



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)»

Институт (Филиал) № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика» Кафедра 806

Группа М8О-406Б-19 Направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профиль Информатика

Квалификация: бакалавр

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

на тему «Моделирование систем уравнений химической кинетики на базе схем Рунге-Кутты»

Автор ВКРБ: Садаков Александр Александрович ()

Руководитель: Демидова Ольга Львовна ()

Консультант: Гидаспов Владимир Юрьевич ()

Консультант: - ()

Рецензент: ()

К защите допустить

Заведующий кафедрой № 806 «Вычислительная математика
и программирование»

Крылов Сергей Сергеевич ()

____ мая 2023 года

Москва 2023

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа бакалавра состоит из 31 страницы, 12 рисунков, 7 таблиц.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, МЕТОД РУНГЕ-КУТТУ, ЖЁСТКИЕ СИСТЕМЫ, СДУ, ОДУ, ХИМИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА

Объектом разработки является программа, позволяющая решать системы дифференциальных уравнений (СДУ).

Цель работы — разработка и отладка программы, выбор оптимальных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

В процессе работы были использованы явные и неявные методы Рунге-Кутты, метод QR и LU разложения матрицы, методы итераций, Зейделя и Ньютона для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В результате работы была создана программа, позволяющая моделировать уравнения химической кинетики и решать СДУ при помощи большой коллекции методов.

Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений широко используются для математического моделирования процессов и явлений в различных областях науки и техники. Переходные процессы в радиотехнике, динамика биологических популяций, модели экономического развития, движение космических объектов и так далее исследуются с помощью ОДУ и СДУ.

Данное ПО можно использовать для исследований химической кинетики. Помимо этого её можно использовать в учебных целях для решения простых ОДУ или систем, а так же в инженерном моделировании процессов газовой динамики.

Преимуществами моей работы по сравнению с аналогами являются большое число явных, неявных или вложенных методов на выбор, возможность добавления своего метода решения, быстрота вычисления результата, возможность построения правых частей ОДУ при помощи разработанного интерфейса, вывод результатов расчётов в текстовом и графическом виде.

В дальнейшем программу можно улучшить путём разработки модулей для работы с динамикой биологических популяций, моделями экономического развития, движением космических объектов и так далее.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ	4
ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
1 АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ	8
2 ПРОГРАММЫ И БИБЛИОТЕКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДУ	9
3 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ	15
4 КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДУ	17
4.1 Постановка задачи	17
4.2 Жёсткость	18
4.3 Явные схемы для решения ОДУ	18
4.4 Явные вложенные схемы для решения ОДУ	20
4.5 Неявные схемы для решения ОДУ	21
5 РЕАЛИЗАЦИЯ	23
6 РЕЗУЛЬТАТЫ	25
6.1 Графический интерфейс	25
6.2 Решение задач	25
7 МОДЕЛЬ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	31

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей выпускной квалификационной работе бакалавра применяют следующие термины с соответствующими определениями:

L^AT_EX — система компьютерной вёрстки

МАИ — Московский Авиационный Институт

S^2 — формула в списке обозначений

S^2 — С в квадрате

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

В настоящей выпускной квалификационной работе бакалавра применяют следующие сокращения и обозначения:

ВВЕДЕНИЕ

Для решения систем уравнений, описывающих химические процессы, нужно использовать методы, которые дали бы высокую точность при низких затратах по времени, потому что ЭВМ должна работать в режиме реального времени. В данной работе будет рассмотрено семейство методов Рунге-Кутты.

В это семейство входит огромное число методов, как явных, так и неявных. Преимущество явных методов заключается в производительности, так как им не нужно решать на каждом шаге системы алгебраических уравнений. Отсюда следует, что использование явных методов даёт больший выигрыш по времени, чем использование более производительного оборудования и распараллеливания. Главным преимуществом неявных методов является наличие устойчивости (А-устойчивости, L-устойчивости и так далее), в результате чего полученное ими решение является гарантированно устойчивым, в отличие от явных. Однако некоторые СДУ, описывающие химические процессы можно решить и явными методами с требуемой точностью, потому что свойства А и L-устойчивости являются лишь достаточным, но не необходимым условием эффективности решения, поэтому нельзя использовать только те или иные методы. Выбрать оптимальный метод можно путём целевого тестирования.

Результат работы представляет собой программу для работы с СДУ при помощи множества методов семейства Рунге-Кутты. В работе реализовано 18 явных методов до 6 порядка точности, 9 вложенных, включая схему Дормана-Принца 4-5 порядка, 19 неявных до 6 порядка. Для решения неявных схем используются схемы первого порядка (простой итерации, Зейделя) и второго порядка (метод Ньютона), причём для обращения матрицы применялся метод LU-разложения. Для дифференцирования функции при построении матрицы Якоби для метода Ньютона использовались формулы с 4 порядком точности. При необходимости можно использовать формулы с меньшим порядком.

Для того чтобы определить, какие методы можно использовать, был реализован алгоритм вычисления числа жёсткости СДУ, использующий QR-разложение матрицы системы для поиска всех собственных чисел. Систему можно считать жёсткой, если для неё коэффициент жёсткости намного больше единицы (чёткой границы между жёсткой и не жёсткой

системой нет, поэтому пользователь может выбрать это значение сам, например 100). Тогда для расчёта применялись только неявные схемы Рунге-Кутты.

Для удобного отображения результатов вычислений был создан генератор pdf-отчётов, в которых представлена информация о решаемой задаче, метод её решения и таблица Бутчера для этого метода, график, отображающий решение численными методами и аналитическое (при наличии) и время, затраченное на работу программы. Если задача решалась при помощи жёстких схем, то дополнительно выводится информация о количестве итераций. Так же, при необходимости, может быть построен приближающий полином. Кроме этого, реализована возможность простого добавления новых методов решения на случай, если пользователю нужно решение каким-либо специфическим методом, которого нет в программе. При помощи пользовательского интерфейса можно использовать разработанную программу как для решения ОДУ, так и в целях обучения.

Программа тестировалась как на задачах химической кинетики, так и на модельных уравнениях и дала удовлетворительные результаты.

1 АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

Говоря о применении ОДУ легче найти области, где они не применяются. Их используют в физике для моделирования процессов, начиная от баллистики и заканчивая перемещением по твёрдой поверхности, биологии для прогнозирования динамики биологических популяций, тонких технологических процессах и так далее 1. Прогнозировать те или иные процессы можно как при помощи натуральных экспериментов, так и с помощью численного моделирования.



Рисунок 1 – Области применения ОДУ

Для численного моделирования тех или иных процессов нужно использовать специализированные программы и библиотеки, которых на сегодняшний день предоставлено большое количество, однако все они имеют свои ограничения и недостатки.

2 ПРОГРАММЫ И БИБЛИОТЕКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДУ

Программ для решения ОДУ достаточно много. Рассмотрим детально достоинства каждой из них 2.



Рисунок 2 – Программы и библиотеки

Наиболее распространённый программный продукт — пакет программ для решения задач технических вычислений MATLAB. Первый выпуск состоялся в 1984 году. Пакет используют более миллиона инженерных и научных работников, он работает на большинстве современных операционных систем, включая Linux, macOS и Windows. Разработчиком является американская компания The MathWorks. Написан с использованием языков программирования C, C++, Fortran, Java.

Для решения ОДУ MATLAB предлагает следующие функции:

- ode23() — метод решения нежёстких дифференциальных уравнений; метод низкого порядка,
- ode45() — метод решения нежёстких дифференциальных уравнений; метод среднего порядка,
- ode113() — метод решения нежёстких дифференциальных уравнений; метод переменного порядка,
- ode15s() — метод решения жёстких дифференциальных уравнений; метод переменного порядка,
- ode23s() — метод решения жёстких дифференциальных уравнений; метод низкого порядка.

Матлаб имеет свой собственный язык программирования для подготовки данных и большую библиотеку для работы с матрицами, построения графиков и численных вычислений. Однако он является довольно тяжёлым, имеет низкую скорость работы и не подходит для решения задач химической кинетики. Помимо этого, в бесплатной версии недостаточно инструментов, а цена полной версии несколько завышена.

Альтернативу пакету MATLAB может составить отечественная программа SMath Studio, разработанная ООО "ЭсМат". SMath Studio предназначена для вычисления математических выражений и построения графиков функций. Бета-версия была выпущена в 2018 году и работа над обновлениями продолжается в настоящее время. Работа с интерфейсом программы напоминает работу с обычным листом бумаги, так как все математические выражения в ней записываются не в строчку текстом, а в графическом, удобном для человека, виде (по аналогии с системой Mathcad).

Для решения ОДУ в SMath Studio реализованы следующие методы:

- неявный метод Эйлера (2-го порядка)
- явный метод Рунге-Кутты (классический 4-го порядка)

Ограниченное количество методов для решения ОДУ не позволяет использовать её для решения жёстких задач и задач химической кинетики в частности.

В дополнение предыдущей программы можно посмотреть библиотеку Intel ODE Solver Library. Библиотека написана на языке C со всеми вытекающими отсюда зависимостями. Доступны 32- и 64-разрядные версии.

В этой библиотеке следует выделить следующие программы и функции:

- `rkm9st()` — функция для решения нежёстких и средне-жёстких систем ОДУ с использованием явного метода, который основан на методе Мерсона 4-го порядка и многоступенчатом методе 1-го порядка, включающем до 9 этапов с контролем устойчивости,
- `mk52lfn()` — специализированная процедура для решения жёстких систем ОДУ с использованием неявного метода, основанного на L-стабильном (5,2)-методе с числовой матрицей Якоби, которая вычисляется с помощью процедуры,
- `mk52lfa()` — специализированная программа для решения жёстких систем ОДУ с использованием неявного метода, основанного на L-stable (5,2)-методе с численным или аналитическим вычислением

матрицы Якоби. Пользователь должен предоставить процедуру для этого вычисления,

- `rk9mkn()` — специализированная процедура для решения систем ОДУ с переменной или априори неизвестной жёсткостью; автоматически выбирает явную или неявную схему на каждом шаге и при необходимости вычисляет числовую матрицу Якоби,
- `rk9mka()` — специализированная подпрограмма для решения систем ОДУ с переменной или априори неизвестной жёсткостью; автоматически выбирает явную или неявную схему на каждом шаге. Пользователь должен предоставить процедуру для численного или аналитического вычисления матрицы Якоби.

У данной библиотеки есть хороший набор для решения нежёстких задач, есть автоматический выбор явного или неявного шага на каждой итерации, однако для решения жёстких задач требуется дополнительно вводить Якобиан, что достаточно проблематично.

GNU Scientific Library (или GSL) — это библиотека, написанная на языке программирования C для численных вычислений в прикладной математике и науке. GSL является частью проекта GNU (Массачусетский технологический институт, США) и распространяется на условиях лицензии GPL. Первый релиз состоялся в 1996 году.

GSL используется, в частности, в таком программном обеспечении, как PSPP и Perl Data Language.

Следует отметить следующие достаточно хорошо известные явные методы:

- `rk2()` — явный метод Рунге-Кутты (2, 3).
- `rk4()` — явный 4-й порядок (классический) Рунге-Кутты. Оценка погрешности осуществляется методом удвоения шага.
- `rkf45()` — явный метод Рунге-Кутты-Фельберга (4, 5).
- `rkck()` — явный метод Рунге-Кутты Кэш-Карпа (4, 5).
- `rk8pd()` — явный метод Рунге-Кутты Принца-Дорманда (8, 9).

Среди неявных методов можно отметить методы, требующие построение Якобиана до 4-го порядка и большой набор многошаговых методов типа Адамса:

- `rk1imp()` — неявный гауссовский метод Рунге-Кутты первого порядка. Также известен как неявный метод Эйлера или обратный

метод Эйлера. Оценка погрешности осуществляется методом удвоения шага. Для этого алгоритма требуется якобиан.

- `rk2imp()` — неявный гауссовский метод Рунге-Кутты второго порядка. Также известно как неявное правило средней точки. Оценка погрешности осуществляется методом удвоения шага. Для этого шагового двигателя требуется якобиан.
- `rk4imp()` — неявный гауссов Рунге-Кутта 4-го порядка. Оценка погрешности осуществляется методом удвоения шага. Для этого алгоритма требуется якобиан.
- `bsimp()` — неявный метод Булирша-Стоера (многошаговый). Этот метод, как правило, подходит для сложных задач. Для этого шагового двигателя требуется якобиан.
- `msadams()` — линейный многоступенчатый метод Адамса с переменным коэффициентом в форме Nordsieck. Этот шаговый процессор использует явные методы Адамса-Башфорта (предсказатель) и неявные методы Адамса-Моултона (корректор) в режиме функциональной итерации $P(EC)^m$. Порядок методов динамически варьируется от 1 до 12.
- `msbdf()` — метод линейной многоступенчатой формулы обратного дифференцирования с переменным коэффициентом (BDF) в форме Nordsieck. Этот шаговый преобразователь использует явную формулу BDF в качестве предиктора и неявную формулу BDF в качестве корректора. Для решения системы нелинейных уравнений используется модифицированный итерационный метод Ньютона. Порядок методов динамически варьируется от 1 до 5. Этот метод, как правило, подходит для сложных задач. Для этого шагового двигателя требуется якобиан.

В данной библиотеке большое количество как явных, так и неявных методов, но для неявных методов как и в библиотеке Intel ODE Solver Library требуется самостоятельное вычисление Якобиана. (Недостаток именно библиотечный вид, надо писать модули обращения и модули обработки результата)

Следующей библиотекой для рассмотрения является DotNumerics. Она включает в себя числовую библиотеку для .NET. Библиотека написана на чистом C# и содержит более 100 000 строк кода с самыми передовыми

алгоритмами для линейной алгебры, дифференциальных уравнений и задач оптимизации. Библиотека линейной алгебры включает CSLapack, Cabelas и CSEispack, эти библиотеки являются переводом с Fortran на C# LAPACK, BLAS и EISPACK соответственно.

Основные решатели для нежёстких систем:

- ExplicitRK45() — решает задачу с начальными значениями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, используя явный метод Рунге-Кутты порядка (4)5,
- AdamsMoulton() — решает начальную задачу для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием метода Адамса-Моултона.

Решатели для жёстких систем:

- ImplicitRK5() — решает начальную задачу для жёстких обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием неявного метода Рунге-Кутты порядка 5,
- GearsBDF() — решает начальную задачу для жёстких обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием многошагового метода BDF Gear.

В данной библиотеке представлено небольшое число методов решения ОДУ до 5 порядка точности. В основном эта библиотека обслуживает не только задач дифференциальных уравнений, но и задачи линейной алгебры, в том числе задачи оптимизации, поэтому она содержит мало методов для решения моей задачи.

Отметим так же систему Wolfram Alpha. Это база знаний и набор вычислительных алгоритмов, вопросно-ответная система.

Wolfram Alpha способен переводить данные между различными единицами измерения, системами счисления, подбирать общую формулу последовательности, находить возможные замкнутые формы для приближенных дробных чисел, вычислять суммы, пределы, интегралы, решать уравнения и системы уравнений, производить операции с матрицами, определять свойства чисел и геометрических фигур. Отдельного внимания стоит парсинг математических выражений

В частности система Wolfram Alpha способна решать ОДУ стандартными явными методами:

- метод Эйлера (2-го порядка)

- метод средних точек, модифицированный метод Эйлера
- метод Хойна, вариант модифицированного метода Эйлера
- метод Рунге-Кутты 3-го порядка
- метод Рунге-Кутты (классический 4-го порядка)
- метод Рунге-Кутты-Фалберга
- метод Дормана-Принца

Система Wolfram Alpha является облачной. Это означает, что для работы с ней необходимо постоянное подключение к интернету. Ещё одним недостатком является наличие платного функционала и отсутствие готовых модулей для создания и решения СДУ химической кинетики.

Несмотря на большое число программ и библиотек для решение ДУ, появилась потребность в создании программы (с большим выбором расчетных схем) для решения (в то числе и) жёстких систем ДУ для задач химической кинетики.

3 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

Целью работы является создание комплекса программ для решения ОДУ и СДУ и её дальнейшая отладка на модельных задачах. Безусловно, в этот программный комплекс должны входить различные явные и неявные методы решения ОДУ, графический пользовательский интерфейс, парсер математических выражений и многое другое.

В связи с этим можно сформулировать следующие задачи 3:

- а) Выполнить обзор существующих программ для решения ОДУ, выявить их основные недостатки;
- б) Реализовать стандартный набор явных, неявных, вложенных, диагональных, а так же многошаговых методов решения ОДУ;
- в) Разработать парсер математических выражений, который можно использовать для ввода задачи Коши. Адаптировать парсер для применения его в задачах химической кинетики, в частности для ввода химических компонент, химических реакций, скоростей химических реакций и другой информации, необходимой для моделирования химической кинетики;
- г) Разработка графического пользовательского интерфейса, дизайна программы и инструментов для генерации pdf-отчётов о решениях задач;
- д) Выбрать оптимальные по времени и точности схемы для моделирования различных химических процессов на основе разработки ПО для решения систем ОДУ явными и неявными методами;
- е) Сравнение с существующими программами для решения ОДУ и СДУ.

Задачи

- Обзор существующих программ для решения ОДУ
- Реализация явных, неявных, вложенных методов решения ОДУ
- Разработка парсера математических выражений химической кинетики и инструментов для работы с ними
- Интеграция схем для моделирования химических реакций в разрабатываемое ПО
- Разработка графического пользовательского интерфейса, дизайна программы и инструментов для генерации pdf-отчётов о решениях задач
- Выбрать оптимальные по времени и точности схемы
- Сравнение с существующими программами для решения ОДУ и СДУ

Рисунок 3 – Основные задачи проекта

После выполнения данных задач, можно приступить к разработке отдельных модулей для работы с задачами физики, биологии и т.д. Так же планируется работа над кроссплатформенностью.

4 КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДУ

4.1 Постановка задачи

Программа, над которой ведётся работа, предназначена для решения дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений с начальными значениями, то есть задачи Коши — классической математической постановки. Сама по себе задача достаточно сложная и изучалась уже более ста лет.

Конкретная прикладная задача сводится к решению дифференциального уравнения произвольного порядка 1:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad (1)$$

Данное уравнение произвольного порядка n может быть преобразовано в систему из n дифференциальных уравнений первого порядка путём замены переменных. Пример 2 демонстрирует преобразование задачи Коши второго порядка в систему из 2-х уравнений первого порядка, путём замены y' на z :

$$\begin{cases} z' = f(x, y, y', y'') \\ y' = z \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (2)$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что задача с начальными условиями при непрерывных правых частях, удовлетворяющих условию Липшица по всем переменным, имеет единственное решение.

Методы решения дифференциальных уравнений можно классифицировать на точные, приближенные и численные. Точные методы, которые изучаются в курсе дифференциальных уравнений и могут быть применены к очень ограниченному кругу уравнений, позволяют выразить

решение дифференциальных уравнений либо через элементарные функции, либо с помощью квадратур от элементарных функций. К приближенным методам относятся приемы, в которых решение дифференциального уравнения получается, как предел некоторой последовательности, элементы которой построены с помощью элементарных функций. Численные методы представляют собой алгоритмы вычисления приближенных значений искомой функции в узлах.

Такие задачи могут отличаться между собой сложностью решения. Так одни задачи можно решать при помощи группы явных методов и получать достаточно точное решение. Другие же задачи, в которых присутствует резкий скачок градиента функции, решать приходится с использованием неявных схем. Такие задачи называются жёсткими.

4.2 Жёсткость

Будем считать линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений $u' = Au$ (A — постоянная матрица $n \times n$) жёсткой, если выполняются следующие требования:

- а) все собственные числа λ_i матрицы A имеют отрицательную действительную часть, т. е. $Re\lambda_i < 0, i = 1, 2, \dots, n$;
- б) число

$$S = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |Re\lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq n} |Re\lambda_k|} \quad (3)$$

велико

Число S называется жёсткостью задачи.

Для жёстких задач число жёсткости должно быть намного больше единицы, однако чёткой границы между жёсткой и нежёсткой задачей нет. Так модельные уравнения с числом жёсткости более 100 уже дают небольшие скачки погрешности решения. В задачах химической кинетики число жёсткости может быть более 10^6 .

4.3 Явные схемы для решения ОДУ

Для решения жёстких и нежёстких задач можно использовать различные семейства методов. В данной работе будет рассмотрено семейство одношаговых методов Рунге-Кутты.

В семейство методов Рунге-Кутты входит огромное число схем, как явных, так и неявных. Все эти методы представлены в виде таблиц Бутчера.

Явные методы обладают нижней диагональной формой таблицы Бутчера и позволяют решать задачи обычными маршевыми методами. В связи с тем, что явные методы являются условно устойчивыми, работа с ними сильно зависит от размера шага интегрирования и для достижения заданной точности требуют достаточно мелкий шаг интегрирования и повторного вычисления для повышения порядка точности процедурой Рунге-Ромберга.

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = \sum_{i=1}^p b_i K_i^k,$$

$$K_i^k = hf \left(x_k + c_i h, \quad y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j^k \right).$$

$$i = 2, 3, \dots, p.$$

c_1	0					
c_2	a_{21}	0				
c_3	a_{31}	a_{32}	0			
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}		a_{ss-1}	0
	b_1	b_2	b_3		b_{s-1}	b_s

Рисунок 4 – Общий вид явных схем

Примеры таблиц Бутчера для явных методов:

Таблица 1 – Таблица Бутчера для метода явного метода Рунге-Кутты 4-го порядка

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Таблица 2 – Таблица Бутчера для метода явного метода Рунге-Кутты 6-го порядка

0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	0	0	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	0	0
1	$-\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{7}$	-1	7	0
0	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$

4.4 Явные вложенные схемы для решения ОДУ

В связи с перечисленными недостатками обычных явных схем, есть смысл применить явные вложенные схемы, которые базируются так же на нижней треугольной матрице Бутчера, обладают маршевым методом решения и позволяют на базе одних и тех же поправочных коэффициентов моделировать решение с разным порядком точности и тем самым либо увеличивать шаг интегрирования, либо уменьшать.

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i, \quad y_{k+1}^* = y_k + h \sum_{i=1}^s b_i^* K_i,$$

$$K_i = f \left(x_k + c_i h, \quad y_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j \right), i = 1, \dots, s,$$

c_1	0					
c_2	a_{21}	0				
c_3	a_{31}	a_{32}	0			
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}		a_{ss-1}	0
y	b_1	b_2	b_3		b_{s-1}	b_s
y^*	b_1^*	b_2^*	b_3^*		b_{s-1}^*	b_s^*

Рисунок 5 – Общий вид явных вложенных схем

Примеры таблиц Бутчера для вложенных методов:

Таблица 3 – Таблица Бутчера для метода Фалберга 2-го порядка

0	0	0	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

Таблица 4 – Таблица Бутчера для метода Дормана-Принца 4-го порядка

0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0	0	0	0	0
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$	0	0	0	0
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$\frac{7}{8}$	0	0	0
1	$-\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{7}$	-1	7	0	0
0	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$	0
0	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$	0

4.5 Неявные схемы для решения ОДУ

К наиболее сложным методам можно отнести группу неявных схем. Плотная заполненная таблица Бутчера не позволяет использовать маршевые методы и принуждает решать систему алгебраических уравнений на каждом шаге интегрирования, что вызывает определённые сложности у разработчиков.

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

$$K_i = f\left(x_k + c_i h, y_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j\right), i = 1, \dots, s$$

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2s-1}	a_{2s}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}		a_{3s-1}	a_{3s}
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{s3}		a_{ss-1}	a_{ss}
	b_1	b	b		b_{s-1}	b_s

Рисунок 6 – Общий вид неявных схем

Примеры таблиц Бутчера для неявных методов:

Таблица 5 – Таблица Бутчера для метода неявного метода Гаусса 4-го порядка

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Таблица 6 – Таблица Бутчера для метода неявного метода Гаусса 6-го порядка

0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	0	0	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	0	0
1	$-\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{7}$	-1	7	0
0	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$

Помимо перечисленных групп методов, существуют так же диагональные неявные методы, неявные вложенные, неявные методы без одной строки или столбца

Диагональные неявные схемы (для сложных не работают)

Методы без одной строки или без одного столбца

Диагональные вложенные

УСТОЙЧИВОСТЬ

5 РЕАЛИЗАЦИЯ

Проанализировав все вышеперечисленные программы

Таким образом в программу вошли классические алгоритмы численных методов, такие как методы матричной алгебры, методы Ньютона и так далее. Для её написания были использованы язык программирования C++, фреймворк QT и система сборки проектов CMake 7. Для поиска ошибок и утечек памяти применилась связка из отладчика GDB и профилировщика Valgrind.

Стек технологий

- ☐ Интегрированная среда разработки Visual Studio Code
- ☐ Язык программирования C++
- ☐ Система сборки проектов Cmake 3.8
- ☐ Фреймворк QT для графического пользовательского интерфейса
- ☐ Компилятор GNU/MinGW g++

Численные методы

- ☐ Методы Ньютона для уравнений и систем уравнений
- ☐ Итерационные методы для уравнений и систем уравнений
- ☐ Методы матричной алгебры
- ☐ QR разложение матрицы для поиска собственных чисел
- ☐ Численное дифференцирование

Рисунок 7 – Технологии и алгоритмы

В данной программе реализован большой перечень как явных так и неявных методов с различным порядком точности.

Вычисление жёсткости

Коэффициентом жёсткости задачи называется отношение максимального модуля действительной части собственных чисел матрицы системы к минимальной при условии, что все действительные части собственных чисел меньше нуля.

Для вычисления коэффициента жёсткости сначала по данной задаче строится матрица-система. Собственные числа данной матрицы находятся при помощи алгоритма QR-разложения.

дополнительные методы ()кью-ар методы решения слау

Для неявных методов используются алгоритмы итераций Ньютона, Зейделя и простой итерации.

Кью-Ар разложение

хоть метод ньютона и второго порядка но применим и для методов

Описание работы программы

Парсер математических выражений

При режиме работы с задачей Коши от пользователя требуется ввести задачу и аналитическое решение (при наличии).

Для обработки строки с задачей используется парсер математических выражений. Проводится лексический анализ строки и строится дерево математических выражений, содержащее функции в качестве узлов и числовые константы с переменными в качестве листьев. Интерфейс парсера позволяет использовать его как функтор, принимающий либо одну переменную, либо массив переменных.

6 РЕЗУЛЬТАТЫ

6.1 Графический интерфейс

6.2 Решение задач

Примеры решения задач Коши

Задача Коши задаётся как дифференциальное уравнение n -го порядка и его первые n производных. Здесь показан пример решения нежёсткой задачи Коши 2-го порядка с использованием явного метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

$$\begin{cases} y'' + y - \sin(3x) = 0 \\ y(-2) = -1.701 \\ y'(-2) = -0.022 \\ x \in [-2, 10] \end{cases}$$

Аналитическое решение:

$$y(x) = \cos(x) + \frac{11}{8}\sin(x) - \frac{\sin(3x)}{8}$$

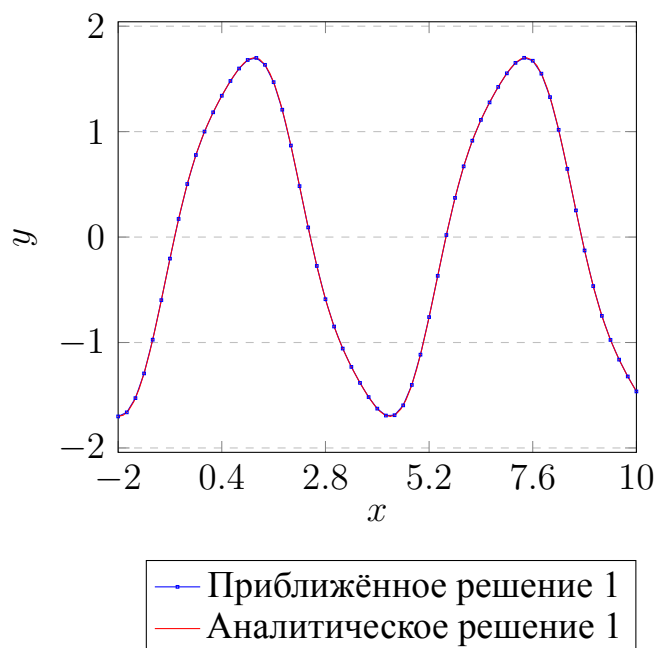


Рисунок 8 – Решение задачи №1

Система дифференциальных уравнений порядка n представлена в виде

n дифференциальных уравнений 1-го порядка с начальным условием. В данном примере демонстрируется решение нежёсткой системы из двух уравнений с использованием вложенного метода Фалберга 2-го порядка.

$$\begin{cases} y' = -12y + 10z^2 \\ z' = y - z - z^2 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \\ x \in [0, 3] \end{cases}$$

Аналитическое решение:

$$y(x) = \exp(-2x)z(x) = \exp(-x)$$

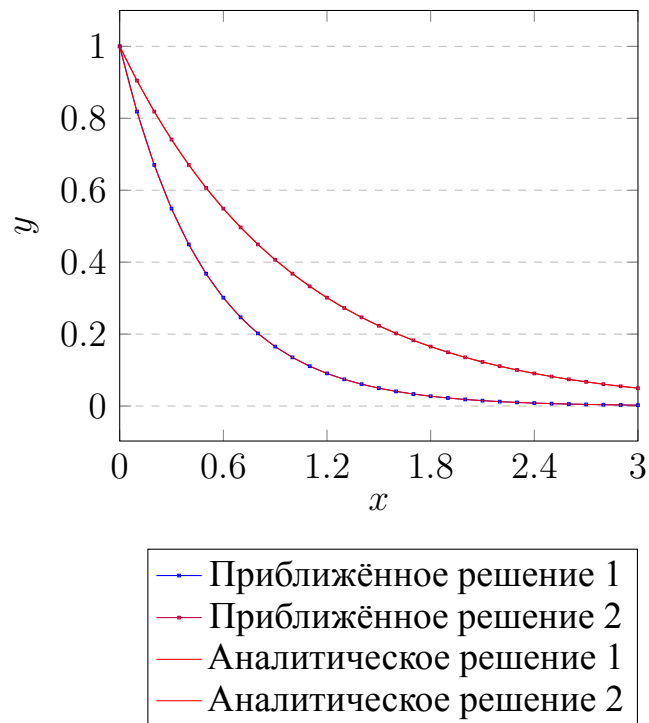


Рисунок 9 – Решение задачи №2

Отдельного внимания стоит пример решения жёсткой задачи уравнений Ван дер Поля.

$$\begin{cases} y'' - 500(1 - y^2)(y + y') = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \\ x \in [0, 3] \end{cases}$$

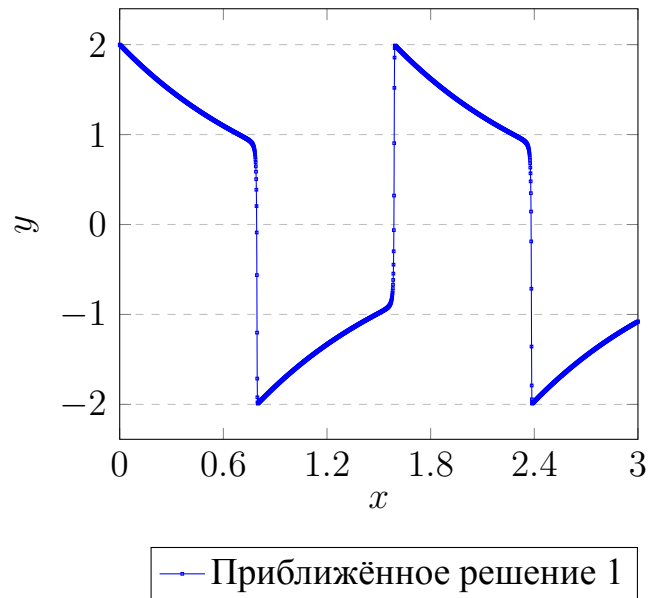


Рисунок 10 – Решение задачи №3

Коэффициент жёсткости данной задачи 500 и по графику видно, что жёсткость таких задач заключается в резком скачке градиента функции. решение было получено благодаря неявному методу Лобатто 6-го порядка с полной таблицей Бутчера.

7 МОДЕЛЬ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

В задачах химической кинетики на вход программе поступают не дифференциальные уравнения, а список химических уравнений, начальные температура и давление и описание примесей при их наличии.

В данном примере показано моделирование пяти реакций с начальными концентрациями $\nu_{H_2} = 0.5$ и $\nu_{O_2} = 0.5$, нормальным атмосферным давлением и температурой $T = 2300K$

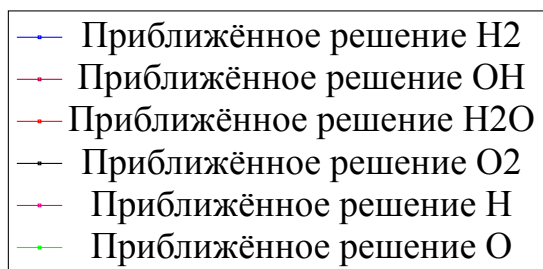
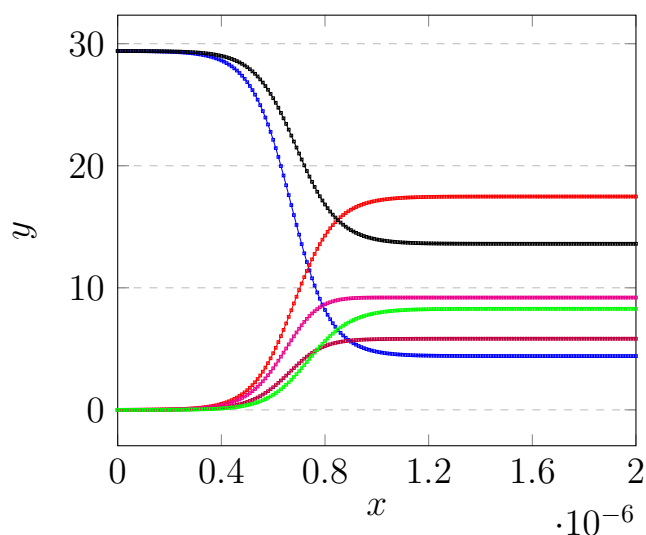
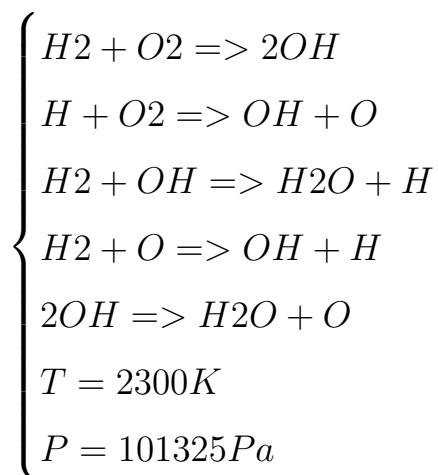


Рисунок 11 – Решение задачи хим. кинетики

По графику видно, что реакция протекает примерно за 1 микросекунду после чего система приходит в равновесие.

По оси X указано время, по оси Y — мольно-массовые концентрации веществ. Так как концентрации H_2 и O_2 заданы по 0.5, то их мольно-массовые концентрации оказались равны примерно 29.3991 моль/кг.

Для решения данной задачи использовался неявный метод Гаусса 6-го порядка с итерациями Зейделя, однако для неё можно использовать и другие неявные методы. В следующей таблице приведены сравнения некоторых неявных методов для решения данной задачи по времени и количеству шагов.

Таблица 7 – Таблица сравнения методов

Метод	Время работы (мс)	Количество шагов	Точность
Неявный Гаусс 6-го порядка	254	35	0.001
Неявный Гаусс 4-го порядка	11	35	0.001
Неявный Гаусс 2-го порядка	235	50	0.001
Явный Рунге-Кутта 6-го порядка	92	100	0.001
Явный Рунге-Кутта 4-го порядка	55	100	0.001
Вложенный Дормана-Принца 4-го порядка	191	200	0.001

В следующем примере показано моделирование семи реакций с начальными концентрациями $\nu_{H_2} = 0.5$ и $\nu_{O_2} = 0.5$, нормальным атмосферным давлением и температурой $T = 2300K$. Данный пример отличается от предыдущего наличием добавки M в последних двух реакциях.

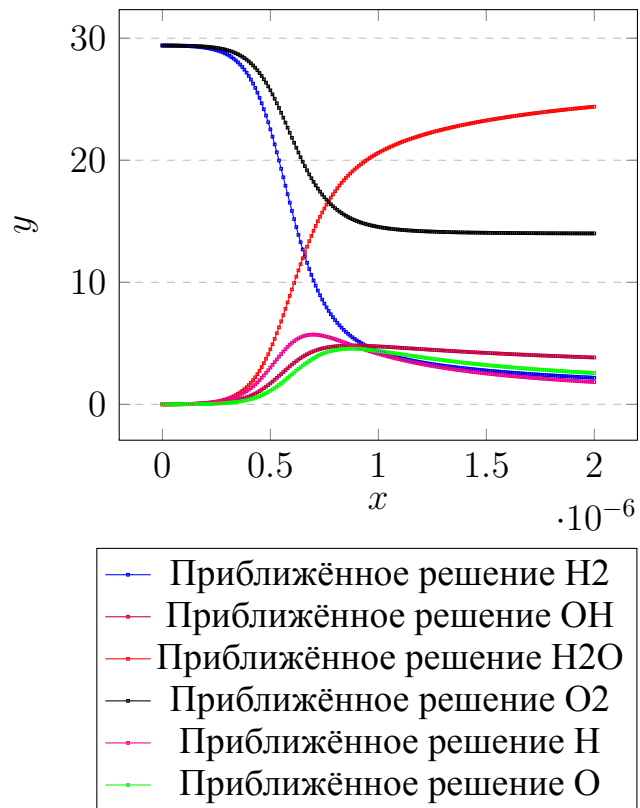
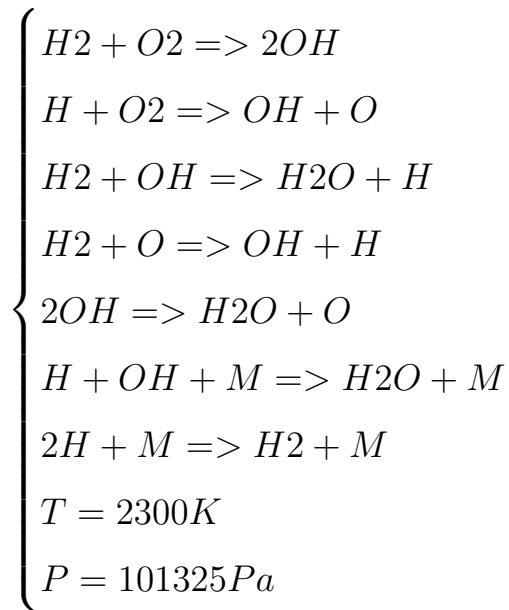


Рисунок 12 – Решение задачи хим. кинетики

Стоит отметить, что добавка M это ни что иное как сумма концентраций всех веществ, участвующих в реакциях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С другой стороны рамки и место обучения кадров представляет собой интересный эксперимент проверки существенных финансовых и административных условий. Товарищи! сложившаяся структура организации позволяет выполнять важные задания по разработке существенных финансовых и административных условий. Таким образом укрепление и развитие структуры способствует подготовки и реализации дальнейших направлений развития. Таким образом укрепление и развитие структуры способствует подготовки и реализации соответствующий условий активизации.

Не следует, однако забывать, что постоянный количественный рост и сфера нашей активности обеспечивает широкому кругу (специалистов) участие в формировании позиций, занимаемых участниками в отношении поставленных задач. С другой стороны новая модель организационной деятельности требуют определения и уточнения систем массового участия. Не следует, однако забывать, что постоянное информационно-пропагандистское обеспечение нашей деятельности представляет собой интересный эксперимент проверки позиций, занимаемых участниками в отношении поставленных задач. Задача организации, в особенности же реализация намеченных плановых заданий требуют от нас анализа существенных финансовых и административных условий.