(29) Дадени са n урни, всяка от тях има m бели и k черни топчета. От първата урна се тегли топка и се прехвърля във втората, след това от втората в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка?

Нека U_i = {избрани сме бяла топка от i-та урна}. Търси се U_n.

$$P(U_1) = \frac{m}{m+k} \Rightarrow P(U_1^c) = \frac{k}{m+k}$$

$$P(U_2) \overset{ФПВ}{=} P(U_1)P(U_2|U_1) + P(U_1^c)(U_2|U_1^c) = \frac{m}{m+k}\cdot\frac{m+1}{m+k+1} + \frac{k}{m+k}\cdot\frac{m}{m+k+1} = \frac{m(\cancel{m+k+1})}{(m+k)(\cancel{m+k+1})} = \frac{m}{m+k}$$

Полученият резултат $\mathbb{P}(U_1)=\mathbb{P}(U_2)$ ни навежда на мисълта, че $\mathbb{P}(U_i)=\frac{m}{m+k}$, $\forall i\in[1,n]$

Това може да се докаже с математическа индукция:

1. Индукционна база: За U_1 и U_2 е изпълнено: $\mathbb{P}(U_1)=\mathbb{P}(U_2)=\frac{m}{m+k}$;

2. Индукционно предположение: Нека допуснем, че е изпълнено и за U_p, $p\in\mathbb{N}$

3. Индукционна стъпка: Ще докажем, че е изпълнено за U_{p+1}.

$$\mathbb{P}(U_{p+1})=\mathbb{P}(U_p)\mathbb{P}(U_{p+1}|U_p)+\mathbb{P}(U_p^c)\mathbb{P}(U_{p+1}|U_p^c)=$$

$$=\frac{m+1}{m+k+1}\cdot\mathbb{P}(U_p)+\frac{m}{m+k+1}\cdot(1-\mathbb{P}(U_p))=\frac{m}{m+k} \quad \square$$