Нелинейна оптимизация

„Множител на Лагранж“

Описание на метода и стъпките, с които се реализира:

- Този метод ни позволява да намираме максимум или минимум на функция на много променливи $\mathbf{f(x_1,\ldots,x_n)}$ при някакво ограничение на входните стойности.
- Ограничението е от тип равенство $\mathbf{g(x_1,\ldots, x_n) = c}$, където **“g”** е друга функция със същите аргументи като **“f”**, а **“c”** е константа.

- Основната идея е да намерим точките, където контурните линии на **“f”** и **”g”** се допират една до друга.
В тези точки векторите на $\nabla \mathbf{f}$ и $\nabla \boldsymbol{g}$ са перпендикулярни на двете контурни линии.
Насочени са в едно направление и реално съвпадат като са пропорционални един на друг.
Следователно тяхното приравняване налага и въвеждането на нова константа **λ**.
λ – Множител на Лагранж
$\boldsymbol{\nabla f = \lambda \nabla g}$
Градиентите са частни производни на функциите по всеки от аргументите им, от където ще получим система с **“n”** уравнения.
Към нея ще добавим самото ограничение, за да допълним до система с равен брой уравнения и неизвестни, тоест **“n + 1”**.
След като решим системата ще получим различни стойности за търсените променливи на функцията $\mathbf{f(x_1,\ldots,x_n)}$.
Замествайки с различните комбинации от променливи във функцията ще получим различни решения, което от тях даде най-висока (най-ниска) стойност, ще бъде търсеният от нас максимум (минимум).

- Всички уравнения от системата в предната точка могат да бъдат капсулирани в едно единствено, което изглежда така:

  $\mathbf{\nabla L}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$

  Функцията **L** се нарича „Лагранжиан“ и има следният вид:

  $$\mathbf{L}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}, \boldsymbol{\lambda}) = \\ = \mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}) - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{g}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}) - \boldsymbol{c})$$

- Забележка: В някои източници може да срещнете **λ** с противоположен знак:

  $$\mathbf{L}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}, \boldsymbol{\lambda}) = \\ = \mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}) + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{g}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}) - \boldsymbol{c})$$

  Това не води до никаква разлика по отношение решаването на проблема, но го имайте в предвид.

- Възможно е да са зададени и повече от едно ограничения, **“m”** на брой. В този случай се въвеждат и толкова на брой константи **λ**.

  Тогава функцията **L** ще придобие следният вид:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}, \boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_m}) = \\ = \mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}) - \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{m}} \boldsymbol{\lambda_k}\,(\mathbf{g_k}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}) - \boldsymbol{c_k})$$

„Условия на Каруш – Кун – Такър (ККТ) за оптималност“

- Тези условия позволят използването на ограничения от тип неравенство:
  $\boldsymbol{l_i(x) \leq c_i, (i = 1, \dots, m)}$
  $\boldsymbol{l_i(x) - c_i \equiv h_i(x)}$
  $\boldsymbol{=> h_i(x) \leq 0}$

  Те обобщават метода на Лагранж, който е само за ограничения от тип равенство.

- Проблем за нелинейна оптимизация:
  Намерете ***min / max f(x)*** при ограничения
  $\boldsymbol{h_i(x) \leq 0, (i = 1, \dots, m)}$, където
  целевата функция ***f:*** $\boldsymbol{R^n \to R}$ и ограниченията
  $\boldsymbol{g_i}$***:*** $\boldsymbol{R^n \to R}$ са дефинирани и непрекъснато диференцируеми функции.

- **Необходими условия**
  Нека точка ***x**** е локален оптимум на поставения проблем. Тогава съществуват константи
  $\boldsymbol{\mu_i\ (i = 1, \dots, m)}$, наричани ККТ множители, такива че следните условия да бъдат изпълнени:

1) **За *min f(x)*:**

$$\boldsymbol{\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0}$$

За *max f(x)*:

$$\boldsymbol{\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0}$$

2) $\boldsymbol{\mu_i h_i(x^*) = 0, \forall\, i}$
3) $\boldsymbol{h_i(x^*) \leq 0, \forall\, i}$
4) $\boldsymbol{\mu_i \geq 0, \forall\, i}$

- **Достатъчни условия**

  Нека $(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{\mu_1}, \dots, \boldsymbol{\mu_m})$ удовлетворяват условията (1) – (4). Нека $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g_i}(\forall\, \boldsymbol{i})$ са диференцируеми изпъкнали функции. Тогава точката $\boldsymbol{x^*}$ е глобален оптимум на поставения проблем.

Използвани източници:

- ✓ Wikipedia: Lagrange multiplier & KKT conditions
- ✓ Khan Academy: Lagrange multiplier
- ✓ YouTube: KKT optimality conditions

Реализация на алгоритъма чрез “Gekko library”

1) Инсталиране на библиотеката:

!pip install gekko

2) Импортване:

from gekko import GEKKO

3) Създаване и инициализация на обект, посредством който използваме библиотеката:

n = GEKKO()

4) Създаване на променливи (Търсените оптимизирани параметри на заема):

- ✓ **x1 = n.Var(loanAmount0, 200.0, 160000.0)**

loanAmount0 – Начална стойност т.е. в нашият случай желаната сума от клиента

200.0 – Долна граница

160000.0 – Горна граница

- ✓ **x2 = n.Var(loanPeriod0, 2.0, 60.0)**

loanPeriod0 – Начална стойност т.е. в нашият случай желаният период на изплащане (месеци) от клиента

2.0 – Долна граница

60.0 – Горна граница

5) **n.Equation(predictedGood0 - par[0] * loanAmount0 - par[1] * loanPeriod0 + par[0] * x1 + par[1] * x2 >= cutOff)**

В скора се заместват получените нови оптимизирани параметри на заема на мястото на старите - исканите от клиента. В случай, че неравенството е изпълнено т.е. новият скор не е по-малък от граничния, на клиента се предлагат новите параметри на заема. Ако не е изпълнено библиотеката хвърля грешка т.е. няма решение.

6) Целева функция:

n.Obj(φ)

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{a} * \left(\frac{\boldsymbol{x1 - loanAmount0}}{\boldsymbol{loanAmount0}}\right)^{2} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{a}) * \left(\frac{\boldsymbol{x2 - loanPeriod0}}{\boldsymbol{loanPeriod0}}\right)^{2}$$

7) Решаване на задачата:

n.solve(disp=False)

8) За достъпване на оптимизираните стойности се използват:

x1.value[0]

x2.value[0]