Задача 60. От числата $1, 2, 3, 4$ и 5 се избират по случаен начин три. Нека случайната величина X = „средното по големина от избраните три", а Y = „най-малкото от избраните числа". Да се намери

1. съвместното разпределение на X и Y;
2. маргиналните разпределения на X и Y;
3. да се провери дали X и Y са независими;
4. ковариацията и коефициента на корелация на X и Y;
5. разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина $Z = X - 2Y$.

60

X = средното по големина от избраните 3
Y = най-малкото от избраните числа

1.

Y \ X	2	3	4	
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$
2	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
3	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
4	0	0	0	0
	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	

$P(X=2; Y=1) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$

12 ⊔ 3|4|5

$P(X=3; Y=1) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$

$P(X=4; Y=1) = \frac{1}{10}$

$P(X=3; Y=2) = \frac{2}{10}$

$P(X=4; Y=2) = \frac{1}{10}$

2.

X	2	3	4
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

Y	1	2	3
P	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

3. Ако са независими, произведението на маргиналните трябва да е равно на $P(X_i; Y_i)$

Контрапример:

$P(X=2; Y=1) = \frac{3}{10} \neq \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10}$

4. $\mathbb{E}X = 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} = 3$ $\qquad \mathbb{E}Y = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2}$

$\mathbb{E}[X^2] = 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{4}{10} + 16 \cdot \frac{3}{10} = \frac{96}{10}$ $\qquad \mathbb{E}[Y^2] = 1 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{1}{10} = \frac{27}{10}$

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[(X-3)(Y-\tfrac{3}{2})] =$$
$$= \mathbb{E}[XY - \tfrac{3}{2}X - 3Y + \tfrac{9}{2}] = \mathbb{E}[XY] - \frac{3}{2}\underbrace{\cancel{\mathbb{E}X}}_{3} - 3\mathbb{E}Y + \frac{9}{2} =$$
$$= \mathbb{E}[XY] - \frac{9}{2} = \frac{48}{10} - \frac{45}{10} = \frac{3}{10}$$

XY	2	3	4	6	8	12
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\mathbb{E}[XY] = 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{2}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10} + 12 \cdot \frac{1}{10} = \frac{48}{10}$$

$$DX = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{96}{10} - \frac{90}{10} = \frac{6}{10}$$

$$DY = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{27}{10} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20}$$

$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\,DY}} = \frac{\frac{3}{10}}{\sqrt{\frac{6}{10}\cdot\frac{9}{20}}} = \frac{3}{10}\cdot\frac{10}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. $Z = X - 2Y$

Z	-2	-1	0	1	2
	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$\mathbb{P}(X=2;Y=1) + \mathbb{P}(X=4;Y=2)$

$$\mathbb{E}Z = -2\cdot\frac{1}{10} - 1\cdot\frac{2}{10} + 0\cdot\frac{4}{10} + 1\cdot\frac{2}{10} + 2\cdot\frac{1}{10} = 0$$ (симетрично

$$\mathbb{E}[Z^2] = 2\cdot 4\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot 1\cdot\frac{2}{10} = \frac{12}{10}$$

$$D[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\underbrace{\mathbb{E}Z}_{=0})^2 = \mathbb{E}[Z^2] = \frac{12}{10}$$