

20) Двама играчи последователно хвърлят монета. Играча печели този, който първи хвърли ези. Каква е вероятността за спечелване на играча за всеки от играчите?

Събитията на първо и второ хвърляне са независими.
 Означаваме първия хвърлил с I , а втория с II

$$\begin{aligned}
 a) \quad P(I \text{ печели}) &= P(E) + P(\bar{E}TE) + P(TTTTE) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4^2}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

б) На първи ход II не трябва да хвърли същото като I - $\frac{1}{2}$ шанс
 След това $P(I \text{ печели}) \stackrel{!}{=} P(II \text{ губи}) \stackrel{!}{=} 1 - P(II \text{ печели})$
 $x = P(I \text{ печели})$

$$= P(I \text{ печели}) = P(II \text{ губи}) = 1 - x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(1-x) \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$