Численные методы Дифференциальные уравнения

Александр Сергеевич Журавлёв

Физико-технический институт

May 27, 2019

Темы

- Исчисление бесконечно малых
  - Геометрическая интерпретация
  - Дифференциал, полная и частная производные
  - Функционал и его вариация
  - Принцип наименьшего действия
- Вычислительная линейная алгебра
  - Линеаризация
  - Разряженные матрицы
  - Алгоритмирование матричных операций

Темы

- Метод конечных разностей (МКР)
  - Разложение в ряд Тейлора
  - $\rho\frac{\partial}{\partial t}c_\rho T + \rho\vec{v}\vec{\nabla}c_\rho T = \vec{\nabla}\lambda\vec{\nabla}T$
  - Сеточные числа Фурье и Куранта
  - Общий алгоритм численного решения
- Метод конечных объёмов (МКО)
  - Разбиение на элементарные объемы
  - Интерполяция между центрами объемов
  - $\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\rho c_\rho T dV + \oint\limits_S \rho c_\rho \vec{v} T d\vec{S} = \oint\limits_S \lambda\vec{\nabla}T d\vec{S}$

Темы

- Метод конечных элементов (МКЭ)
  - Вариационный принцип

    $$\Pi\left(T\right) = \int\limits_V \left(\frac{1}{2}a\left(\vec{\nabla}T\right)^2 - QT\right)dV + \oint\limits_S \vec{q}Td\vec{S}$$

    $$\delta\Pi = -\int\limits_V \left(\vec{\nabla}a\vec{\nabla}T - Q\right)\delta T dV + \oint\limits_S \left(a\vec{\nabla}T + \vec{q}\right)\delta T d\vec{S}$$
  - Конечные элементы и координатные функции
  - Триангуляция Делоне
  - Минимизации функционала
  - Метод Галёркина

Источники

- Самарский, А.А., 1978. Методы решения сеточных уравнений. Наука.
- Самарский, А.А. and Гулин, А.В., 2003. Численные методы математической физики. М: Науч. мир.
- Зенкевич, О., 1975. Метод конечных элементов в технике. Рипол Классик.
- LeVeque, R.J., 2007. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems (Vol. 98). Siam.
- Eymard, R., Gallouët, T. and Herbin, R., 2000. Finite volume methods. Handbook of numerical analysis, 7, pp.713-1018.

Разложение в ряд Тейлора

$$AU = 0,\ LU = 0,\ AU_i = LU_i + R_i, \tag{1}$$

$$x_0, x_1, \dots, x_N, \tag{2}$$

$$x_0 = 0, x_N = L, \quad h = x_{i+1} - x_i, \tag{3}$$

$$f(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \tag{4}$$

$$U_{i+1} = U_i + U_i' h + U_i'' \frac{h^2}{2} + U_i''' \frac{h^3}{6} + U_i^{IV} \frac{h^4}{24} + \cdots, \tag{5}$$

$$U_{i-1} = U_i - U_i' h + U_i'' \frac{h^2}{2} - U_i''' \frac{h^3}{6} + U_i^{IV} \frac{h^4}{24} - \cdots. \tag{6}$$

Разложение в ряд Тейлора

$$U_i' = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + R_i^f, \quad R_i^f = -U_i''\frac{h}{2} - U_i'''\frac{h^2}{6} - \cdots, \qquad (7)$$

$$U_i' = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + R_i^b, \quad R_i^b = U_i''\frac{h}{2} - U_i'''\frac{h^2}{6} - \cdots, \qquad (8)$$

$$U_i' = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + R_i^c, \quad R_i^c = -U_i'''\frac{h^2}{6} - \cdots, \qquad (9)$$

$$U_i'' = \frac{U_{i+1} - 2Ui + U_{i-1}}{h^2} + R_i^2, \quad R_i^2 = -U_i^{IV}\frac{h^2}{12} - \cdots. \qquad (10)$$

МКР Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{\rho c_\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, (11)$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + v_i\frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\lambda}{\rho c_\rho}\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}, (12)$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + v_i\frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \frac{\lambda}{\rho c_\rho}\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}, (13)$$

$$T_i^{n+1} = \left(F + \frac{C}{2}\right) T_{i-1}^n + (1 - 2F)\, T_i^n + \left(F - \frac{C}{2}\right) T_{i+1}^n, (14)$$

$$\left(-\frac{C}{2} - F\right) T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2F)\, T_i^{n+1} + \left(\frac{C}{2} - F\right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n. (15)$$

МКР Сеточные числа Фурье и Куранта

$$F = \frac{\lambda}{\rho c_\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad C = v_i \frac{\Delta t}{\Delta x}, \tag{16}$$

$$F < \frac{1}{2}, \quad C < 2F, \tag{17}$$

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\rho c_\rho}{\lambda}, \quad \Delta x < \frac{2}{v_i} \frac{\lambda}{\rho c_\rho}, \tag{18}$$

МКР Уравнение теплопроводности

$$\Pi(T) = \int\limits_L \left(\frac{1}{2} a \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - QT \right) dx + qT|_\Gamma, (19)$$

$$\delta\Pi = -\int\limits_L \left(\frac{d}{dx} a \frac{dT}{dx} - Q \right) \delta T dL + \left(a \frac{dT}{dx} + qT \right) \delta T \Big|_\Gamma, (20)$$

$$T(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i^j(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N} T_i f_i^j(x), (21)$$

$$\Pi = \sum_{j=1}^{N-1} \Pi^j \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T_i} \sum_{j=1}^{N-1} \Pi^j = 0, (22)$$