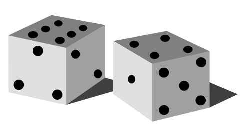
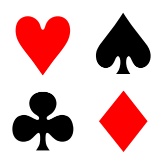
Zdarzenie losowe

Eksperyment
- doświadczenie, którego wynik ma charakter losowy,
  przykład: rzut monetą, rzut kostką do gry,
  wytrzymałości betonu na ściskanie f_c

Zdarzenie elementarne
- każdy możliwy wynik eksperymentu, $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych
- zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, Ω
  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \in \Omega$

Zdarzenie losowe
- pewien podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych, A, $A \subset \Omega$
  zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu


Prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo
- funkcja określona na przestrzeni zdarzeń elementarnych, P
  określająca szanse wystąpienia danego zdarzenia

Aksjomat 1 - dla każdego zdarzenia losowego A: $$0 \le P(A) \le 1$$

Aksjomat 2 - dla całej przestrzeni Ω: $$P(\Omega) = 1$$

Aksjomat 3 - dla zdarzeń wzajemnie wykluczających się: $A_i \cap A_j = \varnothing$
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Zdarzenie pewne
- takie, które zachodzi z prawdopodobieństwem równym 1,
  jest nim cała przestrzeń zdarzeń elementarnych, Ω: $$P(\Omega) = 1$$

Zdarzenie niemożliwe
- takie, które zachodzi z prawdopodobieństwem równym 0:
  jest nim zbiór pusty, $\varnothing$: $$P(\varnothing) = 0$$

Zdarzenie przeciwne
- zdarzenie przeciwne A′ do zdarzenia A, to takie,
  które zachodzi, gdy nie zachodzi zdarzenie A: $$P(A') = 1 - P(A)$$

Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Zmienna losowa

Zmienna losowa
– funkcja, X, która każdemu zdarzeniu elementarnemu, ω przyporządkowuje wartość liczbową x

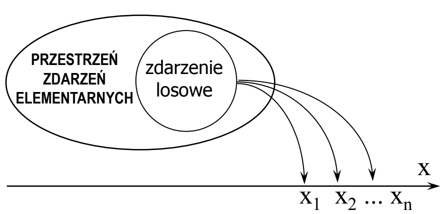
$$X(\omega) = x$$

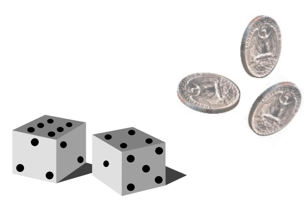
Zmienna losowa dyskretna
- liczba jej możliwych wartości jest skończona lub policzalna

Zmienna losowa ciągła
- liczba jej możliwych wartości jest nieskończona

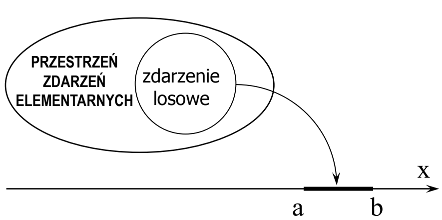
Zmienne losowa ciągła i dyskretna

Zmienna losowa dyskretna
- przyporządkowuje zdarzeniom losowym liczby





Zmienna losowa ciągła
- przyporządkowuje zdarzeniom losowym przedziały liczbowe



Zmienna losowa ciągła

Dystrybuanta, $F_X(x)$

- funkcja określająca prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X jest mniejsza lub równa określonej wartości x

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Gęstość prawdopodobieństwa $f_X(x)$

- pierwsza pochodna dystrybuanty

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi) d\xi$$

Gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuanta

Własności gęstości prawdopodobieństwa:

$$P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x) dx$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f_X(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

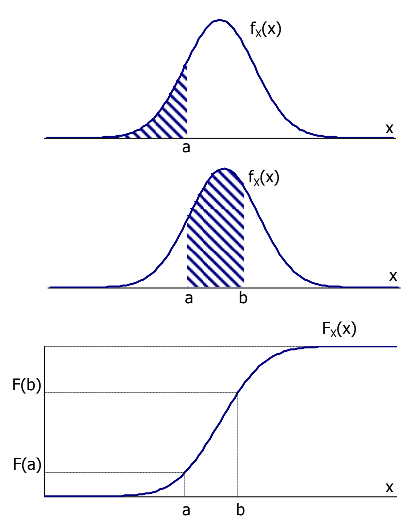
Własności dystrybuanty:

$0 \leq F_X(x) \leq 1$

jeżeli $x_1 < x_2$, to $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

$F_X(-\infty) = 0$

$F_X(+\infty) = 1$



Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Parametry zmiennej losowej

- Wartość średnia (wartość oczekiwana)

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x) dx$$

- Wariancja

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = E(X^2) - \mu_X^2$$

- Odchylenie standardowe

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

- Współczynnik zmienności

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

- Wartość średnia/wartość nominalna

$$\lambda_X = \frac{\mu_X}{x_n}$$

Funkcja liniowa zmiennej losowej

$$Y = aX + b$$

Y jest zmienną losową o parametrach:

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y) f_X(x) dx =$$

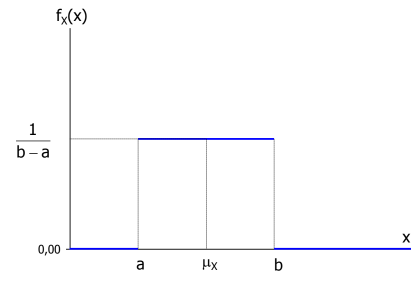
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) f_X(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = a\mu_X + b$$

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_Y)^2 f_X(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [(ax + b) - (a\mu_X + b)]^2 f_X(x) dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = a^2 \sigma_X^2$$

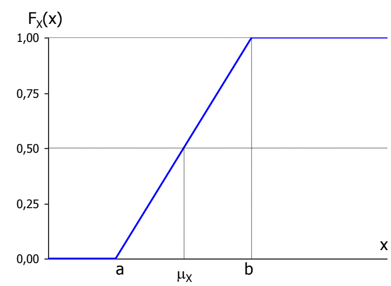
Rozkład jednostajny (równomierny, prostokątny)

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{dla } x\in\langle a,b\rangle\\[2ex] 0 & \text{dla } x\notin\langle a,b\rangle\end{cases}$$

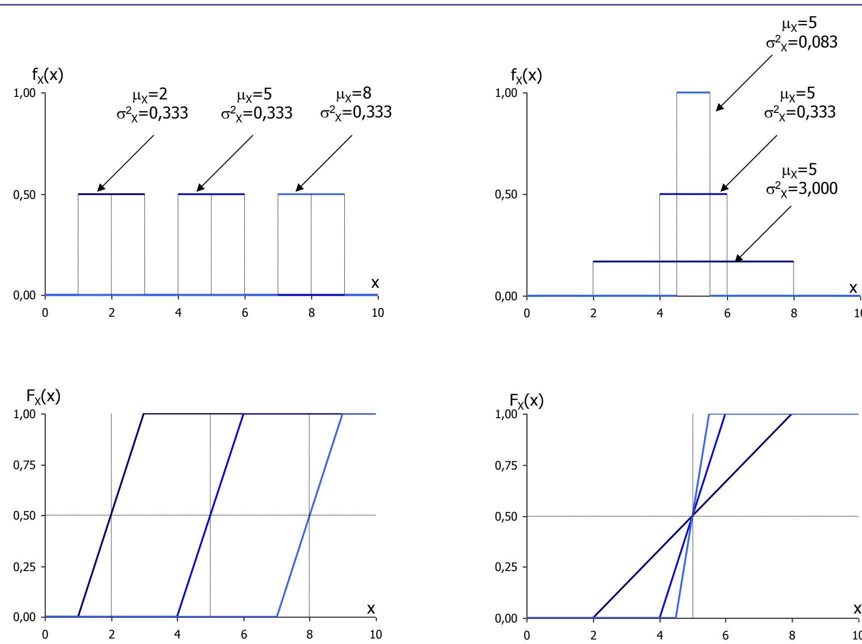


$$\mu_X=\frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_X^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$



Rozkład jednostajny (równomierny, prostokątny)



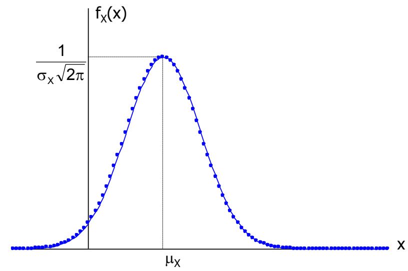
Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Rozkład normalny

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2}$$

μ_X - wartość średnia

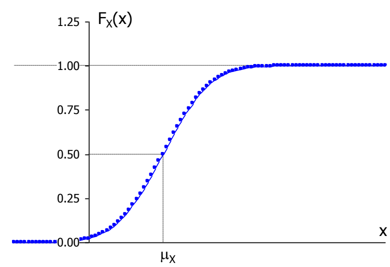
σ_X - odchylenie standardowe



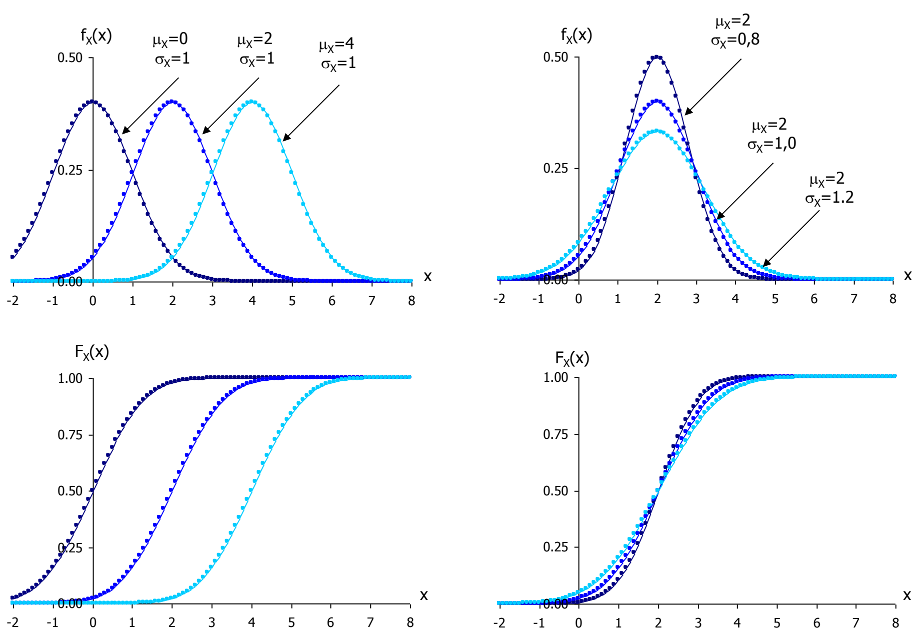
Własności:

$$f_X(\mu_X + x) = f_X(\mu_X - x)$$

$$F_X(\mu_X + x) + F_X(\mu_X - x) = 1$$



Rozkład normalny



Zmienne losowa standaryzowana

Zmienna losowa standaryzowana:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

$$\mu_Z = E\left[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X}\left[E(X) - E(\mu_X)\right] = \frac{1}{\sigma_X}(\mu_X - \mu_X) = 0$$

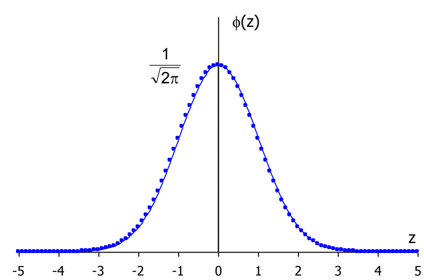
$$\sigma_Z^2 = E(Z^2) - \mu_Z^2 = E\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] - 0 = \frac{1}{\sigma_X^2}E\left[(X - \mu_X)^2\right] = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1$$

Rozkład normalny standardowy (Gaussa)

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

$\mu_Z = 0$ wartość średnia

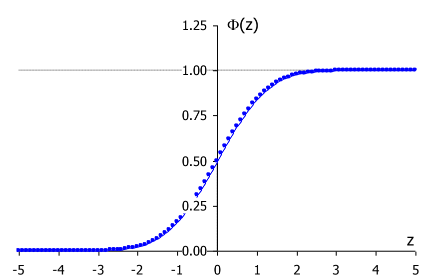
$\sigma_Z = 1$ odchylenie standardowe



własności:

$\phi(z) = \phi(-z)$

$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$



Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Zadanie

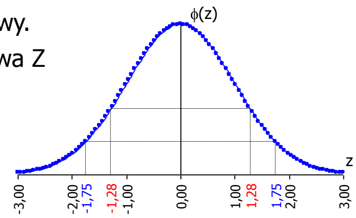
Zmienna losowa Z ma rozkład normalny standardowy.

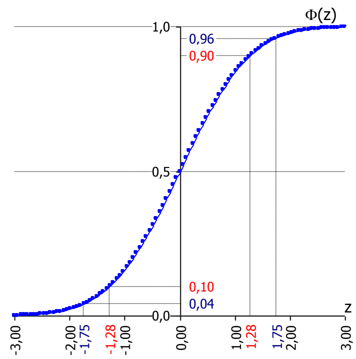
Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa Z nie przekroczy wartości z

a). z = -1,75 b). z = 0 c). z = 1,75

Znajdź taką wartość z, którą Z nie przekroczy z prawdopodobieństwem p, znajdź p% kwantyl.

d). p = 0,1 e). p = 0,5 f). p = 0,9





Rozwiązanie

a). $P(Z \le -1{,}75) = \Phi(-1{,}75) = 0{,}04$

b). $P(Z \le 0) = \Phi(0) = 0{,}5$

c). $P(Z \le 1{,}75) = \Phi(1{,}75) = 1 - \Phi(-1{,}75) = 0{,}96$

d). $z_{0,1} = z_{10\%} = \Phi^{-1}(0{,}1) = -1{,}28$

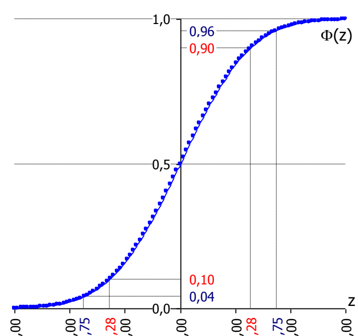
e). $z_{0,5} = z_{50\%} = \Phi^{-1}(0{,}5) = 0$

f). $z_{0,9} = z_{90\%} = \Phi^{-1}(0{,}9) = -\Phi^{-1}(1-0{,}9) =$

$= -\Phi^{-1}(0{,}1) = 1{,}28$

Dystrybuanta rozkładu normalnego standardowego $\Phi(z)$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	5,00E-01	4,96E-01	4,92E-01	4,88E-01	4,84E-01	4,80E-01	4,76E-01	4,72E-01	4,68E-01	4,64E-01
-0,1	4,60E-01	4,56E-01	4,52E-01	4,48E-01	4,44E-01	4,40E-01	4,36E-01	4,33E-01	4,29E-01	4,25E-01
-0,2	4,21E-01	4,17E-01	4,13E-01	4,09E-01	4,05E-01	4,01E-01	3,97E-01	3,94E-01	3,90E-01	3,86E-01
-0,3	3,82E-01	3,78E-01	3,74E-01	3,71E-01	3,67E-01	3,63E-01	3,59E-01	3,56E-01	3,52E-01	3,48E-01
-0,4	3,45E-01	3,41E-01	3,37E-01	3,34E-01	3,30E-01	3,26E-01	3,23E-01	3,19E-01	3,16E-01	3,12E-01
-0,5	3,09E-01	3,05E-01	3,02E-01	2,98E-01	2,95E-01	2,91E-01	2,88E-01	2,84E-01	2,81E-01	2,78E-01
-0,6	2,74E-01	2,71E-01	2,68E-01	2,64E-01	2,61E-01	2,58E-01	2,55E-01	2,51E-01	2,48E-01	2,45E-01
-0,7	2,42E-01	2,39E-01	2,36E-01	2,33E-01	2,30E-01	2,27E-01	2,24E-01	2,21E-01	2,18E-01	2,15E-01
-0,8	2,12E-01	2,09E-01	2,06E-01	2,03E-01	2,00E-01	1,98E-01	1,95E-01	1,92E-01	1,89E-01	1,87E-01
-0,9	1,84E-01	1,81E-01	1,79E-01	1,76E-01	1,74E-01	1,71E-01	1,69E-01	1,66E-01	1,64E-01	1,61E-01
-1	1,59E-01	1,56E-01	1,54E-01	1,52E-01	1,49E-01	1,47E-01	1,45E-01	1,42E-01	1,40E-01	1,38E-01
-1,1	1,36E-01	1,33E-01	1,31E-01	1,29E-01	1,27E-01	1,25E-01	1,23E-01	1,21E-01	1,19E-01	1,17E-01
-1,2	1,15E-01	1,13E-01	1,11E-01	1,09E-01	1,07E-01	1,06E-01	1,04E-01	1,02E-01	1,00E-01	9,85E-02
-1,3	9,68E-02	9,51E-02	9,34E-02	9,18E-02	9,01E-02	8,85E-02	8,69E-02	8,53E-02	8,38E-02	8,23E-02
-1,4	8,08E-02	7,93E-02	7,78E-02	7,64E-02	7,49E-02	7,35E-02	7,21E-02	7,08E-02	6,94E-02	6,81E-02
-1,5	6,68E-02	6,55E-02	6,43E-02	6,30E-02	6,18E-02	6,06E-02	5,94E-02	5,82E-02	5,71E-02	5,59E-02
-1,6	5,48E-02	5,37E-02	5,26E-02	5,16E-02	5,05E-02	4,95E-02	4,85E-02	4,75E-02	4,65E-02	4,55E-02
-1,7	4,46E-02	4,36E-02	4,27E-02	4,18E-02	4,09E-02	4,01E-02	3,92E-02	3,84E-02	3,75E-02	3,67E-02
-1,8	3,59E-02	3,51E-02	3,44E-02	3,36E-02	3,29E-02	3,22E-02	3,14E-02	3,07E-02	3,01E-02	2,94E-02
-1,9	2,87E-02	2,81E-02	2,74E-02	2,68E-02						
-2	2,28E-02	2,22E-02	2,17E-02	2,12E-02						
-2,1	1,79E-02	1,74E-02	1,70E-02	1,66E-02						
-2,2	1,39E-02	1,36E-02	1,32E-02	1,29E-02						
-2,3	1,07E-02	1,04E-02	1,02E-02	9,90E-03						
-2,4	8,20E-03	7,98E-03	7,76E-03	7,55E-03						
-2,5	6,21E-03	6,04E-03	5,87E-03	5,70E-03						
-2,6	4,66E-03	4,53E-03	4,40E-03	4,27E-03						
-2,7	3,47E-03	3,36E-03	3,26E-03	3,17E-03						
-2,8	2,56E-03	2,48E-03	2,40E-03	2,33E-03						
-2,9	1,87E-03	1,81E-03	1,75E-03	1,69E-03						
-3	1,35E-03	1,31E-03	1,26E-03	1,22E-03						
-3,1	9,68E-04	9,35E-04	9,04E-04	8,74E-04						
-3,2	6,87E-04	6,64E-04	6,41E-04	6,19E-04						
-3,3	4,83E-04	4,66E-04	4,50E-04	4,34E-04						
-3,4	3,37E-04	3,25E-04	3,13E-04	3,02E-04						
-3,5	2,33E-04	2,24E-04	2,16E-04	2,08E-04						
-3,6	1,59E-04	1,53E-04	1,47E-04	1,42E-04						
-3,7	1,08E-04	1,04E-04	9,96E-05	9,57E-05						
-3,8	7,23E-05	6,95E-05	6,67E-05	6,41E-05						
-3,9	4,81E-05	4,61E-05	4,43E-05	4,25E-05						
-4	3,17E-05	3,04E-05	2,91E-05	2,79E-05						



Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Rozkład normalny i normalny standardowy

$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ - zmienna losowa o rozkładzie normalnym standardowym

$$X \le x \quad \Leftrightarrow \quad \mu_X + Z\sigma_X \le x \quad \Leftrightarrow \quad Z \le \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$$

- dystrybuanta rozkładu normalnego:

$$P(X \le x) = F_X(x) = \Phi(z) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$$

- odwrotność dystrybuanty (p% kwantyl):

$$x_p = F_X^{-1}(p) = \mu_X + \Phi^{-1}(p) \cdot \sigma_X$$

Zadanie

Zmienna losowa X ma rozkład normalny, μ_X = 100, σ_X = 20

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X nie przekroczy wartości nominalnej x_n

a). x_n = 65 b). x_n = 100 c). x_n = 135

Znaleźć taką wartość x_n, której X nie przekroczy z prawdopodobieństwem p

d). p = 0,1 e). p = 0,5 f). p = 0,9

Obliczyć parametr $\lambda_X = \mu_X / x_n$, zakładając $x_n = x_p$

Rozwiązanie

a). $P(X \le 65) = F_X(65) = \Phi\left(\frac{65-100}{20}\right) = \Phi(-1{,}75) = 0{,}04$ $\lambda_X = 100/65 = 1{,}54$

b). $P(X \le 100) = F_X(100) = \Phi\left(\frac{100-100}{20}\right) = \Phi(0) = 0{,}5$ $\lambda_X = 100/100 = 1$

c). $P(X \le 135) = F_X(135) = \Phi\left(\frac{135-100}{20}\right) = \Phi(1{,}75) = 1 - \Phi(-1{,}75) = 0{,}96$ $\lambda_X = 100/135 = 0{,}74$

d). $x_{0,1} = F_X^{-1}(0{,}1) = 100 + \Phi^{-1}(0{,}1) \cdot 20 = 100 + (-1{,}28) \cdot 20 = 74{,}4$ $\lambda_X = 100/74{,}4 = 1{,}34$

e). $x_{0,5} = F_X^{-1}(0{,}5) = 100 + \Phi^{-1}(0{,}5) \cdot 20 = 100 + (0) \cdot 20 = 100$ $\lambda_X = 100/100 = 1$

f). $x_{0,9} = F_X^{-1}(0{,}9) = 100 + \Phi^{-1}(0{,}9) \cdot 20 = 100 + (+1{,}28) \cdot 20 = 125{,}6$ $\lambda_X = 100/125{,}6 = 0{,}80$

Rozwiązanie

$P(X \le 65) = F_X(65) = ?$

$P(X \le 100) = F_X(100) = ?$

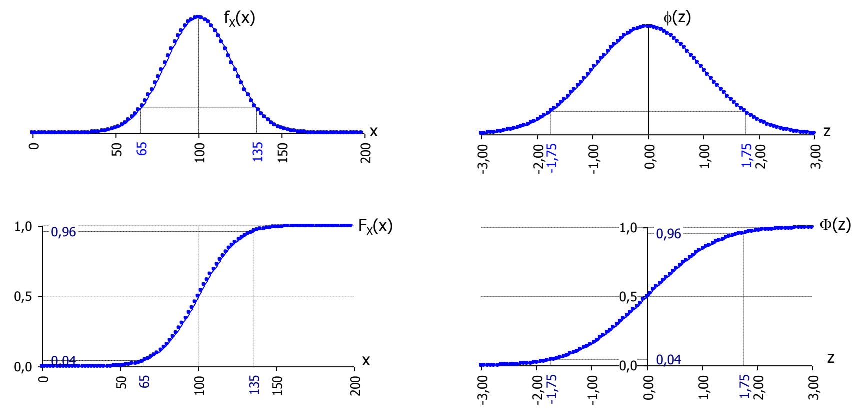
$P(X \le 135) = F_X(135) = ?$

$$z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$$

$P(Z \le -1{,}75) = \Phi(-1{,}75) = 0{,}04$

$P(Z \le 0) = \Phi(0) = 0{,}5$

$P(Z \le +1{,}75) = \Phi(+1{,}75) = 0{,}96$



$\mu_X = 100,\ \sigma_X = 20$ $\mu_Z = 0,\ \sigma_Z = 1$

Rozwiązanie

$x = ?$ $P(X \le x) = 0{,}1$ $F_X^{-1}(0{,}1) = ?$

$x = ?$ $P(X \le x) = 0{,}5$ $F_X^{-1}(0{,}5) = ?$

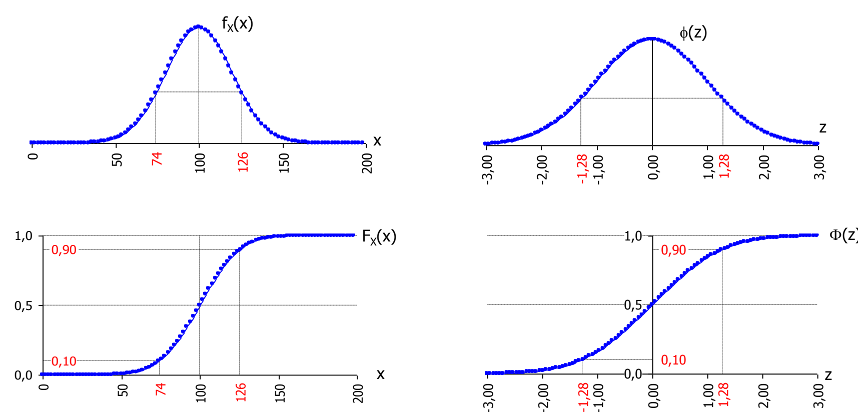
$x = ?$ $P(X \le x) = 0{,}9$ $F_X^{-1}(0{,}9) = ?$

$z = ?$ $P(Z \le z) = 0{,}1$ $\Phi_X^{-1}(0{,}1) = -1{,}28$

$z = ?$ $P(Z \le z) = 0$ $\Phi_X^{-1}(0) = 0{,}5$

$z = ?$ $P(Z \le z) = 0{,}9$ $\Phi_X^{-1}(0{,}9) = +1{,}28$

$$x = \mu_X + z\sigma_X$$



$\mu_X = 100,\ \sigma_X = 20$ $\mu_Z = 0,\ \sigma_Z = 1$

Rozkład logarytmiczno-normalny

Zmienna X ma rozkład logarytmiczno-normalny, jeżeli zmienna lnX ma rozkład normalny.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\ln X}\, x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}}\right)^2}$$

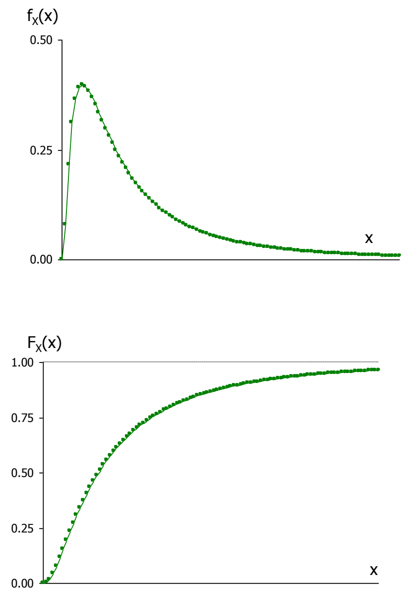
dla x >0

$$\sigma_{\ln X}^2 = \ln\left(V_X^2 + 1\right)$$

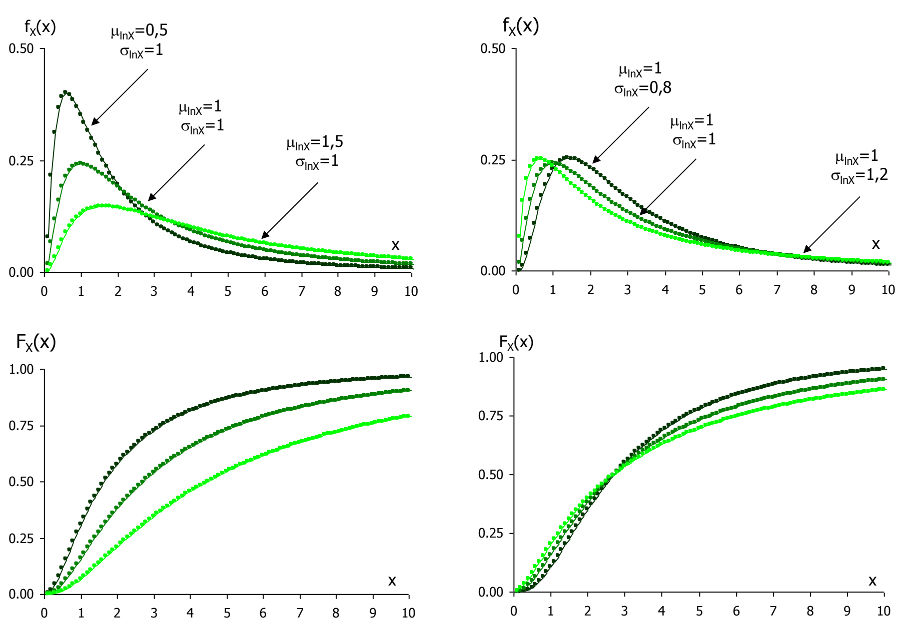
$$\mu_{\ln X} = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2}\sigma_{\ln X}^2$$

$$\mu_X = e^{\left(\mu_{\ln X} + \frac{1}{2}\sigma_{\ln X}^2\right)}$$

$$\sigma_X^2 = \mu_X^2\left(e^{\sigma_{\ln X}^2} - 1\right)$$



Rozkład logarytmiczno-normalny



Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Rozkład logarytmiczno-normalny

X – zmienna losowa o rozkładzie logarytmiczno-normalnym

$Z_{ln} = \dfrac{\ln X - \mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}}$ – zmienna losowa o rozkładzie normalnym standaryzowanym

$$\ln X = \mu_{\ln X} + Z_{ln}\sigma_{\ln X}$$

$$X \le x \quad \Leftrightarrow \quad \ln X \le \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{\ln X} + Z_{ln}\sigma_{\ln X} \le \ln x \quad \Leftrightarrow \quad Z_{ln} \le \frac{\ln x - \mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}}$$

- wartość dystrybuanty rozkładu logarytmiczno-normalnego

$$P(X \le x) = F_X(x) = \Phi(z_{ln}) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}}\right)$$

- odwrotność dystrybuanty rozkładu logarytmiczno-normalnego

$$x_p = F_X^{-1}(p) = \exp\left(\mu_{\ln X} + \Phi^{-1}(p)\cdot\sigma_{\ln X}\right)$$

Zadanie

Zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno-normalny, $\mu_X = 100$, $\sigma_X = 20$

a). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X nie przekroczy wartości x = 65.

b). Znajdź taką wartość x, której zmienna losowa X nie przekroczy z prawdopodobieństwem p = 0,1; znajdź p% kwantyl.

Rozwiązanie

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

$$\sigma_{\ln X}^2 = \ln(V_X^2 + 1) = \ln(0{,}2^2 + 1) = 0{,}0392$$

$$\sigma_{\ln X} = \sqrt{0{,}0392} = 0{,}1980$$

$$\mu_{\ln X} = \ln(\mu_X) - 0{,}5\cdot\sigma_{\ln X}^2 = \ln(100) - 0{,}5\cdot 0{,}0392 = 4{,}586$$

a). $P(X \le 65) = F_X(65) = \Phi\left(\dfrac{\ln(65) - \mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}}\right) = \Phi(-2{,}08) = 0{,}02$

b). $x_{0,1} = x_{10\%} = F_X^{-1}(0{,}1) = \exp\left(\mu_{\ln X} + \Phi^{-1}(0{,}1)\cdot\sigma_{\ln X}\right) = \exp\left(\mu_{\ln X} + (-1{,}28)\cdot\sigma_{\ln X}\right) = 76$

Rozkład ekstremalny typu I (Gumbela)

$$F_X(x) = e^{-e^{-\alpha_X (x-u_X)}}$$

$$\alpha_X > 0$$

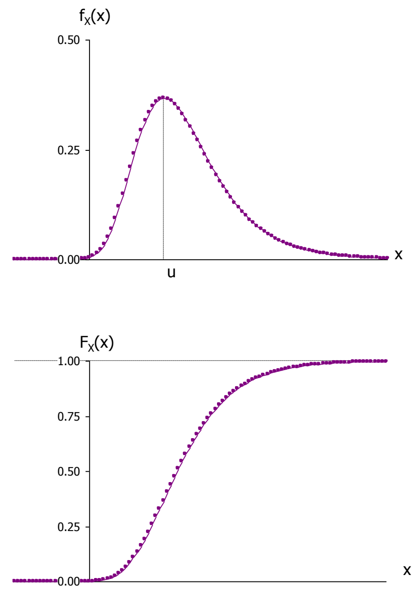
$$f_X(x) = \alpha_X \, e^{-\alpha_X (x-u_X)} \, e^{-e^{-\alpha_X (x-u_X)}}$$

$$u_X \approx \mu_X - 0{,}45 \cdot \sigma_X$$

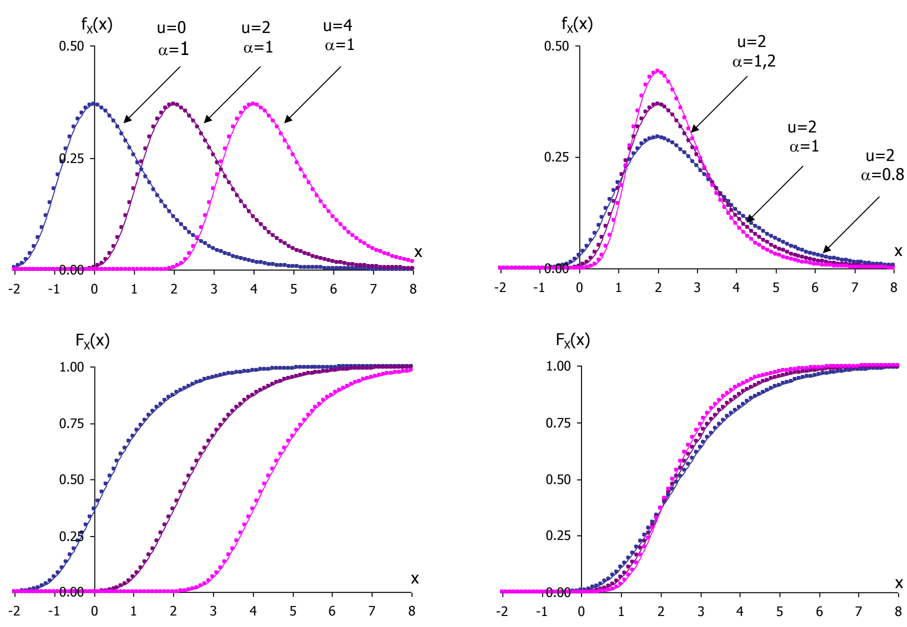
$$\alpha_X \approx \frac{1{,}282}{\sigma_X}$$

$$\mu_X \approx u_X + \frac{0{,}577}{\alpha_X}$$

$$\sigma_X \approx \frac{1{,}282}{\alpha_X}$$



Rozkład ekstremalny typu I (Gumbela)



Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Zadanie

Zmienna losowa X ma rozkład ekstremalny typu I, $\mu_X = 100$, $\sigma_X = 20$

a). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X nie przekroczy wartości x = 65.

b). Znajdź taką wartość x, której zmienna losowa X nie przekroczy z prawdopodobieństwem p = 0,1; znajdź p% kwantyl.

Rozwiązanie

$$\alpha_X \approx \frac{1{,}282}{\sigma_X} = \frac{1{,}282}{20} = 0{,}0641$$

$$u_X \approx \mu_X - 0{,}45\sigma_X = 100 - 0{,}45 \cdot 20 = 91$$

a). $$P(X \le 65) = F_X(65) = \exp(-\exp(-\alpha_X(65 - u_X))) = 0{,}005$$

b). $$x_{0,1} = x_{10\%} = F_X^{-1}(0{,}1) = u_X - \frac{\ln(-\ln(0{,}1))}{\alpha_X} = 78$$

Zadanie 1

Zmienna losowa X ma rozkład normalny, $\mu_X = 200$, $\sigma_X = 40$

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X nie przekroczy wartości nominalnej x_n

a). $x_n = 125$ b). $x_n = 200$ c). $x_n = 275$

Znaleźć taką wartość x_n, której X nie przekroczy z prawdopodobieństwem p

d). p = 0,15 e). p = 0,50 f). p = 0,85

Obliczyć parametr $\lambda_X = \mu_X / x_n$, zakładając $x_n = x_p$.

Rozwiązanie przedstawić na wykresie funkcji gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty zmiennej losowej X.

Zadanie 2

Rozwiązać zadanie 1, zakładając, że zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno-normalny, $\mu_X = 200$, $\sigma_X = 40$

Zadanie 3

Rozwiązać zadanie 1, zakładając, że zmienna losowa X ma rozkład ekstremalny typu I (Gumbela), $\mu_X = 200$, $\sigma_X = 40$

Liniowa funkcja zmiennych losowych

Jeżeli: $Y = aX$ — X – zmienna losowa, a – stała

wtedy:

$$\mu_Y = a\mu_X$$

$$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

stąd:

$$\sigma_Y = a\sigma_X$$

$$V_Y = \sigma_Y / \mu_Y = V_X$$

Jeżeli X ma rozkład normalny, to Y też ma rozkład normalny.

Jeżeli: $Y = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + a_{n+1}$ — $X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe, $a_1, \ldots, a_n$ – stałe

wtedy:

$$\mu_Y = a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n + a_{n+1}$$

$$\sigma_Y^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$$

Jeżeli $X_1, \ldots, X_n$ mają rozkłady normalne, to Y też ma rozkład normalny.
Jeżeli $X_1, \ldots, X_n$ mają dowolne rozkłady, to Y ma w przybliżeniu rozkład normalny (na mocy centralnego twierdzenia granicznego).

Nieliniowa funkcja zmiennych losowych. Iloczyn zmiennych losowych.

Jeżeli: $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — $X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe

Rozwijamy funkcję f w szereg Taylora wokół średnich i uwzględniamy wyrazy pierwszego rzędu:

$$Y \approx f(\mu_1, \ldots, \mu_n) + \left.\frac{\partial f}{\partial X_1}\right|_\mu (X_1 - \mu_1) + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial X_n}\right|_\mu (X_n - \mu_n) \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_\mu = a_i$$

wtedy:

$$\mu_Y \approx f(\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

$$\sigma_Y^2 \approx a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$$

Jeżeli: $Y = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$ — $X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe

$$\left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_u = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_{i-1} \cdot \mu_{i+1} \cdot \ldots \cdot \mu_n \qquad \sigma_i = \mu_i V_i$$

wtedy:

$$\mu_Y \approx \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n$$

$$\sigma_Y^2 \approx \mu_1^2 \cdot \ldots \cdot \mu_n^2 \cdot (V_1^2 + \ldots + V_n^2)$$

$$V_Y^2 \approx (V_1^2 + \ldots + V_n^2)$$

Y ma w przybliżeniu rozkład normalny (na mocy centralnego twierdzenia granicznego).

Dr inż. Ewa K. Szeliga
Wydział Inżynierii Lądowej
Politechnika Warszawska

Zadanie

Na belkę swobodnie podpartą o rozpiętości l = 4 m działają obciążenia ciągłe równomiernie rozłożone: a). q_1 b). q_2 c). q_1 i q_2

q_1 i q_2 – niezależne zmienne losowe o rozkładach normalnych, o parametrach:

μ_{q1} = 2,0 kN/m σ_{q1} = 0,4 kN/m

μ_{q2} = 4,0 kN/m σ_{q2} = 0,8 kN/m

Określić rozkład prawdopodobieństwa momentu zginającego w środku rozpiętości belki – jego typ i parametry.

Rozwiązanie

a).

$$Q(q_1) = q_1 \cdot l^2/8 = a_1 q_1$$

$a_1 = l^2/8 = 2\ m^2$

$$\mu_Q = a_1 \mu_{q1} = 4{,}0\ \text{kNm}$$

$$\sigma_Q^2 = a_1^2 \sigma_{q1}^2 = 0{,}64\ (\text{kNm})^2$$

$$\sigma_Q = a_1 \sigma_{q1} = 0{,}8\ \text{kNm}$$

$$V_Q = 0{,}2$$

b).

$$Q(q_2) = q_2 \cdot l^2/8 = a_2 q_2$$

$a_2 = l^2/8 = 2\ m^2$

$$\mu_Q = a_2 \mu_{q2} = 8{,}0\ \text{kNm}$$

$$\sigma_Q^2 = a_2^2 \sigma_{q2}^2 = 2{,}56\ (\text{kNm})^2$$

$$\sigma_Q = a_2 \sigma_{q2} = 1{,}6\ \text{kNm}$$

$$V_Q = 0{,}2$$

c).

$$Q(q_1, q_2) = a_1 q_1 + a_2 q_2$$

$a_1 = a_2 = l^2/8 = 2\ m^2$

$$\mu_Q = a_1 \mu_{q1} + a_2 \mu_{q2} = 12{,}0\ \text{kNm}$$

$$\sigma_Q^2 = a_1^2 \sigma_{q1}^2 + a_2^2 \sigma_{q2}^2 = 3{,}20\ (\text{kNm})^2$$

$$\sigma_Q = 1{,}79\ \text{kNm}$$

$$V_Q = 0{,}149$$

Q mają rozkłady normalne.

Zadanie

Wskaźnik przekroju belki zginanej W oraz wytrzymałość materiału f są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, o parametrach:

μ_W = 50 cm^3 σ_W = 3 cm^3

μ_f = 400 MPa σ_f = 32 MPa

Określić rozkład prawdopodobieństwa nośności belki - jego typ i parametry.

Rozwiązanie

$$R(W, f) = W \cdot f$$

$$\mu_R = \mu_W \cdot \mu_f = 50 \cdot 10^{-6} m^3 \cdot 400 \cdot 10^3 kN/m^2 = 20\,\text{kNm}$$

$$V_W = \sigma_W / \mu_W = 0{,}06$$

$$V_f = \sigma_f / \mu_f = 0{,}08$$

$$V_R = \sqrt{V_W^2 + V_f^2} = \sqrt{0{,}06^2 + 0{,}08^2} = 0{,}1$$

$$\sigma_R = V_R \cdot \mu_R = 0{,}1 \cdot 20\,\text{kNm} = 2\,\text{kNm}$$

$$\sigma_R^2 = 4\ (\text{kNm})^2$$

R ma w przybliżeniu rozkład normalny.