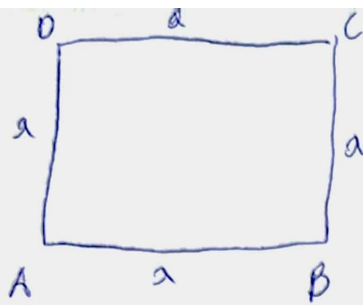


Задача 96. Върху страните на квадрат, независимо една от друга, по случаен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е a .

(96)



Нека фиксираме първата точка (x_1, y_1) върху страната AB

$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x, 0)$, където $x \sim \text{Unif}(0, a)$

Тогаво имаме 4 случая за втората точка (x_2, y_2) с равновероятности

Означаваме $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$$\text{Търсим: } E[d^2 | (x_2, y_2)] = \frac{1}{4} \int_0^a \int_0^a (x_1 - x_2)^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{4} \int_0^a \int_0^a x_1^2 + y_2^2 dx_1 dy_1 +$$

$(x_2, y_2) = (x, 0)$ $(x_2, y_2) = (0, x)$

$$\frac{1}{4} \int_0^a \int_0^a (x_1 - x_2)^2 + a^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{4} \int_0^a \int_0^a (x_1 - a)^2 + y_2^2 dx_1 dx_2 =$$

$(x_2, y_2) = (x, a)$ $(x_1, y_2) = (a, x)$

$$= \frac{a^4}{24} + \frac{a^4}{6} + \frac{7a^4}{24} + \frac{2a^4}{126}$$

$$= \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} = \frac{2}{3} a^4$$