СУ „Св. Климент Охридски”, Факултет по Математика и Информатика

УВОД В ТЕОРИЯТА НА ДИНАМИЧНИТЕ СИСТЕМИ И ХАОСА

Изготвил:

Александар Станковски,

Информационни системи 2 курс, ФН:855202

Бърза Фуриева Трансформация за обработване на изобржения

Април 27, 2005

1.Фон

Трансформацията на Фурие е революционерна концепция която я ползват математици от целия свят повече от век. По принцип концепцията на Фуриевата Трансформация може да бъде изразена като интеграл от синус и косинус умножен по функцията. Няма значение колко сложна е функцията стига да отговаря на някои леки математически условия. Тя може да бъде реконструирана на пълно чрез обратен процес. Тези важни свойства на Фуриевата Трансформация ни позволяват да работим в честотната област и след това да се върнем към оргиналния домейн без да изгубим някаква информация.

2.Фуриева Трансформация и Инверзия

Трансформацията на Фурие F(u), на една променлива непрекъсната функция, f(x) е дефинирана чрез уравнението

$$F(u) = \int_{\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} \, dx \tag{1}$$

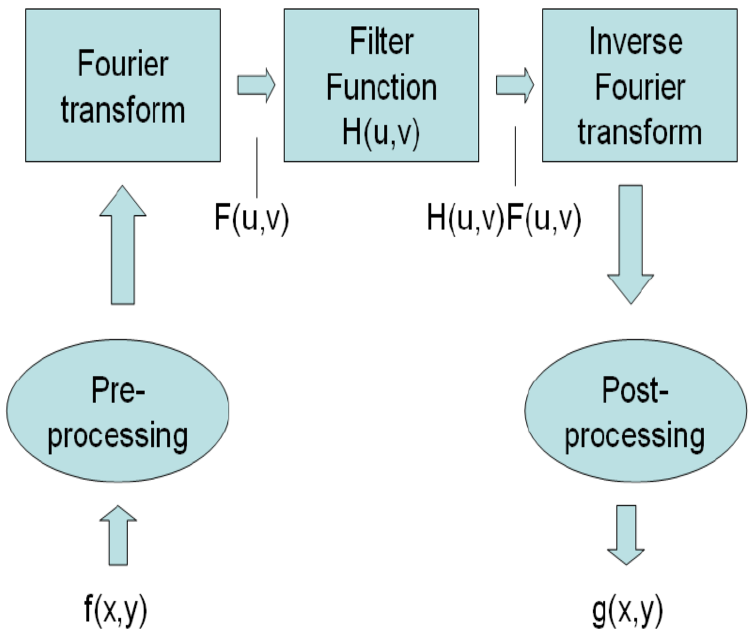
където j=√-1. Обратно, при дадено F(u) може да се получи f(x) с помоща на обратната трансформация на Фурие

$$f(x) = \int_{\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} \, du \tag{2}$$

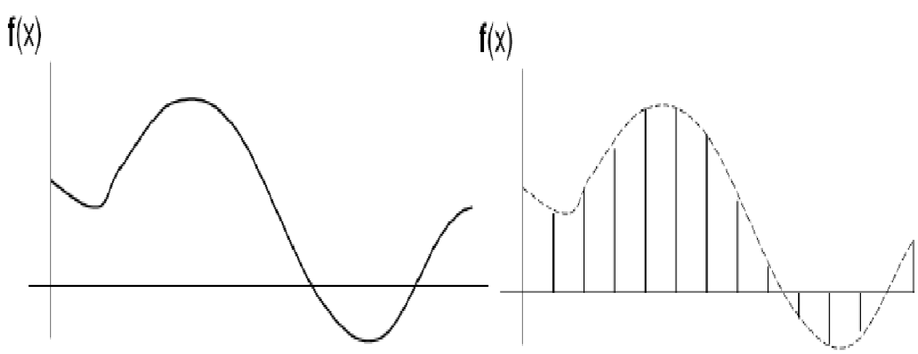
Тези две уравнения обясняват трансформацията на Фурие по двойка, което показва фактът че първо началната функция може да бъде възтановена без загуба на информация.

Тези уравнения могат да бъдат лесно удължени до две проениливи u и v:

$$F(u,v) = \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} \, dxdy$$



Фигура 1: Основна стъпка за филтриране на честотната област.



Фигура 2: Ляво: непрекъсната функция f(x). Дясно: дискретна функция f(x).
Заключение: обратна трансформация,

$$f(x,y) = \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)}\, du dv$$

3.Дискретна Фуриева Трансформация (DFT)

Откако цифровите изображения са модел на дискретната функция, ние сме по заинтересовани за Фуриевата трансформация. С една дума дискретната Фуриевата трансформация е претставена чрез уравнението

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M} \qquad \text{for} \qquad u = 0, 1, 2, ..., M-1 \tag{3}$$

Да запомним че f(x) в (3) е дискретната функция за една променлива където f(x) в (1) и (2) са непрекъснати функции. Вижте фигура 2. По същтия начин за дадено F(u) ние можем да получим оргиналната дискретна функция f(x) по обратната
Дискретна Фуриева Транофрмация (DFT):

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{j2\pi ux/M} \qquad \text{for} \qquad x = 0, 1, 2, ..., M-1 \tag{4}$$

Дискретната Фуриева Трансформация (3) и нейната обратна функция (4) е основата за наичесто използваната обработка на изобржения.

Концепцията на домейна на честотата следва директно от формулата на Оилер (Euler):

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{5}$$

Заместваики този израз в равенство (3) и като се използва факта че cos(-Ө)=cos(Ө), ние получаваме

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)[\cos(2\pi ux/M) - j\sin(2\pi ux/M)] \tag{6}$$

За u = 0,1,2…., M-1. По този начин всяки термин от Фуриевата трансформция F(u) се състои от сумата от всички стоиности на функцията f(x). Стойностите на f(x) са умножени по синус и косинус от различните честоти. F(u) е също тъка наречен честотна компомента която показва разпределението на f(x) със всеки x към честотата 2Пux/M. Въпреки че x също засяга честотите, те се сумират и те правят същия принос за всяка стойност на u. Съответно стойностите на f(x) са наречени времени компоненти или празни компоменти. Дискретната Фуриева Трансформация (DFT) може да се разглежда като реконструкция на времената компонента M във честотна компонента M. От друга страна обратната Дискретната Фуриева трансформация (DFT) е процес които превърща M честотната компонента F(u) във M времена компонента.

Полезна аналогия е да се сравни Фуриевата трансофрмация на стъклена призма. Призмата физически да се раздели на бяла светлина в различни цвятови компоненти, всяка от която да зависи от неината честота. Фуриевата трансформация може да се разглежда като математическа призма която разделя функцията f(x) на различни компоменти основани на честотното съдържание.

Разшироването на едно-димензионалната Дискретна Фуриева Трансформация (DFT) и обратна функция на Дискретна Фуриева Трансформация (DFT) в две димензии е ясна. Дискретната Фуриева Трансофрмация на функцията на изображенията f(x,y) от размера MxN се определя чрез уравнението:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \tag{7}$$

Като в първия случаи този израз трябва да се ползва за изчисляване на стойности от u=0,1,2… M-1 и също тъка за v = 0,1,2… N-1. По сътщия начин за дадени F(u,v), ние ще получим f(x,y) чрез 2-D обратната трансформация на Фурие дадена чрез

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)} \tag{8}$$

За x = 0,1,2… M-1 и y = 0,1,2…N-1.

4.Бърза Фуриева Трансформация (FFT)

Една от главните причини че Дискретната Фуриева Трансформация (DFT) се превърна в основен инструмент в процеса на сигнала беше развитието на Бързата Трансформация на Фурие. Изчисляването на 1-D Дискретна Фуриева Трансформация (DFT) на M точки използвайки уравнение (3) директно изисква на редът на M умножение. Бърза Фуриева Трансформация (FFT) осъществява една и съща задача в реда на M $\log_2$ M операции. На пример ако M=1024, директния метод ще изисква около 10 на 6та операции докато Бързата Фуриева Трансформация (FFT) ще изисква приближително 10 на 4та операции. Това се изчислява на средната стойност 100 за 1. Освен това колкото по голям е проблема толко по голяма е изчислителната средна стойност. Тук ние се фокусираме на 1-D Бърза Фуриева Трансформация (FFT). 2-D бързата Фуриева трансформация може да бъде получена чрез последователно преминаване в 1-D алгоритъм за траснформиране.

FFT алгоритъма разработен за тази точка се основа на така наречениният метод за поседователно удвояване. Сега ние изразяваме равенство (3) във формата

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{ux} \tag{9}$$

където

$$W_M = e^{-j2\pi/M} \qquad \text{so} \qquad W_M^{ux} = e^{-j2\pi ux/M} \tag{10}$$

и номерата на точките M е допсунато да бъдат

$$M = 2^n \tag{11}$$

където n ще бъде положително число. M може да бъде изразен като

$$M = 2K \tag{12}$$

където K също трябва да бъде положително цяло число. Заместваики равенството (12) във равенството (9) добиваме

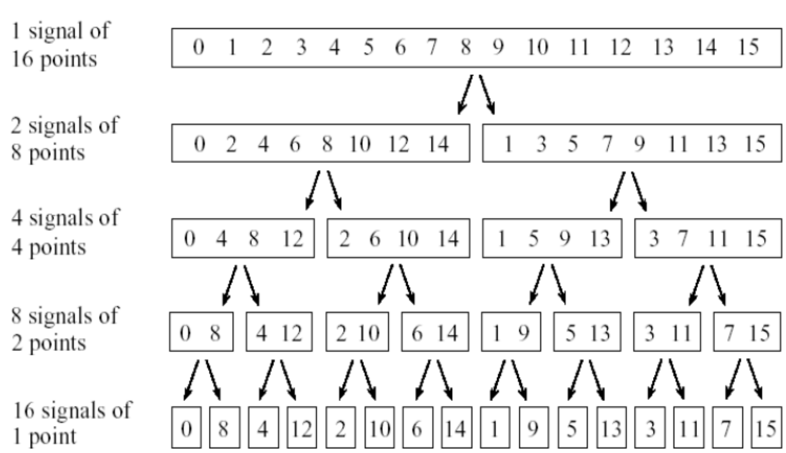
$$
\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2K}\sum_{x=0}^{2K-1} f(x) W_{2K}^{ux} && (13) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{2K}^{u(2x)} + \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{2K}^{u(2x+1)}\Big] && (14)
\end{aligned}
$$

Все пък може да бъде прикажано ползвайки равенството (11) като $W_{2K}^{2uk} = W_{K}^{ux}$, така че уравнение (14) ще бъде прикажано като

$$
F(u) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{K}^{ux} + \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{K}^{ux} W_{2K}^{u}\Big] \qquad (15)
$$

Дефинирайки

$$
\begin{aligned}
F_{even}(u) &= \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{K}^{ux} && (16) \\
F_{odd}(u) &= \frac{1}{K}\sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{K}^{ux} && (17)
\end{aligned}
$$



Фигура 3: Разлагане на Бързата Фуриева Трансформация (FFT). Сигнала от точката M е разложен на повече M сигнали, всяка от която съдържа по една точка. Всяки етап използва преплетено разлагане, разделяики четните от нечетните номера.

За u = 0,1,2… k-1. Уравнението (15) ще се превърне в

$$F(u) \quad = \quad \frac{1}{2}\Big[F_{even}(u) + F_{odd}(u)W_{2K}^{u}\Big] \tag{18}$$

Също,

$$W_M^{u+M} = W_M^u \text{ and } W_{2M}^{u+M} = -W_{2M}^u$$

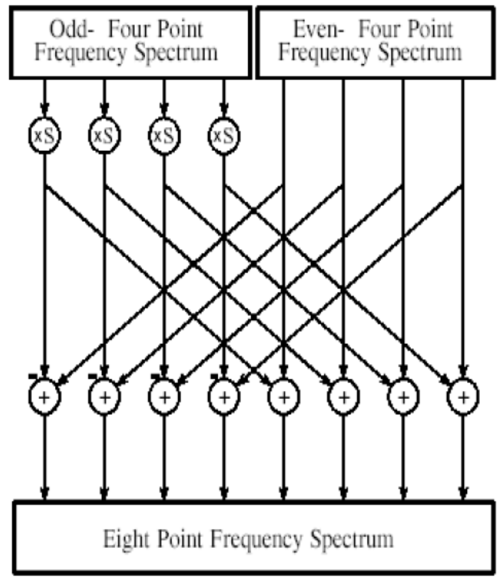
$$F(u+K) \quad = \quad \frac{1}{2}\Big[F_{even}(u) - F_{odd}(u)W_{2K}^{u}\Big] \tag{19}$$

Внимателния анализ на уравненията (16) – (19) разкрива някои итересни свойства на тези изрази. Трансформацията на M точката може да бъде изчислена чрез разделяне на първоначалния израз на две части. Както е получено в уравнението (18) и (19). Изчисляването на първата половина от F(u) изисква оценка на трансформацията на две (M/2) точки дадена в уравненията (16) и (17). Получените стоиности F_{even} (u) и F_{odd} (u) са тогава заместени в уравнение (18) за получване на F(u) за u = 0,1,2… (M/2-1). Другата половина след това се дава директно от уравнение (19) без допълнителни оценки за трансформация.

Бързата Фуриева Трансформация (FFT) работи чрез разлагане на M времения сигнал във M времен сигнал който се състои от една точка. Втората стъпка е за изчисляване на M спектъра на честотата съответващи на тези M времени домейни сигнали. На края M спектарите са съединети в един честотен спектър.

• Фигура 3 Показва пример на разлагането на времения домейн. В този пример 16 тия сигнал се разлага чрез четири отделни етапи. Разграждането продължава докато има M сигнали, съставени от една точка. Съществуват $\log_2$ M етапи необходими в това разграждане.

• Следващата стъпка във алгоритамъ за Бързата Фуриева Трансформация (FFT) е да се намери честотния спектар на една точка във времения домейн. Честотния спектар на една точка е равен на себе си. Това означава че нищо не е необходимо за да се направи тази стъпка.



Фигура 4: Тази схема показва метода на комбиниране на две 4 точкови четотни спектъри в един единствен 8 точков честотен спектър. XS операцията означава че сигналът се умножава по синусойда с подходящо изберена честота.

• Последната стъпка е да се комбинират M честотните спектри в обратен ред от разлагането на времения домейн. В първия етап 16 честотния спектър (1 точка за всеки) се синтезират в 8 честотни спектри (2 точки за всеки). През втория етап 8 честотния спектър (2 точки за всеки) се синтезират в четири честотни спектри (4 точки за всеки) и така нататък. Се докато се стигне до 16 точков честотен спектър. Вижте фигура 4.

Препоръки

[1] Gonzalez and Woods Digital Image Processing 2nd Edition, Prentice Hall 2002.
[2] Steven W. Smith The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, California Technical Publishing