Лабараторна робота №2

З дисципліни «Чисельні методи»

За темою «Розв’язування систем рівнянь»

Виконав студент 3 курсу

Групи ТТП-32

Пелих Олександр

Київ – 2024

1) Постановка задачі:

Варіант 7

Методом Гауса розв'язати систему рівнянь, знайти визначник та обернену матрицю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \\ 21 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Методом прогонки розв'язати систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Методом Якобі розв'язати систему рівнянь,

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2) Мета даної роботи:

Навчитися розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою:

- Методу Гауса.
- Методу прогонки для тридіагональних матриць.
- Методу Якобі.

3) Розв’язання:

3.1) Метод Гауса Метод Гауса використовується для розв'язання систем лінійних рівнянь шляхом послідовного приведення системи до трикутного вигляду та зворотного обчислення невідомих.

Розглянемо систему лінійних рівнянь: Ax=b де A — квадратна матриця коефіцієнтів розмірності n*n, x — вектор невідомих, b\ — вектор вільних членів.

Етапи методу Гауса:

- Прямий хід (трикутне приведення):

● Для кожного рядка і обирається опорний елемент a_ij і виконується нормалізація, тобто всі елементи нижче опорного приводяться до нуля. Це виконується шляхом віднімання від нижніх рядків i+1,i+2,…,n множини рядка iii на відповідні коефіцієнти.

Для i-го рядка, перетворення можна записати як:

$$a_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{ki}}{a_{ii}} a_{ij}, \quad \text{для } k = i+1, \dots, n$$

- Зворотний хід:

● Після трикутного приведення матриці виконується зворотне обчислення невідомих. Для останнього рівняння (верхнього у трикутній формі) обчислюється значення невідомої, а далі послідовно підставляється у попередні рівняння.

Зворотний хід можна записати як :

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

3.2) Метод прогонки є оптимізованим алгоритмом для розв'язання систем лінійних рівнянь з тридіагональною матрицею. Цей метод ефективний для матриць, в яких ненульові елементи присутні лише на головній та сусідніх діагоналях.

Розглянемо систему рівнянь для тридіагональної матриці:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

де a_i, b_i, c_i — коефіцієнти матриці, d_i — вектор вільних членів.

Етапи методу прогонки:

- Прямий хід:

- Розраховуються коефіцієнти α і β для кожного рядка:

$$\alpha_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}$$

$$\beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}$$

Початкові значення: $: \alpha_0 = 0, \beta_0 = \frac{d_0}{b_0}.$

- Зворотний хід:

- Обчислення невідомих здійснюється з кінця

$$x_n = \beta_n$$

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

3.3) Метод Якобі для розв'язання системи лінійних рівнянь є ітераційним методом, який використовується для наближених рішень. У цьому методі кожне з невідомих оновлюється на кожному кроці, використовуючи попередні значення для всіх інших змінних. Для ефективної роботи методу, матриця системи повинна бути діагонально домінуючою або близькою до цього.

- Для квадратної системи з *n* лінійних рівнянь:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

- Матрицю *A* розкладаємо на два доданки: діагональну матрицю *D*, та все інше *R*:

$$A = D + R, \qquad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

- Систему лінійних рівнянь можна переписати в $D\mathbf{x} = \mathbf{b} - R\mathbf{x}$

Ітераційний метод Якобі виражається формулою:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

4) Результати виконання програм:

4.1) Для методу Гауса

```
Метод Гауса:
Розв'язок системи рівнянь:
x1 = 2, x2 = 4, x3 = 5, x4 = -3

Визначник матриці:
det(A) = -117

Обернена матриця:
[0.62, -0.14, -0.38, -0.08]
[-1.05, 0.41, 0.81, 0.08]
[0.43, -0.19, 0.24, -0.02]
[0.62, -0.19, -0.14, -0.24]
```

4.2) Для методу Гауса

```
Метод Якобі:
x1 = 2.0, x2 = 2.0, x3 = 3.0, x4 = 3.0
```

4.3) Для методу прогонки

```
Метод прогонки:
x1 = 1.0, x2 = 3.0, x3 = 5.0
```

5) Код програм:

Код програм знаходиться у репозиторії ГітХаб за даним посиланням:
https://github.com/AleksPh/project_Numerical-Methods