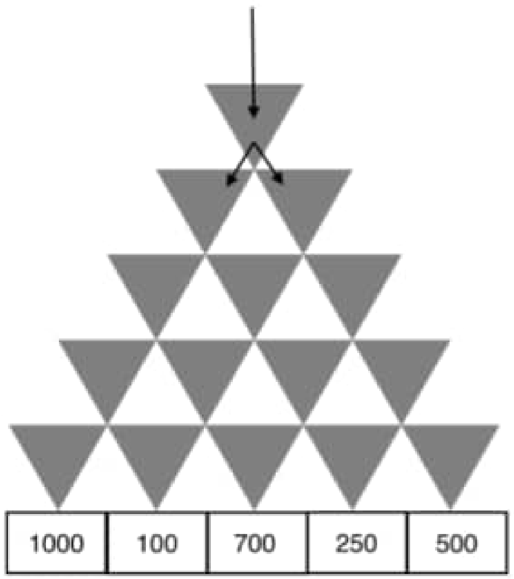
Задача 74. Играч в „Треска за злато" [1] пуска топче в пирамидата на късмета в най-горния триъгълник, като то пада в един от долните два с равна вероятност.



1. Каква е разпределението и очакваната печалба при едно пускане?
2. Ако регламентът е, че имате право да пускате топчета докато някое попадне при печалба 1000лв, колко средно топчета ще пуснете? Колко ще е очакваната Ви печалба?
3. При началната наредеба водещият Ви предлага да пермутира случайно печалбите. Бихте ли се съгласили или бихте останали с началното разпределение? А как бихте наредили печалбите, ако имахте тази възможност?

Поради различни аномалии се усъмнявате, че топчето пада вляво/вдясно с равна вероятност. Нека p е вероятността да се отклони наляво.

4. Пускате 3 топчета и те се озовават при печалба 100 лв. Кое е това p, за което това е най-вероятно?
5. Получавате информация, че предаването разполага с две пирамиди: една с $p = 1/2$ и една с $p = 1/3$. Тъй като не знаете коя използват в момента, можете да приемете, че вероятността е равна за коя да е от тях. Ако при две пускания топчетата се озовават по средата (700 лв), каква е апостериорната вероятност да е избрана машината с $p = 1/3$

74) 1. Нека X = печалба от 1 пускане

X	100	250	500	700	1000
P	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{100.4+250.4+500.1+700.6+1000.1}{16} = \frac{7100}{16} \approx 443$$

2. X = # опити до уцелване на 1000лв.
$X \sim Ge(\frac{1}{16})$
$\mathbb{E}[X] = 16$ опита до уцелване на 1000лв.
Трябва да сметнем печалбата за 15-те опита, в които знаем, че не улучваме 1000лв. + печелившия опит

$\mathbb{E}[X \mid X \neq 1000]$	100	250	500	700
	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$

$$15.\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid X \neq 1000]] = 15\left[\frac{4.100+4.250+1.500+6.700}{15}\right] = \frac{6100.\cancel{15}}{\cancel{15}}$$

$\Rightarrow 6100 + 1000 = 7100$

3. Нека Z_i = сума в клетка i
$Z_i \sim Unif(\{1000, 100, 700, 250, 500\})$
$\mathbb{E}[Z_i] = \frac{2550}{5} = 510$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\text{печалба}] = 510 > 443 \Rightarrow$ бих се съгласил да пермутирам

Ще подредя печалбите в следния ред:
100 700 1000 500 250

5. При $p = \frac{1}{2}$ вероятността за 2 топчета в 700лв. $\left[6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$
$p = \frac{1}{3}$ — — — $= \left[6\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{8}{27}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{8}{27}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{8}{27}\right)^2} \approx 32\%$$

4. $\mathbb{P}$(да попадне 3 пъти в 100 =: A)

Пътят до 100 е 3 наляво 1 надясно

$$\mathbb{P}(A) = [4 \cdot p^3(1-p)]^3 = 64 \cdot p^9(1-p)^3 =: f(p)$$

$$f'(p) = 9 \cdot 64 \cdot p^8(1-p)^3 - 3 \cdot 64 p^9(1-p)^2 = 576 p^8 (1-p)^3 - 192 p^9 (1-p)^2$$

$$f'(p) = 0 \Leftrightarrow \overset{3}{\cancel{576}} \cancel{p^8} (1-p)^{\cancel{3}} = \cancel{192} p^{\cancel{9}} \cancel{(1-p)^2}$$

$$3(1-p) = p$$

$$3 - 3p = p$$

$$4p = 3$$

$$p = \frac{3}{4}$$