



Електротехнички факултет  
Универзитет у Београду



# Инжењерски оптимизациони алгоритми

др Драган Олћан, проф. ([olcan@etf.rs](mailto:olcan@etf.rs))

др Јелена Динкић, доцент ([jdinkic@etf.rs](mailto:jdinkic@etf.rs))

мс Дарко Нинковић, асистент ([darko@etf.rs](mailto:darko@etf.rs))

Изборни предмет  
Школска 2022/23. година

<http://mtt.etf.rs/si/ioa.htm>

# Који су циљеви и исходи овог курса?

- Упознавање са основним класама оптимизационих алгоритама који се користе у инжењерству и ИТ струци
- Оспособљавање за практичну примену оптимизационих алгоритама при решавању инжењерских проблема
- Пројектовање се данас ради практично искључиво коришћењем рачунара
- Практично решавање инжењерских проблема по правилу захтева употребу оптимизације
- Познавање оптимизационих алгоритама је од изузетне важности [као и спознаја када и како их (не) користити]

# Зашто курс о инжењерским оптимизационим алгоритмима?

- Познавање модерних алгоритама за оптимизације је **неопходно** за све који се баве: **инжењерством, науком и бизнисом**
- Поред алгоритама, сагледаћемо **могућности за решавање** проблема данас
- Зашто једноставно не узмем рутину из неке од готових софтверских библиотека или постојећег софтвера?
  - Познавање и разумевање алгоритама је од изузетног значаја, чак и када се користе готова решења
  - Често је случај да постојећи софтвер није оптимално решење за наш проблем

# Шта је грађиво курса?

- **Увод.** Преглед појмова и представљање основне теорије решавања система нелинеарних једначина на које се своде оптимизациони алгоритми у инжењерству
- **Систематизација.** Поделе оптимизационих алгоритама
- **Оптимизациони алгоритми:**
  - систематско претраживање (енглески: systematic search)
  - случајно претраживање (енглески: random search)
  - градијентна метода (енглески: gradient method)
  - симплекс алгоритам (енглески: Nelder-Mead simplex)
  - Данцигов симплекс алгоритам (енглески: Dantzig simplex)
  - симулирано каљење (енглески: simulated annealing)
  - генетички алгоритам (енглески: genetic algorithm)
  - қретање јата (енглески: particle swarm optimization)
  - диференцијална еволуција (енглески: differential evolution)
- **Оптимизација са више критеријума.** Парето фронт и његово одређивање коришћењем оптимизационих алгоритама
- **Рад на рачунару.** Сагледавање особина и параметара оптимизационих алгоритама који су од значаја за практичну примену кроз програмирање и симулације на рачунару

# Литература

- Литература из оптимизационих алгоритама је изузетно **обимна**
- Употреба оптимизационих алгоритама је изузетно распространена
- Изабрани су они алгоритми (или класе алгоритама) који се данас најчешће употребљавају у инжењерској пракси
- Нагласак је на **алгоритмима широке намене** специјализовани алгоритми само као примери (нпр: quick-sort, Dijkstra's algorithm, Chess Master...)

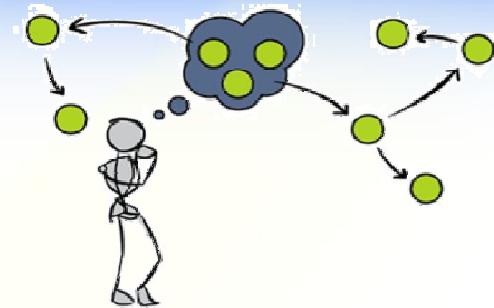


# Како је организован курс?

- Предавања:  
30 часова предавања + 30 часова вежби +15 часова лабораторије
- Литература
  - Материјал са предавања (PDF за сваку седмицу, линк нају предмета)
  - Z. Michalewicz, D.B. Fogel, *How to Solve It: Modern Heuristics*, Springer, 2004
  - Xin-She Yang, *Engineering Optimization An Introduction with Metaheuristic Applications*, University of Cambridge, Department of Engineering, Cambridge, United Kingdom, Wiley 2010
  - D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley Professional, 1989
- Оцењивање
  - **Предиспитне обавезе** (задаци на вежбама + бонуси) – одсеца се на 70 поена
    - **Задатак са вежби** се брани на вежбама у лабораторији
    - **Бонуси** до максимално 10 поена
  - **Испит** (задатак или задаци), највише 40 поена, одсеца се на 30 поена
  - **Коначна оцена** – укупан број поена се добија сабирањем поена добијених на основу предиспитних обавеза и испита. За полагање испита неопходно је освојити бар 51 поен. Оцене 6-10 су равномерно расподељене у опсегу од 51 до 100 поена
- **Распоред** (термини предавања и вежби):  
предавања петак 12h-14h и вежбе 14h-16h

# Како се изводе предавања и вежбе?

- Предавања:
  - слајдови
  - табла & креда
  - рачунар за илустрације и показе
- Вежбе:
  - **Ви радите** на рачунару
  - програмирање: C/C++ и Python  
битно је да програм (про)ради!
  - коришћење постојећег софтвера



# Предиспитне обавезе

- Задатак се задаје на крају предавања и важи до рока за предају
- Током вежби решавате задатак уз помоћ присутног наставника или сарадника
- Решење задатка се састоји од
  - ASCII (TXT) фајла са јасно записаним (нумеричким) одговорима на питања из задатка
  - Кодом за решење задатка (C/C++ за Visual Studio 2017/19 или Python 3.8)
- Решење се шаље као **један ZIP фајл** (< 10 MB) кроз портал најкасније до рока који је објављен заједно са задатком (типично **среда** следеће седмице у **12:00**, али може бити промењен због распореда)
- Освојени поени објављују се **четвртком до 21:00** најкасније до рока који је објављен заједно са задатком (структуре поена за задатак биће изложена на одговарајућим вежбама)
- **Петком од 11:15 до 12:00** су лабораторијске вежбе где студенти који су позвани одговарају на питања у вези са својим решењем задатка (и евентуално решавамо примедбе на број освојених поена)

<http://mtt.etf.rs/si/IOA/up.html>

Inženjerski optimizacioni algoritmi

Katedra za opštu elektrotehniku  
Elektrotehnički fakultet, Beograd

Home Plan i program Laboratorijske vežbe Literatura Stari ispitni rokovi ETF Beograd

[Plan i program](#)

[Predavanja](#)

[Laboratorijske vežbe](#)

[Literatura](#)

[Stari ispitni rokovi](#)

[Ostali predmeti Katedre](#)

- [Osnovi elektrotehnike](#)
- [Predmeti smera za MTT](#)
- [Elektromagnetika](#)
- [Teorija električnih kola](#)

[Karton predmeta](#)

[Uputstvo za studente](#)

Fond časova: 2+2+1

**Literatura:**

- Z. Michalewicz, D.B. Fogel, *How to Solve It: Modern Heuristics for Optimization Problems*
- Xin-She Yang *Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Applications*
- D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*

**Prvo predavanje: petak 7. oktobar 2022. godine, 12:15, učionica 312**

**Termin za nastavu, školska 2022/23. godina**

Predavanja: petak 12-14h, sala 312  
Vežbe: petak 14-16h, sala 70  
Laboratorijske vežbe počinju od druge sedmice semestra.

[Link za slanje rešenja zadataka](#)

[Poeni osvojeni tokom tekuće školske godine](#)

**Stari ispitni rokovi:**

- IOA, 12. februar 2022.
- IOA, 22. januar 2022.
- Katedralna, 2. decembar 2021.

**Obaveštenja**

[Prezentacija predmeta](#)

Školska 2018/19. godina:

**Inženjerski optimizacioni algoritmi:**

Indeks (godina/broj) :

Odaberite ZIP sa rešenjem koji ćete poslati:

Choose File No file chosen

Pošaljite ZIP sa rešenjem:

**Инженерски оптимизациони алгоритми**

Редни број	Индекс	Програм и име	1	2	3	4	СКИ	6	7	8	9	ИВК2	11	12	13	14	Броје	Броји	Понес	Однос	
1			5	4	3	11		2	5	0			5			12	3	49	6		
2			5	5	5	11	5	5	5	5	32	5			5	0	51	6			
3			5	5	5	7	3	5	4	1	2	4	2	8	18	49	29	50	10		
4			5	5	5	10	4	5	5	5	5	5			5	50	67	9			
5			5	5	5	18	5	5	5	4	13	5			5	5	50	67	10		
6			5	4	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	27	69	10			
7			5	4	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	10	10	10			
8			5	4	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	65			
9			5	4	5	5	6	5	5	4	6	5	5	5	5	5	5	65			
10			5	4	5	5	6	5	5	4	6	5	5	5	5	5	5	65			
11			5	4	5	5	6	5	5	4	6	5	5	5	5	5	5	65			
12			5	4	5	5	6	5	5	4	6	5	5	5	5	5	5	65			
13			5	4	5	5	3	5	4	4	4	4	4	4	4	5	5	0	53	6	
14			5	4	5	5	3	5	4	4	4	4	4	4	4	5	5	20	45	7	
15			5	4	5	5	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	21	45	7	
16			5	4	5	5	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	0	53	6
17			5	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	17	0	53	6
18			5	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	25	10	7	
19			5	5	5	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	30	70	10	
20			5	5	5	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	19	65	9	
21			5	5	5	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	23	70	10	
22			5	5	5	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	23	70	10	
23			5	5	5	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	23	70	10	
24			5	4	5	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	22	70	10	
25			5	5	5	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	22	70	10	
26			5	5	5	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	26	70	10	
27			5	5	5	5	20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	26	70	10	
28			5	4	5	5	9	5	5	4	5	4	5	5	5	5	5	0	53	6	
29			5	5	5	5	9	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	30	60	10	
30			5	5	5	5	9	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	30	60	10	
31			5	5	5	5	10	5	5	5	5	14				10	30	70	10		
32			5	5	5	5	10	5	5	5	5	14				5	30	60	10		
33			5	5	5	5	20	5	5	5	4	20				20	64	9			
34			5	4	5	5	20	5	5	5	5	20				8	64	9			
35			5	5	5	5	20	5	5	5	5	20				28	70	10			
36			5	1	5	5	11	5	5	5	16	5				21	70	10			
37			5	5	5	5	11	5	5	5	16	5				10	23	70	10		
38			5	5	5	6	2	5	5	5	5	5				8	11	70	9		
39			5	4	5	5	5	5	5	5	5	5				27	60	10			
40			5	5	5	5	11	5	5	5	5	5				5	29	70	10		

# Историја курса и примена у индустрији

## WIPL-D Optimizer

WIPL-D Optimizer is a powerful multi-algorithm optimization tool that is being used by many successful professionals around the world. The tool calculates a single solution as well as multiple solutions for complex criteria optimizations. Thanks to its simple and intuitive graphical interface, you can quickly solve the problem hand. It enables a high level of design automation for antenna, antenna system, scatterer, or a microwave

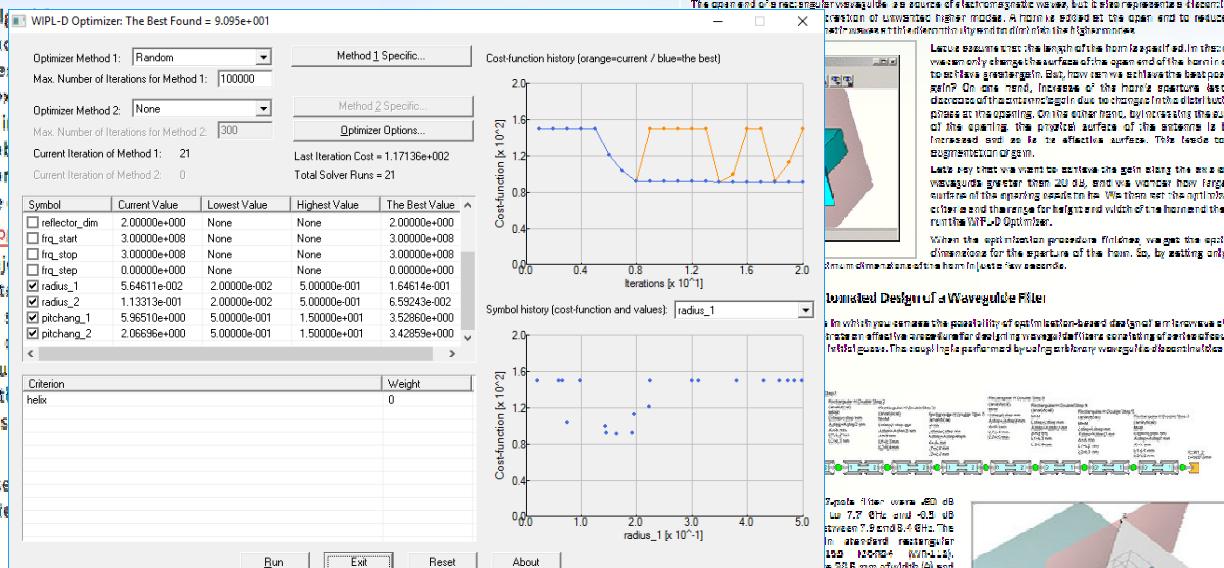
WIPL-D Optimizer is seamlessly integrated with WIPL-D and WIPL-D Microwave. When you create your project, you want to get optimum performance, you just start the Optimizer from within the design environment, define parameters to be optimized and the optimization criteria, and let the tool do the rest. You can specify cost-function based on virtually all the EM simulation results that are calculated with WIPL-D 3D EM solver, as well as the simulation results from WIPL-D Microwave.

Various optimization algorithms are available. The software covers all major methods proven to work efficiently in practice. The available optimization algorithms are:

- Particle Swarm
- Genetic
- Simplex
- Random
- Systematic Search
- Simulated Annealing
- Gradient

Some of the special options that distinguish WIPL-D Optimizer from other commercially available optimization tools:

- Hybrid optimization (involving two consecutive optimization algorithms)
- Pareto fronts (set of the best compromises in a multi-criteria optimization)
- Estimation of local minima (keeping several solutions that are in some proximity of the best found solution)
- Optimization repetitions (multiple optimizations from random starting points - decreases the probability of finding a local optimum which is not in fact the global optimum)



The open end of a rectangular waveguide is a source of electromagnetic waves, but it also represents a discontinuity between two different modes. A horn is added at the open end to reduce the reflection and to reduce the loss of power.

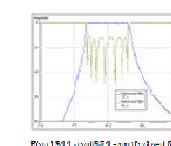
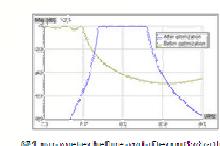
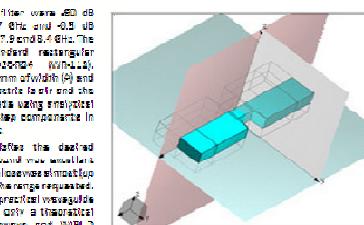
Let's assume that the length of the horn is specified. In this case, we can only change the surface of the open end of the horn in order to achieve a greater gain. But, how can we achieve the best possible gain? On one hand, increase of the horn's aperture leads to decrease of the transmission due to change of the distribution of phase at the opening. On the other hand, by increasing the surface of the opening, the physical surface of the antenna is being increased and we have to reflect surface. This leads to the augmentation of gain.

Let's say that we want to achieve the gain along the axis of the waveguide greater than 20 dB, and we wonder how large the surface of the opening needs to be. We then set the optimization criteria and run the optimization which of the horn and then we run the WIPL-D Optimizer.

When the optimization procedure finishes, we get the optimum dimensions for the aperture of the horn. So, by setting only few input parameters, we can optimize the horn in just a few seconds.

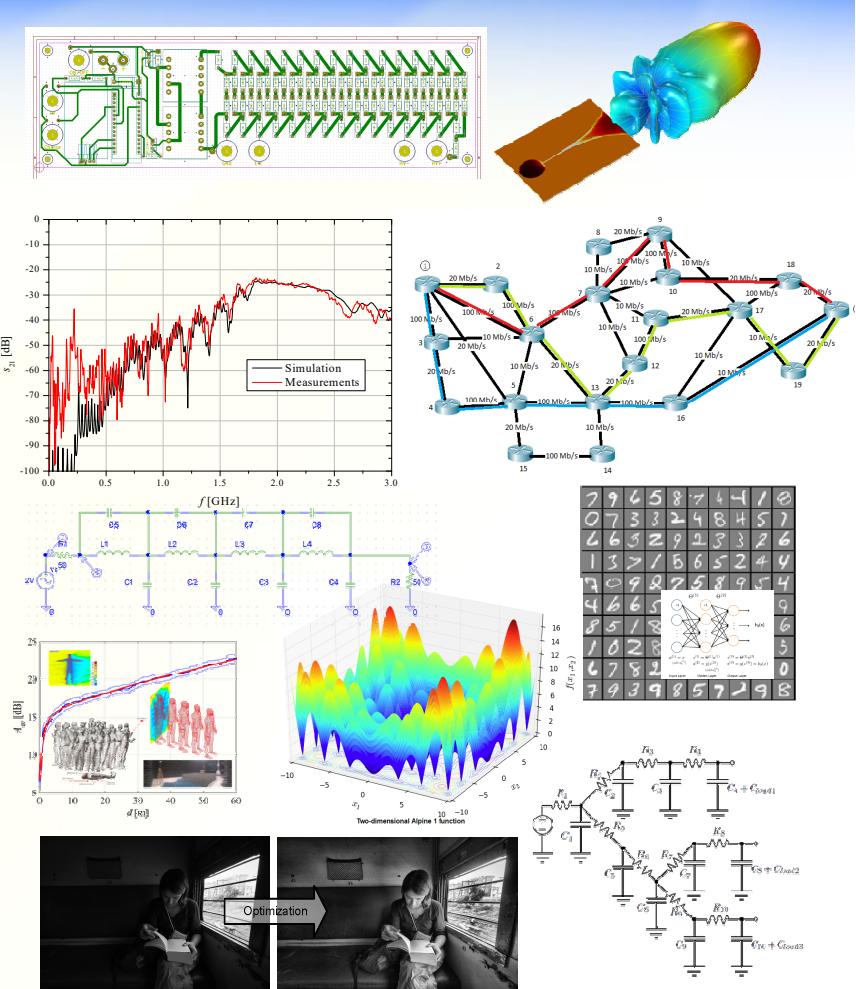
### Optimized Design of a Waveguide Filter

In what follows you can see the possibility of optimization-based design of waveguide filters consisting of series of coupled helical resonators. The coupling is performed by using either very waveguide discontinuities (e.g.,



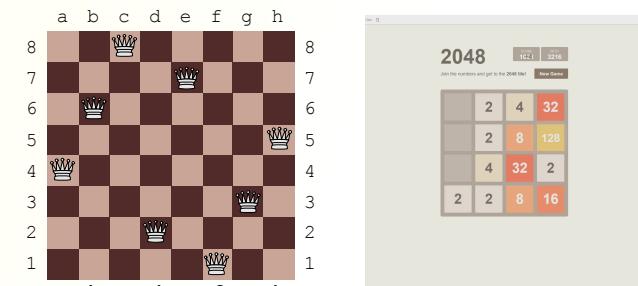
# Примери оптимизације из електротехнике и рачунарства

- Пројектовати електрично коло са одговарајућим особинама (преносне функције филтра, појачање појачавача, израда елемената кола у различитим технологијама, Q-фактор калема итд.)
- Пројектовање антене за задати дијаграм зрачења
- Поналажење оптималног рутирања у мрежама
- Поналажење оптималних кодова за пренос и запис према различитим критеријумима
- Оптимално покривање подручја радио сигналом
- Оптимално искоришћење фреквенцијског спектра
- Минимизација површине чипа и максимизације његових рачунарских перформанси
- Минимизација времена извршавања програма
- Поналажење функције која оптимално фитује задати скуп података
- Минимизација потрошње електричне енергије уређаја
- Максимизација капацитета батерије
- ...



# Други примери оптимизације

- Оптималан избор школе
- Оптималан избор изборног предмета на студијама
- Оптималан избор (будућег) радног места
- Оптимално коришћење свог и туђег времена
- Оптимална расподела економских ресурса
- Најбржа путања за задату полазну и крајњу тачку
- Избор оптималног потеза у игри
- Максимизација учинка радника
- Минимизација цене производње
- Оптималан избор тима за пројекат
- Оптимална расподела информација за постизање жељеног циља
- ...



# Како је оптимизација повезана са другим научним дисциплинама?

- Инжењери користе знања математике, логике, економије, искуство и интуицију да пронађу решење проблема
- Математика: решавање система нелинеарних једначина на континуалном или дискретном домену
- Pattern recognition / machine learning / data mining / knowledge discovery су уско повезани са оптимизацијом
- Оптимизација се врши алгоритмима који се данас по правилу реализују програмирањем
- Дарвин: еволуција ствара и чува особине које су боље за опстанак у условима у којима се одиграва природна селекција
- Економија је наука која се бави проучавањем како друштво управља ограниченим ресурсима



# Шта је “проблем” или задатак?

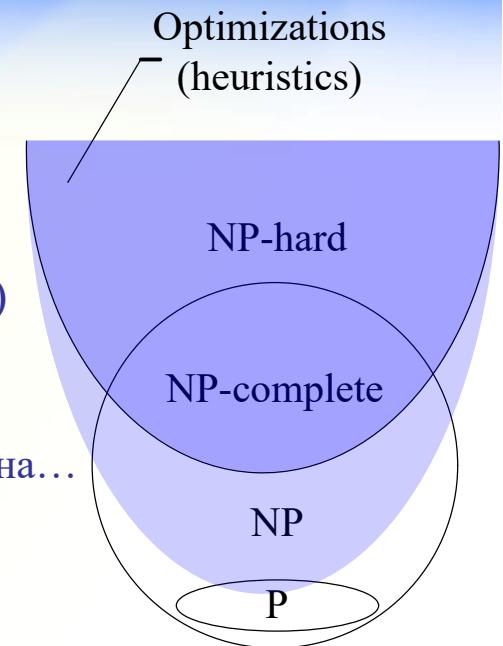
- Проблем (задатак) постоји онда када желимо нешто да решимо (постоји несклад/разлика између текућег и жељеног стања)
  - Задатак на испиту: имам поставку, а желим решење
  - Електротехника: направи електрични уређај или систем задатих карактеристика
  - Рачунарство: направи софтвер задатих карактеристика
- Реални проблеми се увек решавају ван јасно дефинисане области (на факултету, по правилу се решавају у оквиру области)
  - Велики и први корак ка решавању је знати одакле почети
- Решење је постизање жељеног циља у оквиру ограничења
- У пракси најчешће мора да се решава више проблема истовремено, а ти проблеми често могу имати опречне захтеве
- Постоје разни проблеми – ми ћемо се бавити рачунским

# Рачунски проблем (енг: computational problem)

- Проблем који се решава помоћу рачуна (и рачунара)
- Проблем = скуп свих вредности улазних података + одговарајући резултат за сваку вредност улазних података
  - Скуп улазних података може бити коначан или бесконачан
- Подела:
  - Проблеми одлучивања: имају бинаран резултат {да, не} или {1, 0} или {true, false}
  - Проблеми оптимизације: имају генералан нумерички резултат {реалан број, низ бита, скуп бројева, пермутација елемената скупа итд.}
- Проблеми оптимизације могу се трансформисати у проблеме одлучивања формулацијом питања
  - Оптимизација: пронаћи најкраћу путању између задатих тачака
  - Одлука: да ли постоји путања краћа од  $x$  [m] између задатих тачака?
  - Последица: **теорија рачунске сложености** (енг: computational complexity theory) важи и за оптимизационе проблеме!

# Сложеност алгоритама и поређење перформанси

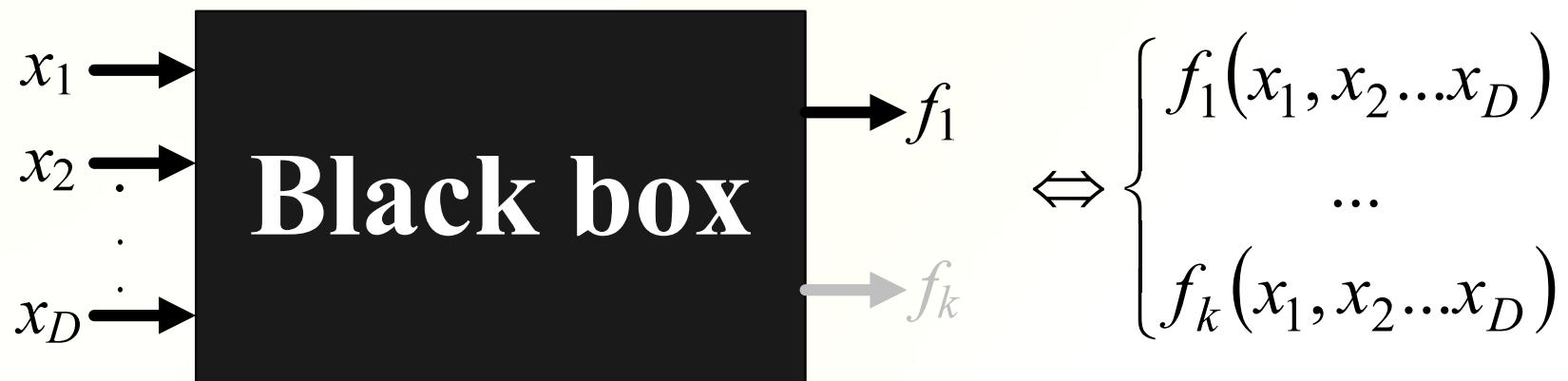
- Тјурингова машина
- Детерминистички и недетерминистички приступи
- Временска сложеност и просторна сложеност:  
рачунарски ресурси потребни за решавање проблема  
= време (рачунске операције) + простор (меморијске локације)
- Претпоставимо да алгоритам обрађује  $N$  улазних елемената
- Сложеност алгоритма
  - линеарна, квадратна, логаритамска, полиномска, експоненцијална...
- Означавање
  - $O(N)$ ,  $O(N^2)$ ,  $O(\log N)$ ,  $O(N^{\text{const.}})$ ,  $O(2^N)$  итд.
- Теорија: алгоритми се пореде према сложености
- Питање од милион долара:  $P \neq NP$  или  $P = NP$ ?
- Пракса:  $t = k_t \cdot O(f_t(N))$  и  $m = k_m \cdot O(f_m(N))$   
да ли проблем може да се реши на задатом хардверу у задатом времену?
- За стохастичке оптимизационе алгоритме тражићемо и  
најбрже проналажње (средњег) најбољег решења



# Black-box оптимизације

## (Модел црне кутије)

- У пракси решавање се своди на проблеме за које не постоји предзнање
  - све што знамо о проблему потребно је искористити за решавање
- За задате улазне податке (побуду)  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_D)$  добијају се резултати (одзиви)  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$
- Одзиви нису познати унапред за све могуће побуде (ако су сви одзиви познати, најбољи одзив је решење проблема)
- Унутрашња организација непозната (због природе, ограничења...)



# Резултати црне кутије:

## “The Blind Men and the Elephant”

- John Godfrey Saxe (1816-1887) -

It was six men of Indostan  
To learning much inclined,  
Who went to see the Elephant  
**(Though all of them were blind),**  
**That each by observation**  
**Might satisfy his mind.**

The *First* approached the Elephant,  
And happening to fall  
Against his broad and sturdy side,  
At once began to bawl:  
"God bless me! but the **Elephant**  
**Is very like a WALL!**"

The *Second*, feeling of the tusk,  
Cried, "Ho, what have we here,  
So very round and smooth and sharp?  
To me 'tis mighty clear  
This wonder of an **Elephant**  
**Is very like a SPEAR!**"

The *Third* approached the animal,  
And happening to take  
The squirming trunk within his hands,  
Thus boldly up and spake:  
"I see," quoth he, "**the Elephant**  
**Is very like a SNAKE!**"

The *Fourth* reached out an eager hand,  
And felt about the knee  
"What most this wondrous beast is like  
Is mighty plain," quoth he:  
"**Tis clear enough the Elephant**  
**Is very like a TREE!**"

The *Fifth*, who chanced to touch the ear,  
Said: "E'en the blindest man  
Can tell what this resembles most;  
Deny the fact who can,  
This marvel of an **Elephant**  
**Is very like a FAN!**"

The *Sixth* no sooner had begun  
About the beast to grope,  
Than seizing on the swinging tail  
That fell within his scope,  
"I see," quoth he, "**the Elephant**  
**Is very like a ROPE!**"

And so these men of Indostan  
Disputed loud and long,  
Each in his own opinion  
Exceeding stiff and strong,  
**Though each was partly in the right,**  
**And all were in the wrong!**

# Формализација

- Формално, сваки одзив је функција више променљивих (побуда)
- Одзив, или нека функција одзива, је мера колико је решење добро или лоше
- При оптимизацији (решавању проблема), за сваки скуп улазних података које желимо да разматрамо, потребно је израчунавати одзив(е)
- Подела модела (поставки) према броју одзива:
  - са једним одзивом (један критеријум оптимизације)
  - са више одзива (више критеријума оптимизације)
- Први део курса: оптимизације са једним критеријумом
- Последња трећина курса: вишекритеријумске оптимизације

# Оптимизација и функције више променљивих

- Побуде  $\leftrightarrow$  оптимизационе променљиве
- Одзив  $\leftrightarrow$  оптимизациона функција  
(нумеричка мера квалитета решења)
  - Оптимизациона функција је функција са једном или више променљивих  $f(x_1, x_2 \dots x_D)$
  - Променљиве и резултат оптимизационе функције могу бити из скупа дискретних или континуалних бројева

# Терминологија

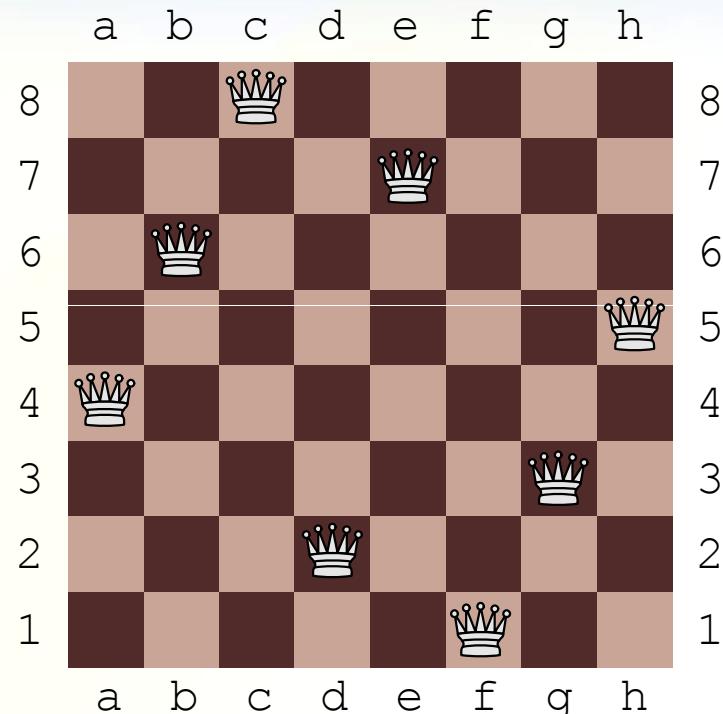
- **Оптимизациона функција** ≡  
функција грешке ≡ cost function ≡ evaluation function ≡  
нумеричка мера квалитета разматраног решења
- Једно израчунавање оптимизационе функције ≡ **итерација**
- **Оптимизационе променљиве** ≡ улазни подаци за проблем
- **Оптимизациони простор ( $S$ )** је  
скуп свих могућих вредности оптимизационих променљивих  
(енг: optimization space, search space, set of candidate solutions...)
- **Простор (смислених) решења ( $F$ )** је  
скуп свих решења које има смисла разматрати  
(енг: feasible solutions,...) 
$$F \subseteq S$$
- **Број димензија оптимизационог простора ( $D$ )**  
је број оптимизационих променљивих
- Свака тачка у оптимизационом простору  
представља један избор вредности улазних података

# Колико је велики оптимизациони простор?

- Величина оптимизационог простора је од изузетне важности
- Избор оптимизационог алгоритма зависи од:
  - величине оптимизационог простора
  - домена оптимизационих променљивих
- Величина простора зависи од усвојеног записа!
  - Бијективни записи имају исту величину оптимизационог простора
  - Најбољи запис је онај за који важи  $F = S$
- Оптимизациони простор може бити ограничен или неограничен  
(constrained vs. unconstrained)

# Пример записа и величине опт. простора: $N$ -краљица

- Проблем: поставити  $N$ -краљица на “шаховску таблу” димензија  $N \times N$  тако да се краљице не нападају
- Нека су  $r_k$  и  $c_k$  позиције краљице  $k$ :  
 $1 \leq k \leq N$  (редни број)  
 $1 \leq r_k \leq 8$  (ред)  
 $1 \leq c_k \leq 8$  (колона)
- Краљица:  
 $f1 \rightarrow (r_k, c_k) = (1, 6)$
- Колико је велики оптимизациони простор?



# Величина оптимизационог простора зависи од записа!

- Запис #1: 64 могућа места  $(1,1), (1,2), \dots (8,8)$  на која можемо да ставимо 8 краљица  
 $x = \{K_1, K_2, \dots, K_8\}, 1 \leq K_n \leq 64$

$$|F| = \binom{64}{8} = 4\,426\,165\,368$$

- Запис #2: свака краљица у свом реду  
 $x = \{\textcolor{red}{K}_1, \textcolor{red}{K}_2, \dots, \textcolor{red}{K}_8\}, 1 \leq K_n \leq 8$   
K#1:  $(1, \textcolor{red}{K}_1), \dots, \text{K#8: } (8, \textcolor{red}{K}_8)$

$$|F| = 8^8 = 16\,777\,216$$

- Запис #3: краљице не могу бити у истом реду и у истој колони  
 $x = \{\textcolor{red}{3, 6, 2, 4, 1, 5, 7, 8}\}$   
K#1:  $(1, \textcolor{red}{3}), \text{K#2: } (2, \textcolor{red}{6}), \dots, \text{K#8: } (8, \textcolor{red}{8})$

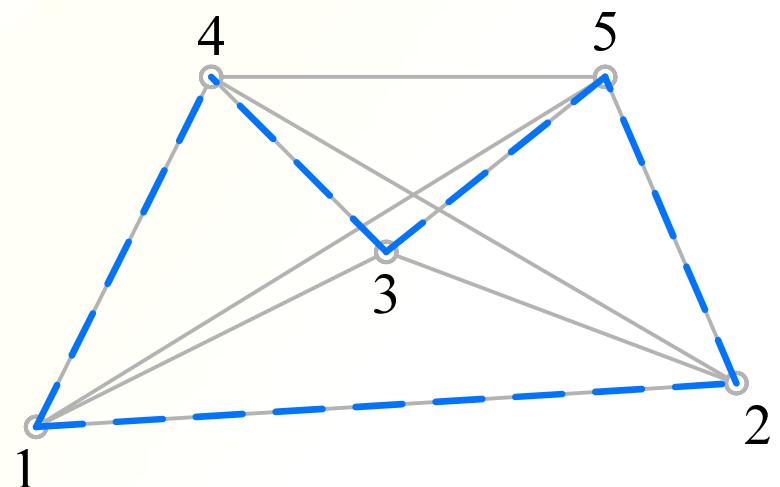
$$|F| = 8! = 40\,320$$

# Основни типови оптимизационих проблема (TSP, SAT, NLP)

- Проблем трговачког путника  
(енглески: traveling salesman problem, TSP)
- Булова алгебра (дискретна стања)  
(енглески: Boolean satisfiability, SAT)
- Нелинеарни проблеми  
(енглески: Nonlinear programming, NLP)
- Домени основних типова проблема  
(дискретан или континуалан)

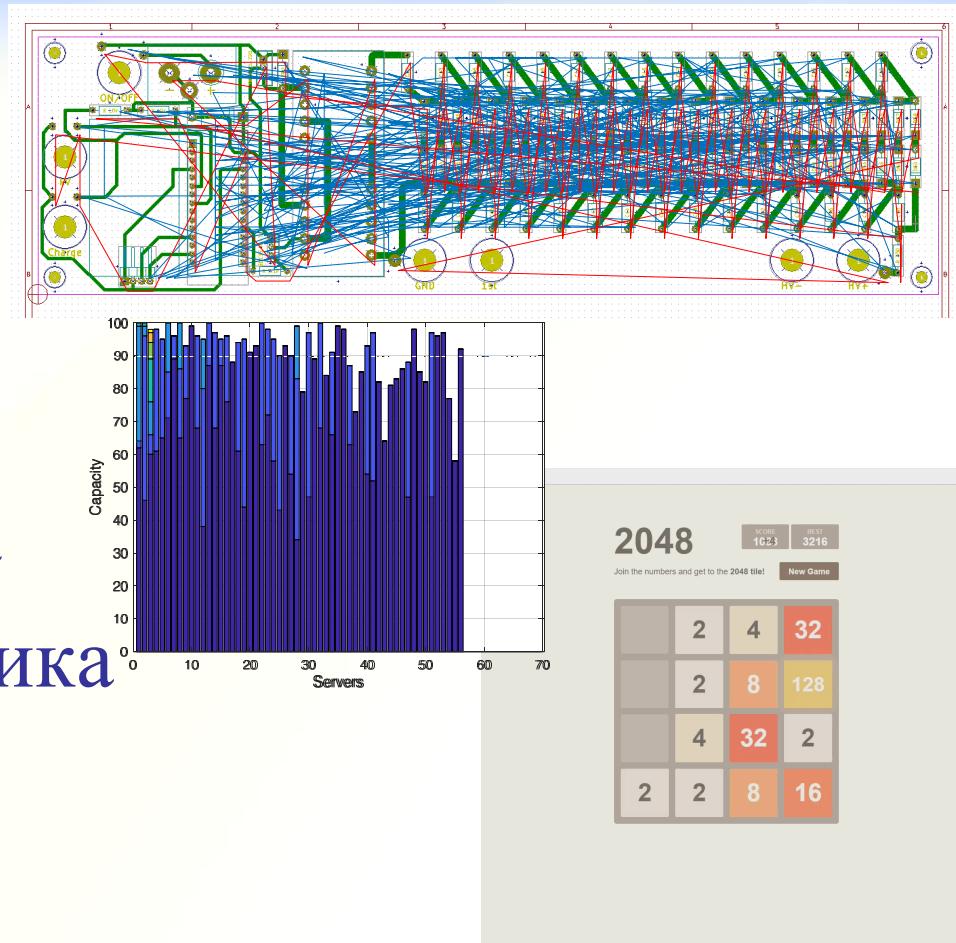
# TSP: поставка

- За задати скуп  $D$  градова и позната растојања између сваког паре градова, пронаћи најкраћи пут који пролази кроз сваки град и завршава се у полазном граду
- Број могућих путања  $D!$ 
  - $D = 15$ , број путања  $\approx 1,3 \cdot 10^{12}$
  - $D = 150$ , број путања  $\approx 57,1 \cdot 10^{261}$
- Приказана путања  
 $5-3-4-1-2(-5)$
- Подела:
  - Симетричан:  $dist(p,q) = dist(q,p)$ 
    - Асиметричан:  $dist(p,q) \neq dist(q,p)$
  - Метрички ( $d_{AB} \leq d_{AC} + d_{CB}$ ) и они који то нису
  - Еуклидски: симетричан + метрички



# TSP: инжењерски проблеми

- Минимална путања алата за бушење на штампаним плочама
- Рутирање возила
- Путање у графовима
- Планирање и логистика
- ...



# TSP класа проблема и поделе

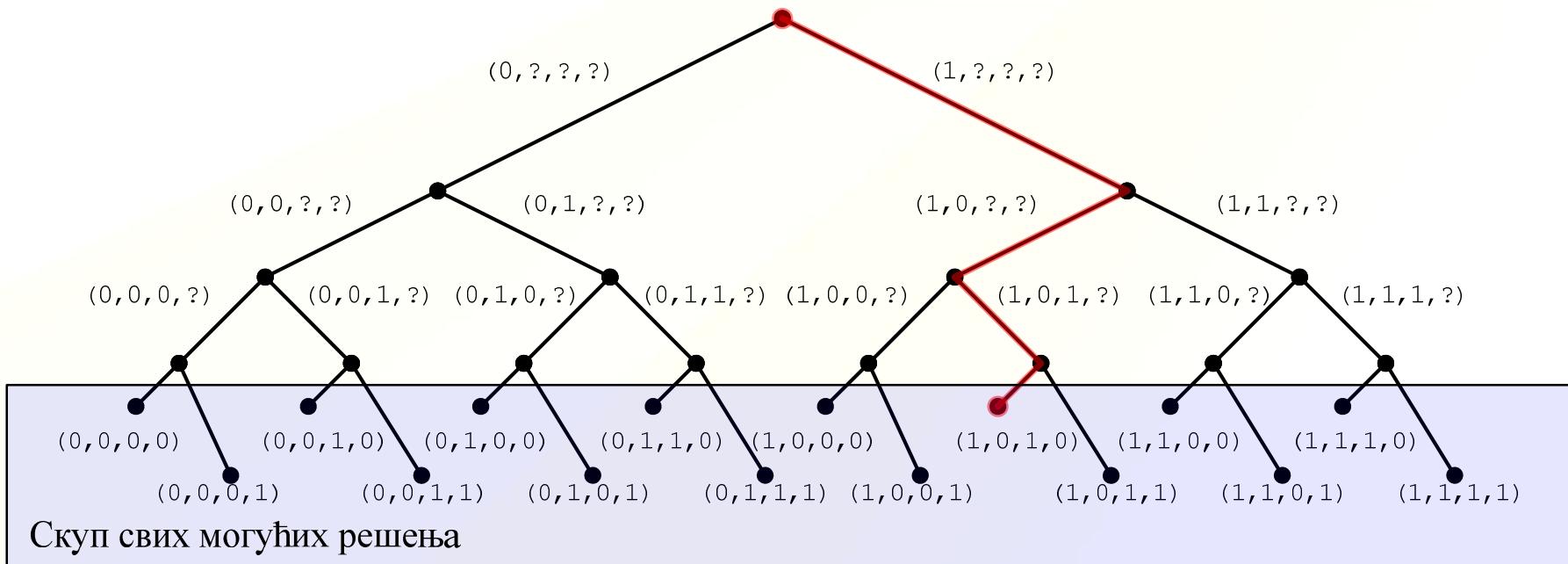
- Сваки проблем који може да се сведе на **проверу свих пермутација** називаћемо **проблем TSP класе**
- Енглески: TSP-encoded problems
- Поделе TSP:
  - Симетричан (енг: symmetric TSP, STSP)
  - Асиметричан (енг: asymmetric TSP, ATSP)
  - Најкраћи Хамилтонов пут (енг: shortest Hamiltonian path, SHP)
    - Хамилтонова контура (енг: Hamiltonian cycle)
  - Обилазак са условима (енг: Sequential ordering problem, SOP)
  - Рутирање возила ограниченог капацитета (енг: Capacitated vehicle routing problem, CVRP)
  - ...
- Посебне поткласе могу имати једноставнија решења
- Генерализација: job shop problem

# SAT: поставка

- За задати логички израз  $F(x_1, x_2, \dots, x_D)$  пронаћи вредности променљивих  $(x_1, x_2, \dots, x_D)$ ,  $x_k \in \{\text{true (1), false (0)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, D$  тако да је  $F(x_1, x_2, \dots, x_D) = \text{true}$   
$$F(\mathbf{x}) = x_1 \wedge ((x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}))$$
- Пример  $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$   
$$F(\mathbf{x}_{\text{opt}}) = \text{true}$$
- Број различитих  $\mathbf{x}$  је  $2^D$ 
  - $D = 15$ , број могућих решења 32768
  - $D = 150$ , број могућих решења  $\approx 1,4 \cdot 10^{45}$
- Улазни подаци могу да се запишу као низ бита 100110...

# SAT: приказ помоћу графова (бинарно стабло графа)

$$F(\mathbf{x}) = x_1 \wedge ((x_2 \wedge \bar{x}_1) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4))$$



# SAT класа проблема и поделе

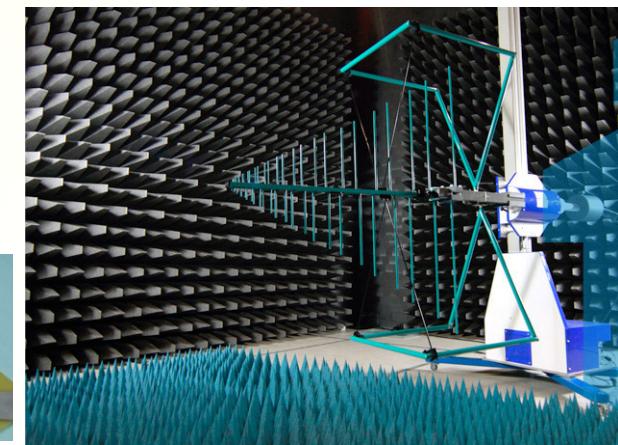
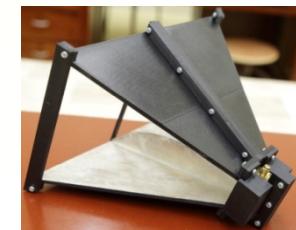
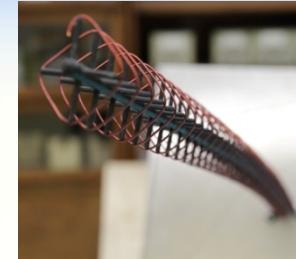
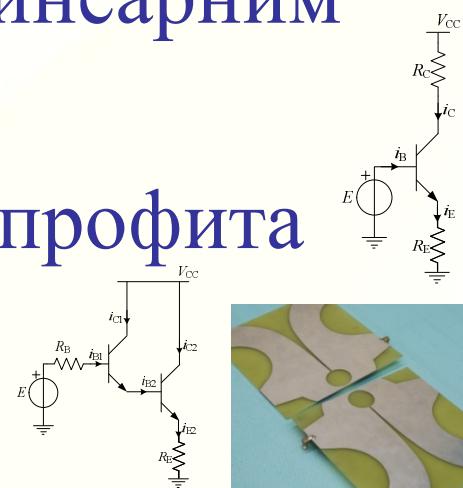
- Сваки проблем који се своди на **проверу свих могућих вредности секвенце бита** називаћемо проблем SAT класе
- Поделе (Karp's 21 NP-complete problems)
  - проблем ранца (knapsack)
  - подела посла (job-sequencing)
  - directed/undirected Hamiltonian cycle
  - ...
- Примери: свака манипулација битима може да претвори у проблем SAT класе
  - Откључавање ZIP архиве
  - Пробијање RSA кодова
  - ...

# NLP проблеми

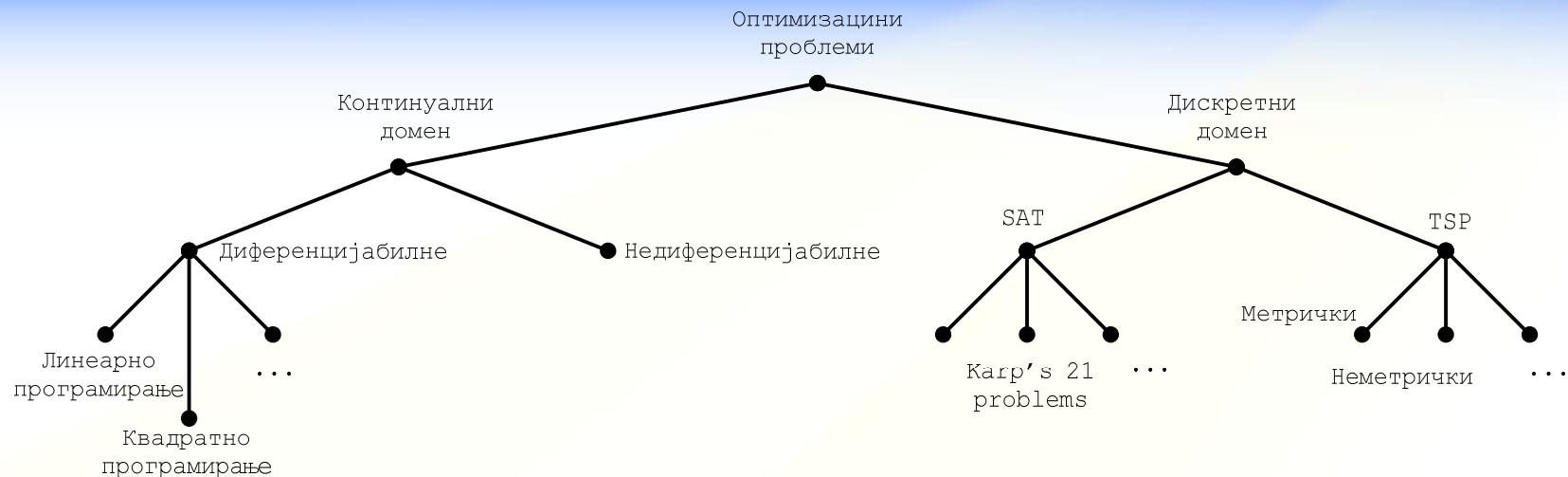
- Сваки оптимизациони проблем са **континуалним променљивима** спада у NLP класу проблема
- Број могућих решења је (теоријски) **бесконачан!**
- Посебни случајеви
  - диференцијабилне и недиференцијабилне  $f$
  - линеарно програмирање
  - квадратно програмирање
  - конвексни/конкавни проблеми
  - са ограниченим или неограниченом доменом
  - ...

# NLP инжењерски примери

- Пројектовање ЕМ уређаја
- Решавање нелинеарних кола
- Фитовање резултата мерења
- Управљање нелинеарним системима
- Максимизација профита
- ...



# Класификација оптимизационих проблема



- Подела није јединствена
- Пермутације су специјалан случај низова бита:  $TSP \subset SAT$  ?
- Све што радимо на рачунару је са коначном тачношћу (64-бита):  $NLP \subset SAT$  ?
- Класификација је према **запису улазних података** (побуда) и природи оптимизационог проблема

# Колико је спор мој брзи рачунар?

- Колико времена могу да потрошим за оптимизацију?
- Колико пута могу да израчунам опт. функцију  $f(\mathbf{x})$ ?
- Желим процену брзине: максималан број позива (оптимизационе) функције
- Једноставан програм: прототип оптимизације

```
#include <stdio.h>
#include <time.h>

double F(double a, double b)
{
    return a + b;
}

int main(void)
{
    double x, eval;
    double max = 7e9;

    time_t t1, t2;
    time(&t1);

    for (x=0; x < max; x=x+1.0 )
        eval = F(x,x);

    time(&t2);

    printf("%5.5e\n", (t2 - t1)/max);
    return 0;
}
```

# Колико времена је потребно да решимо проблеме?

- Претпоставимо да је свака провера 1ns
- TSP 100 градова:  
 $100! \cdot 1\text{ns} \approx 3 \cdot 10^{141}$  година!
- SAT 100 бита:  
 $2^{100} \cdot 1\text{ns} \approx 4 \cdot 10^{13}$  година!
- NLP:  $x$  има  $\infty$  могућности  
→ потребно је теоријски бесконачно много времена!



# Решавање реалних оптимизационих проблема

- Број могућих решења је изузетно велики те је потребно изузетно много рачунарских ресурса
- Постоји много **ограничења** тако да је тешко наћи било какво решење (а не оптимално)
  - Посебно ограничење: човек који решава проблем није адекватно припремљен
- Често је довольно наћи **задовољавајуће решење**
  - Трагање за најбољим (оптималним) решењем је можда занимљиво али најчешће неприхватљиво
- Тада се примењују  
**оптимизациони алгоритми и хеуристике**

# Шта су хеуристике?

- ХЕУРИСТИКА (енг: heuristic)  
грчки корен речи “Εύρισκω“ – пронаћи или открити
- IEEE: All engineering is heuristic
- Технике решавања проблема засноване на  
искусству, учењу и откривању које доводе до решења  
(не мора нужно бити оптимално али јеовољно добро)
- Када год је немогуће или непрактично потпуно  
претраживање простора, користе се хеуристике  
(интуиција, стереотипи, здрав разум, енг: rule-of-thumb,  
educated guess, ...)
- **State-of-the-art** проблеми се увек решавају хеуристички

# Шта је заједничко за све приступе решавању “проблема” (задатака)?

- Структура сваког алгоритма (приступа) за решавање “проблема” има три основна дела
  1. запис могућих решења,
  2. циљ који је потребно постићи и
  3. оптимизациону функцију (нумеричку меру појединачних решења)
- Запис (енг: representation)
  - TSP: једна пермутација, нпр.  $\mathbf{x} = (2,1,3,6,4,5,7)$
  - SAT: један низ бита, нпр.  $\mathbf{x} = 1001100101$
  - NLP: један вектор реалних бројева, нпр.  $\mathbf{x} = (1.5, -3.2, 4.76, 17.2)$
- Запис не мора да буде “природан”: TSP као бинарни низ, реални бројеви као низ бита, итд.
  - Генерално на запис се може применити било која трансформација (пресликање) и добити други запис.
  - Бијективни записи проблема имају исту сложеност решавања!
- Циљ и оптимизациона функција НИСУ исто!
- Запис и опт. функцију формулише онај ко решава проблем

# Пример:

## 4 човека и трошни мост

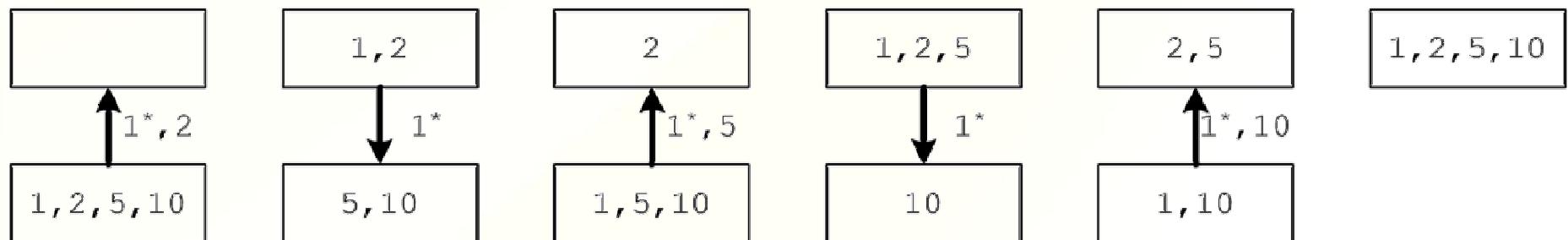
Четири особе морају да пређу са једне стране трошног моста на другу, током ноћи. Мост највише може да издржи две особе истовремено. За прелазак је неопходна лампа да би се осветлио сваки корак и избегле рупе (тј. при преласку у паровима иду брзином споријег). Постоји само једна лампа, коју није могуће пребацити са једне стране моста на другу (тј. увек неко мора да је носи). Први човек може да пређе мост за 1 min, други за 2 min, трећи за 5 min и четврти за 10 min. Пronađi минимално време потребно да сви пређу на другу страну моста.



# Пример:

## Основне идеје и једно решење

- Домен проблема је дискретан, а број могућности је пребројив и коначан.
- Прелази се у паровима, а лампу враћа једна особа.
- Да би четири особе прешле, потребно је 3 преласка и 2 повратка.
- Лампу са друге стране враћа увек најбржи који је на тој страни.
- Интуитивно решење, најбржи носи (враћа) лампу и преводи једног по једног  $\{1,2,1,1,5,1,1,10\}$ ,  $T = 19 \text{ min}$ .



# Пример:

## Пребројавање решења и запис

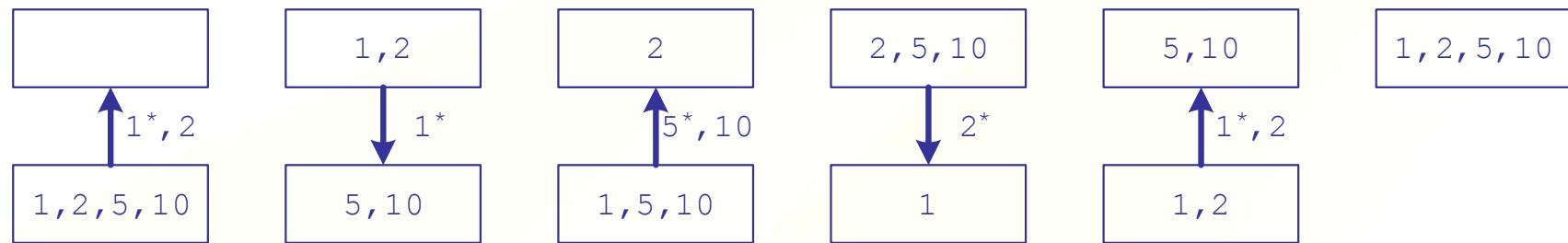
- При преласку ( $\uparrow$ ) за избор првог паре постоји  $\binom{4}{2}$  могућности, за избор другог паре  $\binom{3}{2}$  могућности и за избор трећег паре  $\binom{2}{2}=1$  могућност.
- При повратку ( $\downarrow$ ) имамо само једну могућност.
- Укупан број могућих комбинација прелазака је  $N = \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{3}{2} \cdot 1 \cdot \binom{2}{2} = 18$ .
- Све комбинације можемо да запишемо у облику вектора  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$  где су елементи вектора брзине одговарајућих људи, тј.  $x_k \in \{1, 2, 5, 10\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$ . Први пар при преласку једнозначно одређују  $x_1, x_2$ , други пар  $x_4, x_5$ , трећи пар  $x_7, x_8$ , а повратак једнозначно одређују  $x_3$  и  $x_6$ .
- Током прелазака потребно је водити евиденцију о томе ко је на којој страни (брзине једнозначно одређују људе). На почетку, на првој страни су сви  $S_1 = \{1, 2, 5, 10\}$ , а на другој нема људи  $S_2 = \{\}$ . После преласка првог паре и повратка једне особе са лампом  $|S_1| = 3$  и  $|S_2| = 1$ .
- Укупно време преласка је  $T = \max(x_1, x_2) + x_3 + \max(x_4, x_5) + x_6 + \max(x_7, x_8)$ .

# Пример: све могућности

$\uparrow \#1$	$\downarrow \#1$	$\uparrow \#2$		$\downarrow \#2$		$\uparrow \#3$		$T$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
1	2	1	1	5	1	1	10	19
1	2	1	1	10	1	1	5	19
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>17</b>
1	5	1	1	2	1	1	10	19
1	5	1	1	10	1	1	2	19
1	5	1	2	10	2	1	2	20
1	10	1	1	2	1	1	5	19
1	10	1	1	5	1	1	2	19
1	10	1	2	5	2	1	2	20
2	5	2	1	2	1	1	10	20
2	5	2	1	10	1	1	2	19
2	5	2	2	10	2	1	2	21
2	10	2	1	2	1	1	5	20
2	10	2	1	5	1	1	2	20
2	10	2	2	5	2	1	2	21
5	10	5	1	2	1	1	5	23
5	10	5	1	5	1	1	2	23
5	10	5	2	5	2	1	2	24

# Пример: решење

- Минимално време преласка је 17 min



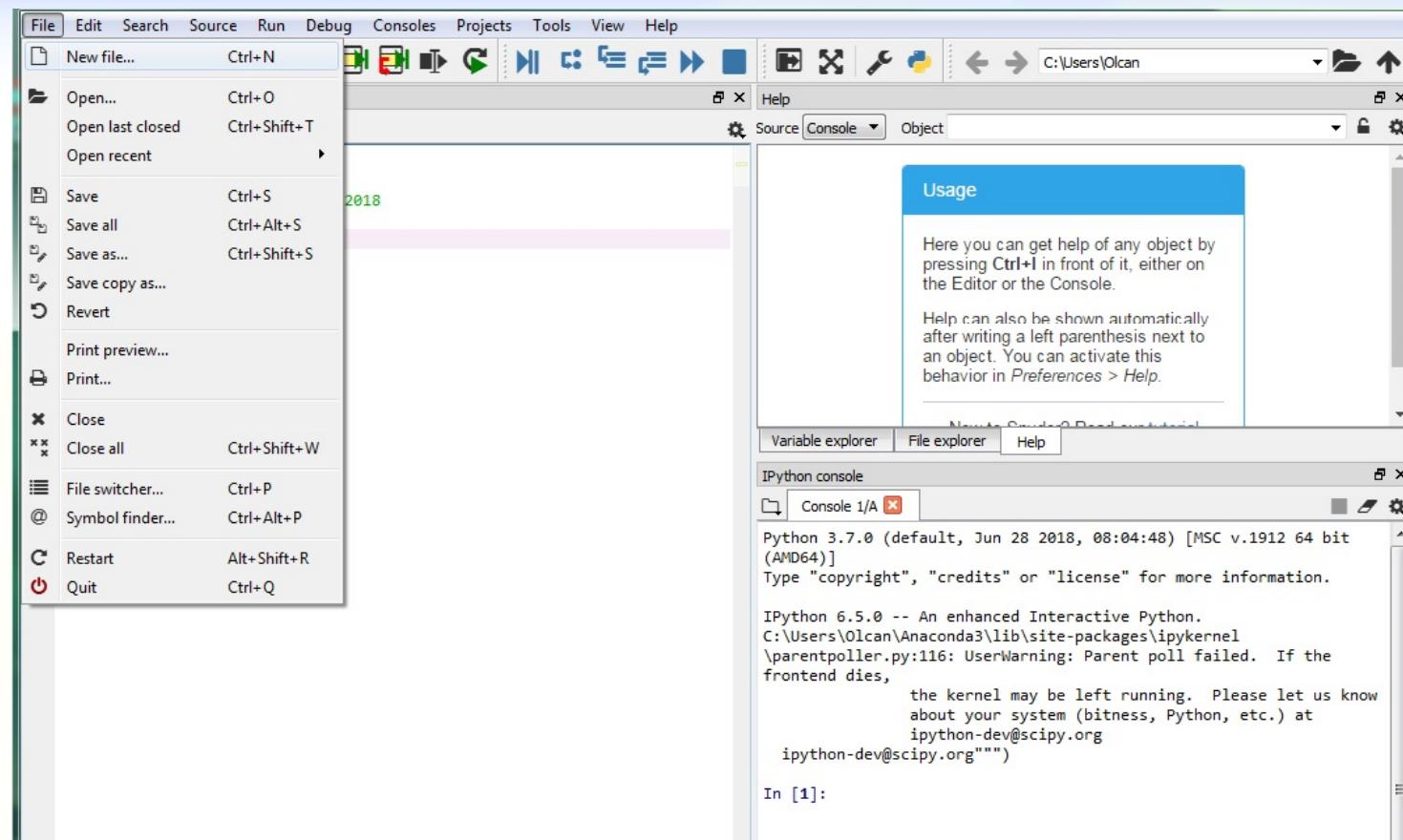
# Задатак за вежбе

- Купац је купио четири производа. Ако се цене изразе у доларима, онда су збир и производ свих цена (бројчано) исти и износе \$7,77. Цене се заокружују на \$0,01 (1 cent).
  - (а) Написати програм који извршава потпуну претрагу по све четири цене и помоћу њега одредити цене. Израчунати максималан број позива оптимизационе функције.
  - (б) Изразити једну цену преко осталих и написати програм који извршава потпуну претрагу по (преостале) три цене. Израчунати максималан број позива опт. функције и упоредити брзину програма у односу на програм из (а).
  - (в) Који од ова два програма је бржи?

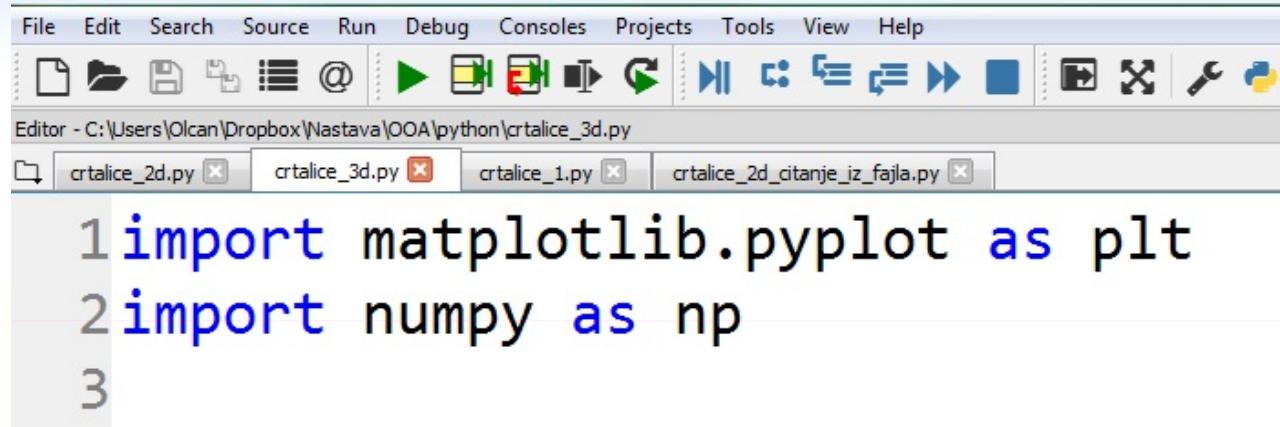
# Вежбе на рачунару: Мотивација

- Упознавање са окружењима која ће бити коришћена на вежбама
  - **Python 3.8** (Spyder Anaconda 3/PyCharm): приказ и обрада резултата
  - **C/C++** (Visual Studio 2017): рачунарски захтевни делови програма
- Студенти се охрабрују да користе и своје рачунаре.

# Python 3.8 (Spyder окружење са Anaconda 3)



# Библиотеке

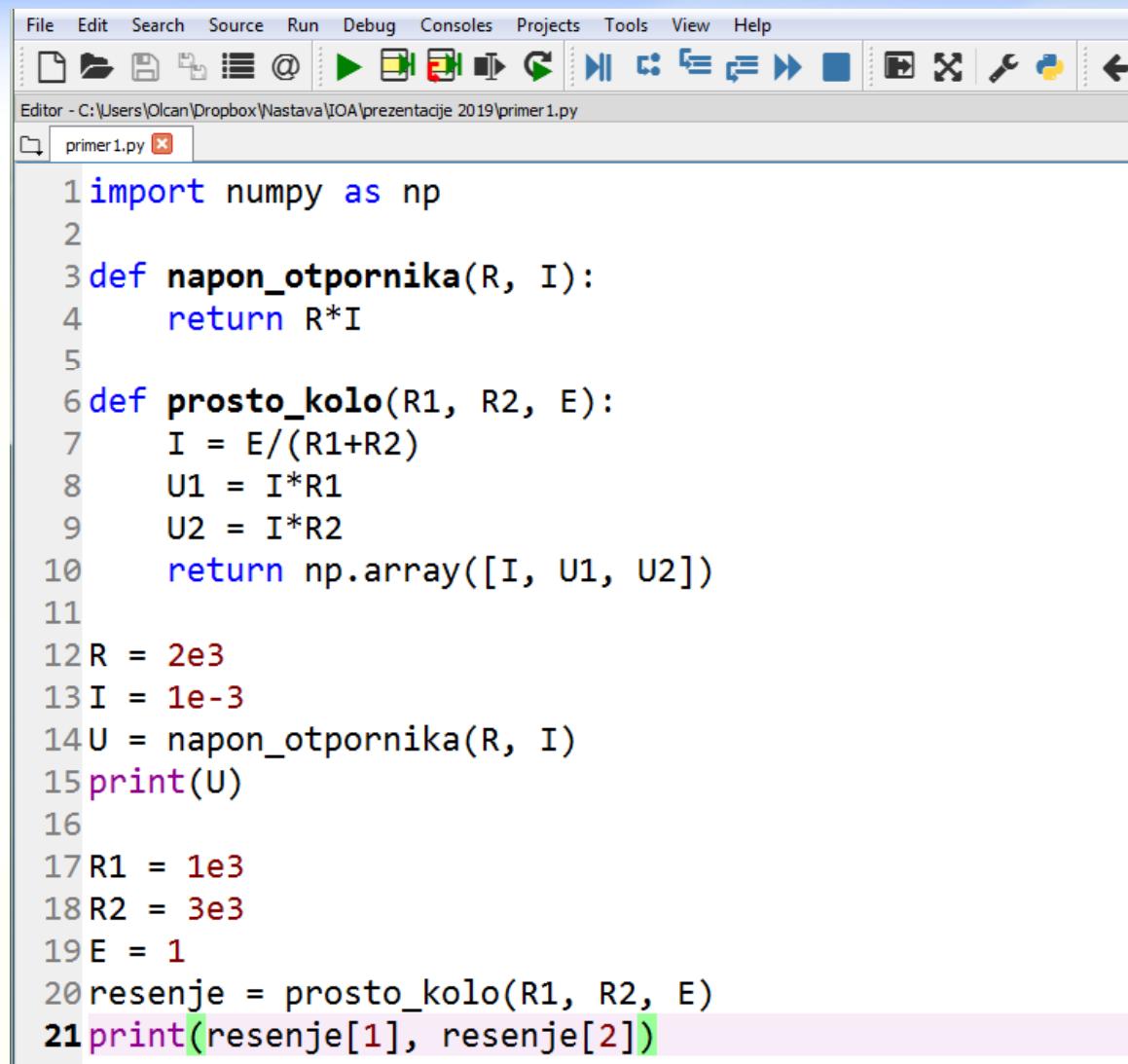


A screenshot of a Python IDE interface. The menu bar includes File, Edit, Search, Source, Run, Debug, Consoles, Projects, Tools, View, and Help. Below the menu is a toolbar with various icons. The title bar shows "Editor - C:\Users\Olcان\Dropbox\Nastava\OOA\python\crtalice\_3d.py". The bottom tab bar has four tabs: crtalice\_2d.py, crtalice\_3d.py (which is active), crtalice\_1.py, and crtalice\_2d\_citanje\_iz\_fajla.py. The main code editor area contains the following Python code:

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
```

- **plt**: figure(), plot(), plot\_surface(),  
set\_xlabel(), plt.legend()
- **np**: arange(), meshgrid()
- Користан сајт: <https://matplotlib.org/>

# Дефинисање функција



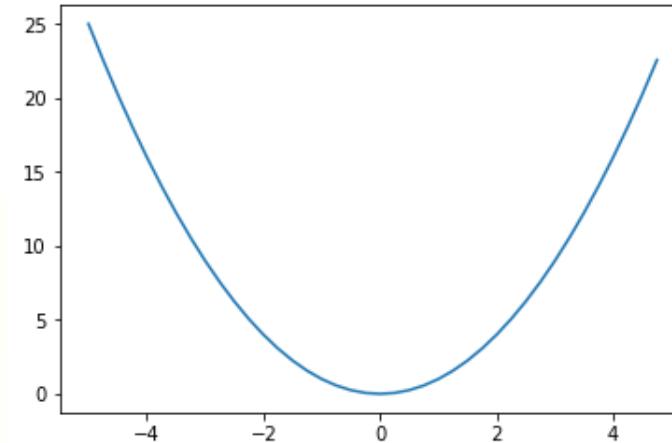
```
File Edit Search Source Run Debug Consoles Projects Tools View Help
Editor - C:\Users\Olcan\Dropbox\Nastava\IOA\prezentacije 2019\primer1.py
primer1.py

1 import numpy as np
2
3 def napon_otpornika(R, I):
4     return R*I
5
6 def prosto_kolo(R1, R2, E):
7     I = E/(R1+R2)
8     U1 = I*R1
9     U2 = I*R2
10    return np.array([I, U1, U2])
11
12 R = 2e3
13 I = 1e-3
14 U = napon_otpornika(R, I)
15 print(U)
16
17 R1 = 1e3
18 R2 = 3e3
19 E = 1
20 resenje = prosto_kolo(R1, R2, E)
21 print(resenje[1], resenje[2])
```

# 1D функција: *plot*

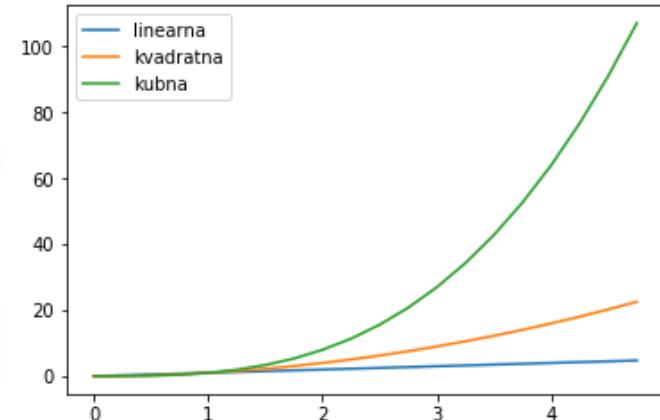
The screenshot shows a Python IDE interface with a menu bar (File, Edit, Search, Source, Run, Debug, Consoles, Projects, Tools, View, Help) and a toolbar with various icons. The editor window title is "Editor - C:\Users\Olcan\Dropbox\Nastava\OOA\python\crtalice\_2d.py". Below the title, there are tabs for "crtalice\_2d.py" and "crtalice\_3d.py", with "crtalice\_2d.py" being the active tab. The code in the editor is:

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 fig = plt.figure()
5 x = np.arange(-5, 5, 0.25)
6 y = x**2
7 plt.plot(x,y)
```



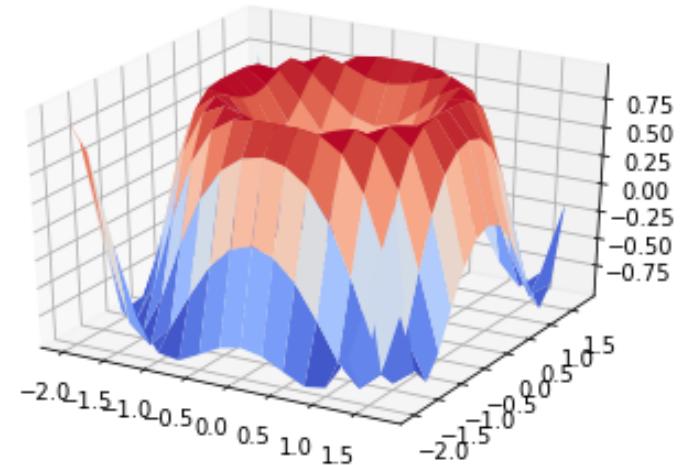
# Легенда

```
File Edit Search Source Run Debug Consoles Projects Tools View Help  
Editor - C:\Users\Olcان\Dropbox\Nastava\OOA\python\crtalice_2d.py  
crtalice_2d.py* crtalice_3d.py crtalice_1.py crtalice_2d_citanje_iz_fajla.py  
1 import matplotlib.pyplot as plt  
2 import numpy as np  
3  
4 fig = plt.figure()  
5 x = np.arange(0, 5, 0.25)  
6  
7 plt.plot(x, x, label = 'linearna')  
8 plt.plot(x, x**2, label = 'kvadratna')  
9 plt.plot(x, x**3, label = 'kubna')  
10 plt.legend()
```

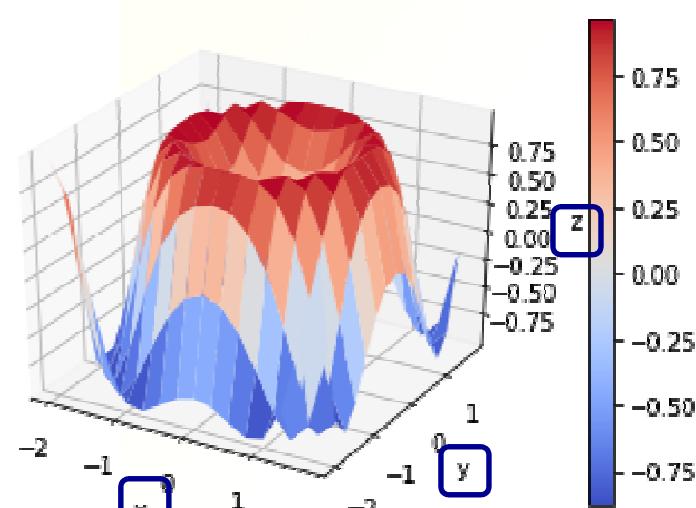


# 2D функција: *plot\_surface* и *meshgrid*

```
File Edit Search Source Run Debug Consoles Projects Tools View Help  
Editor - C:\Users\Olcan\Dropbox\Nastava\OOA\python\crtalice_3d.py  
crtanje_s_par.py crtalice_3d.py crtalice_2d.py  
1 import matplotlib.pyplot as plt  
2 import numpy as np  
3  
4 fig=plt.figure()  
5 ax=fig.add_subplot(projection='3d')  
6  
7 x=np.arange(-2,2,0.25)  
8 y=np.arange(-2,2,0.25)  
9 x,y=np.meshgrid(x,y)  
10  
11 z=np.sin(x**2+y**2)  
12  
13 h=ax.plot_surface(x,y,z,cmap=plt.cm.coolwarm)
```



# Означавање оса



```
File Edit Search Source Run Debug Consoles Projects Tools View Help
Editor - C:\Users\Oican\Dropbox\Nastava\OOA\python\crtalice_3d.py
crtanje_s_par.py crtalice_3d.py crtalice_2d.py

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 fig=plt.figure()
5 ax=fig.add_subplot(projection='3d')
6
7 x=np.arange(-2,2,0.25)
8 y=np.arange(-2,2,0.25)
9 x,y=np.meshgrid(x,y)
10
11 z=np.sin(x**2+y**2)
12
13 h=ax.plot_surface(x,y,z,cmap=plt.cm.coolwarm)
14
15 ax.set_xlabel('x')
16 ax.set_ylabel('y')
17 ax.set_zlabel('z')
18
19 fig.colorbar(h)
```

# Учитавање података из датотеке

The screenshot shows a Python IDE interface with two main windows. On the left is the code editor window titled 'Editor - C:\Users\Olcan\Dropbox\Nastava\OOA\python\crtalice\_2d\_citanje\_iz\_fajla.py'. It contains the following Python code:

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 file = open('funkcija.txt', 'r')
4 x = []
5 y = []
6 for line in file:
7     s = line.split()
8     if (len(s)!=0):
9         x.append(float(s[0]))
10        y.append(float(s[1]))
11 file.close()
12
13 plt.figure()
14 plt.plot(x,y)
15 plt.xlabel('x')
16 plt.ylabel('y')
17
```

A blue rounded rectangle highlights the line `file = open('funkcija.txt', 'r')`. The line `plt.plot(x,y)` is highlighted with a pink rectangular background.

To the right of the code editor is a terminal window titled 'funkcija.txt - No...'. It displays the following data:

x	y
-5.0	25.0
-4.75	22.5625
-4.5	20.25
-4.25	18.0625
-4.0	16.0
-3.75	14.0625
-3.5	12.25
-3.25	10.5625
-3.0	9.0
-2.75	7.5625
-2.5	6.25
-2.25	5.0625
-2.0	4.0
-1.75	3.0625
-1.5	2.25
-1.25	1.5625
-1.0	1.0
-0.75	0.5625
-0.5	0.25
-0.25	0.0625
0.0	0.0
0.25	0.0625
0.5	0.25
0.75	0.5625
1.0	1.0
1.25	1.5625
1.5	2.25
1.75	3.0625
2.0	4.0
2.25	5.0625
2.5	6.25
2.75	7.5625

Below the terminal window is a plot of a parabola opening upwards, centered at the origin (0,0). The x-axis ranges from -5 to 5, and the y-axis ranges from 0 to 25. The curve passes through points such as (-5, 25), (-4, 16), (-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), and (4, 16).

# Пример минимизације оптимизационе функције

The screenshot shows a Python IDE interface with a code editor and a plot window.

**Code Editor:**

```
File Edit Search Source Run Debug Consoles Projects Tools View Help
Editor - C:\Users\Olcان\Dropbox\Nastava\IOA\prezentacije 2019\primer2.py
primer2.py

1 from scipy.optimize import minimize
2
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import numpy as np
5
6 def fun(x):
7     """Rosenbrock function"""
8     return (1-x[0])**2.0+100*(x[1]-x[0]**2)**2
9
10 x=np.arange(-2,2,0.11)
11 y=np.arange(-1,3,0.11)
12 x,y=np.meshgrid(x,y)
13
14 z=np.log10(fun([x,y]))
15
16 h=plt.contourf(x,y,z)
17 plt.scatter(1.0,1.0,facecolor='red')
18 plt.xlabel('x')
19 plt.ylabel('y')
20 plt.colorbar(h)
21 print(fun([1,1]))
22
23 x0 = np.array([0,0])
24 res = minimize(fun, x0, method='Nelder-Mead', options={'ftol':1e-10,'disp':True,'maxfev':1e4})
25 xmin = np.array(res.x)
26 print('xmin=(',xmin[0],xmin[1],')')
```

**Plot Window:**

The plot shows a contour map of the Rosenbrock function. The x-axis ranges from -2.0 to 1.5, and the y-axis ranges from -1.0 to 2.5. A color bar on the right indicates function values from -1.6 (dark purple) to 4.0 (yellow). A red dot marks the minimum at approximately (1.0, 1.0), which is labeled "МИНИМУМ" (Minimum) with a red arrow.

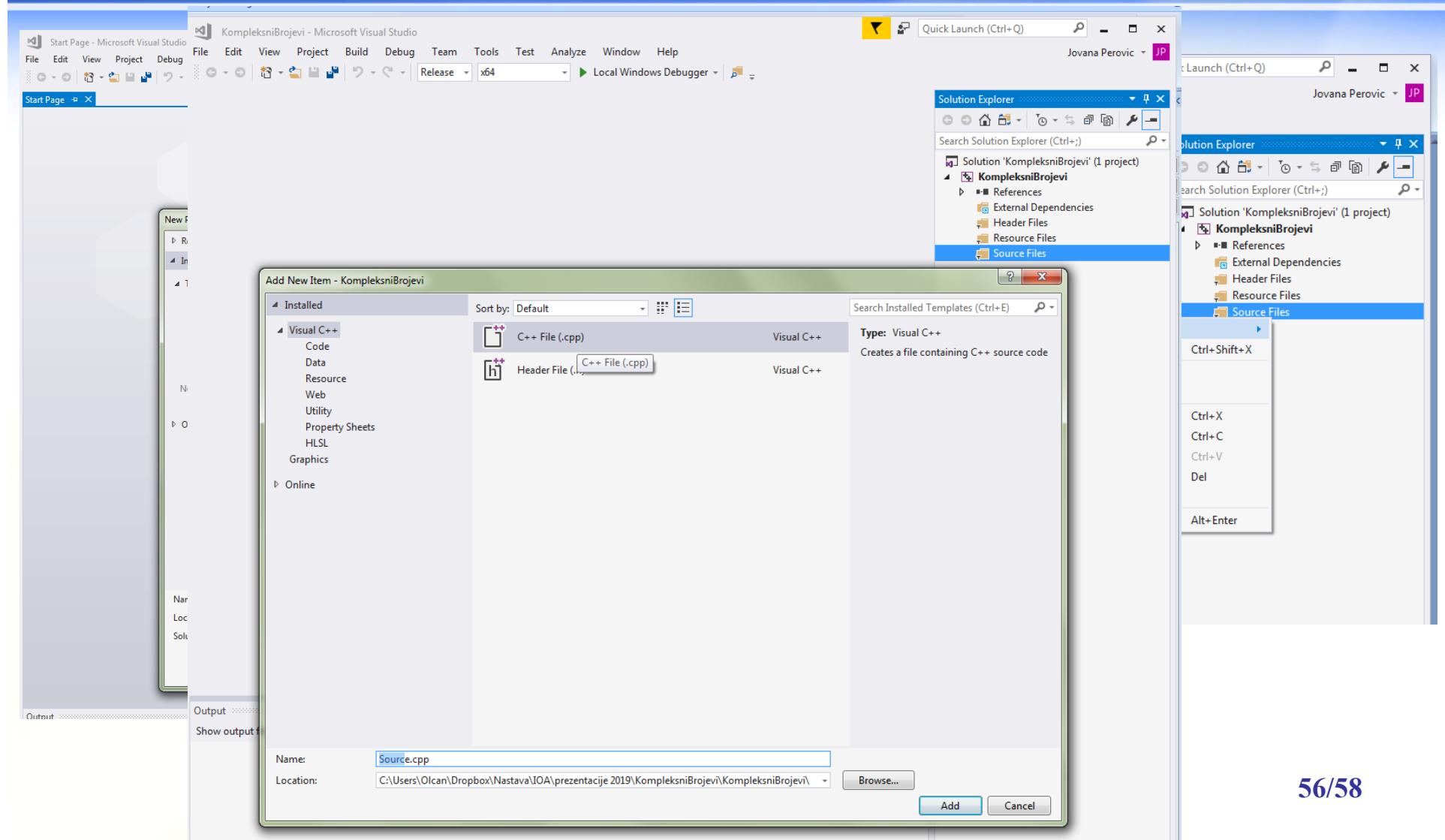
**Output Window:**

```
Optimization terminated successfully.
Current function value: 0.000000
Iterations: 79
Function evaluations: 146
xmin = ( 1.0000043858986165 , 1.0000106409916478 )
```

55/58

# Visual Studio 2017

## Отварање проекта



# Рад са комплексним бројевима

The screenshot shows the Microsoft Visual Studio interface with a project named "KompleksniBrojevi". The code editor displays "Source.cpp" with the following content:

```
#include <stdio.h>
#include <iostream>
#include <complex>

using namespace std;

void main()
{
    //imaginarna jedinica
    complex<double> i;
    i.real(0.0);
    i.imag(1.0);

    complex<double> z1, z2, add, prod, div;
    double re, im;
    scanf_s("%lf %lf", &re, &im);
    z1.real(re);
    z1.imag(im);
    scanf_s("%lf %lf", &re, &im);
    z2.real(re);
    z2.imag(im);
    add = z1 + z2;
    prod = z1*z2;
    div = z1 / z2;
    printf("zbir: (%.2f, %.2f)\n", real(add), imag(add));
    printf("proizvod: (%.2f, %.2f)\n", real(prod), imag(prod));
    printf("kolicnik: (%.2f, %.2f)\n", real(div), imag(div));
    system("pause");
}
```

A green box highlights the first four lines of the code. A blue rounded rectangle highlights the entire code block from the first four lines to the end of the main function.

The output window shows the results of the program execution:

```
1
2
-2
5
zbir: <-1.00, 7.00>
proizvod: <-12.00, 1.00>
kolicnik: <0.28, -0.31>
Press any key to continue . . .
```

# Уписивање у датотеку

KompleksniBrojevi - Microsoft Visual Studio

File Edit View Project Build Debug Team Tools Test Analyze Window Help

Source.cpp\* x

(Global Scope)

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <iostream>
3 #include <complex>
4
5 using namespace std;
6
7 double fun(double x1, double x2)
8 {
9     return pow((1.0 - x1), 2) + 100.0*pow((x1 - x2*x2), 2.0);
10 }
11
12 void main()
13 {
14     FILE* out;
15     fopen_s(&out, "Rozenbrok.txt", "w");
16     for (double x1 = -2.0; x1 <= 2.0; x1 += 0.01)
17         for (double x2 = -2.0; x2 <= 2.0; x2 += 0.01)
18         {
19             double y = fun(x1, x2);
20             fprintf(out, "% .5f % .5f % .5f\n", x1, x2, y);
21         }
22     fclose(out);
23     system("pause");
24 }
```