(22) В урна има 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки. От урната последователно се вадят топки. Каква е вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена, ако:

1. След всяко изваждане топката се връща обратно в урната

Нека $A = \{$вадим бяла топка преди зелена$\}$

$$P(A) = P(б) + P(чб) + P(ччб) + \dots = \frac{5}{20} + \frac{5}{20}\cdot\frac{7}{20} + \frac{5}{20}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{7}{20} + \dots = \frac{5}{20}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{7}{20}\right)^i =$$

$$= \frac{5}{20}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{7}{20}}\right) = \frac{5}{20}\cdot\frac{20}{13} = \frac{5}{13}$$

Тук използвахме факта, че $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$, за $|x|<1$

2. Извадените топки не се връщат обратно

$$P(A) = P(б) + P(чб) + P(ччб) + \dots = \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{5}{19} + \frac{7.7.5}{20.19.18} + \dots = \frac{5}{20}\underbrace{\left(1 + \frac{7}{19} + \frac{7.6}{19.18} + \dots\right)}_{x} = \frac{5}{20}x$$

$$P(\bar{A}) = P(з) + P(чз) + P(ччз) + \dots = \frac{8}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{8}{19} + \frac{7}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{8}{18} + \dots = \frac{8}{20}\left(1 + \frac{7}{19} + \frac{7.6}{19.18} + \dots\right) = \frac{8}{20}x$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{20}x + \frac{8}{20}x = 1 \Rightarrow x = \frac{20}{13} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{20}\cdot\frac{20}{13} = \frac{5}{13}$$