Układy konstrukcyjne

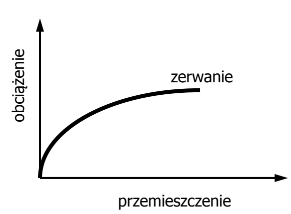
Konstrukcja budowlana jest układem wzajemnie połączonych elementów.
Awaria jednego z elementów nie jest równoznaczna z awarią całego układu.

- ✓ Rodzaje elementów (materiałów):
  - elementy kruche
  - elementy ciągliwe.
- ✓ Rodzaj układów:
  - układy szeregowe
  - układy równoległe
  - układy mieszane.
- ✓ Korelacja między elementami:
  - elementy nieskorelowane
  - elementy częściowo skorelowane
  - elementy całkowicie skorelowane.

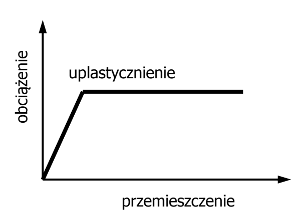
Elementy kruche i elementy ciągliwe

Element kruchy (idealnie kruchy)
- traci zdolność przenoszenia obciążenia po przekroczeniu stanu granicznego nośności, przykład: element betonowy, belka drewniana.

Element ciągliwy (idealnie ciągliwy)
- zachowuje zdolność przenoszenia obciążenia po przekroczeniu stanu granicznego nośności, przykład: element ze stali niskowęglowej (po osiągnięciu granicy plastyczności)



Element kruchy



Element ciągliwy

Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Układy szeregowe i układy równoległe

Układ szeregowy (układ najsłabszego ogniwa)
- ulegnie awarii, jeżeli ulegnie awarii <u>jeden</u> z jego elementów;
  awaria <u>jednego</u> elementu powoduje awarię całego układu;
  przykład: łańcuch złożony z wielu ogniw.

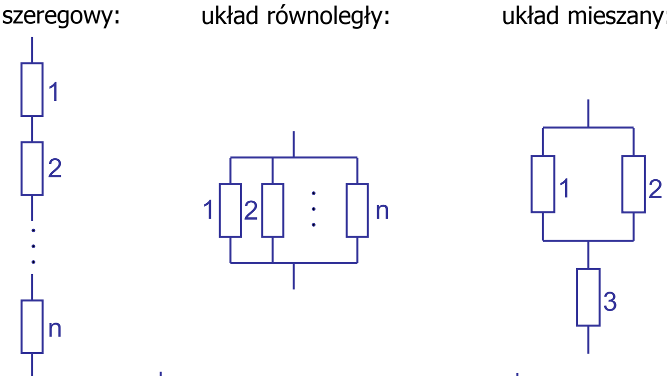
Układ równoległy
- ulegnie awarii, jeżeli ulegną awarii <u>wszystkie</u> jego elementy;
  do awarii całego układu konieczna jest awaria wszystkich elementów;
  przykład: lina spleciona z wielu drutów.

Układ szeregowy | Układ równoległy

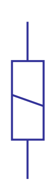
Układy szeregowe, układy równoległe, układy mieszane

Symbole:

układ szeregowy: | układ równoległy: | układ mieszany:



element ciągliwy:

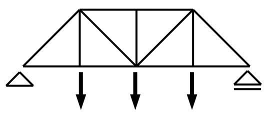


element kruchy:

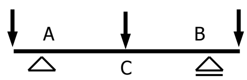
Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Układy szeregowe

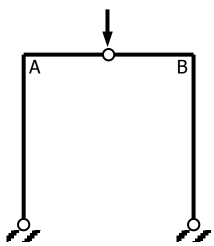
Układy statycznie wyznaczalne
- awaria jednego elementu powoduje awarię układu.



Jeżeli ulegnie awarii jeden z prętów, cała kratownica ulegnie awarii.



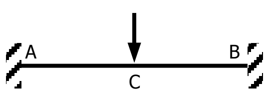
Jeżeli powstanie przegub plastyczny A, B lub C, cała belka ulegnie awarii.



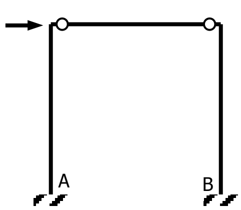
Jeżeli powstanie przegub plastyczny A lub B, cała rama ulegnie awarii.

Układy równoległe

Układy statycznie niewyznaczalne
- aby nastąpiła awaria układu potrzebna jest awaria wszystkich jego elementów.



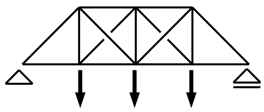
Aby nastąpiła awaria belki, konieczne jest powstanie przegubów plastycznych A, B i C.



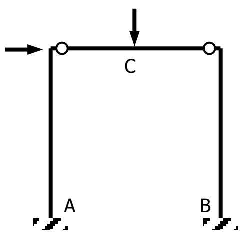
Aby nastąpiła awaria ramy, konieczne jest powstanie przegubów plastycznych A i B.

Układy mieszane

Układy statycznie niewyznaczalne
- awaria jednego z elementów nie powoduje awarii układu.



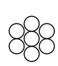
Aby nastąpiła awaria kratownicy, musi ulec awarii każdy z dwóch elementów przekątnych.



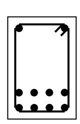
Aby nastąpiła awaria ramy, muszą powstać
albo dwa przeguby plastyczne A i B
albo przegub plastyczny C.

Układy równoległe i układy mieszane

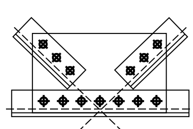
Nośność układu jest sumą nośności jego elementów.



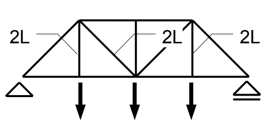
Układy równoległe:
- lina



- pręty zbrojeniowe w elemencie żelbetowym

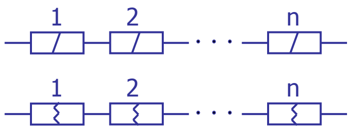


- połączenie nitowe, śrubowe



Układ mieszany
- kratownica statycznie wyznaczalna o prętach wykonanych z więcej niż jednego kształtownika

Układ szeregowy; elementy nieskorelowane



n – liczba elementów
R – nośność układu; zmienna losowa
R_i – nośność i-tego elementu; zmienna losowa
q – wielkość obciążenia działającego na układ; stała
q_i – efekt obciążenia w i-tym elemencie; stała

Prawdopodobieństwo awarii układu:

$$
\begin{aligned}
P_f &= P(R < q) \\
&= 1 - P(R \geq q) \\
&= 1 - P\big((R_1 \geq q_1) \cap (R_2 \geq q_2) \cap \ldots \cap (R_n \geq q_n) \big) \longleftarrow \text{Niezależne zdarzenia losowe} \\
&= 1 - P(R_1 \geq q_1) \cdot P(R_2 \geq q_2) \cdot \ldots \cdot P(R_n \geq q_n) \\
&= 1 - \big(1 - P(R_1 < q_1)\big) \cdot \big(1 - P(R_2 < q_2)\big) \cdot \ldots \cdot \big(1 - P(R_n < q_n)\big) \\
&= 1 - \left(1 - P_{f_1}\right) \cdot \left(1 - P_{f_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - P_{f_n}\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P_{f_i}\right)
\end{aligned}
$$

Przykład

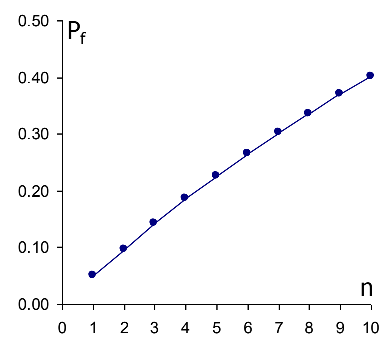
Obliczyć prawdopodobieństwo awarii układu szeregowego *n* niezależnych elementów.
Prawdopodobieństwo awarii elementu P_{fi}=0,05

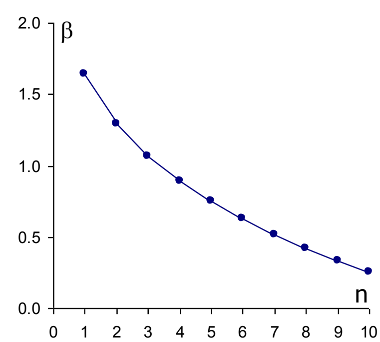
$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P_{f_i}\right) = 1 - (1 - 0{,}05)^n = 1 - 0{,}95^n$$

n	P_f	$\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$
1	0,050	1,64
2	0,098	1,29
3	0,142	1,07
5	0,227	0,75
...	...	...
10	0,401	0,25

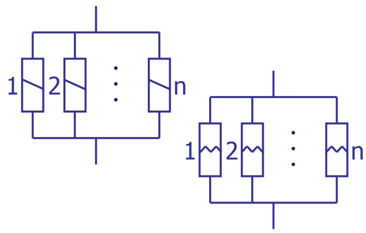
Układ szeregowy jest mniej niezawodny niż każdy z jego elementów.

W miarę jak rośnie liczba elementów układu, prawdopodobieństwo jego awarii rośnie, a wskaźnik niezawodności maleje.





Układ równoległy; elementy nieskorelowane



n – liczba elementów
R – nośność układu; zmienna losowa
R_i – nośność i-tego elementu; zmienna losowa
q – wielkość obciążenia działającego na układ; stała
q_i – efekt obciążenia w i-tym elemencie; stała

Prawdopodobieństwo awarii układu:

$$
\begin{aligned}
P_f &= P(R < q) \\
&= P\big((R_1 < q_1) \cap (R_2 < q_2) \cap \ldots \cap (R_n < q_n) \big) \\
&= P(R_1 < q_1) \cdot P(R_2 < q_2) \cdot \ldots \cdot P(R_n < q_n) \\
&= P_{f_1} \cdot P_{f_2} \cdot \ldots \cdot P_{f_n} \\
&= \prod_{i=1}^{n} P_{f_i}
\end{aligned}
$$

Niezależne zdarzenia losowe

Przykład

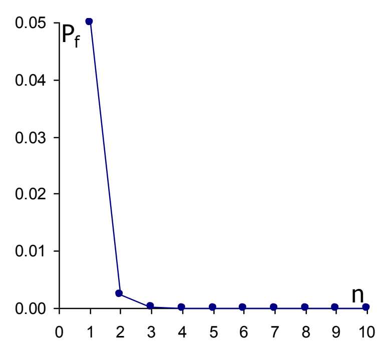
Obliczyć prawdopodobieństwo awarii układu równoległego *n* niezależnych elementów.
Prawdopodobieństwo awarii elementu P_{fi}=0,05

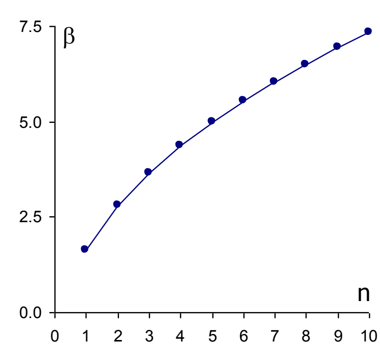
$$P_f = \prod_{i=1}^{n} P_{f_i} = (P_{f_i})^n = (0{,}05)^n$$

n	P_f	$\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$
1	$5{,}000\times10^{-2}$	1,64
2	$2{,}500\times10^{-3}$	2,81
3	$1{,}250\times10^{-4}$	3,66
5	$3{,}125\times10^{-7}$	4,98
...	...	...
10	$9{,}766\times10^{-14}$	7,35

Układ równoległy jest bardziej niezawodny niż każdy z jego elementów.

W miarę jak rośnie liczba elementów układu, prawdopodobieństwo jego awarii maleje, a wskaźnik niezawodności rośnie.

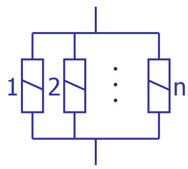




Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Układ równoległy; elementy doskonale ciągliwe nieskorelowane

Nośność układu R jest sumą nośności poszczególnych elementów R_i .



$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

$$\mu_R = \sum_{i=1}^{n} \mu_{R_i}$$

$$\sigma_R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{R_i}^2}$$

n – liczba elementów
R – nośność układu; losowa
R_i – nośność i-tego elementu; losowa
μ_R, σ_R – parametry nośności układu
μ_{Ri}, σ_{Ri} – parametry nośności i-tego elementu

Jeżeli nośności elementów R_i są nieskorelowane i mają jednakowe rozkłady:

$$\mu_R = \sum_{i=1}^{n} \mu_{R_i} = n\mu_{R_i}$$

$$\sigma_R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{R_i}^2} = \sqrt{n\sigma_{R_i}^2} = \sqrt{n}\sigma_{R_i}$$

$$\boxed{V_R = \frac{1}{\sqrt{n}} V_{R_i}}$$

Układ równoległy; elementy doskonale ciągliwe nieskorelowane

Jeżeli:
- obciążenie działające na układ q jest sumą efektów obciążeń w elementach q_i
- efekty obciążeń q_i są wielkościami deterministycznymi
- wskaźniki niezawodności poszczególnych elementów β_i są jednakowe:

efekt obciążenia całkowitego:

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i = nq_i$$

wskaźnik niezawodności i-tego elementu:

$$\beta_i = \frac{\mu_{R_i} - \mu_{Q_i}}{\sqrt{\sigma_{R_i}^2 + \sigma_{Q_i}^2}} = \frac{\mu_{R_i} - q_i}{\sigma_{R_i}}$$

wskaźnik niezawodności układu:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} = \frac{\mu_R - q}{\sigma_R} = \frac{n\mu_{R_i} - nq_i}{\sqrt{n}\sigma_{R_i}} = \sqrt{n}\left(\frac{\mu_{R_i} - q_i}{\sigma_{R_i}}\right)$$

$$\boxed{\beta = \sqrt{n}\beta_i}$$

Przykład

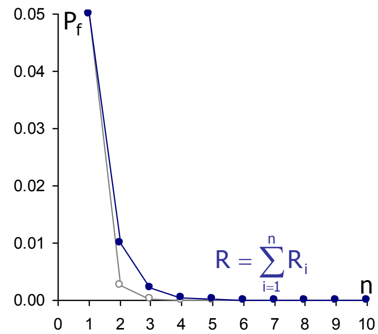
Obliczyć prawdopodobieństwo awarii układu równoległego *n* niezależnych elementów. Prawdopodobieństwo awarii elementu P_{fi}=0,05

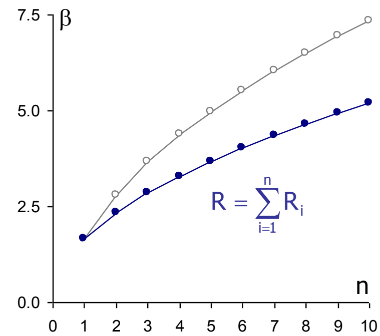
$$\beta = \sqrt{n}\,\beta_i$$

n	β	$P_f = \Phi(-\beta)$
1	1,64	$5{,}000\times10^{-2}$
2	2,33	$1{,}000\times10^{-2}$
3	2,85	$2{,}193\times10^{-3}$
5	3,68	$1{,}175\times10^{-4}$
...	...	...
10	5,20	$9{,}885\times10^{-8}$

Układ równoległy jest bardziej niezawodny niż każdy z jego elementów.

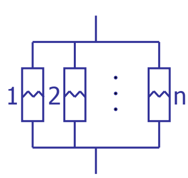
W miarę jak rośnie liczba elementów układu, prawdopodobieństwo jego awarii maleje, a wskaźnik niezawodności rośnie.





Układ równoległy; elementy kruche nieskorelowane

Nośność układu R jest sumą nośności poszczególnych elementów R_i .



$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

n – liczba elementów
R – nośność układu; losowa
R_i – nośność i-tego elementu; losowa

Nośność układu:

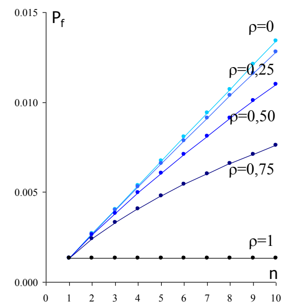
$$R = \max\left[nR_1, (n-1)R_2, (n-2)R_3, \ldots 3R_{n-2}, 2R_{n-1}, R_n \right]$$

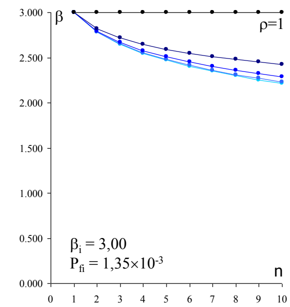
$$\text{gdzie: } \quad R_1 < R_2 < R_3 < \ldots < R_n$$

Układy elementów częściowo skorelowanych

Układ szeregowy

$$P_f = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^n\left(\frac{\beta_i + t\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right)\cdot \varphi(t)\,dt$$

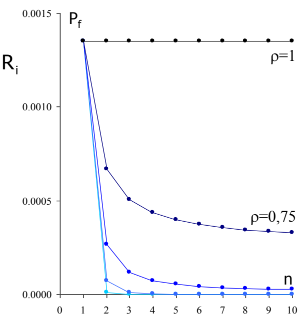


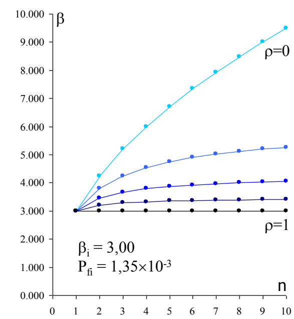


Układ równoległy

elementy idealnie ciągliwe, $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$

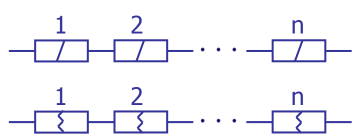
$$\beta = \sqrt{\frac{n}{1-\rho+n\rho}}\,\beta_i$$





ρ – współczynnik korelacji nośności elementów

Układy szeregowe częściowo skorelowane

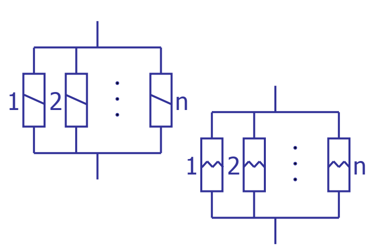


$$\max_i\left(P_{f_i}\right) \le P_f \le 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-P_{f_i}\right)$$

Prawdopodobieństwo awarii układu szeregowego o elementach całkowicie skorelowanych ($\rho_{ij} = 1$)

Prawdopodobieństwo awarii układu szeregowego o elementach nieskorelowanych ($\rho_{ij} = 0$)

Układy równoległe częściowo skorelowane



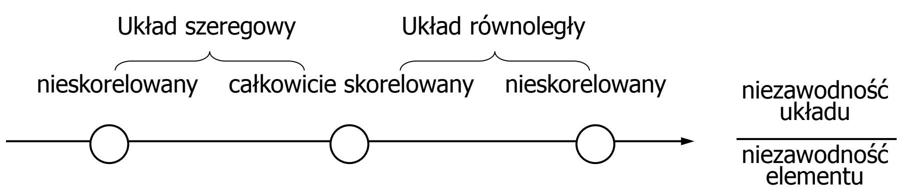
$$\prod_{i=1}^{n} P_{f_i} \le P_f \le \min_i\left(P_{f_i}\right)$$

Prawdopodobieństwo awarii układu równoległego o elementach nieskorelowanych ($\rho_{ij} = 0$)

Prawdopodobieństwo awarii układu szeregowego o elementach całkowicie skorelowanych ($\rho_{ij} = 1$)

Układy szeregowe i układy równoległe

Układ:	Korelacja:	
szeregowy	$\rho = 0$	niezawodność układu < niezawodność elementu
	$\rho = 1$	niezawodność układu = niezawodność elementu
równoległy	$\rho = 0$	niezawodność układu > niezawodność elementu



Nie dotyczy sumy nośności elementów kruchych.

Zadanie

Siły działające na kratownicę są wielkościami deterministycznymi (nie są losowe).

Poszczególne pręty kratownicy wykonano ze stali idealnie ciągliwej, a ich nośności są zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych.

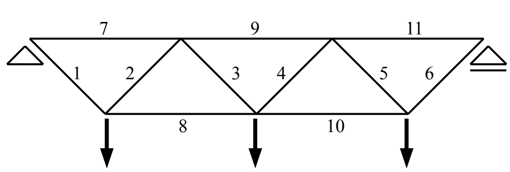
Nośności prętów pasów dolnych oraz prętów pasów górnych są ze sobą całkowicie skorelowane, a ich wskaźnik niezawodności $\beta = 3$.

Nośności prętów ukośnych są ze sobą i z pozostałymi prętami całkowicie nieskorelowane, a każdy z nich wykonano:

a) z jednego kształtownika stalowego o $\beta = 3$

b) z dwóch równoległych nieskorelowanych kształtowników stalowych, każdy o $\beta = 3$.

Obliczyć prawdopodobieństwo awarii i wskaźnik niezawodności kratownicy.



Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Zadanie

Linę ze stali idealnie ciągliwej wykonano z *n* drutów o jednakowych przekrojach, o łącznym polu powierzchni przekroju A=20 cm^2.

Granica plastyczności stali f jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, o parametrach: μ_f = 400 MPa, σ_f = 40 MPa.

Siła rozciągająca linę P jest:

a) wartością deterministyczną, P = 500 kN

b) zmienną losową o rozkładzie normalnym, μ_P = 500 kN, σ_P = 75 kN.

Sporządzić wykres zależności między wskaźnikiem β liny a liczbą drutów, *n* = 1, 2, ... 10.

Zadanie

Nośność pręta na rozciąganie R jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, o parametrach:

μ_R = 200 kN, σ_R = 20 kN

Jak zmienią się te parametry, jeżeli jeden pręt zastąpimy dwoma prętami równoległymi, których nośności R_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, o parametrach:

μ_{Ri} = 100 kN, σ_{Ri} = 10 kN

i jeżeli wykonano je z materiału:

a) doskonale ciągliwego

b) doskonale kruchego.