**Задача 89.** В магазин работят две касиерки. Предполагаме, че времето необходимо за обслужване на клиент на всяка от двете опашки е експоненциално разпределена случайна величина с математическо очакване 8(мин) за първата опашка и 5(мин) за втората. Клиент, избрал по случаен начин опашка, е чакал по-малко от 4 минути. Каква е вероятността той да е бил на първата опашка?

(89) $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

$\mathbb{E}[X_1] = 8$ мин. $= \frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{8}$

$\mathbb{E}[X_2] = 5$ мин. $= \frac{1}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{5}$

$A = \{$ чака $< 4$ мин. $\}$

$I$ = избира опашка 1

$II$ = избира опашка 2

$\mathbb{P}(I \mid A) = ?$

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \xrightarrow[\frac{dy}{dx} = \lambda]{y = \lambda \cdot x} \int_0^{\lambda x} e^{-y} dy = \left[-e^{-y}\right]_0^{\lambda x} = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mathbb{P}(I \mid A) = \frac{\mathbb{P}(I \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A \mid II)\mathbb{P}(II)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 < 4) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{P}(X_2 < 4) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= (1 - e^{-\frac{1}{8} \cdot 4}) \cdot \frac{1}{2} + (1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 4}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{2} + (1 - e^{-\frac{4}{5}}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(I \cap A) = \mathbb{P}(A \mid I) \cdot \mathbb{P}(I) = (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(I \mid A) = \frac{(1 - e^{-\frac{1}{2}}) \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\left[(1 - e^{-\frac{1}{2}}) + (1 - e^{-\frac{4}{5}})\right] \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{2 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{4}{5}}}$$