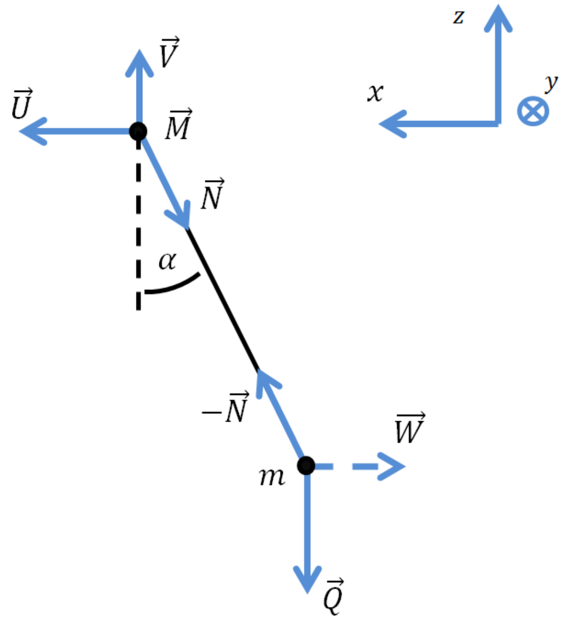
Model matematyczny suwnicy

Sformułowanie równań



Model opisać można za pomocą czterech równań. Pierwsze nich wynika z przedstawienia zależności między przyspieszeniem $\vec{a_M}$ wózka na suwnicy symbolizowanego przez masę $\vec{M}$ (powód użycia wektora został przedstawiony dalej), a odpowiednimi siłami, które na niego działają:

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{N} + \vec{B} = \vec{M} \otimes \vec{a_M} \tag{1}$$

gdzie:

$\vec{U} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \end{bmatrix}^T$ - sygnał sterujący (siła)

$\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_z \end{bmatrix}^T$ - pionowa składowa siły reakcji prowadnicy

$\vec{N} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T$ - siła naciągu liny

$\vec{B} = \begin{bmatrix} b_x(\dot{x_M}) & b_y(\dot{y_M}) & 0 \end{bmatrix}^T$ - wypadkowa siła tarć i innych oporów mechanicznych

$\begin{bmatrix} x_M & y_M & z_M \end{bmatrix}^T$ - położenie wózka

$\vec{a_M} = \begin{bmatrix} \ddot{x_M} & \ddot{y_M} & 0 \end{bmatrix}^T$ - przyspieszenie wózka

$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}^T \otimes \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_n b_n \end{bmatrix}^T$ - iloczyn wektorowy "po współrzędnych"

$\vec{M} = \begin{bmatrix} m_C & m_C + m_F & 0 \end{bmatrix}$ - masa wózka i ramy; zastosowany został wektor w miejsce skalarnej wielkości, aby rozróżnić sytuację, gdy poruszany jest tylko wózek (ruch wzdłuż współrzędnej x), a gdy poruszany jest wózek wraz z jego prowadnicą (wzdłuż współrzędnej y); zakładamy brak ruchu wzdłuż współrzednej z, więc ta składowa wektora jest równa 0

m_C - masa wózka

m_F - masa prowadnicy wózka

Drugie równanie wynika z zależności między przyspieszeniem $\vec{a_m}$ obciążenia (symbolizowanego przez masę m), a odpowiednimi siłami, które na to obciążenie oddziałują. Wspomniane przyspieszenie jest wyznaczane względem wózka, więc analizowany układ odniesienia jest układem inercjalnym, który poddany jest przyspieszeniu $\vec{a_M}$:

$$\vec{Q} + \vec{W} - \vec{N} = m\vec{a_m} \tag{2}$$

gdzie:

$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mg \end{bmatrix}^T$ - siła grawitacji działająca na obciążenie

$\vec{W} = -m\vec{a_M}$ - siła bezwładności wynikająca z inercjalności układu odniesienia

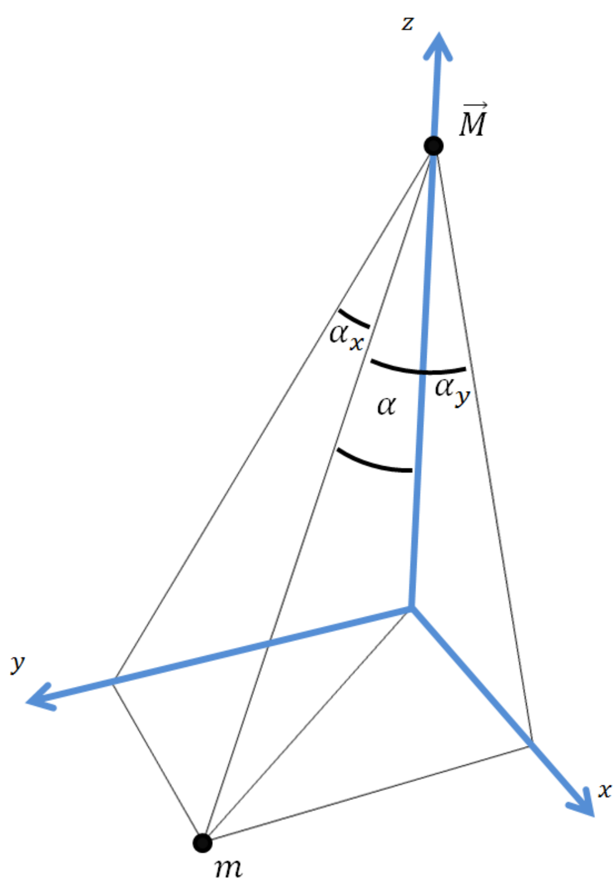
m - masa obciążenia

$\vec{a_m} = \begin{bmatrix} \ddot{x_m} & \ddot{y_m} & \ddot{z_m} \end{bmatrix}^T$ - przyspieszenie obciążenia w inercjalnym układzie odniesienia

Z braku ruchu wzdłuż prostej prowadzącej przez położenia wózka i obciążenia w analizowanym inercjalnym układzie odniesienia, a także biorąc pod uwagę fakt, że siła $\vec{N}$ musi być równoległa do tej prostej, wynika trzecie równanie:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \\ -cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|\vec{Q}|cos(\alpha) + |\vec{W}|sin(\alpha) \right) \tag{3}$$

Rozmieszczenie kątów α_x, α_y i α zostało przestawione na rysunku poniżej:



Zauważyć też można zależność między kątami:

$$sin^2(\alpha_x) + sin^2(\alpha_y) = sin^2(\alpha) \tag{4}$$

Po podstawieniu równania (3) oraz wszystkich pozostałych wartości do równań (1) i (2) uzyskany zostaje następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \\ -cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|m\vec{g}| cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x_M} \\ \ddot{y_M} \\ 0 \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x_M}) \\ b_y(\dot{y_M}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_C \ddot{x_M} \\ (m_C + m_F)\ddot{y_M} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} \ddot{x_M} \\ \ddot{y_M} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \\ -cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|m\vec{g}| cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x_M} \\ \ddot{y_M} \\ 0 \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) = m\vec{a_m} \tag{6}$$

Z równań usunąć można równania dla składowej z, gdyż nie są one potrzebne dla dalszej analizy. Po dodatkowych uproszczeniach:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left(g \cdot cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x_M} \\ \ddot{y_M} \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x_M}) \\ b_y(\dot{y_M}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_C \ddot{x_M} \\ (m_C + m_F)\ddot{y_M} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$- \begin{bmatrix} \ddot{x_M} \\ \ddot{y_M} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left(g \cdot cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x_M} \\ \ddot{y_M} \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) = \vec{a_m} \tag{8}$$

Biorąc pod uwagę, że w rzeczywistym modelu nie ma możliwości pomiaru liniowych przesunięć, prędkości ani przyspieszeń obciążenia, konieczne jest wyrażenie przyspieszenia $\vec{a_m}$ przy pomocy kątów α_x i α_y oraz długości liny l. Położenie względne obciążenia wyrazić można wzorem:

$$\vec{x_m} = l \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \tag{9}$$

Przyspieszenie będzie zatem wyrażone wzorem:

$$\vec{a_m} = l \begin{bmatrix} \ddot{\alpha_x} cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha_x})^2 sin(\alpha_x) \\ \ddot{\alpha_y} cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha_y})^2 sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Po podstawieniu zależności (10) do równania (8) i przyrównaniu poszczególnych składowych równań (7) i (8) otrzymany zostaje następujący układ równań:

$$u_x + mg \cdot sin(\alpha_x)cos(\alpha) + m \cdot sin(\alpha_x)\sqrt{(\ddot{x_M})^2 + (\ddot{y_M})^2)} + b_x(\dot{x_M}) = m_C \ddot{x_M} \tag{11}$$

$$u_y + mg \cdot sin(\alpha_y)cos(\alpha) + m \cdot sin(\alpha_y)\sqrt{(\ddot{x_M})^2 + (\ddot{y_M})^2)} + b_y(\dot{y_M}) = (m_C + m_F)\ddot{y_M} \tag{12}$$

$$-\ddot{x_M} - sin(\alpha_x)\Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x_M})^2 + (\ddot{y_M})^2)}\Big) = l\big(\ddot{\alpha_x} cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha_x})^2 sin(\alpha_x)\big) \tag{13}$$

$$-\ddot{y_M} - sin(\alpha_y)\Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x_M})^2 + (\ddot{y_M})^2)}\Big) = l\big(\ddot{\alpha_y} cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha_y})^2 sin(\alpha_y)\big) \tag{14}$$

Zastosowanie obliczeń numerycznych do wyznaczenia rozwiązań

Aby możliwe było zastosowanie obliczeń numerycznych do powyższego modelu, konieczne jest przekształcenie powyższych równań, do takich postaci, aby drugie pochodne zmiennych stanu ($\ddot{x_M}, \ddot{y_M}, \ddot{\alpha_x}, \ddot{\alpha_y}$) były wyrażone w zależności od pozostałych zmiennych. W przypadku przyspieszeń kątowych, przekształcenie to jest proste, gdyż sprowadza się do drobnych przekształceń równań 13 i 14:

$$\ddot{\alpha_x} = \frac{1}{l \cdot cos(\alpha_x)} \left(l(\dot{\alpha_x})^2 sin(\alpha_x) - \ddot{x_M} - sin(\alpha_x) \Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x_M})^2 + (\ddot{y_M})^2)} \Big) \right) \tag{15}$$

$$\ddot{\alpha_y} = \frac{1}{l \cdot cos(\alpha_y)} \left(l(\dot{\alpha_y})^2 sin(\alpha_y) - \ddot{y_M} - sin(\alpha_y) \Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x_M})^2 + (\ddot{y_M})^2)} \Big) \right) \tag{16}$$

W przypadku przyspieszeń liniowych sprawa jest jednak bardziej skompilowana, gdyż konieczne jest rozwiązanie układu równań o postaci (ze względu na niewiadome X i Y):

$$\begin{cases} A_1 + B_1\sqrt{X^2+Y^2} = C_1 X \\ A_2 + B_2\sqrt{X^2+Y^2} = C_2 Y \end{cases}, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0 \tag{17}$$

Rozwiązanie układu równań (17)

Po prostych przekształceniach można zauważyć afiniczną zależność między niewiadomymi:

$$\begin{cases} B_1 B_2\sqrt{X^2+Y^2} = C_1 B_2 X - A_1 B_2 \\ B_1 B_2\sqrt{X^2+Y^2} = C_2 B_1 Y - A_2 B_1 \end{cases} \tag{18}$$

$$C_1 B_2 X - A_1 B_2 = C_2 B_1 Y - A_2 B_1 \tag{19}$$

Z drugiej strony, po podniesieniu na przykład pierwszego z równań (17) do kwadratu, możliwe jest zastosowanie tej zależności (19), aby sprowadzić zadanie do rozwiązania równania kwadratowego jednej niewiadomej:

$$C_2^2 B_1^2 Y^2 = C_2^2 (C_1 X - A_1)^2 - C_2^2 B_1^2 X^2 \tag{20}$$

$$(C_1 B_2 X - A_1 B_2 + A_2 B_1)^2 = C_2^2 (C_1 X - A_1)^2 - C_2^2 B_1^2 X^2 \tag{21}$$

$$\big(C_1^2 C_2^2 - C_2^2 B_1^2 - C_1^2 B_2^2\big) X^2 + 2\big(C_1 B_2 (A_2 B_1 - A_1 B_2) - A_1 C_1 C_2^2\big) X + A_1^2 C_2^2 + \big(A_2 B_1 - A_1 B_2\big)^2 = 0 \tag{22}$$

Aby wyznaczyć wartość Y konieczne jest rozwiązanie analogicznego równania kwadratowego:

$$\big(C_1^2 C_2^2 - C_2^2 B_1^2 - C_1^2 B_2^2\big) Y^2 + 2\big(C_2 B_1 (A_1 B_2 - A_2 B_1) - A_2 C_2 C_1^2\big) Y + A_2^2 C_1^2 + \big(A_1 B_2 - A_2 B_1\big)^2 = 0 \tag{23}$$