Задача 70. 1. Играч хвърля 3 честни монети и 3 стандартни зара. За всяко ези получава по 1 лв, а за всяка 6-ца, по 3 лв. Колко е очакваната му печалба?

2. Играч хвърля зар, докато сумата от падналите се числа се дели на 6. Ако това се случи на k-ти ход, той печели k лв. Каква е очакваната му печалба?

3. Нека X има разпределение върху $0, 1, 2, \ldots$, така че, за $k = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = k - 1)} = \frac{3}{k}.$$

Намерете очакването и дисперсията на X.

4. Нека броят посетителите на стадион за даден ден е $Y \sim Poi(\lambda)$. Стадионът разполага с 10 входа $E_1, \ldots, E_{10}$ и всеки посетител избира с равна вероятност кой да е от тях. Какво е разпределението, очакването и дисперсията на посетителите, влезли през вход E_1?

70. X = печалба от монета

1.

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{1}{2})^3$

Y = печалба от зарове

Y	3	6	9
	$\frac{1}{6}$	$(\frac{1}{6})^2$	$(\frac{1}{6})^3$

$$E[\text{печалба}] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{36} + 9\cdot\frac{1}{6^3} =$$

$$= 1 + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{50}{24}$$

2. При първо хвърляне имаме една възможност за сума, която се дели на 6 $=: \{6\}$, като това се случва с вероятност $\frac{1}{6}$. Ако не се случи, играта продължава. Означаваме с $S :=$ остатък от при деление на 6 сумата от хвърлянията до i хода. Тогава точно едно от $\{S+1, S+2, S+3, S+4, S+5, S+6\}$ ще се дели на 6 (отново с вероятност $\frac{1}{6}$)

$$\Rightarrow E[\text{печалба}] = E[Ge(\tfrac{1}{6})] = 6$$

3. $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{3}{k}$

Нека $P(X=k) = p_k$

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{3}{k} \iff p_k = \frac{3}{k}p_{k-1} \iff p_{k-1} = \frac{k}{3}p_k$$

$p_0 = \frac{1}{3}p_1$

$p_1 = \frac{2}{3}p_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$

. . . . .

$p_k = \frac{3}{k}\cdot\frac{3}{k-1} \cdots \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot p_0 = \frac{3^k}{k!}p_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} p_0 = 1 \Leftrightarrow p_0 . e^{3} = 1 \Rightarrow p_0 = e^{-3}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k . \frac{3^k}{k!} e^{-3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(k-1)!} e^{-3} = 3 . e^{-3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} = 3 . e^{-3} . e^{3} = 3$$

4. $Y \sim Pois(\lambda)$

$\mathbb{E}[E_1] = \mathbb{E}[E_2] = \ldots = \mathbb{E}[E_{10}]$

$\mathbb{E}[E_1 + E_2 + \ldots + E_{10}] = 10\,\mathbb{E}[E_1] = \mathbb{E}[Y] = \lambda$

$\Rightarrow \mathbb{E}[E_1] = \frac{\lambda}{10}$