Задача 69. $n > 2$ човека хвърлят честна монета. Победител е този, който хвърли обратното на всички други. Ако такъв няма, играчите хвърлят отново. Нека X е броят кръгове до излъчването на победител. Какво е очакването и дисперсията на X?

Да предположим, че след излъчването на първи победител, играта продължава докато останат двама играчи. Колко е броят на очакваните ходове? Ако k-тият победител печели $100(n-k)$, колко бихте платили, за да участвате в тази игра?

69 Y = # паднали се езита на 1 ход
турти

$Y \sim Bin(n, \frac{1}{2})$

$\mathbb{P}(Y=1) = 2n \cdot \frac{1}{2}^1 \cdot \frac{1}{2}^{n-1} = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ЕП

$X \sim Ge\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

$\mathbb{E}[X] = \frac{2^{n-1}}{n}$ $\qquad \mathbb{D}X = \frac{1-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}}$

Нека Y_i = брой ходове до i-ти победител, $i = \overline{1, n-2}$

$Y_i \sim Ge(P(Bin(n+1-i, \frac{1}{2}) = 1))$, $i = \overline{1, n-2}$

$2 \cdot P(Bin(n+1-i, \frac{1}{2}) = 1) = \binom{n+1-i}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} \Rightarrow \mathbb{E}[Y_i] = \frac{2^{n-i}}{\binom{n+1-i}{i}}$

X = # ходове, докато останат двама играчи

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n-2}] = \mathbb{E}Y_1 + \mathbb{E}Y_2 + \dots + \mathbb{E}Y_{n-2}$

$= \sum_{i=1}^{n-2} \frac{2^{n-i}}{\binom{n+1-i}{i}}$

X = брой спечелили преди мен

$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n-k+1} \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i}{n-i+1} = \frac{1}{\cancel{n-k+1}} \cdot \frac{\cancel{n-1}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \cdots \frac{\cancel{n-k+1}}{\cancel{n-k}} = \frac{1}{n}$

да спечеля на k-ти ход

да загубя всички преди k-ти ход

$\mathbb{E}[\text{печалба}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 100(n-k) = \frac{100}{n}\sum_{k=1}^{n} n-k = \frac{100}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = 50(n+1)$

бих платил