

 **Задача 67.** Разглеждаме информация, съставена от 8 бита. Поради шум при изпращането между сървъри, всеки бит може да бъде предаден погрешно с вероятност p .

0	1	0	0	0	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

1. Каква е вероятността съобщението да бъде правилно предадено между два сървъра - А и В, които са свързани директно? Какво е очакването на правилния брой битове в крайното съобщение?
2. Можете ли да отговорите на същите въпроси от а), ако съобщението минава (точно по веднъж) през $n = 3$ междинни сървъра? *Какви са резултатите при $n \rightarrow \infty$?

(67) $X = \#$ правилно подредени байтове
 $X \sim \text{Bin}(8, 1-p)$

а) $P(X=8) = (1-p)^8$
 $E[X] = 8(1-p)$

б) $A \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow B$

Имаме общо 4 трансфера.

За да бъде предаден един бит правилно,

той трябва да бъде променен 0, 2 или 4 пъти

$\Rightarrow P(\text{i-ти бит е предаден правилно}) = (1-p)^4 + \binom{4}{2}(1-p)^2 p^2 + p^4 =: q$

$P(\text{информацията е предадена правилно}) = q^8$

$E[\text{Bin}(8, q)] = 8q$

Бонус:

При 2n смеги:

$q = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k} p^{2k} (1-p)^{2n-2k}$

$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} = 1$

$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} (-1)^k = (p-q)^{2n} = (2p-1)^{2n}$

$\Rightarrow 2q = 1 + (2p-1)^{2n}$

$\Rightarrow q \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}, \text{ i.k. } |2p-1| < 1$