**Задача 57.** Нека $\xi, \eta$ са независими случайни величини с разпределение $P(\xi = k) = P(\eta = k) = q^k p, k = 0, 1, \ldots, p > 0, p + q = 1$. Нека $\zeta = \max(\xi, \eta)$.

1. Да се намери разпределението на $\zeta$.

2. Да се намери разпределението на $\tau = (\zeta, \xi)$.

(57) $P(X=k)=P(Y=k)=q^k \cdot p$, $k=0,1,\dots$, $p>0$, $p+q=1$. Нека $Z=\max\{X,Y\}$

1. $P(Z=k)=?$

$$\mathbb{P}(\max\{X,Y\}=k)=\mathbb{P}(X=k,Y\le k)+\mathbb{P}(X<k,Y=k)=2.\mathbb{P}(X=k,Y<k)+\mathbb{P}(X=Y=k)$$
$$=2.q^k.p.\left(\sum_{i=0}^{k-1} q^i p\right)+q^{2k}.p^2$$
$$=2.q^k.p\,\frac{1-q^k}{1-q}+q^{2k}.p^2$$

~~2. $V=(Z,X)$~~

$P(Z\le k)=P(\max\{X,Y\}\le k)=\mathbb{P}(X\le k,Y\le k)=F_X(k)F_Y(X)$

$P(Z\le k)=(\mathbb{P}(X\le k)^2)=\left(\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\right)^2=\left(p.\frac{1-q^{k+1}}{1-q}\right)^2$

$\mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}(Z\le k)-\mathbb{P}(Z\le k-1)$

2. $V=(Z,X)$

~~$P(V\le k)$~~ $=\mathbb{P}$ $A=\mathbb{P}(Z=k, X=m)$

I сл.) $k<m \Rightarrow A=0$, защото $Z=\max\{X,Y\}$, $Z<X$ ↯

II сл. $k=m$

$P(Z=k,X=k)=P(Y\le k;X=k)=\mathbb{P}(Y\le k;X=k)=(q^0p+q^1.p+\dots+q^k.p)q^k.p=p.\frac{1-q^{k+1}}{1-q}.q^k.p$

III сл. $k>m$

$\mathbb{P}(Z=k,X=m)=\mathbb{P}(Y=k,X=m)=q^k.p.q^m.p=p^2.q^{m+k}$

→ Независими ли са? НЕ Пример: $\mathbb{P}(Z=0,X=1)=0$,
$\mathbb{P}(Z=0)\mathbb{P}(X=1)=(q^0.p)^2 q^1.p\neq 0$