FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA, NOVI SAD, 27. jun 2024.

ZADACI ZA PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA STUDIJSKE PROGRAME: Energetika, elektronika i telekomunikacije; Računarstvo i automatika; Primenjeno softversko inženjerstvo; Merenje i regulacija; Softversko inženjerstvo i informacione tehnologije; Biomedicinsko inženjerstvo; Inženjerstvo informacionih sistema; Informacioni inženjering; Mehatronika i Animacija u inženjerstvu

1. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2i$ i $z_2 = -1+i$.

a) Izračunati moduo i argument kompleksnog broja z_2.

b) Izračunati $\sqrt[3]{z_2}$.

c) Izračunati imaginarni deo kompleksnog broja $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 - \overline{z_2}}$.

d) Izračunati $\left(\dfrac{1}{z_1}\right)^{27}$.

Rešenje:

a) $|z_2| = \sqrt{(-1)^2+1} = \sqrt{2}$, a $\arg(z_2) = \dfrac{3\pi}{4}$.

b) Vrednosti $\sqrt[3]{-1+i}$ su $z_k = \sqrt[6]{2}e^{\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}i}$, $k = 0,1,2$, tj. $z_0 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_1 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{11\pi}{12}i}$ i $z_2 = \sqrt[6]{2}e^{\frac{19\pi}{12}i}$.

c) Iz $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 - \overline{z_2}} = \dfrac{2i(-1+i)}{2i+1+i} = \dfrac{-2-2i}{1+3i} \cdot \dfrac{1-3i}{1-3i} = \dfrac{-2+6i-2i-6}{10} = \dfrac{-8+4i}{10}$ sledi da je $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 - \overline{z_2}}\right) = \dfrac{2}{5}$.

d) Kako je $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{1}{2}i$, sledi da je $\left(\dfrac{1}{z_1}\right)^{27} = -\dfrac{1}{2^{27}}i^{27} = -\dfrac{1}{2^{27}}(-i) = \dfrac{i}{2^{27}}$.

2. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2$.

Rešenje: Jednačina je definisana za $x-1 \geqslant 0 \wedge 2x-3 \geqslant 0$, tj. $x \geqslant \dfrac{3}{2}$.

$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2 \Leftrightarrow x-1+2\sqrt{(x-1)(2x-3)}+2x-3 = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(2x-3)} = 8-3x$.

Iz poslednje jednačine sledi $8-3x \geq 0$, tj. $x \leq \dfrac{8}{3}$.

Dalje, za $x \in \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{8}{3}\right]$ je $2\sqrt{(x-1)(2x-3)} = 8-3x \Leftrightarrow 4(x-1)(2x-3) = 64-48x+9x^2 \Leftrightarrow x^2-28x+52 = 0$.

Rešenja jednačine $x^2-28x+52 = 0$ su $x \in \{26, 2\}$, a samo $x = 2$ je rešenje polazne jednačine.

3. a) Izraziti $\log_2 2024$ u zavisnosti od $a = \log_{11} 2$ i $b = \log_{23} 2$.

b) U skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu $\log_{2024}\left(x+\dfrac{3}{2}\right) \leq -\log_{2024} x$.

Rešenje:

a) $\log_2 2024 = \log_2(2^3 \cdot 11 \cdot 23) = \log_2 2^3 + \log_2 11 + \log_2 23 = 3\log_2 2 + \dfrac{1}{\log_{11} 2} + \dfrac{1}{\log_{23} 2} = 3 + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

b) Nejednačina je definisana za $x + \dfrac{3}{2} > 0 \wedge x > 0$, tj. za $x > 0$.

$$\begin{aligned}\log_{2024}\left(x+\frac{3}{2}\right) \leq -\log_{2024} x \quad &\Leftrightarrow \quad \log_{2024}\left(x+\frac{3}{2}\right) \leq \log_{2024} x^{-1} \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} \leq \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

Skup rešenja polazne nejednačine je $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$.