Techniki Symulacyjne – Metoda Monte Carlo

Zadanie 1

Y jest funkcją kilku zmiennych losowych X_1, X_2, … X_n
o dowolnych rozkładach prawdopodobieństwa.

$$Y = Y(X_1, X_2, \dots X_n)$$

Określić rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y.

Algorytm

1. Wygenerować po jednej wartości dla każdej zmiennej losowej X_1, X_2, … X_n.
2. Obliczyć wartość zmiennej losowej Y.
3. Powtarzać etapy 1 i 2 N razy uzyskując N wartości zmiennej losowej Y.
4. Nanieść je na arkusz probabilistyczny.
5. Określić typ rozkładu zmiennej losowej Y i jej parametry.

Techniki Symulacyjne – Metoda Monte Carlo

Zadanie 2

Zdarzenie losowe A zajdzie lub nie. Zależy to od wartości, jakie przyjmą zmienne losowe X_1, X_2, … X_n o dowolnych rozkładach prawdopodobieństwa.

Określić prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Algorytm

1. Wygenerować po jednej wartości dla każdej zmiennej losowej X_1, X_2, … X_n.
2. Jeżeli zdarzenie A zaszło, zwiększyć liczbę „sukcesów" $N_0 = N_0+1$.
3. Powtarzać etapy 1 i 2 N razy.
4. Obliczyć estymator prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia losowego A.

$$\widehat{P}(A) = \frac{N_0}{N} \qquad \lim_{N\to\infty} \widehat{P}(A) = P(A)$$

N_0 – liczba „sukcesów"
N – liczba prób

Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Metoda „orła i reszki" – błąd metody

$$\widehat{P}(A) = \frac{N_0}{N}$$

Eksperyment

Ile wynosi prawdopodobieństwo wylosowania orła (lub reszki) w wyniku jednokrotnego rzutu monetą ?

George Leclerc de Buffon (1707-1788)

N = 4040	N_0 = 2048	P = 0,5069

Karl Pearson (1857-1936)

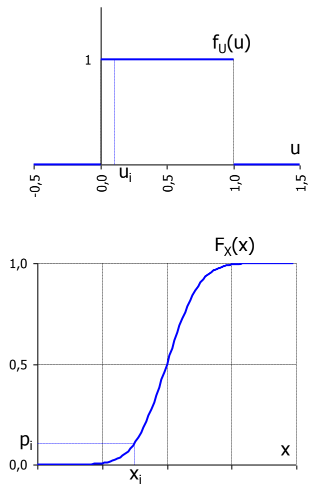
N = 12 000	N_0 = 6 019	P = 0,5016
N = 24 000	N_0 = 12 012	P = 0,5005

Aby oszacować prawdopodobieństwo awarii P_f rzędu 10^{-3} metodą „orła i reszki" i nie popełnić większego błędu niż 10% (+/- 0,0001) z prawdopodobieństwem 95%, należy przeprowadzić ok. 400 000 prób.

Liczby losowe o rozkładzie równomiernym w przedziale (0, 1)

0,783117	0,812497	0,298542	0,781516	0,443669	0,345165	0,413994	0,837837
0,636142	0,668635	0,245442	0,988235	0,914158	0,060742	0,049296	0,450726
0,871003	0,286397	0,106226	0,559697	0,915101	0,634151	0,840762	0,402220
0,826663	0,855023	0,610382	0,951794	0,505148	0,343788	0,156501	0,275764
0,432105	0,583201	0,076799	0,229070	0,990502	0,430133	0,976895	0,662192
0,377269	0,019264	0,442687	0,100550	0,477469	0,006922	0,399568	0,326321
0,164089	0,302419	0,778799	0,798128	0,252594	0,722379	0,320352	0,410976
0,586223	0,124205	0,535651	0,580606	0,953833	0,747543	0,043455	0,649685
0,849082	0,675584	0,321661	0,655498	0,375518	0,775297	0,176068	0,773969
0,982838	0,661738	0,560271	0,727679	0,975180	0,604067	0,723958	0,935592
0,627197	0,048509	0,036133	0,198667	0,898221	0,574515	0,808496	0,984814
0,476066	0,083395	0,443925	0,915508	0,812258	0,523432	0,615414	0,039315
0,906048	0,431806	0,447924	0,857217	0,766879	0,585551	0,715763	0,944227
0,644562	0,901033	0,275387	0,879205	0,007319	0,118138	0,564570	0,939221
0,583137	0,795207	0,179942	0,749713	0,254067	0,521194	0,273162	0,225102
0,768704	0,046589	0,275850	0,822118	0,566753	0,835728	0,640417	0,275713
0,288984	0,675511	0,902367	0,753397	0,690707	0,404441	0,432194	0,609131
0,990578	0,253572	0,854629	0,177114	0,089472	0,315555	0,610687	0,060068
0,776890	0,126131	0,996156	0,093421	0,276147	0,851305	0,320011	0,917916
0,214417	0,478321	0,320872	0,489445	0,055827	0,600450	0,725181	0,238619

Generowanie liczb losowych o dowolnym rozkładzie – algorytm ogólny



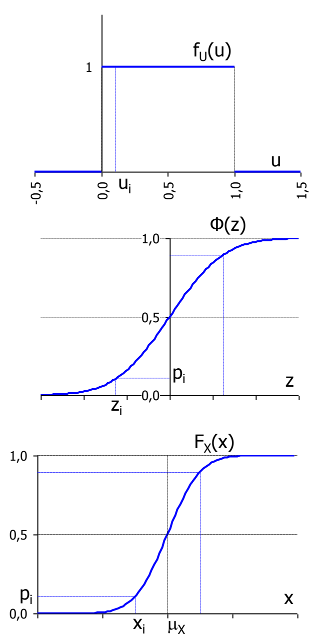
1. Wygenerować wartość u_i zmiennej losowej U o rozkładzie równomiernym w przedziale (0, 1) i przyjąć

$$p_i = u_i$$

2. Obliczyć odwrotność dystrybuanty $F_X(x)$ zmiennej losowej X

$$x_i = F_X^{-1}(p_i)$$

Generowanie liczb losowych o rozkładzie normalnym



1. Wygenerować wartość u_i zmiennej losowej U o rozkładzie równomiernym w przedziale (0, 1) i przyjąć

$$p_i = u_i$$

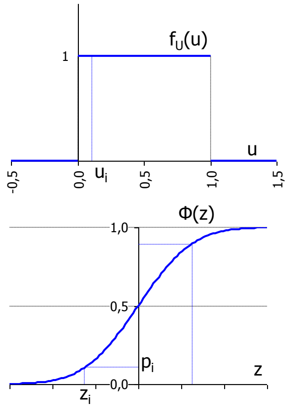
2. Obliczyć odwrotność dystrybuanty rozkładu normalnego standardowego

$$z_i = \Phi^{-1}(p_i)$$

3. Transformować ją do rozkładu normalnego

$$x_i = \mu_X + z_i \sigma_X$$

Generowanie liczb losowych o rozkładzie logarytmiczno-normalnym

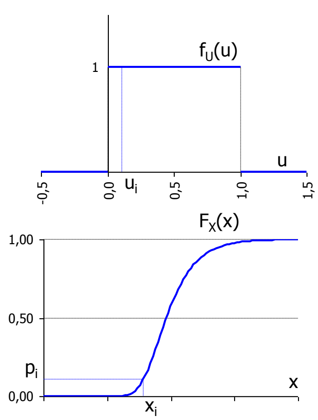


$$z_i = \frac{\ln(x_i) - \mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}}$$

X – rozkład logarytmiczno-normalny
ln(X) – rozkład normalny
Z – rozkład normalny standardowy

1. Obliczyć parametry zmiennej losowej X
$$\sigma_{\ln X}^2 = \ln\left(1 + V_X^2\right)$$
$$\mu_{\ln X} = \ln(\mu_X) - 0{,}5\sigma_{\ln X}^2$$
2. Wygenerować wartość u_i zmiennej losowej U o rozkładzie równomiernym w przedziale (0, 1) i przyjąć
$$p_i = u_i$$
3. Obliczyć odwrotność dystrybuanty rozkładu normalnego standardowego
$$z_i = \Phi^{-1}(p_i)$$
4. Transformować ją do rozkładu logarytmiczno-normalnego
$$x_i = e^{(\mu_{\ln X} + z_i \sigma_{\ln X})}$$

Generowanie liczb losowych o rozkładzie ekstremalnym t. 1



$$F_X(x) = \exp(-\exp(-\alpha_X (x - u_X)))$$

– rozkład ekstrem. t. 1

1. Obliczyć parametry zmiennej losowej X
$$\alpha_X = 1{,}282/\sigma_X$$
$$u_X = \mu_X - 0{,}45\sigma_X$$
2. Wygenerować wartość u_i zmiennej losowej U o rozkładzie równomiernym w przedziale (0, 1) i przyjąć
$$p_i = u_i$$
3. Odwrócić dystrybuantę rozkładu ekstrem. t. 1
$$x_i = u_X - \frac{1}{\alpha_X} \ln(-\ln(p_i))$$

Zadanie

Na belkę swobodnie podpartą o rozpiętości l = 4 m działają dwa obciążenia ciągłe równomiernie rozłożone q_1 i q_2 – niezależne zmienne losowe o rozkładach normalnych, o parametrach:

μ_{q1} = 2,0 kN/m σ_{q1} = 0,4 kN/m μ_{q2} = 4,0 kN/m σ_{q2} = 0,8 kN/m

Określić rozkład prawdopodobieństwa momentu zginającego w środku rozpiętości belki – jego typ i parametry.

Rozwiązanie (dokładne) – metoda analityczna

$$Q(q_1, q_2) = a_1 q_1 + a_2 q_2$$

$a_1 = a_2 = l^2/8 = 2\ m^2$

$$\mu_Q = a_1 \mu_{q1} + a_2 \mu_{q2} = 12{,}0\ \text{kNm}$$

$$\sigma_Q^2 = a_1^2 \sigma_{q1}^2 + a_2^2 \sigma_{q2}^2 = 3{,}20\ (\text{kNm})^2$$

$$\sigma_Q = 1{,}79\ \text{kNm}$$

$$V_Q = 0{,}15$$

Q ma rozkład normalny.

Rozwiązanie (przybliżone) - metoda Monte Carlo

Wygenerować *N* razy po jednej wartości każdej ze zmiennych losowych q_1 i q_2

μ_{q1} = 2,0 kN/m σ_{q1} = 0,4 kN/m μ_{q2} = 4,0 kN/m σ_{q2} = 0,8 kN/m

Obliczyć *N* wartości zmiennej losowej Q.

$$Q = q_1 \cdot l^2/8 + q_2 \cdot l^2/8 = a_1 q_1 + a_2 q_2 \qquad a_1 = a_2 = l^2/8 = 2\ m^2$$

i	u_i	$z_i=\Phi^{-1}(u_i)$	$q_{1,i}$	u_i	$z_i=\Phi^{-1}(u_i)$	$q_{2,i}$	Q_i
1	0,783117	0,7828	2,31	0,636142	0,3482	4,28	13,18
2	0,871003	1,1311	2,45	0,826663	0,9411	4,75	14,41
3	0,432105	-0,1710	1,93	0,377269	-0,3127	3,75	11,36
4	0,164089	-0,9778	1,61	0,586223	0,2178	4,17	11,57
5	0,849082	1,0325	2,41	0,982838	2,1162	5,69	16,21
6	0,627197	0,3244	2,13	0,476066	-0,0600	3,95	12,16
7	0,906048	1,3168	2,53	0,644562	0,3707	4,30	13,65
8	0,583137	0,2099	2,08	0,768704	0,7346	4,59	13,34
9	0,288984	-0,5564	1,78	0,990578	2,3486	5,88	15,31

Rozwiązanie (przybliżone) - metoda Monte Carlo

Obliczyć estymatory parametrów zmiennej losowej Q.

i	Q_i
1	13,18
2	14,41
3	11,36
4	11,57
5	16,21
6	12,16
7	13,65
8	13,34
9	15,31

$$\mu_Q \approx \overline{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Q_i}{N} = 13{,}5\ \text{kNm}$$

$$\sigma_Q^2 \approx S_Q^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Q_i - \overline{Q}\right)^2}{N-1} = 2{,}71\ \text{kNm}$$

$$\sigma_Q \approx S_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Q_i - \overline{Q}\right)^2}{N-1}} = 1{,}65\ \text{kNm}$$

$$V_Q = \frac{\sigma_Q}{\mu_Q} \approx 0{,}12$$

Rozwiązanie (przybliżone) - metoda Monte Carlo

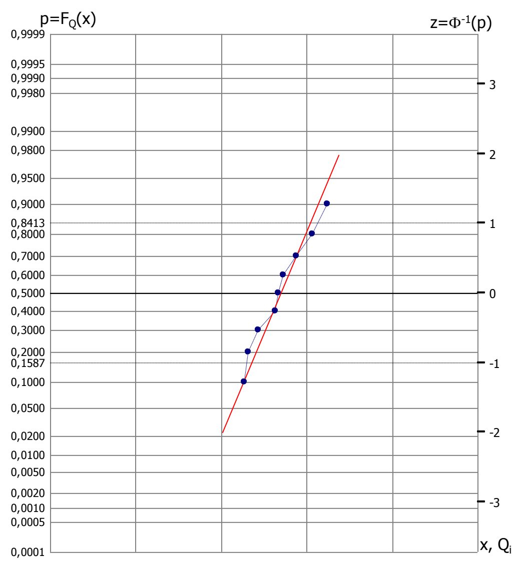
Wartości Q_i nanieść na arkusz probabilistyczny rozkładu normalnego.
Określić typ rozkładu zmiennej losowej Q oraz jej parametry.

i	Q_i	$Q_{i\ sort}$	$p_i=i/(N+1)$	$z_i=\Phi^{-1}(p_i)$
1	13,18	11,36	0,1	-1,282
2	14,41	11,57	0,2	-0,842
3	11,36	12,16	0,3	-0,524
4	11,57	13,18	0,4	-0,253
5	16,21	13,34	0,5	0,000
6	12,16	13,65	0,6	0,253
7	13,65	14,41	0,7	0,524
8	13,34	15,31	0,8	0,842
9	15,31	16,21	0,9	1,282

$\mu_Q \approx 13{,}45\ \text{kNm}$

$\sigma_Q \approx 1{,}65\ \text{kNm}$

Q ma rozkład normalny.



Zadanie

Nośność belki stalowej na zginanie R i największy moment zginający Q są niezależnymi zmiennymi losowym, o rozkładach normalnych, o parametrach:

μ_R = 80 kNm σ_R = 8,0 kNm μ_Q = 50 kNm σ_Q = 6,0 kNm

Obliczyć prawdopodobieństwa awarii belki.

Rozwiązanie (dokładne) – metoda analityczna

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} = \frac{80 - 50}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{30}{10} = 3{,}0$$

Wg. Cornella:
X = R-Q

$$P_f = P(X < 0) = \Phi(-\beta) = \Phi(-3{,}0) = 0{,}00135$$

Wg. Hasofera-Linda:
g(R, Q) = R-Q

$$P_f = P\big(\, g(R,Q) < 0 \,\big) = \Phi(-\beta) = \Phi(-3{,}0) = 0{,}00135$$

Rozwiązanie (przybliżone) - metoda Monte Carlo

Wygenerować *N* razy po jednej wartości każdej ze zmiennych losowych R i Q

μ_R= 80 kNm σ_R= 8 kNm μ_Q= 50 kNm σ_Q= 6 kNm

Obliczyć *N* wartości zmiennej losowej X = R-Q

Obliczyć *N* wartości funkcji stanu granicznego g(R,Q) = R-Q

i	u_i	$z_i=\Phi^{-1}(u_i)$	R_i	u_i	$z_i=\Phi^{-1}(u_i)$	Q_i	R_i-Q_i
1	0,783117	0,7828	86,26	0,636142	0,3482	52,09	34,17
2	0,871003	1,1311	89,05	0,826663	0,9411	55,65	33,40
3	0,432105	-0,1710	78,63	0,377269	-0,3127	48,12	30,51
4	0,164089	-0,9778	72,18	0,586223	0,2178	51,31	20,87
5	0,849082	1,0325	88,26	0,982838	2,1162	60,70	25,56
6	0,627197	0,3244	82,60	0,476066	-0,0600	49,64	32,96
7	0,906048	1,3168	90,53	0,644562	0,3707	52,22	38,31
8	0,583137	0,2099	81,68	0,768704	0,7346	54,41	27,27
9	0,288984	-0,5564	75,55	0,990578	2,3486	64,09	11,46

Rozwiązanie (przybliżone) - metoda Monte Carlo

Obliczyć estymator prawdopodobieństwa awarii.
Ile razy wystąpiła awaria ?
Ile razy X = R-Q < 0 ?
Ile razy g(R,Q) = R-Q < 0 ?

i	R_i	Q_i	R_i-Q_i
1	86,26	52,09	34,17
2	89,05	55,65	33,40
3	78,63	48,12	30,51
4	72,18	51,31	20,87
5	88,26	60,70	25,56
6	82,60	49,64	32,96
7	90,53	52,22	38,31
8	81,68	54,41	27,27
9	75,55	64,09	11,46

$$\widehat{P}_f = \frac{N_0}{N} = ?$$

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{P}_f = P_f$$

N_0 – liczba awarii
N – liczba prób

Rozwiązanie (przybliżone) - metoda Monte Carlo

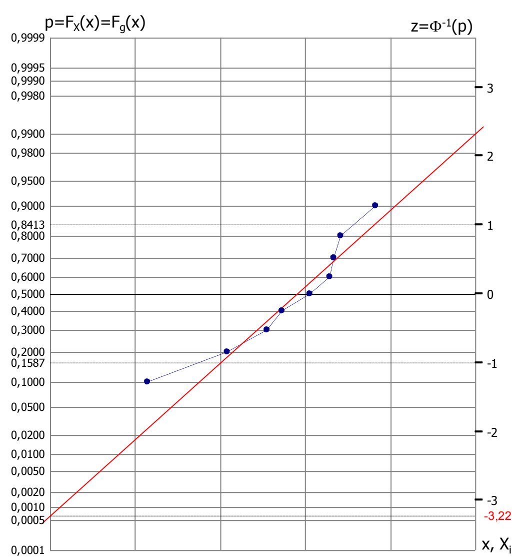
Wartości zmiennej losowej X nanieść na arkusz probabilistyczny rozkładu normalnego.
Określić prawdopodobieństwo awarii.

Wg. Cornella: X = R-Q
Wg. Hasofera-Linda: g = R-Q

i	X_i	$X_{i\ sort}$	$p_i=i/(N+1)$	$z_i=\Phi^{-1}(p_i)$
1	34,17	11,46	0,1	-1,282
2	33,40	20,87	0,2	-0,842
3	30,51	25,56	0,3	-0,524
4	20,87	27,27	0,4	-0,253
5	25,56	30,51	0,5	0,000
6	32,96	32,96	0,6	0,253
7	38,31	33,40	0,7	0,524
8	27,27	34,17	0,8	0,842
9	11,46	38,31	0,9	1,282

$$P_f = P(X<0) = F_X(0) = \Phi(-\beta) \approx 0{,}0007$$

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \approx 3{,}22$$



Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska