

 **Задача 75.** Разполагаме с две кутии с топки. В първата има 4 бели и 6 черни, а във втората - 7 бели и 3 черни. От всяка урна случайно се изважда по 1 топка. Към извадените две топки се прибавя една бяла и се поставят в трета кутия.

1. Каква е вероятността случайно избрана топка от третата кутия да бъде бяла?
2. Да допуснем, че теглим от третата кутия по 1 топка с връщане, докато изтеглим бяла. Нека X е броят изтеглени топки от третата кутия. Какво е очакването на X ? Мислите ли, че X има геометрично разпределение?

(75) а) Нека A = изтеглили сме бѣла от третата кутия
 B_{xy} = изтеглили се x от първата и y от втората кутия, $x, y \in \{B, W\}$
 W = бѣла, B = черна

Изпитано B_{xy} , $x, y \in \{B, W\}$ образува пълна група събития, от
 $\sigma(B) \Rightarrow$

$$P(A) = P(A|B_{BB})P(B_{BB}) + P(A|B_{BW})P(B_{BW}) + P(A|B_{WB})P(B_{WB}) + P(A|B_{WW})P(B_{WW})$$

$$P(B_{BB}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{18}{100} \quad P(B_{BW}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{42}{100} \quad P(B_{WB}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} \quad P(B_{WW}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{100}$$

$$P(A|B_{BB}) = \frac{1}{3} \quad P(A|B_{BW}) = P(A|B_{WB}) = \frac{2}{3} \quad P(A|B_{WW}) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{42}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{28}{100} = \frac{14 + 56}{100} = \frac{7}{10}$$

б) Нека A = теплим бѣла от третата кутия
 X = # точки изтеглени от третата кутия

$$E[X] = E[X|B_{WW}]P(B_{WW}) + E[X|B_{BW}]P(B_{BW}) + E[X|B_{WB}]P(B_{WB}) + E[X|B_{BB}]P(B_{BB})$$

$$\text{При } B_{WW}, X \sim \text{Ge}(1) \Rightarrow E[X|B_{WW}] = 1$$

$$B_{BW}, X \sim \text{Ge}(\frac{2}{3}) \Rightarrow E[X|B_{BW}] = \frac{3}{2}$$

$$B_{BB}, X \sim \text{Ge}(\frac{1}{3}) \Rightarrow E[X|B_{BB}] = 3$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{28}{100} + \frac{3}{2} \cdot \frac{54}{100} + 3 \cdot \frac{18}{100} = \frac{28 + 81 + 54}{100} = \frac{163}{100}$$

$$\text{Да допуснем, че } X \sim \text{Ge}(\frac{7}{10}) \Rightarrow E[X] = \frac{10}{7} \neq \frac{163}{100}$$

$\Rightarrow X$ не е геометрично разпределение.