Методы оптимизации, ВМК, осень 2018

Домашняя работа 2: Выпуклые множества и функции

Думбай А.Д., Исправление задачи 6

1 Бонусные задачи

1.1 Задача 6

Пусть V и W — вещественные векторные пространства, E — непустое множество в пространстве $V \oplus W$, пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — ограниченная снизу выпуклая функция. Пусть $G := \{x : (x, y) \in E\}$ — проекция множества E на пространство V, и пусть $g : G \to \mathbb{R}$ — *маргинальная функция* $g(x) := \inf_{y \in W : (x,y) \in E} f(x, y)$. Покажите, что g выпуклая.

Решение

Рассмотрим произвольные $x_1, x_2 \in G$. Докажем, то для любого $\alpha \in (0, 1)$:

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha g(x_1) + (1-\alpha)g(x_2)$$

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \inf_{y \in W : (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, y) \in E} f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, y)$$

В силу того, что G - проекция на E и в силу выпуклости E существуют точки $y_1, y_2 \in W$:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \Rightarrow \alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2) \in E$$

.

Рассмотрим всевозможные $y_1, y_2 \in W$ таких, что $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E$. Тогда, т.к. инфимум не превосходит любого элемента из множества, получаем, что $\forall y_1, y_2 \in W$ таких, что $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E$:

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \inf_{y \in W : (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, y) \in E} f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, y) \leq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)$$

В силу выпуклости f:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1-\alpha)f(x_2, y_2)$$

В итоге получаем:

$$\forall y_1, y_2 \in W \text{ таких, что } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E : g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1-\alpha)f(x_2, y_2)$$

Возьмем инфимум от левой и правой части по y_1 по $(x_1, y_1) \in E$, что сохранит неравенство. Будем пользоваться константностью всех членов неравенства, кроме $f(x_1, y_1)$ по y_1.

$$\inf_{y_1 \in W : (x_1, y_1) \in E} g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \inf_{y_1 \in W : (x_1, y_1) \in E} (\alpha f(x_1, y_1) + (1-\alpha)f(x_2, y_2)) \Rightarrow$$

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha \inf_{y_1 \in W : (x_1, y_1) \in E} (f(x_1, y_1)) + (1-\alpha)f(x_2, y_2) = \alpha g(x_1) + (1-\alpha)f(x_2, y_2) \Rightarrow$$

$$\forall y_2 \in W \text{ таких, что } (x_2, y_2) \in E : g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha g(x_1) + (1-\alpha)f(x_2, y_2)$$

Аналогично взяв инфимум по y_2 - получаем искомое неравенство

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha g(x_1) + (1-\alpha)g(x_2)$$

Следовательно g - выпукла. □