

 **Задача 68.** Метод за решаване на двубои във футбола е изпълняването на дузини. Можем да считаме, че това се случва по следния начин: първо се изпълняват 5 кръга по 1 дузина за всеки отбор. Ако има равенство след тях, се продължава докато някой от отборите отбележи, а другият - не.

Да предположим, че играчите на единия от отборите отбелязват с вероятност 75 %, а на другия - с вероятност 80%. Приемаме също, че изпълненията са независими.

1. Каква е вероятността през първите 5 рунда двата отбора да са отбелязвали в едни и същи рундове?
2. Каква е вероятността след първите 5 кръга да има равенство? А след първите 10 кръга?
3. Какъв е очакваният брой дузини, които ще се изпълнят общо от двата отбора?

(68) 1. Треба взв всієї один рунд и двайа отбора или да отбеленат, или да пропустити едновременно

$$\Rightarrow \left(\frac{75 \cdot 80}{100 \cdot 100} + \frac{25 \cdot 20}{100 \cdot 100} \right)^5 = \left(\frac{6500}{10000} \right)^5 = \left(\frac{13}{20} \right)^5$$

2.1. $X = \# \text{голове от отбор 1} \sim \text{Bin}(5, \frac{75}{100})$
 $Y = \# \text{голове от отбор 2} \sim \text{Bin}(5, \frac{80}{100})$

$$P(X=Y=k) = \sum_{k=1}^5 \binom{5}{k}^2 \left(\frac{75}{100} \cdot \frac{80}{100} \right)^k \left(\frac{25}{100} \cdot \frac{20}{100} \right)^{5-k} = \sum_{k=1}^5 \binom{5}{k}^2 \left(\frac{3}{5} \right)^k \left(\frac{1}{20} \right)^{5-k}$$

2.2. След 5-ти рунд, всеки рунд е решаващ, ако единият отбор вкарва, а другият пропуска, мажът приключва

$$\Rightarrow P(X=Y=k) \left(\frac{13}{20} \right)^5 = \sum_{k=1}^5 \left[\binom{5}{k}^2 \left(\frac{3}{5} \right)^k \left(\frac{1}{20} \right)^{5-k} \right] \left(\frac{13}{20} \right)^5$$

3. $E[\text{дузпи}] = 10 \cdot (1 - P(X=Y)) + E[\text{изпълнения в продължението}]$
 $+ P(X=Y) [10 + 2 \cdot E[Z]]$

Нека $Z = \# \text{изпълнения в продължението}$

$$P(\text{отбор побеждава}) = \frac{75 \cdot 20}{100 \cdot 2} + \frac{80 \cdot 25}{100 \cdot 2} = \frac{15}{100} + \frac{20}{100} = \frac{35}{100}$$

$$P(\text{дузпите продължава}) = \frac{75 \cdot 80}{100 \cdot 2} + \frac{25 \cdot 20}{100 \cdot 2} = \frac{65}{100}$$

Z	1	2	3	4
	$\frac{35}{100}$	$\frac{35}{100} \cdot \frac{65}{100}$	$\frac{35}{100} \cdot \left(\frac{65}{100} \right)^2$...

$$Z \sim \text{Ge} \left(\frac{35}{100} \right)$$

$$E[Z] = \frac{100}{35}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E[\text{дузпи}] &= 10(1 - P(X=Y)) + P(X=Y) \left[10 + \frac{200}{35} \right] = 10 - 10P(X=Y) + 10P(X=Y) + \frac{200}{35}P(X=Y) \\ &= 10 + \frac{200}{35}P(X=Y) \approx 11.7 \end{aligned}$$