=0\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}{f1(x,y)=0f2(x,y)=0 Виконується ітерація: (xk+1yk+1)=(xkyk)−J−1⋅(f1(xk,yk)f2(xk,yk))\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}(xk+1yk+1)=(xkyk)−J−1⋅(f1(xk,yk)f2(xk,yk)) Де JJJ — матриця Якобі (матриця частинних похідних): J=(∂f1∂x∂f1∂y∂f2∂x∂f2∂y)J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}J=(∂x∂f1∂x∂f2∂y∂f1∂y∂f2)

2.3.1) Додаткові теоретичні відомості:



6

МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

Нагадаємо постановку алгебричних задач на власні значення: для матриці A знайти такі λ й $\vec{x} \neq \vec{0}$, що $A\vec{x} - \lambda\vec{x} = 0$. Відшукання λ зводиться до розв'язання алгебричного рівняння $P_n(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) = 0$. Воно має n коренів λ_i $i = \overline{1, n}$, яким відповідають власні вектори $\vec{x}_i : A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$. Задачу пошуку всіх власних значень і векторів називають *повною проблемою власних значень*. Якщо ж потрібно знайти тільки деякі з власних значень (наприклад, $\lambda_{\max}(A) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$, $\lambda_{\min}(A) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$ та інші), то її називають *частковою проблемою власних значень*.

Розв'язання часткової проблеми власних значень. Розглянемо степеневий метод відшукання максимального за модулем власного значення.

Нехай власні значення впорядковано за зростанням їх модулів

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Для відшукання λ_1 побудуємо таку послідовність векторів $\{\vec{x}^k\}$: $\vec{x}^0$ задано, а $\vec{x}^k = A\vec{x}^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Наближення до λ_1 обчислимо за однією з формул

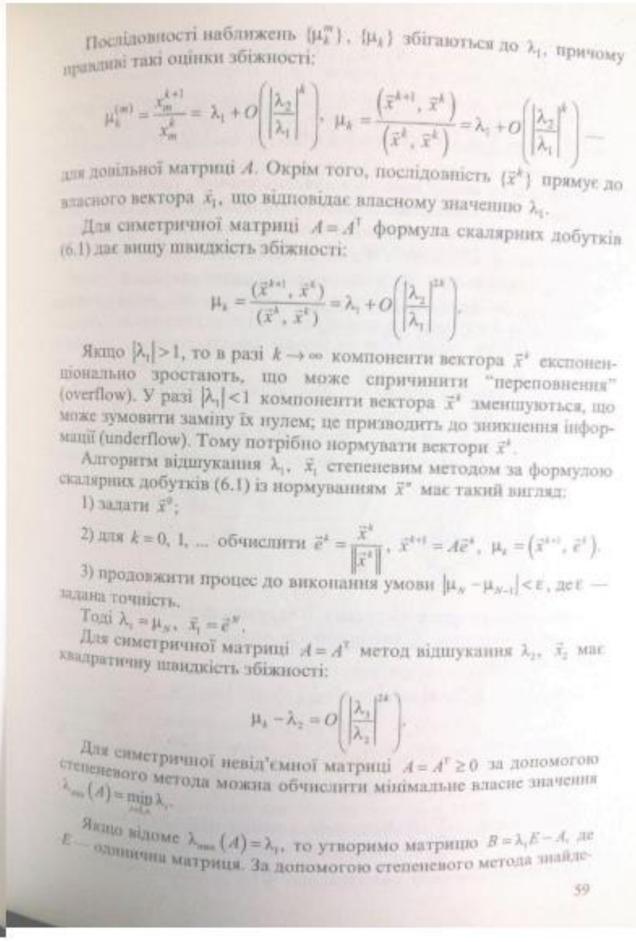
$$\mu_k^{(m)} = \frac{x_m^{k+1}}{x_m^k}$$

або

$$\mu_k = \frac{(\vec{x}^{k+1}, \vec{x}^k)}{(\vec{x}^k, \vec{x}^k)}. \qquad (6.1)$$

Тут x_m^k — m-та компонента вектора $\vec{x}^k$, m — довільне число від 1 до n.

58



Послідовності наближень $\{\mu_k^m\}$, $\{\mu_k\}$ збігаються до λ_1, причому правдиві такі оцінки збіжності:

$$\mu_k^{(m)} = \frac{x_m^{k+1}}{x_m^k} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right), \quad \mu_k = \frac{(\vec{x}^{k+1}, \vec{x}^k)}{(\vec{x}^k, \vec{x}^k)} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) \text{ —}$$

для довільної матриці A. Окрім того, послідовність $\{\vec{x}^k\}$ прямує до власного вектора $\vec{x}_1$, що відповідає власному значенню λ_1.

Для симетричної матриці $A = A^T$ формула скалярних добутків (6.1) дає вищу швидкість збіжності:

$$\mu_k = \frac{(\vec{x}^{k+1}, \vec{x}^k)}{(\vec{x}^k, \vec{x}^k)} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right).$$

Якщо $|\lambda_1| > 1$, то в разі $k \to \infty$ компоненти вектора $\vec{x}^k$ експоненціально зростають, що може спричинити "переповнення" (overflow). У разі $|\lambda_1| < 1$ компоненти вектора $\vec{x}^k$ зменшуються, що може зумовити заміну їх нулем; це призводить до зникнення інформації (underflow). Тому потрібно нормувати вектори $\vec{x}^k$.

Алгоритм відшукання λ_1, $\vec{x}_1$ степеневим методом за формулою скалярних добутків (6.1) із нормуванням $\vec{x}^n$ має такий вигляд:

1) задати $\vec{x}^0$;

2) для $k = 0, 1, \ldots$ обчислити $\vec{e}^k = \dfrac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|}$, $\vec{x}^{k+1} = A\vec{e}^k$, $\mu_k = (\vec{x}^{k+1}, \vec{e}^k)$.

3) продовжити процес до виконання умови $|\mu_N - \mu_{N-1}| < \varepsilon$, де ε — задана точність.

Тоді $\lambda_1 = \mu_N$, $\vec{x}_1 = \vec{e}^N$.

Для симетричної матриці $A = A^T$ метод відшукання λ_2, $\vec{x}_2$ має квадратичну швидкість збіжності:

$$\mu_k - \lambda_2 = O\left(\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right|^{2k}\right).$$

Для симетричної невід'ємної матриці $A = A^T \geq 0$ за допомогою степеневого метода можна обчислити мінімальне власне значення $\lambda_{\min}(A) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i$.

Якщо відоме $\lambda_{\max}(A) = \lambda_1$, то утворимо матрицю $B = \lambda_1 E - A$, де E — одинична матриця. За допомогою степеневого метода знайде-

59

3) Результати роботи програми

```
Найменше власне значення (степеневий метод): 1.138403315170558
Власні значення (метод Якобі): [6.28123487 4.49028765 2.33281457 0.89566291]
Розв'язок методом Ньютона після 2 ітерацій: x = 0.474847428870857, y = 0.796142625335434
```

4) Висновки до цієї роботи

- У результаті виконання лабораторної роботи були реалізовані чисельні методи для знаходження власних значень матриці та розв'язання системи нелінійних рівнянь.

- За допомогою степеневого методу було знайдено найменше власне значення матриці, яке дорівнює 1.1384. Це підтверджує ефективність методу для пошуку домінуючих власних значень. Метод Якобі дозволив визначити всі власні значення симетричної матриці, які складають [6.2812, 4.4903, 2.3328, 0.8957]. Результати свідчать про збіжність методу та його придатність для діагоналізації матриць.

- Метод Ньютона був використаний для розв'язання системи нелінійних рівнянь, і після двох ітерацій отримано значення $x \approx 0.4748$ та $y \approx 0.7961$. Це демонструє швидку збіжність методу при правильному виборі початкових наближень, хоча для задач зі складними нелінійностями необхідно ретельно аналізувати похідні функцій.

- Загалом, отримані результати підтверджують коректність реалізації алгоритмів. Чисельні методи, такі як степеневий метод, метод Якобі та метод Ньютона, є потужними інструментами для аналізу та розв'язання задач лінійної алгебри та нелінійного моделювання. Їх точність і ефективність роблять їх незамінними в прикладних і наукових дослідженнях.

5) Код програми

Код до цієї роботи знаходиться в репозиторії ГітХаб за даним посиланням:

https://github.com/AleksPh/project_Numerical-Methods