Dokumentacja teoretyczna

Zuzanna Mróz, Aleksander Podsiad, Jakub Szypuła

3 kwietnia 2021

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Temat

Nasza praca dotyczy tematu 8., czyli liczb off-diagonal van der Waerdena online. W naszym przypadku danymi wejściowymi są:

- liczba naturalna r - liczba dopuszczalnych kolorów
- liczby naturalne $\{k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_r\}$ - długości ciągów
- liczba naturalna n

Gra odbywa się w turach. Pierwszy gracz wybiera pozycję, na którą nowy żeton ma zostać włożony do istniejącego ciągu. Może być to przed ciągiem, za nim, bądź między żetonami. Gracz drugi wybiera kolor wstawianego żetonu. Pierwszy gracz wygrywa, gdy uda mu się zmusić drugiego gracza do ułożenia monochromatycznego ciągu arytmetycznego koloru i o długości k_i dla dowolnego $i \leqslant r$, jeżeli mu się nie uda i zostanie położonych n żetonów, wygrywa gracz drugi.

1.2 Definicje i Twierdzenia

Definicja 1.1 (k_i-MAP)**.** Monochromatyczny ciąg arytmetyczny (ang. *Monochromatic Arithmetic Progression*) odpowiadający kolorowi i (dalej nazywany k_i-MAP) to ciąg długości k_i o postaci $\{x, x+d, x+2d, \dots, x+(k_i-1)d\}$ dla $d \in Z_+$ taki, że żetony na indeksach k_i-MAP mają ten sam kolor i.

Można więc sformułować cel gracza pierwszego jako doprowadzenie do takiego pokolorowania zbioru n żetonów, żeby zawierał k_i-MAP dla chociaż jednego $i \in \{1, \dots, r\}$. Zadaniem drugiego gracza jest za to niedopuszczenie do takiego pokolorowania. Trywialną obserwacją jest to, że dla $n \leqslant \sum_{i=1}^{r} k_i - 1$ gracz drugi ma strategię wygrywająca (wystarczy, że będzie wybierał kolory, które wykorzystano dotychczas mniej niż $k_i - 1$ razy). Intuicyjnie więc, im większe n, tym łatwiej wygrać graczowi pierwszemu. Tutaj ma zastosowanie twierdzenie van der Waerdena, sformułowane poniżej.

Twierdzenie 1.1 (van der Waerdena)**.** *Dla dowolnych liczb całkowitych r i k istnieje taka liczba N, że dla dowolnego r-kolorowania $\{1,\ldots,N\}$ istnieje monochromatyczny ciąg arytmetyczny o długości co najmniej k. Najmniejsze takie N nazywane jest liczbą van der Waerdena oznaczaną jako $W(r,k)$.*

Dowód. Rozważmy najprostszy nietrywialny przypadek, czyli $W(2,3)$. Pokażemy, że dla dowolnego 2-kolorowania liczb z $\{1,\ldots,325\}$ musi wystąpić 3-MAP.

Pierwszym krokiem będzie podzielenie dostępnego zbioru na 65 bloków postaci $\{5x+1,\ldots,5x+5\}$ dla $x \in \{0,\ldots,64\}$. Oznaczmy kolorowania danych pozycji literami a i b. Z zasady szufladkowej wiadomo, że dla 2-kolorowania wśród pierwszych 3 pozycji w bloku co najmniej 2 są tego samego koloru. Mamy zatem następujące możliwości (bez straty ogólności zakładamy, że to a występuje więcej razy):

a a a ? ? lub a a b ? ? lub a b a ? ? lub b a a ? ?

Pierwsza z tych możliwości tworzy 3-MAP koloru a, więc pomijamy ją w dalszych rozważaniach. Dla pozostałych możemy do pozycji pokolorowanych na a dobrać taką pozycję spośród pozostałych w danym bloku, żeby otrzymać 3 wyrazowy ciąg arytmetyczny (3-MAP) składający się z któregoś z dwóch ułożeń kolorów:

a ... a ... a lub a ... a ... b

W pierwszym przypadku mamy 3-MAP koloru a co kończy nasze rozważania. Rozpatrzmy zatem przypadek drugi. Z zasady szufladkowej wiemy, że wśród pierwszych 33 bloków są 2 pokolorowane w taki sam sposób ($2^5 = 32$ możliwości 2-kolorowania bloku długości 5). Nasza sytuacja przedstawia się następująco:

a ... a ... b $\leftarrow d \rightarrow$ a ... a ... b

Przy pewnej liczbie d oznaczającej odległość między tymi blokami. Jako, że maksymalna taka odległość w naszym wypadku wynosi 31 bloków, w ciągu 65 takich bloków znajduje się blok tworzący ciąg arytmetyczny bloków długości 3 razem z wyróżnionymi wcześniej blokami:

a ... a ... b $\leftarrow d \rightarrow$ a ... a ... b $\leftarrow d \rightarrow$? ... ? ... ?

Powstają dwie możliwości. Jeśli na ostatniej pozycji w 3. bloku z tego ciągu znajduje się kolor a to mamy 3-MAP w kolorze a:

a ... a ... b $\leftarrow d \rightarrow$ a ... **a** ... b $\leftarrow d \rightarrow$? ... ? ... **a**

Jeśli natomiast pozycja ta została oznaczona kolorem b to powstaje 3-MAP w kolorze b:

a ... a ... **b** $\leftarrow d \rightarrow$ a ... a ... **b** $\leftarrow d \rightarrow$? ... ? ... **b**

Zatem dla 2-kolorowaniu liczb z $\{1, \dots, 325\}$ musi istnieć 3-MAP, czyli zachodzi $W(2,3) \leqslant 325$. Patrząc od końca na powyższy dowód łatwo zauważamy, że liczba ta wynika właśnie z jego konstrukcji tzn.:

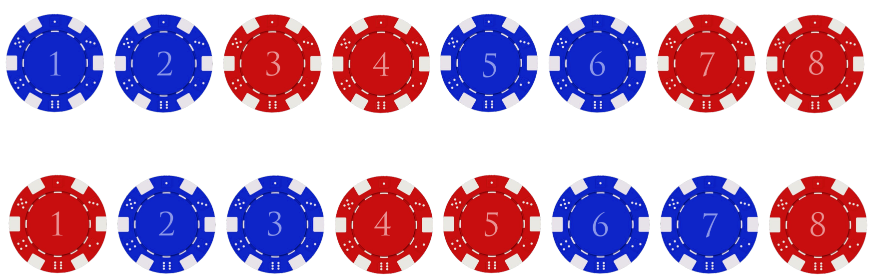
$$325 = 5 \times (2 \times 2^5 + 1)$$

Można zauważyć, że powyższe rozważania da się rozszerzyć ze względu na liczbę kolorów oraz wymaganą długość ciągu arytmetycznego jednego z tych kolorów. W tym celu należy zwiększyć liczby bloków oraz ich wielkości w odpowiednich krokach dowodu tak, żeby możliwe było przeprowadzenie analogicznych rozważań dla wybranych r i k przy $W(r,k)$. Zatem stosując indukcję ze względu na r i k można udowodnić to twierdzenie w ogólnym przypadku.

□

Obserwacja. Powyższy dowód podaje tylko górną granicę, nie jest to jednak faktyczna liczba van der Waerdena $W(2,3)$. W rzeczywistości dla $r=2$ i $k=3$ ciągi arytmetyczne nieuniknione są już przy 9 żetonach.

Na rysunku poniżej przedstawione są jedyne możliwe ułożenia dla dwóch kolorów i $k=3$ bez ciągów arytmetycznych przy 8 żetonach (z dokładnością do zamiany kolorów miejscami). Jak można łatwo zauważyć, nie ważne jakiego koloru i gdzie zostanie dołożony dziewiąty żeton, spowoduje on pojawienie się monochromatycznego ciągu arytmetycznego. Stąd też $W(2,3) = 9$.



Rysunek 1: Ustawienia dla $r=2$, $k=3$

Definicja 1.2 (liczby off-diagonal van der Waerdena)**.** Liczbami *off-diagonal* van der Waerdena nazywamy liczby takie, że dla danych $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ i r, $w(r; k_1, k_2, \dots, k_r)$ oznacza najmniejsze takie N, że niezależnie od kolorowania zbiór $\{1, \dots, N\}$ zawiera k_i-MAP dla chociaż jednego koloru $i \in \{1, \dots, r\}$.

Obserwacja. Oczywiście jeśli $\forall_{i,j \in \{1,\dots,r\}} k_i = k_j$, to $w(r; k_1, k_2, \dots, k_r) = W(r,k)$.

W przypadku naszej gry $w(r; k_1, k_2, \dots, k_r)$ to najmniejsze takie N, że niezależnie od wyborów graczy wygra gracz pierwszy.

Teraz kilka definicji pomocnych w myśleniu o naszej grze.

Definicja 1.3 (indeksy koloru)**.** Indeksami koloru i nazywamy pozycje żetonów w obecnym ciągu pokolorowane na kolor i.

Definicja 1.4 (ciąg podatny na przesunięcie)**.** Zbiór indeksów koloru i: $I = \{i_1, i_2, \ldots\}$ nazywamy podatnym na przesunięcie, jeżeli istnieje takie n_0, że $I' = \{i' : i_t \in I, \text{ jeśli } t < n_0 \text{ to } i' = i_t, \text{ wpp } i' = i_t + 1\}$ zawiera ciąg arytmetyczny o długości k_i.

Obserwacja. Powyższy warunek oznacza, że jeżeli istnieje pewien kolor i, którego zbiór indeksów jest podatny na przesunięcie, to gracz pierwszy może wygrać w następnym ruchu niezależnie od tego, jaki kolor wybierze gracz drugi (bo wstawienie na n_0-tą pozycję żetonu samo w sobie przesunie indeksy wszystkich żetonów po nim).

Definicja 1.5 (pola śmierci)**.** Polem śmierci koloru i (i-śmierci) nazywamy takie pole, na którym wstawienie żetonu koloru i oznacza zwycięstwo gracza pierwszego.

Obserwacja. Niech S_i będzie zbiorem wszystkich pól śmierci i-tego koloru. Jeżeli dla obecnej planszy $\bigcap_{i\in[r]} S_i \neq \emptyset$, to gracz pierwszy może wygrać niezależnie od ruchu gracza drugiego, wybierając dowolny z elementów $\bigcap_{i\in[r]} S_i$.

Przykładowo dla $r = 2$, oraz $k_1 = k_2 = 3$, $n > 4$ i planszy 1 2 3 4, pole między 2 a 3 jest polem śmierci obu kolorów, więc po wybraniu go przez gracza pierwszego, gracz drugi nie będzie miał ruchu nieprzegrywającego. Przy okazji można też zauważyć, że najmniejsze n przy którym gracz pierwszy ma strategię wygrywającą może być mniejsze niż liczba van der Waerdena. $W(2, 3) = 9$, ale gracz pierwszy ma strategię wygrywającą dla $n = 5$ (tj. np. wstawianie zawsze pomiędzy dwa różne kolory, a wcześniej zawsze po tej samej stronie pierwszego dodanego żetonu).

2 Pierwsza wersja strategii

2.1 Strategia

1. Sprawdź dla każdego koloru, czy pole które zostało wybrane nie jest polem i-śmierci. Jeżeli jest, nie rozważaj tych kolorów w kolejnych krokach.

2. Sprawdź dla każdego pozostałego koloru i, czy dodanie koloru i na tym polu nie czyni zbioru indeksów koloru i podatnym na przesunięcie. Jeżeli to robi, nie rozważaj tego koloru w kolejnych krokach.

3. Jeżeli nie pozostały żadne kolory, oznacza to pewną przegraną w następnym ruchu, więc wybierz dowolny kolor i zakończ. Jeżeli pozostał tylko jeden, wybierz go i zakończ. W przeciwnym wypadku kontynuuj.

4. Sprawdź dla każdego pozostałego koloru i, jakie będą pola i-śmierci dla każdego koloru po dodaniu koloru i.

5. Wybierz kolor, po którego dodaniu będzie najmniej pól śmierci. Jeżeli więcej niż jeden kolor spełnia to kryterium, to wybierz ten dla którego różnica między jego liczbą k_i, a liczbą wystąpień tego koloru jest największa. Jeżeli ponownie więcej niż jeden kolor spełnia to kryterium, wybierz dowolny z nich.

2.2 Uzasadnienie strategii

Strategia jest oparta w dużej mierze na intuicji uzyskanej dzięki testowaniu gry. Jednym z najważniejszych wniosków jaki wyciągnęliśmy po rozgrywkach testowych, jest poniższa obserwacja:

Obserwacja. Liczba dla której istnieje strategia wygrywająca dla gracza pierwszego jest (znacznie) niższa od liczby van der Waerdena.

Oznacza to, że należało przede wszystkim skupić się na "graniu na czas". Osiągamy to poprzez wybieranie ruchów, które gwarantują najmniejszy potencjał na przegranie w następnych dwóch ruchach. Najprostsza strategia dla $n \leqslant \sum_{i=1}^{r}(k_i - 1)$ polegająca na wybieraniu koloru który wystąpił co najwyżej $k_i - 2$ razy do tej pory jest powielana przez naszą strategię, ponieważ taki kolor zawsze daje 0 pól śmierci.

W trakcie zauważyliśmy też, że wybieranie nieprzegrywającego w tej rundzie ruchu często nie jest wystarczające. Np. dla trzech kolorów (czerwony, niebieski, zielony), $k = 3$, oraz planszy postaci ① ② ③ ④ jeżeli gracz pierwszy wybierze ostatnią pozycję, to gracz drugi nie przegra w tym ruchu wybierając kolor niebieski, ale doprowadzi to do sytuacji, gdzie niezależnie co zostanie w stawione między ostatnie dwie liczby w ciągu ① ② ③ ④ ⑤, gracz pierwszy wygra. Dlatego właśnie poprawnym ruchem byłoby wstawienie koloru zielonego, i stąd też nasze skupienie na podatności na przesunięcie.

Obserwacja. Możliwość wybrania dowolnej pozycji przez gracza pierwszego znacznie utrudnia przewidywanie kolejnych ruchów.

Gracz pierwszy wybiera miejsce na $l + 1$ sposobów, gdzie l to obecna długość ciągu, a gracz drugi wybiera kolor na potencjalnie r sposobów, więc jest to do $(l + 1)^r$ potencjalnych ruchów. Co prawda część będzie prowadziła do przegranej, a część doprowadzi do takiej samej planszy, nie zmienia to faktu, że tych kombinacji do rozpatrzenia jest wiele. Dlatego, zamiast rozważania wszystkich potencjalnych skutków naszych ruchów rozpatrujemy tylko te, które byłyby najbardziej szkodliwe.