

Задача 87. Нека $X \sim U(0, 7)$ е времето на безотказна работа в години на даден апарат. Съгласно гаранцията на апарата, той ще бъде заменен с нов на петата година или преди това, в случай на дефект. Нека Y е времето до смяната на апарата. Да се пресметнат $P(Y < 4)$, EY и DY . Ако са продадени 1000 апарата, колко средно ще трябва да се подменят преди петата година?

87) $X \sim U(0, 7)$ = время жуба

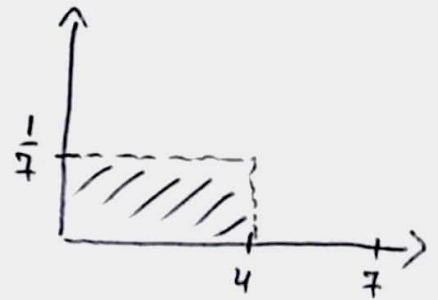
Y = время до смята

$$g(x) := Y = \begin{cases} x, & x \leq 5 \\ 5, & x > 5 \end{cases}$$

a) $P(Y < 4)$

(*) $\{Y < 4\} \subseteq \{X \leq 5\} = \{Y = X\} \Rightarrow \{Y < 4\} \cap \{Y = X\} = \{X < 4\}$

$$P(Y < 4) = P(X < 4) = \frac{4}{7}$$



б) $E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_0^7 g(x) \cdot \frac{1}{7} dx$

$$\boxed{I_{g(x)} = \begin{cases} 1, & x \in J \\ 0, & x \notin J \end{cases}} = \frac{1}{7} \left(\int_0^5 x dx + \int_5^7 5 dx \right) = \frac{1}{7} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 + [5x]_5^7 \right) = \frac{1}{7} \left(\frac{25}{2} + 10 \right) = \frac{45}{14}$$

в) $D[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) f_X(x) dx = \frac{1}{7} \left[\int_0^5 x^2 dx + \int_5^7 25 dx \right] = \frac{1}{7} \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^5 + [25x]_5^7 \right) = \frac{125}{21} + \frac{150}{21} = \frac{275}{21}$$

$$\Rightarrow D[Y] = \frac{275}{21} - \left(\frac{45}{14} \right)^2 \approx 2.76$$

г) $P(Y < 5) \stackrel{(*)}{=} P(X < 5) = \frac{5}{7} = p$

$$S \sim \text{Bin}(1000, p)$$

$$E[S] = 1000 \cdot \frac{5}{7} \approx 714$$