



Politechnika
Wrocławska

Politechniki Wrocławska
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

(Zał. 5a do procedury Pr 08)



SPECJALNOŚĆ: TEORIA KONSTRUKCJI

MAGISTERSKA

PRACA DYPLOMOWA

**TYTUŁ : Program komputerowy do obliczania
płyt prostokątnych na półprzestrzeni
sprężystej.**

Autor: Aleksander Mróz

Opiekun: dr hab. inż. Włodzimierz Brząkała

Recenzent: dr inż. Jarosław Rybak

Rok akademicki 2017/2018



Politechnika
Wrocławska

Politechnika Wrocławska
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

TEMAT PRACY DYPLOMOWEJ MAGISTERSKIEJ

(Zał. 2a do procedury Pr 08)



Rok akademicki: 2017/2018

Nr tematu: 2/TKO/17

Specjalność na studiach magisterskich: TKO

Dyplomant: Aleksander MRÓZ

Temat wydany w katedrze/zakładzie:

Katedra Geotechniki, Hydrotechniki, Budownictwa Podziemnego i Wodnego (W-2/K1)

Opiekun pracy dyplomowej: dr hab.inż. Włodzimierz Brząkała, prof. PWr

Tytuł pracy w języku polskim:

Program komputerowy do obliczania płyt prostokątnych na półprzestrzeni sprężystej

Tytuł pracy w języku angielskim:

Computer code for calculation of rectangular slabs resting on the elastic half-space

Ogólna charakterystyka pracy¹: studialna studialno-projektowa eksperymentalno-projektowa

Cele pracy:

doskonalenie umiejętności programowania, testowanie poprawności obliczeń;
analiza współpracy konstrukcji z podłożem sprężystym, dyskretyzacja zagadnienia kontaktowego.

Zakres pracy:

opracowanie programu komputerowego do rozwiązywania prostokątnych płyt fundamentowych o „małej” (stałej) grubości, posadowionych na półprzestrzeni sprężystej – uogólnienie metody ZEM_SIN dla belek; współczynniki wpływowe dla osiadań podłoża $w_{ij,mn}$, współczynniki wpływowe dla ugięcia płyty $y_{ij,mn}$, równania równowagi, wpływ osiadań górniczych Δ_{ij} , zastosowanie zasady superpozycji; wyznaczanie sił w płycie; oprogramowanie, testy poprawności obliczeń; wprowadzanie danych, pre- i post-processing.

Uwaga dodatkowa:

zakłada się, że student wyrazi zgodę na korzystanie z opracowanego programu w katedrze W-2/K1, głównie dla celów dydaktycznych (*public domain*).

podpisy:

(opiekun pracy)

(kierownik katedry/zakładu)

Temat pracy dyplomowej otrzymałem

13.03.2018 Prof. Aleksander
(data i podpis studenta)

Na podstawie Uchwały Rady Wydziału
z dnia

zatwierdzam
PRODZIEKAN ds. DYDAKTYKI

dr inż. Andrzej BATOG

(prodziekan ds. dydaktyki)

¹ niepotrzebne skreślić

Spis treści

Streszczenie pracy dyplomowej.....	2
Słowa kluczowe.....	2
1 Wstęp.....	3
1.1 Słowo od autora.....	3
2 Wstępny opis programu.....	4
2.1 Cel i zakres obliczeń.....	4
2.2 Założenia i dane.....	4
2.3 Równania metody mieszanej sił i przemieszczeń.....	5
2.4 Obliczenie przemieszczeń.....	6
2.5 Obliczenie osiadań.....	6
2.6 Układ równań metody mieszanej.....	7
2.7 Wyznaczenie sił wewnętrznych.....	7
3 Metoda Elementów Skończonych.....	8
3.1 Wstęp do Metody Elementów Skończonych.....	8
3.2 Idea Metody.....	8
3.3 Elementy Płytowe – Podstawa Algorytmu programu B_M.....	10
4 Zagadnienie Boussinesqa.....	14
4.1 Wstęp do zagadnienia Boussinesqa.....	14
4.2 Wyprowadzenie wzoru.....	14
4.3 Osiadania według teorii Boussinesqa.....	17
5 Algorytm programu B_M.....	20
5.1 Opis działania programu.....	20
5.2 Uwagi do programu.....	22
6 Testy programu.....	24
6.1 Test 1 – belka 30x1x0.4m.....	24
6.1.1 Wyniki programu B_M dla gęstej siatki.....	27
6.2 Test 2 – Belka 21x1x0,5.....	29
6.2.1 Wyniki programu B_M dla gęstej siatki.....	31
6.3 Test 3 - Deformacje górnicze płyty.....	33
6.4 Test 4 - Płyta nieskończenie sztywna obciążona siłą skupioną.....	34
6.5 Test 5 – płyta odkształcalna obciążona 3 siłami skupionymi.....	35
7 Instrukcja obsługi dla użytkownika.....	39
7.1 Strona główna.....	39
7.2 Strona Obciążenia.....	40
7.3 Strona Wyniki.....	41
8 Podsumowanie.....	41
8.1 Dalsze możliwości rozwoju.....	41
Bibliografia.....	42

Streszczenie pracy dyplomowej

Celem pracy dyplomowej było stworzenie programu komputerowego do obliczania płyt prostokątnych na półprzestrzeni sprężystej. Program zawiera jądro obliczeniowe oraz interface użytkownika. Program został napisany w języku Python 3.6 przy zastosowaniu bibliotek numerycznych „numpy”, „sympy”, „scipy” oraz bibliotek graficznych „matplotlib” i „tkinter”. Program umożliwia użytkownikowi wprowadzenie sił skupionych oraz deformacji górniczych jako obciążenie powierzchni płyty. Wyniki obliczeń zostały przedstawione w postaci wykresów 3D, a także w pliku tekstowym.

Jądro programu stanowi moduł Kernel, który jest implementacją Metody Elementów Skończonych dla elementów płytowych. Wspomagającym modułem jest moduł ZEM, którego zadaniem jest policzenie osiadań gruntu według zagadnienia Boussiensa dla półprzestrzeni sprężystej

W pracy zostały zaprezentowane wszystkie założenia oraz schematy algorytmów, które wykorzystano w programie. Zawarto też testy programu oraz uwagi dotyczące ograniczeń oraz możliwości ich rozwiązania.

Słowa kluczowe

Metoda Elementów Skończonych

Zagadnienie Boussiensa

Fundamentowa płyta prostokątna

Osiadania gruntu

Algorytm komputerowy

1 Wstęp

1.1 Słowo od autora

Sztuka inżynierii budowlanej, okiem osoby niezwiązanej z budownictwem, mierzona jest przede wszystkim wyglądem i rozmiarem konstrukcji. Na pierwszy rzut oka podziwiamy wysoką i lśniącą w słońcu sylwetkę nowo wybudowanego wieżowca. Niejednokrotnie cały wysiłek inżynierski jest jednak włożony w to czego okiem nie zobaczymy i co jest kilka metrów pod poziomem terenu. Takim małym dziełem „sztuki” jest fundament, którego zadaniem jest przenieść ciężar konstrukcji, obciążenia eksploatacyjne, oraz potęgę natury na podłoże gruntowe.

Grunt budowlany jest niejednorodnym ciałem stałym i tylko w ograniczonym zakresie podlega prawom teorii sprężystości. Doświadczenie inżynierskie, oparte na badaniach laboratoryjnych, analizie posadowionych już konstrukcji, mówi nam, że z inżynierską dokładnością możemy traktować grunt jako izotropową, sprężystą półprzestrzeń. Przy takim założeniu, możemy się już posłużyć wieloma sprawdzonymi metodami obliczania naprężeń, deformacji spowodowanych działaniem sił pionowych na płaszczyznę ograniczającą półprzestrzeń.

Trendem w ówczesnym świecie jest postępująca cyfryzacja każdej dziedziny naszego życia. To co kiedyś wykonywało się ręcznie na desce kreślarskiej przez kilka dni, możemy teraz w kilka godzin narysować w programach pokroju AutoCad. Jeśli okaże się, że popełniliśmy jakiś błąd, wystarczy tylko kilka przesunięć linii i ponowne plotowanie arkusza. Jest to jednak za mało. Coraz większą wagę ma umiejętność programowania i pisanie kodu na własny użytek. Co prawda istnieje wiele programów, które już opracowały rozwiązanie problemu za nas. Są one jednak drogie i czasem bardziej opłaca się napisać skrypt samemu. Jest też wiele zagadnień, które czekają na oprogramowanie.

W mojej pracy magisterskiej podjąłem się zadania napisania programu do obliczania płyt prostokątnych na półprzestrzeni sprężystej. Nie jest to zagadnienie łatwe, gdyż wiele programów stara się obejść tę tematykę, wykorzystując łatwiejszy model Winklera, bądź jego modyfikację.

Samo pisanie kodu zajmuje niewielki ułamek czasu, który poświęcimy na stworzenie programu. Reszta to szukanie błędów i zastanawianie się jak napisać to lepiej.

Program B_M jest programem wyjściowym, który można dalej rozwijać. Implementuje on najważniejszą część jaką jest jądro obliczeniowe. Pozostałe kwestie są tylko kwestią czasu, który należałoby poświęcić na doprogramowanie kolejnych użyteczności.

Dodatkowo chciałbym także podziękować dr hab. inż. Kazimierzowi Myśleckiemu za pomoc merytoryczną przy pisaniu fragmentów opartych na algorytmach Metody Elementów Skończonych.

2 Wstępny opis programu

2.1 Cel i zakres obliczeń

Program rozwiązuje numerycznie płyty obciążone siłami skupionymi stosując metodę mieszaną. Wyniki mogą stanowić pomoc do wymiarowania płyt fundamentowych.

Podstawą modelu jest dyskretyzacja, czyli założenie, że reakcja podłoża pod ławą jest stała na segmentach obliczeniowych. Dzięki temu zamiast wyznaczać funkcję oporu $r(x,y)$ poszukujemy wartości liczbowych na wydzielonych segmentach, których jest kilkadziesiąt, lub kilkaset

Modelem podłoża jest jest półprzestrzeń sprężysta.

Rozwiązanie płyty oznacza wyznaczenie wielkości statycznych oporu gruntu i przemieszczeń krańców płyty i na tej podstawie wyznaczenie:

- **uśrednionych** przemieszczeń y_i poszczególnych segmentów,
- **uśrednionych** reakcji podłoża r_i pod segmentami,
- **uśrednionych** wartości momentów zginających i sił poprzecznych

Program składa się z 2 podprogramów:

Kernel – algorytm służący do wyznaczania „macierzy wpływu osiadań” dla płyty prostokątnej, swobodnie podpartej.

ZEM – program, który wykorzystując zagadnienie Boussiensq’a wyznacza osiadania gruntu pod wpływem obciążenia.

Nad całością panuje moduł sterujący, którego zadaniem jest komunikacja pomiędzy użytkownikiem, a „jądrem obliczeniowym”

2.2 Założenia i dane

Przyjęto następujące założenia wstępne:

I) Płyta zostanie zdyskretyzowana na $m * n$ elementów, gdzie m jest podziałem boku A, natomiast n jest podziałem boku B. Inaczej mówiąc, naszą płytę rozpatrujemy jako zbiór prostokątnych elementów płytowych o stałych parametrach w segmencie.

II) Zakładamy, że nasza płyta będzie dostatecznie cienka i będzie spełniać założenia Teorii Płyt i Powłok (Kirchhoffa-Lova): $h \leq \frac{1}{10}$ wymiaru krótszego boku

III) Decydujące są przemieszczenia pionowe (prostopadłe do płaszczyzny środkowej

IV) Płyta przylega do podłoża na całej swojej powierzchni. Zakłada się, że w przypadku tendencji do odrywania, grunt będzie nadal współpracować z płytą. Wynikiem będą ujemne wartości oporu na lokalnym segmencie, który jest odrywany.

V) Powierzchnia styku płyty z gruntem jest gładka. Oznacza to brak naprężeń stycznych.

VI) Obciążenie zewnętrzne występuje jako siły skupione, przyłożone w środku ma górnej powierzchni każdego elementu. Przemieszczenia od ewentualnych deformacji górniczych także zostają przyłożone w środku elementu obliczeniowego

VII) Ciągłe naprężenia kontaktowe $r(x,y)$ aproksymuje się za pomocą funkcji schodkowej, o stałych wartościach na segmencie obliczeniowym.

VIII) Dokonuje się myślowego oddzielenia płyty od podłoża (ze względu na dużą sztywność elementu obliczeniowego) można przykładać do niej siły wypadkowe z segmentów

Określono też dane wstępne, niezbędne do obliczeń:

Płyta:

A [m], B [m] – wymiary boku płyty

h [m] – wysokość

ν – współczynnik Poissona

E [MPa] – moduł Younga płyty

Grunt:

E_0G [MPa] – moduł odkształcalności gruntu

ν_G – współczynnik Poissona

Model:

m,n – podział odpowiednio boku A i B na „m” i „n” elementów

2.3 Równania metody mieszanej sił i przemieszczeń

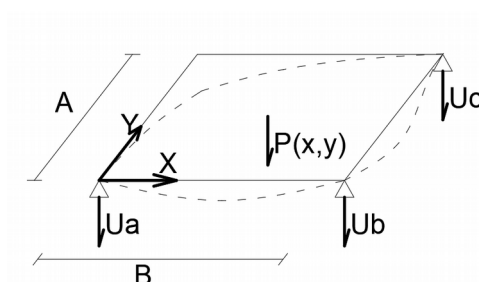
P – dowolny punkt o współrzędnej (x_p, y_p) w

płaszczyźnie styku płyty z podłożem

U_A, U_B, U_C - przemieszczenie końców płyty po obciążeniu

U_P – przemieszczenie punktu P płyty po obciążeniu

Y_P – ugięcie w punkcie P płyty na podporach statycznie wyznaczalnych. Jest miarą odkształcenia belki na skutek działających sił.



Rysunek 1: Ugięcie punktu P na płycie

W stosunku do poziomu zerowego, wytyczonego przez płytę nieodkształconą, zachodzi:

$$U_P = Y_P + \left(1 - \frac{x_p}{A} - \frac{y_p}{B}\right) U_A + \frac{x_p}{A} U_B + \frac{y_p}{B} U_C \quad (2.1)$$

Także podobne podejście stosujemy w przypadku osiadania podłoża:

w_p – osiadanie podłoża w punkcie P po obciążeniu

Δ_p – osiadanie podłoża spowodowane deformacjami górnictwami lub osiadaniem od sąsiada.

2.4 Obliczenie przemieszczeń $y_{si}=y_i$

Wstępnym założeniem było wyznaczenie „macierzy wpływu osiadań” dla płyty podpartej przegubowo na 3 rogach.

Brak „prostego” rozwiązania zamkniętego dla płyty wymusza na nas konieczność stosowania metod numerycznych.

Macierz wpływu osiadań osiągnięto poprzez wykorzystanie Metody Elementów Skończonych. Płytę podzielono na elementy, a następnie analitycznie sprawdzono zachowanie się płyty pod wpływem jednostkowego obciążenia każdego elementu. Na tej podstawie wygenerowano macierz symetryczną o wymiarach $l_e \times l_e$, gdzie l_e to liczba elementów

Szczegółowo metodę opisano w rozdziale 3.

2.5 Obliczenie osiadań $w_{si}=w_i$

Kolejnym krokiem było wyznaczenie „macierzy wpływu osiadań” dla gruntu. Jest to macierz określająca jak osiada obszar „j” pod wpływem obciążenia obszaru siły jednostkowej, równomiernie rozłożonej. Posiłkując się wykorzystano zagadnienie Boussinesqa, które zostało opisane dokładnie w rozdziale 4.

Stosując zasadę superpozycji otrzymuje się osiadania dla środków segmentów:

$$w_{si}=w_i=\sum_{j=1}^N w_{ij} R_j \quad (2.2)$$

$i=1,2,\dots,N$

gdzie:

R_j – siła wypadkowa na segmencie Seg_j

w_{ij} – pewne współczynniki wpływowe dla osiadania podłoża, czyli osiadanie uśrednione segmentu „j” po obciążeniu segmentu „i” siłą wypadkową $R_j=1$

2.6 Układ równań metody mieszanej

W sumie w równaniach występują $N+3$ niewiadome: $U_A, U_B, U_C, R_1, \dots, R_N$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^N w_{ij} R_j + \Delta_i = \sum_{j=0}^N y_{ij} (P_j - R_j) + (1 - \alpha - \beta) U_A + \alpha U_B + \beta U_C \\ \sum_{j=0}^N P_j = \sum_{j=0}^N R_j \\ \sum_{j=0}^N P_j x_j = \sum_{j=0}^N R_j x_j \\ \sum_{j=0}^N P_j y_j = \sum_{j=0}^N R_j y_j \end{array} \right. \quad (2.3)$$

gdzie:

$$\alpha_i = \frac{x_i}{A}$$

$$\beta_i = \frac{y_i}{B}$$

Podsumowując układ – równania są wynikiem założeń:

- Ugięcia gruntu pod płytą są równe ugięciom płyty

Warunki statyczne:

- Siły oraz momenty względem osi X i Y muszą się równoważyć.

Obciążenie P_j (w dół) uważa się za dodatnie.

Po uporządkowaniu wzorów – przyjmują one następującą postać

$$A * X = B, \text{ dla } A = []_{(N+3) \times (N+3)}, X = []_{(N+3) \times 1}, B = []_{(N+3) \times 1}$$

$$X = [(R_1, R_2, R_3, \dots, R_N, U_A, U_B, U_C)]_{(N+3) \times 1}, \text{ gdzie:}$$

$$A = \begin{bmatrix} , & , & , & , & , & (\alpha_1 + \beta_1 - 1) - \alpha_1 - \beta_1 \\ , & w_{ij N \times N} & ' + ' & y_{ij N \times N} & , & (\alpha_2 + \beta_2 - 1) - \alpha_2 - \beta_2 \\ , & , & , & , & , & , & , & , & , \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} , & , & , & , & , & 0 & 0 & 0 \\ , & , & y_{ij N \times N} & , & , & 0 & 0 & 0 \\ , & , & , & , & , & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.7 Wyznaczenie sił wewnętrznych

Posiadając już rozwiązanie układu mieszanego, możemy ponownie wykorzystując zagadnienie Boussinesq'a wyznaczyć osiadania gruntu. Tym razem biorąc jednak do obliczeń nie siłę jednostkową, lecz rzeczywistą wartość.

Dodatkowo dysponując odporami gruntu, wykorzystamy Metodę Elementów Skończonych do ponownego wyliczenia przemieszczeń płyty. Jest to niezbędne, gdyż siły wewnętrzne w płycie są pochodną deformacji obiektu.

3 Metoda Elementów Skończonych

3.1 Wstęp do Metody Elementów Skończonych

Metoda elementów skończonych jest w dzisiejszych czasach najpopularniejszą metodą symulacji numerycznej zjawisk, które są opisywane równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

Swoją popularność osiągnęła dzięki dużej uniwersalności, łatwości budowy modeli numerycznych oraz szerokiego spektrum zastosowań. Powszechny dostęp do komputerów o szybko wzrastającej mocy obliczeniowej pozwalają na przeprowadzanie analizy konstrukcji o coraz większym stopniu złożoności.

Wykorzystanie metod przybliżonych do rozwiązania równań różniczkowych pociąga za sobą konieczność odpowiedzenia na pytanie o dokładność aproksymacji problemu brzegowego.

Ocena wiarygodności wyników symulacji jest zazwyczaj określana jako „szacowanie błędu a posteriori” albo „adaptacją siatek” w obszarach z dużym błędem.

Potrzeba korzystania z Metody Elementów Skończonych, lub metod pokrewnych szczególnie się uwidacznia w konstrukcjach, których opis matematyczny byłby mocno skomplikowany. Równania MES najłatwiej sobie wyobrazić jako zadania formułowane w języku algebry liniowej, która dzięki swojej uniwersalności daje nam możliwość opisanie zachowania w dowolnej konstrukcji budowlanej.

3.2 Idea Metody

W dużym uproszczeniu na konstrukcje składają się dźwigary, które są wzajemnie połączone i podparte tak, że wszystkie składowe elementy są pozbawione stopni swobody.

Najprostszym elementem jest rozciągany pręt kratownicy, który jest jednowymiarową bryłą. Jej jedyną siłą wewnętrzną jest siła osiowa. Najbardziej skomplikowanym elementem konstrukcyjnym jest bryła trójwymiarowa. Odkształcenia bryły generują wewnątrz niej naprężenia, które są podstawową siłą wewnętrzną.

Pomiędzy tymi 2 biegunowo przeciwnymi obiektami, mamy pełen wachlarz „elementów konstrukcyjnych” - belki, ramy, tarcze, płyty, powłoki. Niemniej jednak rozważając nawet najprostsze belki, traktujemy je jako ośrodki ciągłe.

Każdy punkt belki oddziałuje z punktem sąsiednim, a na linii symbolizującej oś ciężkości elementu takich punktów jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie układu, to inaczej wyznaczenie sił biernych, wewnętrznych i przemieszczeń i sprowadza się do rozwiązania układu równań różniczkowych z warunkami brzegowymi. Stosujemy więc zasady mechaniki do nieskończenie małych elementów. Dla trudnych przypadków, które zazwyczaj występują w życiu, niemożliwe jest wyznaczenie rozwiązań w postaci zamkniętej. Jesteśmy, więc skazani na metody przybliżone, z Metodą Elementów Skończonych na czele.

MES wymaga zdefiniowania skończonej liczby niezależnych parametrów określających przemieszczenia poszczególnych węzłów. Grupa węzłów składa się na element. Najprostszy to pręt o 2 węzłach, na każdym z końców. W mojej pracy wykorzystuję element płytowy, prostokątny o 4 węzłach, na każdym z rogów.

Oddziaływania między elementami mogą zachodzić tylko w węzłach wspólnych.

Kolejnym ograniczeniem, jest konieczność definiowania obciążenia i przemieszczeń tylko w węzłach. Warunki równowagi modelu zapisuje się w postaci równań algebraicznych. Rozwiązanie układu ogranicza się do określenia przemieszczeń poszczególnych węzłów, zgodnie z ich stopniem swobody.

Kolejnym problemem jest odwzorowanie wpływu elementu na swobodę ruchu węzłów. Kluczową sprawą jest tutaj dobranie odpowiedniej funkcji aproksymacyjnej, która będzie wektorem u_e w obszarze każdego elementu skończonego, a następnie sklejeniu składowych wektorów wzdłuż krawędzi elementu. Funkcje aproksymacyjne są zazwyczaj w postaci wielomianu. Stopień wielomianu jest zależny od wymiaru wektora wartości przemieszczeń brzegowych.

Dzięki znajomości funkcji aproksymującej, jesteśmy w stanie wyznaczyć macierz sztywności lokalną elementu.

Konieczne jest jednak wyprowadzanie kilku podstawowych wzorów, dzięki którym będziemy mogli wyprowadzić lokalną macierz sztywności.

Dla prętów:

$$\begin{aligned} p(x) &= [q(x)] \\ u(x) &= [w(x)] \\ \varepsilon(x) &= [\chi(x)] \\ \sigma(x) &= [M(x)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dla tarcz:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= [p_x(x, y), p_y(x, y)]^T \\ u(x, y) &= [u(x, y), v(x, y)]^T \\ \varepsilon(x, y) &= [\varepsilon_x(x, y), \varepsilon_y(x, y), \gamma_{xy}(x, y)]^T \\ \sigma(x, y) &= [N_x(x, y), N_y(x, y), N_{xy}(x, y)]^T \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon = D u \quad (3.3)$$

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3.4)$$

$$\int_{\Omega} u^T p dx + \int_{\Gamma} \bar{q}^T Q ds = \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}^T \sigma dx \quad (3.5)$$

Niech:

n_e jest liczbą elementów skończonych w przyjętej dyskretyzacji

Ω_e, Ω – obszar e-tego elementu skończonego

u_h – wektor przybliżonych przemieszczeń Ω

u_e – wektor przybliżonych przemieszczeń elementu skończonego gdzie numer to e i przyjmuje wartość $e=1, \dots, n_e$

q_e – wektor przemieszczeń węzłów (wektor stopni swobody)

Przemieszczenia dowolnego punktu wewnątrz Ω_e określa się na podstawie macierzy funkcji aproksymujących (N_e).

$$u_e(x) = \begin{cases} N_e(x) q_e, & x \in \Omega_e \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_e \end{cases} \quad (3.6)$$

Wektor u_h jest więc sumą:

$$u_h = \sum_{e=1}^{n_e} u_e \quad (3.7)$$

Równanie (3.5) można zapisać w poniższej postaci, jeśli ma się dotyczyć tylko jednego elementu.

$$\bar{q}_e^T (Q_e + Q_e^0) = \int_{\Omega_e} \bar{\varepsilon}_e^T \sigma_e dx \quad (3.8)$$

Całkę po brzegu zastąpiono iloczynem skalarnym wektorów przemieszczeń

$$\int_{\Gamma_e} \bar{q}_e^T Q_e ds \approx \bar{q}_e^T Q_e \quad (3.9)$$

Symbol

$$Q_e^0 = \int_{\Omega_e} N_e^T p_e dx \quad (3.10)$$

określa wektor zastępczych obciążeń węzłowych elementu u numerze e.

Na podstawie równania (3.3) (3.4) (3.6) wyrażenie (3.8) można zapisać w postaci:

$$\bar{q}_e^T Q_e = \bar{q}_e^T \left[\left(\int_{\Omega_e} B_e^T E_e B_e dx \right) q_e - Q_e^0 \right] \quad (3.11)$$

, gdzie

$$B_e = DN_e \quad (3.12)$$

jest macierzą, której składowymi są pochodne funkcji kształtu, zaś:

$$K_e = \int_{\Omega_e} B_e^T E_e B_e dx \quad (3.13)$$

oznacza macierz sztywności elementu skończonego.

Równanie (3.11) musi być spełnione dla dowolnego wektora sił obciążeniowych, co pociąga za sobą po zastosowaniu (3.12) w (3.3) i (3.4) formuły, które stanowią komplet równań statyki liniowej, gdzie:

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= B_e q_e \\ \sigma_e &= E_e B_e q_e \\ Q_e &= K_e q_e - Q_e^0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3 Elementy Płytowe – Podstawa Algorytmu programu B_M

Rozwiązanie problemu wymagało rozwiązania ugięcia cienkiej płyty prostokątnej. Z uwagi na brak prostej, zamkniętej postaci algorytmu, konieczne było napisanie algorytmu Metody Elementów Skończonych.

Płyta cienka to obiekt o dwóch wymiarach, w którym wymiary w płaszczyźnie xysą wielokrotnie większe niż jego grubość.

Z uwagi na znaczne rozmiary obliczeniowe zagadnienia, należało dobrać odpowiedni bazowy element, który pozwoli nam uzyskać odpowiednie wyniki przemieszczeń płyty, a zarazem nie będzie zbyt obciążał procesora.

W programie zastosowano najprostszy, niedostosowany element prostokątny. Często zwany MZC na cześć imion jego twórców (Melosh, Zienkiewicz, Cheung). Element ten spełnia warunek zgodności ugięcia na brzegach, lecz nie spełnia warunku zgodności pochodnej ugięcia na brzegach. Oznacza to, że wyniki ugięć są zgodne, jednak przy wyznaczaniu momentów i sił zginających w płycie, nie będziemy mieli funkcji ciągłej, a same wyniki będą obarczone dużym, skokowym błędem.

Wartość momentów na brzegach można aproksymować średnią ważoną dla sąsiadujących elementów.

Element niedostosowany charakteryzuje się 3 stopniami swobody w każdym węźle:

$$d_i = [d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}]^T = \left[w_i, \frac{\partial w_i}{\partial y}, \frac{\partial w_i}{\partial x} \right] \quad (3.15)$$

Element opisany jest następującą macierzą kształtu i wektorem przemieszczeń węzłowych:

$$[N(\xi, \eta)]^T = \begin{pmatrix} (1-\eta)(1-\xi)(1+\eta+\xi-2\eta^2-2\xi^2) \\ b(1-\xi)(1-\eta)^2\eta \\ -a(1-\eta)^2(1-\xi)\eta \\ (1-\eta)(3\xi+\eta-2\xi^2-2\eta^2)\xi \\ b(1-\eta)^2\xi\eta \\ a(1-\xi)(1-\eta)\xi^2 \\ (-1+3\xi+3\eta-2\xi-2\eta^2)\xi\eta \\ -b(1-\eta)\xi\eta^2 \\ a(1-\eta)\xi^2\eta \\ (1-\xi)(\xi+3\eta-2\xi^2-2\eta^2)\eta \\ -b(1-\xi)(1-\eta)\eta^2 \\ -a(1-\xi)^2\xi\eta \end{pmatrix}, [q] = \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ w_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ w_4 \\ \varphi_{x4} \\ \varphi_{y4} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

W programie wyznaczono kolejno:

mp - wektor węzłów – jest to lista list – obiekt który przetrzymuje w sobie obiekt zawierający numery czterech węzłów składających się na elementach

wsp – wektor współrzędnych - jest to lista, która na każdej pozycji przetrzymuje współrzędną (*x*, *y*) odpowiedniego węzła. Numer węzła jest zgodny z pozycją na liście *wsp*

Macierz D i B:

$$D1 = \frac{E h_0^3}{(12(1-\nu^2))} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ gdzie } \lambda = \frac{(1-\nu)}{2} \quad (3.17)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -\frac{D}{a^2} \frac{\partial N}{\partial \xi^2} \\ -\frac{D}{b^2} \frac{\partial N}{\partial \eta^2} \\ -2\frac{D}{ab} \frac{\partial N}{\partial \xi \eta} \end{bmatrix}_{3 \times 12} \quad (3.18)$$

Macierz pośrednia do wyznaczenia lokalnej macierzy sztywności – (Zgodnie z zasadą „Dziel i rządź”, podzieliłem problem na mniejsze zagadnienia do oprogramowania.)

$$K_{0exy} = B_0^T D B_0 \quad (3.19)$$

Macierz sztywności lokalnej elementu:

$$K_{0e} = a * b \int_0^1 \int_0^1 K_{0exy} d\eta d\xi \quad (3.20)$$

$$K_{0e} = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 \varphi_{x1} & w_1 \varphi_{y1} & w_2 \varphi_{x2} & w_2 \varphi_{y2} & w_3 \varphi_{x3} & w_3 \varphi_{y3} & w_4 \varphi_{x4} & w_4 \varphi_{y4} \\ \varphi_{x1} & , & , & , & , & , & , & , & , \\ \varphi_{y1} & , & , & , & , & , & , & , & , \\ w_2 & , & , & , & , & , & , & , & , \\ \varphi_{x2} & , & , & , & , & , & , & , & , \\ \varphi_{y2} & , & , & , & , & , & , & , & , \\ w_3 & , & , & , & , & , & , & , & , \\ \varphi_{x3} & , & , & , & , & , & , & , & , \\ \varphi_{y3} & , & , & , & , & , & , & , & , \\ w_4 & , & , & , & , & , & , & , & , \\ \varphi_{x4} & , & , & , & , & , & , & , & , \\ \varphi_{y4} & , & , & , & , & , & , & , & , \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

W miejscu „,” jest wartość liczbową

Należy zauważyć, że macierz K_{0e} – jest macierzą osobiłą o wymiarach 12x12.

Kolejnym krokiem jest agregacja macierzy sztywności.

Tworzona jest macierz o wymiarach **liczba węzłów*3 x liczba węzłów*3**. Jest to macierz, w której mamy uporządkowane wszystkie sztywności poszczególnych węzłów. Następnie iterując po elementach, czytujemy numery węzłów danego elementu, a następnie dodajemy odpowiednio sztywności w macierzy globalnej. Innymi słowy – jest to macierz zależności, pomiędzy węzłami.

Węzły w których spotkają się elementy, mają coraz większą sztywność.

Macierz K po dodaniu sztywności jest macierzą niezerową, ale w dalszym ciągu jest macierzą osobiłą. Jest ona już zapisaną w postaci równań macierzowych konstrukcją, której nie zostały jeszcze odebrane stopnie swobody.

Odebranie swobody następuje poprzez zmodyfikowanie wybranej sztywności węzła. Jeżeli chcemy uzyskać zamocowanie sztywne, możemy to zrobić na 2 sposoby.

a) Eliminacja wiersza i kolumny w której znajduje się nasz zablokowany stopień swobody.

Zmniejszamy wtedy rząd macierzy o 1, z każdym razem gdy eliminujemy kolejną możliwość przemieszczenia

b) Zwiększenie sztywności węzła o wielkość „nieskończenie” wielką. W rzeczywistości, można wprowadzić liczbę miliony razy większą, od maksymalnej wartości w macierzy K_{0e} . Trzeba uważać jednak, aby nie przekroczyć zakresu obliczeniowego dla zmiennych w programach. Bazowe jednostki to wartość int, która przechowuje wartości od -2^{31} do 2^{31} oraz long – wartości 2^{63} . Istnieje jednak możliwość dynamicznego zmieniania zakresu przechowywanych liczb. Nie jest to więc duży problem. Należy jednak mieć świadomość, możliwości wystąpienia takiego problemu.

Ważnym elementem równania jest wektor obciążeń, który ma długość równą liczbie stopni swobody elementów całej płyty. To w nim definiujemy obciążenie odpowiednich węzłów.

Ostatnim krokiem jest rozwiązanie układu algebraicznego. Z uwagi na znaczące rozmiary należy zastosować metodę LSQ (metodę najmniejszych kwadratów). Z tą metodą wiąże się pewne niebezpieczeństwo, gdyż, jest ona wykorzystywana do obliczania równań, które mogą dawać więcej niż 1 rozwiązanie. Jest to zagadnienie związane z uwarunkowaniem macierzy.

Im lepiej uwarunkowana macierz, tym mniejszy wpływ związany z „efektem motyla”, czyli niewielka zmiana prowadzi do nieskończenie wielkich skutków. Komputer nie potrafi przechowywać liczb z nieskończoną dokładnością. Dlatego należy wiedzieć, czy przy obcięciu wartości na kilkunastym miejscu po przecinku, nie zmienimy znacząco wyniku rozwiązania.

Dodatkowo trzeba się zastanowić nad sposobem przechowywania macierzy K. Już przy 2500 węzłach mamy do czynienia z macierzą 7500×7500 . Jeśli każda komórka zajmuje nam 8 bajtów, musimy zarezerwować już 450 MB pamięci RAM. Najczęściej macierz K jest macierzą rzadką. Niewielki % jej elementów jest wartością różną od zera.

Ważnym zagadnieniem jest numeracja węzłów. Przy optymalnej numeracji węzłów, możemy sprawić, aby wszystkie elementy niezerowe były dosyć blisko przekątnej macierzy. Dzięki temu, możemy spróbować przechowywać ją w postaci pół pasma, lokując w pierwszej kolumnie elementy diagonalne, a kolejnych kolumnach, elementy następne. Szerokość półpasma definiuje nam maksymalna odległość numeracji sąsiadujących węzłów.

Ostatnim zagadnieniem jest zaimplementowanie i rozwiązanie układu. Z punktu widzenia matematyki, nie jest to skomplikowane zagadnienie. Jest ono jednak czasochłonne. Rozwiązanie macierzy o dużym rozmiarze, pochłania miliardy operacji arytmetycznych. Operacje te są wykonywane docelowo przez procesor CPU, który posiada swoją liczbę wątków i taktowanie, określające ilość operacji na sekundę.

Z uwagi na odmienną strukturę GPU, która charakteryzuje się inną strukturą wewnętrzną, korzystne jest przerzucenie obliczeń macierzowych właśnie na kartę graficzną.

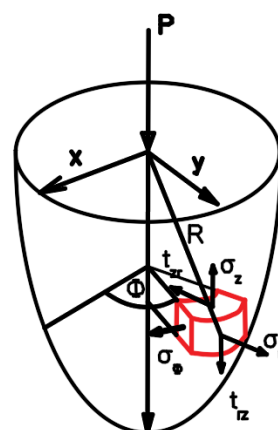
Popularne, nowe procesory (66,3% udziału w rynku) to 4 rdzeniowe obiekty. Natomiast karta graficzna autora pracy magisterskiej (Nvidia GeForce GT 635M z 2013 roku) posiada aż 144 rdzeni. Nowe karty posiadają ich nawet do 3600 i cały czas jest to zakres kart niespecjalistycznych tzn. dedykowanych dla przeciętnego użytkownika. Karty dedykowane pod obliczenia inżynierskie, a nie gry komputerowe działają znacznie szybciej.

Istnieje wiele technologii „przerzucania” obliczeń na GPU. Pomimo różnic wewnętrznych, są one i tak znacząco szybsze, od obliczeń przeprowadzanych na CPU.

4 Zagadnienie Boussinesqa

4.1 Wstęp do zagadnienia Boussinesqa

Praca magisterska zasadniczo opiera się na zagadnieniu Boussinesq'a. Boussinesq traktuje podłoże jako ciało jednorodne, izotropowe i doskonale sprężyste. Wykorzystując Teorię Sprężystości rozpatrywał on nieskończony obszar ograniczony tylko od góry płaszczyzną poziomą. Na tę półprzestrzeń oddziaływała siła pionowa dP , która wywoływała w podłożu naprężenia główne – promieniowe i ciśnienia rozchodzące się prostoliniowo w głąb i wszerz od punktu przyłożenia siły.



Rysunek 2: Półprzestrzeń sprężysta obciążona siłą skupioną

4.2 Wyprowadzenie wzoru

Przy wyprowadzeniu należy założyć osiową symetrię rozchodzenia się naprężeń

$$\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z, \tau_{rz} = \tau_{zr}, \tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = \tau_{z\phi} = \tau_{\phi z} \quad (4.1)$$

a) Równania równowagi elementu:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\phi) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = 0 \quad (4.3)$$

b) Równania geometryczne:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4.6)$$

$$\gamma_{zr} = \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.7)$$

c) Równania fizyczne

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\phi + \sigma_z)] \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{E} [\sigma_\phi - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_\phi + \sigma_r)] \quad (4.10)$$

$$\gamma_{rz} = \gamma_{rz} = \frac{1}{G} \tau_{rz} \quad (4.11)$$

d) Równania fizyczne w zapisie odwrotnym

$$\sigma_r = 2G \left(\varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \quad (4.12)$$

$$\sigma_\phi = 2G \left(\varepsilon_\phi + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \quad (4.13)$$

$$\sigma_z = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \quad (4.14)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{rz} = G \gamma_{rz} \quad (4.15)$$

gdzie:

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\phi \quad (4.16)$$

Mamy więc 10 równań i tyle samo niewiadomych $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{rz}, \varepsilon_r, \varepsilon_\phi, \varepsilon_z, \gamma_{rz}, u, w$

Zadanie rozwiązujemy poprzez dojście do funkcji przemieszczeń $u = u(r, z)$ oraz $w = w(r, z)$

Dzięki wykorzystaniu równań fizycznych i geometrycznych w równaniach równowagi uzyskujemy 2 równania opisujące przemieszczenia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.18)$$

Rozwiązanie układu równań podał Boussinesq w postaci:

$$u(r, z) = A \frac{r^2}{R^3} + B \frac{r}{R(R+z)} \quad (4.19)$$

$$w(r, z) = A \left[\frac{z^2}{R} + (3-4\nu) \frac{1}{R} \right] + B \frac{1}{R} \quad (4.20)$$

gdzie $R = \sqrt{r^2 + z^2}$

Podstawiając (4.19) i (4.20) do (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) otrzymamy

$$\sigma_r = 2G \left(A \left[(1-2\nu) \frac{z}{R^3} - 3 \frac{zr^2}{R^3} \right] + \frac{B}{R^2(R+z)^2} \left(z^2 - r^2 + \frac{z^3}{R} \right) \right) \quad (4.21)$$

$$\sigma_\phi = 2G \left[A (1-2\nu) \frac{z}{R^3} + B \frac{1}{R(R+z)} \right] \quad (4.22)$$

$$\sigma_z = -2G \left(A \left[\frac{3z^3}{R^5} + (1-2\nu) \frac{z}{R^3} \right] + B \frac{z}{R^3} \right) \quad (4.23)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{rz} = -2G \left(A \left[\frac{3rz^3}{R^5} + (1-2\nu) \frac{r}{R^3} \right] + B \frac{r}{R^3} \right) \quad (4.24)$$

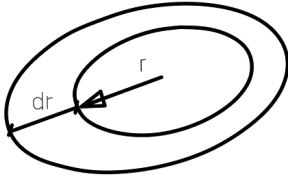
Wyznaczenie stałych A i B następuje na podstawie warunków brzegowych:

1) Na dowolnie dobranej płaszczyźnie $z = \text{constans}$ wypadkowa σ_z musi się równać sile P.

$$\sigma_z dF = 2\pi r \sigma_z dr \quad (4.25)$$

, więc dla całego przekroju poziomego:

$$2\pi \int_0^{\infty} \sigma_z r dr = -P \quad (4.26)$$



Rysunek 3: Elementarny pierścień

2) Drugi warunek ogranicza nam naprężenia na płaszczyźnie $z=0$. Na płaszczyźnie nie działają żadne siły oprócz siły P w miejscu przyłożenia. Naprężenia są równe 0.

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = 0 \text{ stąd } (1-2\nu)A+B=0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Otrzymujemy:

$$A = \frac{P}{4\pi G} \quad B = -(1-2\nu) \frac{P}{4\pi G} \quad (4.28)$$

Funkcje przemieszczeń $u(r,z)$; $w(r,z)$ przyjmują więc postać:

$$u(r,z) = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{r^2}{R^3} - (1-2\nu) \frac{r}{R(R+z)} \right] \quad (4.29)$$

$$w(r,z) = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{2(1-\nu)}{R} + \frac{z^2}{R^2} \right] \quad (4.30)$$

Funkcje składowe stanu naprężeń są postaci:

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{(1-2\nu)}{R(R+z)} - 3 \frac{zr^2}{R^5} \right] \quad (4.31)$$

$$\sigma_\phi = \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right] \quad (4.32)$$

$$\sigma_z = -3 \frac{P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} \quad (4.33)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -3 \frac{P}{2\pi} \frac{rz^2}{R^5} \quad (4.34)$$

Rozwiązanie to obowiązuje dla całej półprzestrzeni, za wyjątkiem bezpośredniego otoczenia punktu przyłożenia siły. Naprężenia i przemieszczenia pod siłą przyjmują wartości nieskończenie duże.

Punkty płaszczyzny, która ogranicza półprzestrzeń, będzie ulegać przemieszczeniom według następujących wzorów:

$$u(r,0) = \frac{-(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E r} P \quad (4.35)$$

$$w(r,0) = \frac{1-\nu P}{\pi E r} \quad (4.36)$$

Stan naprężenia w punktach znajdujących się na osi (O,z) (r=0):

$$\sigma_r = \sigma_\phi = \frac{P}{2\pi} \frac{1-2\nu}{2z} \quad (4.37)$$

$$\sigma_z = \frac{-P}{2\pi} \frac{3}{z^2} \quad (4.38)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = 0 \quad (4.39)$$

Całkowite naprężenie w dowolnym punkcie poziomej płaszczyzny, tzn. wypadkowa z naprężeń σ_z, τ_{rz} wynosi:

$$p = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} \quad (4.40)$$

$$p = \frac{3P}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{z^6}{R^{10}} + \frac{z^4 r^2}{R^{10}}} = \frac{3P}{2\pi} \sqrt{\frac{z^6}{R^6} + \frac{z^4 r^2}{R^6}} \quad (4.41)$$

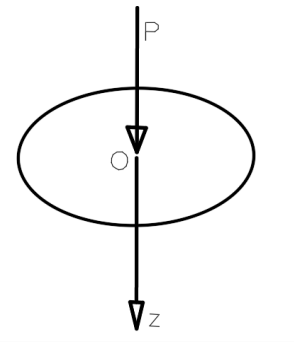
$$\frac{z}{R} = \cos(\alpha) \quad (4.42)$$

$$\frac{r}{R} = \sin(\alpha) \quad (4.43)$$

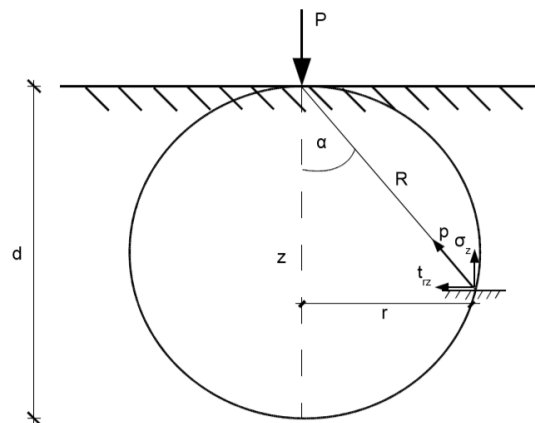
$$\frac{R}{d} = \cos(\alpha) \quad (4.44)$$

$$p = \frac{3P}{2\pi R^2} \sqrt{\cos^6(\alpha) + \cos^4(\alpha) \sin^2(\alpha)} \quad (4.45)$$

$$p = \frac{3P \cos^2(\alpha)}{2\pi R^2} \quad (4.46)$$



Rysunek 4: Zbiór punktów leżących na osi (O,z)



Rysunek 5: Wypadkowa p z naprężeń

4.3 Osiadania według teorii Boussinesqa

Biorąc teoretyczną kulę o średnicy d, która jest styczna do płaszczyzny ograniczającej w punkcie przyłożenia siły, to na całej swojej powierzchni całkowite naprężenia będą jednakowe i sobie równe

$$p = \frac{3P}{2\pi \frac{R^2}{\cos^2 \alpha}} \quad (4.47)$$

Weźmy pod uwagę fakt, że w powyższym równaniu nie występują wielkości charakteryzujące cechy sprężystości, możemy stwierdzić, że rozchodzenie się ciśnień od miejsca przyłożenia na powierzchni półprzestrzeni odbywa się tak samo we wszystkich ciałach izotropowych.

Gdy już dysponujemy rozwiązaniem problemu półprzestrzeni obciążonej siłą skupioną możemy dzięki zastosowaniu zasady superpozycji wyznaczyć przemieszczenia od dowolnego obciążenia rozłożonego na tej półprzestrzeni.

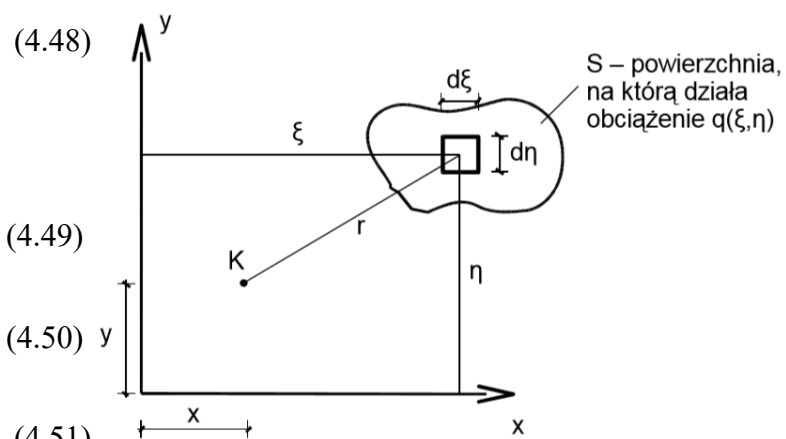
$$w_{(z=0)} = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E r} \quad (4.48)$$

$$dw(x, y)_{z=0} = \frac{q(\xi, \eta) d\xi d\eta (1-\nu^2)}{\pi E r} \quad (4.49)$$

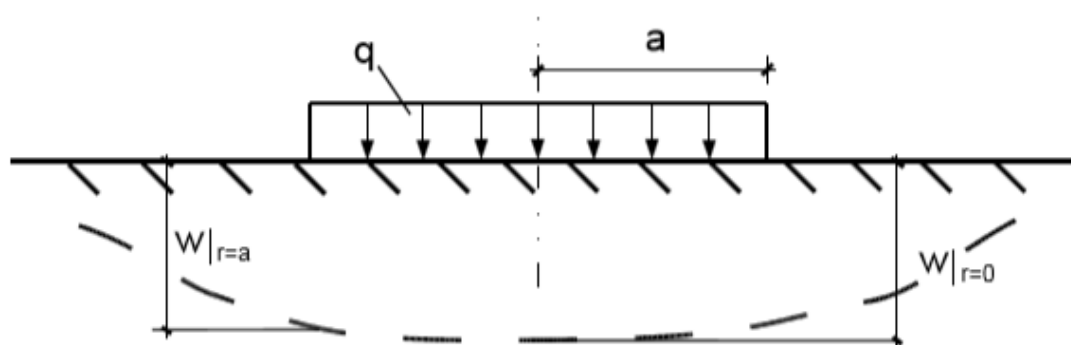
gdzie:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \quad (4.50)$$

$$w_{(x,y)} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint q \frac{(x, y)}{r} d\eta d\xi \quad (4.51)$$



Rysunek 6



Rysunek 7

Mając rozwiązanie osiadania punktu od obciążenia równomiernie rozłożonego, kolejnym krokiem jest wyznaczenie osiadania obszaru od obciążenia rozłożonego

Obciążenie $r(x)$ działające pionowo na obszarze D_k wykonuje pracę E_k na osiadaniach $u(x)$ spowodowanych działaniem obciążenia $r(y)$ na obszarze D_i , przy czym, $u(x)$ wyznacza się na podstawie rozwiązania Boussinesqa dla siły skupionej.

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \int_{D_k} r(x) u(x) dx \quad (4.53)$$

$$u(x) = \int_{D_i} r(y) B(x-y) dy \quad (4.54)$$

$$B(x-y) = \frac{1-v^2}{\pi E_0 \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} \quad (4.55)$$

Przyjmując założenie o stałym odporze podłoża na elemencie

$$r(x) = r_k = \frac{R_k}{|D_k|}$$

$$r(y) = r_i = \frac{R_i}{|D_i|}$$

Możemy przekształcić wzór (4.52) do postaci:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^N \frac{R_k}{|D_k|} \frac{R_i}{|D_i|} \int_{D_k} \int_{D_i} B(x-y) dx dy \quad (4.56)$$

Wykorzystując wzór Castigliano $\frac{\partial E}{\partial R_k} = y_k$ oraz podstawieniu $R_i=1$, $R_j=0$ dla $j \neq i$ otrzymano wzór:

$$w_{ki} = \frac{1}{|D_i|} \frac{1}{|D_k|} \int_{D_k} \int_{D_i} B(x-y) dx dy \quad (4.57)$$

5 Algorytm programu B_M

5.1 Opis działania programu

Podchodząc do zadania, autor programu ustalił kilka fundamentalnych założeń, które będą znacząco rzutować na działanie programu. Dodatkowo w czasie pisania „kodu” pojawiły się kolejne problemy, których rozwiązanie wymagało zastosowania dodatkowych założeń

Założenia dodatkowe, oprócz tych wymienionych w rozdziale 2:

- Obciążenia przy wyznaczaniu macierzy osiadań dla płyty

Konieczne jest przyłożenie jednostkowej w środku elementu. Jednak w MES'ie możemy manipulować jedynie w węzłach, a one znajdują się na krańcach elementu. Dlatego aby uzyskać osiadanie od jednostkowego obciążenia elementu, obciąża się każdy element w jego 4 węzłach $\frac{1}{4}$ siły jednostkowej. Dzięki temu, zastępujemy siłę jednostkową w środku elementu, 4 siłami w węzłach.

Takie rozwiązanie jest metodą wprowadzającą już pewne uproszczenie.

Nasuwa się tutaj pytanie – dlaczego nie można więc przesunąć siatki węzłowej płyty tak, aby węzeł płyty występował nad środkami elementów gruntowych, a następnie obciążać siłami jednostkowymi iteracyjnie wszystkie węzły.

Takie rozwiązanie zostało zastosowane na początku. Działa ono bardzo dobrze, o ile nie znajdujemy się na brzegach płyty, na których elementy podłoża „wystają” poza siatkę płyty.

Z uwagi na fakt, że w każdym elemencie jest stały odpór, w momencie gdy część elementy „wystaje”, odpór nie działa na płytę.

Generuje to błąd, w którym suma odporu jest większa od sumy sił obciążających. Układ jest nie zrównoważony i daje błędne wyniki. Jeżeli weźmiemy pod uwagę, fakt, że na krańcach płyty dochodzi do koncentracji naprężeń, różnica odporu potrafiła sięgać nawet 25%.

- Siatka elementów skończonych płyty, musi się pokrywać z siatką elementów skończonych podłoża.

To założenie jest związane po pierwsze z tym, że zakładamy uśrednioną wartość osiadań gruntu od uśrednionej siły przyłożonej w środku elementu gruntu. Tworzymy współpracujące ze sobą elementy, o takich samych rozmiarach.

- Punkt przyłożenia siły P musi się pokrywać z punktem przyłożenia siły R na danym elemencie.

Jest to wynik założenia nr 1. Uśrednione przemieszczenie na elemencie „i” gruntu, które wypada w środku geometrycznym elementu – jest takie samo dla identycznego elementu „i” płyty, która znajduje się odpowiednio nad nim.

- Macierz osiadań w_{ij}

Zagadnienie jest dosyć proste do obliczenia.

$$w_{ki} = \frac{1}{|D_i|} \frac{1}{|D_k|} \int_{D_k} \int_{D_i} B(x-y) dx dy \quad (4.57)$$

Jest to całka iterowalna. Jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, że dyskretyzujemy element, mamy już podane wartości (x, y, ξ, η) . Wartość r prezentuje się jako liczba stała. Liczymy więc całkę po 4 różnych zmiennych z liczby stałej. Problem pojawia się gdy chcemy, policzyć osiadania elementu sam na sobie, oraz elementów będących w bliskiej odległości obiektu obciążanego.

Osiadania od obciążenia samego na siebie wyznaczyłem na podstawie wzoru z książki Wilhelma Króla ^[1], w której autor podał następujący wzór:

$$F = 2 \frac{c}{b} \left[\ln \left(\frac{b}{c} \right) + \frac{b}{c} \ln \left[\frac{c}{b} + \sqrt{\left(\frac{c}{b} \right)^2 + 1} \right] + \ln \left[1 + \sqrt{\left(\frac{c}{b} \right)^2 + 1} \right] \right] \quad (5.1)$$

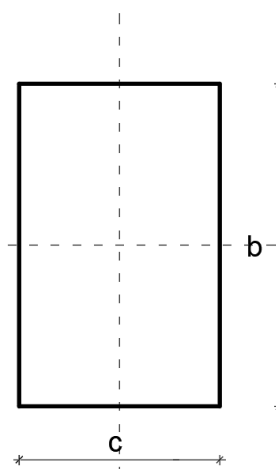
$$w_{ki} = \frac{1 - \nu^2}{\pi E c} F \quad (5.2)$$

Wzór został wyprowadzony z równania Boussinesqa

Dla obiektów blisko sąsiadujących, należy rozbić na dużo mniejsze obiekty i dla nich policzyć osiadania. Spowodowane jest to tym, że osiadania wywołane od elementu znacznie oddalonego są de facto prawie stałe. Natomiast przy bezpośrednim kontakcie – wpływy przy krawędzi sąsiadującej są dużo większe od tych na krawędzi przeciwległej.

Dlatego elementy są dzielone na 25 mniejszych elementów.

Metoda nadal jest obciążona błędem, ale im mniejszy krok zastosujemy, tym większa dokładność. W programie następuje dla podłoża każdego elementu. w pobliżu 8 „pól” od przyłożenia obciążenia liczenie aż 625 całek osiadania i uśrednianie. Dla obiektów oddalonych o więcej niż 8 pól – liczę tylko jedną całkę po pełnym elemencie



Rysunek 8: Element

- Siły wewnętrzne w płycie

Do ustalenia sił wewnętrznych w płycie, konieczne jest rozwiązanie układu równań mieszanych, wyznaczenie osiadań gruntu oraz odporów. Następnie wykorzystując Metodę Elementów Skończonych przykładamy do płyty elementy odpory oraz obciążenia zewnętrzne. Płyta jest zrównoważona, reakcje na brzegach wyjdą równe 0. Interesują nas deformacje związane z samą płytą. Mając funkcje kształtu oraz przemieszczenia węzłowe płyty jesteśmy w stanie obliczyć odpowiednie pochodne, a następnie wyznaczyć wartości momentów w płycie.

Z uwagi na fakt, że zastosowano Element Niedostosowany, na brzegach płyty dochodzi do skokowej zmiany wartości momentu. Rozwiązaniem tego problemu może być uśrednianie wartości z sąsiadujących elementów.

W pracy zastosowano jednak inne podejście. Wyznaczono wartość momentu w środku rozpiętości

- Przykładanie sił skupionych

Teoretycznie, użytkownik ma swobodę w kształtowaniu obciążenia płyty siłami skupionymi.

W rzeczywistości jesteśmy zmuszeni do „oszukiwania” użytkownika. Siła skupiona może być przyłożona tylko w środku elementu obliczeniowego. Dlatego, w zależności od położenia siły, jest ona rozbijana na składowe części i przesuwana tak, aby układ obciążenia był jak najbardziej zbliżony do stanu, który zadał użytkownik.

Jest to jednak uproszczenie, które generuje pewne problemy. W zależności od stosunku grubości płyty do wymiaru elementu skończonego – przesunięcie może mieć prawie „0” wpływ na wynik rozwiązań, albo może drastycznie „fałszować” wyniki. Wszystko zależy od podziału i wprowadzonych danych. Przykładowo:

Dana jest płyta o wymiarach 50m x 50m, grubości 0.4m i podziale 10x10 elementów. Jeśli klient poda nam współrzędne obciążenia ($X=11\text{ m}, Y=11\text{ m}$) to program przesunie nam siłę do punktu ($X=12,5\text{ m}, Y=12,5\text{ m}$) czyli o całe 1,5m. Dodatkowo element w płycie będzie mieć duży stosunek boku do grubości. Samo przesunięcie siły, zmienia nam znacząco warunki brzegowe. Dlatego należy dokonać rozdzielenia siły F na grupę sił, które zostaną przyłożone do sąsiednich elementów, tak aby siły wypadkowe były równe, siłę przyłożonej przez użytkownika.

Jeśli natomiast podamy siatkowanie 50x50, to obiekt przesunie nam siłę do punktu. ($X=11,5\text{ m}, Y=11,5\text{ m}$) Dodatkowo element siatki jest obiektem bardzo sztywnym.

- Pełna, dwustronna współpraca podłoża z fundamentem

Płyta jest na stałe związana gruntem. Jeżeli płyta będzie odrywana, w zastosowanym modelu, grunt będzie „ciągnąć” ją w dół. Jest to oczywiście dalekie od rzeczywistości.

Model można by ulepszyć, stosując albo iteracyjne rozwiązywanie układu, które za każdym razem sprawdzałoby, czy grunt pracuje w „prawidłowy” sposób. Jeżeli nie, w kolejnej pętli przyjmowałoby odpór w miejscu odrywania równy 0. Istnieje jednak ryzyko, że przy takim założeniu, mogłoby się wydarzyć, że płyta w kolejnym kroku byłaby dociskana.

Z drugiej strony, dzięki dwustronnej współpracy, program można wykorzystać do obliczania konsolidacji gruntu, pod wpływem wielokrotnego przykładania i zabierania obciążenia.

Przy wstępnym obciążeniu, grunt charakteryzowałby się pierwotnym modułem odkształcalności.

Następnie po zabraniu obciążenia, płytę można obciążyć siłą zewnętrznymi odporu. Płyta była by odrywana od podłoża. Grunt oczywiście miałby już teraz większy moduł odkształcalności wtórnej.

Płyta już nie byłaby w stanie wrócić do stanu pierwotnego.

5.2 Uwagi do programu

Jak każdy program, posiada on pewne bariery i ograniczenia, które należy wziąć pod uwagę.

- Zaleca się aby zagadnienie nie przekraczało 400 elementów. Program, nie tylko musi za każdym razem rozwiązywać MES’a dla większej ilości węzłów. Ale musi też to zrobić większą ilość razy.

Przy 400 elementach, obliczenie jednej współczynniki y_{ij} – zajmuje poniżej 1 sekundy. Na wszystkie pętle program zabierze więc około 6 minut. Natomiast obliczenie już zagadnienia 25x25 pochłonie około 30minut. Czas obliczeń jest zależny od procesora, a także stanu systemu oraz procesów trwających w tle.

- Zaleca się stosowanie podziału siatki takie, aby elementy dyskretyzacji były obiektami kwadratowymi. Program został napisany, dla dowolnych stosunków boków elementu. Jednak przetestowano go dla obiektów o stosunku 5:1. Powyżej tych wartości, wyniki osiadań powinny być dobre.

- Przy wprowadzaniu danych, należy zwrócić szczególną uwagę na poprawność wprowadzanych danych. Separatorem liczb dziesiętnych jest znak kropki. Dodatkowo należy

každorazowo podać ścieżkę zapisu pliku z wynikami. Dodatkowo program działa jednorazowo, tzn. po ponownym kliknięciu, „Pokaż wykres”, wykres się nie aktualizuje, lecz pod „starym” pojawia się nowy wykres.

- Program ma ograniczenia z wyznaczaniem momentów w płycie. Pod wpływem obciążenia siłą skupioną w płycie dochodzi do dużej zmiany wartości momentu.

Ewidentnie przedstawia to przykład płyty 30 x 30 o grubości 0.5 m wykonanej z betonu klasy C30/37. O ile osiadania i odpory gruntu są wartościami zbieżnymi, o tyle algorytm B_M nie jest w stanie wyznaczyć „piku” momentu. Na chwilę obecną elementy są za duże i nie byłyby w stanie wychwycić piku momentu.

Ten problem nie występuje w przypadku belek. Jeżeli zadamy płytę, której jeden bok będzie znacząco dłuższy od drugiego, wyniki osiadań, odporów i wartości momentów będą sobie równe

6 Testy programu

Przeprowadzono kilka testów programu, aby określić poprawność jego działania.

Wyniki prób porównywano z teorią oraz z programami:

-ZEM_SIN

-GEO5 Moduł Płyta

Program ZEM_SIN działa na podobnej zasadzie. Wykorzystuje on zagadnienie Boussinesq'a do rozwiązywania belek na półprzestrzeni sprężystej.

Program GEO5 Płyta jest profesjonalnym narzędziem inżynierskim do obliczania płyt. Wykorzystuje on jednak w swoich obliczeniach teorię Winklera-Pasternaka.

Wyniki z GEO5 są porównywane dla sprawdzenia rzędu wielkości osiadań. Wiadomym jest jednak fakt, że w teorii Winklera-Pastarnaka, płyta pod obciążeniem równomiernym osiadzie jednakowo na całej powierzchni, podczas gdy w rzeczywistości osiadania pod środkiem płyty będą większe, niż na brzegach.

6.1 Test 1 – belka 30x1x0.4m

Belka:

Długość – 30m

Szerokość – 1m

Wysokość – 0.4m

Moduł Younga- 27000MPa

Grunt:

Moduł Younga – 80MPa

$\nu=0.25$

Obciążenie:

Siła 0.5 MN w punkcie 14.5m

Siła 0.5 MN w punkcie 15.5m

Wyniki wyliczone przez program ZEM_SIN:

***** LAWA SZEREGOWA

Polprzestrzen sprzysta: $\nu = 0.25$ $E_o = 80.0\text{MPa}$

***** LICZBA WYDZIELONYCH SEGMENTOW OBLICZENIOWYCH

(min=2,max=30) = 30 *****

*

$x_i=$	$L_i=$	$B_i=$	$EI_i=$	$P_i=$	$\Delta t_i=$
[m]	[m]	[m]	[MNm ²]	[MN]	[m]
0.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000

1.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
2.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
3.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
4.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
5.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
6.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
7.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
8.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
9.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
10.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
11.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
12.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
13.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
14.50	1.00	1.00	144.00	0.500	0.0000
15.50	1.00	1.00	144.00	0.500	0.0000
16.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
17.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
18.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
19.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
20.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
21.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
22.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
23.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
24.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
25.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
26.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
27.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
28.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000
29.50	1.00	1.00	144.00	0.000	0.0000

~~~~~ WYNIKI OBLICZEN PROGRAMU ZEM\_SIN ~~~~~

Segment i = 1 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
Segment i = 2 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
Segment i = 3 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
Segment i = 4 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
Segment i = 5 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
Segment i = 6 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.001 MN  
Segment i = 7 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.002 MN  
Segment i = 8 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.004 MN  
Segment i = 9 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.007 MN  
Segment i = 10 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.008 MN  
Segment i = 11 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.003 MN  
Segment i = 12 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.019 MN  
Segment i = 13 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.071 MN  
Segment i = 14 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.164 MN  
Segment i = 15 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.270 MN

Segment i = 16 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.270 MN  
 Segment i = 17 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.164 MN  
 Segment i = 18 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.071 MN  
 Segment i = 19 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.019 MN  
 Segment i = 20 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.003 MN  
 Segment i = 21 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.008 MN  
 Segment i = 22 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.007 MN  
 Segment i = 23 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.004 MN  
 Segment i = 24 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.002 MN  
 Segment i = 25 ..... Wypadkowa reakcja podloza = -0.001 MN  
 Segment i = 26 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
 Segment i = 27 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
 Segment i = 28 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
 Segment i = 29 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
 Segment i = 30 ..... Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN  
 Calkowite osiadanie lewego konca lawy UA = 0.0002 m  
 Calkowite osiadanie prawego konca lawy UB = 0.0002 m

~~~~~ OTRZYMANE WIELKOSCI PRZEKROJOWE W LAWIE SZEREGOWEJ ~~~~~

| Przekroj | Wspolrzedna : | Osiadanie | Reakcja | Moment | Sila poprzeczna |
|----------|---------------|-----------|---------|---------|-------------------|
| lp. | xi[m] : | yi[m] | ri[MPa] | Mi[MNm] | Qi[MN] |
| 1 | 0.50 : | 0.00026 | -0.0002 | 0.0000 | -0.0001 / -0.0001 |
| 2 | 1.50 : | 0.00028 | 0.0001 | -0.0002 | -0.0001 / -0.0001 |
| 3 | 2.50 : | 0.00030 | 0.0001 | -0.0003 | 0.0000 / 0.0000 |
| 4 | 3.50 : | 0.00032 | 0.0001 | -0.0002 | 0.0001 / 0.0001 |
| 5 | 4.50 : | 0.00035 | -0.0001 | -0.0001 | 0.0001 / 0.0001 |
| 6 | 5.50 : | 0.00038 | -0.0006 | -0.0001 | -0.0003 / -0.0003 |
| 7 | 6.50 : | 0.00040 | -0.0019 | -0.0009 | -0.0015 / -0.0015 |
| 8 | 7.50 : | 0.00044 | -0.0040 | -0.0036 | -0.0044 / -0.0044 |
| 9 | 8.50 : | 0.00050 | -0.0066 | -0.0103 | -0.0097 / -0.0097 |
| 10 | 9.50 : | 0.00063 | -0.0078 | -0.0235 | -0.0169 / -0.0169 |
| 11 | 10.50 : | 0.00093 | -0.0026 | -0.0436 | -0.0221 / -0.0221 |
| 12 | 11.50 : | 0.00154 | 0.0189 | -0.0644 | -0.0140 / -0.0140 |
| 13 | 12.50 : | 0.00258 | 0.0709 | -0.0624 | 0.0310 / 0.0310 |
| 14 | 13.50 : | 0.00404 | 0.1641 | 0.0157 | 0.1485 / 0.1485 |
| 15 | 14.50 : | 0.00534 | 0.2695 | 0.2594 | 0.3652 / -0.1348 |
| 16 | 15.50 : | 0.00534 | 0.2695 | 0.2594 | 0.1348 / -0.3652 |
| 17 | 16.50 : | 0.00404 | 0.1641 | 0.0157 | -0.1485 / -0.1485 |
| 18 | 17.50 : | 0.00258 | 0.0709 | -0.0624 | -0.0310 / -0.0310 |
| 19 | 18.50 : | 0.00154 | 0.0189 | -0.0644 | 0.0140 / 0.0140 |
| 20 | 19.50 : | 0.00093 | -0.0026 | -0.0436 | 0.0221 / 0.0221 |
| 21 | 20.50 : | 0.00063 | -0.0078 | -0.0235 | 0.0169 / 0.0169 |
| 22 | 21.50 : | 0.00050 | -0.0066 | -0.0103 | 0.0097 / 0.0097 |

| | | | | | | |
|----|-------|---|---------|---------|---------|-------------------|
| 23 | 22.50 | : | 0.00044 | -0.0040 | -0.0036 | 0.0044 / 0.0044 |
| 24 | 23.50 | : | 0.00040 | -0.0019 | -0.0009 | 0.0015 / 0.0015 |
| 25 | 24.50 | : | 0.00038 | -0.0006 | -0.0001 | 0.0003 / 0.0003 |
| 26 | 25.50 | : | 0.00035 | -0.0001 | -0.0001 | -0.0001 / -0.0001 |
| 27 | 26.50 | : | 0.00032 | 0.0001 | -0.0002 | -0.0001 / -0.0001 |
| 28 | 27.50 | : | 0.00030 | 0.0001 | -0.0003 | 0.0000 / 0.0000 |
| 29 | 28.50 | : | 0.00028 | 0.0001 | -0.0002 | 0.0001 / 0.0001 |
| 30 | 29.50 | : | 0.00026 | -0.0002 | 0.0000 | 0.0001 / 0.0001 |

~~~~~KONIEC~~~~~KONIEC~~~~~KONIEC~~~~~KONIEC~~~~~KONIEC~~~~~  
 ~KONIEC~~~~~

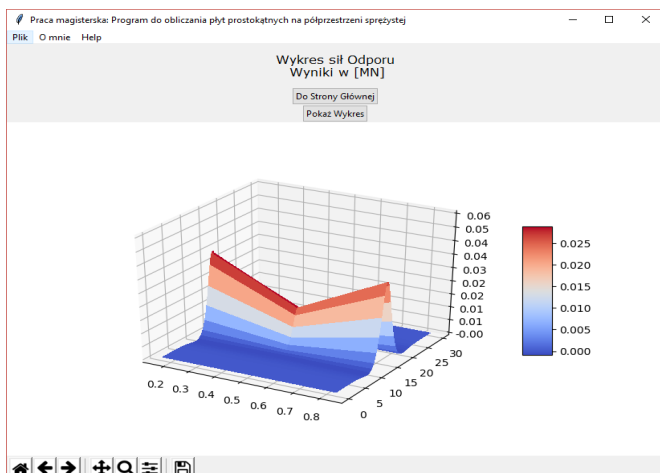
(C) Włodzimierz BRZAKALA  
 Politechnika Wrocławska  
 Instytut Geotechniki i Hydrotechniki  
 pok. 2, D-9.

### 6.1.1 Wyniki programu B\_M dla gęstej siatki

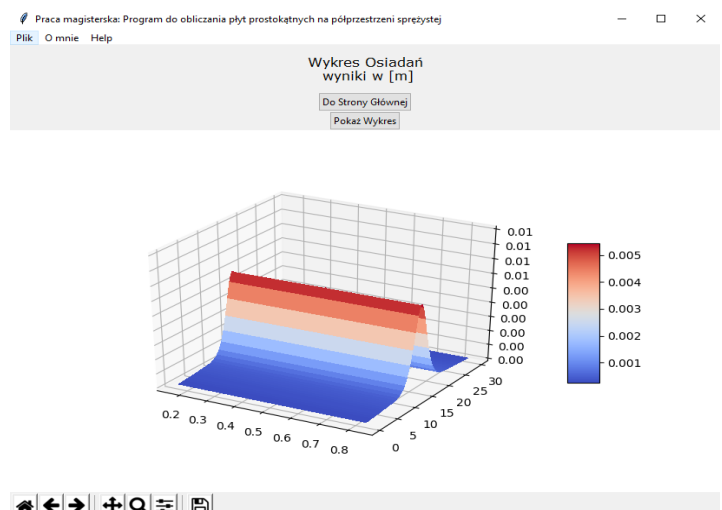
Test wykonano dla siatki 90x3

Rysunek 10: Dane wejściowe

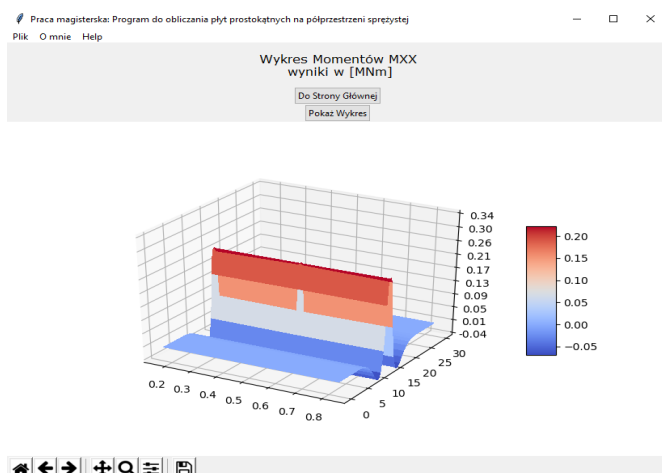
Rysunek 9: Obciążenia wejściowe



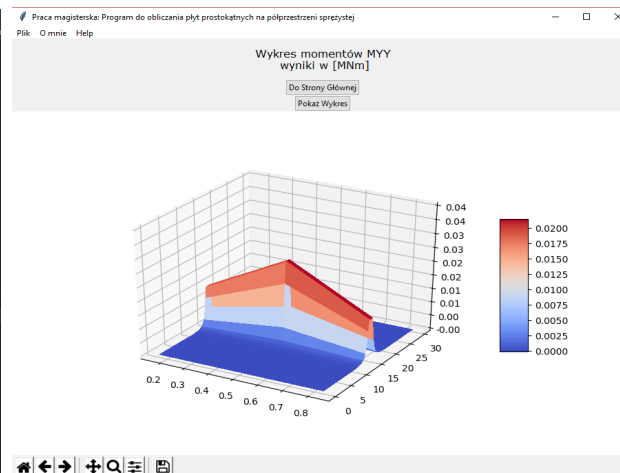
Rysunek 11: Wykres sił odporu



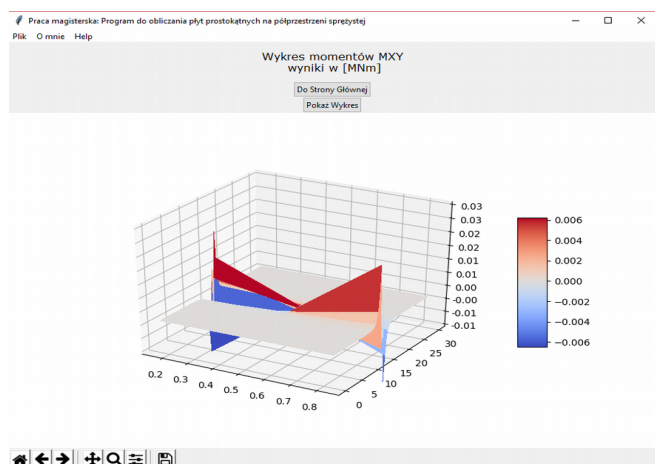
Rysunek 12: Wykres osiadań



Rysunek 14: Wykres momentów  $M_{XX}$



Rysunek 13: Wykres Momentów  $M_{YY}$



Rysunek 15: Wykres momentów  $M_{XY}$

Weryfikację przeprowadzono dla 3 wybranych punktów:

- a)  $x=3,5\text{m}$
- b)  $x=14,5\text{m}$
- c)  $x=17,5\text{m}$

|                  | Osiadania [m] |         | M [MNm]   |         |
|------------------|---------------|---------|-----------|---------|
|                  | Brzą_Mróż     | ZEM_SIN | Brzą_Mróż | ZEM_SIN |
| $x=3,5\text{m}$  | 0.0003        | 0,00032 | -0.0003   | -0,0002 |
| $x=14,5\text{m}$ | 0.0053        | 0.00534 | 0.2171    | 0.2594  |
| $x=17,5\text{m}$ | 0.0026        | 0.00258 | 0.0661    | -0.062  |

Błąd przy wyznaczaniu wartości momentowej. Jest to związane z zastosowaniem dużo dokładniejszej siatki. Osiadania są zgodne, a jak wiemy Moment jest pochodną deformacji belki. Im więcej elementów mamy, tym dokładniej możemy określić funkcję aproksymującą wartości Momentów

## 6.2 Test 2 – Belka 21x1x0,5

Belka:

Długość – 21m

Szerokość – 1m

Wysokość – 0.5m

Moduł Younga- 27000MPa

Grunt:

Moduł Younga – 80MPa

$\nu=0.25$

Obciążenie:

Siła 5MN w pozycji 10.5m

**Wyniki wyliczone przez program ZEM\_SIN:**

\*\*\*\*\* LAWA SZEREGOWA

\*\*\*\*\*

Polprzestrzen sprężysta:  $\nu = 0.25$   $E_0 = 80.0\text{MPa}$

\*\*\*\*\* LICZBA WYDZIELONYCH SEGMENTOW OBLICZENIOWYCH  
(min=2,max=30) = 21 \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*

| xi=   | Li=  | Bi=  | EIi=                | Pi=   | Deltai= |
|-------|------|------|---------------------|-------|---------|
| [m]   | [m]  | [m]  | [MNm <sup>2</sup> ] | [MN]  | [m]     |
| 0.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 1.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 2.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 3.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 4.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 5.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 6.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 7.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 8.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 9.50  | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 10.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 5.000 | 0.0000  |
| 11.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 12.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 13.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 14.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 15.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 16.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 17.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 18.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 19.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |
| 20.50 | 1.00 | 1.00 | 281.25              | 0.000 | 0.0000  |

~~~~~ WYNIKI OBLICZEN PROGRAMU ZEM\_SIN

Segment i = 1 Wypadkowa reakcja podloza = -0.013 MN
 Segment i = 2 Wypadkowa reakcja podloza = -0.017 MN
 Segment i = 3 Wypadkowa reakcja podloza = -0.027 MN
 Segment i = 4 Wypadkowa reakcja podloza = -0.036 MN
 Segment i = 5 Wypadkowa reakcja podloza = -0.033 MN
 Segment i = 6 Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN
 Segment i = 7 Wypadkowa reakcja podloza = 0.091 MN
 Segment i = 8 Wypadkowa reakcja podloza = 0.280 MN
 Segment i = 9 Wypadkowa reakcja podloza = 0.593 MN
 Segment i = 10 Wypadkowa reakcja podloza = 1.008 MN
 Segment i = 11 Wypadkowa reakcja podloza = 1.305 MN
 Segment i = 12 Wypadkowa reakcja podloza = 1.008 MN
 Segment i = 13 Wypadkowa reakcja podloza = 0.593 MN
 Segment i = 14 Wypadkowa reakcja podloza = 0.280 MN
 Segment i = 15 Wypadkowa reakcja podloza = 0.091 MN
 Segment i = 16 Wypadkowa reakcja podloza = 0.000 MN
 Segment i = 17 Wypadkowa reakcja podloza = -0.033 MN
 Segment i = 18 Wypadkowa reakcja podloza = -0.036 MN
 Segment i = 19 Wypadkowa reakcja podloza = -0.027 MN
 Segment i = 20 Wypadkowa reakcja podloza = -0.017 MN
 Segment i = 21 Wypadkowa reakcja podloza = -0.013 MN
 Calkowite osiadanie lewego konca lawy UA = 0.0016 m
 Calkowite osiadanie prawego konca lawy UB = 0.0016 m

~~~~~ OTRZYMANE WIELKOSCI PRZEKROJOWE W LAWIE SZEREGOWEJ

| Przekroj | Wspolrzedna :   | Osiadanie | Reakcja | Moment            | Sila poprzeczna |
|----------|-----------------|-----------|---------|-------------------|-----------------|
| lp.      | xi[m] : yi[m]   | ri[MPa]   | Mi[MNm] | Qi[MN]            |                 |
| 1        | 0.50 : 0.00165  | -0.0125   | -0.0016 | -0.0063 / -0.0063 |                 |
| 2        | 1.50 : 0.00177  | -0.0172   | -0.0147 | -0.0211 / -0.0211 |                 |
| 3        | 2.50 : 0.00194  | -0.0271   | -0.0456 | -0.0432 / -0.0432 |                 |
| 4        | 3.50 : 0.00227  | -0.0355   | -0.1034 | -0.0745 / -0.0745 |                 |
| 5        | 4.50 : 0.00298  | -0.0329   | -0.1953 | -0.1087 / -0.1087 |                 |
| 6        | 5.50 : 0.00438  | -0.0004   | -0.3164 | -0.1253 / -0.1253 |                 |
| 7        | 6.50 : 0.00691  | 0.0915    | -0.4305 | -0.0798 / -0.0798 |                 |
| 8        | 7.50 : 0.01096  | 0.2803    | -0.4409 | 0.1061 / 0.1061   |                 |
| 9        | 8.50 : 0.01654  | 0.5933    | -0.1556 | 0.5429 / 0.5429   |                 |
| 10       | 9.50 : 0.02258  | 1.0082    | 0.7358  | 1.3436 / 1.3436   |                 |
| 11       | 10.50 : 0.02585 | 1.3045    | 2.6206  | 2.5000 / -2.5000  |                 |
| 12       | 11.50 : 0.02258 | 1.0082    | 0.7358  | -1.3436 / -1.3436 |                 |
| 13       | 12.50 : 0.01654 | 0.5933    | -0.1556 | -0.5429 / -0.5429 |                 |
| 14       | 13.50 : 0.01096 | 0.2803    | -0.4409 | -0.1061 / -0.1061 |                 |
| 15       | 14.50 : 0.00691 | 0.0915    | -0.4305 | 0.0798 / 0.0798   |                 |
| 16       | 15.50 : 0.00438 | -0.0004   | -0.3164 | 0.1253 / 0.1253   |                 |
| 17       | 16.50 : 0.00298 | -0.0329   | -0.1953 | 0.1087 / 0.1087   |                 |
| 18       | 17.50 : 0.00227 | -0.0355   | -0.1034 | 0.0745 / 0.0745   |                 |



|    |       |   |         |         |         |                 |
|----|-------|---|---------|---------|---------|-----------------|
| 19 | 18.50 | : | 0.00194 | -0.0271 | -0.0456 | 0.0432 / 0.0432 |
| 20 | 19.50 | : | 0.00177 | -0.0172 | -0.0147 | 0.0211 / 0.0211 |
| 21 | 20.50 | : | 0.00165 | -0.0125 | -0.0016 | 0.0063 / 0.0063 |

~~~~~KONIEC~~~~~KONIEC~~~~~KONIEC~~~~~KONIEC~~~~~KONIEC~~~~~

(C) Włodzimierz BRZAKAŁA
 Politechnika Wrocławska
 Instytut Geotechniki i Hydrotechniki
 pok. 2, D-9.

6.2.1 Wyniki programu B_M dla gęstej siatki

Test wykonano dla siatki 90x3

Praca magisterska: Program do obliczania płyt prostokątnych na półprzestrzeni sprężystej

Plik O mnie Help

Parametry płyty:
 Wymiar a[m]: 21
 Wymiar b[m]: 1
 Grubość h[m]: 0.5
 Poisson ν [-]: 0
 E [MPa]: 27000

Parametry gruntu:
 E [MPa]: 80
 Poisson ν [-]: 0.25
 Wprowadź obciążenie:
 Obciążenia

Siatkowanie elementu:
 Podział boku a: na m odcinków: 63
 Podział boku b: na n odcinków: 3
 (Zaleca się podział m·n ≤ 400)

Wyniki:
 Siły kontaktowe: MXX, MYY

Podaj ścieżkę zapisu pliku z wynikami np. d:\FolderX\Wyniki1.txt

Rysunek 17: Dane wejściowe

Praca magisterska: Program do obliczania płyt prostokątnych na półprzestrzeni sprężystej

Plik O mnie Help

Do strony głównej

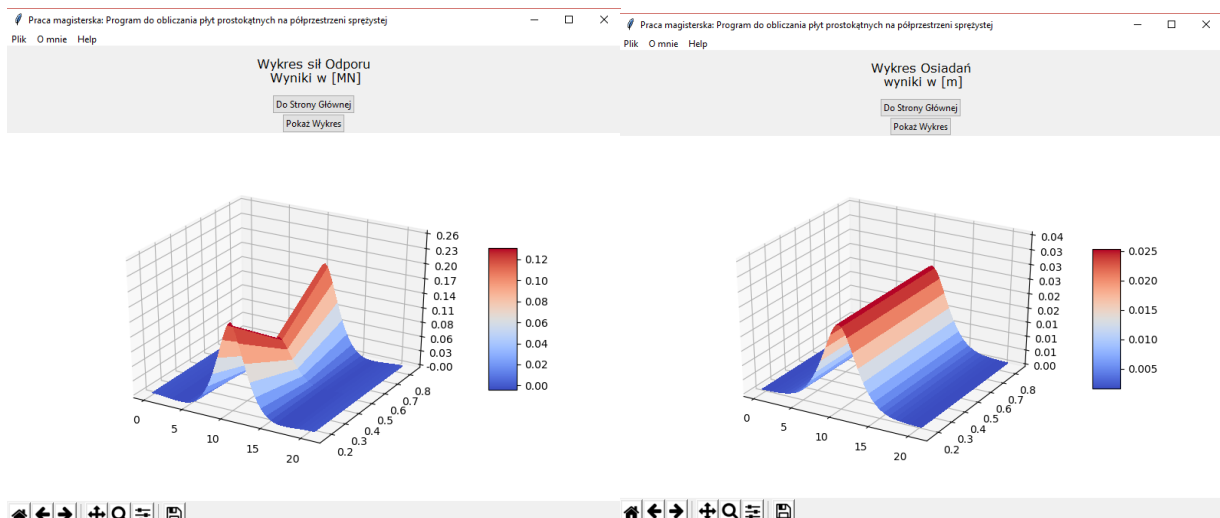
Obciążenia 'skupione'
 x[m]: 10.5
 y[m]: 0.5
 F[MN]: 5
 (Obciążenia zgodne z grawitacją => +)
 Dodaj Obciążenie

Deformacje górnicze
 R[m]:
 Translacja układu:
 DX:
 DY:
 kat obrotu [rad]
 Dodaj Front Górniczy

Tabela przyłożonych obciążeń x:,y:,F: 10.5m , 0.5m , 5MN

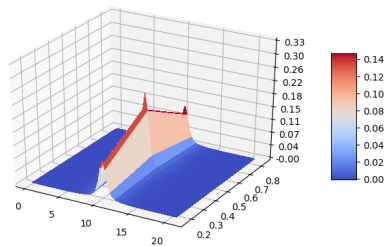
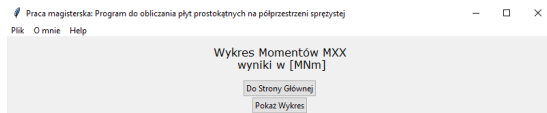
Tabela przyłożonych deformacji górniczych

Rysunek 18: Obciążenia wejściowe

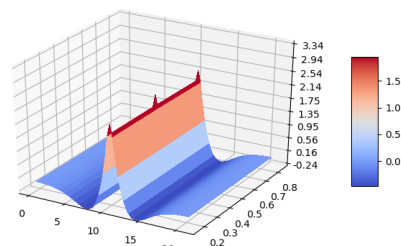
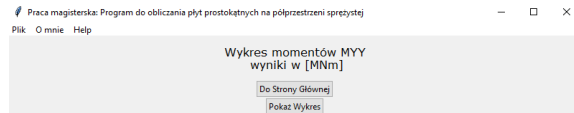


Rysunek 16: Wykres odporu

Rysunek 19: Wykres osiadań



Rysunek 21: Wykres momentów MXX



Rysunek 20: Wykres momentów MYY

Weryfikację przeprowadzono dla 3 wybranych punktów:

- a) $x=4,5\text{m}$
- b) $x=10,5\text{m}$
- c) $x=17,5\text{m}$

| | Osiedzenia [m] | | M [MNm] | |
|------------------|----------------|---------|-----------|---------|
| | Brzą_Mróż | ZEM_SIN | Brzą_Mróż | ZEM_SIN |
| $x=4,5\text{m}$ | 0,0029 | 0.00298 | -0.1933 | -0.1953 |
| $x=10,5\text{m}$ | 0.0257 | 0.02585 | 2.2235 | 2.6206 |
| $x=17,5\text{m}$ | 0.0022 | 0.00227 | -0.1003 | -0.1034 |

Błąd przy wyznaczaniu wartości momentowej. Jest to związane z zastosowaniem dużo dokładniejszej siatki. Osiedzenia są zgodne, a jak wiemy Moment jest pochodną deformacji belki. Im więcej elementów mamy, tym dokładniej możemy określić funkcję aproksymującą wartości Momentów

6.3 Test 3 - Deformacje górnicze płyty

Celem tego testu jest sprawdzenie, czy program, przy wyliczaniu deformacji górniczych, zachowuje się zgodnie z przewidywaniami autora.

Płyta:

a=50m
b=50m
h=0,5m
E=30 000 000GPa
v=0.13

Grunt:

E=60MPa
v=0.4

Deformacja:

R=1200m
X=-25m
Y=-25m
kąt obrotu = 45°

Praca magisterska: Program do obliczania płyt prostokątnych na półprzestrzeni sprężystej

Plik O mnie Help

| Parametry płyty: | | Parametry gruntu: | |
|--|-------------|-------------------------------|-----------|
| Wymiar a[m] | 50 | E [MPa] | 60 |
| Wymiar b[m] | 50 | Poisson v [-] | 0.4 |
| Grubość h[m] | 0.5 | Wprowadź obciążenie: | |
| Poisson v[-] | 0 | Obciążenia | |
| E [MPa] | 30000000000 | Siatkowanie elementu: | |
| | | Podział boku a: na m odcinków | 15 |
| | | Podział boku b: na n odcinków | 15 |
| | | (Zaleca się podział m*n<=400) | |
| Podaj ścieżkę zapisu pliku z wynikami np. d:\FolderX\Wyniki1.txt | | Wyniki: | |
| | | Sily kontaktowe | Osiadania |
| | | MOX | MOY |
| | | MYX | MYY |

Rysunek 22: Dane wejściowe

Deformacje górnicze

R[m]: 1200

Translacja układu:

DX: -25

DY: -25

kąt obrotu [rad]: 0.7853

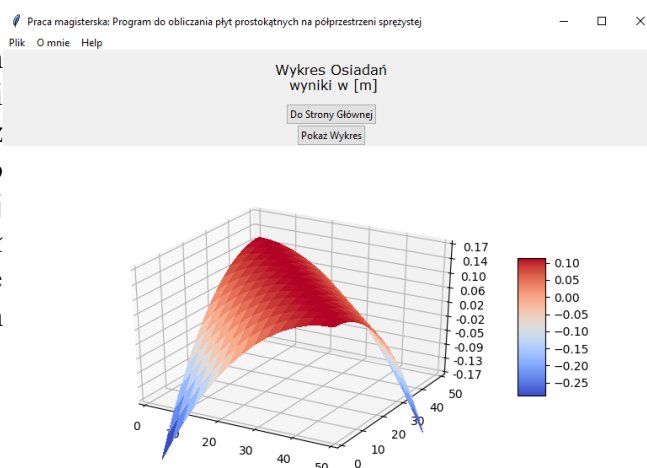
Dodaj Front Górniczy

Tabela przyłożonych deformacji górniczych

X:,Y:,R:,kąt obrotu: -25m , -25m , 1200m , 0.7853rad

Rysunek 23: Obciążenia wstępne

Wniosek: Pod wpływem osiadań górniczych, ziemia pod krawędziami płyty „ucieka” w dół. Zgodnie z założeniem płyta przylega całkowicie do gruntu. Dlatego aby zachować swój właściwy kształt, płyta wciska w dół grunt, który nie osiadł i wyciąga w górę grunt, który osiadł na brzegach. Program zachowuje się tak jak przewidział autor



Rysunek 24: Wykres osiadań

6.4 Test 4 - Płyta nieskończenie sztywna obciążona siłą skupioną

Test ma sprawdzić, czy pod wpływem osiadań nieskończenie sztywnej płyty, wystąpią charakterystyczne koncentracje naprężeń na brzegach płyty.

Płyta:

$a=50\text{m}$

$b=50\text{m}$

$h=4\text{m}$

$E=30\,000\text{GPa}$

$\nu=0.13$

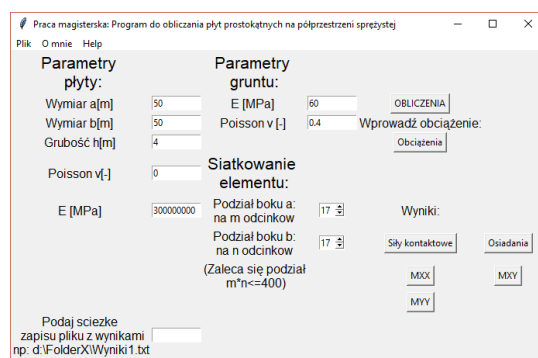
Grunt:

$E=60\text{MPa}$

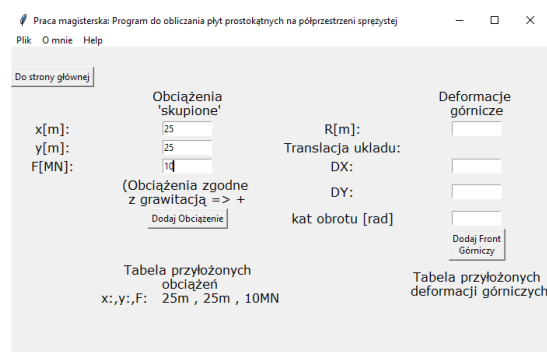
$\nu=0.4$

Obciążenie:

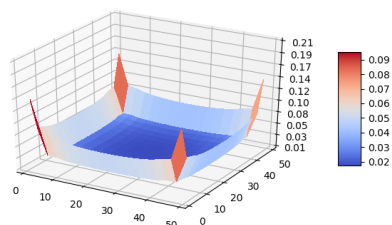
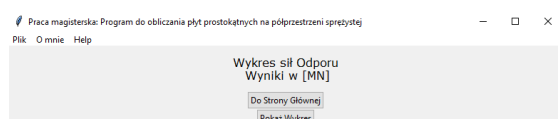
- 10 MN w środku rozpiętości płyty



Rysunek 25: Dane wejściowe



Rysunek 26: Obciążenia wejściowe



Rysunek 27: Wykres sił odporu

Wniosek:

Następuje koncentracja naprężeń na brzegach i w rogach płyty, przy wymuszeniu jednakowych osiadań.

6.5 Test 5 – płyta odkształcalna obciążona 3 siłami skupionymi

Płyta:

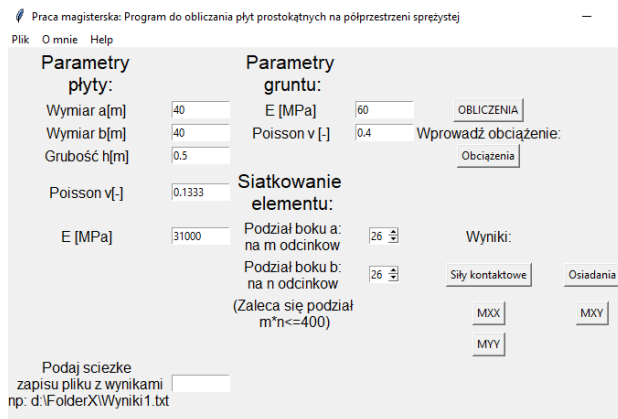
$a=40\text{m}$
 $b=40\text{m}$
 $h=0.5\text{m}$
 $E=31\text{ GPa}$
 $\nu=0.13$

Grunt:

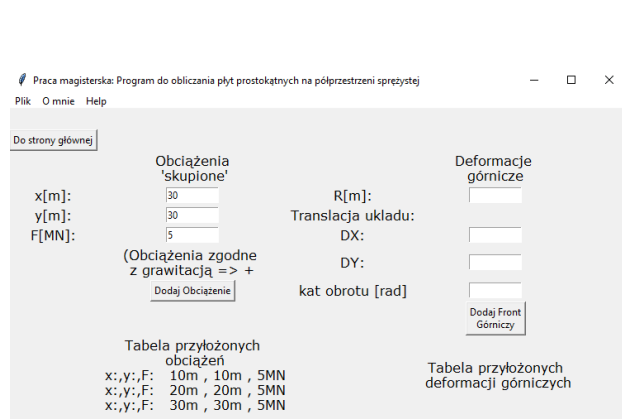
$E=60\text{MPa}$
 $\nu=0.4$

Obciążenie:

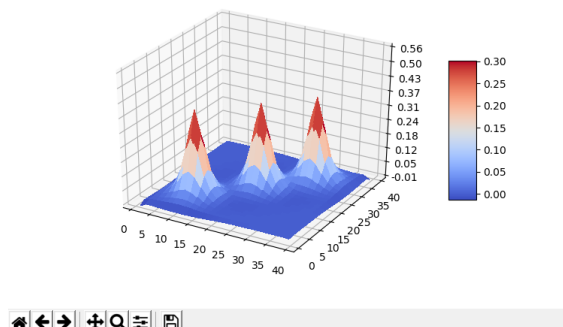
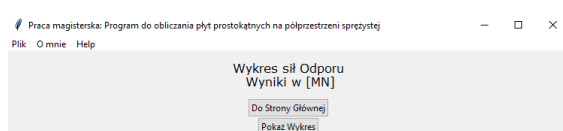
- 5 MN w punkcie (10,10)
- 5 MN w punkcie (20,20)
- 5 MN w punkcie (30,30)



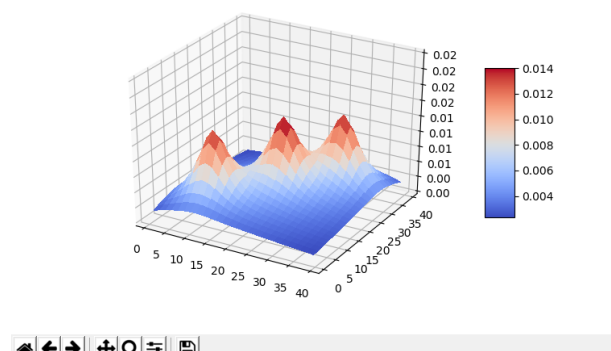
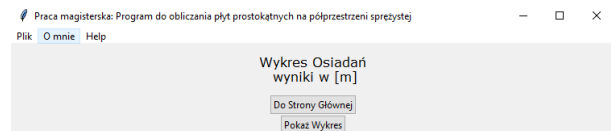
Rysunek 29: Dane wejściowe



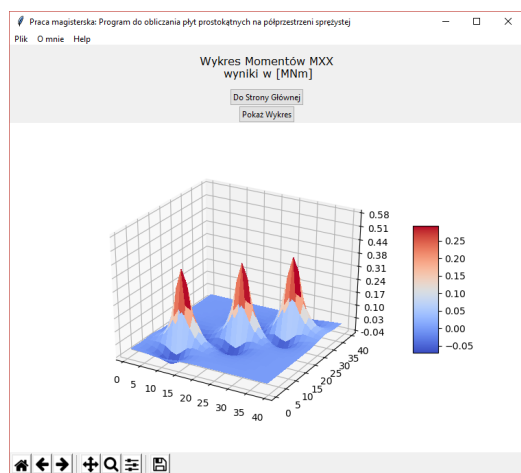
Rysunek 31: Obciążenia wejściowe



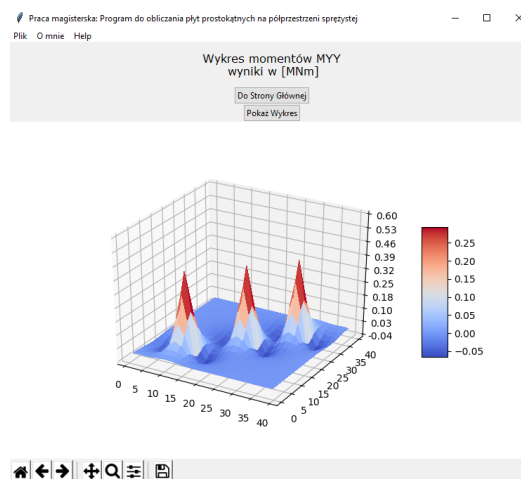
Rysunek 30: Wykres sił odporu



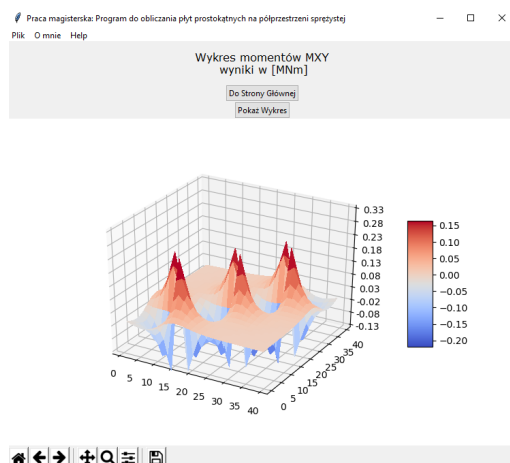
Rysunek 28: Wykres osiadań



Rysunek 32: Wykres Momentów MXX

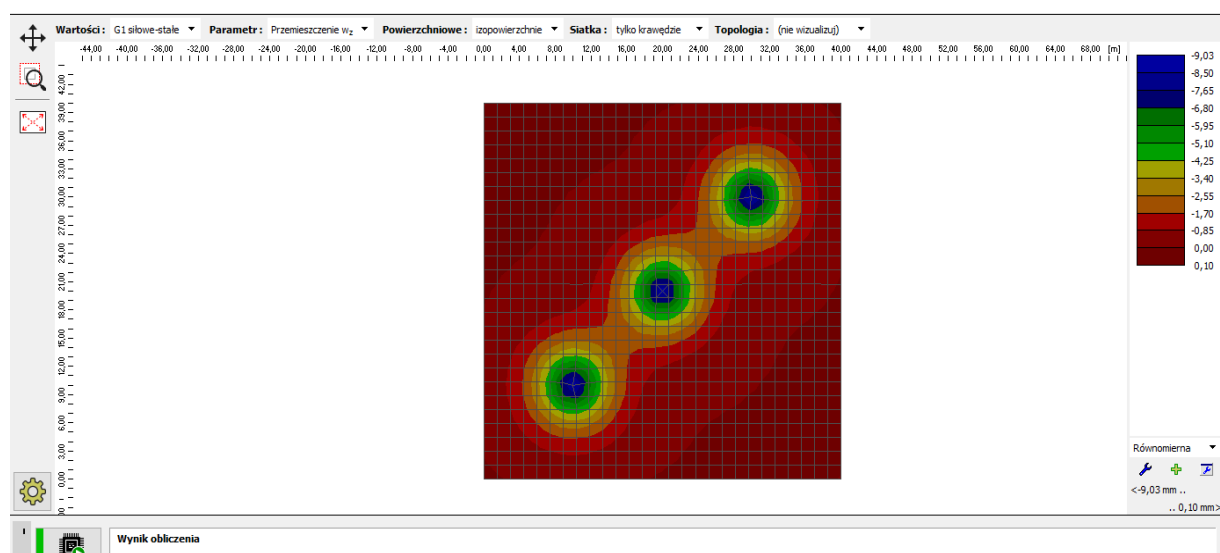


Rysunek 33: Wykres momentów MYY

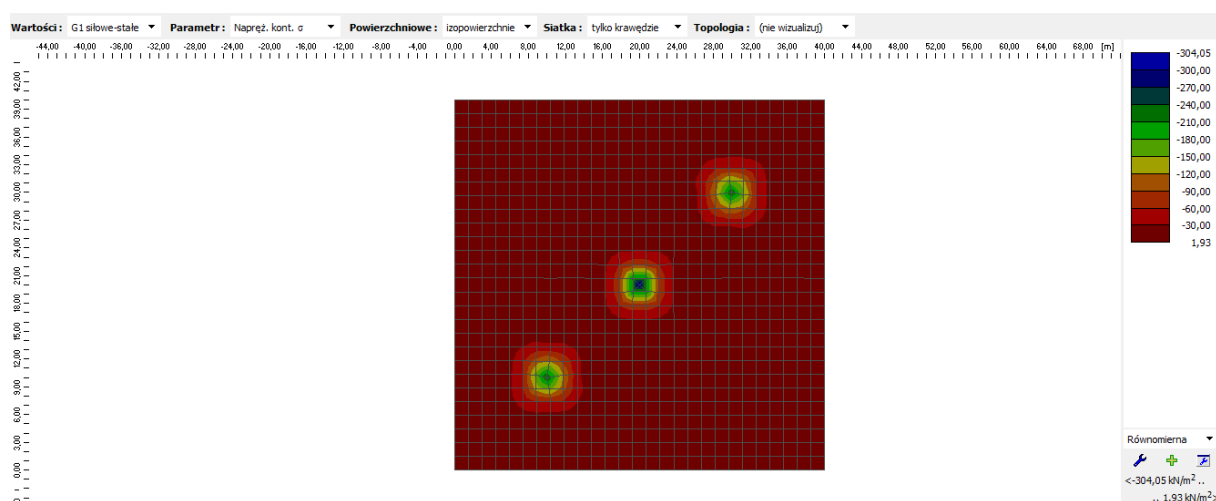


Rysunek 34: Wykres momentów MXY

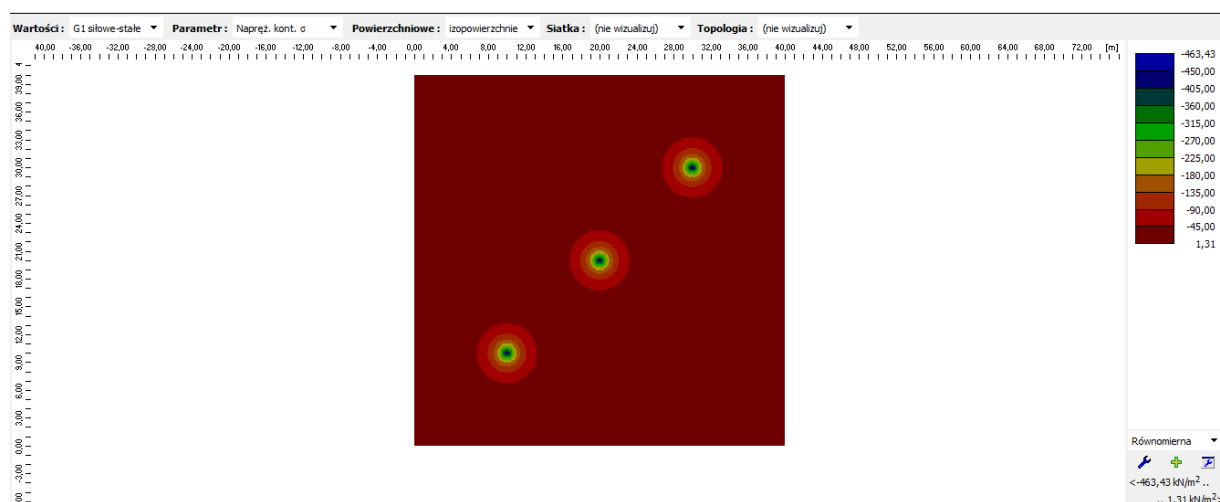
Wyniki porównano z programem GEO 5 Płyta:



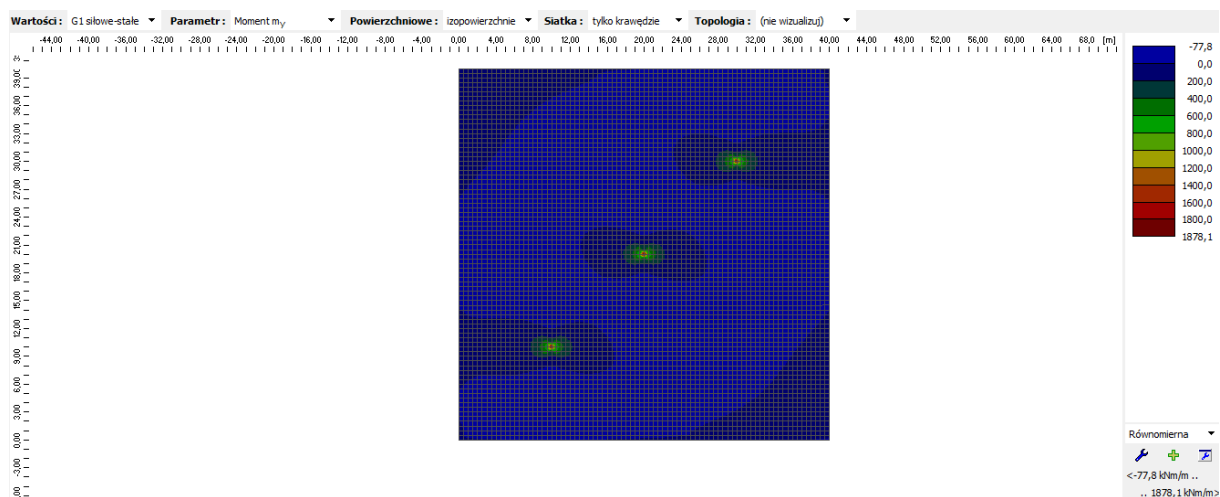
Rysunek 35: Wykres osiadań



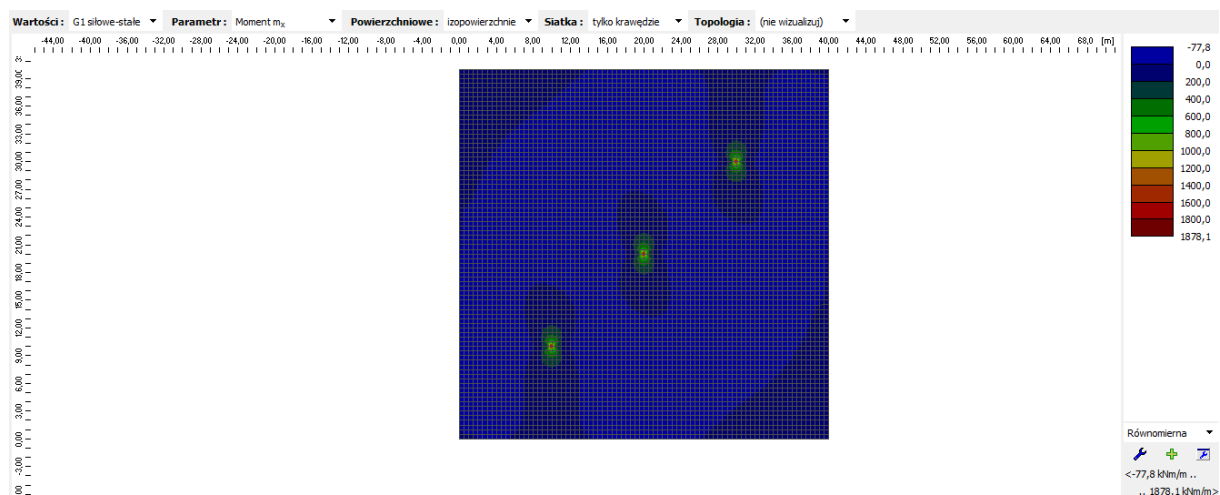
Rysunek 36: Naprężenia kontaktowe dla siatki rzadkiej



Rysunek 37: Naprężenia kontaktowe dla siatki gęstej



Rysunek 38: Mapa momentów dla MYY dla siatki gęstej



Rysunek 39: Mapa momentów MXX dla siatki gęstej

Wnioski:

Wartości momentów się nie zgadzają. Pod płytą mamy do czynienia ze drastycznie zmieniającą się wartością momentów. Im użyjemy bardziej zagęszczonej siatki, tym mocniej jest to widoczne.

Ta sama zależność tyczy się odporu gruntu. Pod miejscem przyłożenia siły, wartość odporu bardzo szybko rośnie i zależy w głównej mierze od wielkości elementu skończonego. W programie B_M – wartość odporu jest wielkością uśrednioną z całego elementu. Należy brać jak największe siatkowanie, aby uzyskać odpowiednią zbieżność.

7 Instrukcja obsługi dla użytkownika

Poniższa instrukcja obsługi programu jest tylko zbiorem uwag. Pełen algorytm postępowania i działania został opisany w poprzednich rozdziałach.

7.1 Strona główna

Strona główna jest oknem, gdzie podajemy wymiary płyty. W przypadku wątpliwości należy kliknąć Help → Wymiary

Praca magisterska: Program do obliczania płyt prostokątnych na półprzestrzeni sprężystej

Plik O mnie Help

Parametry płyty:

Wymiar a[m] 21
Wymiar b[m] 1
Grubość h[m] 0.4
Poisson v[-] 0.2
E [MPa] 31000

Parametry gruntu:

E [MPa] 80
Poisson v [-] 0.4
Wprowadź obciążenie:
Obciążenia

Siatkowanie elementu:

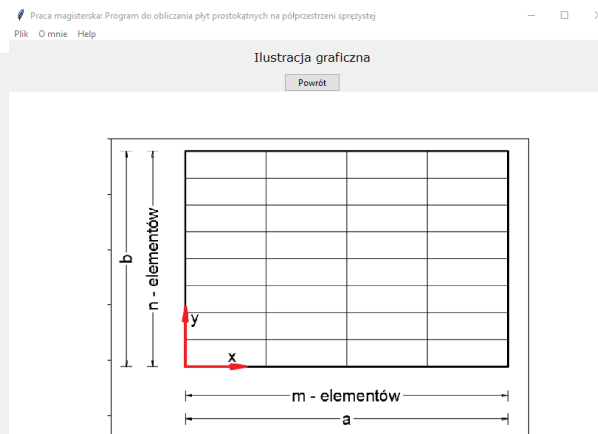
Podział boku a: na m odcinków 63
Podział boku b: na n odcinków 3
(Zaleca się podział $m \cdot n \leq 400$)

Wyniki:

Siły kontaktowe Osiedzenia
MXX MXY
MYY

Podaj ścieżkę zapisu pliku z wynikami
np: d:\FolderX\Wyniki 1.txt

Rysunek 40: Strona główna



Rysunek 41: Rysunek schematyczny

Należy zwrócić szczególną uwagę na poprawność wprowadzanych danych:

- Separatorem liczb dziesiętnych jest znak kropki.
- Współczynnik Poissona przybiera wartości w zakresie $<0,1$
- Moduł Younga przyjmuje wartości większe od 0
- Ścieżkę zapisu należy podać według wzoru: d:\FolderX\FolderY\NazwaPliku.txt.

Należy pamiętać, że w przypadku istnienia już wcześniej pliku o takiej samej ścieżce dostępu, plik zostanie nadpisany

7.2 Strona Obciążenia

Zakładka ta umożliwi nam wprowadzenie obciążeń zewnętrznych.

W przypadku wątpliwości, należy kliknąć Help→Obciążenia

Praca magisterska: Program do obliczania płyt prostokątnych na półprzestrzeni sprężystej

Plik O mnie Help

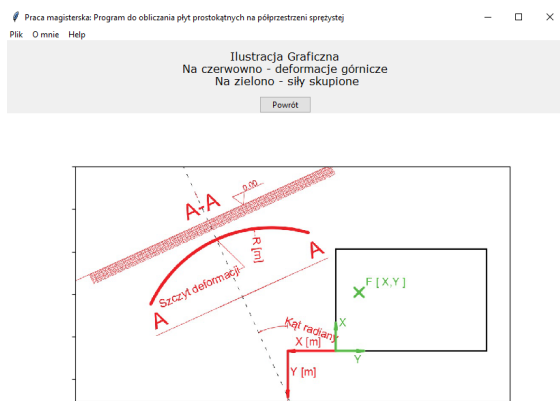
Do strony głównej

| | | |
|---|--------------------|---|
| Obciążenia 'skupione' | R[m]: | Deformacje górnice |
| x[m]: 10 | Translacja układu: | 1200 |
| y[m]: 15.5 | DX: | 30 |
| F[MN]: 34.5 | DY: | 30 |
| (Obciążenia zgodne z grawitacją => +) | kat obrotu [rad] | 4 |
| <input type="button" value="Dodaj Obciążenie"/> | | <input type="button" value="Dodaj Front Górniczy"/> |

Tabela przyłożonych obciążeń
x:,y:,F: 10m , 15.5m , 34.5MN

Tabela przyłożonych deformacji górniczych
X:,Y:,R:,kat obrotu: 30m , 30m , 1200m , 0rad

Rysunek 42: Strona - obciążenia



Rysunek 43: Rysunek poglądowy

Należy zwrócić szczególną uwagę na poprawność wprowadzanych danych:

- Separatorem liczb dziesiętnych jest znak kropki.
- Można wprowadzić dowolną lokalizację siły. Jednak w momencie, gdy będzie ona poza obszarem płyty, nie zostanie obciążona.
- Zastosowano 2 układy lokalne:

a) Dla sił skupionych obowiązuje układ zielony. Oś X ma kierunek i zwrot zgodny z boki „a”, natomiast oś Y ma kierunek i zwrot zgodny z boki „b”

b) Dla deformacji górniczych obowiązuje układ czerwony. DX oraz DY to składowe wektora, który odsuwa nam wierzchołek „deformacji” górniczej.

- Wartość R może przyjmować wartości z zakresu liczb rzeczywistych z wyłączeniem 0.
- Kąt obrotu podjemy zawsze w radianach.
- W przypadku pomyłki przy wprowadzaniu danych , należy wyłączyć i włączyć jeszcze raz program.

7.3 Strona Wyniki

Aby wyświetlić wykres, należy kliknąć w przycisk Pokaż wykres.

Jeśli chcemy policzyć inną płytę i zobaczyć dla niej wykresy, należy zrestartować aplikację i na nowo wprowadzić dane. W przypadku kilkukrotnego wciśnięcia przycisku „ Pokaż wykres”, pojawi się po prostu kilka wykresów, jeden pod drugim

8 Podsumowanie

8.1 Dalsze możliwości rozwoju

Program jest tylko szkieletem, który na chwilę obecną, ma dosyć wąskie zastosowanie.

Największy problem, jakim jest jądro obliczeniowe, został zlikwidowany. W perspektywie można rozbudować program o:

- Obciążenia liniowe i równomiernie rozłożone.
- Obciążenie ścianami (modyfikacja sztywności elementów, przez które przechodzi ściana).
- Konsolidacja gruntu pod wpływem wielokrotnego obciążania i opróżniania. Iterując kolejne raz tą samą płytę, zmieniał by się jedynie moduł odkształcalności gruntu.
- Wymiarowanie zbrojenia.

Pod względem programistycznym:

- Przepisać interface dla użytkownika na nowo.
- Macierz sztywności przechowywać w postaci macierzy rzadkiej, albo półpasma.
- Obliczenia macierzowe przerzucić na GPU i większą ilość rdzeni, przy użyciu biblioteki TensorFlow. Wymuszałoby to jednak zastosowanie kart graficznych Nvidia, które pracują na tej bibliotece.

Bibliografia

- [1] Król W.: „Statyka fundamentów żelbetowych z uwzględnieniem sztywności nadbudowy”, Arkady, Warszawa 1964
- [2] Dzierżanowski G; Sitek M.: „Samouczek Metody Elementów Skończonych dla Studentów Budownictwa Część I Statyka konstrukcji prętowych” Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2012
- [3] Łodygowski T. Kąkol W.: „Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich” AlmaMater <http://www.ikb.poznan.pl/almamater/>
- [4] Aściukiewicz P.; Baron P.; Gawron U.; Krzysztof A.; Ratajczak D.; Wojciechowski M.: „Teoria Sprężystości” Alma Mater <http://www.ikb.poznan.pl/almamater/>
- [5] Burczyński T. Bąk R.: „Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego” WNT Warszawa 2001
- [6] Brząkała W. „ O współczynnikach wpływu osiadań w metodzie Żemoczki-Sinicy” Materiały X Krajowej Konferencji Mechaniki Gruntów i Fundamentowania Warszawa, 21-22 października 1993, tom I., str 77-82.
- [7] Śródka Wiesław.: „Trzy lekcje metody elementów skończonych. Materiały pomocnicze do przedmiotu wytrzymałość materiałów”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej Wrocław 2004