Недостаток схемы - усложнение структуры системы ур-ий (для центр. разности - N узлов, для двухточечной схемы - 2N узлов).

Метод Ричардсоновской интерполяции.

1) $h \quad h$

$$U_h = U_{точн} + k \cdot h^p + O(h^{p+1})$$

$U_j = U_h$

$$U_{2h} = U_{точн} + k(2h)^p + O(h^{p+1})$$

$$2^p \cdot U_h - U_{2h} = U_{точн}(2^p - 1) + O(h^{p+1})$$

$$\tilde{U}_{2h} = \frac{2^p \cdot U_h - U_{2h}}{2^p - 1} + O(h^{p+1});$$

$$p = 2 \Rightarrow O(h^3).$$

Семинар 12 (21.11.2024).

Численное решение нелинейных ур-ий.

1) $F(x) = 0$.

Методом простой итерации.

(1)

Пусть x^* - корень ур-ия, $x^* \in [a; b]$.
Выделим $x = f(x)$, $x^0 \in [a; b]$.

$x^{n+1} = f(x^n)$.

$|x^n - x^*| < \varepsilon$; x^n - прибл. решение, полученное с помощью ε.

критерий конца x^n

x^* трудно определить $\Rightarrow |x^{n+1} - x^n| < \varepsilon$

Дост. условие сх-ти МПИ:

$\max\limits_{x \in [a; b]} |f'(x)| \leq q < 1$

$|x^{n+1} - x^*| < q^n \cdot |x^0 - x^*|$.

$x^n = f(x^{n-1})$, $x^{n+1} = f(x^n)$.

$\Rightarrow f(x^n) - f(x^{n-1}) = f'(\xi) \cdot (x^n - x^{n-1})$.

---

2) $\tau \cdot F(x) = 0$
$x + \tau F(x) = 0 + x$

$x^{n+1} = \underbrace{x^n - \tau F(x^n)}_{f(x)}$; $\Rightarrow \begin{cases} |f'(x)| \le q < 1 \\ |1 - \tau F'(x)| \le q < 1. \end{cases}$

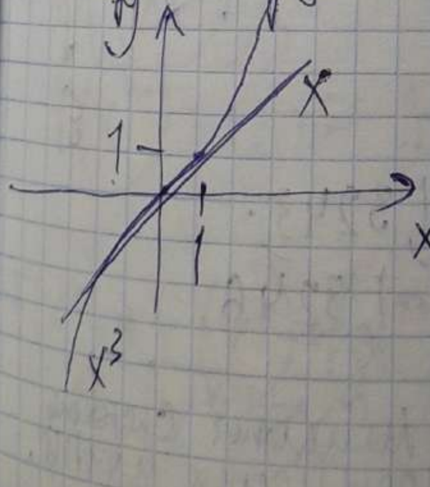
$-1 < 1 - \tau F'(x) < 1$; $\tau F'(x) > 0$

$\tau F'(x) > -2$; $F'(x) < \frac{2}{\tau}$; $\tau_{opt} = \frac{2}{m+M}$;

$m = \min\limits_{[a;b]} |F'(x)|$; $M = \max\limits_{[a;b]} |F'(x)|$

Пр. 1. $x^3 - x + 1 = 0$, МПИ с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-2}$; $\varepsilon_2 = 10^{-3}$

а) Пусть $x = x^3 + 1 \Rightarrow f(x) = x^3 + 1$.
Нужно определить $[a; b]$ - графически.



$\Rightarrow [a; b] = [2; -1]$.

$f'(x) = 3x^2$

$f'(-2) = 12 > 1$

$\cancel{x^3 = x+1}$

$x^3 = x-1$;

$x = \sqrt[3]{x-1}$; $|f'(x)| = \left|\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\right| =$

$= \left|\frac{(-3)^{-\frac{2}{3}}}{3}\right| < 1$;

$|f'(x)|_{x=-1} = \left|\frac{(-2)^{-\frac{2}{3}}}{3}\right| < 1$

б) Пусть $x^0 = -1$, $x^{n+1} = \sqrt[3]{x^n - 1}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

n	0	1	2	3	4	5
x^n	-1	$-1{,}2599$	$-1{,}3123$	$-1{,}3223$	$-1{,}3243$	$-1{,}3246$
$\lvert x^n - x^{n-1}\rvert$		$0{,}2599$	$-0{,}0524$	$0{,}01$	$0{,}002$	$0{,}0003$
					ε_1	ε_2

$x_1^* = -1{,}3243$.

$x_2^* = -1{,}3246$.

Всего лишь линейная скорость сходимости у МПИ.

2) Опр. 1. Метод обладает линейной сходимостью, если $\exists \alpha \in (0;1)$:
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \to \|x^n - x^*\| < \alpha \cdot \|x^{n-1} - x^*\|.$

Опр. 2 Метод обладает сходимостью степени β, если $\exists \alpha \in (0;1]$:
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \to \|x^n - x^*\| < \alpha \left(\|x^{n-1} - x^*\|\right)^\beta.$

Метод Ньютона.

1) $f(x) = 0$ $\quad (1)$

Пусть x^n - n-ое приближение к решению (1).

$x^{n+1} = x^n + \Delta x^n;$

$f(x^{n+1}) = f(x^n + \Delta x^n) = f(x^n) + f'(x_n) \cdot \Delta x^n + O\left((\Delta x^n)^2\right);$

$$f(x^{n+1}) = 0 \Rightarrow f(x^n) + f'(x^n) \cdot \underbrace{\Delta x^n}_{x^{n+1} - x^n} = 0.$$

$$f(x^n) + f'(x^n) \cdot (x^{n+1} - x^n) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}}, \quad x^0 \in [a;b]; \quad x^* \in [a;b]$$

7. (О квадратичной сходимости метода Ньютона). Вдали линейная.

Пусть $f(x)$ определена на $|x-a|<r,\ r>0$, и выполнены условия:

1) $f(x) \in C^2(a-r;\ a+r)$;

2) Для $\forall$ точек интервала $|x-a|<r$, $f'(x)\neq 0$ и $\exists$ конечные значения $M_1 = \sup|[f'(x)]^{-1}|$, $N_2 = \sup|f''(x)|$;

3) Ур-ие $f(x)=0$ имеет корень x^*;

тогда $\forall x^0: |x^0-x^*| < \frac{2}{M} = \frac{2}{M_1 \cdot N_2}$ и итерационный процесс сх-ся к x^*, причём

$$|x^n-x^*| \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{2^n-1} \cdot |x^0-x^*|^{2^n}$$

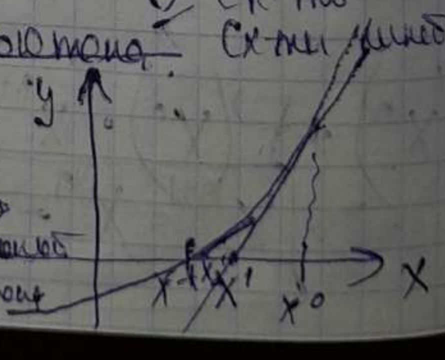
— квадратичная скорость сходимости вблизи корня.

2) Также есть упрощённый метод Ньютона.

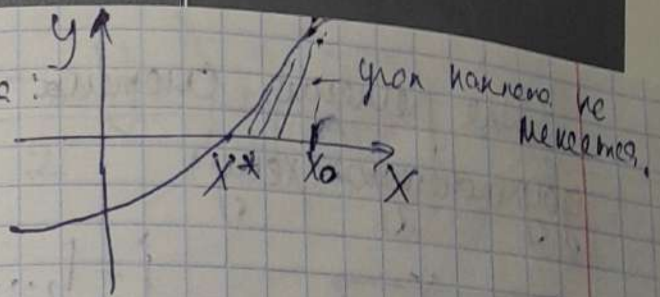
1) Упрощённый метод Ньютона: ск-ть сх-ти линейная

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^0)}$$

$\rightarrow$ оригинальный м. Ньютона



Хорош. т. Ньютона:

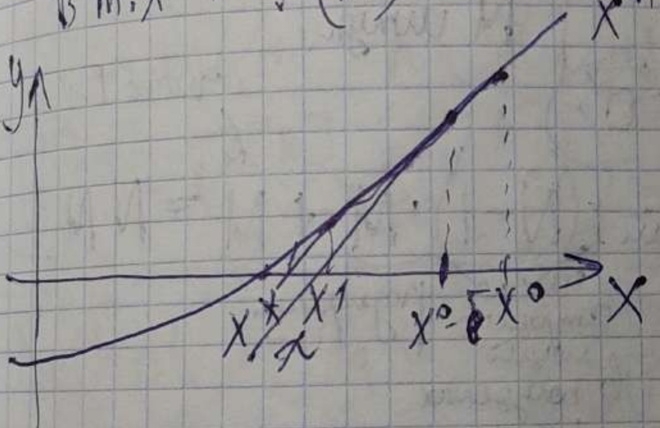


② Метод секущих.

$f'(x^n)$ в т. x^0: $f'(x^0) = \frac{f(x^0) - f(x^0 - \delta)}{\delta}$

δ - малая величина > 0

в т. x^n: $f'(x^n) \approx \frac{f(x^n) - f(x^{n-1})}{x^n - x^{n-1}}$



Ск-ть сх-ти $\sim \frac{3}{2}$.

Лекция 13 (28.11.2024)

~~Метод конечного элемента (метод Галеркина)~~, метод конечного объёма

1) $\vec{F}(x, \vec{U}, \vec{U}_x) = \vec{0}$, $x \in [a; b]$ — система функций.

Гр. у.: $\vec{\Phi}_a(\vec{U}) = \vec{0}$

$\vec{\Phi}_b(\vec{U}) = \vec{0}$.

$\dim \vec{F} = \dim \vec{\Phi}_a + \dim \vec{\Phi}_b = M$.

Новая тема – [illegible] ур-ий.

1) $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$

Ур-ия Н.-Ст. в 10^9 узлах: $10^9 \times 5$ переменных $= 5 \cdot 10^9$.

Семинар 13 (28.11.2024)

1) Т. (Достаточное условие сх-ти метода Ньютона)

Пусть выполнены 4 условия:

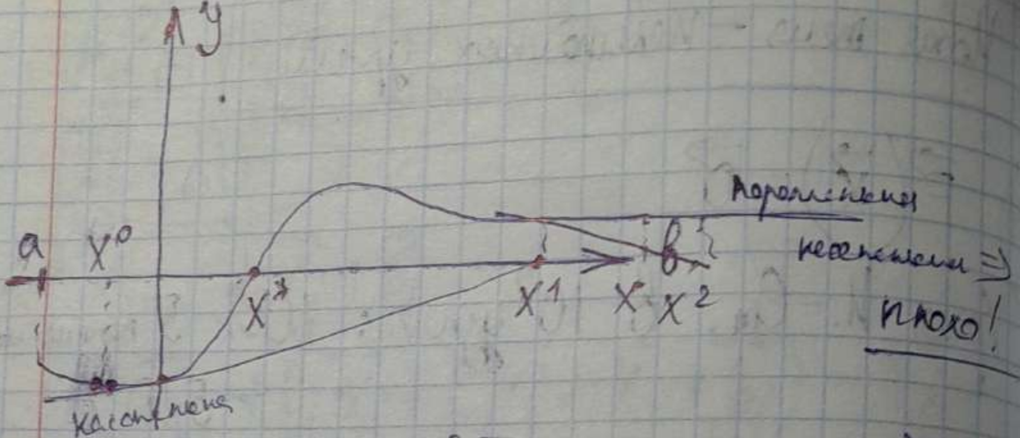
1) ф-ия $f(x)$ определена на $[a;b]$ и $\in C^2[a;b]$;

2) $[a;b]$ принадлежит только один простой корень, причём $f(a) \cdot f(b) < 0$;

3) $f'(x)$, $f''(x)$ на $[a;b]$ сохраняют знак, и $f'(x) \neq 0$;

4) Начальное приближение x^0: $f(x^0) \cdot f''(x^0) > 0$.

Тогда с помощью метода Ньютона можно вычислить корень ур-ия $f(x) = 0$ с $\forall$ точностью.



⇒ важно верно выбрать начальное приближение.

Задача 1.

$x^3 - x + 1 = 0$ — 3 методами:

а) Ньютона, б) упрощённым методом Ньютона, в) методом секущих с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

а) $x^* \in [-2; -1]$,

$x^0 = -2$.

$f'(x) = 3x^2 - 1$; $f''(x) = 6x$.

$f(-2) \cdot f''(-2) = -5 \cdot (-12) > 0$,

$f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на $[-2; -1]$.

$f(a=-2) < 0; \quad f(a=-1) > 0$

также $x^{n+1} = x^n - \dfrac{f(x^n)}{f'(x^n)} = x^n - \dfrac{(x^n)^3 - x^n + 1}{3(x^n)^2 - 1};$

$x^0 = -2.$

n	0	1	2	3	4	5
x^n	-2	$-1,5454$			$-1,32$	$-1,3247$
$\lvert x^n - x^{n+1}\rvert$		$0,454545$			$0,00102$	10^{-6}

— следствие квадратичной сх-ти.

$x^* \approx -1,324718 \ (n=5).$

б) $x^{n+1} = x^n - \dfrac{(x^n)^3 - x^n + 1}{3(x^0)^2 - 1}.$

$x^0 = -2.$

$\Rightarrow x^{n+1} = x^n - \dfrac{(x^n)^3 - x^n + 1}{11}.$

$x^* \approx -1,3259 \ (n=11) \Rightarrow$ сходимость замедляется.

в) Метод секущих. $x^0 = -2.$

$\delta = 0,1$ – так выбрали δ.

$$f'(x^0) = \frac{f(-2) - f(-2,1)}{0,1} \approx 11,61.$$

$$x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} = -1,56934$$

$x^* \approx -1,32472$ $(n=6)$ => сх-ть немного хуже, чем у метода Ньютона, но выше линейной.

Системы нелинейных ур-ий.

I МПИ

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{f}(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x}^{n+1} = \vec{f}(\vec{x}^n).$$

Т. (Достаточное условие сх-ти МПИ)

Пусть область Ω – выпуклая область, а компонента $f_i(\vec{x})$ имеют равномерно непре-

...рывные производные 1-го порядка в Ω.

Пусть норма матрицы Якоби $\|F'_J\| = \left\|\frac{d\vec{F}}{d\vec{x}}\right\| =$

$$= \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

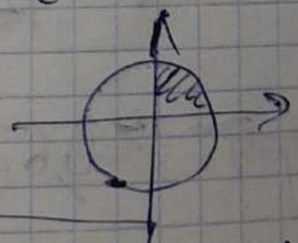
— норма не превосходит q, $0<q<1$ $\forall \vec{x} \in \Omega$.

$\Rightarrow$ МПИ сх-ся к решению нелинейной системы. $\|J\| \le q < 1$.

Задача 2. $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\begin{cases} 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0 \\ x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

— найти корни системы из I-го квадранта с $\varepsilon = 10^{-3}$.



1) $x_1 = \sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}} = F_1(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{x_2+5}{4\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{x_1}{4\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}};$$

$$x_2 = \sqrt{x_1 + 3\lg x_1} = F_2(x).$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{1+\frac{3\lg e}{x}}{2\sqrt{x_1+3\lg x_1}}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0.$$

Графически обнаружено, что $x^0 \in \cancel{(2,2;\ 3,5)}\ (3,5;\ 2,2)$.

$$\Rightarrow \Omega = \{|x_1-3,5| \le 0,5;\ |x_2-2,2| \le 0,5\}.$$

2) $$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right| \le \frac{2,7+5}{4\sqrt{\frac{3\cdot(1,7+5)-1}{2}}} =$$

$6,7\cdot 3 =$
$= 20,1$

$$= \frac{7,7}{4\sqrt{\frac{19,1}{2}}} \approx 0,623;$$

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right| = \frac{4}{4\sqrt{\frac{3\cdot(1,7+5)-1}{2}}} \approx 0,324;$$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right| = \frac{1+\frac{3\lg e}{3}}{2\sqrt{3+3\lg 3}} \approx 0,35,$$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right| = 0.$$

$$\Rightarrow \|J\| = \left\| \begin{matrix} 0,623 & 0,324 \\ 0,35 & 0 \end{matrix} \right\|^{\text{норм}} =$$

$$= \left(\begin{matrix} \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right| = 0,947 < 1 \\ \left|\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right| = 0,35 < 1 \end{matrix} \right).$$

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_1^n \cdot (x_2^n + 5) - 1}{2}} \\ x_2^{n+1} = \sqrt{x_1^n + 3\lg x_1^n} \end{cases}$$

При $n=4$: $x^* = (3,4857; 2,2608)$.

~~Задача №3.2~~ Метод Ньютона.

$$\vec{X}^{n+1} = \vec{X}^{n} - J^{-1}(\vec{X}^{n}) \cdot \vec{F}(\vec{X}^{n}),$$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}} \quad J = \frac{d\vec{F}}{d\vec{X}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

Задача 3. Решить с $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \end{cases}$$ — Запрограммировать.

$$\vec{x}_1^{*} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2^{*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Пусть $\vec{X}^{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Лекция 14 (05.12.2024).

Решение систем нелинейных ал. ур-ий.

1) $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu$$