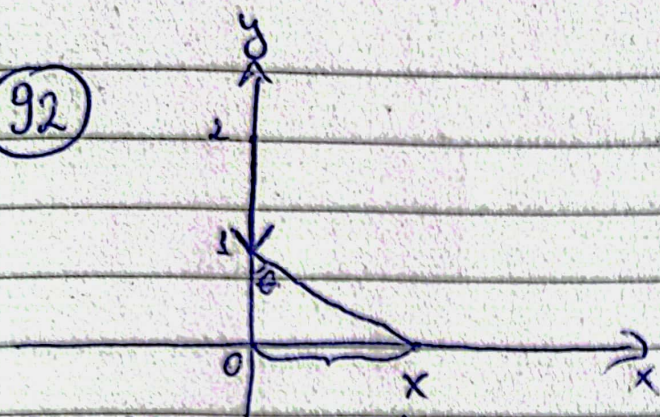


Задача 92. Лъч (светлина) минава от точката $(0, 2)$ към т. $(0, 1)$ и се пречупва случайно, склучвайки ъгъл $\theta \in (-\pi/2; \pi/2)$ с Oy . Нека X е точката, в която пречупеният лъч пресича Ox . Да се намери плътността на X .

92



$$\theta \sim \text{Unif}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f_{\theta}(\theta) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}}$$

$$f_X(x)? \quad \mathbb{E}[X]?$$

$$t_{\theta}(\theta) = \frac{X}{1} = X$$

$$f_X(x) = F'_X(x) = P(X \leq x)' = P(t_{\theta} \theta \leq x)' = P(\theta \leq \arctan(x))'$$

$$= \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan(x)} \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}} d\theta \right)' = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan(x)} \frac{1}{\pi} d\theta \right)' = \frac{1}{\pi} \left[\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \right]' = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot x dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx^2 = \frac{1}{2\pi} \left[\ln(1+x^2) \right]_{-\infty}^{\infty} = \text{не определен}$$

X имеет распределение Коши с параметрами (0, 1)