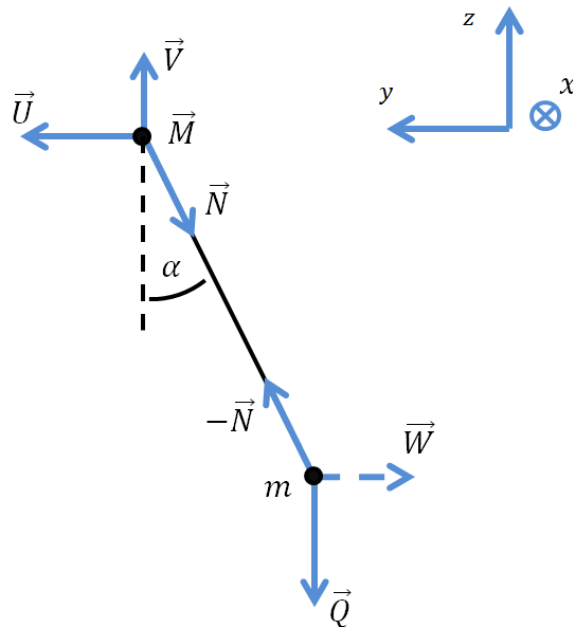


# Model matematyczny suwnicy

## Sformułowanie równań



Model opisać można za pomocą czterech równań. Pierwsze nich wynika z przedstawienia zależności między przyspieszeniem  $\vec{a}_M$  ciężnika / pomostu na suwnicy symbolizowanego przez masę  $\vec{M}$  (powód użycia wektora został przedstawiony dalej), a odpowiednimi siłami, które na niego działają:

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{N} + \vec{B} = \vec{M} \bullet \vec{a}_M \quad (1)$$

gdzie:

$\vec{U} = [u_x \ u_y \ 0]^T$  - sygnał sterujący (siła)

$\vec{V} = [0 \ 0 \ v_z]^T$  - pionowa składowa siły reakcji prowadnicy

$\vec{N} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$  - siła naciągu liny

$\vec{B} = [b_x(\dot{x}_M) \ b_y(\dot{y}_M) \ 0]^T$  - wypadkowa siła tarc i innych oporów mechanicznych

$[x_M \ y_M \ z_M]^T$  - położenie ciężnika

$\vec{a}_M = [\ddot{x}_M \ \ddot{y}_M \ 0]^T$  - przyspieszenie ciężnika

$\vec{M} = [m_C + m_F \ m_C \ 0]$  - masa ciężnika i pomostu; zastosowany został wektor w miejsce skalarnej wielkości, aby rozróżnić sytuację, gdy poruszany jest tylko ciężnik (ruch wzdłuż współrzędnej  $y$ ), a gdy poruszany jest ciężnik wraz z pomostem (wzdłuż współrzędnej  $x$ ); zakładamy brak ruchu wzdłuż współrzędnej  $z$ , więc ta składowa wektora jest równa 0

$m_C$  - masa ciężnika

$m_F$  - masa pomostu

Drugie równanie wynika z zależności między przyspieszeniem  $\vec{a}_m$  zawiesia (symbolizowanego przez masę  $m$ ), a odpowiednimi siłami, które na to obciążenie oddziałują. Wspomniane przyspieszenie jest wyznaczone względem ciągnika, więc analizowany układ odniesienia jest układem inercyjnym, który poddany jest przyspieszeniu  $\vec{a}_M$ :

$$\vec{Q} + \vec{W} - \vec{N} = m\vec{a}_m \quad (2)$$

gdzie:

$\vec{Q} = [0 \ 0 \ -mg]^T$  - siła grawitacji działająca na obciążenie

$\vec{W} = -m\vec{a}_M$  - siła bezwładności wynikająca z inercjalności układu odniesienia

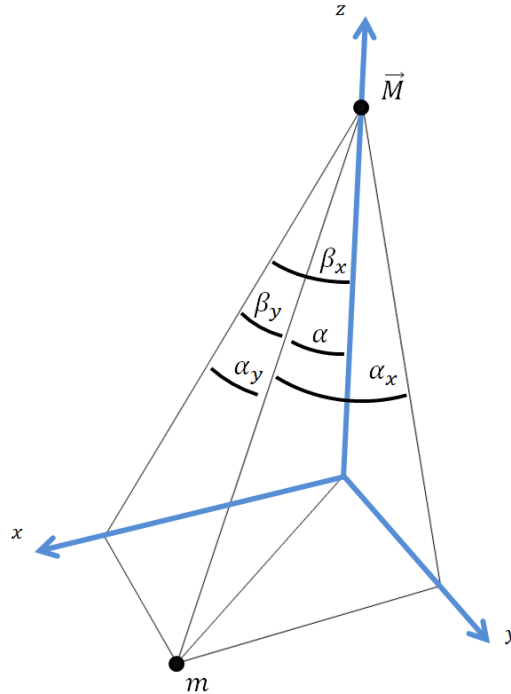
$m$  - masa obciążenia

$\vec{a}_m = [\ddot{x}_m \ \ddot{y}_m \ \ddot{z}_m]^T$  - przyspieszenie obciążenia w inercyjnym układzie odniesienia

Z braku ruchu wzdłuż prostej prowadzącej przez położenia wózka i obciążenia w analizowanym inercyjnym układzie odniesienia, a także biorąc pod uwagę fakt, że siła  $\vec{N}$  musi być równoległa do tej prostej, wynika trzecie równanie:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix} (|\vec{Q}|\cos(\alpha) + |\vec{W}|\sin(\alpha)) \quad (3)$$

Rozmieszczenie kątów  $\beta_x, \beta_y, \alpha_x, \alpha_y$  i  $\alpha$  zostało przedstawione na rysunku poniżej:



Kąty  $\alpha_x$  i  $\alpha_y$  są stosowane jako zmienne stanu z uwagi na uproszczenie i symetrię modelu. W fizycznym modelu możliwy jest natomiast pomiar kątów oznaczonych jako  $\beta_x$  i  $\beta_y$ . Oznacza to, że konieczne będzie wyznaczenie zależności umożliwiających zamianę kątów:

$$\begin{cases} \sin(\alpha_x) = \cos(\alpha_y)\sin(\beta_x) \\ \alpha_y = \beta_y \end{cases} \quad (4)$$

Wyprowadzona również została zależność pozwalająca wyznaczyć kąt  $\alpha$ :

$$\sin^2(\alpha_x) + \sin^2(\alpha_y) = \sin^2(\alpha) \quad (5)$$

Po podstawieniu równania (3) oraz wszystkich pozostałych wartości do równań (1) i (2) uzyskany zostaje następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \left( |m\vec{g}| \cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \right| \sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) \\ b_y(\dot{y}_M) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_C + m_F)\ddot{x}_M \\ m_C\ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \left( |m\vec{g}| \cos(\alpha) + m \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ 0 \end{bmatrix} \right| \sin(\alpha) \right) = m\vec{a}_m \quad (7)$$

Z równań usunąć można równania dla składowej  $z$ , gdyż nie są one potrzebne dla dalszej analizy. Po dodatkowych uproszczeniach:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left( g \cdot \cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} \right| \sin(\alpha) \right) + \begin{bmatrix} b_x(\dot{x}_M) \\ b_y(\dot{y}_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_C + m_F)\ddot{x}_M \\ m_C\ddot{y}_M \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$-\begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \left( g \cdot \cos(\alpha) + \left| \begin{bmatrix} \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{bmatrix} \right| \sin(\alpha) \right) = \vec{a}_m \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę, że w rzeczywistym modelu nie ma możliwości pomiaru liniowych przesunięć, prędkości ani przyspieszeń obciążenia, konieczne jest wyrażenie przyspieszenia  $\vec{a}_m$  przy pomocy kątów  $\alpha_x$  i  $\alpha_y$  oraz długości liny  $l$ . Położenie względne obciążenia wyrazić można wzorem:

$$\vec{x}_m = l \begin{bmatrix} \sin(\alpha_x) \\ \sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Przyspieszenie będzie zatem wyrażone wzorem:

$$\vec{a}_m = l \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_x \cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha}_x)^2 \sin(\alpha_x) \\ \ddot{\alpha}_y \cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha}_y)^2 \sin(\alpha_y) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Po podstawieniu zależności (11) do równania (9) i przyrównaniu poszczególnych składowych równań (8) i (9) otrzymany zostaje następujący układ równań:

$$u_x + mg \cdot \sin(\alpha_x) \cos(\alpha) + m \cdot \sin(\alpha_x) \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} + b_x(\dot{x}_M) = (m_C + m_F)\ddot{x}_M \quad (12)$$

$$u_y + mg \cdot \sin(\alpha_y) \cos(\alpha) + m \cdot \sin(\alpha_y) \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} + b_y(\dot{y}_M) = m_C\ddot{y}_M \quad (13)$$

$$-\ddot{x}_M - \sin(\alpha_x) \left( g \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} \right) = l(\ddot{\alpha}_x \cos(\alpha_x) - (\dot{\alpha}_x)^2 \sin(\alpha_x)) \quad (14)$$

$$-\ddot{y}_M - \sin(\alpha_y) \left( g \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} \right) = l(\ddot{\alpha}_y \cos(\alpha_y) - (\dot{\alpha}_y)^2 \sin(\alpha_y)) \quad (15)$$

## Zastosowanie obliczeń numerycznych do wyznaczenia rozwiązań

Aby możliwe było zastosowanie obliczeń numerycznych do powyższego modelu, konieczne jest przekształcenie powyższych równań, do takich postaci, aby drugie pochodne zmiennych stanu ( $\ddot{x}_M, \ddot{y}_M, \ddot{\alpha}_x, \ddot{\alpha}_y$ ) były wyrażone w zależności od pozostałych zmiennych. W przypadku przyspieszeń kątowych, przekształcenie to jest proste, gdyż sprowadza się do drobnych przekształceń równań (14) i (15):

$$\ddot{\alpha}_x = \frac{1}{l \cdot \cos(\alpha_x)} \left( l(\dot{\alpha}_x)^2 \sin(\alpha_x) - \ddot{x}_M - \sin(\alpha_x) \left( g \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} \right) \right) \quad (16)$$

$$\ddot{\alpha}_y = \frac{1}{l \cdot \cos(\alpha_y)} \left( l(\dot{\alpha}_y)^2 \sin(\alpha_y) - \ddot{y}_M - \sin(\alpha_y) \left( g \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} \right) \right) \quad (17)$$

W przypadku przyspieszeń liniowych sprawa jest jednak bardziej skomplikowana, gdyż konieczne jest rozwiązanie układu równań o postaci (ze względu na niewiadome  $X$  i  $Y$ ):

$$\begin{cases} A_1 + B_1 \sqrt{X^2 + Y^2} = C_1 X \\ A_2 + B_2 \sqrt{X^2 + Y^2} = C_2 Y \end{cases}, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0 \quad (18)$$

gdzie:

$$X = \ddot{x}_M$$

$$Y = \ddot{y}_M$$

$$A_1 = u_x + mg \cdot \sin(\alpha_x) \cos(\alpha) + b_x(\dot{x}_M)$$

$$A_2 = u_y + mg \cdot \sin(\alpha_y) \cos(\alpha) + b_y(\dot{y}_M)$$

$$B_1 = m \cdot \sin(\alpha_x) \sin(\alpha)$$

$$B_2 = m \cdot \sin(\alpha_y) \sin(\alpha)$$

$$C_1 = m_C + m_F$$

$$C_2 = m_C$$

## Rozwiązanie układu równań (18)

Rozwiązania układu równań wyrazić można w postaci:

$$X = R \cdot \cos(\gamma), \quad Y = R \cdot \sin(\gamma), \quad R \geq 0 \quad (19)$$

Po podstawieniu:

$$A_1 + B_1 R = C_1 R \cdot \cos(\gamma), \quad A_2 + B_2 R = C_2 R \cdot \sin(\gamma) \quad (20)$$

Po przekształceniu:

$$\frac{1}{C_1} \left( \frac{A_1}{R} + B_1 \right) = \cos(\gamma), \quad \frac{1}{C_2} \left( \frac{A_2}{R} + B_2 \right) = \sin(\gamma) \quad (21)$$

Po obustronnym podniesieniu do kwadratu obu równań i zastosowaniu zależności jedynki trygonometrycznej:

$$\frac{1}{C_1^2} \left( \frac{A_1}{R} + B_1 \right)^2 + \frac{1}{C_2^2} \left( \frac{A_2}{R} + B_2 \right)^2 = 1 \quad (22)$$

Po uporządkowaniu zmiennych uzyskane zostaje równanie kwadratowe:

$$\left( \frac{B_1^2}{C_1^2} + \frac{B_2^2}{C_2^2} - 1 \right) R^2 + 2 \left( \frac{A_1 B_1}{C_1^2} + \frac{A_2 B_2}{C_2^2} \right) R + \left( \frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{A_2^2}{C_2^2} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\Delta = 4 \left( \frac{A_1 B_1}{C_1^2} + \frac{A_2 B_2}{C_2^2} \right)^2 - 4 \left( \frac{B_1^2}{C_1^2} + \frac{B_2^2}{C_2^2} - 1 \right) \left( \frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{A_2^2}{C_2^2} \right) \quad (24)$$

$$\Delta = 4 \left( 2 \frac{A_1 B_1 A_2 B_2}{C_1^2 C_2^2} + \frac{A_1^2}{C_1^2} + \frac{A_2^2}{C_2^2} - \frac{A_1^2 B_2^2 + A_2^2 B_1^2}{C_1^2 C_2^2} \right) \quad (25)$$

$$\Delta = \frac{4}{C_1^2 C_2^2} \left( 2 A_1 B_1 A_2 B_2 + A_1^2 C_2^2 + A_2^2 C_1^2 - A_1^2 B_2^2 - A_2^2 B_1^2 \right) \quad (26)$$

$$\Delta = \frac{4}{C_1^2 C_2^2} \left( A_1^2 C_2^2 + A_2^2 C_1^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \right) \quad (27)$$

$$R_0 = \frac{-A_1 B_1 C_2^2 - A_2 B_2 C_1^2 \pm \sqrt{A_1^2 C_2^2 + A_2^2 C_1^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2}}{B_1^2 C_2^2 + B_2^2 C_1^2 - C_1^2 C_2^2} \quad (28)$$

Po podstawieniu zależności (21) do (19) rozwiązania równania można wyrazić w postaci:

$$X = \frac{A_1 + B_1 R_0}{C_1}, \quad Y = \frac{A_2 + B_2 R_0}{C_2} \quad (29)$$

## Równania stanu

Ostatnim krokiem przekształcenia równań do postaci możliwej do rozwiązania metodami numerycznymi jest przekształcenie ich w równania stanu, o postaci:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}, \vec{u}) \quad (30)$$

Wektor sterowań, wektor stanu i pochodną wektora stanu wyrazić można jako:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \\ \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \\ \ddot{\alpha}_x \\ \ddot{\alpha}_y \end{bmatrix} \quad (31)$$

Równania stanu przyjmują wtedy następującą postać:

$$\dot{x}_1 = x_5, \quad \dot{x}_2 = x_6, \quad \dot{x}_3 = x_7, \quad \dot{x}_4 = x_8, \quad \dot{x}_5 = X, \quad \dot{x}_6 = Y \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_7 &= x_7^2 \operatorname{tg}(x_3) - \frac{X}{l \cdot \cos(x_3)} - \frac{\operatorname{tg}(x_3)}{l} (g \cdot T + S \sqrt{X^2 + Y^2}) \\ \dot{x}_8 &= x_8^2 \operatorname{tg}(x_4) - \frac{Y}{l \cdot \cos(x_4)} - \frac{\operatorname{tg}(x_4)}{l} (g \cdot T + S \sqrt{X^2 + Y^2}) \end{aligned} \quad (33)$$

Gdzie:

$$\begin{aligned} X &= \frac{A_1 + B_1 R_0}{C_1} \\ Y &= \frac{A_2 + B_2 R_0}{C_2} \\ R_0 &= \frac{-A_1 B_1 C_2^2 - A_2 B_2 C_1^2 - \sqrt{A_1^2 C_2^2 + A_2^2 C_1^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2}}{B_1^2 C_2^2 + B_2^2 C_1^2 - C_1^2 C_2^2} \\ A_1 &= u_1 + mg \cdot \sin(x_3) T + b_x(x_5) \\ A_2 &= u_2 + mg \cdot \sin(x_4) T + b_y(x_6) \\ B_1 &= m \cdot \sin(x_3) S \\ B_2 &= m \cdot \sin(x_4) S \\ C_1 &= m_C + m_F \\ C_2 &= m_C \\ S &= \sqrt{\sin^2(x_3) + \sin^2(x_4)} \\ T &= \sqrt{1 - \sin^2(x_3) - \sin^2(x_4)} \end{aligned} \quad (34)$$

## Równania sprzężone

W celu wyznaczenia równań sprzężonych konieczne jest obliczenie wszystkich 64 pochodnych pochodnych stanów względem stanów. Szybka analiza ujawnia jednak, że większość z tych funkcji będzie zerami, a tylko niektóre będą mieć skompilowaną postać:

$\partial \dot{x}_i / \partial x_j$	$\dot{x}_1$	$\dot{x}_2$	$\dot{x}_3$	$\dot{x}_4$	$\dot{x}_5$	$\dot{x}_6$	$\dot{x}_7$	$\dot{x}_8$
$x_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_2$	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_3$	0	0	0	0	#	#	#	#
$x_4$	0	0	0	0	#	#	#	#
$x_5$	1	0	0	0	#	#	#	#
$x_6$	0	1	0	0	#	#	#	#
$x_7$	0	0	1	0	0	0	#	0
$x_8$	0	0	0	1	0	0	0	#

Pochodne w tabeli oznaczone znacznikami # mają skomplikowane postacie i zostały obliczone poniżej:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{x}_5}{\partial x_j} &= \frac{\partial X}{\partial x_j}, \quad j \in \{3, 4, 5, 6\} \\
 \frac{\partial \dot{x}_6}{\partial x_j} &= \frac{\partial Y}{\partial x_j}, \quad j \in \{3, 4, 5, 6\} \\
 \frac{\partial \dot{x}_7}{\partial x_j} &= \frac{-1}{l \cdot \cos(x_3)} \frac{\partial X}{\partial x_j} - \frac{tg(x_3)}{l} \left( g \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial S}{\partial x_j} \sqrt{X^2 + Y^2} + \left( \frac{\partial X}{\partial x_j} X + \frac{\partial Y}{\partial x_j} Y \right) \frac{S}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right), \quad j \in \{4, 5, 6\} \\
 \frac{\partial \dot{x}_8}{\partial x_j} &= \frac{-1}{l \cdot \cos(x_4)} \frac{\partial Y}{\partial x_j} - \frac{tg(x_4)}{l} \left( g \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial S}{\partial x_j} \sqrt{X^2 + Y^2} + \left( \frac{\partial X}{\partial x_j} X + \frac{\partial Y}{\partial x_j} Y \right) \frac{S}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right), \quad j \in \{3, 5, 6\} \\
 \frac{\partial \dot{x}_7}{\partial x_3} &= \frac{l \cdot x_7^2 - \frac{\partial X}{\partial x_3} \cos(x_3) - X \cdot \sin(x_3) - g \cdot T - S \sqrt{X^2 + Y^2}}{l \cdot \cos^2(x_3)} \\
 &\quad - \frac{tg(x_3)}{l} \left( g \cdot \frac{\partial T}{\partial x_3} + \frac{\partial S}{\partial x_3} \sqrt{X^2 + Y^2} + \left( \frac{\partial X}{\partial x_3} X + \frac{\partial Y}{\partial x_3} Y \right) \frac{S}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) \\
 \frac{\partial \dot{x}_8}{\partial x_4} &= \frac{l \cdot x_8^2 - \frac{\partial Y}{\partial x_4} \cos(x_4) - X \cdot \sin(x_4) - g \cdot T - S \sqrt{X^2 + Y^2}}{l \cdot \cos^2(x_4)} \\
 &\quad - \frac{tg(x_4)}{l} \left( g \cdot \frac{\partial T}{\partial x_4} + \frac{\partial S}{\partial x_4} \sqrt{X^2 + Y^2} + \left( \frac{\partial X}{\partial x_4} X + \frac{\partial Y}{\partial x_4} Y \right) \frac{S}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) \\
 \frac{\partial \dot{x}_7}{\partial x_7} &= 2x_7 tg(x_3) \\
 \frac{\partial \dot{x}_8}{\partial x_8} &= 2x_8 tg(x_4)
 \end{aligned}$$

(35)

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_j} + \frac{\partial B_1}{\partial x_j} R_0 + B_1 \frac{\partial R_0}{\partial x_j} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{1}{C_2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_j} + \frac{\partial B_2}{\partial x_j} R_0 + B_2 \frac{\partial R_0}{\partial x_j} \right) \quad (36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{x}_3} = mg \cdot (\cos(x_3)T + \sin(x_3) \frac{\partial T}{\partial x_3}), \quad \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{x}_4} = mg \cdot \sin(x_3) \frac{\partial T}{\partial x_4} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{x}_3} = mg \cdot \sin(x_4) \frac{\partial T}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{x}_4} = mg \cdot (\cos(x_4)T + \sin(x_4) \frac{\partial T}{\partial x_4}) \quad (38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{x}_5} = \frac{\partial b_x}{\partial x_5}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{x}_6} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{x}_5} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{x}_6} = \frac{\partial b_y}{\partial x_6} \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{x}_3} = m \left( \cos(x_3)S + \sin(x_3) \frac{\partial S}{\partial x_3} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{x}_4} = m \cdot \sin(x_3) \frac{\partial S}{\partial x_4} \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \mathbf{x}_3} = m \cdot \sin(x_4) \frac{\partial S}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \mathbf{x}_4} = m \left( \cos(x_4)S + \sin(x_4) \frac{\partial S}{\partial x_4} \right) \quad (41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{x}_5} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \mathbf{x}_6} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \mathbf{x}_5} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \mathbf{x}_6} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{x}_3} = \frac{\sin(x_3)\cos(x_3)}{\sqrt{\sin^2(x_3) + \sin^2(x_4)}}, \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{x}_4} = \frac{\sin(x_4)\cos(x_4)}{\sqrt{\sin^2(x_3) + \sin^2(x_4)}} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_3} = \frac{-\sin(x_3)\cos(x_3)}{\sqrt{1 - \sin^2(x_3) - \sin^2(x_4)}}, \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}_4} = \frac{-\sin(x_4)\cos(x_4)}{\sqrt{1 - \sin^2(x_3) - \sin^2(x_4)}} \quad (44)$$



### Wyznaczenie pochodnej $\partial R_0 / \partial x$

Celem jest obliczenie pochodnej po  $x$  wyrażenia:

$$R_0 = \frac{-A_1 B_1 C_2^2 - A_2 B_2 C_1^2 - \sqrt{A_1^2 C_2^2 + A_2^2 C_1^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2}}{B_1^2 C_2^2 + B_2^2 C_1^2 - C_1^2 C_2^2} \quad (45)$$

Gdzie:

$$A_1 = A_1(x), \quad A_2 = A_2(x), \quad B_1 = B_1(x), \quad B_2 = B_2(x), \quad C_1 = \text{const}, \quad C_2 = \text{const} \quad (46)$$

Poprzez zastąpienie poszczególnych części tego skompilowanego wyrażenia funkcjami pomocniczymi, możliwe jest rozbięcie problemu na kilka prostszych podproblemów:

$$R_0 = \frac{N_1 - \sqrt{N_2}}{D} \quad (47)$$

Gdzie:

$$\begin{aligned} N_1 &= -A_1 B_1 C_2^2 - A_2 B_2 C_1^2 \\ N_2 &= A_1^2 C_2^2 + A_2^2 C_1^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \\ D &= B_1^2 C_2^2 + B_2^2 C_1^2 - C_1^2 C_2^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Wtedy:

$$\frac{\partial R_0}{\partial x} = \frac{1}{D^2} \left( \left( \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{N_2}} \right) - (N_1 - \sqrt{N_2}) \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (49)$$

Gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= -C_2^2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} B_1 + A_1 \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) - C_1^2 \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} B_2 + A_2 \frac{\partial B_2}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= 2 \frac{\partial A_1}{\partial x} A_1 C_2^2 + 2 \frac{\partial A_2}{\partial x} A_2 C_1^2 - 2(A_1 B_2 - A_2 B_1) \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} B_2 + A_1 \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial A_2}{\partial x} B_1 - A_2 \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial D}{\partial x} &= 2 \frac{\partial B_1}{\partial x} B_1 C_2^2 + 2 \frac{\partial B_2}{\partial x} B_2 C_1^2 \end{aligned} \quad (50)$$

## Rozwiązanie układu równań (18) (rozwiązanie odrzucone)

Po prostych przekształceniach można zauważyć afiniczną zależność między niewiadomymi:

$$\begin{cases} B_1 B_2 \sqrt{X^2 + Y^2} = C_1 B_2 X - A_1 B_2 \\ B_1 B_2 \sqrt{X^2 + Y^2} = C_2 B_1 Y - A_2 B_1 \end{cases} \quad (51)$$

$$C_1 B_2 X - A_1 B_2 = C_2 B_1 Y - A_2 B_1 \quad (52)$$

Z drugiej strony, po podniesieniu na przykład pierwszego z równań (18) do kwadratu, możliwe jest zastosowanie tej zależności (52), aby sprowadzić zadanie do rozwiązania równania kwadratowego jednej niewiadomej:

$$C_2^2 B_1^2 Y^2 = C_2^2 (C_1 X - A_1)^2 - C_2^2 B_1^2 X^2 \quad (53)$$

$$(C_1 B_2 X - A_1 B_2 + A_2 B_1)^2 = C_2^2 (C_1 X - A_1)^2 - C_2^2 B_1^2 X^2 \quad (54)$$

$$(C_1^2 C_2^2 - C_2^2 B_1^2 - C_1^2 B_2^2) X^2 + 2(C_1 B_2 (A_1 B_2 - A_2 B_1) - A_1 C_1 C_2^2) X + A_1^2 C_2^2 - (A_2 B_1 - A_1 B_2)^2 = 0 \quad (55)$$

Aby wyznaczyć wartość  $Y$  konieczne jest rozwiązanie analogicznego równania kwadratowego (wykorzystanie w tym celu zależności (20) jest problematyczne z uwagi na sytuację, gdy  $B_1 = 0$ ):

$$(C_1^2 C_2^2 - C_2^2 B_1^2 - C_1^2 B_2^2) Y^2 + 2(C_2 B_1 (A_2 B_1 - A_1 B_2) - A_2 C_2 C_1^2) Y + A_2^2 C_1^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 = 0 \quad (56)$$

Po wykonaniu tych operacji, uzyskane zostają cztery rozwiązania  $(X, Y)$ . Konieczne jest określenie, które z nich jest tym właściwym. Biorąc pod uwagę rozmiar i złożość parametrów, analityczne rozwiązanie tego problemu mogłoby być uciążliwe. Zamiast tego, lepszym pomysłem jest podstawienie rozwiązań do układu równań (18) i sprawdzenie, które z nich go spełnia.

## Siły a sygnały sterujące

W powyższym modelu suwnicy rozpatrywana była sytuacja, gdzie sygnałami sterującymi są siły (oznaczone w równaniach jako  $u_x$  i  $u_y$ ). W fizycznym urządzeniu, nie jest jednak możliwe bezpośrednie manipulowanie siłami, jakie oddziałują naciągając i pomost. Zamiast tego, dostępne jest manipulowanie abstrakcyjnymi wartościami, które są proporcjonalne do napięć przykładanych do silników, a dopiero one powodują powstanie momentów obrotowych, które są następnie zamieniane na wymienione powyżej siły. W "konwersji" tej kluczowe znaczenie mają momenty bezwładności i tarcia wewnątrz silników.