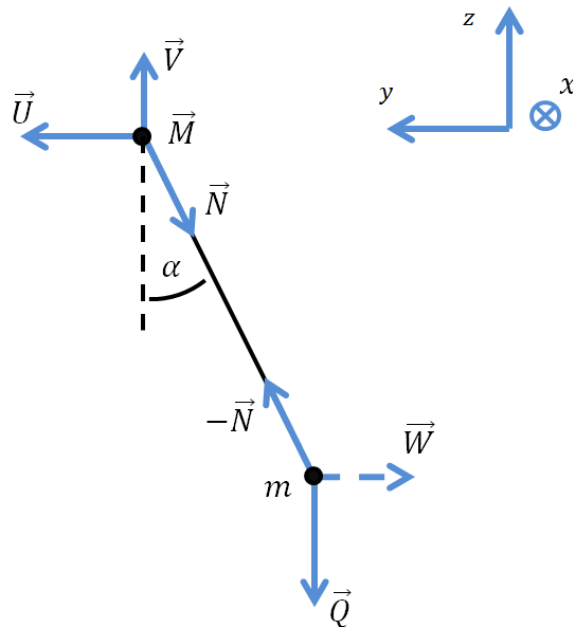


Model matematyczny suwnicy

Sformułowanie równań



Model opisać można za pomocą czterech równań. Pierwsze nich wynika z przedstawienia zależności między przyspieszeniem \vec{a}_M ciężnika / pomostu na suwnicy symbolizowanego przez masę \vec{M} (powód użycia wektora został przedstawiony dalej), a odpowiednimi siłami, które na niego działają:

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{N} + \vec{B} = \vec{M} \bullet \vec{a}_M \quad (1)$$

gdzie:

$\vec{U} = [u_x \ u_y \ 0]^T$ - sygnał sterujący (siła)

$\vec{V} = [0 \ 0 \ v_z]^T$ - pionowa składowa siły reakcji prowadnicy

$\vec{N} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ - siła naciągu liny

$\vec{B} = [b_x(\dot{x}_M) \ b_y(\dot{y}_M) \ 0]^T$ - wypadkowa siła tarc i innych oporów mechanicznych

$[x_M \ y_M \ z_M]^T$ - położenie ciężnika

$\vec{a}_M = [\ddot{x}_M \ \ddot{y}_M \ 0]^T$ - przyspieszenie ciężnika

$\vec{M} = [m_C + m_F \ m_C \ 0]$ - masa ciężnika i pomostu; zastosowany został wektor w miejsce skalarnej wielkości, aby rozróżnić sytuację, gdy poruszany jest tylko ciężnik (ruch wzdłuż współrzędnej y), a gdy poruszany jest ciężnik wraz z pomostem (wzdłuż współrzędnej x); zakładamy brak ruchu wzdłuż współrzędnej z , więc ta składowa wektora jest równa 0

m_C - masa ciężnika

m_F - masa pomostu

Drugie równanie wynika z zależności między przyspieszeniem \vec{a}_m zawiesia (symbolizowanego przez masę m), a odpowiednimi siłami, które na to obciążenie oddziałują. Wspomniane przyspieszenie jest wyznaczone względem ciągnika, więc analizowany układ odniesienia jest układem inercyjnym, który poddany jest przyspieszeniu \vec{a}_M :

$$\vec{Q} + \vec{W} - \vec{N} = m\vec{a}_m \quad (2)$$

gdzie:

$\vec{Q} = [0 \ 0 \ -mg]^T$ - siła grawitacji działająca na obciążenie

$\vec{W} = -m\vec{a}_M$ - siła bezwładności wynikająca z inercjalności układu odniesienia

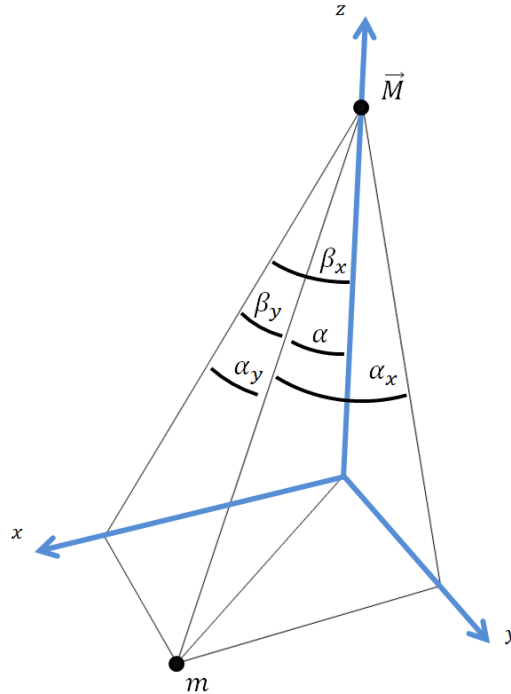
m - masa obciążenia

$\vec{a}_m = [\ddot{x}_m \ \ddot{y}_m \ \ddot{z}_m]^T$ - przyspieszenie obciążenia w inercyjnym układzie odniesienia

Z braku ruchu wzdłuż prostej prowadzącej przez położenia wózka i obciążenia w analizowanym inercyjnym układzie odniesienia, a także biorąc pod uwagę fakt, że siła \vec{N} musi być równoległa do tej prostej, wynika trzecie równanie:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix} (|\vec{Q}|\cos(\alpha) + |\vec{W}|\sin(\alpha)) \quad (3)$$

Rozmieszczenie kątów $\beta_x, \beta_y, \alpha_x, \alpha_y$ i α zostało przedstawione na rysunku poniżej:



Kąty α_x i α_y są stosowane jako zmienne stanu z uwagi na uproszczenie i symetrię modelu. W fizycznym modelu możliwy jest natomiast pomiar kątów oznaczonych jako β_x i β_y . Oznacza to, że konieczne będzie wyznaczenie zależności umożliwiających zamianę kątów:

$$\begin{cases} \sin(\alpha_x) = \cos(\alpha_y)\sin(\beta_x) \\ \alpha_y = \beta_y \end{cases} \quad (4)$$

Wyprowadzona również została zależność pozwalająca wyznaczyć kąt α :

$$\sin^2(\alpha_x) + \sin^2(\alpha_y) = \sin^2(\alpha) \quad (5)$$

Po podstawieniu równania (3) oraz wszystkich pozostałych wartości do równań (1) i (2) uzyskany zostaje następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|m\vec{g}| \cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \right| \sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) \\ b_y(\dot{y}_M) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_C + m_F)\ddot{x}_M \\ m_C\ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|m\vec{g}| \cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \right| \sin(\alpha) \right) = m\vec{a}_m \quad (7)$$

Z równań usunąć można równania dla składowej z , gdyż nie są one potrzebne dla dalszej analizy. Po dodatkowych uproszczeniach:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left(g \cdot \cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} \right| \sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) \\ b_y(\dot{y}_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_C + m_F)\ddot{x}_M \\ m_C\ddot{y}_M \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$-\begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left(g \cdot \cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} \right| \sin(\alpha) \right) = \vec{a}_m \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę, że w rzeczywistym modelu nie ma możliwości pomiaru liniowych przesunięć, prędkości ani przyspieszeń obciążenia, konieczne jest wyrażenie przyspieszenia \vec{a}_m przy pomocy kątów α_x i α_y oraz długości liny l . Położenie względne obciążenia wyrazić można wzorem:

$$\vec{x}_m = l \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Przyspieszenie będzie zatem wyrażone wzorem:

$$\vec{a}_m = l \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_x \cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha}_x)^2 \sin(\alpha_x) \\ \ddot{\alpha}_y \cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha}_y)^2 \sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Po podstawieniu zależności (11) do równania (9) i przyrównaniu poszczególnych składowych równań (8) i (9) otrzymany zostaje następujący układ równań:

$$u_x + mg \cdot \sin(\alpha_x) \cos(\alpha) + m \cdot \sin(\alpha_x) \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} + b_x(\dot{x}_M) = (m_C + m_F)\ddot{x}_M \quad (12)$$

$$u_y + mg \cdot \sin(\alpha_y) \cos(\alpha) + m \cdot \sin(\alpha_y) \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} + b_y(\dot{y}_M) = m_C\ddot{y}_M \quad (13)$$

$$-\ddot{x}_M - \sin(\alpha_x) \left(g \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} \right) = l(\ddot{\alpha}_x \cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha}_x)^2 \sin(\alpha_x)) \quad (14)$$

$$-\ddot{y}_M - \sin(\alpha_y) \left(g \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} \right) = l(\ddot{\alpha}_y \cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha}_y)^2 \sin(\alpha_y)) \quad (15)$$

Zastosowanie obliczeń numerycznych do wyznaczenia rozwiązań

Aby możliwe było zastosowanie obliczeń numerycznych do powyższego modelu, konieczne jest przekształcenie powyższych równań, do takich postaci, aby drugie pochodne zmiennych stanu ($\ddot{x}_M, \ddot{y}_M, \ddot{\alpha}_x, \ddot{\alpha}_y$) były wyrażone w zależności od pozostałych zmiennych. W przypadku przyspieszeń kątowych, przekształcenie to jest proste, gdyż sprowadza się do drobnych przekształceń równań 13 i 14:

$$\ddot{\alpha}_x = \frac{1}{l \cdot \cos(\alpha_x)} \left(l(\dot{\alpha}_x)^2 \sin(\alpha_x) - \ddot{x}_M - \sin(\alpha_x) \left(g \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} \right) \right) \quad (16)$$

$$\ddot{\alpha}_y = \frac{1}{l \cdot \cos(\alpha_y)} \left(l(\dot{\alpha}_y)^2 \sin(\alpha_y) - \ddot{y}_M - \sin(\alpha_y) \left(g \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} \right) \right) \quad (17)$$

W przypadku przyspieszeń liniowych sprawa jest jednak bardziej skomplikowana, gdyż konieczne jest rozwiązanie układu równań o postaci (ze względu na niewiadome X i Y):

$$\begin{cases} A_1 + B_1 \sqrt{X^2 + Y^2} = C_1 X \\ A_2 + B_2 \sqrt{X^2 + Y^2} = C_2 Y \end{cases}, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0 \quad (18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} X &= \ddot{x}_M \\ Y &= \ddot{y}_M \\ A_1 &= u_x + mg \cdot \sin(\alpha_x) \cos(\alpha) + b_x(\dot{x}_M) \\ A_2 &= u_y + mg \cdot \sin(\alpha_y) \cos(\alpha) + b_y(\dot{y}_M) \\ B_1 &= m \cdot \sin(\alpha_x) \sin(\alpha) \\ B_2 &= m \cdot \sin(\alpha_y) \sin(\alpha) \\ C_1 &= m_C + m_F \\ C_2 &= m_C \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań (18)

Rozwiązanie postaci $(X, Y) = (0, 0)$ możliwe jest tylko w sytuacji, gdy $A_1 = A_2 = 0$. Wszystkie pozostałe rozwiązania układu równań wyrazić można w postaci:

$$X = R \cdot \cos(\gamma), \quad Y = R \cdot \sin(\gamma), \quad R > 0 \quad (19)$$

Po podstawieniu:

$$A_1 + B_1 R = C_1 R \cdot \cos(\gamma), \quad A_2 + B_2 R = C_2 R \cdot \sin(\gamma) \quad (20)$$

Po przekształceniu:

$$\frac{1}{C_1} \left(\frac{A_1}{R} + B_1 \right) = \cos(\gamma), \quad \frac{1}{C_2} \left(\frac{A_2}{R} + B_2 \right) = \sin(\gamma) \quad (21)$$

Po obu stronach podniesieniu do kwadratu obu równań i zastosowaniu zależności jedynki trygonometrycznej:

$$\frac{1}{C_1^2} \left(\frac{A_1}{R} + B_1 \right)^2 + \frac{1}{C_2^2} \left(\frac{A_2}{R} + B_2 \right)^2 = 1 \quad (22)$$

Po uporządkowaniu zmiennych uzyskane zostaje równanie kwadratowe:

$$\left(\frac{B_1^2}{C_1^2} + \frac{B_2^2}{C_2^2} - 1\right)R^2 + 2\left(\frac{A_1B_1}{C_1^2} + \frac{A_2B_2}{C_2^2}\right)R + \left(\frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{A_2^2}{C_2^2}\right) = 0 \quad (23)$$

$$\Delta = 4\left(\frac{A_1B_1}{C_1^2} + \frac{A_2B_2}{C_2^2}\right)^2 - 4\left(\frac{B_1^2}{C_1^2} + \frac{B_2^2}{C_2^2} - 1\right)\left(\frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{A_2^2}{C_2^2}\right) \quad (24)$$

$$\Delta = 4\left(2\frac{A_1B_1A_2B_2}{C_1^2C_2^2} + \frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{A_2^2}{C_2^2} - \frac{A_1^2B_2^2 + A_2^2B_1^2}{C_1^2C_2^2}\right) \quad (25)$$

$$\Delta = \frac{4}{C_1^2C_2^2}\left(2A_1B_1A_2B_2 + A_1^2C_2^2 + A_2^2C_1^2 - A_1^2B_2^2 - A_2^2B_1^2\right) \quad (26)$$

$$\Delta = \frac{4}{C_1^2C_2^2}\left(A_1^2C_2^2 + A_2^2C_1^2 - (A_1B_2 - A_2B_1)^2\right) \quad (27)$$

$$R_0 = \frac{-A_1B_1C_2^2 - A_2B_2C_1^2 \pm \sqrt{A_1^2C_2^2 + A_2^2C_1^2 - (A_1B_2 - A_2B_1)^2}}{B_1^2C_2^2 + B_2^2C_1^2 - C_1^2C_2^2} \quad (28)$$

Rozwiązanie układu równań (18) (rozwiązanie odrzucone)

Po prostych przekształceniach można zauważyć afiniczną zależność między niewiadomymi:

$$\begin{cases} B_1B_2\sqrt{X^2 + Y^2} = C_1B_2X - A_1B_2 \\ B_1B_2\sqrt{X^2 + Y^2} = C_2B_1Y - A_2B_1 \end{cases} \quad (29)$$

$$C_1B_2X - A_1B_2 = C_2B_1Y - A_2B_1 \quad (30)$$

Z drugiej strony, po podniesieniu na przykład pierwszego z równań (18) do kwadratu, możliwe jest zastosowanie tej zależności (30), aby sprowadzić zadanie do rozwiązania równania kwadratowego jednej niewiadomej:

$$C_2^2B_1^2Y^2 = C_2^2(C_1X - A_1)^2 - C_2^2B_1^2X^2 \quad (31)$$

$$(C_1B_2X - A_1B_2 + A_2B_1)^2 = C_2^2(C_1X - A_1)^2 - C_2^2B_1^2X^2 \quad (32)$$

$$(C_1^2C_2^2 - C_2^2B_1^2 - C_1^2B_2^2)X^2 + 2(C_1B_2(A_1B_2 - A_2B_1) - A_1C_1C_2^2)X + A_1^2C_2^2 - (A_2B_1 - A_1B_2)^2 = 0 \quad (33)$$

Aby wyznaczyć wartość Y konieczne jest rozwiązanie analogicznego równania kwadratowego (wykorzystanie w tym celu zależności (20) jest problematyczne z uwagi na sytuację, gdy $B_1 = 0$):

$$(C_1^2 C_2^2 - C_2^2 B_1^2 - C_1^2 B_2^2)Y^2 + 2(C_2 B_1(A_2 B_1 - A_1 B_2) - A_2 C_2 C_1^2)Y + A_2^2 C_1^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 = 0 \quad (34)$$

Po wykonaniu tych operacji, uzyskane zostają cztery rozwiązania (X, Y) . Konieczne jest określenie, które z nich jest tym właściwym. Biorąc pod uwagę rozmiar i złożoność parametrów, analityczne rozwiązanie tego problemu mogłoby być uciążliwe. Zamiast tego, lepszym pomysłem jest podstawienie rozwiązań do układu równań (18) i sprawdzenie, które z nich go spełnia.

Siły a sygnały sterujące

W powyższym modelu suwnicy rozpatrywana była sytuacja, gdzie sygnałami sterującymi są siły (oznaczone w równaniach jako u_x i u_y). W fizycznym urządzeniu, nie jest jednak możliwe bezpośrednie manipulowanie siłami, jakie oddziałują naciąg i pomost. Zamiast tego, dostępne jest manipulowanie abstrakcyjnymi wartościami, które są proporcjonalne do napięć przykładanych do silników, a dopiero one powodują powstanie momentów obrotowych, które są następnie zamieniane na wymienione powyżej siły. W "konwersji" tej kluczowe znaczenie mają momenty bezwładności i tarcia wewnątrz silników.