

Задача 61. Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека X е броят езита, паднали се при първите три хвърляния, а Y - броят езита от последните две. Да се намери

1. съвместното разпределение на X и Y ;
2. условните разпределения на X и Y , т.е. $\mathbb{P}(X = k|Y = l)$ и $\mathbb{P}(Y = k|X = l)$ за подходящи k и l ;
3. $\mathbb{P}(X = Y)$, $\mathbb{P}(X > 1|Y = 1)$ и $P(X + Y > 2|X = 2)$;

4. разпределенията на $E(X|Y)$ и $E(Y|X)$.

⑥ 1. $y \backslash x$

	0	1	2	3
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{2}{16}$

2. $y \backslash x$

	0	1	2	3
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$y \backslash x$

	0	1	2	3
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$$3. P(X=Y) = P(X=Y=0) + P(X=Y=1) + P(X=Y=2) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(X > 1 | Y=1) = P(X=2; Y=1) + P(X=3; Y=1) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(X+Y > 2 | X=2) = P(Y=1 | X=2) + P(Y=2 | X=2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$4. E[X|Y] \quad E[X|Y=0] = 1 \quad E[X|Y=1] = \frac{3}{2} \quad E[X|Y=2] = 2$$

$$P(Y=0) = \frac{4}{16} \quad P(Y=1) = \frac{8}{16} \quad P(Y=2) = \frac{4}{16}$$

$$E[Y|X] \quad \frac{1}{16} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{7}{16} \quad \frac{3}{16}$$

$$\frac{2}{16} \quad \frac{6}{16} \quad \frac{8}{16} \quad \frac{2}{16}$$

$$E[E[X|Y]] = E[X]$$