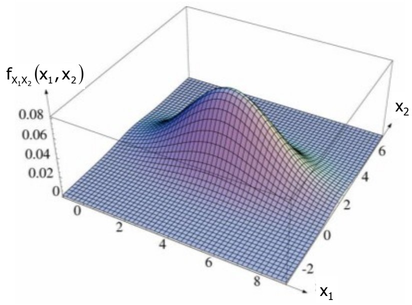
Rozkład normalny 2-wymiarowy niezależnych zmiennych losowych

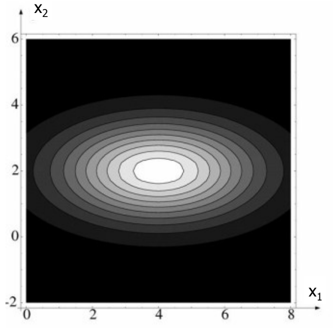
$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2) \qquad f_{X_1}(x_1)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \qquad f_{X_2}(x_2)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}$$

μ_1, μ_2 – wartości średnie

σ_1, σ_2 – odchylenia standardowe zmiennych losowych X_1 i X_2





$\mu_1 = 4$
$\mu_2 = 2$
$\sigma_1 = 2$
$\sigma_2 = 1$

W przypadku rozkładów normalnych: jeżeli zmienne losowe są nieskorelowane, to są także niezależne.

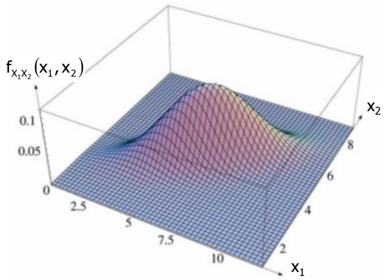
Rozkład normalny 2-wymiarowy zmiennych losowych skorelowanych

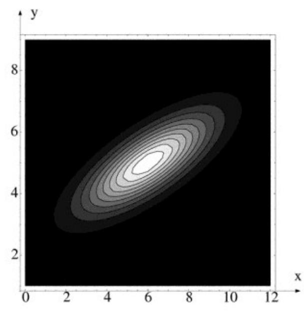
$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{1,2}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{1,2}^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho_{1,2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

μ_1, μ_2 – wartości średnie

σ_1, σ_2 – odchylenia standardowe

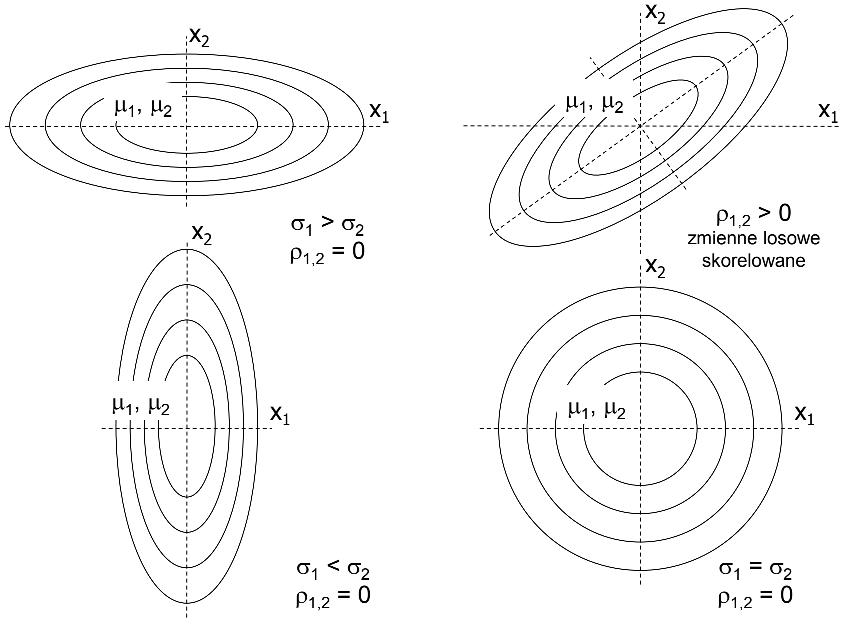
$\rho_{1,2}$ – współczynnik korelacji zmiennych losowych X_1 i X_2





$\mu_1 = 6$
$\mu_2 = 5$
$\sigma_1 = 2$
$\sigma_2 = 1$
$\rho_{1,2} = 0{,}75$

Rozkład normalny 2-wymiarowy - warstwice



Standardowy rozkład normalny 2-wymiarowy

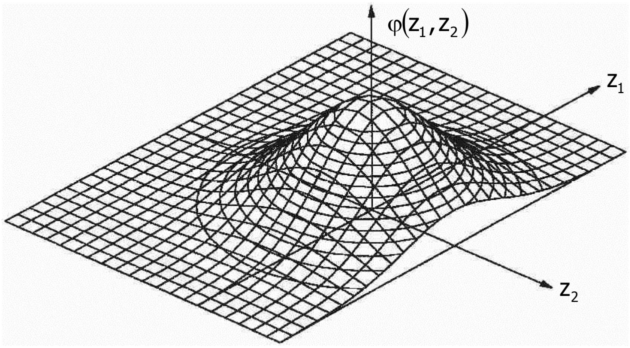
$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(z_1^2 + z_2^2\right)}$$

$$\varphi(z_1, z_2) = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2) \qquad \varphi(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_1^2} \qquad \varphi(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_2^2}$$

μ_1=0, μ_2=0 – wartości średnie

σ_1=1, σ_2=1 – odchylenia standardowe

$\rho_{1,2}$=0 – współczynnik korelacji zmiennych losowych Z_1 i Z_2



Prawdopodobieństwo awarii – wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda

Funkcja stanu granicznego:

$$g(R,Q) = R - Q$$

R, Q – nośność elementu konstrukcyjnego i efekt obciążenia niezależne zmienne losowe o rozkładach normalnych $f_R(x_R)$ i $f_Q(x_Q)$, o parametrach: μ_R, σ_R i μ_Q, σ_Q

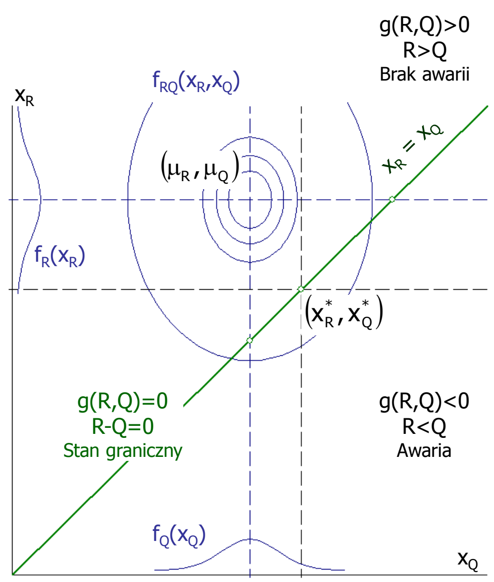
Stan bezpieczny (bezawaryjny, pożądany): $g(R,Q) > 0$

Stan graniczny: $g(R,Q) = 0$

Stan niebezpieczny (awarii, niepożądany): $g(R,Q) < 0$

Prawdopodobieństwo awarii: $P_f = P\left(g(R,Q) < 0 \right)$

Prawdopodobieństwo awarii – wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda



$$P_f = P\left(g(R,Q) < 0 \right)$$
$$= \iint_{g<0} f_{RQ}(x_R, x_Q)\, dx_R dx_Q$$
$$= \iint_{g<0} f_R(x_R) f_Q(x_Q)\, dx_R dx_Q$$

Prawdopodobieństwo awarii – wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda

R, Q - zmienne losowe o rozkładach normalnych

$R - Q = 0$ - równanie stanu granicznego

$x_R - x_Q = 0$ - prosta stanu granicznego w układzie współ. x_R, x_Q

$f_{RQ}(x_R, x_Q)$ - 2-wym. rozkład normalny

1. Standaryzacja zmiennych losowych:

$$Z_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \qquad R = \mu_R + Z_R\sigma_R$$

$$Z_Q = \frac{Q - \mu_Q}{\sigma_Q} \qquad Q = \mu_Q + Z_Q\sigma_Q$$

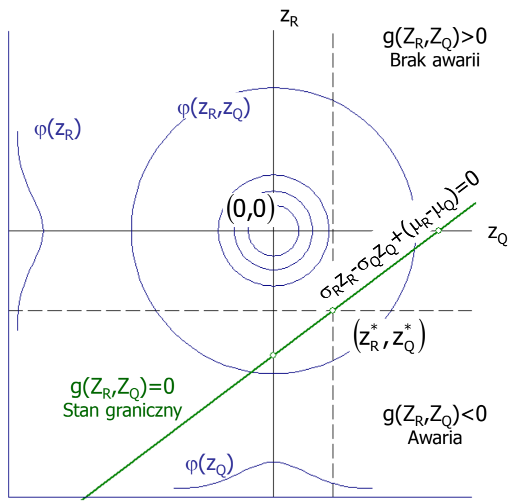
Z_R, Z_Q - zmienne losowe standaryzowane

$\sigma_R Z_R - \sigma_Q Z_Q + (\mu_R - \mu_Q) = 0$ - równanie stanu granicznego

$\sigma_R z_R - \sigma_Q z_Q + (\mu_R - \mu_Q) = 0$ - prosta stanu granicznego w układzie współ. z_R, z_Q

$\varphi(z_R, z_Q)$ - 2-wym. rozkład normalny standardowy

Prawdopodobieństwo awarii – wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda



$$P_f = P(g(Z_R, Z_Q) < 0)$$
$$= \iint_{g<0} \varphi(z_R, z_Q)\,dz_R dz_Q$$
$$= \iint_{g<0} \varphi(z_R)\varphi(z_Q)\,dz_R dz_Q$$

Prawdopodobieństwo awarii – wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda

2. Normalizacja równania prostej granicznego:

$$\sigma_R z_R - \sigma_Q z_Q + (\mu_R - \mu_Q) = 0 \Big/ \frac{-1}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}$$

$$-\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} z_R + \frac{\sigma_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} z_Q - \frac{(\mu_R - \mu_Q)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} = 0$$

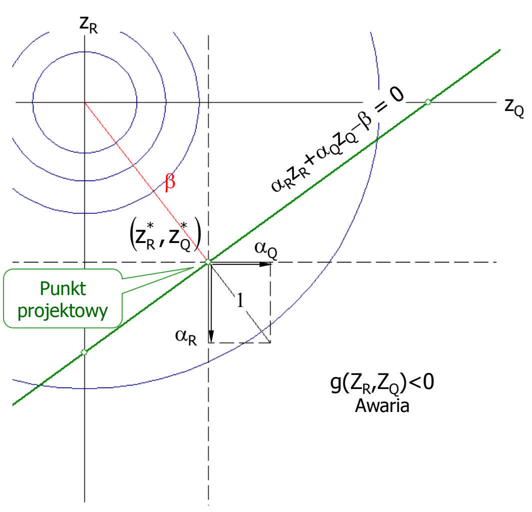
$$\alpha_R z_R + \alpha_Q z_Q - \beta = 0$$

$$\alpha_R = -\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}$$ - cosinusy kierunkowe

$$\alpha_Q = +\frac{\sigma_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}$$

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}$$ - odległość prostej stanu granicznego od początku układu, ze znakiem +/–

Prawdopodobieństwo awarii – wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda



$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}$$

$$\alpha_R = -\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}$$

$$\alpha_Q = +\frac{\sigma_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}$$

$$\alpha_R^2 + \alpha_Q^2 = 1$$

współrzędne punku projektowego:

$$z_R^* = \alpha_R \beta$$

$$z_Q^* = \alpha_Q \beta$$

$$(z_R^*)^2 + (z_Q^*)^2 = \beta^2$$

$$x_R^* = \mu_R + z_R^* \sigma_R$$

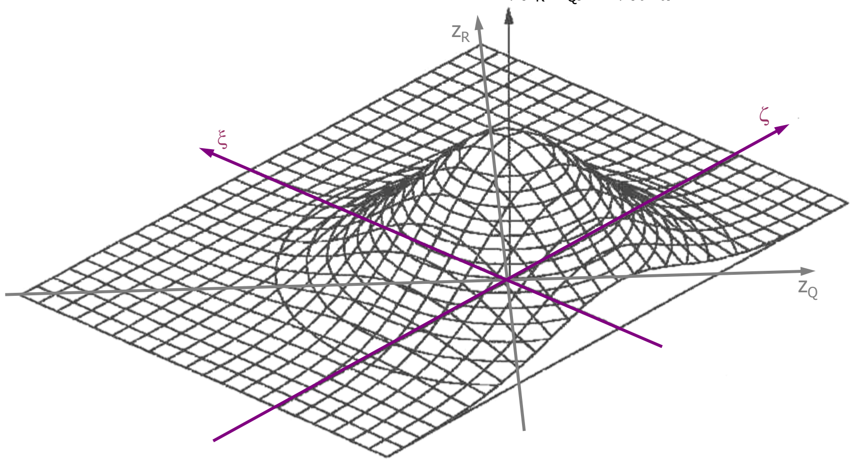
$$x_Q^* = \mu_Q + z_Q^* \sigma_Q$$

$$x_R^* = x_Q^*$$

Prawdopodobieństwo awarii – wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda

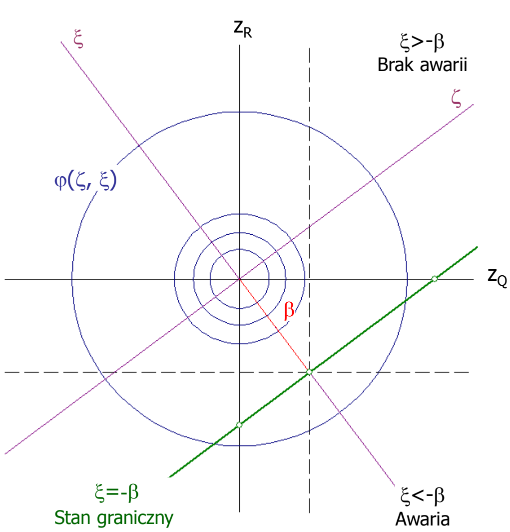
3. Transformacja układu współrzędnych:

$\varphi(z_R, z_Q) = \varphi(\zeta, \xi)$



2-wymiary rozkład normalny standardowy

Prawdopodobieństwo awarii – wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda



$$P_f = P\left(g(z_R, z_Q) < 0\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\beta} \varphi(\zeta, \xi)\, d\zeta\, d\xi$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\zeta)\, d\zeta}_{=1} \cdot \int_{-\infty}^{-\beta} \varphi(\xi)\, d\xi$$

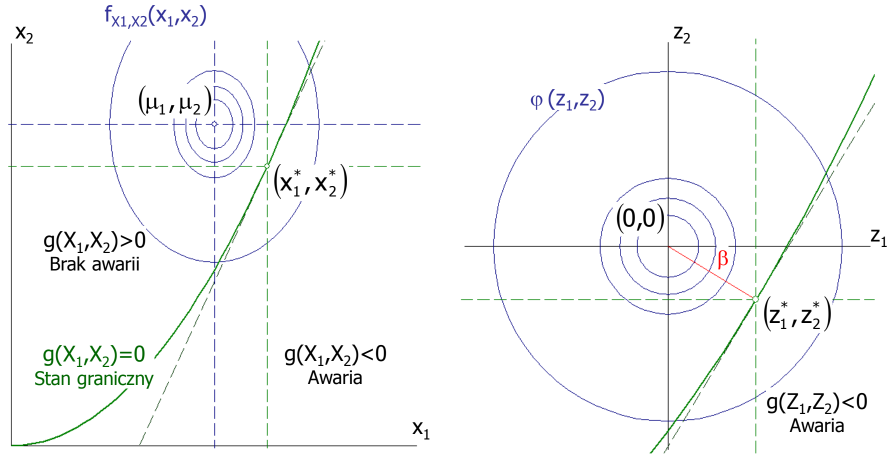
$$= \int_{-\infty}^{-\beta} \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$= \Phi(-\beta)$$

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}$$

Wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda

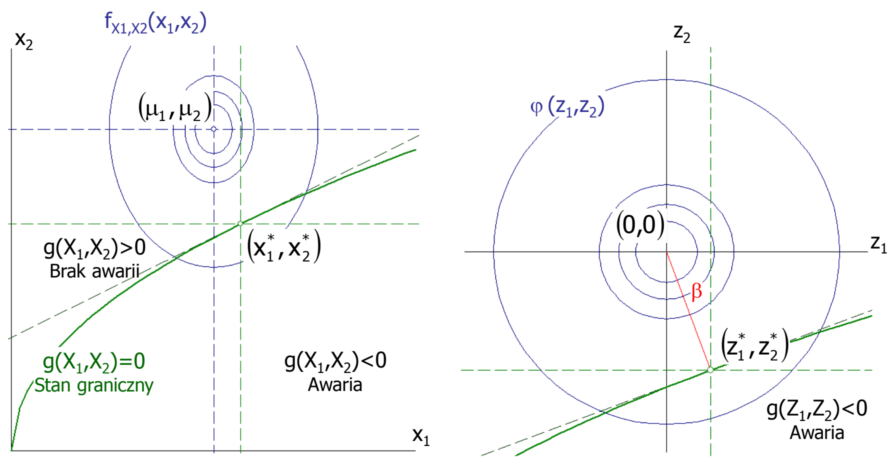
$g(X_1,X_2)$ – nieliniowa funkcja stanu granicznego



$$P_f = P(g(X_1,X_2)<0) = \iint_{g<0} f_{X_1X_2}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

$$P_f = P(g(Z_1,Z_2)<0) = \iint_{g<0} \varphi(z_1,z_2)\,dz_1dz_2 \approx \Phi(-\beta)$$

$g(X_1,X_2)$ – nieliniowa funkcja stanu granicznego



$$P_f = P(g(X_1,X_2)<0) = \iint_{g<0} f_{X_1X_2}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

$$P_f = P(g(Z_1,Z_2)<0) = \iint_{g<0} \varphi(z_1,z_2)\,dz_1dz_2 \approx \Phi(-\beta)$$

Zadanie

Nośność belki stalowej na zginanie R i największy moment zginający Q są niezależnymi zmiennymi losowym, o rozkładach normalnych, o parametrach:

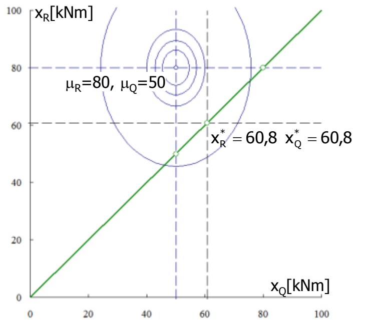
μ_R = 80 kNm σ_R = 8,0 kNm μ_Q = 50 kNm σ_Q = 6,0 kNm

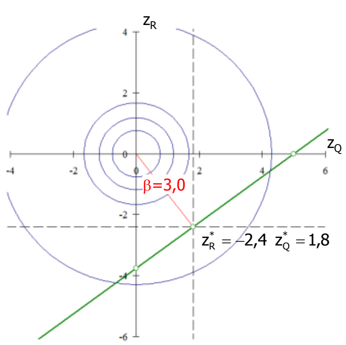
Na opisanym przykładzie wyjaśnić ideę obliczania prawdopodobieństwa awarii elementów konstrukcyjnych w oparciu o wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda.

Rozwiązanie

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} = \frac{80 - 50}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{30}{10} = 3,0$$

$$P_f = P(R < Q) = \Phi(-\beta) = \Phi(-3,0) = 1,35 \cdot 10^{-3} = 0,00135$$





Rozwiązanie

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} = \frac{80 - 50}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{30}{10} = 3,0$$

$$P_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-3,0) = 1,35 \cdot 10^{-3} = 0,00135$$

$$\alpha_R = -\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} = -\frac{8}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = -0,8$$

$$\alpha_Q = +\frac{\sigma_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} = +\frac{6}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 0,6$$

$$z_R^* = \alpha_R \beta = -0,8 \cdot 3,0 = -2,4$$

$$z_Q^* = \alpha_Q \beta = 0,6 \cdot 3,0 = 1,8$$

$$x_R^* = \mu_R + z_R^* \sigma_R = 80 + (-2,4) \cdot 8 = 60,8 \text{ kNm}$$

$$x_Q^* = \mu_Q + z_Q^* \sigma_Q = 50 + 1,8 \cdot 6 = 60,8 \text{ kNm}$$

$$\frac{(\mu_R - \mu_Q)}{\sigma_Q} = \frac{\beta}{\alpha_Q} = 5,00 \qquad -\frac{(\mu_R - \mu_Q)}{\sigma_R} = \frac{\beta}{\alpha_R} = -3,75$$

Zadanie

Rozpiętość belki swobodnie podpartej wynosi l = 4 m.

Wytrzymałość materiału f i wskaźnik przekroju belki W
są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, o parametrach:
μ_f = 400 MPa σ_f = 32 MPa μ_W = 50 cm^3 σ_W = 3 cm^3

Na belkę działają obciążenia ciągłe równomiernie rozłożone q_1 i q_2 – niezależne zmienne losowe o parametrach:

a) μ_{q1} = 2,0 kN/m σ_{q1} = 0,4 kN/m μ_{q2} = 2,0 kN/m σ_{q2} = 0,4 kN/m

b) μ_{q1} = 2,0 kN/m σ_{q1} = 0,4 kN/m μ_{q2} = 4,0 kN/m σ_{q2} = 0,8 kN/m

c) μ_{q1} = 2,0 kN/m σ_{q1} = 0,4 kN/m μ_{q2} = 8,0 kN/m σ_{q2} = 1,6 kN/m

Na opisanych przykładach wyjaśnić ideę obliczania prawdopodobieństwa awarii elementów konstrukcyjnych w oparciu o wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda.

Zadanie

Rozpiętość belki swobodnie podpartej wynosi l = 4 m.

Wytrzymałość materiału f jest zmienną losową o rozkładzie normalnym,
o parametrach: μ_f = 400 MPa σ_f = 40 MPa

Wskaźnik przekroju belki nie jest losowy i W wynosi:
a) 50 cm^3 b) 75 cm^3 c) 25 cm^3

Na belkę działają obciążenia ciągłe równomiernie rozłożone q_1 i q_2
– niezależne zmienne losowe o parametrach:

μ_{q1} = 2,0 kN/m σ_{q1} = 0,4 kN/m

μ_{q2} = 4,0 kN/m σ_{q2} = 0,8 kN/m

Na opisanych przykładach wyjaśnić ideę obliczania prawdopodobieństwa awarii elementów konstrukcyjnych w oparciu o wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda.

Zadanie

Rozpiętość belki swobodnie podpartej wynosi l = 4 m.

Wytrzymałość materiału f i wskaźnik przekroju belki W
są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, o parametrach:

μ_f = 400 MPa σ_f = 32 MPa μ_W = 50 cm^3 σ_W = 3 cm^3

Na belkę działają:

a) dwa niezależne obciążenia ciągłe równomiernie rozłożone q_1 i q_2
o rozkładach normalnych, o parametrach:
$\mu_{q1} = \mu_{q2}$ = 2,0 kN/m $V_{q1} = V_{q2}$ = 0,2

b) jedno obciążenie ciągłe równomiernie rozłożone q_3 o parametrach:
μ_{q3} = 4,0 kN/m V_{q3} = 0,2

c) jedno obciążenie ciągłe, które nie jest losowe

q_4 = 4,0 kN/m

Na opisanych przykładach wyjaśnić ideę obliczania prawdopodobieństwa awarii elementów konstrukcyjnych w oparciu o wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda.

Zadanie

Rozpiętość belki swobodnie podpartej wynosi l = 4 m.

a) wytrzymałość materiału f i wskaźnik przekroju W
są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych o parametrach:
μ_f = 400 MPa σ_f = 32 MPa μ_W = 50 cm^3 σ_W = 3 cm^3

b) wytrzymałość materiału f jest zmienną losową
wskaźnik przekroju W nie jest losowy
μ_f = 400 MPa σ_f = 32 MPa W = 50 cm^3

c) wytrzymałość materiału f i wskaźnik przekroju W nie są losowe
f = 400 MPa W = 50 cm^3

Na belkę działają obciążenia ciągłe równomiernie rozłożone q_1 i q_2
– niezależne zmienne losowe o parametrach:
μ_{q1} = 2,0 kN/m σ_{q1} = 0,4 kN/m
μ_{q2} = 4,0 kN/m σ_{q2} = 0,8 kN/m

Na opisanych przykładach wyjaśnić ideę obliczania prawdopodobieństwa awarii elementów konstrukcyjnych w oparciu o wskaźnik niezawodności Hasofera-Linda.