(21) Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги залепила. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n-те различни адреса и изпратила писмата. Каква е вероятността някой да е получил своето писмо.

$A_i = \{$i-ти човек да си получи писмото$\}$

$B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \{$Никой не си получава писмото$\}$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_k^c\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n} \\ &\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}, \quad i \neq j \\ &\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \frac{(n-i)!}{n!}$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{(n-i)!}{n!} = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} \cdot \frac{(n-i)!}{n!} = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i!} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1} \frac{1}{(i+1)!}$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ избираме $x = -1 \Rightarrow \mathbb{P}(B) = e^{-1} \approx \frac{1}{2.7182}$