

# Численные методы Дифференциальные уравнения

Александр Сергеевич Журавлёв

Физико-технический институт

March 11, 2019

- Исчисление бесконечно малых
  - Геометрическая интерпретация
  - Дифференциал, полная и частная производные
  - Функционал и его вариация
- Метод конечных разностей
  - Разложение в ряд Тейлора
  - $\rho \frac{\partial}{\partial t} c_p T + \rho \vec{v} \vec{\nabla} c_p T = \vec{\nabla} \lambda \vec{\nabla} T$
  - Сеточные числа Фурье и Куранта
  - Общий алгоритм численного решения

- Метод конечного объёма

- $$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho c_\rho T dV + \oint_S \rho c_\rho \vec{v} T d\vec{S} = \oint_S \lambda \vec{\nabla} T d\vec{S}$$

- Метод конечных элементов

- Самарский, А.А., 1978. Методы решения сеточных уравнений. Наука.
- Самарский, А.А. and Гулин, А.В., 2003. Численные методы математической физики. М: Науч. мир.
- Зенкевич, О., 1975. Метод конечных элементов в технике. Рипол Классик.
- LeVeque, R.J., 2007. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems (Vol. 98). Siam.
- Eymard, R., Gallouët, T. and Herbin, R., 2000. Finite volume methods. Handbook of numerical analysis, 7, pp.713-1018.

# Разложение в ряд Тейлора

$$AU = 0, \quad LU = 0, \quad AU_i = LU_i + R_i, \quad (1)$$

$$x_0, x_1, \dots, x_N, \quad (2)$$

$$x_0 = 0, x_N = L, \quad h = x_{i+1} - x_i, \quad (3)$$

$$f(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (4)$$

$$U_{i+1} = U_i + U_i' h + U_i'' \frac{h^2}{2} + U_i''' \frac{h^3}{6} + U_i^{IV} \frac{h^4}{24} + \dots, \quad (5)$$

$$U_{i-1} = U_i - U_i' h + U_i'' \frac{h^2}{2} - U_i''' \frac{h^3}{6} + U_i^{IV} \frac{h^4}{24} - \dots. \quad (6)$$

# Разложение в ряд Тейлора

$$U'_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + R_i^f, \quad R_i^f = -U_i'' \frac{h}{2} - U_i''' \frac{h^2}{6} - \dots, \quad (7)$$

$$U'_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + R_i^b, \quad R_i^b = U_i'' \frac{h}{2} - U_i''' \frac{h^2}{6} - \dots, \quad (8)$$

$$U'_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + R_i^c, \quad R_i^c = -U_i''' \frac{h^2}{6} - \dots, \quad (9)$$

$$U''_i = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + R_i^2, \quad R_i^2 = -U_i^{IV} \frac{h^2}{12} - \dots. \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, (11)$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + v_i \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}, (12)$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + v_i \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}, (13)$$

$$T_i^{n+1} = \left(F + \frac{C}{2}\right) T_{i-1}^n + (1 - 2F) T_i^n + \left(F - \frac{C}{2}\right) T_{i+1}^n, (14)$$

$$\left(-\frac{C}{2} - F\right) T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2F) T_i^{n+1} + \left(\frac{C}{2} - F\right) T_{i+1}^{n+1} = T_i^n. (15)$$

$$F = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad C = v_i \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (16)$$

$$F < \frac{1}{2}, \quad C < 2F, \quad (17)$$

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\rho c_p}{\lambda}, \quad \Delta x < \frac{2}{v_i} \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad (18)$$



# Общий алгоритм численного решения проблем

- 1 Физико-математическая постановка задачи
- 2 Выбор численной схемы
- 3 Построение сетки и выбор шагов по времени
- 4 Построение численной схемы
- 5 Решение
- 6 Валидация полученного решения