

Задача 58. В урна има 3 бели и 2 черни топки. От урната теглим последователно без връщане топки. Нека ξ е номерът на тегленето на първата бяла топка. След това продължаваме да теглим, докато се появи черна топка. Нека η е номерът на опита на тегленето на първата черна топка след първата бяла. Дефинираме $\eta = 6$, ако няма такава. Да се определи

- съвместното разпределение на η и ξ ;
- $\mathbb{P}(\eta > 2 | \xi = 1)$ и $\mathbb{P}(\eta = 3 | \xi < 3)$.

58) Означаваме $\xi = X$ и $\eta = Y$.

X = # опити до изтегляне на първа бяла

Y = # опити до изтегляне на първа черна, след като е изтеглена вече бяла.

$Y \backslash X$	1	2	3	
2	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$
5	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
6	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	

$$P(X=1; Y=2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=1; Y=3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$$

Изтегляне

$$P(X=2; Y=3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=1; Y=4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=2; Y=5) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=2; Y=4) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=3; Y=6) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(Y > 2 | X=1) = \frac{P(Y > 2 \cap X=1)}{P(X=1)} = \frac{P(Y=3 \cap X=1) + P(Y=4 \cap X=1)}{\frac{6}{10}} = \frac{\frac{2}{10} + \frac{1}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=3 | X < 3) = \frac{P(Y=3 \cap X=1) + P(Y=3 \cap X=2)}{P(X=1) + P(X=2)} = \frac{\frac{2}{10} + \frac{1}{10}}{\frac{6}{10} + \frac{3}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{3}$$