

# MUSIC、ESPRIT、MVDR 算法的谱估计

## 1 算法原理

### 1.1 MUSIC 算法

MUSIC 算法利用信号子空间和噪声子空间的正交性，构造空间谱函数，通过谱峰搜索，估计信号频率。由  $\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H\boldsymbol{\mu}_i = 0$ ， $i = K+1, \dots, M$  且矩阵  $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$  可逆得  $(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{P}\mathbf{A}^H\boldsymbol{\mu}_i = 0$ ， $i = K+1, \dots, M$ 。又由于矩阵  $\mathbf{P}$  为正定的对角矩阵，方程两边可再同时左乘  $\mathbf{P}^{-1}$ ，推出  $\mathbf{a}^H(\omega_k)\boldsymbol{\mu}_i = 0$ ， $k = 1, 2, \dots, K$ ， $i = K+1, \dots, M$ 。这就表明，信号频率向量  $\mathbf{a}(\omega_k)$  与噪声子空间的特征向量正交。信号角频率的估计可以由扫描函数  $P_{\text{MUSIC}}(\omega)$  的  $K$  个峰值位置确定。

$$P_{\text{MUSIC}}(\omega) = \frac{1}{\|\mathbf{a}(\omega)G\|^2} = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega)G G^H \mathbf{a}(\omega)}, \omega \in [-\pi, \pi]$$

### 1.2 ESPRIT 算法

ESPRIT 算法即基于旋转不变技术的信号参数估计。连续  $M$  个时刻的观测值可表示为向量形式  $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n)$ 。定义随机过程  $y(n) = x(n+1)$ ，且向量  $\mathbf{y}(n)$  和矩阵  $\phi$  分别为  $\mathbf{y}(n) = [y(n) \ y(n-1) \ \dots \ y(n-M+1)]^T$ ， $\phi = \text{diag}\{e^{j\omega_1} \ e^{j\omega_2} \ \dots \ e^{j\omega_K}\}$ ，则  $\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}\phi\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n+1)$ 。

向量  $\mathbf{x}(n)$  的自相关矩阵为  $\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)] = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma_v^2\mathbf{I}$ ，向量  $\mathbf{x}(n)$  和  $\mathbf{y}(n)$  的互相关矩阵为  $\mathbf{R}_{xy} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{y}^H(n)] = \mathbf{A}\mathbf{P}\phi^H\mathbf{A}^H + \sigma_v^2\mathbf{Z}$ 。对  $\mathbf{R}_{xx}$  进行特征分解，找到  $\mathbf{R}_{xx}$  的最小特征值  $\lambda_{\min} = \lambda_M = \sigma_v^2$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$ )。定义矩阵：

$$\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{R}_{xx} - \sigma_v^2\mathbf{I} = \mathbf{R}_{xx} - \lambda_{\min}\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H, \quad \mathbf{C}_{xy} = \mathbf{R}_{xy} - \sigma_v^2\mathbf{Z} = \mathbf{R}_{xy} - \lambda_{\min}\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{P}\phi^H\mathbf{A}^H$$

可以通过求解方程式  $|\mathbf{C}_{xx} - \lambda\mathbf{C}_{xy}| = 0$  来求得到矩阵  $\{\mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{xy}\}$  的广义特征值。当  $\lambda = e^{j\omega_k}, k = 1, \dots, K$  时，矩阵  $(\mathbf{C}_{xx} - \lambda\mathbf{C}_{xy})$  是奇异的；而  $\lambda \neq e^{j\omega_k}, k = 1, \dots, K$  时， $(\mathbf{C}_{xx} - \lambda\mathbf{C}_{xy})$  是满秩的。矩阵对  $\{\mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{xy}\}$  的广义特征值恰为  $e^{j\omega_1} \ e^{j\omega_2} \ \dots \ e^{j\omega_K}$ ，这些根的相位即为信号的频率估计。

### 1.3 MVDR 算法

MVDR 算法即最小方差无失真响应算法，是有别于经典功率谱估计和参数模型估计的另一类信号频率估计方法。定义向量  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-M+1)]^T$ ，假定信号通过一个  $M$  抽头的 FIR 滤波器  $W(z) = \sum_{k=0}^{M-1} w(k)z^{-k}$ ，则输出信号为：

$$y(n) = x(n) * a(n) = \sum_{k=0}^{M-1} w(k)x(n-k) = \mathbf{x}^T \mathbf{w}$$

$y(n)$  的功率可以表示为  $p = E\{|y(n)|^2\} = E\{w^H \mathbf{x} \mathbf{x}^T w\} = w^H E\{\mathbf{x} \mathbf{x}^T\} w = w^H R_{xx} w$ 。为求得滤波器的系数，需要满足在对给定的某一频率  $\omega_i$  处， $x(n)$  无失真地通过，且  $p$  最小。此时，

$$w_{MVDR} = \frac{R_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_i)}{\mathbf{a}^H(\omega_i) R_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_i)} \quad p = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega_i) R_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega_i)}$$

则  $P_{MVDR}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega) R_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega)}$ ,  $\omega \in [-\pi, \pi]$ 。  $P_{MVDR}(\omega)$  并不是真正意义上的功率谱，但它描述了信号真正谱的相对强度，可以由此估计信号频率。

## 2 算法实现

采用空间谱估计的典型代表 MUSIC 算法，ESPRIT 算法和 MVDR 算法，对含有高斯白噪声的复正弦信号进行频率估计。选取的信号数  $p=3$ ，阵元数  $M=10$ ，采样数  $N=1000$ 。待检测信号的归一化频率为  $f_1=0.10, f_2=0.20, f_3=0.45$ ，仿真的待检测信号为：

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-j2\pi f_1} & e^{-j2\pi f_2} & e^{-j2\pi f_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j2\pi f_1 \times (M-1)} & e^{-j2\pi f_2 \times (M-1)} & e^{-j2\pi f_3 \times (M-1)} \end{bmatrix}$$

假设  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  都是零均值，方差为 1 的白噪声，采样数为  $N$ ，且彼此之间相互独立，则阵列响应矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi \mathbf{a}_1} \\ e^{-j2\pi \mathbf{a}_2} \\ e^{-j2\pi \mathbf{a}_3} \end{bmatrix}$$

假定噪声  $v_i, i \in [1, M]$  为零均值，方差为 1 的高斯白噪声，采样数为  $N$ ，则待检测信号引入的噪声为

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_M \end{bmatrix}$$

于是仿真信号为： $\mathbf{X} = \mathbf{S} * \mathbf{A} + \mathbf{v}$ 。

### 2.1 MUSIC 算法

利用 MUSIC 算法进行频率估计时，首先求出仿真信号的自相关矩阵  $\mathbf{R} = \mathbf{X} * \mathbf{X}' / N$ ，然后对自相关矩阵进行特征值分解得到特征值空间  $U$  和特征向量空间  $D$ ，然后对特

征值空间  $U$  进行升序排序，取较小的  $M - p$  个特征值所对应的特征向量组成噪声子空间  $G$ ，然后求得  $P_{MUSIC}(\omega)$ ,  $\omega \in [0, 0.5]$ , MUSIC 算法程序段如下所示：

```
R=X*X'/N;
[U D]=eig(R);
[d,index]=sort(diag(D));
U=U(:,index);
for i=-N:N
    a=exp(-j*2*pi*[0:M-1]'*(i*0.5/N));
    Pmusic(i+1+N)=abs(1/(a'*U(:,1:end-p)*U(:,1:end-p)'*a));
end
plot(omg,10*log10(Pmusic/max(Pmusic)));%画出 MUSIC 算法图形
```

## 2.2 ESPRIT 算法

ESPRIT 算法要先构造相关矩阵  $\mathbf{R}_{xx}$  和  $\mathbf{R}_{xy}$ ，然后对  $\mathbf{R}_{xx}$  进行特征值分解得到最小特征值  $\lambda_{\min}$  即为噪声的方差  $\sigma_v^2$ ，通过对矩阵对  $\{C_{xx}, C_{xy}\}$  进行广义特征值分解，最接近单位圆的  $K$  个特征值相位即为信号的频率估计。ESPRIT 算法程序段如下所示：

```
S1=U(1:end-1,8:10);
S2=U(2:end,8:10);
S12=[S1 S2];
[Uu Dd]=eig((S12'*S12));
[dd,ind]=sort(diag(Dd));
Uu=Uu(:,ind);
dt=-Uu(1:3,1:3)*inv(Uu(4:6,1:3));
dd=eig(dt);
t_esprit=asin(-angle(dd)/(2*pi));
plot(t_esprit,[0 0 0],*,'color','red')%画出 ESPRIT 算法图形，红色表示
```

## 2.3 MVDR 算法

MVDR 算法要先求自相关矩阵  $R_{xx}$ ，然后将峰搜索矩阵  $\mathbf{a}(\omega_i)$  带入最小方差谱估计公式

$$P_{MVDR}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\omega) R_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\omega)}, \omega \in [0, 0.5]$$

通过观察谱峰得到信号的频率估计值。MVDR 算法程序段如下所示：

```
for i=-N:N
    a=exp(-j*2*pi*[0:M-1]'*(i*0.5/N));
```

```

Pmvdri+Ni+1=abs(1/(a'*inv(R)*a));
end
plot(omg,10*log10(Pmvdri+Ni+1),'--','color','black')

```

## 2.4 程序流程图

各算法程序流程图如下所示：

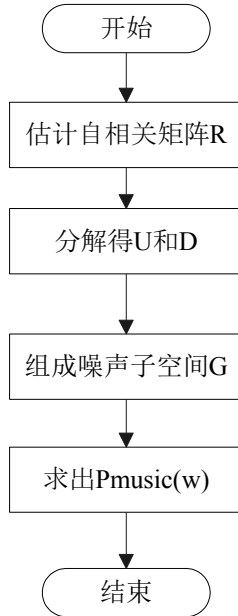


图 2.4.1 MUSIC 算法

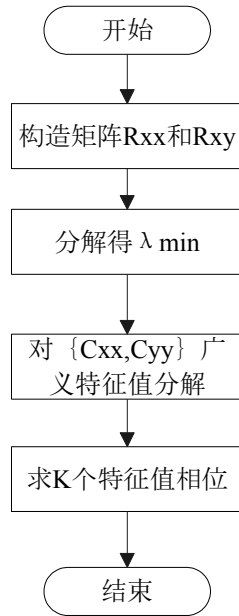


图 2.4.2 ESPRIT 算法

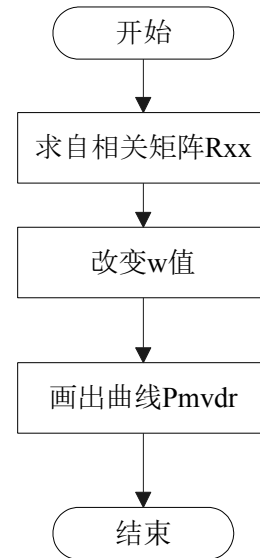


图 2.4.3 MVDR 算法