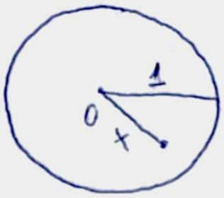
✎ **Задача 103.** *(K2, CEM 2020)* Точка A попада случайно в окръжност $k(O,1)$ с център O и радиус 1. Нека случайната величина X е равна на $|OA|$. Можете ли да предположите колко са модата и медианата? Аргументирайте се. Колко бихте очаквали да е $\mathbb{E}X$? *(Мода на дискретно разпределение наричаме стойността с най-голяма вероятност. В непрекъснатия случай, по аналогия, се интересуваме от стойността, която максимизира f_X. Наричаме a медиана на разпределението на X, ако $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq a) = 1/2$.)*

1. Намерете функцията на разпределение, плътността, очакването и дисперсията на X.

2. Нека сега разгледаме 3 точки, A_1, A_2 и A_3, които попадат случайно и независимо една от друга в същата окръжност. Колко е очакването на разстоянието до най- близката до центъра? А до най-отдалечената? *(Бонус: Намерете очакваното разстояние до средната точка. Би ли трябвало то да е равно на $\mathbb{E}X$?)*

(103) $F_X(t) = \frac{\pi . t^2}{\pi . 1^2} = t^2, \ t \in (0,1)$



$$F_X(t) = \begin{cases} 0 &, t<0 \\ t^2 &, t\in(0,1) \\ 1 &, t \ge 1 \end{cases}$$

a) $f_X(t) = F_X'(t) = 2t . 1_{\{t\in(0,1)\}}$

1. $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 t . 2t dt = 2 . \int_0^1 t^2 dt = 2 . [\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$

2. Мода $\underset{a\in(0,1)}{\arg\max} f_X(a) = 1$

3. Медиана : $F_X(a) = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1. $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 t^2 . 2t dt = 2[\frac{t^4}{4}]_0^1 = \frac{1}{2}$

$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$

б) Разглеждаме 3 точки A_1, A_2 и A_3, които попадат случайно и независимо една от друга в k. Колко е очакването до най-близката/далечната?

Нека разстоянията от 0 до A_1, A_2, A_3 са съответно X_1, X_2, X_3. Тогава $X_1, X_2, X_3 \sim X$ са независими. Разстоянието до най-близката точка е $Y_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$, а до най-далечната $Y_2 = \max(X_1, X_2, X_3)$. За $y \in (0,1)$

$F_{Y_2}(y) = P(Y_2 \le y) = P(X \le y)^3 = y^6$.

$f_{Y_2}(y) = F_{Y_2}'(y) = 6 . y^5 . 1_{\{y\in(0,1)\}}$

$\mathbb{E}[Y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} y \underbrace{f_{Y_2}(y)}_{1_{\{y\in(0,1)\}}} dy = \int_0^1 6y^6 dy = 6[\frac{y^7}{7}]_0^1 = \frac{6}{7}$

Аналогично:

$F_{Y_1}(y) = P(Y_1 \le y) = 1 - P(Y_1 \ge y) = 1 - (P(X \ge y))^3 = 1 - (1-y^2)^3$

$f_{Y_1}(y) = F_{Y_1}'(y) = 6y(1-y^2)^2 . 1_{\{y\in(0,1)\}}$

$\mathbb{E}[Y_1] = \int_0^1 6y^2(1-y^2)^2 dy = 6\int_0^1 y^2(1-2y^2+y^4) dy = 6[\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 - 2 . \frac{y^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{y^7}{7}\Big|_0^1] =$

$= 6[\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}] = \frac{16}{35}$