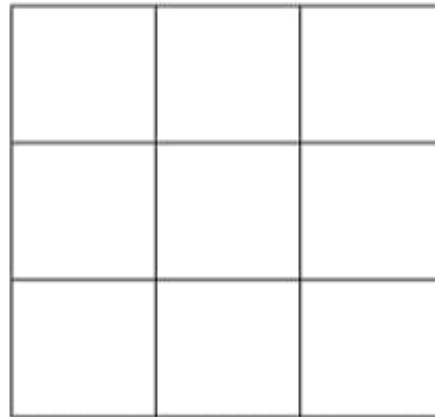
 **Задача 65.** Да предположим, че всяка секунда стреличка попада в случайно квадратче на решетката по-долу.



- (0.5 т.) Колко е очакваното време докато във всяко квадратче има поне по една стреличка?
- (0.3 т.) Колко е очакваното време до първия момент, в който има две стрелички в някое от квадратчетата?
- (0.2 т.) Можете ли да обобщите, ако решетката е $n \times n$?

65) $X_i = \#$ сіреники до потрадення в квадрат $\sim \text{Ge}(\frac{1}{9})$

$$\mathbb{E}[\max\{X_1, \dots, X_3\}]$$

до першо квадрате $\rightarrow \frac{1}{9}$

суд то до 2-ро квадрате $\rightarrow \frac{9}{8}$

суд 2-ро до 3-ю квадрате $\rightarrow \frac{9}{7}$

меду 8-мо и 9-ю квадрате $\rightarrow \frac{9}{1}$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$Y_i = \#$ сіреники до уцелване на i разл. квадрата след уцелване на $i-1$, $i=1, 9$

$$Y_i \sim \text{Ge}(\frac{10-i}{9})$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} Y_i = \frac{9}{10-i}$$

$$\mathbb{E}[\text{доуо сіреники}] = \mathbb{E}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_9] = 1 + \frac{9}{8} + \frac{9}{7} + \dots + \frac{9}{1} \cdot 9(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9})$$

2. $X = \#$ брои неуспехи, до 2 сіреники в един квадрат

$$X \sim \text{NB}(2, \frac{1}{9})$$

$$\mathbb{E}[X] = r \cdot \frac{q}{p} = 2 \cdot \frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{9}} = 16 \text{ неуспеха}$$

\Rightarrow Ожакваното време е 18

3. Ако решейката е $n \times n$

$$X \sim \text{NB}(2, \frac{1}{n^2})$$

$$\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{\frac{n^2-1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 2n^2 - 2$$

\Rightarrow Ожакваното време е $2n^2$

$$Y_i \sim \text{Ge}(\frac{n^2-i}{n^2})$$

$$\mathbb{E}[Y_i] = \frac{n^2}{n^2-i}$$

$$\mathbb{E}[\text{доуо сіреники}] = \mathbb{E}[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n] = n^2(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$$