Численные методы
Дифференциальные уравнения

Александр Сергеевич Журавлёв

Физико-технический институт

March 11, 2019

Темы

- Исчисление бесконечно малых
  - Геометрическая интерпретация
  - Дифференциал, полная и частная производные
  - Функционал и его вариация
- Метод конечных разностей
  - Разложение в ряд Тейлора
  - $\rho \frac{\partial}{\partial t} c_\rho T + \rho \vec{v} \vec{\nabla} c_\rho T = \vec{\nabla} \lambda \vec{\nabla} T$
  - Сеточные числа Фурье и Куранта
  - Общий алгоритм численного решения

Темы

- Метод конечного объёма
  - $\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\rho c_\rho T dV + \oint\limits_S \rho c_\rho \vec{v} T d\vec{S} = \oint\limits_S \lambda \vec{\nabla} T d\vec{S}$
- Метод конечных элементов

Источники

- Самарский, А.А., 1978. Методы решения сеточных уравнений. Наука.
- Самарский, А.А. and Гулин, А.В., 2003. Численные методы математической физики. М: Науч. мир.
- Зенкевич, О., 1975. Метод конечных элементов в технике. Рипол Классик.
- LeVeque, R.J., 2007. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems (Vol. 98). Siam.
- Eymard, R., Gallouët, T. and Herbin, R., 2000. Finite volume methods. Handbook of numerical analysis, 7, pp.713-1018.

Разложение в ряд Тейлора

$$AU = 0,\ LU = 0,\ AU_i = LU_i + R_i, \tag{1}$$

$$x_0, x_1, \ldots, x_N, \tag{2}$$

$$x_0 = 0, x_N = L, \quad h = x_{i+1} - x_i, \tag{3}$$

$$f\left(x, a\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(a\right)}{n!} \left(x - a\right)^n, \tag{4}$$

$$U_{i+1} = U_i + U_i' h + U_i'' \frac{h^2}{2} + U_i''' \frac{h^3}{6} + U_i^{IV} \frac{h^4}{24} + \cdots, \tag{5}$$

$$U_{i-1} = U_i - U_i' h + U_i'' \frac{h^2}{2} - U_i''' \frac{h^3}{6} + U_i^{IV} \frac{h^4}{24} - \cdots. \tag{6}$$

Разложение в ряд Тейлора

$$U_i' = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + R_i^f, \quad R_i^f = -U_i''\frac{h}{2} - U_i'''\frac{h^2}{6} - \cdots, \qquad (7)$$

$$U_i' = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + R_i^b, \quad R_i^b = U_i''\frac{h}{2} - U_i'''\frac{h^2}{6} - \cdots, \qquad (8)$$

$$U_i' = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + R_i^c, \quad R_i^c = -U_i'''\frac{h^2}{6} - \cdots, \qquad (9)$$

$$U_i'' = \frac{U_{i+1} - 2Ui + U_{i-1}}{h^2} + R_i^2, \quad R_i^2 = -U_i^{IV}\frac{h^2}{12} - \cdots. \qquad (10)$$

МКР Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}+v\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\lambda}{\rho c_\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, (11)$$

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}+v_i\frac{T_{i+1}^n-T_{i-1}^n}{2\Delta x}=\frac{\lambda}{\rho c_\rho}\frac{T_{i-1}^n-2T_i^n+T_{i+1}^n}{\Delta x^2}, (12)$$

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}+v_i\frac{T_{i+1}^{n+1}-T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}=\frac{\lambda}{\rho c_\rho}\frac{T_{i-1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}, (13)$$

$$T_i^{n+1}=(1-2F)\,T_{i-1}^n+\left(F-\frac{C}{2}\right)T_i^n+(1-2F)\,T_{i+1}^n, (14)$$

$$\left(-\frac{C}{2}-F\right)T_{i-1}^{n+1}+(1+2F)\,T_i^{n+1}+\left(\frac{C}{2}-F\right)T_{i+1}^{n+1}=T_i^n. (15)$$

МКР Сеточные числа Фурье и Куранта

$$F = \frac{\lambda}{\rho c_\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad C = v_i \frac{\Delta t}{\Delta x}, \tag{16}$$

$$F < \frac{1}{2}, \quad C < 2F, \tag{17}$$

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\rho c_\rho}{\lambda}, \quad \Delta x < \frac{2}{v_i} \frac{\lambda}{\rho c_\rho}, \tag{18}$$

Общий алгоритм численного решения проблем

1. Физико-математическая постановка задачи
2. Выбор численной схемы
3. Построение сетки и выбор шагов по времени
4. Построение численной схемы
5. Решение
6. Валидация полученного решения