Нелинейна оптимизация

„Множител на Лагранж“

Описание на метода и стъпките, с които се реализира:

- Този метод ни позволява да намираме максимум или минимум на функция на много променливи $\mathbf{f(x_1,\dots,x_n)}$ при някакво ограничение на входните стойности.
- Ограничението е от тип равенство $\mathbf{g(x_1,\dots, x_n) = c}$, където **“g”** е друга функция със същите аргументи като **“f”**, а **“c”** е константа.

- Основната идея е да намерим точките, където контурните линии на **“f”** и **”g”** се допират една до друга.
  В тези точки векторите на $\nabla \mathbf{f}$ и $\nabla \boldsymbol{g}$ са перпендикулярни на двете контурни линии. Насочени са в едно направление и реално съвпадат като са пропорционални един на друг. Следователно тяхното приравняване налага и въвеждането на нова константа **λ**.
  λ – Множител на Лагранж
  $\nabla \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\lambda} \nabla \boldsymbol{g}$
  Градиентите са частни производни на функциите по всеки от аргументите им, от където ще получим система с **“n”** уравнения. Към нея ще добавим самото ограничение, за да допълним до система с равен брой уравнения и неизвестни, тоест **“n + 1”**.
  След като решим системата ще получим различни стойности за търсените променливи на функцията $\mathbf{f(x_1,\ldots,x_n)}$.
  Замествайки с различните комбинации от променливи във функцията ще получим различни решения, което от тях даде най-висока (най-ниска) стойност, ще бъде търсеният от нас максимум (минимум).

- Всички уравнения от системата в предната точка могат да бъдат капсулирани в едно единствено, което изглежда така:

  $$\mathbf{\nabla L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0}$$

  Функцията **L** се нарича „Лагранжиан“ и има следният вид:

  $$\mathbf{L(x_1, \dots, x_n, \lambda) =}$$
  $$\mathbf{= f(x_1, \dots, x_n) - \lambda(\boldsymbol{g}(x_1, \dots, x_n) - \boldsymbol{c})}$$

- <u>Забележка</u>: В някои източници може да срещнете **λ** с противоположен знак:

  $$\mathbf{L(x_1, \dots, x_n, \lambda) =}$$
  $$\mathbf{= f(x_1, \dots, x_n) + \lambda(\boldsymbol{g}(x_1, \dots, x_n) - \boldsymbol{c})}$$

  Това не води до никаква разлика по отношение решаването на проблема, но го имайте в предвид.

- Възможно е да са зададени и повече от едно ограничения, **“m”** на брой. В този случай се въвеждат и толкова на брой константи **λ**.

  Тогава функцията **L** ще придобие следният вид:

$$\mathbf{L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) =}$$
$$\mathbf{= f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(g_k(x_1, \dots, x_n) - \boldsymbol{c_k}\right)}$$

„Условия на Каруш – Кун – Такър (ККТ) за оптималност“

- Тези условия позволят използването на ограничения от тип неравенство:
  $\boldsymbol{l_i(x) \leq c_i, (i = 1, \dots, m)}$
  $\boldsymbol{l_i(x) - c_i \equiv h_i(x)}$
  $\boldsymbol{=> h_i(x) \leq 0}$

  Те обобщават метода на Лагранж, който е само за ограничения от тип равенство.

- Проблем за нелинейна оптимизация:
  Намерете ***min / max f(x)*** при ограничения
  $\boldsymbol{h_i(x) \leq 0, (i = 1, \dots, m)}$

- **Необходими условия**
  Допускаме, че целевата функция $\boldsymbol{f: R^n \to R}$ и ограниченията $\boldsymbol{g_i: R^n \to R}$ са непрекъснато диференцируеми в точка ***x****. Нека точка ***x**** е локален оптимум на поставения проблем.
  Тогава съществуват константи
  $\boldsymbol{\mu_i\ (i = 1, \dots, m)}$, наричани ККТ множители, такива че:

1) **За *min f(x)*:**

$$\boldsymbol{\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0}$$

За *max f(x)*:

$$\boldsymbol{\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0}$$

2) $\boldsymbol{\mu_i h_i(x^*) = 0, \forall\, i}$
3) $\boldsymbol{h_i(x^*) \leq 0, \forall\, i}$
4) $\boldsymbol{\mu_i \geq 0, \forall\, i}$

- **Достатъчни условия**

  Нека $(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{\mu_1}, \dots, \boldsymbol{\mu_m})$ удовлетворяват условията (1) – (4). Нека $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g_i}(\forall\, \boldsymbol{i})$ са диференцируеми изпъкнали функции. Тогава точката $\boldsymbol{x^*}$ е глобален оптимум на поставения проблем.