

Лабараторна робота №4
З дисципліни «Інтерполяція. Сплайн Інтерполяція»
За темою «Розв'язування лінійних рівнянь»

Виконав студент 3 курсу
Групи ТТП-32
Пелих Олександр

Київ – 2024

1) Постановка задачі:

Варіант 7

1. Побудувати степеневий поліном методом невизначених коефіцієнтів за п'ятьма вузлами для функції $x^8 + 3 * x^4 - 2 * x^3 + 4$ на проміжку $[0..4]$.
2. Побудувати квадратичний сплайн для попередньої задачі за точками $x = 0, 2, 4$. Доповнити систему рівнянь значенням справжньої похідної на краю.
3. Побудувати лінійний сплайн для першої задачі з відстанню між точками розбиття інтервалу, рівною 0.5.

2) Розв'язання задачі

2.1) Метод невизначених коефіцієнтів

✚ В якості вузлів було обрано точки: (0; 4), (1; 6), (2; 292), (3; 6754), (4; 66180).
Запишемо шуканий поліном:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

✚ Далі, запишемо умови:

- $P(0) = 4$
- $P(1) = 6$
- $P(2) = 292$
- $P(3) = 6754$
- $P(4) = 66180$

✚ Отримуємо наступну сис-му рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 292 \\ 6754 \\ 66180 \end{pmatrix}$$

✚ Після розв'язання отримаємо наступний результат:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8400 \\ 15940 \\ -9242 \\ 1704 \end{pmatrix}$$

✚ Тож, шуканий поліном має вигляд:

$$P(x) = 4 - 8400x + 15940x^2 - 9242x^3 + 1704x^4$$

✚ І найбільше відхилення на нашому інтервалі:

$$\max_{x \in [0,4]} D(x) \approx 2796.02$$

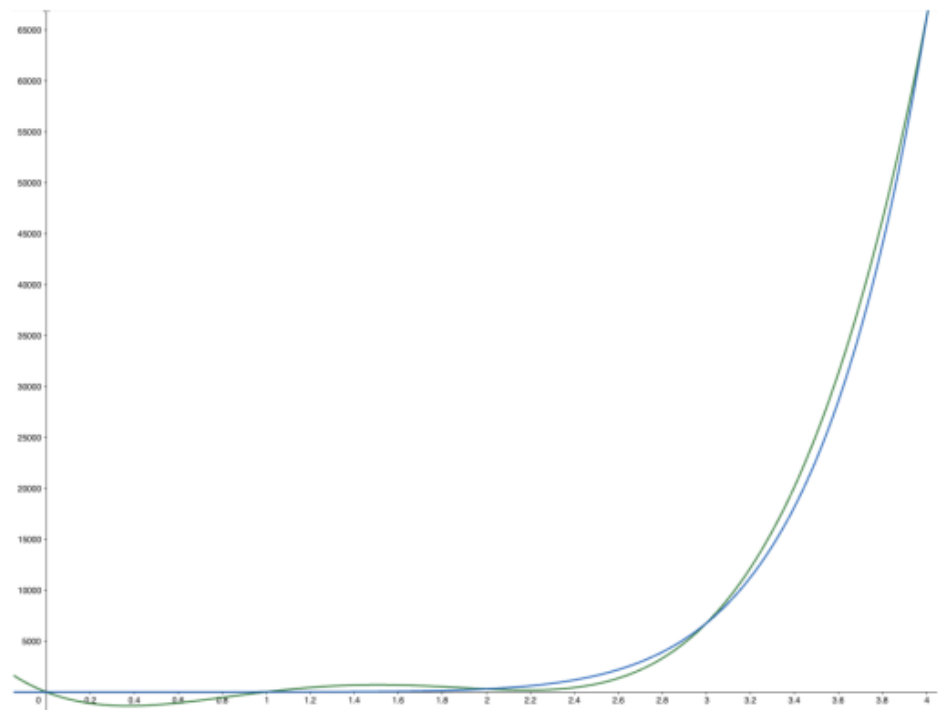


Рис. 1: Графіки функції (синій) та її наближення за МНК (зелений)

2.2) Квадратичний сплайн

✚ Шуканий сплайн матиме такий вигляд:

$$S(x) = \begin{cases} a_0 + b_0x + c_0x^2, & 0 \leq x < 2 \\ a_1 + b_1(x - 2) + c_1(x - 2)^2, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

✚ Додамо умови та значення похідної на правому краю

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \cdot (0) + c_0 \cdot (0)^2 = 4 \\ a_0 + b_0 \cdot 2 + c_0 \cdot 2^2 = 292 \\ b_0 + 2 \cdot 2 \cdot c_0 = b_1 + 2c_1 \\ a_1 + b_1 \cdot (0) + c_1 \cdot (0)^2 = 292 \\ a_1 + b_1 \cdot 2 + c_1 \cdot 2^2 = 66180 \\ b_1 + 6c_1 = 131744 \end{cases}$$

✚ Спростимо у матричний вигляд:

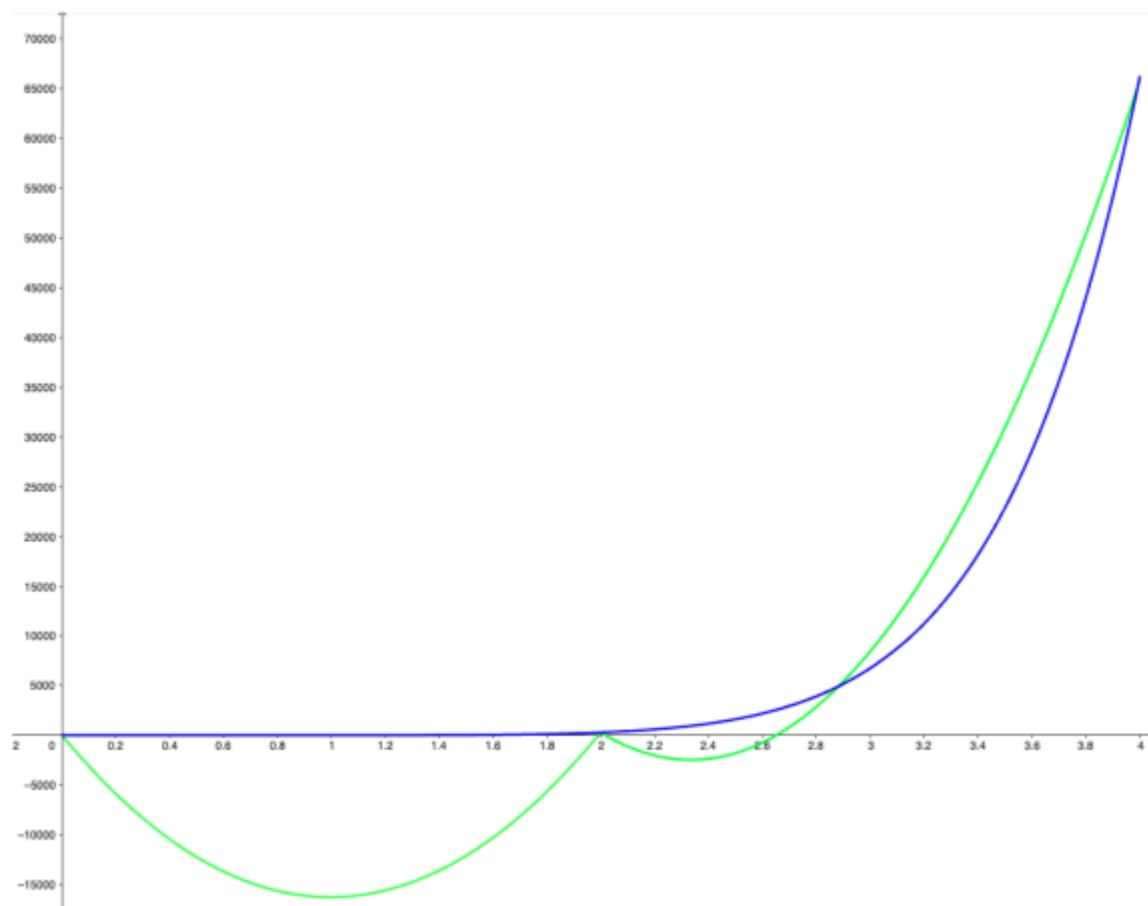
$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & a_1 & b_1 & c_1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & = & 292 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & -2 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & = & 292 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & = & 66180 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & = & 131744 \end{pmatrix}$$

✚ Тож, на виході маємо:

$$S(x) = \begin{cases} 4 - 32656x + 16400x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 292 - 16456(x - 2) + 24700(x - 2)^2, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

🚧 Тож, найбільше відхилення на заданому інтервалі:

$$\max_{x \in [0,4]} D(x) \approx 16258.26$$



2.3) Лінійний сплайн

✚ Для побудови лінійного сплайну визначимо його вузли: (0; 4), (0.5; 3.94), (1; 6), (1.5; 38.07), (2; 292), (2.5; 1615.82), (3; 6754), (3.5; 22887.19), (4; 66180)

✚ За формулою знайдемо нахили:

$$b_0 = -0.12$$

$$b_1 = 4.12$$

$$b_2 = 64.14$$

$$b_3 = 507.86$$

$$b_4 = 2647.64$$

$$b_5 = 10276.36$$

$$b_6 = 32266.38$$

$$b_7 = 86585.62$$

✚ Утворюємо сплайни:

$$S(x) = \begin{cases} 4 - 0.12(x - 0), & 0 \leq x < 0.5 \\ 3.94 + 4.12(x - 0.5), & 0.5 \leq x < 1 \\ 6 + 64.14(x - 1), & 1 \leq x < 1.5 \\ 38.07 + 507.86(x - 1.5), & 1.5 \leq x < 2 \\ 292 + 2647.64(x - 2), & 2 \leq x < 2.5 \\ 1615.82 + 10276.36(x - 2.5), & 2.5 \leq x < 3 \\ 6754 + 32266.38(x - 3), & 3 \leq x < 3.5 \\ 22887.19 + 86585.62(x - 3.5), & 3.5 \leq x < 4 \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} 4 - 0.12x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 1.88 + 4.12x, & 0.5 \leq x < 1 \\ -58.14 + 64.14x, & 1 \leq x < 1.5 \\ -723.7199999999999 + 507.86x, & 1.5 \leq x < 2 \\ -5003.28 + 2647.64x, & 2 \leq x < 2.5 \\ -24075.08 + 10276.36x, & 2.5 \leq x < 3 \\ -90045.14 + 32266.38x, & 3 \leq x < 3.5 \\ -280162.48 + 86585.62x, & 3.5 \leq x < 4 \end{cases}$$

✚ Найбільше відхилення на заданому інтервалі:

$$\max_{x \in [0,4]} D(x) \approx 4956.805$$

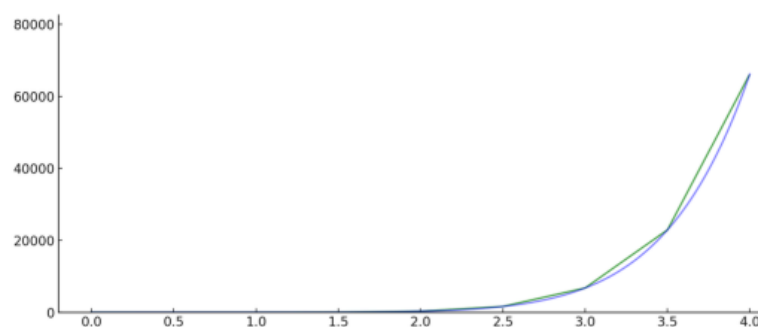


Рис. 3: Графіки функції (синій) та її наближення лінійним сплайном (зелений)