Материальная точка
Сплошная среда
Основы механики
Немного математики

Александр Сергеевич Журавлёв

31 октября 2015 г.

Оглавление

1 Кое-что из математики 5
- 1.1 Тензорное исчисление . . . 5
- 1.2 Вспомогательные теоремы . . . 7
- 1.3 Конечно-разностное представление линейного параболического уравнения 8
  - 1.3.1 Одномерный случай . . . 8
  - 1.3.2 Двумерный случай . . . 9

2 Материальная точка 10
- 2.1 Уравнения Лагранжа . . . 10
- 2.2 Законы сохранения . . . 11
  - 2.2.1 Энергия . . . 12
  - 2.2.2 Импульс . . . 12
  - 2.2.3 Момент импульса . . . 12
- 2.3 Уравнения Гамильтона . . . 13
- 2.4 Скобки Пуассона . . . 14

3 Сплошная среда 15
- 3.1 Основы термодинамики . . . 15
- 3.2 Законы сохранения . . . 16
  - 3.2.1 Сохранение массы . . . 16
  - 3.2.2 Сохранение импульса . . . 16
  - 3.2.3 Сохранение энергии . . . 17
- 3.3 Тензоры деформаций и скоростей малых деформаций . . . 19
- 3.4 Тензор напряжений . . . 20
- 3.5 Идеальная жидкость . . . 20
- 3.6 Линейно-вязкая жидкость . . . 22
- 3.7 Теплопроводность . . . 23
- 3.8 Диффузия . . . 24
- 3.9 Фильтрация . . . 24
- 3.10 Звук . . . 26

Обозначения

χ	пористость
γ	вторая вязкость
λ	коэффициент теплопроводности
μ	динамическая вязкость
ν	кинематическая вязкость
ρ	плотность массы
ε	внутренняя энергия, отнесённая к единице массы
$\vec{v}$	скорость
$\vec{\vec{\sigma}}'$	тензор вязких напряжений
$\vec{\vec{\sigma}}$	тензор напряжений
$\vec{\vec{v}}$	тензор скоростей малых деформаций
$\vec{\vec{\vec{\vec{M}}}}$	тензор вязкости
$\vec{\vec{k}}$	тензор абсолютной проницаемости
$\vec{\vec{u}}$	тензор деформаций
$\vec{g}$	ускорение свободного падения
$\vec{M}$	момент импульса
$\vec{p}$	импульс
$\vec{q}$	плотность потока тепловой энергии за счёт теплообмена
$\vec{u}$	смещение
a	температуропроводность

c_ρ	изохорная теплоёмкость, отнесённая к единице массы
c_p	изобарная теплоёмкость, отнесённая к единице массы
D	коэффициент диффузии
E	энергия
h	энтальпия, отнесённая к единице массы
L	функция Лагранжа
m	масса
p	давление
s	энтропия, отнесённая к единице массы
T	температура
U	потенциальная энергия
W	кинетическая энергия
H	функция Гамильтона

1. Кое-что из математики

1.1 Тензорное исчисление

Сокращённая запись частного дифференцирования по координатам:

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} = a_{,i}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_{\tilde{j}}} = x_{i,\tilde{j}}, \quad \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = b_{i,i}, \quad \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_k} = c_{ij,k}. \tag{1.1}$$

Определение тензора:

$$\begin{gathered} b_i = x_{i,\tilde{j}} b_{\tilde{j}}, \quad c_{ij} = x_{i,\tilde{k}} x_{j,\tilde{l}} c_{\tilde{k}\tilde{l}}, \\ d_{i_1 i_2 \ldots i_N} = x_{i_1,\tilde{j}_1} x_{i_2,\tilde{j}_2} \cdots x_{i_N,\tilde{j}_N} d_{\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \ldots \tilde{j}_N}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Метрический тензор:

$$g_{ij} = x_{\tilde{n},i} x_{\tilde{n},j}, \quad g^*_{ij} = x_{i,\tilde{n}} x_{j,\tilde{n}}. \tag{1.3}$$

в данном случае тильдой помечена произвольная ортогональная система координат.

Символы Кристоффеля первого рода:

$$\Gamma^*_{ijk} = \frac{1}{2} \left(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i} \right) \tag{1.4}$$

Символы Кристоффеля второго рода:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} g^*_{il} \left(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l} \right) \tag{1.5}$$

Физическое представление тензора:

$$\begin{gathered} B_f = \sqrt{g_{ff}}\, b_f, \quad C_{fh} = \sqrt{g_{ff}} \sqrt{g_{hh}}\, c_{fh}, \\ D_{f_1 f_2 \ldots f_N} = \sqrt{g_{f_1 f_1}} \sqrt{g_{f_2 f_2}} \cdots \sqrt{g_{f_N f_N}}\, d_{f_1 f_2 \ldots f_N}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Далее соотношения приводятся отдельно для декартовой и произвольной ортогональной криволинейной систем координат.

Скалярное произведение:

$$a_i b_i = c, \quad g_{ij} a_i b_j = c. \tag{1.7}$$

Полная производная от вектора по времени:

$$\dot{a}_i = b_i, \quad \dot{a}_i + \Gamma_{ijk} a_j \dot{x}_k = b_i. \tag{1.8}$$

Частная производная от вектора по координате:

$$a_{i,l} = c_{il}, \quad g^*_{kl} a_{i,k} + g^*_{kl} \Gamma_{ijk} a_j = c_{il}. \tag{1.9}$$

Частная производная от тензора второго ранга по координате:

$$c_{ij,l} = d_{ijl}, \quad g^*_{kl} a_{ij,k} + g^*_{kl} \Gamma_{imk} a_{mj} + g^*_{kl} \Gamma_{jmk} a_{im} = d_{ijl}. \tag{1.10}$$

Градиент:

$$c_{,i} = a_i, \quad g^*_{ij} c_{,j} = a_i. \tag{1.11}$$

Дивергенция:

$$b_{i,i} = c, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} b_i = c. \tag{1.12}$$

Ротор:

$$l_{ijk} b_{k,j} = a_i, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} g_{kl} b_l = a_i. \tag{1.13}$$

Векторное произведение:

$$l_{ijk} d_k e_j = f_i, \quad \sqrt{g} g^*_{ij} l_{jkl} d_l e_k = f_i. \tag{1.14}$$

Дивергенция градиента:

$$a_{,ii} = c, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} g^*_{ij} a_{,j} = c. \tag{1.15}$$

Ротор градиента:

$$l_{ijk} a_{,kj} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} l_{ijk} a_{,kj} = 0. \tag{1.16}$$

Дивергенция ротора:

$$l_{ijk} b_{k,ij} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} l_{ijk} g_{kl} b_l = 0. \tag{1.17}$$

Далее соотношения приводятся только для декартовой системы координат.
Ротор ротора:

$$l_{ijk} l_{klm} b_{m,jl} = b_{m,mi} + b_{i,mm}. \tag{1.18}$$

Градиент квадрата модуля вектора:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} b_j b_j = l_{ijk} b_k l_{jlm} b_{l,m} + b_j b_{i,j}. \tag{1.19}$$

Таблица 1.1: Тензорные объекты в ортогональных системах координат.

объект	системы координат		
	Декартова	Цилиндрическая	Сферическая
$\vec{\vec{g}}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\varphi \end{matrix}$
$\vec{\vec{g}}*$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 sin^2\varphi} \end{matrix}$
$\vec{\vec{\vec{\Gamma}}}*$	$0.$	$\Gamma^*_{323} = \Gamma^*_{332} = r,$ $\Gamma^*_{233} = -r.$	$\Gamma^*_{212} = \Gamma^*_{221} = r,$ $\Gamma^*_{122} = -r,$ $\Gamma^*_{313} = \Gamma^*_{331} = r\ sin^2\varphi,$ $\Gamma^*_{133} = -r\ sin^2\varphi,$ $\Gamma^*_{323} = \Gamma^*_{332} = r^2 sin\varphi\ cos\varphi,$ $\Gamma^*_{233} = -r^2 sin\varphi\ cos\varphi.$
$\vec{\vec{\vec{\Gamma}}}$	$0.$	$\Gamma_{323} = \Gamma_{332} = r,$ $\Gamma_{233} = -\frac{1}{r}.$	$\Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \Gamma_{313} = \Gamma_{331} = \frac{1}{r},$ $\Gamma_{122} = -r,$ $\Gamma_{133} = -r\ sin^2\varphi,$ $\Gamma_{323} = \Gamma_{332} = ctg\varphi,$ $\Gamma_{233} = -sin\varphi\ cos\varphi.$

1.2 Вспомогательные теоремы

Приводимые здесь формулировки теорем справедливы для декартовой системе координат.

$$\int\limits_{V_0} a dV = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0, \qquad \int\limits_{V_0} b_i dV = 0 \quad \Rightarrow \quad b_i = 0. \tag{1.20}$$

$$\oint\limits_{f_0} b_i df_i = \int\limits_{V_0} b_{i,i} dV, \qquad \oint\limits_{f_0} c_{ij} df_j = \int\limits_{V_0} c_{ij,j} dV. \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} a dV &= \int\limits_{V_0} \frac{\partial a}{\partial t} dV + \oint\limits_{f_0} a \upsilon_i df_i, \\ \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} b_i dV &= \int\limits_{V_0} \frac{\partial b_i}{\partial t} dV + \oint\limits_{f_0} b_i \upsilon_j df_j, \end{aligned} \tag{1.22}$$

где $\vec{v}$ - скорость ($\vec{v} = \dot{\vec{x}}$).

$$\oint\limits_{L_0} b_i dx_i = \int\limits_{f_0} l_{ijk} b_{k,j} df_i. \tag{1.23}$$

1.3 Конечно-разностное представление линейного параболического уравнения

1.3.1 Одномерный случай

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{1.24}$$

$$T(x,0) = T^{init}, \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned} T(0,t) &= T_{left}, \\ T(L,t) &= T_{right}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = a\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}, \tag{1.27}$$

$$T_i^0 = T_i^{init}, \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned} T_0^n &= T_{left}^n, \\ T_N^n &= T_{right}^n. \end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{gathered} A_i T_{i-1}^{n+1} + B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i+1}^{n+1} = D_i; \\ i = 0: \ A_i = 0, \ B_i = 1, \ C_i = 0, \ D_i = T_{left}^{n+1}; \\ i = N: \ A_i = 0, \ B_i = 1, \ C_i = 0, \ D_i = T_{right}^{n+1}; \\ i \neq N \neq 0: \ A_i = -\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}, \ B_i = 1 + 2\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}, \ C_i = -\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}, \ D_i = T_i^n. \end{gathered} \tag{1.30}$$

Пусть $N = 6$:

$$\begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & B_4 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & B_5 & C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0^{n+1} \\ T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ T_4^{n+1} \\ T_5^{n+1} \\ T_6^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

1.3.2 Двумерный случай

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{1.32}$$

$$T\left(x, y, 0\right) = T_0, \tag{1.33}$$

$$\begin{gathered} T\left(0, y, t\right) = T_{left},\ T\left(L_x, y, t\right) = T_{right}. \\ T\left(x, 0, t\right) = T_{bot},\ T\left(x, L_y, t\right) = T_{top}. \end{gathered} \tag{1.34}$$

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = a\left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right), \tag{1.35}$$

(1.36)

$$T_{i,j}^{0} = T_{i,j}^{init}, \tag{1.37}$$

$$\begin{gathered} T_{0,j}^{n} = T_{left\ j}^{n},\ T_{N_x^j}^{n} = T_{right\ j}^{n}, \\ T_{i,0}^{n} = T_{bot\ i}^{n},\ T_{i,N_y}^{n} = T_{top\ i}^{n}. \end{gathered} \tag{1.38}$$

$$\begin{gathered} A_{i,j}T_{i-1,j}^{n+1} + B_{i,j}T_{i,j-1}^{n+1} + C_{i,j}T_{i,j}^{n+1} + D_{i,j}T_{i+1,j}^{n+1} + E_{i,j}T_{i,j+1}^{n+1} = F_{i,j}, \\ i = 0:\ A_{i,j} = 0,\ B_{i,j} = 0,\ C_{i,j} = 1,\ D_{i,j} = 0,\ E_{i,j} = 0,\ F_{i,j} = T_{left}^{n+1}; \\ i = N_x:\ A_{i,j} = 0,\ B_{i,j} = 0,\ C_{i,j} = 1,\ D_{i,j} = 0,\ E_{i,j} = 0,\ F_{i,j} = T_{right}^{n+1}; \\ j = 0:\ A_{i,j} = 0,\ B_{i,j} = 0,\ C_{i,j} = 1,\ D_{i,j} = 0,\ E_{i,j} = 0,\ F_{i,j} = T_{bot}^{n+1}; \\ j = N_y:\ A_{i,j} = 0,\ B_{i,j} = 0,\ C_{i,j} = 1,\ D_{i,j} = 0,\ E_{i,j} = 0,\ F_{i,j} = T_{top}^{n+1}; \\ i \neq N \neq 0:\ A_{i,j} = -\frac{a\Delta t}{\Delta x^2},\ B_{i,j} = -\frac{a\Delta t}{\Delta y^2}, \\ C_i = 1 + 2a\Delta t\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2 \Delta y^2},\ A_{i,j} = -\frac{a\Delta t}{\Delta x^2},\ B_{i,j} = -\frac{a\Delta t}{\Delta y^2},\ F_{i,j} = T_{i,j}^{n}. \end{gathered} \tag{1.39}$$

2. Материальная точка

Материальная точка - тело, размерами которого допустимо пренебречь.

В рамках механики материальной точки принимается, что время является абсолютным и однородным, пространство - трёхмерным евклидовым, однородным и изотропным.

2.1 Уравнения Лагранжа

Общую формулировку закона движения системы материальных точек можно представить в виде так называемого принципа наименьшего действия. Этот принцип заключается в утверждении того, что любая механическая система материальных точек характеризуется функцией

$$L = L\left(\vec{x}^{[1]}, \vec{x}^{[2]}, \ldots, \dot{\vec{x}}^{[1]}, \dot{\vec{x}}^{[2]}, \ldots\right) \tag{2.1}$$

где L - функция Лагранжа, $\vec{x}^{[n]}$ - радиус-вектор n-й материальной точки. Функция L такова, что интеграл (2.2), называемый действием имеет экстремальное значение.

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{2.2}$$

где t_1 и t_2 - моменты времени, в которые система занимает определённое положение.

Таким образом принцип наименьшего действия можно записать в виде

$$\delta S = \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \tag{2.3}$$

или, произведя варьирование:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i^{[n]}} \delta x_i^{[n]} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} \delta \dot{x}_i^{[n]} \right) dt = 0, \tag{2.4}$$

далее

$$\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} \delta x_i^{[n]} \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i^{[n]}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} \right) \delta x_i^{[n]} dt = 0. \tag{2.5}$$

Как следует из принятых допущений в моменты времени t_1 и t_2 система занимает определённое положение, тогда справедливы следующие соотношения

$$\delta x_i^{[n]}(t_1) = \delta x_i^{[n]}(t_2) = 0, \tag{2.6}$$

тогда

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^{[n]}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} = 0, \tag{2.7}$$

здесь

$$\dot{p}_i^{[n]} = \frac{\partial L}{\partial x_i^{[n]}}, \tag{2.8}$$

$$p_i^{[n]} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}}, \tag{2.9}$$

где $\vec{p}$ - импульс.

Как следует из уравнений (2.5) и (2.7) функция Лагранжа определена с точностью до умножения на произвольную константу и до прибавления произвольной функции координат и времени, являющейся полной производной по времени. Так например результат варьировании действия (2.10) полностью идентичен (2.7).

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \left(aL + \frac{df}{dt} \right) dt = 0, \tag{2.10}$$

где a - произвольная константа, а $f = f(x, t)$.

Вид функции Лагарнжа определяется экспериментально:

$$L = \sum_n \frac{m^{[n]} \dot{x}_i^{[n]} \dot{x}_i^{[n]}}{2} - U\left(\vec{x}^{[1]}, \vec{x}^{[2]}, \dots\right), \tag{2.11}$$

где m - масса (определяется экспериментально), U - потенциальная энергия,

$$W = \sum_n \frac{m^{[n]} \dot{x}_i^{[n]} \dot{x}_i^{[n]}}{2}, \tag{2.12}$$

где W - кинетическая энергия.

Таким образом

$$L = W - U. \tag{2.13}$$

2.2 Законы сохранения

Из основополагающих свойств времени и пространства с использованием функции Лагранжа (2.1) можно получить уравнения, представляющие соответствующие законы сохранения.

2.2.1 Энергия

С учётом однородности времени и соотношения (2.7) следует, что

$$\frac{dL}{dt} = \sum_n \frac{\partial L}{\partial x_i^{[n]}} \dot{x}_i^{[n]} + \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} \ddot{x}_i^{[n]} = \sum_n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} \dot{x}_i^{[n]}, \tag{2.14}$$

таким образом

$$\frac{d}{dt} E = 0, \tag{2.15}$$

здесь

$$E = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} \dot{x}_i^{[n]} - L, \tag{2.16}$$

где E - энергия.

Из (2.11) и (2.12) следует

$$E = W + U. \tag{2.17}$$

2.2.2 Импульс

С учётом однородности пространства следующая вариация функции Лагранжа равна нулю:

$$\delta L = \sum_n \frac{\partial L}{\partial x_i^{[n]}} \delta x_i^{[n]} = 0, \tag{2.18}$$

откуда следует

$$\sum_n \frac{\partial L}{\partial x_i^{[n]}} = 0. \tag{2.19}$$

С учётом (2.7):

$$\frac{d}{dt} p_i = 0, \tag{2.20}$$

здесь с учётом (2.11):

$$p_i = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} = \sum_n p_i^{[n]} = \sum_n m^{[n]} \dot{x}_i^{[n]}. \tag{2.21}$$

2.2.3 Момент импульса

С учётом изотропности пространства следующая вариация функции Лагранжа равна нулю:

$$\delta L = \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i^{[n]}} \delta x_i^{[n]} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} \delta \dot{x}_i^{[n]} \right) = 0, \tag{2.22}$$

где

$$\delta x_i^{[n]} = l_{ijk}\delta\varphi_k x_j^{[n]}, \tag{2.23}$$

$$\delta \dot{x}_i^{[n]} = l_{ijk}\delta\varphi_k \dot{x}_j^{[n]}. \tag{2.24}$$

Далее с учётом (2.7), (2.8) и (2.9):

$$\sum_n \left(\dot{p}_i^{[n]} l_{ijk}\delta\varphi_k x_j^{[n]} + p_i^{[n]} l_{ijk}\delta\varphi_k \dot{x}_j^{[n]}\right) = 0, \tag{2.25}$$

или

$$\delta\varphi_i \frac{d}{dt}\sum_n l_{ijk} x_k^{[n]} p_j^{[n]} = 0, \tag{2.26}$$

далее

$$\frac{d}{dt} M_i = 0, \tag{2.27}$$

здесь

$$M_i = \sum_n l_{ijk} x_k^{[n]} p_j^{[n]} = \sum_n M_i^{[n]}, \tag{2.28}$$

где $\vec{M}$ - момент импульса.

2.3 Уравнения Гамильтона

Формулировка законов динамики через координаты и импульсы может иметь ряд преимуществ в силу каноничности соответствующих уравнений.

Из 2.1 следует, что

$$dL = \sum_n \frac{\partial L}{\partial x_i^{[n]}} dx_i^{[n]} + \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{[n]}} d\dot{x}_i^{[n]}, \tag{2.29}$$

с учётом (2.8) и (2.9)

$$dL = \sum_n \dot{p}_i^{[n]} dx_i^{[n]} + \sum_n p_i^{[n]} d\dot{x}_i^{[n]}, \tag{2.30}$$

далее

$$dH = \sum_n \dot{p}_i^{[n]} dx_i^{[n]} - \sum_n \dot{x}_i^{[n]} dp_i^{[n]}, \tag{2.31}$$

где H - функция Гамильтона:

$$H\left(\vec{x}^{[1]}, \vec{x}^{[2]}, \ldots, \vec{p}^{[1]}, \vec{p}^{[2]}, \ldots\right) = \sum_n p_i^{[n]} \dot{x}_i^{[n]} - L. \tag{2.32}$$

В соответствии с чем и справедливы следующие уравнения

$$\dot{p}_i^{[n]} = \frac{\partial H}{\partial p_i^{[n]}}, \tag{2.33}$$

$$\dot{x}_i^{[n]} = -\frac{\partial H}{\partial x_i^{[n]}}. \tag{2.34}$$

2.4 Скобки Пуассона

Пусть $f\left(\vec{x}^{[1]}, \vec{x}^{[2]}, \ldots, \vec{p}^{[1]}, \vec{p}^{[2]}, \ldots, t\right)$ - некоторая функция координат, импульсов и времени, тогда

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_n \frac{\partial f}{\partial x_i^{[n]}} d\dot{x}_i^{[n]} + \sum_n \frac{\partial f}{\partial p_i^{[n]}} d\dot{p}_i^{[n]}, \tag{2.35}$$

или, что одно и тоже, с учётом (2.33) и (2.34)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, \tag{2.36}$$

следующее обозначение представляет выражение, называемое скобками Пуассона для величин H и f:

$$\{H, f\} = \sum_n \frac{\partial H}{\partial p_i^{[n]}} \frac{\partial f}{\partial x_i^{[n]}} - \sum_n \frac{\partial H}{\partial x_i^{[n]}} \frac{\partial f}{\partial p_i^{[n]}}. \tag{2.37}$$

Для произвольной пары величин f и g скобки Пуассона определяются аналогично:

$$\{f, g\} = \sum_n \frac{\partial f}{\partial p_i^{[n]}} \frac{\partial g}{\partial x_i^{[n]}} - \sum_n \frac{\partial f}{\partial x_i^{[n]}} \frac{\partial g}{\partial p_i^{[n]}}. \tag{2.38}$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{2.39}$$

$$\{f, c\} = 0, \tag{2.40}$$

где c - постоянная,

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}, \tag{2.41}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}, \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{f, x_i^{[n]}\right\} = \frac{\partial f}{\partial p_i^{[n]}}, \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{f, p_i^{[n]}\right\} = -\frac{\partial f}{\partial x_i^{[n]}}, \tag{2.45}$$

$$\left\{x_i^{[n]}, x_j^{[n]}\right\} = 0, \ \left\{p_i^{[n]}, p_j^{[n]}\right\} = 0, \ \left\{x_i^{[n]}, p_j^{[n]}\right\} = \delta_{ij}. \tag{2.46}$$

Тождество Якоби:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{2.47}$$

Теорема Пуассона:

$$\frac{df}{dt} = 0, \ \frac{dg}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ \{f, g\} = 0. \tag{2.48}$$

3. Сплошная среда

3.1 Основы термодинамики

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho}, \tag{3.1}$$

где h - энтальпия, отнесённая к единице массы, T - температура, s - энтропия, отнесённая к единице массы, p - давление, ρ - плотность массы.

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp. \tag{3.2}$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p, \tag{3.3}$$

где c_p - изобарная теплоёмкость, отнесённая к единице массы.

$$h = \varepsilon + \frac{p}{\rho}, \tag{3.4}$$

где ε - внутренняя энергия, отнесённая к единице массы.

$$d\varepsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho. \tag{3.5}$$

$$d\varepsilon = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho dT + \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_T d\rho. \tag{3.6}$$

$$c_\rho = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho, \tag{3.7}$$

где c_ρ - изохорная теплоёмкость, отнесённая к единице массы.

3.2 Законы сохранения

3.2.1 Сохранение массы

Рассматривается некий произвольный объём пространства $V_0 = \int\limits_{V_0} dV$, ограниченный замкнутой поверхностью $f_0 = \oint\limits_{f_0} n_i df_i$. Положительным направлением нормали $\vec{n}$ бесконечно малого элемента поверхности $d\vec{f}$ принимается направление во вне из поверхности f_0. Масса жидкости в этом объёме есть $\int\limits_{V_0} \rho dV$. Тогда сохранение массы жидкости записывается как

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} \rho dV = 0. \tag{3.8}$$

С учётом теоремы (1.22) выражение (3.8) преобразуется к

$$\int\limits_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint\limits_{f_0} \rho \upsilon_i df_i = 0. \tag{3.9}$$

Интегральная форма записи закона сохранения массы (3.9) с использованием теорем (1.21) и (1.20) преобразуется к дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \upsilon_i}{\partial x_i} = 0. \tag{3.10}$$

3.2.2 Сохранение импульса

Рассматривается некий произвольный объём пространства $V_0 = \int\limits_{V_0} dV$, ограниченный замкнутой поверхностью $f_0 = \oint\limits_{f_0} n_i df_i$. Положительным направлением нормали $\vec{n}$ бесконечно малого элемента поверхности $d\vec{f}$ принимается направление во вне из поверхности f_0. Суммарный импульс жидкости в этом объёме есть $\int\limits_{V_0} \rho \vec{\upsilon} dV$. Тогда сохранение импульса жидкости записывается как

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} \rho \upsilon_i dV - \oint\limits_{f_0} \sigma_{ij} df_j - \int\limits_{V_0} \rho g_i dV = 0, \tag{3.11}$$

где $\vec{\vec{\sigma}}$ - тензор напряжений, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения.

С учётом теоремы (1.22) выражение (3.11) преобразуется к

$$\int\limits_{V_0} \frac{\partial \rho \upsilon_i}{\partial t} dV + \oint\limits_{f_0} \rho \upsilon_i \upsilon_j df_j - \oint\limits_{f_0} \sigma_{ij} df_j - \int\limits_{V_0} \rho g_i dV = 0. \tag{3.12}$$

Интегральная форма записи закона сохранения импульса (3.12) с использованием теорем (1.21) и (1.20) преобразуется к дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho \upsilon_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \upsilon_i \upsilon_j}{\partial x_j} - \sigma_{ij,j} - \rho g_i = 0. \tag{3.13}$$

Дифференциальная форма закона сохранения импульса (3.13) с учётом закона сохранения массы (3.10) преобразуется к более простой форме:

$$\rho \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho \upsilon_j \upsilon_{i,j} - \sigma_{ij,j} - \rho g_i = 0. \tag{3.14}$$

Соотношение (3.14) с учётом (3.38) преобразуется к следующему виду:

$$\rho \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho \upsilon_j \upsilon_{i,j} + p_{,i} - \sigma'_{ij,j} - \rho g_i = 0. \tag{3.15}$$

3.2.3 Сохранение энергии

Рассматривается некий произвольный объём пространства $V_0 = \int\limits_{V_0} dV$, ограниченный замкнутой поверхностью $f_0 = \oint\limits_{f_0} n_i df_i$. Положительным направлением нормали $\vec{n}$ бесконечно малого элемента поверхности $d\vec{f}$ принимается направление во вне из поверхности f_0. Полная энергия жидкости в этом объёме есть $\int\limits_{V_0} \left(\frac{1}{2}\rho\upsilon_i\upsilon_i + \rho\varepsilon\right) dV$. Тогда сохранение энергии жидкости записывается как

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V_0} \left(\frac{1}{2}\rho \upsilon_i \upsilon_i + \rho\varepsilon\right) dV - \oint\limits_{f_0} \sigma_{ij} \upsilon_i df_j - \int\limits_{V_0} \rho g_i \upsilon_i dV + \oint\limits_{f_0} q_i df_i = 0, \tag{3.16}$$

где $\vec{q}$ - плотность потока тепловой энергии за счёт теплообмена.

С учётом теоремы (1.22) выражение (3.16) преобразуется к

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \int\limits_{V_0} \frac{\partial \rho \upsilon_i \upsilon_i}{\partial t} dV + \int\limits_{V_0} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} dV + \frac{1}{2} \oint\limits_{f_0} \rho \upsilon_i \upsilon_i \upsilon_j df_j + \oint\limits_{f_0} \rho \varepsilon \upsilon_j df_j - \oint\limits_{f_0} \sigma_{ij} \upsilon_i df_j - \\ - \int\limits_{V_0} \rho g_i \upsilon_i dV + \oint\limits_{f_0} q_j df_j = 0. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Интегральная форма записи закона сохранения энергии (3.17) с использованием теорем (1.21) и (1.20) преобразуется к дифференциальной форме:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\rho\upsilon_i\upsilon_i}{\partial t}+\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho\upsilon_i\upsilon_i\upsilon_j}{\partial x_j}+\frac{\partial\rho\varepsilon\upsilon_j}{\partial x_j}-\frac{\partial\sigma_{ij}\upsilon_i}{\partial x_j}-\rho g_i\upsilon_i+\frac{\partial q_j}{\partial x_j}=0. \tag{3.18}$$

С учётом закона сохранения массы (3.10) уравнение (3.18) преобразуется форме, удобной для дальнейших операций:

$$\rho\upsilon_i\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t}+\rho\upsilon_j\upsilon_i\upsilon_{i,j}+\frac{\partial\rho\varepsilon\upsilon_j}{\partial x_j}-\frac{\partial\sigma_{ij}\upsilon_i}{\partial x_j}-\rho g_i\upsilon_i+\frac{\partial q_j}{\partial x_j}=0. \tag{3.19}$$

При скалярном умножении уравнения (3.14) на скорость можно получается следующее соотношение сохранения «кинетической» энергии:

$$\rho\upsilon_i\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\rho\upsilon_i\upsilon_j\upsilon_{i,j}-\upsilon_i\sigma_{ij,j}-\rho g_i\upsilon_i=0. \tag{3.20}$$

вычитая которое из уравнения сохранения полной энергии (3.19) получается выражение для сохранения «тепловой» энергии:

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\rho\upsilon_j\varepsilon_{,j}-\sigma_{ij}\upsilon_{ij}+q_{j,j}=0. \tag{3.21}$$

Здесь для упрощения слагаемых, содержащих плотность внутренней энергии, использовано уравнение сохранения массы (3.10) и учтена симметричность тензора напряжений и тензора скоростей деформаций следующим образом:

$$\sigma_{ij}\upsilon_{i,j}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\upsilon_{i,j}+\upsilon_{j,i}\right)=\sigma_{ij}\upsilon_{ij}. \tag{3.22}$$

При определении плотности потока энтальпии выражением:

$$\rho h\upsilon_j=\rho\varepsilon\upsilon_j-\sigma_{ij}\upsilon_i \tag{3.23}$$

можно получить интересное соотношение из уравнения (3.19) с учётом (3.20):

$$\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial\rho h\upsilon_j}{\partial x_j}+\upsilon_i\sigma_{ij,j}+q_{j,j}=0. \tag{3.24}$$

При определении плотности потока энтальпии выражением:

$$\rho h\upsilon_j=\rho\varepsilon\upsilon_j+\delta_{ij}p\upsilon_i \tag{3.25}$$

можно получить не менее интересное соотношение из уравнения (3.19) с учётом (3.20):

$$\frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial\rho h\upsilon_j}{\partial x_j}-\upsilon_j p_{,j}-\sigma'_{ij}\upsilon_{ij}+q_{j,j}=0. \tag{3.26}$$

Здесь учтено (3.22) и (3.38).

3.3 Тензоры деформаций и скоростей малых деформаций

Под влиянием приложенных сил сплошная среда деформируется, то есть меняет свою форму и объём.

$$u_i = x'_i - x_i, \tag{3.27}$$

где $\vec{u}$ - смещение, $\vec{x'}$ - координаты точки после смещения, $\vec{x}$ - координаты точки до смещения.

Из соотношения (3.27) следуют выражение

$$du_i = dx'_i - dx_i. \tag{3.28}$$

Так же справедлива запись

$$du_i = u_{i,j} dx_j, \tag{3.29}$$

поскольку $\vec{u}$ является функцией $\vec{x}$.

Из (3.28) и (3.29) с использованием приёма «жонглирования» индексов следует выражение для квадрата абсолютного изменения масштаба длинны:

$$\begin{gathered} dx'_i dx'_i - dx_i dx_i = du_i dx_i + du_i dx_i + du_i du_i = \\ = u_{i,j} dx_j dx_i + u_{i,k} dx_k dx_i + u_{i,j} u_{i,k} dx_j dx_k = \\ = u_{i,j} dx_i dx_j + u_{j,i} dx_i dx_j + u_{k,i} u_{k,j} dx_i dx_j = \\ = 2u_{ij} dx_i dx_j, \end{gathered} \tag{3.30}$$

где $\vec{\vec{u}}$ - тензор деформаций, такой что

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} \right). \tag{3.31}$$

Таким образом тензор деформаций определяет удлинение при деформации.

Тензор $\vec{\vec{u}}$ симметричен:

$$u_{ij} = u_{ji}. \tag{3.32}$$

В случае малых деформаций третьим слагаемым в выражении (3.31) можно пренебречь, тогда:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right). \tag{3.33}$$

$$\frac{d}{dt} \left(u_{ij} \right) = v_{ij}, \tag{3.34}$$

где $\vec{\vec{\upsilon}}$ - тензор скоростей малых деформаций, такой что

$$\upsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{i,j} + \upsilon_{j,i}\right), \tag{3.35}$$

здесь учтено, что $\frac{d}{dt}\frac{\partial u_n}{\partial x_m} = \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_m}$.

Таким образом тензор скоростей малых деформаций определяет скорость удлинения при малых деформациях.

Тензор скоростей малых деформаций υ_{ij} симметричен :

$$\upsilon_{ij} = \upsilon_{ji}. \tag{3.36}$$

3.4 Тензор напряжений

Рассматривается некий произвольный объём пространства $V_0 = \int\limits_{V_0} dV$, ограниченный замкнутой поверхностью $f_0 = \oint\limits_{f_0} n_i df_i$. Положительным направлением нормали $\vec{n}$ бесконечно малого элемента поверхности $d\vec{f}$ принимается направление во вне из поверхности f_0.

В результате деформации в гипотетической сплошной среде возникают поверхностные силы, обусловленные молекулярным взаимодействием, стремящиеся вернуть состояние равновесия. В итоге внешняя сила, действующая на объём V_0, приводящая к возникновению внутренних напряжений должна описываться выражением вида $-\oint \vec{\vec{\sigma}} d\vec{f}$, где $\vec{\vec{\sigma}}$ - тензор напряжений.

При только равномерном всестороннем сжатии на каждую единицу поверхности гипотетической сплошной среды действует одинаковое по величине давление, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объёма. В этом случае тензор напряжений имеет вид:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p. \tag{3.37}$$

При наличии сил вязкого трения тензор напряжений приобретает более сложный вид:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \sigma'_{ij}, \tag{3.38}$$

где $\vec{\vec{\sigma}}'$ - тензор вязких напряжений, зависящий от термодинамических параметров и от тензора скоростей деформаций.

3.5 Идеальная жидкость

Идеальной жидкостью является сплошная среда, в которой отсутствуют процессы теплопроводности и силы вязкого трения.

Отсутствие сил вязкого трения позволяет использовать тензор напряжений в виде (3.37), отсюда с учётом (3.14) следует уравнение сохранение импульса для идеальной жидкости:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} + \frac{1}{\rho} p_{,i} - g_i = 0. \tag{3.39}$$

Отсутствие процессов теплообмена означает, что движение происходит адиабатически, таким образом для идеальной жидкости справедливо тождество:

$$\frac{ds}{dt} = 0, \tag{3.40}$$

здесь полная производная по времени, как и везде, характеризует изменение перемещающегося участка сплошной среды. При «раскрытии» тождества (3.40) получается следующее соотношение:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_i s_{,i} = 0, \tag{3.41}$$

преобразующееся к «консервативной» форме с помощью закона сохранения массы (3.10):

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial \rho s v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{3.42}$$

Уравнение адиабатичности принимает более простую форму, если в начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках объёма сплошной среды:

$$s = const. \tag{3.43}$$

Такое движение является изоэнтропическим. В этом случае соотношение (3.2) с учётом (3.43) значительно упрощается:

$$dh = \frac{dp}{\rho}, \tag{3.44}$$

что в свою очередь даёт возможность в уравнении сохранения импульса (3.39) от давления перейти к энтальпии:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} + h_{,i} - g_i = 0. \tag{3.45}$$

Интересную форму уравнения (3.45) можно получить с учётом соотношения (1.19):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - l_{ijk} v_k l_{jlm} v_{l,m} + \frac{v_{,i}^2}{2} + h_{,i} - g_i = 0. \tag{3.46}$$

Для дальнейшего преобразования закона сохранения импульса необходимо воспользоваться понятием линий тока, как линий, касательные к которым коллинеарны скорости в точках касания. Линиям тока соответствуют следующие соотношения:

$$\frac{dv_1}{x_1} = \frac{dv_2}{x_2} = \frac{dv_3}{x_3}. \tag{3.47}$$

Производя скалярное умножения уравнения (3.46) на единичный вектор $\vec{\xi}$, касательный к линии тока в каждой её точке и предполагая стационарность движения легко получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\upsilon^2}{2} + h - g_i x_i\right) = 0, \qquad (3.48)$$

здесь учтено, что в уравнении (3.46), скалярно умноженном на вектор ξ_i, первое слагаемое равно нулю, поскольку движение стационарное, второе слагаемое равно нулю, так как векторное произведение скорости на ротор скорости перпендикулярно вектору ξ_i, оставшиеся слагаемые, представленные в виде градиентов, в случае проекции их на какое-либо направление, соответствуют производным, взятым по этим направлениям.

Таким образом вдоль линий тока в случае изоинтрапического стационарного движения идеальной жидкости справедливо следующее уравнение:

$$\frac{\upsilon^2}{2} + h - g_i x_i = const. \qquad (3.49)$$

Очевидна справедливость последнего выражения и в случае потенциальности движения.

3.6 Линейно-вязкая жидкость

При малых скоростях деформаций, а так же в предположении слабого влияния плотности и температуры на тензор вязких напряжений, можно пользоваться моделью линейно вязкой среды. В такой модели компоненты тензора вязких деформаций принимаются линейно зависящими от компонент тензора скоростей малых деформаций (3.35):

$$\sigma'_{ij} = M_{ijmn}\upsilon_{mn}. \qquad (3.50)$$

где $\overset{\Rightarrow\Rightarrow}{M}$ - тензор вязкости (тензор четвёртого ранга).

В общем случае число независимых компонент тензора вязкости с 81 сводится до 36 за счёт симметричности тензоров вязких деформаций и тензора скоростей малых деформаций.

При использовании модели изотропной сплошной среды тензор вязкости также является изотропным, что даёт возможность представить тензор вязкости в виде

$$M_{ijmn} = \gamma\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu\left(\delta_{in}\delta_{mj} + \delta_{jn}\delta_{im}\right), \qquad (3.51)$$

где μ - динамическая вязкость, а γ - вторая вязкость, здесь у тензора вязкости всего две независимые компоненты, тогда зависимость (3.50) с учётом (3.35) приобретает следующий вид

$$\sigma'_{ij} = \gamma\delta_{ij}\upsilon_{k,k} + \mu\left(\upsilon_{i,j} + \upsilon_{j,i}\right). \tag{3.52}$$

С учётом выше перечисленного тензор напряжений можно представить следующим образом:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + \gamma\delta_{ij}\upsilon_{k,k} + \mu\left(\upsilon_{i,j} + \upsilon_{j,i}\right). \tag{3.53}$$

При использовании модели линейно-вязкой изотропной сплошной среды уравнение (3.14) с учётом (3.53) преобразуется к виду

$$\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \rho\upsilon_j\upsilon_{i,j} + p_{,i} - \frac{\partial\gamma\upsilon_{k,k}}{\partial x_i} - \frac{\partial\mu\upsilon_{i,j}}{\partial x_j} - \frac{\partial\mu\ \upsilon_{j,i}}{\partial x_j} - \rho g_i = 0, \tag{3.54}$$

в случае отсутствия зависимости вязкости от координат это уравнение легко привести к более простой форме с использованием «жонглирования» индексов в четвёртом слагаемом:

$$\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \rho\upsilon_j\upsilon_{i,j} + p_{,i} - \left(\gamma + \mu\right)\upsilon_{j,ij} - \mu\upsilon_{i,jj} - \rho g_i = 0. \tag{3.55}$$

Для несжимаемой сплошной среды и с неизменной в пространстве динамической вязкостью соотношение (3.55) приобретает более простую форму:

$$\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_j\upsilon_{i,j} + \frac{1}{\rho}p_{,i} - \nu\upsilon_{i,jj} - g_i = 0, \tag{3.56}$$

где ν - кинематическая вязкость ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$).

3.7 Теплопроводность

Плотность потока тепловой энергии с достаточной степенью достоверности можно считать пропорциональной градиенту температуры:

$$q_i = -\lambda T_{,i}, \tag{3.57}$$

где λ - коэффициент теплопроводности.

Без учёта диссипации кинетической энергии соотношение (3.21), представляющее закон сохранения «тепловой» энергии, с использованием (3.57), преобразуется к виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_i T_{,i} - \frac{1}{c_\rho\rho}\frac{\partial\lambda T_{,i}}{\partial x_i} = 0, \tag{3.58}$$

здесь учтена связь температуры и внутренней энергии (3.7).

В случае независимости коэффициента теплопроводности λ от координат соотношение (3.58) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_i T_{,i} - aT_{,ii} = 0, \tag{3.59}$$

где a - температуропроводность:

$$a = \frac{\lambda}{c_\rho \rho}. \tag{3.60}$$

3.8 Диффузия

Часто при рассмотрении движения смеси жидкостей или газов следует учитывать процессы диффузии - молекулярный перенос веществ смеси из одного участка жидкости в другой. Плотность потока массы $\vec{j}$, обусловленного диффузией с достаточной степенью точности можно считать пропорциональным градиенту массовой концентрации c:

$$j_i = -\rho D c_{,i}, \tag{3.61}$$

где ρ - в данном случае плотность смеси,D - коэффициент диффузии.

Из уравнения (3.10) следует уравнение неразрывности, учитывающее диффузию:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \upsilon_i c_{,i} + \frac{1}{\rho} j_{i,i} = 0. \tag{3.62}$$

здесь $\vec{\upsilon}$ - скорость смеси.

Соотношение (3.62) с учётом (3.61) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \upsilon_i c_{,i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho D c_{,i}}{\partial x_i} = 0. \tag{3.63}$$

Выражение (3.63) значительно упрощается в случае независимости плотности смеси ρ и коэффициента диффузии D от координат:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \upsilon_i c_{,i} - D c_{,ii} = 0. \tag{3.64}$$

3.9 Фильтрация

Приведённые выше модели в принципе достаточны для описания произвольного движения жидкости, однако движение жидкости в пористой среде, формально представляющее собой струйное движение между непроницаемыми стенками, при использовании уравнений сохранения приводит к фактически непреодолимым физико-математическим трудностям. Отмеченные проблемы вызваны отсутствием практической возможности, за исключением специально смоделированных случаев, задавать геометрию поровых объектов.

При описании поровых сред удобно использовать параметр, равный объёмной доли сообщающихся пор во всём объёме среды $\frac{V_{\text{пор}}}{V_{\text{общ}}}$, этот параметр называется пористостью. В этом случае уравнение (3.10), выражающее закон сохранения массы, преобразуется к уравнению (3.65) и применяемая концепция сплошной среды претерпевает некоторые изменения, заключающиеся в увеличении минимального объёма среды до размеров, много больших характерных размеров пор этой среды.

При исследовании фильтрации жидкости через пористую среду удобно использовать эмпирическое уравнение (3.66), устанавливающее пропорциональную зависимость между скоростью фильтрации и градиентом давления. Это уравнение является справедливым для установившегося изотермического движения, всё это даёт возможность замкнуть полученную модель уравнением состояния (3.67):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\chi\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\chi\upsilon_i\right)=0, \tag{3.65}$$

$$\upsilon_i\chi=-\frac{k_{ij}}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p-\rho g_k x_k\right), \tag{3.66}$$

$$\xi\left(\rho,p\right)=0, \tag{3.67}$$

где χ - пористость, $\vec{\vec{k}}$ - тензор абсолютной проницаемости.

Тензор абсолютной проницаемости $\vec{\vec{k}}$ является импирической фильтрационной характеристикой среды и зависит от размеров поровых каналов и их извилистости.

Часто решение задач фильтрационного движения жидкости сводится к исключению скорости из замкнутой системы уравнений фильтрации, что приводит к формированию дифференциального уравнения второго порядка параболического типа, описывающего распределение давления. При решении этого уравнения необходимо задавать соответствующие начальные и граничные условия.

Так например из уравнений (3.65) и (3.66) можно получить уравнение (3.68), которое преобразуется к описанному уравнению для давления с использованием уравнения состояния (3.67). Здесь и далее динамическая вязкость μ принимается постоянной величиной.

$$\frac{\partial\rho\chi}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho k_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p-\rho g_k x_k\right)\right). \tag{3.68}$$

Уравнения (3.68) и (3.67) представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающую однофазную фильтрацию.

3.10 Звук

Звуковые волны - колебательное адиабатическое движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости, такое что справедливы следующие соотношения:

$$\upsilon_i = \upsilon_{0i} + \upsilon_i', \tag{3.69}$$

где $\upsilon_{0i} << \upsilon_i'$,

$$\rho = \rho_0 + \rho', \tag{3.70}$$

где $\rho_0 >> \rho'$,

$$p = p_0 + p', \tag{3.71}$$

где $p_0 >> p'$.
Здесь параметры с индексом «0» описывают «не колебательное» движение, параметры со штрихом описывают «колебательное» движение. В принятом приближении параметры с индексом «0» можно считать независящими от времени и координат, поскольку они меняются много медленнее параметров со штрихом.

С учётом сказанного уравнения сохранения массы и импульса (3.10) и (3.39) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \upsilon_{i,i}' = 0, \tag{3.72}$$

$$\frac{\partial \upsilon_i'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} p_{,i}' = 0. \tag{3.73}$$

Здесь при подстановке в уравнения сохранения массы и импульса соотношений (3.69), (3.70) и (3.71) произведено пренебрежение малыми величинами второго порядка, также использовано предположение несущественности гравитационной силы.

В случае адиабатичности движения малое изменение давления связано с малым изменением плотности следующим соотношением:

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho', \tag{3.74}$$

тогда соотношение (3.72) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \upsilon_{i,i}' = 0. \tag{3.75}$$

В итоге уравнения (3.73) и (3.75) полностью описывают звуковую волну, однако, используя условие потенциальности движения можно перейти к более простой форме описания волнового движения:

$$\upsilon_i' = \varphi_{,i}. \tag{3.76}$$

При подстановке (3.76) в (3.73) получается следующее соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}p'\right)=0, \qquad (3.77)$$

от которого, с учётом произвольности определения потенциала φ с точночтью до константы по координатам, удобно перейти к следующему выражению:

$$p'=-\rho_0\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \qquad (3.78)$$

Теперь, подставляя (3.76) и (3.78) в (3.75), получается уравнение гиперболического типа для потенциала скорости φ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}-c^2\varphi_{,ii}=0, \qquad (3.79)$$

где

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \qquad (3.80)$$

есть скорость звука.

Основные литературные источники

- Корнеев Г.В., «Тензорное исчисление».
- Корн Г., Корн Т., «Справочник по математике для научных работников и инженеров».
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., «Механика».
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., «Гидродинамика».
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., «Теория упругости».