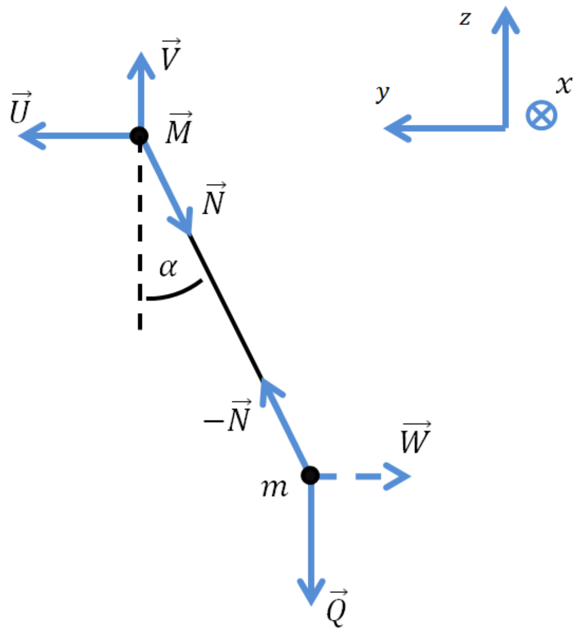
Model matematyczny suwnicy

Sformułowanie równań



Model opisać można za pomocą czterech równań. Pierwsze nich wynika z przedstawienia zależności między przyspieszeniem $\vec{a}_M$ cięgnika / pomostu na suwnicy symbolizowanego przez masę $\vec{M}$ (powód użycia wektora został przedstawiony dalej), a odpowiednimi siłami, które na niego działają:

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{N} + \vec{B} = \vec{M} \bullet \vec{a}_M \tag{1}$$

gdzie:

$\vec{U} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \end{bmatrix}^T$ - sygnał sterujący (siła)

$\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_z \end{bmatrix}^T$ - pionowa składowa siły reakcji prowadnicy

$\vec{N} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T$ - siła naciągu liny

$\vec{B} = \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) & b_y(\dot{y}_M) & 0 \end{bmatrix}^T$ - wypadkowa siła tarć i innych oporów mechanicznych

$\begin{bmatrix} x_M & y_M & z_M \end{bmatrix}^T$ - położenie cięgnika

$\vec{a}_M = \begin{bmatrix} \ddot{x}_M & \ddot{y}_M & 0 \end{bmatrix}^T$ - przyspieszenie cięgnika

$\vec{M} = \begin{bmatrix} m_C + m_F & m_C & 0 \end{bmatrix}$ - masa cięgnika i pomostu; zastosowany został wektor w miejsce skalarnej wielkości, aby rozróżnić sytuację, gdy poruszany jest tylko cięgnik (ruch wzdłuż współrzędnej y), a gdy poruszany jest cięgnik wraz z pomostem (wzdłuż współrzędnej x); zakładamy brak ruchu wzdłuż współrzędnej z, więc ta składowa wektora jest równa 0

m_C - masa cięgnika

m_F - masa pomostu

Drugie równanie wynika z zależności między przyspieszeniem $\vec{a}_m$ zawiesia (symbolizowanego przez masę m), a odpowiednimi siłami, które na to obciążenie oddziałują. Wspomniane przyspieszenie jest wyznaczane względem cięgnika, więc analizowany układ odniesienia jest układem inercjalnym, który poddany jest przyspieszeniu $\vec{a}_M$:

$$\vec{Q} + \vec{W} - \vec{N} = m\vec{a}_m \tag{2}$$

gdzie:

$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mg \end{bmatrix}^T$ - siła grawitacji działająca na obciążenie

$\vec{W} = -m\vec{a}_M$ - siła bezwładności wynikająca z inercjalności układu odniesienia

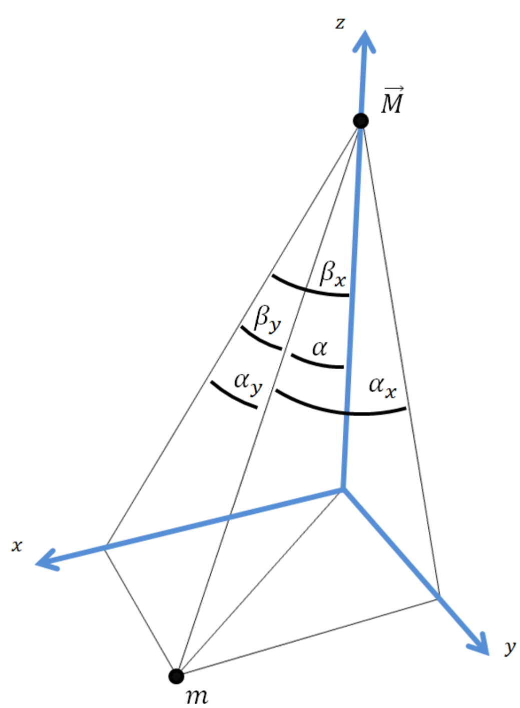
m - masa obciążenia

$\vec{a}_m = \begin{bmatrix} \ddot{x}_m & \ddot{y}_m & \ddot{z}_m \end{bmatrix}^T$ - przyspieszenie obciążenia w inercjalnym układzie odniesienia

Z braku ruchu wzdłuż prostej prowadzącej przez położenia wózka i obciążenia w analizowanym inercjalnym układzie odniesienia, a także biorąc pod uwagę fakt, że siła $\vec{N}$ musi być równoległa do tej prostej, wynika trzecie równanie:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \\ -cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|\vec{Q}|cos(\alpha) + |\vec{W}|sin(\alpha)\right) \tag{3}$$

Rozmieszczenie kątów β_x, β_y, α_x, α_y i α zostało przestawione na rysunku poniżej:



Kąty α_x i α_y są stosowane jako zmienne stanu z uwagi na uproszczenie i symetrię modelu. W fizycznym modelu możliwy jest natomiast pomiar kątów oznaczonych jako β_x i β_y. Oznacza to, że konieczne będzie wyznaczenie zależności umożliwiających zamianę kątów:

$$\begin{cases} sin(\alpha_x) = cos(\alpha_y)sin(\beta_x) \\ a_y = b_y \end{cases} \tag{4}$$

Wyprowadzona również została zależność pozwalająca wyznaczyć kąt α:

$$sin^2(\alpha_x) + sin^2(\alpha_y) = sin^2(\alpha) \tag{5}$$

Po podstawieniu równania (3) oraz wszystkich pozostałych wartości do równań (1) i (2) uzyskany zostaje następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \\ -cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|m\vec{g}|cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) \\ b_y(\dot{y}_M) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_C + m_F)\ddot{x}_M \\ m_C \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \\ -cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|m\vec{g}|cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) = m\vec{a}_m \tag{7}$$

Z równań usunąć można równania dla składowej z, gdyż nie są one potrzebne dla dalszej analizy. Po dodatkowych uproszczeniach:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left(g \cdot cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) \\ b_y(\dot{y}_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_C + m_F)\ddot{x}_M \\ m_C \ddot{y}_M \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$-\begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left(g \cdot cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) = \vec{a}_m \tag{9}$$

Biorąc pod uwagę, że w rzeczywistym modelu nie ma możliwości pomiaru liniowych przesunięć, prędkości ani przyspieszeń obciążenia, konieczne jest wyrażenie przyspieszenia $\vec{a}_m$ przy pomocy kątów α_x i α_y oraz długości liny l. Położenie względne obciążenia wyrazić można wzorem:

$$\vec{x}_m = l \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Przyspieszenie będzie zatem wyrażone wzorem:

$$\vec{a_m} = l \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_x cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha}_x)^2 sin(\alpha_x) \\ \ddot{\alpha}_y cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha}_y)^2 sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Po podstawieniu zależności (11) do równania (9) i przyrównaniu poszczególnych składowych równań (8) i (9) otrzymany zostaje następujący układ równań:

$$u_x + mg \cdot sin(\alpha_x)cos(\alpha) + m \cdot sin(\alpha_x)sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)} + b_x(\dot{x}_M) = (m_C + m_F)\ddot{x}_M \tag{12}$$

$$u_y + mg \cdot sin(\alpha_y)cos(\alpha) + m \cdot sin(\alpha_y)sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)} + b_y(\dot{y}_M) = m_C\ddot{y}_M \tag{13}$$

$$-\ddot{x_M} - sin(\alpha_x)\Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)}\Big) = l\big(\ddot{\alpha}_x cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha}_x)^2 sin(\alpha_x)\big) \tag{14}$$

$$-\ddot{y}_M - sin(\alpha_y)\Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)}\Big) = l\big(\ddot{\alpha}_y cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha}_y)^2 sin(\alpha_y)\big) \tag{15}$$

Zastosowanie obliczeń numerycznych do wyznaczenia rozwiązań

Aby możliwe było zastosowanie obliczeń numerycznych do powyższego modelu, konieczne jest przekształcenie powyższych równań, do takich postaci, aby drugie pochodne zmiennych stanu ($\ddot{x_M}, \ddot{y_M}, \ddot{\alpha}_x, \ddot{\alpha}_y$) były wyrażone w zależności od pozostałych zmiennych. W przypadku przyspieszeń kątowych, przekształcenie to jest proste, gdyż sprowadza się do drobnych przekształceń równań 13 i 14:

$$\ddot{\alpha}_x = \frac{1}{l \cdot cos(\alpha_x)}\Big(l(\dot{\alpha}_x)^2 sin(\alpha_x) - \ddot{x}_M - sin(\alpha_x)\Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)}\Big)\Big) \tag{16}$$

$$\ddot{\alpha}_y = \frac{1}{l \cdot cos(\alpha_y)}\Big(l(\dot{\alpha}_y)^2 sin(\alpha_y) - \ddot{y}_M - sin(\alpha_y)\Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)}\Big)\Big) \tag{17}$$

W przypadku przyspieszeń liniowych sprawa jest jednak bardziej skompilowana, gdyż konieczne jest rozwiązanie układu równań o postaci (ze względu na niewiadome X i Y):

$$\begin{cases} A_1 + B_1\sqrt{X^2+Y^2} = C_1 X \\ A_2 + B_2\sqrt{X^2+Y^2} = C_2 Y \end{cases}, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0 \tag{18}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} X &= \ddot{x}_M \\ Y &= \ddot{y}_M \\ A_1 &= u_x + mg \cdot sin(\alpha_x)cos(\alpha) + b_x(\dot{x}_M) \\ A_2 &= u_y + mg \cdot sin(\alpha_y)cos(\alpha) + b_y(\dot{y}_M) \\ B_1 &= m \cdot sin(\alpha_x)sin(\alpha) \\ B_2 &= m \cdot sin(\alpha_y)sin(\alpha) \\ C_1 &= m_C + m_F \\ C_2 &= m_C \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań (17)

Po prostych przekształceniach można zauważyć afiniczną zależność między niewiadomymi:

$$\begin{cases} B_1 B_2\sqrt{X^2+Y^2} = C_1 B_2 X - A_1 B_2 \\ B_1 B_2\sqrt{X^2+Y^2} = C_2 B_1 Y - A_2 B_1 \end{cases} \tag{19}$$

$$C_1 B_2 X - A_1 B_2 = C_2 B_1 Y - A_2 B_1 \tag{20}$$

Z drugiej strony, po podniesieniu na przykład pierwszego z równań (18) do kwadratu, możliwe jest zastosowanie tej zależności (20), aby sprowadzić zadanie do rozwiązania równania kwadratowego jednej niewiadomej:

$$C_2^2 B_1^2 Y^2 = C_2^2 (C_1 X - A_1)^2 - C_2^2 B_1^2 X^2 \tag{21}$$

$$(C_1 B_2 X - A_1 B_2 + A_2 B_1)^2 = C_2^2 (C_1 X - A_1)^2 - C_2^2 B_1^2 X^2 \tag{22}$$

$$\Big(C_1^2 C_2^2 - C_2^2 B_1^2 - C_1^2 B_2^2\Big) X^2 + 2\Big(C_1 B_2 (A_1 B_2 - A_2 B_1) - A_1 C_1 C_2^2\Big) X + A_1^2 C_2^2 - \Big(A_2 B_1 - A_1 B_2\Big)^2 = 0 \tag{23}$$

Aby wyznaczyć wartość Y konieczne jest rozwiązanie analogicznego równania kwadratowego (wykorzystanie w tym celu zależności (20) jest problematyczne z uwagi na sytuację, gdy $B_1 = 0$):

$$\left(C_1^2C_2^2 - C_2^2B_1^2 - C_1^2B_2^2\right)Y^2 + 2\left(C_2B_1(A_2B_1 - A_1B_2) - A_2C_2C_1^2\right)Y + A_2^2C_1^2 - \left(A_1B_2 - A_2B_1\right)^2 = 0 \quad (24)$$

Po wykonaniu tych operacji, uzyskane zostają cztery rozwiązania (X, Y). Konieczne jest określenie, które z nich jest tym właściwym. Biorąc pod uwagę rozmiar i zawiłość parametrów, analityczne rozwiązanie tego problemu mogłoby być uciążliwe. Zamiast tego, lepszym pomysłem jest podstawienie rozwiązań do układu równań (18) i sprawdzenie, które z nich go spełnia.