Задача 49. Хвърлят се два зара. Нека случайната величина X е сумата от падналите се точки. Да се намери разпределението, очакването и дисперсията на X, ако заровете са

1. правилни;
2. $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(6) = 1/4, \mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}(5) = 1/8$.

Ще бъде ли необичайно, ако при хвърлянето на 1000 зара сумата е била повече от 3700?

Задача 50. От урна съдържаща 5 бели и 3 черни топки се избират последователно, една по една топки докато се появи бяла. Да се намери разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина X = "брой на изтеглените черни топки"при извадка

1. без връщане;
2. с връщане.

Опитът се повтаря 1000 пъти. Да се оцени вероятността да са извадени повече от 900 черни топки.

50 1. без връщане

$\mathbb{P}(X=0)=\frac{5}{8}$; $\mathbb{P}(X=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$; $\mathbb{P}(X=2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$; $\mathbb{P}(X=3)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	$\frac{35}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=0}^{3} k.p_i=1\frac{15}{56}+2\frac{5}{56}+3\frac{1}{56}=\frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[X^2]=\sum_{k=0}^{3} k^2.p_i=\frac{15}{56}+4.\frac{5}{56}+\frac{9}{56}=\frac{44}{56}=\frac{11}{14}$

$\mathbb{D}[X]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2=\frac{11}{14}-\frac{1}{4}=\frac{15}{28}$

$1000\,\mathbb{E}X=500$

$\mathbb{P}(X>900)\leq\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X|\geq 400)\leq\frac{\mathbb{D}X}{400^2}=\frac{535.7}{400^2}=0.003$ - неравенство на Чебишев.

2. $X\sim Ge\left(\frac{5}{8}\right)$

$\mathbb{P}(X=k)=\left(1-\frac{5}{8}\right)^k\frac{5}{8}$

$\mathbb{E}[X]=\frac{1-p}{p}=\frac{1-\frac{5}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{5}=\frac{3}{5}$

$\cancel{\mathbb{E}[X^2]}$ $\mathbb{D}[X]=\frac{1-p}{p^2}=\frac{\frac{3}{8}}{\left(\frac{5}{8}\right)^2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{8^2}{5^2}=\frac{24}{25}$

$1000\,\mathbb{E}X=600$

$\mathbb{P}(X>900)\leq\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X|\geq 300)\leq\frac{\mathbb{D}X}{300^2}=\frac{960}{300^2}=0.01$