Zadanie domowe 1

Aleksander Profic

29. października 2018

Główne źródła w internecie oraz literatura, z których korzystałem:

- Wykład dr Pawła Góry
- William H. Press Saul A. Teukolsky William T. Vetterling Brian P. Flannery "Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing" Second Edition
- www.math.ucla.edu/~yanovsky/Teaching/Math151B

Zadanie 1. Program wyliczający wartości własne macierzy o wymiarze N (4-10).

$$Gdy C = 1$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Gdy C = 0$$

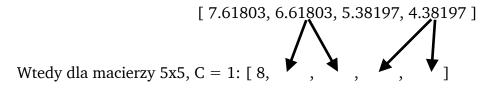
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & & 0 \\ 1 & 6 & & & \\ & 0 & 6 & 1 \\ & & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Do wyliczenia wartości własnych macierzy skorzystałem z faktoryzacji QR wraz z algorytmem QR.
- Program rozkłada macierz A na postać iloczynu dwóch macierzy Q i R, gdzie Q jest macierzą ortogonalną, a R - macierzą trójkątną górną.
 Dalej poprzez iloczyn R*Q wylicza macierz podobną do A.

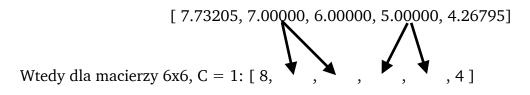
$$\begin{aligned} A_i &= Q_i R_i \\ A_{i+1} &= R_i Q_i \end{aligned}$$

• Dla wymiaru 4 już po kilku iteracjach pętli można zauważyć, że na głównej diagonali macierzy A tworzą się jej wartości własne. Im większy wymiar, tym więcej trzeba wykonać iteracji, aby obliczenia były równie dokładne.

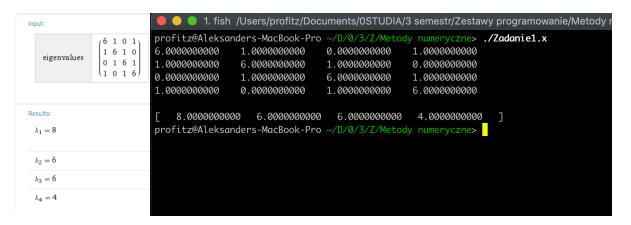
- Zauważyłem, że jeśli znamy wartości własne macierzy trójdiagonalnej (jedynki pod i nad diagonalą oraz wartość 'a' na diagonali) o wymiarze n, dla której C = 0, to można łatwo wyliczyć wartości własne macierzy o wymiarze n+1, dla której C = 1.
 - Pierwsza wartość własna jest zawsze równa **a+2**.
 - Jeśli wymiar macierzy, dla której szukamy wartości własnych jest parzysty to ostatnia wartość własna będzie równa **a 2**.
 - Kolejne wartości (po dwie) to parzyste wartości własne macierzy o 1 wymiar mniejszej, dla której C = 0.
- Przykład: $\mathbf{a} = \mathbf{6}$. Wartości własne macierzy 4x4, C = 0 wynoszą odpowiednio:



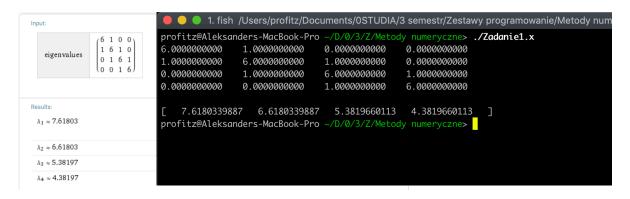
• Przykład 2: $\mathbf{a} = \mathbf{6}$. Dla macierzy 5x5, C = 0, wartości własne wynoszą odpowiednio:



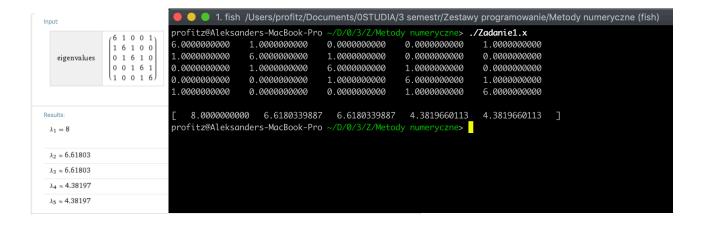
MACIERZ 4x4C = 1



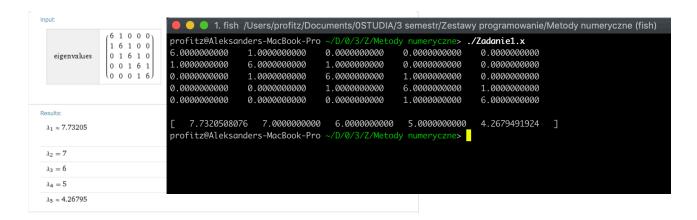
MACIERZ 4x4 C = 0



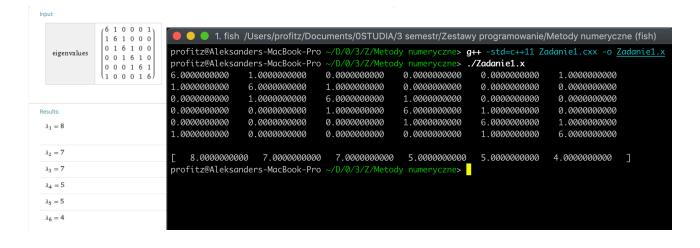
MACIERZ 5x5 C = 1



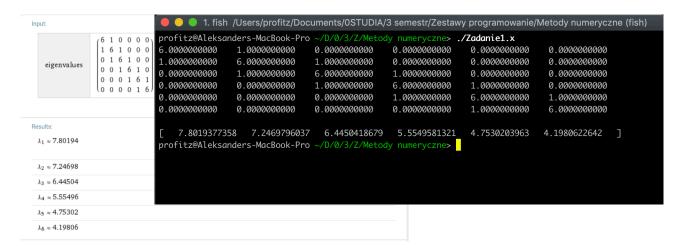
MACIERZ 5x5 C = 0



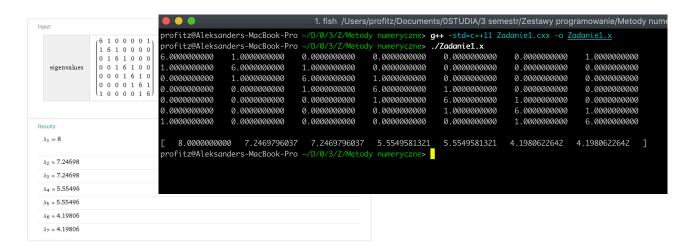
MACIERZ 6x6 C = 1



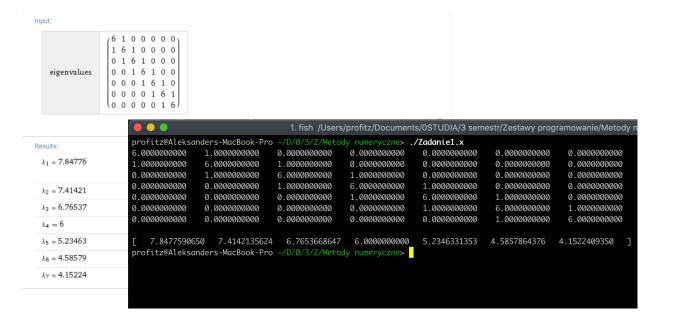
MACIERZ 6x6 C = 0



MACIERZ 7x7 C = 1



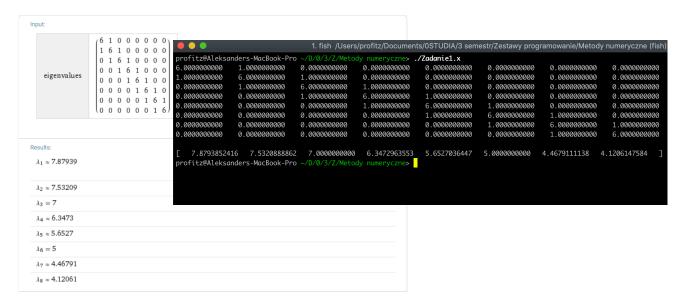
MACIERZ 7x7 C = 0



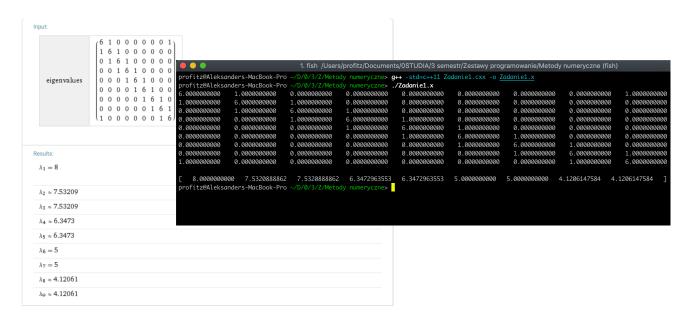
MACIERZ 8x8 C = 1



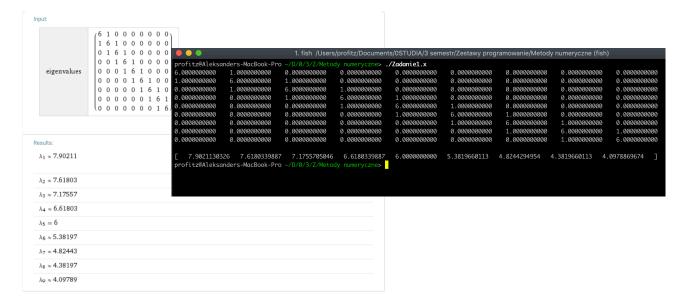
MACIERZ 8x8 C = 0



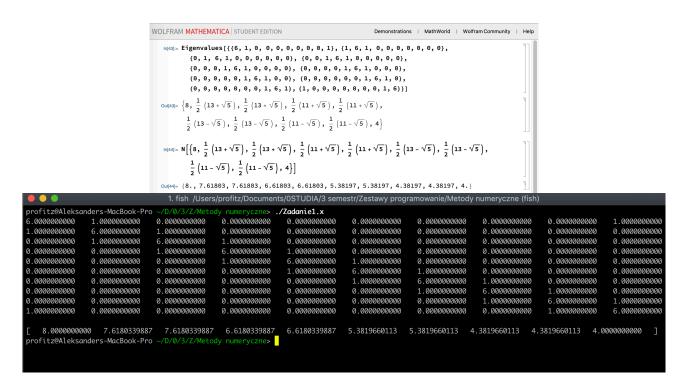
MACIERZ 9x9 C = 1



MACIERZ 9x9 C = 0



MACIERZ 10x10 C = 1



MACIERZ 10x10 C = 0

```
WOLFRAM MATHEMATICA STUDENT EDITION
                                                                                            Demonstrations | MathWorld | Wolfram Community | Help
      In(3)= Eigenvalues[{{6, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {1, 6, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
               {0, 0, 0, 0, 1, 6, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1, 6, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 6, 1, 0},
               {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 6, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 6}}]
     \ln[4] = N \left[ \left\{ 6 + \sqrt{36 + \mathsf{Root} \left[ 46\,611\,179 + 6\,824\,823\,\# \text{1} + 399\,565\,\# \text{1}^2 + 11\,692\,\# \text{1}^3 + 171\,\# \text{1}^4 + \# \text{1}^5\,\&,\,5 \right]} \right. \right],
              6 + \sqrt{36 + \text{Root} \left[46611179 + 6824823 \# 1 + 399565 \# 1^2 + 11692 \# 1^3 + 171 \# 1^4 + \# 1^5 \&, 4\right]}
               6 + \sqrt{36 + \text{Root}[46611179 + 6824823 \#I + 399565 \#I^2 + 11692 \#I^3 + 171 \#I^4 + \#I^5 \&, 3]},
              6 + \sqrt{36 + \text{Root}[46611179 + 6824823 \# 1 + 399565 \# 1^2 + 11692 \# 1^3 + 171 \# 1^4 + \# 1^5 \&, 2]},
               6+\sqrt{36+\texttt{Root}\left[46\,611\,179+6\,824\,823\,\#1+399\,565\,\#2^2+11\,692\,\#1^3+171\,\#1^4+\#2^5\,\&,\,1\right]}\ ,
               6 - \sqrt{36 + \mathsf{Root}\big[46\,611\,179 + 6\,824\,823\,\#I + 399\,565\,\#I^2 + 11\,692\,\#I^3 + 171\,\#I^4 + \#I^5\,\&,\,\mathbf{1}\big]}\ ,
               6 - \sqrt{36 + \texttt{Root}\big[46\,611\,179 + 6\,824\,823\,\# \text{1} + 399\,565\,\# \text{1}^2 + 11\,692\,\# \text{1}^3 + 171\,\# \text{1}^4 + \# \text{1}^5\,\&,\,2\big]} \ ,
               6 - \sqrt{36 + \mathsf{Root}\big[46611179 + 6824823\,\#I + 399\,565\,\#I^2 + 11\,692\,\#I^3 + 171\,\#I^4 + \#I^5\,\&,\,3\big]} \ ,
               6 - \sqrt{36 + \mathsf{Root}\big[46\,611\,179 + 6\,824\,823\,\# \mathit{I} + 399\,565\,\# \mathit{I}^2 + 11\,692\,\# \mathit{I}^3 + 171\,\# \mathit{I}^4 + \# \mathit{I}^5\,\,\&,\,\,4\,\big]}\ ,
               6 - \sqrt{36 + \mathsf{Root} \big[ 46611179 + 6824823 \, \# I + 399565 \, \# I^2 + 11692 \, \# I^3 + 171 \, \# I^4 + \# I^5 \, \&, \, 5 \big] } \, \Big\} \Big]
    Out[4] = \{7.91899, \, 7.68251, \, 7.30972, \, 6.83083, \, 6.28463, \, 5.71537, \, 5.16917, \, 4.69028, \, 4.31749, \, 4.08101\}
```

Zadanie 2. Program rozwiązujący układ równań liniowych Ax=y

- Do rozwiązania układu równań posłużyłem się metodą eliminacją Gaussa i metodą backsubstitution.
- Najpierw program zeruje kolumny pod główną diagonalą, a następnie "od końca" po
 kolei rozwiązuje równania, ponieważ w ostatnim wierszu zostaje tylko jedna zmienna.
 Potem podstawia jej wynik do poprzednich równań i powtarza czynność, aż wszystkie
 niewiadome będą miały rozwiązanie.
- Zauważyłem, że w takim układzie równań (macierz trójdiagonalna symetryczna, z jedynkami pod i nad diagonalą, oraz liczbą 'a' na diagonali) występuje zależność:

$$\mathbf{a}^*\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1} = \dim(\mathbf{A})$$

• Gdzie $\bf a$ - liczba na diagonali, x_n - ostatnia niewiadoma, x_{n-1} - przedostatnia niewiadoma, dim(A) - wymiar macierzy

```
MACIERZ 4x4 C = 0
```

MACIERZ 4x4 C = 1

```
profitz@Aleksanders-MacBook-Pro ~/D/0/3/Z/Metody numeryczne>
                                                            6.0 1.0 0.0 1.0 | 1.0
6.0 1.0 0.0 0.0 | 1.0
                                                            1.0 6.0 1.0 0.0 | 2.0
1.0 6.0 1.0 0.0 | 2.0
                                                            0.0 1.0 6.0 1.0 | 3.0
0.0 1.0 6.0 1.0 | 3.0
                                                            1.0 0.0 1.0 6.0 | 4.0
0.0 0.0 1.0 6.0 | 4.0
                                                            x1 = 0.0208333333333333
   = 0.124474348191758
                                                            x2 = 0.2708333333333333
  = 0.253153910849453
                                                            x3 = 0.354166666666667
  = 0.356602186711522
   = 0.607232968881413
                                                            x4 = 0.6041666666666667
```

MACIERZ 5x5 C = 0

MACIERZ 5x5 C = 1

```
1. fish /Users/profitz/Documents/0STUDIA/3 semestr/Zes
6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 | 1.0
                                                             1 0 6 0 1 0 0 0 0 0 1
1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 | 2.0
   1.0 6.0 1.0 0.0 | 3.0
                                                                 0.0 1.0 6.0 1.0 | 4.0
0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 | 4.0
                                                                 0.0 0.0 1.0 6.0 | 5.0
 0 0.0 0.0 1.0 6.0 | 5.0
                                                                  -0.004310344827586
   = 0.125108225108225
                                                                 = 0.271551724137931
   = 0.249350649350649
                                                                 = 0.3750000000000000
    0.378787878787879
                                                                = 0.478448275862069
    0.477922077922078
                                                                 = 0.754310344827586
     0.753679653679654
```

MACIERZ 6x6 C = 0

MACIERZ 6x6 C = 1

```
1. fish /Users/profitz/Documents/0STUDIA/3 semestr/Zestawy progression of the control of the con
```

```
6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 6.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 | 2.0 | 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 | 3.0 | 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 | 4.0 | 0.0 0.0 0.0 | 4.0 | 0.0 0.0 0.0 0.0 | 5.0 | 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.0 | 6.
```

MACIERZ 7x7 C = 0

MACIERZ 7x7 C = 1

```
● ● 1. fish /Users/profitz/Documents/0STUDIA/3 semestr/Zestawy prog
6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 | 1.0
1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 | 2.0
0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 | 3.0
0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 | 4.0
0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 | 5.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 | 6.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 | 6.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 | 6.0
2 = 0.249974513202161
x3 = 0.375148672987393
x4 = 0.499133448873484
x5 = 0.630050633771706
x6 = 0.720562748496279
x7 = 1.046572875250620
```

MACIERZ 8x8 C = 0

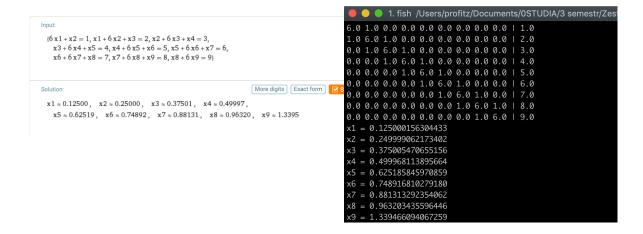
MACIERZ 8x8 C = 1

```
🕨 🌕 1. fish /Users/profitz/Documents/0STUDIA/3 semestr/Zestawy
6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 | 1.0
1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 | 2.0
 0.0 \ 1.0 \ 6.0 \ 1.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ | \ 3.0 
0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 | 4.0
0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 | 5.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 | 6.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 | 7.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 | 8.0
x1 = 0.124999180091903
x2 = 0.250004919448584
x3 = 0.374971303216591
x4 = 0.500167261251872
x5 = 0.624025129272177
x6 = 0.755681963115068
x7 = 0.841883092037417
   = 1.193019484660431
```

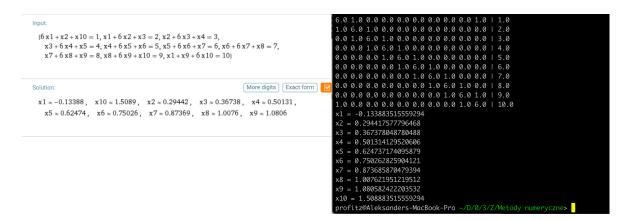
MACIERZ 9x9 C = 1

```
1. fish /Users/profitz/Documents/0STUDIA/3 semestr/Zestawy progra
                                                                                                              6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 | 1.0
\{6x1+x2+x9=1, x1+6x2+x3=2, x2+6x3+x4=3,
                                                                                                             1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 | 2.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 | 3.0
  x3 + 6x4 + x5 = 4, x4 + 6x5 + x6 = 5, x5 + 6x6 + x7 = 6, x6 + 6x7 + x8 = 7, x7 + 6x8 + x9 = 8, x1 + x8 + 6x9 = 9
                                                                                                             0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 | 4.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 | 5.0
                                                                                                            0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 0.0 | 6.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 | 7.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 1.0 0.0 | 8.0
                                                                                     More digits Exa
x1\approx -0.10799 \; , \quad x2\approx 0.28997 \; , \quad x3\approx 0.36815 \; , \quad x4\approx 0.50114 \; , \label{eq:x1}
                                                                                                             1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 6.0 | 9.0
 x5 = 0.625 \, , \quad x6 \approx 0.74886 \, , \quad x7 \approx 0.88185 \, , \quad x8 \approx 0.96003 \, , \quad x9 \approx 1.3580 \, .
                                                                                                             x1 = -0.107994923857868
x2 = 0.289974619289340
                                                                                                              x3 = 0.368147208121827
                                                                                                              x4 = 0.501142131979696
                                                                                                              x5 = 0.6250000000000000
                                                                                                              x6 = 0.748857868020305
                                                                                                              x7 = 0.881852791878172
                                                                                                              x8 = 0.960025380710660
                                                                                                              x9 = 1.357994923857868
```

MACIERZ 9x9 C = 0



MACIERZ 10x10 C = 1



MACIERZ 10x10 C = 0

