1 Spisak pitanja za usmeni dio ispita

1. Teorija brojeva.

   (a) Neka je $a \in \mathbb{N}$ i $b \in \mathbb{Z}$ dokazati da postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $b = aq + r$ i $0 \leq r < a$.

   (b) Neka su a i b prirodni brojevi. Dokazati da postoje cijeli brojevi x i y takvi da je $(a, b) = ax + by$.

   (c) Dokazati da razlomak $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ne može da se skrati ni za jedan prirodan broj n.

   (d) Navesti i dokazati teoremu o Euklidovom algoritmu.

   (e) Odrediti x i y tako da je $361x + 418y = (361, 418)$.

   (f) Navesti i dokazati osnovnu teoremu aritmetike.

   (g) Pokazati da za uzajamno proste brojeve m i n vrijedi

   $$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n).$$

   (h) Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ pokazati da je

   $$\sigma(n) = \frac{1 - p_1^{\alpha_1}}{1 - p_1} \cdots \frac{1 - p_k^{\alpha_k}}{1 - p_k}.$$

   (i) Dokazati da je skup prostih brojeva beskonačan.

   (j) Navesti i dokazati malu Fermatovu teoremu.

   (k) Ako je p prost broj veći od 3, dokazati da $6p | ab^p - a^p b$.

   (l) Neka je p prost broj veći od 2 i p ne dijeli a. Pokazati da je jedan i samo jedan od brojeva

   $$A = a^{1+2+\cdots+(p-1)} - 1, B = a^{1+2+\cdots+(p-1)} + 1,$$

   djeljiv sa p.

   (m) Definisati potpuni (svedeni) sistem ostataka po modulu m.

   (n) Neka je $(a, m) = 1$ i neka je $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ proizvoljan potpuni (svedeni) sistem ostataka po modulu m. Dokazati da je $\{a\alpha_1, a\alpha_2, \ldots, a\alpha_k\}$ potpuni (svedeni) sistem ostataka po modulu m.

   (o) Definisati Eulerovu funkciju i dokazati da je multiplikativna.

   (p) Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi

   $$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

   (q) Ako je $(a, m) = 1$ onda je

   $$a^{\varphi(m)} \equiv 1 (mod m).$$

   Dokazati.

   (r) Naći sve proste brojeve p za koje je broj $5^{p^2} + 1$ djeljiv sa p^2.

   (s) Formulisati i dokazati teoremu o kineskim ostacima.

   (t) Odrediti najmanji prirodan boj x za koji je

   $$x \equiv 5 (mod 17)$$

   $$x \equiv 7 (mod 11)$$

   $$x \equiv 3 (mod 13).$$

2. Funkcije generatrise.

   (a) Definisati funkciju generatrisu i eksonencijalnu funkciju generatrisu i navesti pravila jednakosti, zbira, proizvoda (konvolucije).

(b) Odrediti FG za sljedeće nizove :
(a) $1, 1, 1, \ldots,$ (b) $0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

(c) Na koliko se načina mogu 24 jabuke podijeliti između četvero djece tako da za svako dijete dobije barem 3, ali ne više od 8 jabuka.

(d) Definisati particiju $p(n)$ broja n i odrediti funkciju generaterisu niza $\{p(n)\}$.

(e) Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj njegovih particija na neparne dijelove jednak broju particija na različite dijelove.

(f) Dokazati: Za broj particija $p(n), n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$p(n) < e^{\left(\frac{\pi^2}{6}+1\right)\sqrt{n}}.$$

(g) Hanojske kule.

(h) Steinerov problem.

(i) Fibonaccijevi brojevi.

(j) Problem dijagonalnih triangulacija.

(k) Neka je $a_0 = 1, b_0 = 0$ i

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Odrediti a_n i b_n.

(l) Problem dearanžmana.

(m) Kompozicijski inverz.

3. Grafovi.

(a) Definisati graf. Opisati grafove W_n, $C?n$ i K_n.

(b) Definisati podgraf graf i izomorfizam grafova.

(c) Definisati matrice susjedstva i incidencije.

(d) Definisati samokomplementaran graf.

(e) Ako je $G = (V, E)$ samokomplementaran graf sa n čvorova, tada je $n \equiv 0(\mod 4)$ ili $n \equiv 1(\mod 4)$. Dokazati.

(f) Definisati stepen čvora. Pokazati da vrijedi

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

(g) Neka je graf $G = (V, E)$ takav da je $|V| = n$ i $|E| = m$ i neka je $k = \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$. Dokazati da postoji čvor grafa G takav da je $\delta(v) \geq k$.

(h) Pokazati da se izostavljanjem čvora sa maksimalnim stepenom ne povećava srednja vrijednost stepena čvorova.

(i) Pokazati da u svakom grafu postoje dva čvora istog stepena.

(j) Definisati šetnju, put, ciklus i acikličan graf.

(k) Definisati komponente povezanosti i povezan graf.

(l) Ako je u grafu sa n čvorova broj grana veći od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, dokazati da je graf povezan.

4. Diskretna vjerovatnoća.

(a) Definisati prostor elementarnih događaja i slučajan događaj.

(b) Definisati σ-polje događaja.

(c) Definisati vjerovatnoću.

(d) Navesti i dokazati osnovne osobine vjerovatnoće.

(e) Konačan prostor vjerovatnoća. U nekom razredu ima 25 učenika. Njih 10 uči engleski, 12 francuski, 16 njemački, 6 učenika uči engleski i francuski, 7 uči engleski i njemački i 5 uči francuski i njemački. Na slučajan način biramo jednog učenika. Kolika je vjerovatnoća da on uči sva tri jezika.

(f) Geometrijska definicija vjerovatnoće. Prijatelji se dogovore da se nađu između 12 i 13 časova na ugovorenom mjestu i da čekaju jedan drugoga 20 minuta. Kolika je vjeovatnoća da će doći do susreta?

(g) N lica izmješaju svoje šešire i nasumice stavljaju na glavu po jedan šešir. Naći vjerovatnoću da bar jedno lice stavi svoj šešir na svoju glavu. Čemu teži ta vjerovatnoća kada broj lica i šešira neograničeno raste?

(h) Definisati uslovnu vjerovatnoću, nezavisnost događaja u parovima i nezavisnost u cjelini.

(i) Ako su događaji A i B nezavisni onda su takvi i A i B^C, A^C i B i A^C i B^C. Dokazati.

(j) Definisati hipoteze. Navesti i dokazati formulu potpune vjerovatnoće. U prvoj kutiji se nalazi 10 bijelih i 10 crnih kuglica, a u drugoj kutiji se nalazi 8 bijelih i 10 crnih kuglica. Iz prve kutije se u drugu prebace dvije kuglice, pa se nakon toga iz te kutije bira kuglica. Kolika je vjerovatnoća da se iz druge kutije izabere bijela kuglica?

(k) Navesti i dokazati Bayesovu formulu. Prilikom prijema niza impulsnih kodnih kombinacija, koje se sastoje od 0 i 1 utvrđeno je da se iz svakih 10 jednako vjerovatnih kombinacija, 3 obrazuju kombinacijom 001, 5 kombinacijom 01 i 2 kombinacijom 011. Kolika je vjerovatnoća da će jedan primljeni impuls biti oblika 0?

(l) Definisati Bernulijevu šemu. Odrediti najvjerovatniji broj pojavljivanja događaja u Bernulijevoj šemi sa n ponavljanja vjerovatnoćom p.

(m) Puasonova raspodjela.

(n) Lokalna i integralana Muavr-Laplasova teorema.