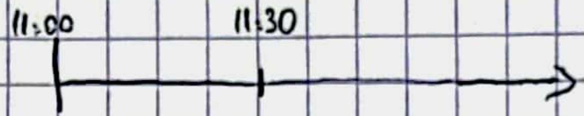
Задача 90. Времето за преглед на пациент е експоненциално разпределена случайна величина с очакване 30(мин). За преглед има записани двама пациенти - първият за 11:00, а вторият за 11:30, като и двамата пристигат в точно определения час. Ако прегледът на първия не е завършил, вторият изчаква. Да се пресметне средно колко време ще прекара вторият пациент в поликлиниката.

90

$X \sim Exp(2)$



X_i = време за обслужване на i-ти пациент, $i = \{1, 2\}$

Y = времето, в което вторият е бил в поликлиниката

$\mathbb{E}[Y] = ?$

$$Y = \mathbb{1}_{\{X_1 < \frac{1}{2}\}} \cdot X_2 + \mathbb{1}_{\{X_1 \geq \frac{1}{2}\}} \left(X_2 + \left(X_1 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= X_2 + \left(X_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{X_1 \geq \frac{1}{2}\}}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}\left[\left(X_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{X_1 \geq \frac{1}{2}\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2e^{-2x} dx = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} 2x \cdot e^{-2x} dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{1}^{\infty} \frac{y}{2} \cdot e^{-y} dy + \frac{1}{2}\left[e^{-2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} + \left[-\frac{y}{2} \cdot e^{-y}\right]_{1}^{\infty} + \int_{1}^{\infty} e^{-y} dy - \frac{1}{2} \cdot e^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} + \left[e^{-y}\right]_{1}^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-1}$$