Задача 99. Нека случайните величини $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ са независими. Да се намери плътността на случайната величина

1. $Y = \max(X_1, X_2)$;
2. $Y = \min(X_1, X_2)$.

(99) $X_1, X_2 \underset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$

1. $Y = \max(X_1, X_2)$

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) < y) = \mathbb{P}(X_1 < y, X_2 < y) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=}$

$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}(X_1 < y)\mathbb{P}(X_2 < y) = (1 - e^{-\lambda \cdot y})^2$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = 2(1 - e^{-\lambda y}) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y} = 2\lambda(1 - e^{-\lambda y}) \cdot e^{-\lambda y} \cdot \mathbb{1}_{\{y > 0\}}$

2. $Y = \min(X_1, X_2)$

$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y < t) = 1 - \mathbb{P}(Y > t) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > t) =$

$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)\mathbb{P}(X_2 > t) = 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 < t))^2 = 1 - (1 - F_{X_1}(t))^2$

$f_Y(t) = F_Y'(t) = -2(1 - F_{X_1}(t)) \cdot (-f_{X_1}(t)) = -2(\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\lambda t}) \cdot (-\lambda \cdot e^{-\lambda t})$

$= 2\lambda \cdot e^{-2\lambda t}$

$\Rightarrow Y = \min(X_1, X_2) \sim Exp(2\lambda)$