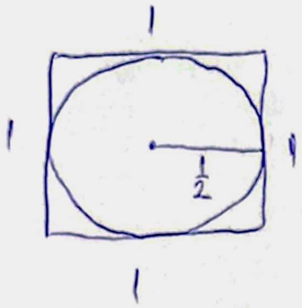
**Задача 110.** Ентусиаст се интересува от стойността на $\pi$, като разполага с компютър, но няма достъп интернет. По тази причина, решава да симулира голям брой равномерно разпределени случайни точки в $[0,1] \times [0,1]$ и да разгледа каква част от тях попадат във вписаната за този квадрат окръжност.

Можете ли да обясните как това може да доведе до оценка за $\pi$ и защо? Колко точки трябва да се симулират, така вероятността грешката да бъде по-малка от $0.001$ е $95\%$?

110




$X_i \sim Ber\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ЗГЧ: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \mathbb{E}[X_1] = \frac{\pi}{4}$

$\bar{X}_n \to \frac{\pi}{4}$

$4\bar{X}_n \to \pi$

$\mathbb{P}\left(|4\bar{X}-\pi| < \frac{1}{1000}\right) \geq 95\%$

ЦГТ: $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ $\quad \mu = \frac{\pi}{4}$

$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi(4-\pi)}$

$P\left(4\bar{X}_n - \pi < \frac{1}{100}\right) + \mathbb{P}\left(\pi - 4\bar{X}_n < 1000\right)$

$= P\left(\frac{\bar{X}-\frac{\pi}{4}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) + P\left(\frac{\bar{X}_n-\frac{\pi}{4}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{-\frac{1}{1000}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - 1 = 0.95$

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{1000\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\pi(4-\pi)}}\right) = 0.975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{250\sqrt{\pi(4-\pi)}} \approx 1.96 \Rightarrow \sqrt{n} \approx 804.67$

$n \approx 647494$