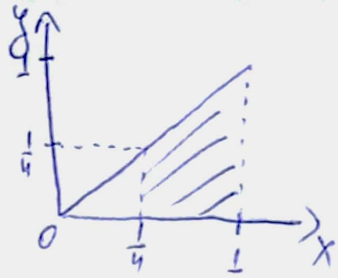
Задача 1. Резервоар се пълни в началото на седмицата със сл.вел. $X \in [0, 1]$ единици, а през седмицата се употребява сл.вел. Y. Нека съвместната плътност на тези две случайни величини е

$$f_{X,Y}(x, y) = 3x\mathbb{1}_{\{0 \le y \le x \le 1\}} = \begin{cases} 3x, & \text{ако } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. (0.25 т.) Намерете вероятността в дадена седмица резервоарът да бъде запълнен с най-много $1/2$ единици и да бъдат изразходвани повече от $1/4$.
2. (0.75 т.) Намерете $Cov(X, Y)$.

① $f_{X,Y}(x,y) = 3x \cdot 1_{\{0 \le y \le x \le 1\}}$



1. $P(X<\frac{1}{2}, Y>\frac{1}{4}) = \int_{\frac14}^{\frac12}\int_{\frac14}^{x} 3x\,dy\,dx = \int_{\frac14}^{\frac12} 3x\,[y]_{\frac14}^{x}\,dx =$

$= \int_{\frac14}^{\frac12} 3x^2 - \frac{3}{4}x\,dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac14}^{\frac12} - \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac14}^{\frac12} = 3\left[\frac{1}{3\cdot 8} - \frac{1}{3\cdot 4^3}\right] - \frac{3}{8}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}\right] =$

$= \frac{7}{64} - \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{16} = \frac{5}{128}$

2. $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1\int_0^x xy \cdot 3x\,dy\,dx = \int_0^1 3x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^1 3\frac{x^4}{2}\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \cancel{\frac{1}{8}}\ \frac{3}{10}$

$\mathbb{E}[X] = \int_0^1\int_0^x x \cdot 3x\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x 3x^2\,dy\,dx = \int_0^1 3x^2\,[y]_0^x\,dx = \int_0^1 3x^3\,dx = \frac{3}{4}$

$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1\int_0^x y \cdot 3x\,dy\,dx = \int_0^1 3x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{3x^3}{2}\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow Cov(X,Y) = \frac{3}{10} - \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{10} - \frac{9}{32} \approx 0.0188$