Задача 72. Някои от стандартните разпределения, с които сме се запознали са $Ber(p)$, $Bin(n,p)$, $Ge(p)$, $Poi(\lambda)$.

Нека X_1 и X_2 са независими и еднакво разпределени случайни величини с някой от горните закони (т.е. имаме 4 различни възможности). Изпълнено ли е, че X_1X_2 или $X_1 + X_2$ имат същия тип разпределение като X_1 (евентуално с други параметри)? Аргументирайте се напълно.

Ако отговорът е не във всички случаи, можете ли да дадете пример, в който имаме подобна ситуация?

72) 1 сп. $X_1, X_2 \sim Ber(p)$

X_1	0	1
P	$1-p$	p

X_2	0	1
P	$1-p$	p

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$
1	$p(1-p)$	p^2

X_1X_2	0	1
P	$(1-p)[1-p+2p]=1-p^2$	p^2

$\rightarrow X_1X_2 \sim Ber(p^2)$

$X_1+X_2 \in \{0,1,2\} \not\sim Ber(p)$

2 сп. $X_1, X_2 \sim Bin(n,p)$

$X_1 = \sum_{j=1}^{n} X_j$, $X_j \sim Ber(p)$

$X_2 = \sum_{j=1}^{n} Y_j$

$X_1 + X_2 = \sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{n} Y_j = \sum_{j=1}^{n} X_j + Y_j$ - сума на нез. бернулиеви величини

$X_1 X_2 = \sum_{j=1}^{n} X_j \sum_{j=1}^{n} Y_j$ - бернулиево умножено със сума бернулиеви, което не е бернулиево

Зсл. За $X_1, X_2 \sim Ge(p)$. Ако $X_1 + X_2 \sim Ge(p_2)$, то

$$\mathbb{E}[X_1+X_2] = \frac{2}{p} = \frac{1}{p_2} \Rightarrow p_2 = \frac{p}{2}$$

$$\mathbb{D}[X_1+X_2] = 2\frac{(1-p)}{p^2} = \frac{1-p_2}{p_2^2} = \frac{1-\frac{p}{2}}{\frac{p^2}{4}} = \frac{4-2p}{p^2}$$

$$\Rightarrow 4-2p = 2-2p \ \text{↯}$$

Ако $X_1 X_2 \sim Ge(p_3)$, то

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \frac{1}{p^2} \Rightarrow p_3 = p^2$$

$$\mathbb{D}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1^2 X_2^2] - (\mathbb{E}[X_1 X_2])^2 =$$

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2 = \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{D}[X_1 X_2] = \left(\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{p^2}\right)^2 = \frac{3-4p+p^2}{p^4} = \frac{1-p_3}{p_3^2} = \frac{1-p^2}{p^4}$$

$$\Rightarrow 1-p^2 = 3-4p+p^2 \Rightarrow 2p^2-4p+2=0 \Rightarrow p=1.$$

Ако $X_1, X_2 \sim Ge(1) \Rightarrow X_1 X_2 \sim Ge(1)$, иначе $X_1 X_2 \not\sim Ge(p_3)$

4. Ако $X_1 \sim Pois(\lambda)$

$X_1 + X_2 \sim Pois(2\lambda)$ (доказано на упр.)

Да доп., че $X_1 X_2 \sim Pois(\lambda_2)$

$\mathbb{E} X_1 X_2 = \lambda^2 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda^2$

$\mathbb{D} X_1 X_2 = \mathbb{E} X_1^2 X_2^2 - (\mathbb{E} X_1 X_2)^2 = (\underbrace{\lambda + \lambda^2}_{\mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2})^2 - \lambda^4 = \lambda^2 + 2\lambda^3 = \lambda_2 = \lambda^2$

$\Rightarrow 2\lambda^3 = 0$ ↯