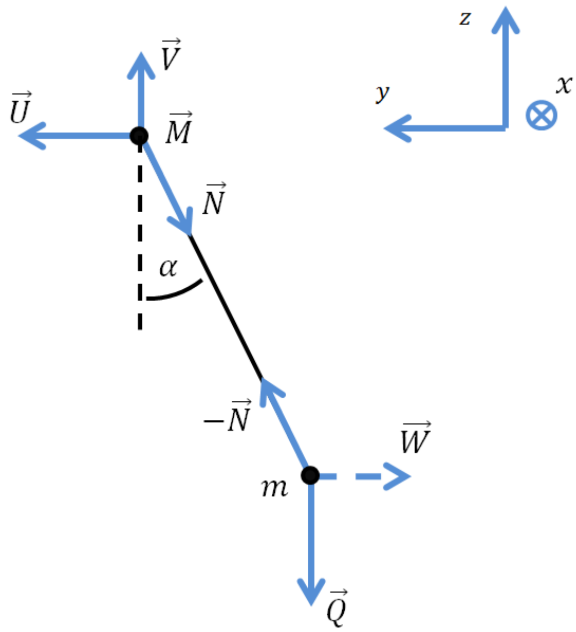
Model matematyczny suwnicy

Sformułowanie równań



Model opisać można za pomocą czterech równań. Pierwsze nich wynika z przedstawienia zależności między przyspieszeniem $\vec{a}_M$ cięgnika / pomostu na suwnicy symbolizowanego przez masę $\vec{M}$ (powód użycia wektora został przedstawiony dalej), a odpowiednimi siłami, które na niego działają:

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{N} + \vec{B} = \vec{M} \bullet \vec{a}_M \tag{1}$$

gdzie:

$\vec{U} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \end{bmatrix}^T$ - sygnał sterujący (siła)

$\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_z \end{bmatrix}^T$ - pionowa składowa siły reakcji prowadnicy

$\vec{N} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T$ - siła naciągu liny

$\vec{B} = \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) & b_y(\dot{y}_M) & 0 \end{bmatrix}^T$ - wypadkowa siła tarć i innych oporów mechanicznych

$\begin{bmatrix} x_M & y_M & z_M \end{bmatrix}^T$ - położenie cięgnika

$\vec{a}_M = \begin{bmatrix} \ddot{x}_M & \ddot{y}_M & 0 \end{bmatrix}^T$ - przyspieszenie cięgnika

$\vec{M} = \begin{bmatrix} m_C + m_F & m_C & 0 \end{bmatrix}$ - masa cięgnika i pomostu; zastosowany został wektor w miejsce skalarnej wielkości, aby rozróżnić sytuację, gdy poruszany jest tylko cięgnik (ruch wzdłuż współrzędnej y), a gdy poruszany jest cięgnik wraz z pomostem (wzdłuż współrzędnej x); zakładamy brak ruchu wzdłuż współrzednej z, więc ta składowa wektora jest równa 0

m_C - masa cięgnika

m_F - masa pomostu

Drugie równanie wynika z zależności między przyspieszeniem $\vec{a}_m$ zawiesia (symbolizowanego przez masę m), a odpowiednimi siłami, które na to obciążenie oddziałują. Wspomniane przyspieszenie jest wyznaczane względem cięgnika, więc analizowany układ odniesienia jest układem inercjalnym, który poddany jest przyspieszeniu $\vec{a}_M$:

$$\vec{Q} + \vec{W} - \vec{N} = m\vec{a}_m \tag{2}$$

gdzie:

$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mg \end{bmatrix}^T$ - siła grawitacji działająca na obciążenie

$\vec{W} = -m\vec{a}_M$ - siła bezwładności wynikająca z inercjalności układu odniesienia

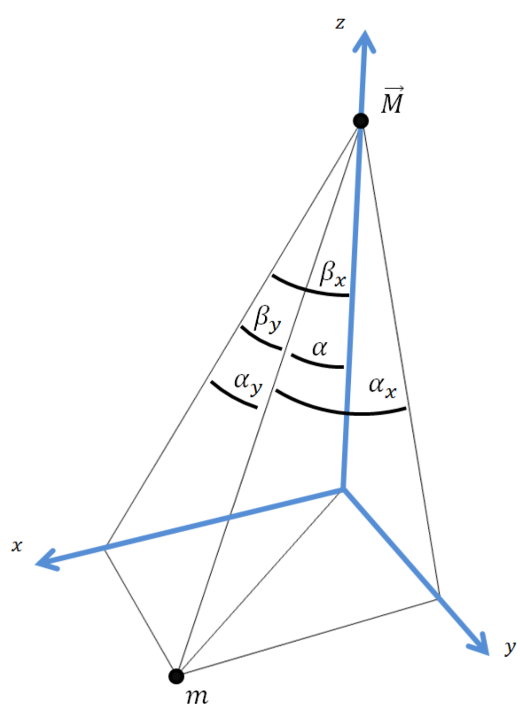
m - masa obciążenia

$\vec{a}_m = \begin{bmatrix} \ddot{x}_m & \ddot{y}_m & \ddot{z}_m \end{bmatrix}^T$ - przyspieszenie obciążenia w inercjalnym układzie odniesienia

Z braku ruchu wzdłuż prostej prowadzącej przez położenia wózka i obciążenia w analizowanym inercjalnym układzie odniesienia, a także biorąc pod uwagę fakt, że siła $\vec{N}$ musi być równoległa do tej prostej, wynika trzecie równanie:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \\ -cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|\vec{Q}|cos(\alpha) + |\vec{W}|sin(\alpha)\right) \tag{3}$$

Rozmieszczenie kątów β_x, β_y, α_x, α_y i α zostało przestawione na rysunku poniżej:



Kąty α_x i α_y są stosowane jako zmienne stanu z uwagi na uproszczenie i symetrię modelu. W fizycznym modelu możliwy jest natomiast pomiar kątów oznaczonych jako β_x i β_y. Oznacza to, że konieczne będzie wyznaczenie zależności umożliwiających zamianę kątów:

$$\begin{cases} sin(\alpha_x) = cos(\alpha_y)sin(\beta_x) \\ a_y = b_y \end{cases} \tag{4}$$

Wyprowadzona również została zależność pozwalająca wyznaczyć kąt α:

$$sin^2(\alpha_x) + sin^2(\alpha_y) = sin^2(\alpha) \tag{5}$$

Po podstawieniu równania (3) oraz wszystkich pozostałych wartości do równań (1) i (2) uzyskany zostaje następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \\ -cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|m\vec{g}|cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) \\ b_y(\dot{y}_M) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_C + m_F)\ddot{x}_M \\ m_C\ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \\ -cos(\alpha) \end{bmatrix} \left(|m\vec{g}|cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) = m\vec{a}_m \tag{7}$$

Z równań usunąć można równania dla składowej z, gdyż nie są one potrzebne dla dalszej analizy. Po dodatkowych uproszczeniach:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left(g \cdot cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) \\ b_y(\dot{y}_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_C + m_F)\ddot{x}_M \\ m_C\ddot{y}_M \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$-\begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left(g \cdot cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} \right| sin(\alpha) \right) = \vec{a}_m \tag{9}$$

Biorąc pod uwagę, że w rzeczywistym modelu nie ma możliwości pomiaru liniowych przesunięć, prędkości ani przyspieszeń obciążenia, konieczne jest wyrażenie przyspieszenia $\vec{a}_m$ przy pomocy kątów α_x i α_y oraz długości liny l. Położenie względne obciążenia wyrazić można wzorem:

$$\vec{x}_m = l \begin{bmatrix} sin(\alpha_x) \\ sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Przyspieszenie będzie zatem wyrażone wzorem:

$$\vec{a_m} = l \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_x cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha}_x)^2 sin(\alpha_x) \\ \ddot{\alpha}_y cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha}_y)^2 sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Po podstawieniu zależności (11) do równania (9) i przyrównaniu poszczególnych składowych równań (8) i (9) otrzymany zostaje następujący układ równań:

$$u_x + mg \cdot sin(\alpha_x)cos(\alpha) + m \cdot sin(\alpha_x)sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)} + b_x(\dot{x}_M) = (m_C + m_F)\ddot{x}_M \tag{12}$$

$$u_y + mg \cdot sin(\alpha_y)cos(\alpha) + m \cdot sin(\alpha_y)sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)} + b_y(\dot{y}_M) = m_C\ddot{y}_M \tag{13}$$

$$-\ddot{x_M} - sin(\alpha_x)\Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)}\Big) = l\big(\ddot{\alpha}_x cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha}_x)^2 sin(\alpha_x)\big) \tag{14}$$

$$-\ddot{y}_M - sin(\alpha_y)\Big(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)}\Big) = l\big(\ddot{\alpha}_y cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha}_y)^2 sin(\alpha_y)\big) \tag{15}$$

Zastosowanie obliczeń numerycznych do wyznaczenia rozwiązań

Aby możliwe było zastosowanie obliczeń numerycznych do powyższego modelu, konieczne jest przekształcenie powyższych równań, do takich postaci, aby drugie pochodne zmiennych stanu ($\ddot{x_M}, \ddot{y_M}, \ddot{\alpha_x}, \ddot{\alpha_y}$) były wyrażone w zależności od pozostałych zmiennych. W przypadku przyspieszeń kątowych, przekształcenie to jest proste, gdyż sprowadza się do drobnych przekształceń równań (14) i (15):

$$\ddot{\alpha_x} = \frac{1}{l \cdot cos(\alpha_x)}\left(l(\dot{\alpha_x})^2 sin(\alpha_x) - \ddot{x}_M - sin(\alpha_x)\left(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)}\right)\right) \tag{16}$$

$$\ddot{\alpha_y} = \frac{1}{l \cdot cos(\alpha_y)}\left(l(\dot{\alpha_y})^2 sin(\alpha_y) - \ddot{y}_M - sin(\alpha_y)\left(g \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2)}\right)\right) \tag{17}$$

W przypadku przyspieszeń liniowych sprawa jest jednak bardziej skompilowana, gdyż konieczne jest rozwiązanie układu równań o postaci (ze względu na niewiadome X i Y):

$$\begin{cases} A_1 + B_1\sqrt{X^2+Y^2} = C_1 X \\ A_2 + B_2\sqrt{X^2+Y^2} = C_2 Y \end{cases}, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0 \tag{18}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
X &= \ddot{x}_M \\
Y &= \ddot{y}_M \\
A_1 &= u_x + mg \cdot sin(\alpha_x)cos(\alpha) + b_x(\dot{x}_M) \\
A_2 &= u_y + mg \cdot sin(\alpha_y)cos(\alpha) + b_y(\dot{y}_M) \\
B_1 &= m \cdot sin(\alpha_x)sin(\alpha) \\
B_2 &= m \cdot sin(\alpha_y)sin(\alpha) \\
C_1 &= m_C + m_F \\
C_2 &= m_C
\end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań (18)

Rozwiązania układu równań wyrazić można w postaci:

$$X = R \cdot cos(\gamma), \quad Y = R \cdot sin(\gamma), \quad R \geqslant 0 \tag{19}$$

Po podstawieniu:

$$A_1 + B_1 R = C_1 R \cdot cos(\gamma), \quad A_2 + B_2 R = C_2 R \cdot sin(\gamma) \tag{20}$$

Po przekształceniu:

$$\frac{1}{C_1}\left(\frac{A_1}{R} + B_1\right) = cos(\gamma), \quad \frac{1}{C_2}\left(\frac{A_2}{R} + B_2\right) = sin(\gamma) \tag{21}$$

Po obustronnym podniesieniu do kwadratu obu równań i zastosowaniu zależności jedynki trygonometrycznej:

$$\frac{1}{C_1^2}\left(\frac{A_1}{R} + B_1\right)^2 + \frac{1}{C_2^2}\left(\frac{A_2}{R} + B_2\right)^2 = 1 \tag{22}$$

Po uporządkowaniu zmiennych uzyskane zostaje równanie kwadratowe:

$$\left(\frac{B_1^2}{C_1^2} + \frac{B_2^2}{C_2^2} - 1\right)R^2 + 2\left(\frac{A_1B_1}{C_1^2} + \frac{A_2B_2}{C_2^2}\right)R + \left(\frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{A_2^2}{C_2^2}\right) = 0 \tag{23}$$

$$\Delta = 4\left(\frac{A_1B_1}{C_1^2} + \frac{A_2B_2}{C_2^2}\right)^2 - 4\left(\frac{B_1^2}{C_1^2} + \frac{B_2^2}{C_2^2} - 1\right)\left(\frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{A_2^2}{C_2^2}\right) \tag{24}$$

$$\Delta = 4\left(2\frac{A_1B_1A_2B_2}{C_1^2C_2^2} + \frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{A_2^2}{C_2^2} - \frac{A_1^2B_2^2 + A_2^2B_1^2}{C_1^2C_2^2}\right) \tag{25}$$

$$\Delta = \frac{4}{C_1^2C_2^2}\left(2A_1B_1A_2B_2 + A_1^2C_2^2 + A_2^2C_1^2 - A_1^2B_2^2 - A_2^2B_1^2\right) \tag{26}$$

$$\Delta = \frac{4}{C_1^2C_2^2}\left(A_1^2C_2^2 + A_2^2C_1^2 - (A_1B_2 - A_2B_1)^2\right) \tag{27}$$

$$R_0 = \frac{-A_1B_1C_2^2 - A_2B_2C_1^2 \pm C_1C_2\sqrt{A_1^2C_2^2 + A_2^2C_1^2 - (A_1B_2 - A_2B_1)^2}}{B_1^2C_2^2 + B_2^2C_1^2 - C_1^2C_2^2} \tag{28}$$

Po podstawieniu zależności (21) do (19) rozwiązania równania można wyrazić w postaci:

$$X = \frac{A_1 + B_1R_0}{C_1}, \quad Y = \frac{A_2 + B_2R_0}{C_2} \tag{29}$$

Równania stanu

Ostatnim krokiem przekształcenia równań do postaci możliwej do rozwiązania metodami numerycznymi jest przekształcenie ich w równania stanu, o postaci:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}, \vec{u}) \tag{30}$$

Wektor sterowań, wektor stanu i pochodną wektora stanu wyrazić można jako:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ \ddot{\alpha}_x \\ \ddot{\alpha}_y \end{bmatrix} \tag{31}$$

Równania stanu przyjmują wtedy następującą postać:

$$\dot{x}_1 = x_5, \quad \dot{x}_2 = x_6, \quad \dot{x}_3 = x_7, \quad \dot{x}_4 = x_8, \quad \dot{x}_5 = X, \quad \dot{x}_6 = Y \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_7 &= x_7^2 tg(x_3) - \frac{X}{l \cdot cos(x_3)} - \frac{tg(x_3)}{l}\Big(g \cdot T + S\sqrt{X^2 + Y^2}\Big) \\ \dot{x}_8 &= x_8^2 tg(x_4) - \frac{Y}{l \cdot cos(x_4)} - \frac{tg(x_4)}{l}\Big(g \cdot T + S\sqrt{X^2 + Y^2}\Big) \end{aligned} \tag{33}$$

Gdzie:

$$\begin{aligned} X &= \frac{A_1 + B_1 R_0}{C_1} \\ Y &= \frac{A_2 + B_2 R_0}{C_2} \\ R_0 &= \frac{-A_1 B_1 C_2^2 - A_2 B_2 C_1^2 - \sqrt{A_1^2 C_2^2 + A_2^2 C_1^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2}}{B_1^2 C_2^2 + B_2^2 C_1^2 - C_1^2 C_2^2} \\ A_1 &= u_1 + mg \cdot sin(x_3)T + b_x(x_5) \\ A_2 &= u_2 + mg \cdot sin(x_4)T + b_y(x_6) \\ B_1 &= m \cdot sin(x_3)S \\ B_2 &= m \cdot sin(x_4)S \\ C_1 &= m_C + m_F \\ C_2 &= m_C \\ S &= \sqrt{sin^2(x_3) + sin^2(x_4)} \\ T &= \sqrt{1 - sin^2(x_3) - sin^2(x_4)} \end{aligned} \tag{34}$$

Równania sprzężone

W celu wyznaczenia równań sprzężonych konieczne jest obliczenie wszystkich 64 pochodnych pochodnych stanów względem stanów. Szybka analiza ujawnia jednak, że większość z tych funkcji będzie zerami, a tylko niektóre będą mieć skompilowaną postać:

$\partial\dot{x}_i/\partial x_j$	$\dot{x}_1$	$\dot{x}_2$	$\dot{x}_3$	$\dot{x}_4$	$\dot{x}_5$	$\dot{x}_6$	$\dot{x}_7$	$\dot{x}_8$
x_1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	#	#	#	#
x_4	0	0	0	0	#	#	#	#
x_5	1	0	0	0	#	#	#	#
x_6	0	1	0	0	#	#	#	#
x_7	0	0	1	0	0	0	#	0
x_8	0	0	0	1	0	0	0	#

Pochodne w tabeli oznaczone znacznikami # mają skomplikowane postacie i zostały obliczone poniżej:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\dot{x}_5}{\partial x_j} = \frac{\partial X}{\partial x_j}, \quad j \in \{3,4,5,6\} \\
&\frac{\partial\dot{x}_6}{\partial x_j} = \frac{\partial Y}{\partial x_j}, \quad j \in \{3,4,5,6\} \\
&\frac{\partial\dot{x}_7}{\partial x_j} = \frac{-1}{l\cdot cos(x_3)}\frac{\partial X}{\partial x_j} - \frac{tg(x_3)}{l}\left(g\cdot\frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial S}{\partial x_j}\sqrt{X^2+Y^2} + \left(\frac{\partial X}{\partial x_j}X + \frac{\partial Y}{\partial x_j}Y\right)\frac{S}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right), \quad j \in \{4,5,6\} \\
&\frac{\partial\dot{x}_8}{\partial x_j} = \frac{-1}{l\cdot cos(x_4)}\frac{\partial Y}{\partial x_j} - \frac{tg(x_4)}{l}\left(g\cdot\frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial S}{\partial x_j}\sqrt{X^2+Y^2} + \left(\frac{\partial X}{\partial x_j}X + \frac{\partial Y}{\partial x_j}Y\right)\frac{S}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right), \quad j \in \{3,5,6\} \\
&\frac{\partial\dot{x}_7}{\partial x_3} = \frac{l\cdot x_7^2 - \frac{\partial X}{\partial x_3}cos(x_3) - X\cdot sin(x_3) - g\cdot T - S\sqrt{X^2+Y^2}}{l\cdot cos^2(x_3)} \\
&\qquad - \frac{tg(x_3)}{l}\left(g\cdot\frac{\partial T}{\partial x_3} + \frac{\partial S}{\partial x_3}\sqrt{X^2+Y^2} + \left(\frac{\partial X}{\partial x_3}X + \frac{\partial Y}{\partial x_3}Y\right)\frac{S}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) \\
&\frac{\partial\dot{x}_8}{\partial x_4} = \frac{l\cdot x_8^2 - \frac{\partial Y}{\partial x_4}cos(x_4) - X\cdot sin(x_4) - g\cdot T - S\sqrt{X^2+Y^2}}{l\cdot cos^2(x_4)} \\
&\qquad - \frac{tg(x_4)}{l}\left(g\cdot\frac{\partial T}{\partial x_4} + \frac{\partial S}{\partial x_4}\sqrt{X^2+Y^2} + \left(\frac{\partial X}{\partial x_4}X + \frac{\partial Y}{\partial x_4}Y\right)\frac{S}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) \\
&\frac{\partial\dot{x}_7}{\partial x_7} = 2x_7 tg(x_3) \\
&\frac{\partial\dot{x}_8}{\partial x_8} = 2x_8 tg(x_4)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial X}}{\boldsymbol{\partial x_j}} = \frac{1}{C_1}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_j} + \frac{\partial B_1}{\partial x_j}R_0 + B_1\frac{\partial R_0}{\partial x_j}\right), \quad \frac{\boldsymbol{\partial Y}}{\boldsymbol{\partial x_j}} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_j} + \frac{\partial B_2}{\partial x_j}R_0 + B_2\frac{\partial R_0}{\partial x_j}\right) \tag{36}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial A_1}}{\boldsymbol{\partial x_3}} = mg \cdot \big(cos(x_3)T + sin(x_3)\frac{\partial T}{\partial x_3}\big), \quad \frac{\boldsymbol{\partial A_1}}{\boldsymbol{\partial x_4}} = mg \cdot sin(x_3)\frac{\partial T}{\partial x_4} \tag{37}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial A_2}}{\boldsymbol{\partial x_3}} = mg \cdot sin(x_4)\frac{\partial T}{\partial x_3}, \quad \frac{\boldsymbol{\partial A_2}}{\boldsymbol{\partial x_4}} = mg \cdot \big(cos(x_4)T + sin(x_4)\frac{\partial T}{\partial x_4}\big) \tag{38}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial A_1}}{\boldsymbol{\partial x_5}} = \frac{\partial b_x}{\partial x_5}, \quad \frac{\boldsymbol{\partial A_1}}{\boldsymbol{\partial x_6}} = 0, \quad \frac{\boldsymbol{\partial A_2}}{\boldsymbol{\partial x_5}} = 0, \quad \frac{\boldsymbol{\partial A_2}}{\boldsymbol{\partial x_6}} = \frac{\partial b_y}{\partial x_6} \tag{39}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial B_1}}{\boldsymbol{\partial x_3}} = m\Big(cos(x_3)S + sin(x_3)\frac{\partial S}{\partial x_3}\Big), \quad \frac{\boldsymbol{\partial B_1}}{\boldsymbol{\partial x_4}} = m \cdot sin(x_3)\frac{\partial S}{\partial x_4} \tag{40}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial B_2}}{\boldsymbol{\partial x_3}} = m \cdot sin(x_4)\frac{\partial S}{\partial x_3}, \quad \frac{\boldsymbol{\partial B_2}}{\boldsymbol{\partial x_4}} = m\Big(cos(x_4)S + sin(x_4)\frac{\partial S}{\partial x_4}\Big) \tag{41}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial B_1}}{\boldsymbol{\partial x_5}} = 0, \quad \frac{\boldsymbol{\partial B_1}}{\boldsymbol{\partial x_6}} = 0, \quad \frac{\boldsymbol{\partial B_2}}{\boldsymbol{\partial x_5}} = 0, \quad \frac{\boldsymbol{\partial B_2}}{\boldsymbol{\partial x_6}} = 0 \tag{42}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial S}}{\boldsymbol{\partial x_3}} = \frac{sin(x_3)cos(x_3)}{\sqrt{sin^2(x_3) + sin^2(x_4)}}, \quad \frac{\boldsymbol{\partial S}}{\boldsymbol{\partial x_4}} = \frac{sin(x_4)cos(x_4)}{\sqrt{sin^2(x_3) + sin^2(x_4)}} \tag{43}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial x_3}} = \frac{-sin(x_3)cos(x_3)}{\sqrt{1 - sin^2(x_3) - sin^2(x_4)}}, \quad \frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial x_4}} = \frac{-sin(x_4)cos(x_4)}{\sqrt{1 - sin^2(x_3) - sin^2(x_4)}} \tag{44}$$

Wyznaczenie pochodnej $\partial R_0/\partial x$

Celem jest obliczenie pochodnej po x wyrażenia:

$$R_0 = \frac{-A_1B_1C_2^2 - A_2B_2C_1^2 - \sqrt{A_1^2C_2^2 + A_2^2C_1^2 - (A_1B_2 - A_2B_1)^2}}{B_1^2C_2^2 + B_2^2C_1^2 - C_1^2C_2^2} \tag{45}$$

Gdzie:

$$A_1 = A_1(x), \quad A_2 = A_2(x), \quad B_1 = B_1(x), \quad B_2 = B_2(x), \quad C_1 = const, \quad C_2 = const \tag{46}$$

Poprzez zastąpienie poszczególnych części tego skompilowanego wyrażenia funkcjami pomocniczymi, możliwe jest rozbicie problemu na kilka prostszych podproblemów:

$$R_0 = \frac{N_1 - \sqrt{N_2}}{D} \tag{47}$$

Gdzie:

$$\begin{aligned} N_1 &= -A_1B_1C_2^2 - A_2B_2C_1^2 \\ N_2 &= A_1^2C_2^2 + A_2^2C_1^2 - (A_1B_2 - A_2B_1)^2 \\ D &= B_1^2C_2^2 + B_2^2C_1^2 - C_1^2C_2^2 \end{aligned} \tag{48}$$

Wtedy:

$$\frac{\partial R_0}{\partial x} = \frac{1}{D^2}\left(\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial N_2}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{N_2}}\right)D - \left(N_1 - \sqrt{N_2}\right)\frac{\partial D}{\partial x}\right) \tag{49}$$

Gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= -C_2^2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}B_1 + A_1\frac{\partial B_1}{\partial x}\right) - C_1^2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}B_2 + A_2\frac{\partial B_2}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= 2\frac{\partial A_1}{\partial x}A_1C_2^2 + 2\frac{\partial A_2}{\partial x}A_2C_1^2 - 2(A_1B_2 - A_2B_1)\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}B_2 + A_1\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial A_2}{\partial x}B_1 - A_2\frac{\partial B_1}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial D}{\partial x} &= 2\frac{\partial B_1}{\partial x}B_1C_2^2 + 2\frac{\partial B_2}{\partial x}B_2C_1^2 \end{aligned} \tag{50}$$

Rozwiązanie układu równań (18) (rozwiązanie odrzucone)

Po prostych przekształceniach można zauważyć afiniczną zależność między niewiadomymi:

$$\begin{cases} B_1B_2\sqrt{X^2+Y^2} = C_1B_2X - A_1B_2 \\ B_1B_2\sqrt{X^2+Y^2} = C_2B_1Y - A_2B_1 \end{cases} \tag{51}$$

$$C_1B_2X - A_1B_2 = C_2B_1Y - A_2B_1 \tag{52}$$

Z drugiej strony, po podniesieniu na przykład pierwszego z równań (18) do kwadratu, możliwe jest zastosowanie tej zależności (52), aby sprowadzić zadanie do rozwiązania równania kwadratowego jednej niewiadomej:

$$C_2^2B_1^2Y^2 = C_2^2(C_1X - A_1)^2 - C_2^2B_1^2X^2 \tag{53}$$

$$(C_1B_2X - A_1B_2 + A_2B_1)^2 = C_2^2(C_1X - A_1)^2 - C_2^2B_1^2X^2 \tag{54}$$

$$\big(C_1^2C_2^2 - C_2^2B_1^2 - C_1^2B_2^2\big)X^2 + 2\big(C_1B_2(A_1B_2 - A_2B_1) - A_1C_1C_2^2\big)X + A_1^2C_2^2 - \big(A_2B_1 - A_1B_2\big)^2 = 0 \tag{55}$$

Aby wyznaczyć wartość Y konieczne jest rozwiązanie analogicznego równania kwadratowego (wykorzystanie w tym celu zależności (20) jest problematyczne z uwagi na sytuację, gdy $B_1 = 0$):

$$\big(C_1^2C_2^2 - C_2^2B_1^2 - C_1^2B_2^2\big)Y^2 + 2\big(C_2B_1(A_2B_1 - A_1B_2) - A_2C_2C_1^2\big)Y + A_2^2C_1^2 - \big(A_1B_2 - A_2B_1\big)^2 = 0 \tag{56}$$

Po wykonaniu tych operacji, uzyskane zostają cztery rozwiązania (X, Y). Konieczne jest określenie, które z nich jest tym właściwym. Biorąc pod uwagę rozmiar i zawiłość parametrów, analityczne rozwiązanie tego problemu mogłoby być uciążliwe. Zamiast tego, lepszym pomysłem jest podstawienie rozwiązań do układu równań (18) i sprawdzenie, które z nich go spełnia.

Siły a sygnały sterujące

W powyższym modelu suwnicy rozpatrywana była sytuacja, gdzie sygnałami sterującymi są siły (oznaczone w równaniach jako u_x i u_y). W fizycznym urządzeniu, nie jest jednak możliwe bezpośrednie manipulowanie siłami, jakie oddziałują na cięgnik i pomost. Zamiast tego, dostępne jest manipulowanie abstrakcyjnymi wartościami, które są proporcjonalne do napięć przykładanych do silników, a dopiero one powodują powstanie momentów obrotowych, które są następnie zamieniane na wymienione powyżej siły. W ”konwersji” tej kluczowe znaczenie mają momenty bezwładności i tarcia wewnątrz silników.