

 **Задача 111.** По официални данни, историческата средна температура в София през януари е -0.5°C . Нека случайната величина X = "средна температура през януари в София в градуси по Целзий". Да приемем, че тя има нормално разпределение. Обикновено оценка за дисперсията се прави също от данни, но като задача ние ще разгледаме друг (непрепоръчителен) метод.

Да кажем, че даден човек разглежда температура над 20°C градуса като изключителна аномалия - вероятността ѝ е 1 процент. Каква оценка води това разсъждение за дисперсията на X ? Каква е вероятността в такъв случай температурата да падне под -15°C градуса?

(B1) $X \sim N(-\frac{1}{2}, \sigma^2)$. Нека $Z \sim N(0, 1)$

$$P(X > 20) = \frac{1}{100} = 1\%$$

$$P(X > 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{20 + \frac{1}{2}}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{20.5}{\sigma}\right) = \frac{1}{100}$$

$$P\left(Z < \frac{20.5}{\sigma}\right) = \frac{99}{100}$$

Търсим стойността на σ , за която $\Phi\left(\frac{20.5}{\sigma}\right) \approx 99\%$

Най-близката стойност до $\frac{99}{100}$ е 0.9901, която се постига при 2.33

$$\Rightarrow \frac{20.5}{\sigma} = 2.33 \Rightarrow \sigma = \frac{20.5}{2.33} \approx 8.8$$

$$\Rightarrow D[X] = \sigma^2 \approx 77.44$$

$$P(X < -15) = P\left(Z < \frac{-15 + \frac{1}{2}}{8.8}\right) = P(Z < -1.65) = 1 - \Phi(1.65) = 1 - 0.9505 = 4.95\%$$