Задача 2. Магазин работи от 10:00 до 18:00. Нека моделираме времената на пристигане между последователни клиенти под 30 години в него като независими експоненциални величини със средно 5 минути и съответно времената между последователни клиенти над 30 години като независими експоненциални величини със средно 10 минути.

1. (0.5 т.) Каква е вероятността магазинът да бъде посетен от поне 100 клиенти под 30 години за 1 ден?

2. (0.25 т.) Намерете разпределението на времето до първия клиент за деня.

3. (0.25 т.) Можете да приемете, че времената между последователните хора са независими и са разпределени като случайната величина от 2[1]. Каква е вероятността магазинът да бъде посетен от поне 150 души за 1 ден?

② $X \sim Exp(\frac{1}{5})$; $\mu := \mathbb{E}[X] = 5$; $\sigma^2 = \mathbb{D}[X] = 25$

$Y \sim Exp(\frac{1}{10})$; $\mu := \mathbb{E}[X] = 10$; $\sigma^2 = \mathbb{D}[X] = 100$

Магазинът работи от 10:00 до 18:00, т.е. 8 часа = 480 мин.

1. Нека $\bar{X} = X_1 + X_2 + ... + X_{100}$, където $X_1, X_2, ..., X_{100} \sim Exp(\frac{1}{5})$
са независими равноразпр. сл. вел.

$$\mathbb{P}(\bar{X} < 480) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - n.\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{480 - n.\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 500}{50} < \frac{480 - 500}{50}\right) = \mathbb{P}(Z < -0.4) \overset{ЦГТ}{\approx}$$

$$\approx \Phi(-0.4) \approx 34.458\%$$

2. $Z = \min(X, Y)$

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(\min(X,Y) < z) = 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > z) \overset{iid}{=} 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z)$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{5}z} e^{-\frac{1}{10}z} = 1 - e^{-\frac{1}{15}z}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\left[1 - e^{-\frac{1}{15}z}\right] = \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}z} \Rightarrow Z \sim Exp\left(\frac{1}{15}\right)$$

3. Нека $\bar{Z} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + ... + Z_{150}$, където $Z_i \overset{iid}{\sim} Exp(\frac{3}{10})$

$$\mathbb{P}(\bar{Z} < 480) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{Z} - n.\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{480 - n.\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{Z} - n.\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{480 - \overset{50}{\cancel{150}}.\frac{10}{\cancel{3}}}{\frac{10}{3}\sqrt{150}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{Z} - n.\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{3(-20)}{10\sqrt{150}}\right) \overset{ЦГТ}{\approx} \Phi(-0.49) \approx 31.207$$