Задача 95. Електронно устройство за предпазване от крадци автоматично променя осветлението в дома. То е настроено така, че през фиксиран час, в случаен момент X ще запали лампите, а в момент Y ще ги угаси. Нека съвместната плътност на случайните величини X и Y е $f_{X,Y}(x,y) = cxy, 0 < x < y < 1$.. Да се намери

1. константата с;
2. маргиналните плътности и математическите очаквания;
3. вероятността лампите да бъдат запалени преди 45-тата минута и да светят по-малко от 10 минути;
4. колко е средното време на светене, ако лампите са запалени на 15-тата минута;
5. каква е вероятността лампите да светят по-малко от 20 минути?

(95) X, Y сл. вел.

$f_{X,Y}(x,y) = c.x.y$, $0<x<y<1$ $= \mathcal{D}$

1. $c = ?$

$$\iint_{\mathcal{D}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\iint_{\mathcal{D}} c.x.y\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^1\int_x^1 cxy\,dy\,dx = c.\int_0^1 x\int_x^1 y.dy\,dx = c.\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^1 dx =$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^1 x(1-x^2)dx = \frac{c}{2}\int_0^1 x - x^3 dx = \frac{c}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 8$$

2. $$f_X(x) = \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)dy = c.x\int_1^x y\,dy = cx\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^1 = \frac{cx}{2}(1-x^2)\mathbb{1}_{\{0<x<1\}}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y cxy\,dx = \frac{cy}{2}\left[x^2\right]_0^y = \frac{cy^3}{2}\mathbb{1}_{\{0<y<1\}}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y.f_Y(y)dy = \int_0^1 y.\frac{cy^3}{2}dy = \int_0^1 \frac{c.y^4}{2}dy = \frac{c}{10}\left[y^5\right]_0^1 = \frac{c}{10}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x.f_X(x)dx = \int_0^1 x.\frac{c.x(1-x^2)}{2}dx = \frac{c}{2}\int_0^1 x^2-x^4dx = \frac{c}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{c}{15}$$

3. $\mathbb{P}(X < \frac{3}{4}, Y - X < \frac{1}{6}) = \int_0^{\frac{3}{4}} \int_x^{x+\frac{1}{6}} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx =$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \int_x^{x+\frac{1}{6}} c.x.y\,dy\,dx = \frac{c}{2}. \int_0^{\frac{3}{4}} x\left[(x+\tfrac{1}{6})^2 - x^2\right]dx =$$

$$= \frac{c}{2} \int_0^{\frac{3}{4}} \cancel{-x^3} + \cancel{x^3} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x\,dx =$$

$$= \frac{c}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{4}} + \frac{c}{72}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{4}} = \frac{27c}{18.64} + \frac{9c}{144.16} =$$

$$= \frac{63c}{2304}$$

4. $\mathbb{E}[Y - X \mid X = \frac{1}{4}] = \mathbb{E}[Y \mid X = \frac{1}{4}] - \frac{1}{4}$

$$f_{Y|X=a}(y) = \frac{f_{X,Y}(a,y)}{f_X(a)}$$

$$\mathbb{E}[Y - X \mid X = \tfrac{1}{4}] = \int_{\frac{1}{4}}^{1} (y - \tfrac{1}{4}) \frac{f_{X,Y}(\frac{1}{4}, y)}{f_X(\frac{1}{4})} dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{1} (y - \tfrac{1}{4}) \cdot \frac{\cancel{c}.\cancel{\frac{1}{4}}.y}{\frac{\cancel{c}\cancel{\frac{1}{4}}}{2}\left(1 - (\frac{1}{4})^2\right)} dy \; \frac{32}{15}\int_{\frac{1}{4}}^{1} y^2 - \frac{1}{4}y\,dy$$

$$= \frac{32}{15}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{1}{4}}^{1} - \frac{8}{15}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{4}}^{1} = \ldots = \frac{9}{20}$$

5. $\mathbb{P}(Y - X < \frac{1}{3}) = \int_0^{\frac{2}{3}} \int_x^{x+\frac{1}{3}} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{2}{3}} \int_x^{x+\frac{1}{3}} c.x.y\,dy\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} \int_x^{1} c.x.y\,dy\,dx$

≈ 0.67