Задача 125. *(К2, ВиС 2023)* Според компания за производство на чипове, само 1 на всеки 1000 чипа е неизправен.

1. Как бихте оценили вероятността от 100 чипа да има поне 1 неизправен чрез ЦГТ? Какви други начини бихте предложили?

[2] Забелязан от Newcomb в логаритмични таблици през 1881 и при по-голям набор от данни от Benford през 1934.

[3] Ако имате време, може да опитате да пресметнете вероятностите и за цифрите, по-големи от 1 и да сравните с разпределението на Бенфорд.

2. Неравенството на Бери-Есен гласи, че ако $X_1, \ldots, X_n$ са iid сл. вел. и

$$\mu := \mathbb{E}X_1, \sigma := \sqrt{DX}, \rho := \mathbb{E}\left(|X-\mu|^3\right) < \infty, Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

то

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}\left(Z_n \leq x\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{\rho}{2\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Как това може да е полезно при евентуално решение на 1.? При какви n, грешката при приближение чрез ЦГТ би била под 0.001, ако приемете че информацията, дадена от компанията е вярна?

125 1. $X_i \sim Ber\left(\frac{1}{1000}\right)$ $\mu = \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{1000}$ $\sigma = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{999}{1000^2}} \approx 0.0316$

$\bar{X} = X_1 + \ldots + X_{100}$. $Z \sim N(0,1)$

$$P(\bar{X} > 1) = P\left(\frac{\bar{X} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1 - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{1 - 100 \cdot \frac{1}{1000}}{0.0316 \cdot 10}\right) = P\left(Z > \frac{0.9}{0.316}\right) =$$

$$= P(Z > 2.85) \overset{ЦГТ}{\approx} \Phi^{-}(2.85) \approx 0.22\%$$

2. $$\rho = \frac{1}{1000} \cdot \left|1 - \frac{1}{1000}\right|^3 + \frac{999}{1000}\left|0 - \frac{1}{1000}\right|^3 =$$

$$= \frac{1}{1000}\left(\frac{999}{1000}\right)^3 + \frac{999}{1000} \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^3 = \frac{999^3 + 999}{1000^4} \approx 10^{-3}$$

Бере-Есеен дава оценка отгоре за грешката при използване на приближение чрез ЦГТ за $n = 100$:

$$\frac{\rho}{2\sigma^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}} = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \cancel{\frac{5.62}{10^3}} \approx \cancel{\frac{2.81}{10^6}}\ 178.02 \approx \frac{8.9}{10^3}$$

Ако искаме

$$\frac{\rho}{2\sigma^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}} < 0.001 \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{\rho\, 10^3}{2\sigma^{\frac{3}{2}}\cancel{10^3}} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{2\,\cancel{10^3}} \cdot \cancel{\frac{5.62}{10^3}}\ 178.02$$

$$= \sqrt{n} > \cancel{\frac{2.81}{10^3}}\ 89 \Rightarrow n > \cancel{\frac{7.9}{10^6}}\ 7922$$