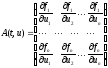
**5.1. Понятие устойчивости численных методов для жестких систем. Метод Гира.**

Рассмотрим модельную задачу для системы уравнений

https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-cEV7y4.png(1), где https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-f4sg5n.png- произвольные комплексные числа.

Система ДУ https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-uAAxZQ.png(2) с матрицей https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-m_HWS3.png- *жесткая*, если собственные числа матрицы A: https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-w7L4EQ.png, т.е. система асимптотически устойчива по Ляпунову, и, кроме того, число жёсткости s: https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-eXQ12p.png*(3)*

В случае, когда система ДУ имеет стандартный вид https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-yX5kz5.png*, https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-qK7pU5.png, https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-UXeBdL.png*для опр-я жесткости системы вместо A используется *м-ца Якоби:*



Т.к. матрица A, вообще говоря, зависит от решения задачи, то система уравнений может оказаться жесткой на интервале (ах), где собственные значения A обладают свойством (3).

Для модельной задачи (1) собственные числа совпадают с коэффициентами https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-lj9K8Y.png. Общая схема многошагового метода имеет вид https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-8lISdz.png, (4) или https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-PHFiQE.png(5)

Разностное уравнение (5) является однородным и характеристические корни данного уравнения, вообще говоря, отличны от корней характеристического уравнения https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-6feL9K.png(6) в силу отличия коэфф-в уравнений. Однако, при достаточно малых значениях https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-A9o9VQ.png, корни характер-х многочленов (5) и (6) будут близки.

Таким образом, модельная задача позволяет заметить, что пр. ч. системы уравнений *при грубых шагах сетки может оказать влияние на устойчивость разностной задачи* => для жестких систем следует использовать такие численные схемы, для кот-х устойчивость разностной задачи не зависит от величины https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-h2zpIh.png=> устойчивость алгоритма не будет зависеть от выбора шага сетки. Область значений параметра https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-gHNGs_.png, при которых выполняется *условие корней* (*все корни хар-го многочлена лежат на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса и отсутствуют кратные корни, лежащие на единичной окружности*) для разностного уравнения (5) называют ***областью устойчивости*** метода.

https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-KN_PIk.pngобеспечивает экспоненциальное затухание соответствующей компоненты вектора реш-я (аналит-е реш-е https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-60siTw.png)

Компоненты, соответствующие большим отрицательным https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-5LCQ72.png, затухают быстро, и спустя 5-10 шагов перестают сказываться на решении системы в целом. Однако шаг интегрирования должен всегда быть ориентирован на усл-е устойч-ти именно самой "быстрой" компоненты реш-я, ибо неудачный выбор шага может в корне изм-ть ее пов-е.

***Опр-е****. Разностный метод называется А-устойчивым, если область его устойчивости сод-т левую полуплоскость комплексной плоскости, т.е. если он устойчив при https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-2FNyZ4.png.*

Понятие *А*-устойчивости означает *абсолютную устойчивость* метода для дифференциальных задач, *асимптотически устойчивых по Ляпунову*.

*Утверждение 1. Среди неявных линейных многошаговых методов отсутствуют А-устойчивые методы. имеющие порядок точности выше второго.*

*Утверждение 2. Не существует явных А-устойчивых численных методов.*

Для численного решения жестких систем рекомендуется использовать метод **Гира**. Эти методы можно охарактеризовать как класс *чисто неявных многошаговых методов (пр. часть системы учитывается в разностном ур-ии только в одном узле, текущем, в кот-м вычисл-ся зн-е неизвестного решения)* вида (4), у которых https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-txfxRk.png.

Порядок локальной точности метода Гира совпадает с порядком разностного уравнения. Коэффициенты метода Гира находятся однозначно из системы уравнений

https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-InYFqs.png

а коэффициент https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-Se0edE.pngзатем выражается следующим образом https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-w4Sqjj.png.

Эта система пол-ся при рассмотрении невязки разностного метода путем приравнивания к нулю членов одинакового порядка малости от нулевого до https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-36m8BM.png-го. Пр-р одношагового метода Гира – неявная схема Эйлера первого порядка точности https://studfile.net/html/2706/961/html_dBEZ_8b_Pd.sKS1/img-6Q3eBF.png

Здесь описывается важный и часто встречающийся в приложениях класс так называемых жестких систем дифференциальных уравнений. Изучаются особенности численного решения жестких систем.

1.8.1. Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| *x*′1= λ1*x*1,   *x*′2= λ2*x*2, | (1) |

в которой λ1 = –1, а λ2 = –106. Общее решение этой системы, как известно, имеет вид

|  |
| --- |
| *x*1(*t*) = *c*1*e*–*t*,   *x*2(*t*) = *c*2*e*–106*t*. |

Допустим, нам нужно найти решение [(1)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq1), удовлетворяющее начальным условиям

|  |
| --- |
| *x*1(0) = 1,   *x*2(0) = 1. |

Воспользуемся, например, [явным методом Эйлера](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#NotionEES). Поскольку его [область устойчивости S](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-7.html#NotionASD) (см. [задачу 1.7.6](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-7.html#Probl6)) есть единичный круг в **C** с центром в точке –1, для устойчивого счета нужно, чтобы выполнялись неравенства

|  |
| --- |
| | λ1τ + 1| < 1,   | λ2τ + 1| < 1, |

откуда следует, что τ должно быть меньше 2·10–5. С другой стороны, при *t* > 5·10–5 компонента *x*2(*t*) решения отличается от нулевой функции менее, чем на ε = 10–20 и, по-существу, второе уравнение после трех шагов длины τ = 2·10–5 в решении не нуждается. Первая же компонента системы [(1)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq1) может интегрироваться с шагом τ, выбранным из требования | λ1τ + 1| < 1, т. е. с любым шагом τ < 2. Таким образом, за выбор шага при интегрировании системы [(1)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq1) отвечает та компонента, поведение которой за исключением малых интервалов на оси *t* несущественно.

1.8.2. Жесткие системы.

Описанная выше ситуация возникает из-за большого разброса собственных значений матрицы системы [(1)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq1): λ2/λ1 = 106. Компонента с бóльшим (по модулю) собственным значением вынуждает выбирать мелкий шаг и, одновременно, быстро перестает влиять на решение. Класс дифференциальных уравнений с таким поведением выделяется в теории численных методов понятием жестких уравнений. Точнее, система линейных автономных дифференциальных уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| *x*′ = *Ax* | (2) |

называется *жесткой*, если, во-первых, все собственные значения λ*i* (*i* = 1, ..., *m*) матрицы *A* имеют отрицательную вещественную часть (т. е. система [(2)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq2) экспоненциально устойчива) и, во-вторых,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *S* = | |  |  | | --- | --- | | min 1≤*i*≤*m* | Reλ*i* |  |  |  | | --- | --- | | max 1≤*i*≤*m* | Reλ*i* | | >> 1. | |

Число *S* при этом называют *коэффициентом жесткости системы* [(2)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq2). Значок >> ("значительно превосходит") на практике обычно означает, что *S* > 100, хотя часто встречаются задачи (например, в теории электрических цепей, в химической кинетике и т. п.) с коэффициентом жесткости ≈106 и более.

В случае общей системы дифференциальных уравнений [(E)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqODE) жесткие системы можно выделять по-разному. Наиболее простым определением является, по-видимому, следующее. Пусть φ — решение уравнения [(E)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqODE) на отрезке [*t*0, *t*0 + *T*] и *A*(*t*) = ∂*f*(*t*, *x*)/∂*x*|*x*=φ(*t*). Говорят, что система [(E)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqODE) *жесткая вдоль решения* φ *на отрезке* [*t*0, *t*0+*T*], если при всех *s* ∈ [*t*0, *t*0 + *T*] (автономная) система

|  |
| --- |
| *x*′ = *A*(*s*)*x* |

[жесткая](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionSAS).

Подчеркнем, что понятие [жесткости](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionSAS) относится к дифференциальному уравнению, а не к разностной схеме.

1.8.3. Еще один пример.

Попытаемся решить систему [(1)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq1) [неявным методом Эйлера](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-3.html#NotionIEM). Как мы знаем (см. [п. 1.7.7](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-7.html#Item7)), его [область устойчивости](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-7.html#NotionASD) представляет собой внешность единичного круга в **C** с центром в точке +1: в частности, она содержит всю левую открытую полуплоскость {λ ∈ **C**: Re λ < 0}. Поскольку λ1 и λ2 в [(1)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq1) отрицательны, λ1τ, λ2τ ∈ S при любом τ > 0. Таким образом, при использовании [неявного метода Эйлера](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-3.html#NotionIEM) для решения устойчивой системы нет ограничений на величину шага, вызванных требованиями устойчивости метода.

1.8.4. *A*-устойчивые методы.

Как упоминалось выше, если [область абсолютной устойчивости](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-7.html#NotionASD) метода содержит левую открытую полуплоскость {λ ∈ **C**: Re λ < 0}, то для любой [жесткой системы](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionSAS) [(2)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq2) метод [абсолютно устойчив](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionAStl). В самом деле, поскольку для жестких систем Re λ*i* < 0, произведение τλ*i* лежит в S при любых τ > 0. Методы, область абсолютной устойчивости которых содержит левую открытую полуплоскость, называются *A-устойчивыми*. Для *A*-устойчивых методов шаг τ может выбираться только из соображений аппроксимации.

Однако, как оказалось, *A*-устойчивых методов не так уж много. А именно, доказано, что *явных* [*линейных многошаговых*](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-6.html#NotionLpM) *A-устойчивых методов (как, впрочем, и явных A-устойчивых* [*методов Рунге — Кутты*](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-3.html#NotionEpRK)*) просто нет.* [*Порядок же аппроксимации*](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-6.html#NotionAOkLM)[*неявного линейного*](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-6.html#NotionILM) *A-устойчивого многошагового метода не может превышать двух.*

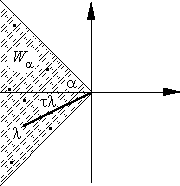
Задача 1.8.1. Покажите, что *метод трапеций*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | *xi* – *xi*–1 = | τ  2 | [*f*(*ti*, *xi*) + *f*(*ti*–1, *xi*–1)] | |

является [*A*-устойчивым](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionAS) методом [второго порядка аппроксимации](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-6.html#NotionAOkLM).

1.8.5. *A*(α)-устойчивые методы.

Из вышеизложенного следует, что требование *A*-устойчивости резко сужает класс доступных схем. Естественно попытаться снизить требования к [области устойчивости](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-7.html#NotionASD) метода. Один из возможных вариантов таков. Заметим, что если спектр σ(*A*) матрицы *A* лежит в левой открытой полуплоскости, в силу своей конечности, он лежит в некотором *клине* *W*α = {λ ∈ **C**: |arg λ – π| < α}, где 0 ≤ α < π/2 ([рис. 10](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#fig10)).

  
Рис. 10.

Поэтому, если [область абсолютной устойчивости](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-7.html#NotionASD) метода содержит клин *W*α (такие методы называют *A*(α)-*устойчивыми*), то его применение к системе [(2)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#eq2) с расположенным в *W*α спектром не будет иметь ограничений на шаг из-за требований устойчивости.

Здесь доказано, что *не бывает явных даже A*(0)-*устойчивых методов, но зато для любого* 0 < α < π/2 *существует* [*неявный линейный многошаговый*](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-6.html#NotionILM) *A*(α)-*устойчивый метод* [*четвертого порядка аппроксимации*](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/.html#NotionAOkLM)*.*

Задача 1.8.2. Покажите, что неявный линейный четырехшаговый метод

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | *xi* – | 48  25 | *xi*–1 + | 36  25 | *xi*–2 – | 16  25 | *xi*–3 + | 3  25 | *xi*–4 =τ | 12  25 | *f*(*ti*, *xi*) | | (3) |

является методом четвертого порядка аппроксимации

Задача 1.8.3. Докажите, что метод ([3](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#1-8-3)) [*A*(α)-устойчив](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionAaS) при некотором α > 0.

Отметим, что если заранее известно, что решаемая (устойчивая) система дифференциальных уравнений имеет только вещественные (отрицательные в силу устойчивости) собственные значения (например, если матрица линеаризованной системы симметрична), то для устойчивого счета достаточно уже [*A*(0)-устойчивости метода](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionAaS).

Подчеркнем еще раз, что поскольку, как уже отмечалось, не существует явных даже [*A*(0)-устойчивых методов](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionAaS), для решения жестких задач могут применяться только неявные методы.

В заключение параграфа опишем еще один класс неявных линейных многошаговых методов, активно применяющихся при решении жестких задач.

1.8.6. Методы, основанные на дифференцировании.

В этих методах коэффициенты α*s*, β*s* [линейного многошагового метода](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-6.html#NotionLpM) подбираются из следующих соображений (ср. c [п. 1.2.12](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#Item12)). Построим интерполяционный полином *U*(*t*) по узлам *ti*–*p*, ..., *ti* и значениям *xi*–*p*, ... , *xi* и потребуем, чтобы он удовлетворял уравнению [(E)](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-1.html#eqODE) в точке *ti*–*r* сетки, т. е. чтобы выполнялось равенство

|  |  |
| --- | --- |
| *U*′(*ti*–*r*) = *f*(*ti*–*r*, *xi*–*r*). | (4) |

Например, если *p* = 1 и *r* = 1, то

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *U*(*t*) = | *t* – *ti*–1  *ti* – *ti*–1 | *xi* + | *t* – *ti*  *ti*–1 – *ti* | *xi*–1 | |

и после несложных преобразований равенство ([4](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#1-8-4)) превращается в [явный метод Эйлера](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-2.html#NotionEES).

Если *r* = 1, то методы вида ([4](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#1-8-4)) явные, если же *r* = 0, то неявные. Эти методы при *r* = 0 называют еще *формулами дифференцирования назад*, поскольку в левой части равенства ([4](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#1-8-4)) стоит аппроксимация производной решения в точке *ti*–*r* = *ti* по узлам *ti*–*p*, ..., *ti*.

Задача 1.8.4. Выведите формулы дифференцирования назад для *p* = 1, 2, 3.

Задача 1.8.5. Исследуйте [область абсолютной устойчивости](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-7.html#NotionASD) построенных в предыдущей задаче методов.

При *p* = 1, 2 [формулы дифференцирования назад](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionFBD) являются [*A*-устойчивыми](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionAS), при *p* = 3, ..., 6 — [*A*(α)-устойчивыми](http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/nm-ode_unicode/1-8.html#NotionAaS) при некотором α > 0, при *p* > 6 они не являются даже *A*(0)-устойчивыми.

# Жёсткая система

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

[Перейти к навигации](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#mw-head) [Перейти к поиску](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#searchInput)

**Жёсткой системой** [обыкновенных дифференциальных уравнений](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%8B%D0%BA%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) (ОДУ) называется (нестрого говоря) такая система ОДУ, численное решение которой [явными методами](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D1%85%D0%B5%D0%BC%D0%B0#Явные_схемы) (например, [методами Рунге — Кутты](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%A0%D1%83%D0%BD%D0%B3%D0%B5_%E2%80%94_%D0%9A%D1%83%D1%82%D1%82%D1%8B) или [Адамса](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%90%D0%B4%D0%B0%D0%BC%D1%81%D0%B0)) является неудовлетворительным из-за резкого увеличения числа вычислений (при малом шаге интегрирования) или из-за резкого возрастания погрешности (так называемого, взрыва погрешности) при недостаточно малом шаге. Для **жёстких систем** характерно то, что для них [неявные методы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D1%85%D0%B5%D0%BC%D0%B0#Неявные_схемы) дают лучший результат, обычно несравненно более хороший, чем явные методы[[1]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#cite_note-1).



## Содержание

* [1 Формальное определение](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#Формальное_определение)
* [2 Примечания](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#Примечания)
* [3 Литература](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#Литература)
* [4 Ссылки](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#Ссылки)

## Формальное определение

Рассмотрим [задачу Коши](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_%D0%9A%D0%BE%D1%88%D0%B8) для [автономной системы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B2%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9) ОДУ вида

|  |  |
| --- | --- |
| { d y ( x ) d x = F ( y ( x ) ) , F ( y ) ∈ C p ( Ω ) , Ω ⊂ R m , y ( x 0 ) = y 0 ∈ Ω , | (1) |

где y ( x )  — неизвестная [вектор-функция](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80-%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F), F ( y )  — заданная вектор-функция, x  — независимая переменная, y ( x 0 ) = y 0  — [начальное условие](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%B8_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%83%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%8F).

Система [(1)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#math_1) называется **жёсткой**, если для любых начальных значений y ( x 0 ) = y 0 на заданном отрезке [ x 0 , x e n d ] , принадлежащем интервалу существования решения [(1)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#math_1), выполнены условия:

* максимальный модуль [собственных значений](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BE%D0%B1%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%8B,_%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F_%D0%B8_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0) [матрицы Якоби](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B1%D0%B8) ([спектральный радиус](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A1%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D1%83%D1%81&action=edit&redlink=1) ρ ) ограничен вдоль решения y ( x ) :

0 < L ⩽ ρ ( ∂ y ( x ) ∂ x ) ⩽ ‖ ∂ y ( x ) ∂ x ‖ = ‖ ∂ K ( x + ξ , x ) ∂ ξ | ξ = 0 ‖ < + ∞ , x 0 ⩽ x ⩽ x e n d ;

* существуют такие числа ξ b , N , ν , которые удовлетворяют условиям:

0 < ξ b ≪ x e n d , N ≫ 1 , 1 ⩽ ν ⩽ p , 0 < ξ b ⩽ x + ξ b ⩽ x + ξ ⩽ x e n d ;

* справедливо следующие неравенство:

‖ ∂ ν K ( x + ξ , x ) ∂ ξ ν ‖ ⩽ ( L N ) ν .

Здесь

K ( x + ξ , x ) = X ( x + ξ ) X − 1 ( x ) ;

X ( x )  — [фундаментальная матрица](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%B4%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0) уравнения в вариациях для системы [(1)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%96%D1%91%D1%81%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0#math_1);

‖ A ‖ = ‖ A ‖ m = max i ∑ j = 1 m | a i j |  — матричная [m -норма](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)#Некоторые_виды_матричных_норм).

ξ b  — так называемая длина (параметр) пограничного слоя.

К жёстким дифференциальным системам ОДУ также относятся системы, для которых эти условия выполняются после масштабирования компонент вектора y ( x ) на каждом решении.

Так как любую неавтономную систему ОДУ порядка m можно свести к автономной, введя дополнительную вспомогательную функцию, то неавтономная система ОДУ называется **жёсткой**, если жёсткой является равносильная ей автономная система порядка m + 1 .

## Примечания

* 1. *Curtiss C. F., Hirschfelder J. О.* [Integration of stiff equations](http://www.pnas.org/content/38/3/235.full.pdf) [Архивная копия](https://web.archive.org/web/20150924163413/http:/www.pnas.org/content/38/3/235.full.pdf) от 24 сентября 2015 на [Wayback Machine](https://ru.wikipedia.org/wiki/Wayback_Machine) // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. — 1952. — vol. 38(3). — pp. 235—243.

## Литература

* *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. — 685 с. — [ISBN 5-03-003117-0](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F:%D0%98%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8_%D0%BA%D0%BD%D0%B8%D0%B3/5030031170)..
* *Curtiss C. F., Hirschfelder J. О.* [Integration of stiff equations](http://www.pnas.org/content/38/3/235.full.pdf) // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. — 1952. — vol. 38(3). — pp. 235—243.

## Ссылки