Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: aktuarialno-finansowa

Aleksandra Strąk

Podstawy wyceny opcji europejskich

Projekt Specjalnościowy
napisany pod kierunkiem
dr Marka Arendarczyka

Wrocław 2022

Spis treści

1 Wstęp

Celem tej pracy jest opisanie teoretycznych podstaw będących wstepem do pisanej przeze mnie pracy licencjackiej. W tym krótkim artykule postanowiłam zebrać informacje teoretyczne dostępne w literaturze matematycznej oraz finansowej na temat wyceny opcji europejskich.

Chciałabym, aby po przeczytaniu tego opracowania czytelnik poszerzył swoją wiedzę z zakresu wyceny instrumentów pochodnych. Temat ten we współczesnym świecie wydaje mi się być jednym z ciekawszych dla czytelnika będącego moim rówieśnikiem. Rynek instrumentów pochodnych jest najdynamiczniej rozwijajacym się rynkiem finansowym w XXI wieku. Z pewnością jest to również jeden z bliższych mi obszarów zastosowań matematyki, ze względu na doświadczenie zawodowe.

W pierwszej części mojego opracowania omówię sam instrument finansowy, jakim jest opcja eurpejska. Następnie przejdę do opisu sposobów jej wyceny. Skupię się na wycenie w czasie dyskretnym. Mam nadzieję, że tak wybrany przeze mnie układ artykułu będzie dla czytelnika przejżysty i zapewni zrozumienie zawartych w nim informacji.

2 Opcje europejskie jako instrumenty pochodne

2.1 Rodzaje instrumentów finansowych

Podstawowym terminem matematyki finansowej jest pojęcie instrumentu finansowego. Najbardziej ogólna definicja instrumentu finansowego jest nastepująca:

Definicja 2.1.1. *Instrument finansowy jest to kontrakt zawarty między dwiema stronami, regulujący zależność finansową między tymi stronami. [1]*

Charakter zależności między stronami zależy od rodzaju instrumentu finansowego. Istnieje wiele metod klasyfikacji instrumentów finansowych. My jednak skupimy się na podziale na instrumenty transferu kapitału oraz instrumenty transferu ryzyka [1]. Z tych dwóch kategorii interesują nas instrumenty transferu ryzyka, ponieważ głównymi instrumentami tej kategorii są instrumenty pochodne, a tym właśnie są opcje.

Definicja 2.1.2. *Instrument pochodny jest to taki instrument finansowy, którego wartość zależy od wartości innego instrumentu finansowego, zwanego instrumentem podstawowym (inaczej: instrumentem bazowym). [1]*

Instrumentem bazowym może być fizycznie istniejący instrument finansowy, jak na przykład akcja. Jednak może to też być indeks pochodzący z rynku finansowego, przykładowo indeks giełdowy lub stopa procentowa.

Warto zaznaczyć co było bodźcem do utworzenia instrumentów pochodnych. Są one instrumentami transferu ryzyka i powstały właśnie jako narzędzia do zabezpieczania inwestorów przed ryzykiem. Wraz ze zwrostem zmienności cen na rynkach instrumentów podstawowych narodziła się potrzeba wymyślenia czegoś, co rekompensowałoby straty. Umożliwił to mechanizm działania instrumentów pochodnych, ponieważ są one konstruowane tak, aby niekorzystnym zmianom wartości instrumentu podstawowego towarzyszyły korzystne zmiany wartości instrumentu pochodnego. W ten sposób straty z tutułu instrumentu podstawowego są równoważone przez dochody z tytułu instrumentu pochodnego.

Przeanalizujemy teraz klasyfikację instrumentów pochodnych ze względu na charakter relacji między stronami kontraktu [1]. W każdym instrumencie finansowym istnieją: strona długa - posiadacz długiej pozycji (pozycji sprzedaży, czyli korzyści ze wzrostu wartości instrumentu) oraz strona krótka - posiadacz krótkiej pozycji (pozycji kupna, czyli korzyści ze spadku wartości instrumentu). Instrumenty pochodne można więc podzielić na:

- instrumenty „niesymetryczne” - strona długa nabywa pewne prawo, a strona krótka przyjmuje pewne zobowiązanie,

- instrumenty „symetryczne” - obie strony przyjmują pewne zobowiązanie.

Opcje są instrumentami pochodnymi „niesymetrycznymi”. Strona długa nabywa prawo, do którego realizacji zobowiązuje się strona krótka. Ta asymetria jest rekompensowana ceną, jaką musi zapłacić strona długa stronie krótkiej za nabycie tego prawa.

2.2 Opcje

Wiemy już, że opcja to instrument pochodny „niesymetryczny”. Teraz podzielimy opcje ze względu na dwie własności: rodzaj kontraktu oraz okres możliwej realizacji [1].

Pierwszy podział wyodrębnia:

- opcje kupna, inaczej: opcje call - prawa do sprzedaży okreslonej ilości instrumentu podstawowego po określonej cenie w ustalonym okresie czasu.
- opcje sprzedaży, inaczej: opcje put - prawa do kupna okreslonej ilości instrumentu podstawowego po określonej cenie w ustalonym okresie czasu.

Drugi podział skupia się na tym, że opcja jest prawem ważnym do tzw. terminu wygaśnięcia. Jeżeli nie zostanie wykonana do tego czasu, to wygasa i nie ma już żadnej wartości. Wyróżniamy więc:

- opcje amerykańskie - mogą być wykonane w dowolnym dniu od zawarcia kontraktu do terminu wygaśnięcia, włącznie z dniem tego terminu,
- opcje europejskie - mogą być wykonane jedynie w dniu będącym terminem wygaśnięcia,
- opcje egzotyczne - można je wykonać przed terminem wygaśnięcia, ale w ściśle określonych dniach (przykładowo: opcje bermudzkie, opcje azjatyckie).

W każdej opcji strona długa jest nazywana posiadaczem, a strona krótka - wystawcą. Kiedy posiadacz chce skorzystać z prawa kupna/sprzedaży nazywamy to wykonaniem opcji. W wyniku zawarcia kontraktu opcji następuje transfer ryzyka ceny instrumentu bazowego z posiadacza na wystawcę. Opcja ma więc wartość dodatnią, którą określamy mianem premii. Należy jednak rozróżnić dwie kwoty:

Definicja 2.2.1. *Premia (inaczej: cena opcji) to kwota płacona wystawcy przez nabywcę prawa kupna/sprzedaży (później określanego posiadaczem) w chwili zawarcia kontraktu. Powinna odzwierciedlać koszt ryzyka ponoszonego przez wystawcę. [2].*

Definicja 2.2.2. *Cena realizacji opcji (inaczej: cena wykonania) to kwota, którą ewentualnie zapłaci posiadacz opcji kupna w zamian za dostarczony instrument bazowy, lub otrzyma posiadacz opcji sprzedaży w zamian za dostarczenie wystawcy instrumentu bazowego [2].*

Przyjżyjmy się teraz bliżej temu, co dzieje się w terminie wygaśnięcia opcji europejskiej. Rozpatrzmy sytuację, w której jesteśmy posiadaczem europejskiej opcji kupna akcji. Jeśli kurs akcji w terminie wygąsnięcia przewyższy cenę wykonania, to zrealizujemy opcję. W przeciwnym wypadku - kurs akcji niższy lub równy cenie realizacji - pozwolimy opcji wygasnąć. Realizacja opcji kupna w terminie wygąśnięcia przynosi nam więc dochód w wysokości różnicy między ceną akcji i ceną wykonania opcji, w przeciwnym przypadku nasza opcja staje się bezwartościowa. W celu obliczenia zysku lub straty musimy oczywiście odjąć od tego dochodu odpowiednio zdyskontowaną cenę z definicji 2.2.1.

W celu oszacowania rzędu wielkości zmiany procentowej ceny opcji przy niewielkiej procentowej zmianie kursu instrumentu bazowego, należy pomnożyć procentową zmianę instrumentu bazowego przez stosunek ceny instrumentu bazowego do ceny opcji. Praktyka oraz teoria wskazują, że cena opcji jest wielokrotnie niższa od kursu instrumentu bazowego. Możemy więc zauważyć, że procentowa zmiana wartości kontraktów opcyjnych jest z reguły dużo większa niż procentowa zmiana kursu instrumentu bazowego.

Powyższe informacje wystarczają w zupełności do stwierdzenia, że opcje są instrumentem finansowym o wysokiej użyteczności. Warto spodziewając się wzrostu kursu akcji zainwestować mniejszą kwotę w opcje kupna, które są tańsze i resztę odłożyć na lokatę terminową. Warto również zabezpieczać długie lub krótkie pozycje na instrumentach bazowych odpowiednio opcjami kupna lub sprzedaży. Umiejętnie stosowane kontrakty opcyjne mogą nie zwiększyć ryzykowności naszego portfela, nawet jeżeli budujemy nimi portfel o charakterze spekulacyjnym. Dodatkowo koszty transakcji są niższe od kosztów transakcji na instrumentach bazowych.

Wyjaśnia to dlaczego rynek instrumentów pochodnych jest najprężniej rozwijającym się obecnie rynkiem finansowym oraz dlaczego tematyka wyceny opcji jest warta uwagi z matematycznego punktu widzenia.

3 Wycena opcji europejskich w czasie dyskretnym

Najprostszym przykładem opcji jest opcja kupna pozwalająca nabyć jedną akcję zwykłą. W tym rozdziale będziemy rozważać taki właśnie przypadek opcji. Najbardziej podstawowym modelem wyceny opcji w czasie dyskretnym jest natomiast model dwumianowy i to na nim się skupimy, aby zrozumieć podstawy.

Przyjmujemy, że cena akcji jest obserwowana w równych odstępach czasu, przykładowo codziennie. Okres od zawarcia kontraktu do terminu wygaśnięcia podzielimy na liczbę podokresów równą liczbie pomiarów ceny. Zakładamy, że w każdym następnym podokresie cena akcji albo wzrasta, albo maleje. Model spełniający te założenia nazywamy dwumianowym, ponieważ możemy zaobserować tylko jeden z dwóch stanów: wzrost lub spadek ceny. W tym modelu rozkład prawdopodobieństwa ceny akcji nie będzie miał wpływu na cenę instrumentu pochodnego. Będzie to więc mało dokładny sposób wyceny, ale pozwoli zobrazować najważniejsze pojęcia używane w bardziej złożonych modelach.

3.1 Jednookresowy model dwumianowy

Rozpoczniemy od zapoznania się z przypadkiem,w którym wykonujemy jedynie dwie obserwacje ceny akcji: w momencie zawarcia kontraktu i w terminie wygaśnięcia. Najważniejszymi elementami używanymi do wyceny będą: instrument bazowy, instrument pochodny oraz instrument wolny od ryzyka (przykładowo: akcja, opcja kupna oraz obligacja). Jeżeli są nam one znane możemy posłużyć się następującym schematem:

1. obliczenie wartości wypłaty z instrumentu pochodnego na podstawie danych o możliwych wartościach ceny instrumentu bazowego w terminie wygaśnięcia,

2. ustalenie składu portfela nabywcy opcji, który ma replikować wypłatę z instrumentu pochodnego, czyli liczby instrumentów bazowych i instrumentów wolnych od ryzyka,

3. policzenie wartości tego portfela w chwili zawarcia kontraktu i przyjęcie jej jako ceny instrumentu pochodnego (zakładamy brak możliwości arbitrażowych, czyli niemożność odpsprzedania zakupionej opcji po cenie wyższej niż cena nabycia).

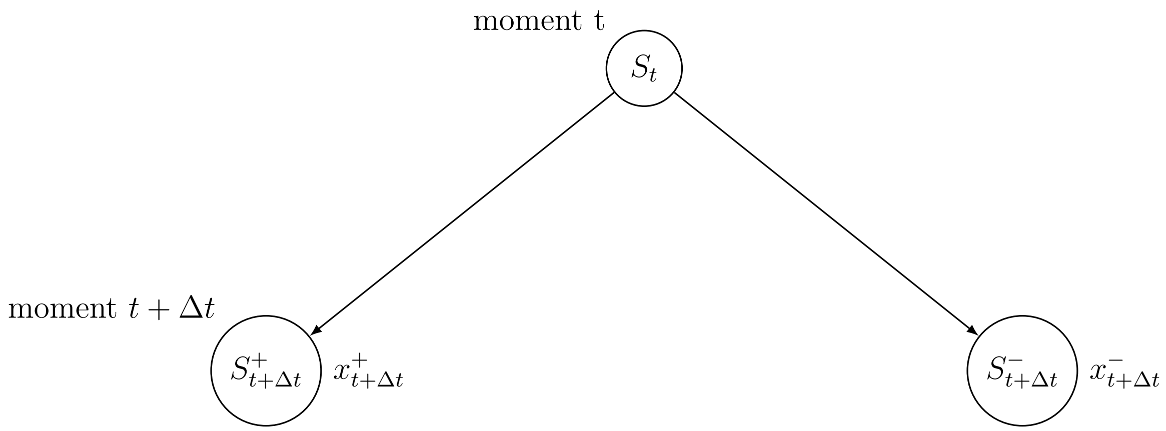
Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- S_t - cena akcji w momencie t,

- $S^+_{t+\Delta t}$ - cena akcji w momencie $t + \Delta t$, w wyniku wzrostu,

- $S^-_{t+\Delta t}$- cena akcji w momencie $t + \Delta t$, w wyniku spadku,

- $x^+_{t+\Delta t}$- wartość instrumentu pochodnego w momencie $t + \Delta t$, w wyniku wzrostu,
- $x^-_{t+\Delta t}$- wartość instrumentu pochodnego w momencie $t + \Delta t$, w wyniku spadku,
- V_t - wartość portfela replikującego w momencie t (jeśli termin wygaśnięcia instrumentu jest $t + \Delta t$, to ta wartość w momencie $t + \Delta t$ jest wypłatą z instrumentu pochodnego),
- K - cena wykonania opcji,
- A_t - liczba instrumentów bazowych w portfelu replikacyjnym,
- B_t - liczba instrumentów wolnych od ryzyka w portfelu replikacyjnym,
- r - wolna od ryzyka roczna stopa oprocentowania ciągłego.



Rysunek 3.1.1: Drzewko dwumianowe dla jednookresowej zmiany ceny instrumentu bazowego

Aby ułatwić dalsze tłumaczenia posłużymy się graficzną ilustracją zmiany cen akcji oraz instrumentu pochodnego (3.1.1). Obliczenia w pierwszym kroku schematu zależą od typu wycenianego instrumentu pochodnego. Dla opcji kupna $x^+_{t+\Delta t} = max(S^+_{t+\Delta t} - K, 0)$, a dla opcji sprzedaży $x^+_{t+\Delta t} = max(K - S^+_{t+\Delta t}, 0)$. W kroku drugim obliczamy A_t oraz B_t, czyli liczbę elementów portfela, który chcemy utworzyć w momencie t, a w momencie $t + \Delta t$ ma on replikować wypłatę z instrumentu pochodnego. Powstaje więc następujący układ równań:

$$S^+_{t+\Delta t} A_t + e^{r\Delta t} B_t = x^+_{t+\Delta t},$$

$$S^-_{t+\Delta t} A_t + e^{r\Delta t} B_t = x^-_{t+\Delta t}.$$

Ponieważ $S^+_{t+\Delta t} \neq S^-_{t+\Delta t}$, to ma on dokładnie jedno rozwiązanie postaci:

$$A_t = \frac{x^+_{t+\Delta t} - x^-_{t+\Delta t}}{S^+_{t+\Delta t} - S^+_{t+\Delta t}},$$

$$B_t = e^{-r\Delta t}(x^-_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}) = e^{-r\Delta t}(\frac{S^+_{t+\Delta t}x^-_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}x^+_{t+\Delta t}}{S^+_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}).$$

Natomiast w kroku ostatnim obliczamy wartość portfela replikującego na chwilę t, czyli:

$$V_t = S_t A_t + B_t = e^{-r\Delta t}(\frac{S_t e^{r\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}{S^+_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}} x^+_{t+\Delta t} + \frac{S^-_{t+\Delta t} - S_t e^{r\Delta t}}{S^+_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}} x^-_{t+\Delta t}).$$

Przyjmując oznaczenie

$$q_t = \frac{S_t e^{r\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}{S^+_{t+\Delta t} - S^-_{t+\Delta t}}, \tag{3.1.1}$$

otrzymujemy:

$$V_t = e^{-r\Delta t}[q_t x^+_{t+\Delta t} + (1 - q_t)x^-_{t+\Delta t}]. \tag{3.1.2}$$

Pokażemy teraz, że współczynnik q_t przyjmuje wartości z przedziału $(0, 1)$, co pozwala nam na traktowanie wyrażenia w nawiasie kwadratowym w równaniu 3.1.2 jako wartość oczekiwaną wypłaty z instrumentu pochodnego. W ilorazie definiującym q_t mianownik jest liczbą dodatnią. Dla $r > 0$ dostajemy $e^{t\Delta t} > 1$, więc $S_t e^{r\Delta t} > S_t > S^-_{t+\Delta t}$, co daje dodatni licznik tego wyrażenia. Stąd $q_t > 0$. Jeżeli $q_t \geqslant 1$, to $S_t e^{r\Delta t} \geqslant S^+_{t+\Delta t}$, jednak w warunkach braku arbitrażu ostatnia nierówność nie może zachodzić. Gdyby zaszła oznaczałoby to, że krótka sprzedaż akcji w momencie t i jednocześnie zainwestowanie dochodów z tej sprzedaży na jeden okres po stopie wolnej od ryzyka pozwala osiągnąć wyższy zysk niż $S_t e^{r\Delta t} - S^+_{t+\Delta t} \geqslant 0$, więc stwarza możliwości arbitrażowe.

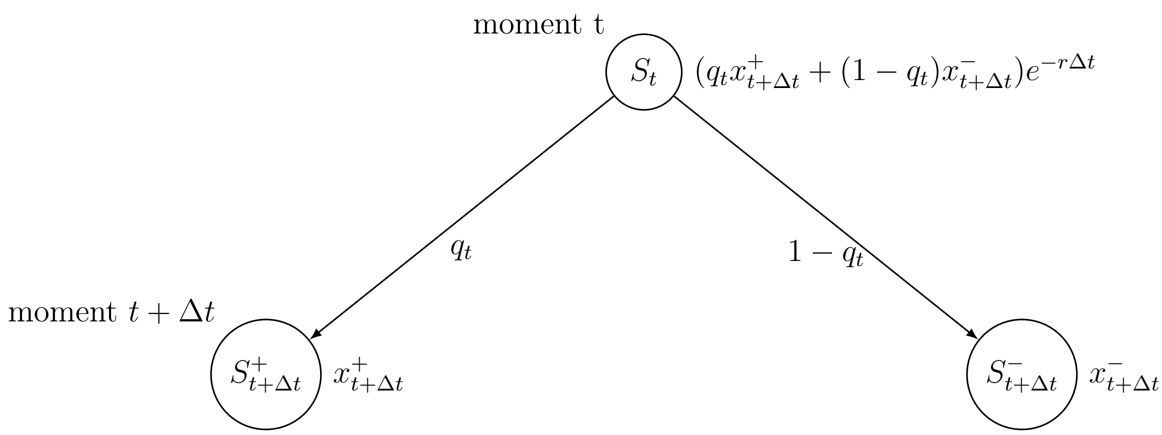
Możemy interpretować q_t jako prawdopodobieństwo, że cena akcji wzrośnie z wartości S_t w momencie t do wartości $S^+_{t+\Delta t}$ w momencie $t + \Delta t$, natomiast $1 - q_t$ jako prawdopodobieństwo, że zmaleje do $S^-_{t+\Delta t}$.

Definicja 3.1.1. *Prawdopodobieństwo arbitrażowe (inaczej: miara arbitrażowa) - wielkość q_t dana wzorem 3.1.1. W modelu dwumianowym istnieje dokładnie jedna taka miara [3].*

Możemy więc traktować cenę akcji w momencie $t + \Delta t$ jako zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym przyjmującą wartość $S^+_{t+\Delta t}$ z prawdopodbieństwem q_t i wartość $S^-_{t+\Delta t}$ z prawdopodobieństwem $1 - q_t$. W związku z tym wypłata z instrumentu pochodnego w memncie $t + \Delta t$ jest również zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym i przyjmuje wartość $x^+_{t+\Delta t}$ z prawdopodbieństwem q_t oraz wartość $x^-_{t+\Delta t}$ z prawdopodobieństwem $1 - q_t$. Na tej podstawie nadajemy cenie określonej wzorem 3.1.2 następującą interpretacje:

Definicja 3.1.2. *Sprawiedliwą ceną instrumentu pochodnego (w znaczeniu ceny z definicji 2.2.1) jest zdyskontowana na moment t wartość oczekiwana wypłaty z tego instrumentu obliczona względem miary arbitrażowej.*

Zobrazujemy teraz powyższą interpretację za pomocą uzupełnionej ilustracji 3.1.2.



Rysunek 3.1.2: Wycena jednookresowego instrumentu pochodnego na drzewku dwumianowym zmiany cen instrumentu bazowego

3.2 Wielookresowy model dwumianowy

Jeżeli teraz postanowimy częściej sprawdzać cenę instrumentu bazowego to otrzymamy model dwumianowy wielookresowy. Obliczenia będą bardziej żmudne, natomiast schemat wyceny pozostaje ten sam. Warto jednak pochylić się nad modelem wielookresowym, aby zaobserwować cechy strategii replikującej, których nie ma w wycenie jednookresowej.

W celu umożliwienia lepszego zrozumienia tego zagadnienia przedstawimy przykład korzystający z modelu dwumianowego dwuokresowego.

Przykład 3.2.1. *Chcemy obliczyc sprawiedliwą cene dwumiesięcznej europejskiej opcji kupna akcji, której cena może się zmieniać zgodnie ze schematem na rysunku 3.2.1. Zakładamy cenę wykonania $K = 130$ zł oraz $e^{r\Delta t} = 1,02$.*
Obliczanie rozpoczniemy od terminu wygaśnięcia, czyli od końca drugiego miesiąca:

1. *wypłata z opcji kupna:*

$$x^+_{t+2\Delta t} = max(S^+_{t+2\Delta t} - K, 0) = max(200 - 130, 0) = 70$$

lub

$$x^-_{t+2\Delta t} = max(S^-_{t+2\Delta t} - K, 0) = max(150 - 130, 0) = 20,$$

2. *prawdopodobieństwo arbitrażowe liczone wzorem 3.1.1 wyniesie:*

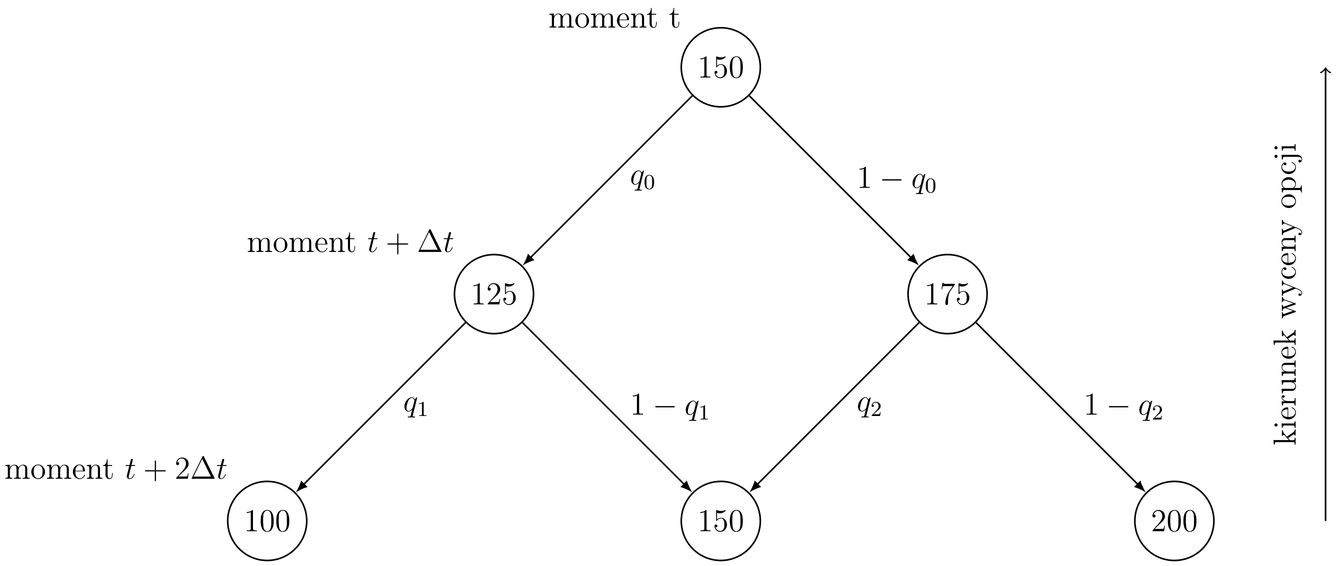
$$q_t = \frac{175 * 1,02 - 150}{200 - 150} = 0,57,$$

3. *wartość oczekiwana wypłaty z opcji na koniec drugiego miesiąca jest równa:*

$$0,57 * 70 + 0,43 * 20 = 48,5,$$

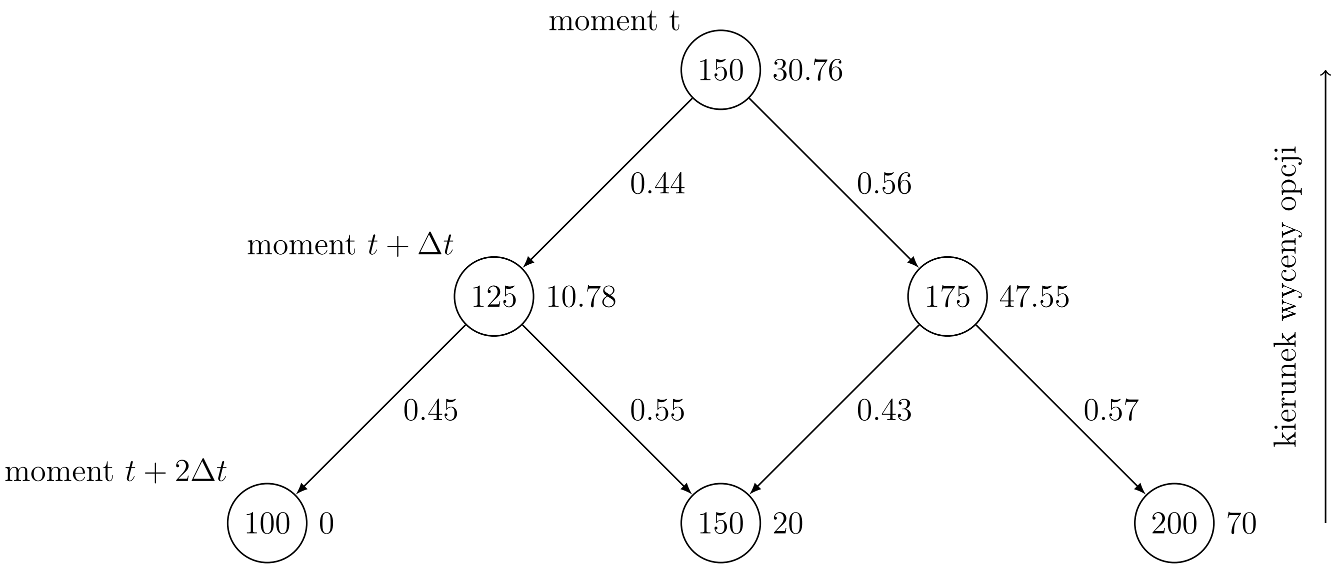
a zdyskontowana na jego początek:

$$1,02^{-1} * 48,5 = 47,55.$$



Rysunek 3.2.1: Wycena dwuokresowego instrumentu pochodnego na drzewku dwumianowym zmiany cen instrumentu bazowego

Z każdą następną częścią schematu z rysunku postępujemy analogicznie otrzymując finalnie wyniki z rysunku 3.2.2.



Rysunek 3.2.2: Wycena dwuokresowego instrumentu pochodnego na drzewku dwumianowym zmiany cen instrumentu bazowego

Przedstawiliśmy teraz w tabeli 3.2.1 skład i wartość portfeli replikujących, w zależności *od wartości przyjmowanych przez zmienne losowe, jakimi są kurs akcji i wartość obligacji. zakładamy, że cena obligacji to 1 zł.*

t	Cena akcji w momencie t	Skład portfela tworzonego w momencie t		Wartość w momencie t portfela utworzonego w momencie:	
		liczba akcji	liczba obligacji	$t - \Delta t$	T
0	150	0,7354	-79,56	-	30,76
Δt	175	1	-127,45	47,55	47,55
	125	0,4	-38,45	10,77	10,77
$2\Delta t$	200	-	-	70	-
	150	-	-	20	-
	100	-	-	0	-

Tabela 3.2.1: Skład portfeli replikujących

Moździemy zaobserwować, na podstawie tabeli 3.2.1, że kwoty ze sprzedaży akcji będą w każdym momencie finansować kwoty zakupu obligacji. Dzięki temu w każdym przypadku zmiana składu portfela nie wymaga żadnych nakładów, ani nie przynosi żadnych dochodów. Mówimy w takiej sytuacji o strategii samofinansowania portfeli replikujących.

4 Podsumowanie

W pierwszej części pracy omówiliśmy podstawowe pojęcia teoretyczne matematyki finansowej związane z opcjami. Dzięki temu czytelnik mógł zrozumieć jakie miejsce w klasyfikacji instrumentów finansowych zajmują opcje europejskie. Następnie przeszliśmy do wytłumaczenia zagadnienia wyceny opcji na przykładzie europejskiej opcji kupna na pojedynczą akcję. Zagadnienie wyceny zostało przedstawione za pomocą najbardziej podstawowego modelu, jaki możemy znaleźć w literaturze, czyli modelu dwumianowego [3].

Taki układ i treść pracy miały na celu bardzo podstawowe wprowadzenie do zagadnienia, które będzie przeze mnie rozważane w pracy licencjackiej. Należy więc zaznaczyć, że istnieje wiele bardziej skomplikowanych modeli wyceny opcji europejskich, zarówno w czasie dyskretnym, jak i ciągłym. Chociażby najpopularniejszy z nich: model Blacka-Scholesa.

Jako autor tego artykułu pragnę wyrazić nadzieję, że zachęci on czytelnika do poszerzenia wiedzy w zakresie rynku finansowego, a w szczególności najprężniej rozwijającego się rynku instrumentów pochodnych, ponieważ informacje o nim otaczają nas nieustannie w codziennym życiu.

Bibliografia

[1] Krzysztof Jajuga and Teresa Jajuga. *Inwestycje.* Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa, Polska, 2006.

[2] Jacek Jakubowski, Andrzej Palczewski, Marek Rutkowski, and Łukasz Stettner. *Matematyka Finansowa, instrumenty pochodne.* Wydawnictwo Naukowe WNT, Warszawa, Polska, 2006.

[3] Maria Podgórska and Joanna Klimkowska. *Matematyka Finansowa.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, Polska, 2013.