Лицей БНТУ
220012, г. Минск, ул. Кедышко, 4, 8(017) 280-03-05, email: liceum_bntu@tut.by

Площади и объёмы

Секция: «Математика»
Авторы:
Астахов Александр Михайлович,
лицей БНТУ, 10 «А» класс,
ул. Калиновского, д. 60, кв. 11,
+375 29-308-30-09
Шкляр Станислав Станиславович,
лицей БНТУ, 11 «Д» класс,
ул. Светлая, д. 16,
+375-29-935-34-36
Научный руководитель:
Очеретняя Ольга Павловна
лицей БНТУ,
учитель математики,

Цыбулько Оксана Евгеньевна,
лицей БНТУ,
учитель математики,
+375-29-680-60-10

Минск, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Цель работы: Найти отношение площадей исходного треугольника и треугольника, образованного точками касания вписанной окружности исходного треугольника, в зависимости от сторон треугольника. Найти отношение площадей исходного треугольника и треугольника, образованного точками касания вневписанных окружностей, исходного треугольника, со сторонами, в зависимости от сторон треугольника. Оценить отношение площадей исходного треугольника и треугольника, образованного основаниями чевиан, пересекающихся в одной точке. Найти отношение площадей исходной трапеции и четырехугольника, образованного точками касания вписанной окружности исходной трапеции, в зависимости от сторон трапеции. Найти отношение объёмов исходного тетраэдра и тетраэдра, образованного точками касания сферы, вписанной в исходный тетраэдр, для случаев, когда тетраэдр правильный, является правильной пирамидой, равногранным и произвольным тетраэдро, в зависимости от ребер тетраэдра. Найти отношение объёмов исходного тетраэдра и тетраэдра, образованного точками касания вневписанных сфер с гранями исходного тетраэдра, для случаев, когда тетраэдр правильный, является правильной пирамидой, равногранным и произвольным тетраэдром, в зависимости от ребер тетраэдра.

Актуальность: Итоги, полученные при решении данной задачи, могут помочь при исследовании оптики, работы с кристаллами, в инженерии, а также в микромире. Так как правильный тетраэдр образуется при sp^3-гибридизации атомных орбиталей (их оси направлены в вершины правильного тетраэдра, а ядро центрального атома расположено в центре описанной сферы правильного тетраэдра), поэтому немало молекул, в которых такая гибридизация центрального атома имеет место, имеют вид этого многогранника. Широкое применение имеет прямоугольный тетраэдр.

Уголковый отражатель – устройство в виде прямоугольного тетраэдра со взаимно перпендикулярными отражающими плоскостями. Излучение, попавшее в уголковый отражатель, отражается строго в противоположном направлении.

Уголковый отражатель, а, следовательно, и прямоугольный тетраэдр использовался на аппарате «Лунаход-1» для нахождения расстояния между луной и землей. Так же он применяется в радиоэлектронной борьбе.

Радиоэлектронная борьба – совокупность согласованных мероприятий и действий войск по радиоэлектронному поражению (подавлению) радиоэлектронных объектов систем управления войсками и оружием противника и радиоэлектронной защите радиоэлектронных объектов своих систем управления войсками.

.

Постановка исследования:

1. а) В треугольник вписана окружность. Пусть *M, K, T* – точки касания этой окружности со сторонами *AB, BC, CA* соответственно. Как связаны площади треугольников *MKT* и *ABC*?

б) Дан треугольник *ABC*, пусть *M K T* – точки касания вневписанных окружностей со сторонами *AB*, *BC, CA* соответственно. Как связаны площади треугольников *MKT* и *ABC*?

2. В треугольнике ABC проведены три чевианы *AM, BK, CT,* пересекающиеся в точке О. Оцените отношение площадей треугольников *MKT* и *ABC*.

3. В трапецию *ABCD* ($AD \parallel BC$) вписана окружность, точки касания которой со сторонами *AB*, *BC, CD, DA* – соответственно *M, K, N, L*. Как связаны площади трапеции и четырехугольника *MKNL*, если известны стороны трапеции $AD=a$, $BC=b$, $AB=d$, $CD=c$.

4. Пусть SABC – треугольная пирамида с ребрами $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$, $AB=d$, $BC=e$, $CA=f$. В пирамиду вписана сфера, точки касания которой с гранями *ABC*,

SAB, SBC, SCA есть соответственно *M, N, K, L*. Как связаны объемы пирамид *SABC и MNKL*. Рассмотреть случаи:

a) *SABC* – правильный тетраэдр;

b) *SABC* – правильная пирамида;

c) *SABC* – равногранная пирамида;

d) *SABC* – произвольная пирамида.

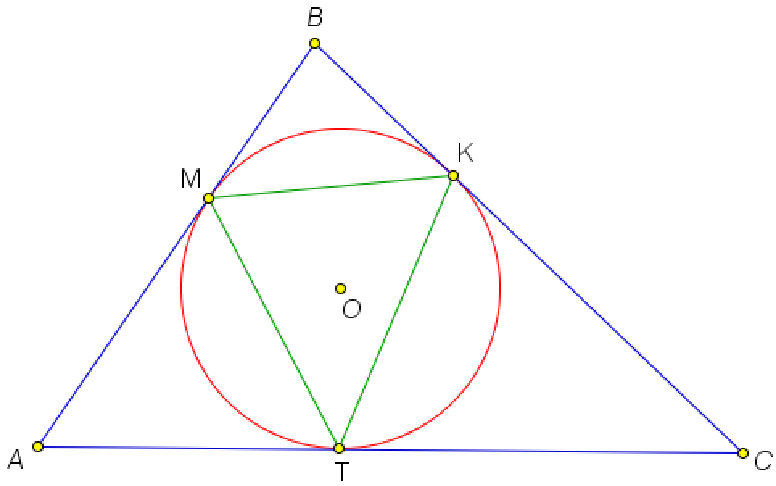
5. Те же задачи для пирамиды *SABC* и вневписанных сфер.

Ход исследования:

Замечание: В каждом подпункте нумерация выражений действует только для пункта, в котором рассматривается это выражение.

1-й пункт. Дан треугольник *ABC*, стороны которого равны *a, b, c*.

a) В треугольник вписана окружность. Пусть *M, K, T* – точки касания этой окружности со сторонами *AB, BC, CA* соответственно. Как связаны площади треугольников *MKT* и *ABC*?



(Рис.1)

Рассмотрим ΔABC в котором $AB = a, BC = b, AC = c, AM = AT = a_1$, $MB = BK = b_1, CK = CT = c_1$.

$p -$ полупериметр ABC

Выразим синусы углов треугольника через теорему синусов и формулу для выражения радиуса описанной окружности.

$$\frac{b}{sin\angle BAC} = \frac{2abc}{4S} \Rightarrow sin\angle BAC = \frac{2S_{ABC}}{ac} \Rightarrow sin\angle BCA = \frac{2S_{ABC}}{bc} \Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{2S_{ABC}}{ab}$$

Обобщим данный способ. Синус угла треугольника равен отношению двойной площади треугольника к произведению сторон, образующих данный угол.

Найдем отрезки, на которые точка касания делит стороны треугольника ABC.

$c - a_1 = b - a + a_1 \Rightarrow a_1 = p - b$, аналогичным образом находим другие отрезки: $b_1 = p - c$, $c_1 = p - a$

Выразим площадь треугольника MKT:

$$S_{MKT} = S_{ABC} - \frac{1}{2}a_1^2 sin\angle BAC - \frac{1}{2}b_1^2 sin\angle ABC - \frac{1}{2}c_1^2 sin\angle BCA$$

$$S_{MKT} = S_{ABC} - \frac{1}{2}(\mathrm{p}-\mathrm{b})^2\frac{2S_{ABC}}{ac} - \frac{1}{2}(\mathrm{p}-\mathrm{c})^2\frac{2S_{ABC}}{ab} - \frac{1}{2}(p-a)^2\frac{2S_{ABC}}{bc}$$

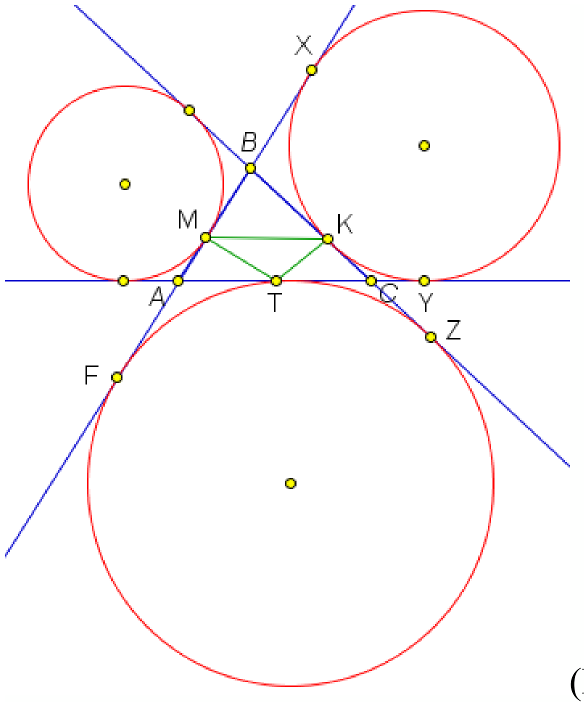
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Найдем отношение площадей треугольника MKT и ABC.

$$\frac{S_{MKT}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{(\mathrm{p-b})(\mathrm{p-b})}{\mathrm{ac}} - \frac{(\mathrm{p-c})(\mathrm{p-c})}{ab} - \frac{(\mathrm{p-a})(\mathrm{p-a})}{bc} =$$

$$\frac{abc-bp^2+2b^2p-b^3-cp^2+2c^2p-c^3-ap^2+2a^2p-a^3}{abc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{4abc} (1)$$

б) Дан треугольник *ABC*, Пусть *M K T* – точки касания вневписанных окружностей со сторонами *AB*, *BC*, *CA* соответственно. Как связаны площади треугольников *MKT* и *ABC*?



(Рис.2)

Рассмотрим ΔABC такой, что $AB = a, BC = b, AC = c, AT = c_2, AM = a_1,$ $MB = a_2, BK = b_1, CK = b_2, CT = c_1.$

p − полупериметр ABC

Найдем синусы углов треугольника ABC так, как это было сделано в предыдущем пункте.

$$\frac{b}{sin\angle BAC} = \frac{2abc}{4S} \Rightarrow sin\angle BAC = \frac{2S_{ABC}}{ac} \Rightarrow sin\angle BCA = \frac{2S_{ABC}}{bc} \Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{2S_{ABC}}{ab}$$

Для касательных BF, BZ и AX, AY к окружностям выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} a_2 + a_1 + c_2 = b_1 + b_2 + c_1. (1) \\ a_2 + a_1 + b_1 = b_2 + c_2 + c_1. (2) \end{cases}$$

Из системы следует, что $c_2 = b_1$,

Аналогичным образом доказываются равенства: $a_1 = b_2$, $c_1 = a_2$.

Из полученных равенств следует, что $a - a_2 + c - c_1 = b$ => $a_2 = c_1 = (p - b)$

Аналогичным образом найдем другие отрезки на которые точки касания делят стороны треугольника ABC: $(p - a) = c_2 = b_1, (p - c) = a_1 = b_2,$

Выразим площадь треугольника MKT.

$$S_{MKT} = S_{ABC} - \frac{1}{2}a_1c_2 sin\angle BAC - \frac{1}{2}a_2b_1 sin\angle ABC - \frac{1}{2}b_2c_1 sin\angle BCA$$

$$S_{MKT} = S_{ABC} - (\mathrm{p}-\mathrm{c})(\mathrm{p}-\mathrm{a})\frac{S_{ABC}}{ac} - (\mathrm{p}-\mathrm{b})(\mathrm{p}-\mathrm{a})\frac{S_{ABC}}{ab} - (\mathrm{p}-\mathrm{c})(\mathrm{p}-\mathrm{b})\frac{S_{ABC}}{bc}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{S_{MKT}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{(p-c)(p-a)}{ac} - \frac{(p-a)(p-b)}{ab} - \frac{(p-b)(p-c)}{bc} =$$

$$\frac{-bp^2+2abp+2bcp-cp^2+2acp-2abc-ap^2}{abc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{4abc} \quad (2)$$

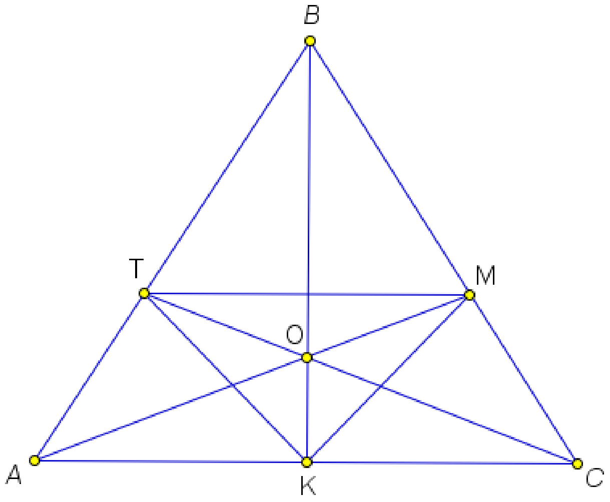
Ответ: а) Для вписанной окружности:

$$\frac{S_{MKT}}{S_{ABC}} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{4abc}$$

б) Для вневписанных окружностей:

$$\frac{S_{MKT}}{S_{ABC}} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{4abc}$$

<u>2-й пункт.</u> В треугольнике ABC проведены три чевианы *AM, BK, CT,* пересекающиеся в точке О. Оцените отношение площадей треугольников *MKT* и *ABC*?



(Рис. 3)

Пусть в треугольнике ABC: $\frac{AT}{TB} = x, \frac{BM}{MC} = y, \frac{CK}{KA} = z,$ а $S_{ABC} = S.$

Так как условию задачи, чевианы пересекаются, на основании теоремы Чевы имеем: $x \cdot y \cdot z = 1.$

Для того чтобы доказать, что $S_{MKT} \leq \frac{1}{4} S$ достаточно доказать, что

$$S_{AKT} + S_{MBT} + S_{MKC} \geq \frac{3}{4} S$$

Найдём площадь треугольника AKT:

$$S_{AKT} = \frac{1}{2} AT \cdot AK \cdot \sin\angle A$$

Найдём площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}(AT + TB) \cdot (KA + CK) \cdot \sin\angle A$$

Найдём отношение площадей треугольников AKT и ABC:

$$\frac{S_{AKT}}{S} = \frac{\frac{1}{2} AT \cdot KA \cdot \sin\angle A}{\frac{1}{2}(AT+TB) \cdot (KA+CK) \cdot \sin\angle A} = \frac{\frac{AT}{TB}}{(\frac{AT}{TB}+1) \cdot (1+\frac{CK}{KA})} = \frac{x}{(x+1)(z+1)}$$

Тогда для треугольников: AKT, MBT и MKC:

$$\frac{S_{AKT}}{S} = \frac{x}{(x+1)(z+1)}$$

$$\frac{S_{MBT}}{S} = \frac{y}{(x+1)(y+1)}$$

$$\frac{S_{MKC}}{S} = \frac{z}{(z+1)(y+1)}$$

Покажем, что $S_{AKT} + S_{MBT} + S_{MKC} \geq \frac{3}{4}$S

$$\frac{x}{(x+1)(z+1)} + \frac{y}{(x+1)(y+1)} + \frac{z}{(z+1)(y+1)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\frac{x(y+1)+y(z+1)+z(x+1)}{(x+1)(z+1)(y+1)} \geq \frac{3}{4}$$

$$xy+yz+xz+x+z+y \geq 6$$

$$\frac{xy+yz+xz}{1}+x+z+y \geq 6$$

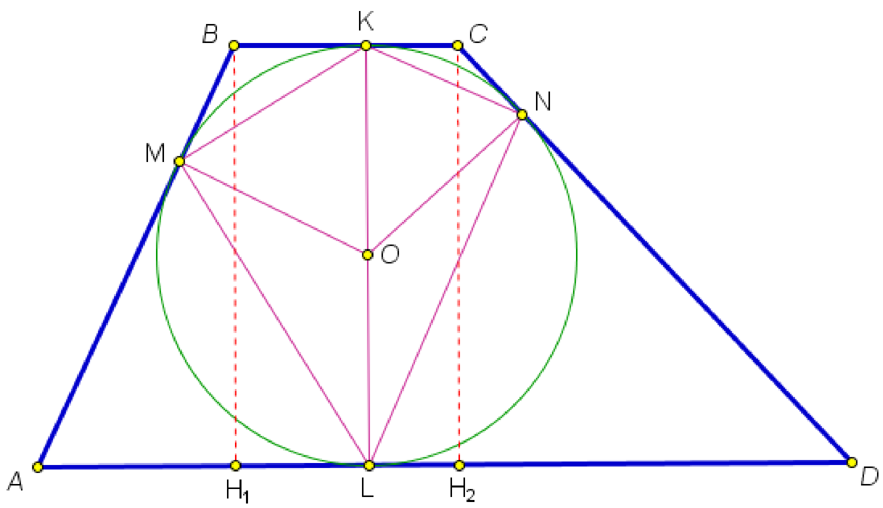
$$\frac{xy}{xyz}+\frac{zy}{xyz}+\frac{xz}{xyz}+x+z+y \geq 6$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+x+z+y \geq 6$$

Так как $(\frac{1}{x}+x) \geq 2$, $(\frac{1}{y}+y) \geq 2$, $(\frac{1}{z}+z) \geq 2$, следовательно неравенство выполняется и $S_{MKT} \leq \frac{1}{4} \cdot S$

Ответ: $S_{MKT} \leq \frac{1}{4} \cdot S$

<u>3-й пункт.</u> В трапецию ABCD (AD║BC) вписана окружность, точки касания которой со сторонами AB, BC, CD, DA – соответственно M, K, N, L. Как связаны площади трапеции и четырехугольника MKNL, если известны стороны трапеции AD=a, BC=b, AB=d, CD=c.



(Рис.4)

Рассмотрим трапецию $ABCD$.

Проведем перпендикуляры BH_1, CH_2. Пусть $h = BH_1 = CH_2$, $AH_1 = x$, $AB = d$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = a$, $H_2D = a - x - b$

Из теоремы Пифагора для треугольников ABH_1 и CDH_2 имеем, что

$h^2 = d^2 - x^2 = c^2 - (a - b - x)^2$ (1).

Из равенства (1) следует, что $d^2 - x^2 = c^2 - (a - b)^2 + 2(a - b)x - x^2$, из этого следует, что $x = \frac{d^2+(a-b)^2-c^2}{2(a-b)}$. Рассмотрим четырехугольник $AMOL$. Он вписан в окружность, так как сумма противоположных углов равна 180°, из этого следует, что синус угла MAL равен синусу угла MOL, значит

$\sin\angle MOL = \sin\angle MAL = \frac{h}{d}$. Из этого следует, что $S_{MOL} = \frac{h^3}{8d}$. Рассмотрим треугольники MOL и KMO, они равновеликие, так как $LO = OK$, как радиусы. Из этого следует, что $S_{LMK} = \frac{h^3}{4d}$. Аналогичным образом находим площадь треугольника LNK $S_{LNK} = \frac{h^3}{4c}$.

Найдем отношение площадей четырехугольника $LMKN$ и $ABCD$.

$$\frac{S_{LMKN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{h^3}{4}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right)}{\frac{h}{2}(a + b)} = \frac{\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right)h^2}{2(a + b)} \text{ (2).}$$

Подставим значение $h^2 = d^2 - x^2$ в выражение (2)

$$\frac{S_{LMKN}}{S_{ABCD}} = \frac{\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right)(d^2 - x^2)}{2(a+b)} \text{ (3)}$$

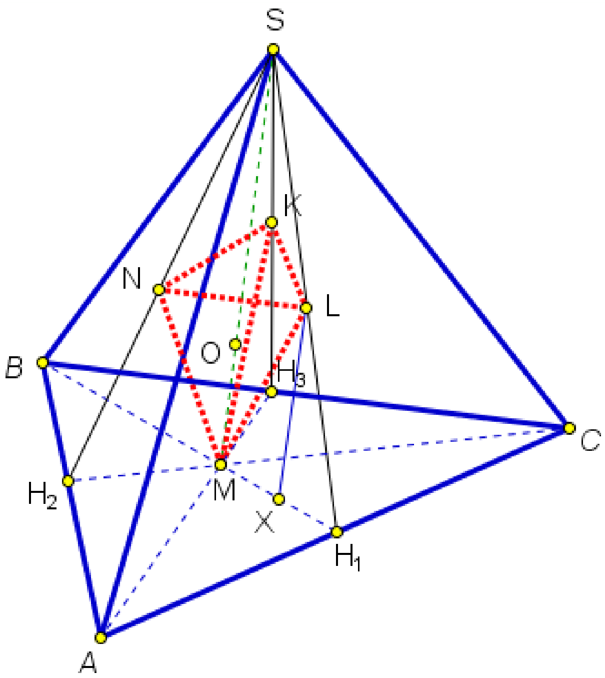
Подставим значение $x = \frac{d^2+(a-b)^2-c^2}{2(a-b)}$. в выражение (3)

$$\frac{S_{LMKN}}{S_{ABCD}} = \frac{\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right)\left(d^2 - \left(\frac{d^2 + (a-b)^2 - c^2}{2(a-b)}\right)^2\right)}{2(a + b)} = \frac{2ab(c-b)(a-c)}{cd(a-b)^2}.$$

Ответ: $\frac{S_{LMKN}}{S_{ABCD}} = \frac{2ab(c-b)(a-c)}{cd(a-b)^2}$

<u>4-й пункт.</u> Пусть SABC – треугольная пирамида с ребрами SA=a, SB=b, SC=c, AB=d, BC=e, CA=f. В пирамиду вписана сфера, точки касания которой с гранями ABC, SAB, SBC, SCA есть соответственно M, N, K, L. Как связаны объемы пирамид SABC и MNKL.

***а)* Правильный тетраэдр.**



. (рис.5)

Пусть $SABC$ — правильный тетраэдр. L, M, N, K — точки касания вписанной сферы с тетраэдром, O – центр вписанной сферы.

$SH_3 = AH_3$ (биссектриса, медиана, высота) треугольников BSC и ABC соответственно. K и M точки пересечения медиан, так как мы рассматриваем правильный тетраэдр, поэтому $\frac{KH_3}{SK} = \frac{MH_3}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KH_3}{SH_3} = \frac{MH_3}{AH_3} = \frac{1}{3}$.

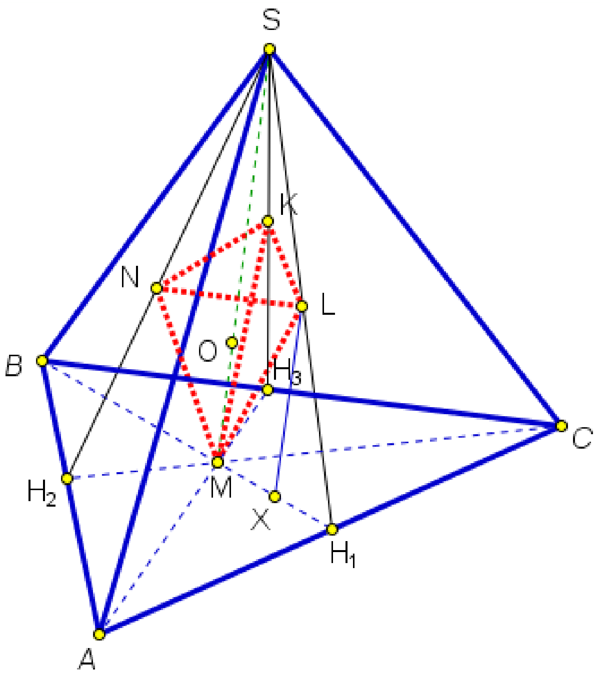
MK параллельна AS по теореме Фалеса т.к. $\frac{KH_3}{SH_3} = \frac{MH_3}{AH_3} = \frac{1}{3}$

Треугольники MKH_3 и ASH_3 подобны, так как MK параллельна AS => $\frac{MK}{AS} = \frac{1}{3}$.

Проведя аналогичные рассуждения с другими сторонами тетраэдра MNKL, мы получим, что все стороны $MNKL$ в три раза меньше соответствующих сторон SABC. Значит, $SABC$ подобен $MNKL$. Коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$, значит $\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}} = \frac{1}{27}$.

Ответ: $\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}} = \frac{1}{27}$

***b)* Правильная пирамида.**



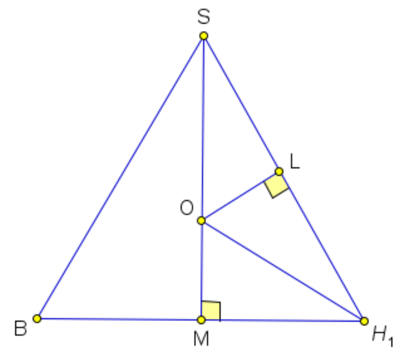
(рис.6)

Пусть $SABC$ — правильная пирамида. L, M, N, K — точки касания вписанной сферы с пирамидой. $AB = BC = AC = f,\ SA = SB = SC = a, r_1 -$ радиус вписанной сферы, $h_1 -$ высота тетраэдра $MNKL$, $h_1 \perp (NKL)$, $h_1 = LX$.

Проведем высоты SH_1 и BH_1. По теореме Пифагора для треугольника SAH_1:

$(SH_1)^2 = a^2 - \frac{f^2}{4}$, $SH_1 = \sqrt{\frac{4a^2 - f^2}{4}}$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники MOH_1, LOH_1.



(сечение пирамиды по плоскости SBH_1)

Они равны по общей гипотенузе OH_1 и равным катетам OM и OL (они равны как радиусы). Значит $MH_1 = LH_1$.

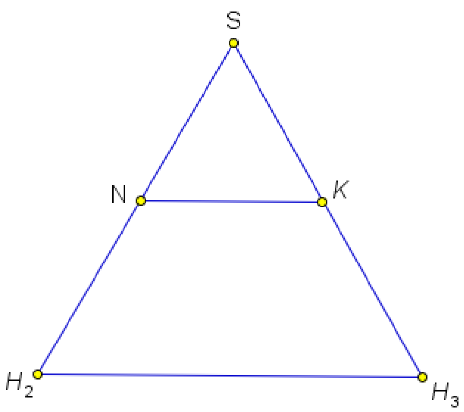
Рассмотрим треугольник ABC.

$MH_1 = \frac{f\sqrt{3}}{6}$, как радиус вписанной окружности треугольника ABC, а $BH_1 = \frac{f\sqrt{3}}{2}$.

Высота боковой грани, проведенная из точки S к стороне основания и высота тетраэдра, проведенная из точки S к основанию, образуют две пересекающиеся прямые, которые перпендикулярны ребру основания тетраэдра, а значит отрезок, соединяющий основания высот перпендикулярен соответствующему ребру, к которому опущена высота боковой грани.

$$S_{ABC} = \frac{f^2\sqrt{3}}{4}$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник SH_2H_3 ($SH_2 = SH_3$)



(сечение пирамиды по плоскости SH_2H_3)

$H_2H_3 = \frac{f}{2}$ так как это средняя линия

$$\frac{NK}{H_2H_3} = \frac{SK}{SH_3} \text{ (1)}$$

Рассмотрим равные по общему катету и равной гипотенузе треугольники SMH_1 и SMH_3

$$\frac{SK}{SH_3}=\frac{SL}{SH_1}=\frac{SH_1-LH_1}{SH_1}$$

Из выражения (1) следует, что $NK=\frac{SK\ \cdot H_2H_3}{SH_3}=\frac{(SH_1-LH_1)\ \cdot H_2H_3}{SH_1}=\frac{\left(\frac{\sqrt{4a^2-f^2}}{2}-\frac{f\sqrt{3}}{6}\right)f}{\sqrt{4a^2-f^2}}$,

где $SH_1=\frac{\sqrt{4a^2-f^2}}{2}, LH_1=\frac{f\sqrt{3}}{6}$.

Рассмотрим треугольник $NKL.\ NK=KL=LN$

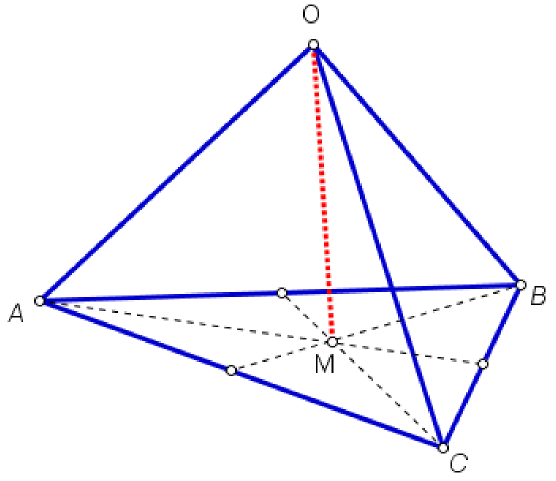
$$S_{NKL}=\frac{(NK)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{4a^2-f^2}}{2}-\frac{f\sqrt{3}}{6}\right)f}{\sqrt{4a^2-f^2}}\right)^2\sqrt{3}}{4}$$

Рассмотрим треугольники $H_1LX,\ SHH_1$. Они подобны, так как прямая LX параллельна SM. Значит, справедливо равенство $\frac{LX}{SM}=\frac{LH_1}{SH_1}=\frac{f\sqrt{3}}{3\sqrt{4a^2-f^2}}$

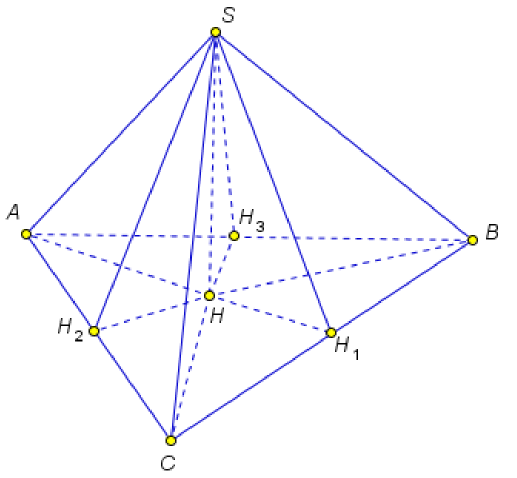
$$\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}}=\frac{LX\cdot S_{NKL}}{SM\cdot S_{ABC}}=\frac{(f\sqrt{3})\sqrt{3}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{4a^2-f^2}}{2}-\frac{f\sqrt{3}}{6}\right)f}{\sqrt{4a^2-f^2}}\right)^2}{(3\sqrt{4a^2-f^2})f^2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}a^2f-\sqrt{3}f^3-3f^2\sqrt{4a^2-f^2}}{18\sqrt{4a^2-f^2}(4a^2-f^2)}$$

Ответ: $\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}}=\frac{6\sqrt{3}a^2f-\sqrt{3}f^3-3f^2\sqrt{4a^2-f^2}}{18\sqrt{4a^2-f^2}(4a^2-f^2)}$

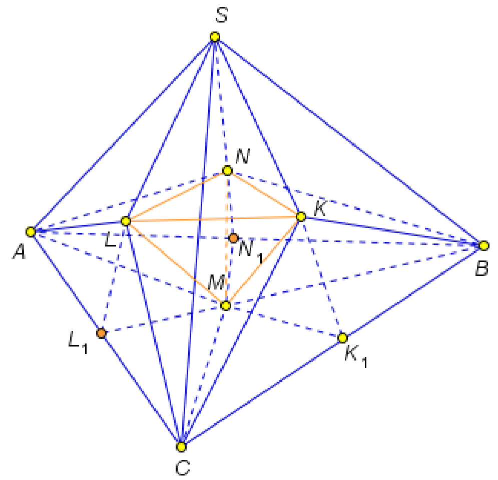
***c)* Равногранный тетраэдр.**



(рис.7)



(рис.8)



(рис.9)

Пусть *SABC* – равногранный тетраэдр. *M, N, L, K* – точки касания вписанной сферы с гранями ABC, ASB, ASC, CSB соответственно, *O* – центр сферы,

$SA, BC = a, \qquad SB, AC = b, \qquad SC\ , AB = c,$

Рассмотрим треугольники OMA, OMB, OMC на рисунке (7).

Из того, что в равногранном тетраэдре центры вписанной и описанной сферы совпадают, имеем, что $OA = OB = OC$. Значит треугольники $OMA,\ OMB,$ OMC равны по общему катету OM и гиппотинузе. Поэтому $MA = MB = MC$. Если провести аналогичные рассуждения для других граней тетраэдра, то мы получим, что точка касания сферы с гранью равноудалена от вершин грани, а значит, является центром описанной окружности грани.

Рассмотрим рисунок (8).

Высота боковой грани, проведенная из точки S, и высота равногранного тетраэдра, проведенная из точки S к основанию, образуют две пересекающиеся прямые, которые перпендикулярны ребру основания равногранного тетраэдра, к которому проведена высота, а значит и отрезок, соединяющий основания высот перпендикулярен соответствующему ребру.

Пусть $SH = h,\ CH_1 = x,\ AH_2 = y,\ BH_3 = z,\ SH_1 = h_1,\ SH_2 = h_2,\ SH_3 = h_{3,}\ \angle SH_1H = \alpha,\ \angle SH_2H = \beta,\ \angle SH_3H = \gamma.$

Из теоремы Пифагора для треугольников CSH_1, BSH_1 имеем, что $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$ из этого равенства следует, что $x = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$.

Аналогичным образом находим z, y: $y = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b},\ z = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

Из этого следует, что $h_1^2 = c^2 - x^2,\ h_2^2 = a^2 - y^2,\ h_3^2 = b^2 - z^2$.

По формуле, справедливой только для равногранного тетраэдра.

$$72V^2 = (a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(c^2-a^2+b^2) = 8h^2S_{ABC}^2$$

S_{ABC}– площадь основания равногранного тетраэдра.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Из этого следует, что $h^2 = \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(c^2-a^2+b^2)}{8S_{ABC}^2}$.

Выразим косинусы углов $\angle SH_1H,\ \angle SH_2H,\ \angle SH_3H$. По формуле $\cos\varphi = \sqrt{1 - sin^2\varphi}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{h^2}{h_1^2}},\ \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{h^2}{h_2^2}},\ \cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{h^2}{h_3^2}}.$

Рассмотрим рисунок (9).

MNKL – равногранный тетраэдр, так как если рассмотреть грани *SAC, SAB и* двугранный угол между ними, а так же грани *SBC, ABC* и двугранный угол между ними, то эти две конструкции окажутся равными друг ругу, так как совпадут при наложении, а следовательно расстояние между центрами описанных окружностей граней тоже совпадут. Значит $KM = LN$.

Аналогичным образом доказывается, что $ML = NK,\ LK = NM$.

Соединим центр описанной окружности каждой грани с вершинами соответствующей грани. Проведем высоту из центра описанной окружности, содержащегося в данной грани, к некоторой стороне треугольника, а так же к этому ребру в соседней грани проведем высоту из центра окружности описанной около этой грани. Эти высоты пересекаются. Так как KK_1 и MK_1 перпендикулярна CB имеем, что $\angle KK_1M = \alpha$.

Тем же способом получаем, что для треугольников $LL_1M,\ NN_1M$: $\angle LL_1M = \beta$, $\angle NN_1M = \gamma$.

Пусть $KM = a_1,\ ML = b_1,\ MN = c_{1.}$

R – радиус описанной окружности

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

По теореме Пифагора для треугольника CKK_1: $(KK_1)^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$

Аналогичным образом для треугольников ALL_1, BNN_1 получаем, что $(LL_1)^2 = R^2 - \frac{b^2}{4}$, $(NN_1)^2 = R^2 - \frac{c^2}{4}$.

По тереме косинусов для треугольников KK_1M, LL_1M, NN_1M.

$$a_1^2 = 2(R^2 - \frac{a^2}{4})(1-\cos\alpha) = 2(R^2 - \frac{a^2}{4})(1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{h_1^2}})$$

$$b_1^2 = 2(R^2 - \frac{b^2}{4})(1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{h_2^2}})$$

$$\mathrm{c}_1^2 = 2(\mathrm{R}^2 - \frac{\mathrm{c}^2}{4})(1 - \sqrt{1 - \frac{\mathrm{h}^2}{\mathrm{h}_3^2}})$$

Зная стороны равногранного тетраэдра *MNKL*, найдём отношение объемов.

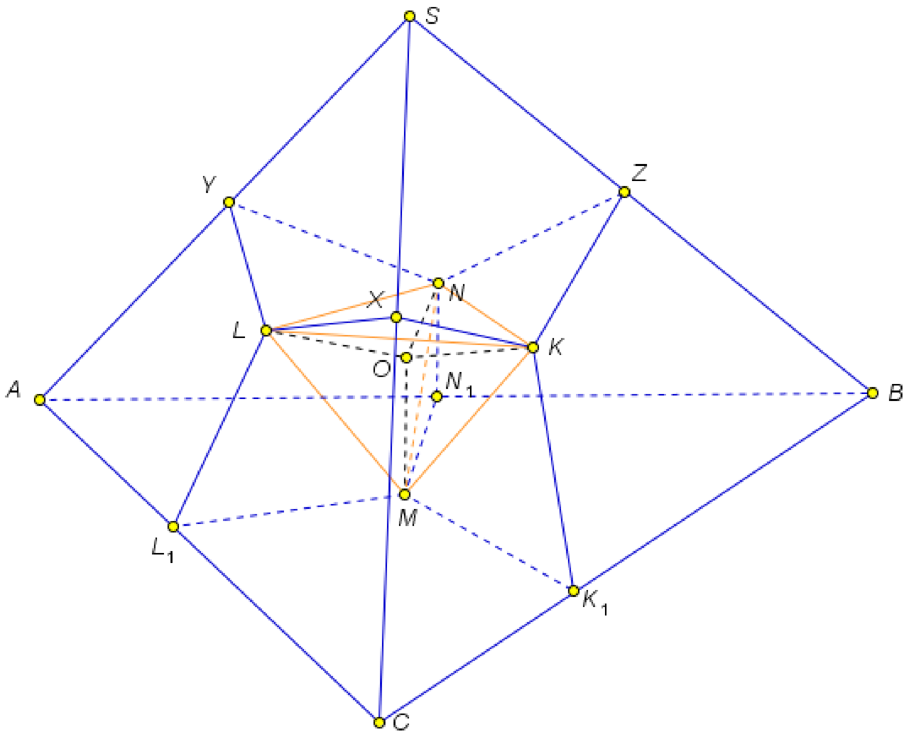
$$\frac{V_{MLNK}}{V_{SABC}} = \sqrt{\frac{(a_1^2+b_1^2-c_1^2)(a_1^2-b_1^2+c_1^2)(c_1^2-a_1^2+b_1^2)}{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(c^2-a^2+b^2)}}\text{, где}$$

$$a_1^2 = 2\left(\frac{a^2b^2c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} - \frac{a^2}{4}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(c^2-a^2+b^2)}{8p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c^2 - \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2}}\right.$$

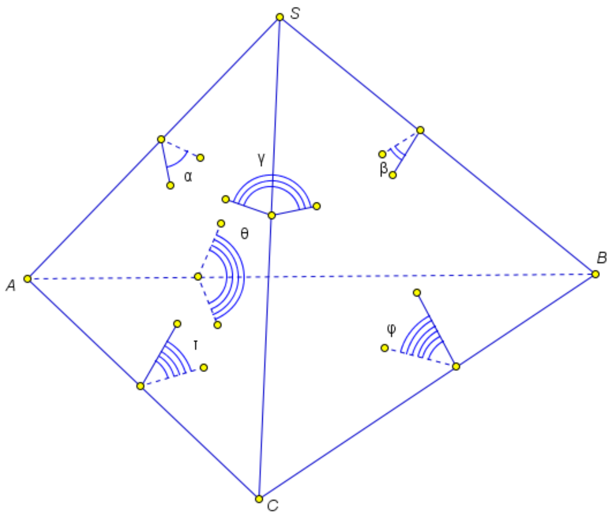
$$b_1^2 = 2\left(\frac{a^2b^2c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} - \frac{b^2}{4}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(c^2-a^2+b^2)}{8p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2}}\right)$$

$$c_1^2 = 2\left(\frac{a^2b^2c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} - \frac{c^2}{4}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(c^2-a^2+b^2)}{8p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}}\right)$$

d) **Произвольный тетраэдр.**



(Рис.10)



(рис.11)

SABC – произвольная треугольная пирамида (тетраэдр), точка *O* – центр вписанной сферы, *M*, *N*, *K*, *L* – точки касания сферы с гранями тетраэдра, $V=V_{SABC}$.

$$SA = a, SB = b, SC = c, AB = d, BC = e, AC = f,$$

$$\angle(SAB;\ SAC) = \alpha, \angle(SAB;\ SBC) = \beta, \angle(SCA;\ SCB) = \gamma,$$

$$\angle(SAB;\ ABC) = \theta, \angle(SAC;\ ABC) = \tau, \angle(SBC;\ ABC) = \varphi$$

Рассмотрим рис. 10. Найдем объем исходной пирамиды по формуле Герона-Тарталья:

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{\begin{matrix} c^2d^2(a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-d^2)+a^2e^2(c^2+b^2+d^2+f^2-e^2-a^2)+ \\ +b^2f^2(a^2+d^2+e^2+c^2-f^2-b^2)-a^2c^2f^2-c^2b^2e^2-a^2b^2d^2-e^2f^2d^2 \end{matrix}}$$

Чтобы найти синусы двугранных углов тетраэдра *SABC* воспользуемся первой формулой Штаудта:

$\Delta(S)$ – Синус Штаудта. $\Delta(S) = \sin\angle ASC \sin\angle BSC \sin\gamma$.

$$V = \frac{1}{6}abc\Delta(S)$$

$$\sin\gamma = \frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle BSC}, \qquad \sin\beta = \frac{6V}{abc\sin\angle ASB\sin\angle BSC},$$

$$\sin\alpha = \frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle ASB}, \qquad \sin\theta = \frac{6V}{adf\sin\angle SAB\sin\angle BAC},$$

$$\sin\tau = \frac{6V}{adf\sin\angle SAC\sin\angle BAC}, \qquad \sin\varphi = \frac{6V}{bde\sin\angle SBC\sin\angle ABC}.$$

Методом из пункта 2 найдем синусы некоторых углов некоторых граней.

$$\sin\angle BSC = \frac{2S_{BSC}}{cb}, \qquad \sin\angle ASB = \frac{2S_{ASB}}{ab},$$

$$\sin\angle SAB = \frac{2S_{ASB}}{ad}, \qquad \sin\angle BAC = \frac{2S_{BAC}}{df},$$

$$\sin\angle SAC = \frac{2S_{ASC}}{af}, \qquad \sin\angle SBC = \frac{2S_{BSC}}{be},$$

$$\sin\angle ASC = \frac{2S_{ASC}}{ca} \qquad \sin\angle ABC = \frac{2S_{BAC}}{de}.$$

Найдем косинусы двугранных углов тетраэдра *SABC* по формуле

$\cos\varphi = \sqrt{1 - sin^2\varphi}$:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - (\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle ASB})^2} \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - (\frac{6V}{abc\sin\angle ASB\sin\angle BSC})^2}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - (\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle BSC})^2} \qquad \cos\theta = \sqrt{1 - (\frac{6V}{adf\sin\angle SAB\sin\angle BAC})^2}$$

$$\cos\tau = \sqrt{1 - (\frac{6V}{adf\sin\angle SAC\sin\angle BAC})^2} \qquad \cos\varphi = \sqrt{1 - (\frac{6V}{bde\sin\angle SBC\sin\angle ABC})^2}$$

Рассмотрим плоскость α, проходящую через два радиуса сферы, проведённых к соседним граням, эта плоскость будет перпендикулярна их общему ребру, так как перпендикулярна каждой из граней. Рассмотрим следующие точки: центр сферы, две точки касания сферы с соседними гранями и точку пересечения плоскости α с общим ребром граней, к которым проведены рассматриваемые радиусы. Соединим точки касания сферы с гранями тетраэдра с точкой пересечения плоскости α и общего для этих граней ребра. Получится четырехугольник, который можно вписать в окружность, так как сумма противоположных углов равна 180°. Значит, значение косинуса угла между радиусами равно значению косинуса двугранного угла со знаком «-», образованного гранями, содержащими рассматриваемые точки качания.

Значит, мы можем найти сторону вписанного тетраэдра $MNKL$ через теорему косинусов.

Пусть $\mathrm{MK} = \mathrm{a}_1, \mathrm{ML} = \mathrm{b}_1, \mathrm{MN} = \mathrm{c}_1, \mathrm{LK} = \mathrm{d}_1, \mathrm{NK} = \mathrm{f}_1, \mathrm{NL} = \mathrm{e}_1$, r – радиус вписанной сферы, $S_{n.n.}$ – площадь боковой поверхности $SABC$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{п.п.}} r \Rightarrow r = \frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}$$

$$S_{\text{п.п.}} = S_{ASC} + S_{BSC} + S_{ASB} + S_{BAC} =$$

$$= \sqrt{p_1(p_1 - a)(p_1 - c)(p_1 - f)} + \sqrt{p_2(p_2 - a)(p_2 - b)(p_2 - d)} + \sqrt{p_3(p_3 - b)(p_3 - c)(p_3 - e)} + \sqrt{p_4(p_4 - f)(p_4 - d)(p_4 - e)}$$

$$p_1 = \frac{a+c+f}{2} \qquad p_2 = \frac{a+b+d}{2}$$

$$p_3 = \frac{b+c+e}{2} \qquad p_4 = \frac{f+d+e}{2}$$

Найдем стороны вписанного тетраэдра:

$$a_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_3(p_3 - b)(p_3 - c)(p_3 - e)p_4(p_4 - f)(p_4 - d)(p_4 - e)}}{e}}\right)^2}\right)$$

$$b_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1 - a)(p_1 - c)(p_1 - f)p_4(p_4 - f)(p_4 - d)(p_4 - e)}}{f}}\right)^2}\right)$$

$$c_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2 - a)(p_2 - b)(p_2 - d)p_4(p_4 - f)(p_4 - d)(p_4 - e)}}{d}}\right)^2}\right)$$

$$d_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1 - a)(p_1 - c)(p_1 - f)p_3(p_3 - b)(p_3 - c)(p_3 - e)}}{c}}\right)^2}\right)$$

$$f_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2 - a)(p_2 - b)(p_2 - d)p_3(p_3 - b)(p_3 - c)(p_3 - e)}}{b}}\right)^2}\right)$$

$$e_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1 - a)(p_1 - c)(p_1 - f)p_2(p_2 - a)(p_2 - b)(p_2 - d)}}{a}}\right)^2}\right)$$

Для случая, когда один из двугранных углов больше 90° ($\measuredangle$(ABC);(SBC)).

$$a_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 - \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{e}})^2})$$

$$b_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{f}})^2})$$

$$c_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{d}})^2})$$

$$d_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)}}{c}})^2})$$

$$f_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)}}{b}})^2})$$

$$e_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)}}{a}})^2})$$

Для случая, когда 2 двугранных угла больше 90° ($\measuredangle$(ABC);(SBC), $\measuredangle$(SAC);(ABC)).

$$a_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 - \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{e}})^2})$$

$$b_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 - \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{f}})^2})$$

$$c_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{d}})^2})$$

$$d_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)}}{c}})^2})$$

$$f_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1-(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)}}{b}})^2)}$$

$$e_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1-(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)}}{a}})^2)}$$

Для случая, когда 2 двугранных угла больше 90° (∡(ABC);(SBC), ∡(BSA);(CSA)).

$$a_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 - \sqrt{1-(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{e}})^2)}$$

$$b_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1-(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{f}})^2)}$$

$$c_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1-(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{d}})^2)}$$

$$d_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1-(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)}}{c}})^2)}$$

$$f_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1-(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)}}{b}})^2)}$$

$$e_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 - \sqrt{1-(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)}}{a}})^2)}$$

Для случая, когда 3 двугранных угла больше 90° ∡((SAC);(ABC), ∡(ABC);(SBC), ∡(ASC);(BSC)).

$$a_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 - \sqrt{1-(\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{e}})^2)}$$

$$b_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 - \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{f}})^2})$$

$$c_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}}{d}})^2})$$

$$d_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 - \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)}}{c}})^2})$$

$$f_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)}}{b}})^2})$$

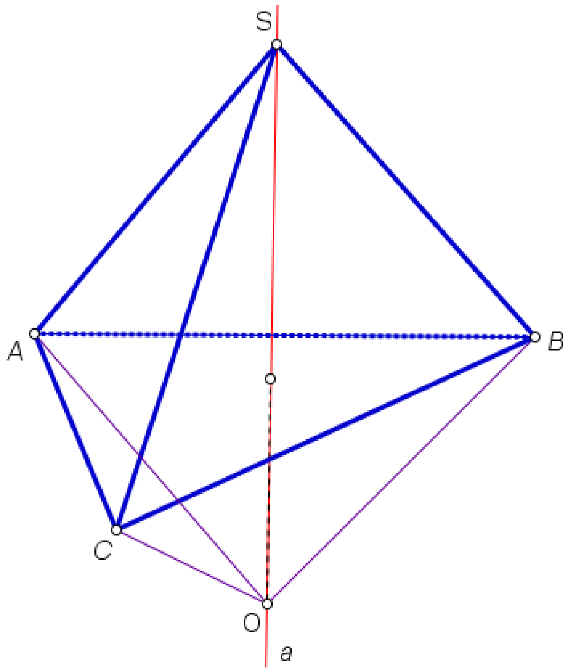
$$e_1^2 = 2\left(\frac{3V}{S_{\text{п.п.}}}\right)^2 (1 + \sqrt{1 - (\frac{3V}{\frac{2\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)}}{a}})^2})$$

Зная стороны, найдем отношение объемов.

$$\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}} = \frac{\sqrt{\begin{matrix} c_1^2 d_1^2\left(a_1^2+b_1^2+e_1^2+f_1^2-c_1^2-d_1^2\right)+a_1^2 e_1^2\left(c_1^2+b_1^2+d_1^2+f_1^2-a_1^2-e_1^2\right)+ \\ +b_1^2 f_1^2\left(a_1^2+c_1^2+e_1^2+d_1^2-b_1^2-f_1^2\right)-a_1^2 c_1^2 f_1^2-c_1^2 b_1^2 e_1^2-a_1^2 b_1^2 d_1^2-e_1^2 f_1^2 d_1^2 \end{matrix}}}{\sqrt{\begin{matrix} c^2 d^2(a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-d^2)+a^2 e^2(c^2+b^2+d^2+f^2-e^2-a^2)+ \\ +b^2 f^2(a^2+d^2+e^2+c^2-f^2-b^2)-a^2 c^2 f^2-c^2 b^2 e^2-a^2 b^2 d^2-e^2 f^2 d^2 \end{matrix}}}$$

<u>5-й пункт.</u> Пусть SABC – треугольная пирамида с ребрами SA=a, SB=b, SC=c, AB=d, BC=e, CA=f. Пирамиды касаются 4 вневписанные сферы, точки касания которых с гранями ABC, SAB, SBC, SCA есть соответственно M, N, K, L. Как связаны объемы пирамид SABC и MNKL. Рассмотреть случаи:

а) SABC – правильный тетраэдр:

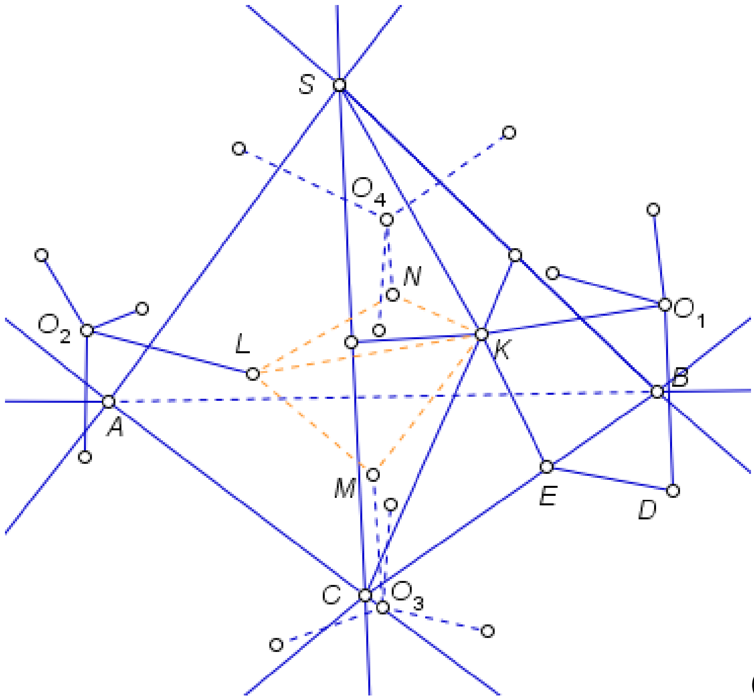


(Рис. 12)

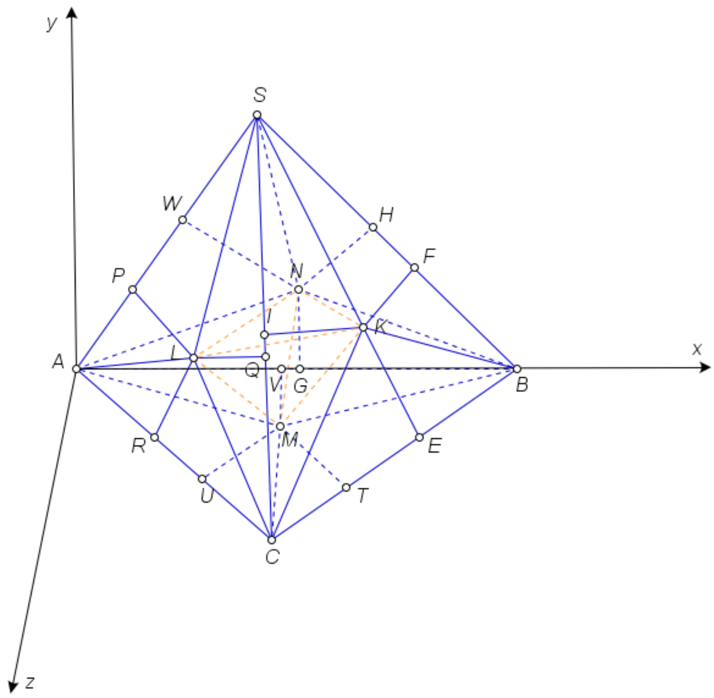
Проведем прямую a через вершину S и центр треугольника ABC. Рассмотрим расстояния от точки O до точек A, B, C. Пусть эти расстояния не равны. Построим правильный тетраэдр $SA_1B_1C_1$.
Так, что точки A, B, C совпадают соответственно с точками A_1, B_1, C_1, после чего повернем тетраэдр $SA_1B_1C_1$ на 120° по часовой стрелке вокруг прямой a. , $A_1 \to B_1, B_1 \to C_1, C_1 \to A_1 \Rightarrow$ полученная конструкция совпадет с тетраэдром $SABC$, так как тетраэдр правильный. Но так как до поворота тетраэдр $SA_1B_1C_1$ был «копией» тетраэдра SABC, значит, у них совпадали центры вневписанных окружностей, а значит и расстояния до вершин грани, которой касается вневписанная сфера, были равны. Так как после поворота оба тетраэдра опять совпали, то совпали и их центры вневписанных окружностей, а значит, расстояния до вершин тоже совпадают, но так как при повороте расстояния не менялись, а мы повернули тетраэдр не на 360° можно сделать вывод, что центр вневписанной сферы у правильного тетраэдра равноудален от вершин грани, которой касается сфера. Из этого следует, что точкой касания будет центр треугольника грани, а такой случай уже рассматривался в пункте 4а. Значит $\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}} = \frac{1}{27}$

Ответ: $\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}} = \frac{1}{27}$

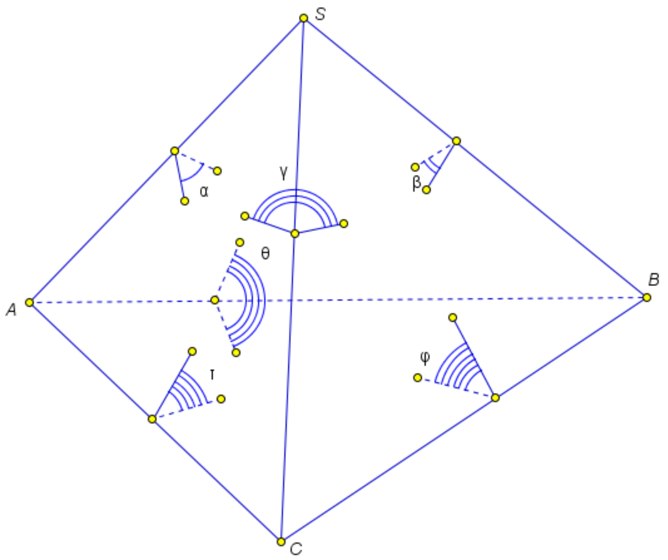
<u>d)</u> **Произвольный тетраэдр.**



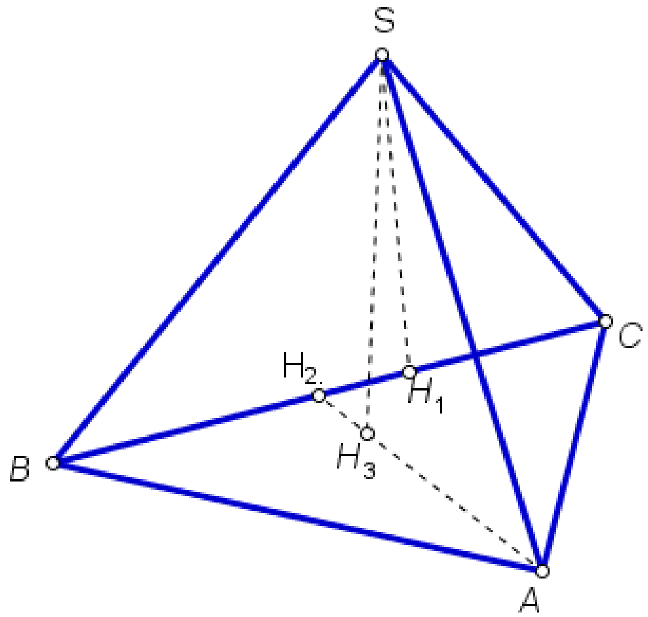
(Рис. 13)



(Рис. 14)



(Рис. 15)



(Рис. 16)

Пусть *SABC* – произвольный тетраэдр, O_1, O_2, O_3, O_4 – центры вневписанных окружностей, касающихся граней *SBC*, *SAC*, *ABC*,*SAB* соответственно K, L, M, N – точки касания вневписанных окружностей с соответствующими гранями, D – точка касания вневписанной сферы с центром в O_1 с плоскостью (ABC).

$SA = a, SB = b, SC = c, AB = d, BC = e, AC = f,$

$\angle(SAB;\ SAC) = \alpha, \angle(SAB;\ SBC) = \beta, \angle(SCA;\ SCB) = \gamma,$

$\angle(SAB;\ ABC) = \theta, \angle(SAC;\ ABC) = \tau, \angle(SBC;\ ABC) = \varphi$

$R_{O_1} = O_1K, R_{O_2} = O_2L, R_{O_3} = O_3M, R_{O_4} = O_4N.$

Найдем радиусы всех вневписанных окружностей тетраэдра SABC.

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}(S_{\text{п.п.}} - 2S_{\text{к.}})R => R = \frac{3V_{SABC}}{(S_{\text{п.п.}} - 2S_{\text{к.}})}$$

$$R_{O_1} = \frac{3V_{SABC}}{(S_{\text{п.п.}} - 2S_{SBC})} \qquad R_{O_2} = \frac{3V_{SABC}}{(S_{\text{п.п.}} - 2S_{SAC})}$$

$$R_{O_3} = \frac{3V_{SABC}}{(S_{\text{п.п.}} - 2S_{ABC})} \qquad R_{O_4} = \frac{3V_{SABC}}{(S_{\text{п.п.}} - 2S_{SAB})}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{12}\sqrt{\begin{matrix} c^2d^2(a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-d^2)+a^2e^2(c^2+b^2+d^2+f^2-e^2-a^2)+ \\ +b^2f^2(a^2+d^2+e^2+c^2-f^2-b^2)-a^2c^2f^2-c^2b^2e^2-a^2b^2d^2-e^2f^2d^2 \end{matrix}}$$

$$S_{\text{п.п.}} = S_{ASC} + S_{BSC} + S_{ASB} + S_{BAC} =$$

$$= \sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-c)(p_1-f)} + \sqrt{p_2(p_2-a)(p_2-b)(p_2-d)} +$$

$$+ \sqrt{p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-e)} + \sqrt{p_4(p_4-f)(p_4-d)(p_4-e)}$$

$$p_1 = \frac{a+c+f}{2} \qquad p_2 = \frac{a+b+d}{2}$$

$$p_3 = \frac{b+c+e}{2} \qquad p_4 = \frac{f+d+e}{2}$$

Чтобы найти синусы двугранных углов тетраэдра SABC воспользуемся первой формулой Штаудта:

$$V = \frac{1}{6}abc\Delta(S)$$

$$\sin\gamma = \frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle BSC} \qquad \sin\beta = \frac{6V}{abc\sin\angle ASB\sin\angle BSC}$$

$$\sin\alpha = \frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle ASB} \qquad \sin\theta = \frac{6V}{adf\sin\angle SAB\sin\angle BAC}$$

$$\sin\tau = \frac{6V}{adf\sin\angle SAC\sin\angle BAC} \qquad \sin\varphi = \frac{6V}{bde\sin\angle SBC\sin\angle ABC}$$

По способу из пункта 2 найдем все синусы углов граней.

$$\sin\angle BSC = \frac{2S_{BSC}}{cb} \qquad \sin\angle ASB = \frac{2S_{ASB}}{ab}$$

$$\sin\angle SAB = \frac{2S_{ASB}}{ad} \qquad \sin\angle BAC = \frac{2S_{BAC}}{df}$$

$$\sin\angle SAC = \frac{2S_{ASC}}{af} \qquad \sin\angle SBC = \frac{2S_{BSC}}{be}$$

$$\sin\angle ABC = \frac{2S_{BAC}}{de} \qquad \sin\angle SCB = \frac{2S_{BSC}}{ce}$$

$$\sin\angle SCA = \frac{2S_{ASC}}{cf} \qquad \sin\angle BCA = \frac{2S_{BAC}}{df}$$

$$\sin\angle ASC = \frac{2S_{ASC}}{ca} \qquad \sin\angle SBA = \frac{2S_{ASB}}{bd}$$

Найдем косинусы двугранных углов тетраэдра SABC по формуле

$\cos\varphi = \sqrt{1 - sin^2\varphi}$:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - (\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle ASB})^2} \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - (\frac{6V}{abc\sin\angle ASB\sin\angle BSC})^2}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - (\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle BSC})^2} \qquad \cos\theta = \sqrt{1 - (\frac{6V}{adf\sin\angle SAB\sin\angle BAC})^2}$$

$$\cos\tau = \sqrt{1 - (\frac{6V}{adf\sin\angle SAC\sin\angle BAC})^2} \qquad \cos\varphi = \sqrt{1 - (\frac{6V}{bde\sin\angle SBC\sin\angle ABC})^2}$$

Рассмотрим плоскость, проходящую через радиусы O_1D и O_1K (рис. 13), так как она проходит через O_1D и O_1K, то эта плоскость перпендикулярна CB, (SBC), (ABC). Проведем радиусы и соединим точки касания сфер с точкой пересечения плоскости и общего ребра граней (SBC), (ABC). Получится четырехугольник, который можно вписать в окружность, так как сумма противоположных углов равна 180°. Значит, косинус угла между радиусами равен косинусу двугранного угла, образованного гранью и плоскостью, содержащими рассматриваемые точки касания. Рассмотрим прямоугольные треугольники O_1ED, O_1EK они равны по катету и гипотенузе, а значит EK = ED = r_1.

Пусть $KI = r_2, KF = r_3, LQ = r_4, LR = r_5, LP = r_6, NG = r_7, NH = r_8, NW = r_9, MU = r_{11}, MT = r_{10}, MV = r_{12}$

По теореме косинусов:

$r_1^2(1 + \cos\varphi) = R_{O_1}^2(1 - \cos\varphi) => r_1^2 = R_{O_1}^2\frac{(1-\cos\varphi)}{(1+\cos\varphi)}$

Аналогичным способом находим $r_q \in \{2, 3, \dots 12\}$.

$$r_2^2 = R_{O_1}^2\frac{(1-\cos\gamma)}{(1+\cos\gamma)}, \qquad r_3^2 = R_{O_1}^2\frac{(1-\cos\beta)}{(1+\cos\beta)},$$

$$r_4^2 = R_{O_2}^2\frac{(1-\cos\gamma)}{(1+\cos\gamma)}, \qquad r_5^2 = R_{O_2}^2\frac{(1-\cos\tau)}{(1+\cos\tau)},$$

$$r_6^2 = R_{O_2}^2\frac{(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)}, \qquad r_7^2 = R_{O_4}^2\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)},$$

$$r_8^2 = R_{O_4}^2\frac{(1-\cos\beta)}{(1+\cos\beta)}, \qquad r_9^2 = R_{O_4}^2\frac{(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)},$$

$$r_{11}^2 = R_{O_3}^2\frac{(1-\cos\tau)}{(1+\cos\tau)}, \qquad r_{10}^2 = R_{O_3}^2\frac{(1-\cos\varphi)}{(1+\cos\varphi)},$$

$$r_{12}^2 = R_{O_3}^2 \frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}.$$

Пусть $EB = i_1,\ CI = j_{1,}\ SF = k_1,\ CR = i_2,\ AP = j_2,\ SQ = k_2,\ AG = i_3,$ $BH = j_3,\ SW = k_3,\ BT = i_4,\ CU = j_4,\ AV = k_4.$
Рассмотри четырехугольник IKFS его площадь можно выразить двумя способами:

$$S_{IKFS} = \frac{1}{2} r_3 k_1 + \frac{1}{2} r_2 (c - j_1)$$

$$S_{IKFS} = \frac{1}{2} \sin\angle BSC\ (r_2 r_3 + k_1(c - j_1))$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} r_3 k_1 + r_2(c - j_1) = \sin\angle BSC\ (r_2 r_3 + k_1(c - j_1)) \\ r_2 j_1 + r_1(e - i_1) = \sin\angle SCB\ (r_2 r_1 + j_1(e - i_1)) \\ r_1 i_1 + r_3(b - k_1) = \sin\angle SBC\ (r_3 r_1 + i_1(b - k_1)) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin\angle BSC k_1 j_1 - j_1 r_2 = \sin\angle BSC r_2 r_3 + \sin\angle BSC\ k_1 c - r_3 k_1 - r_2 c \\ \sin\angle SCB i_1 j_1 - i_1 r_1 = \sin\angle SCB r_2 r_1 + \sin\angle SCB\ j_1 e - r_2 j_1 - r_1 e \\ \sin\angle SBC k_1 i_1 - k_1 r_3 = \sin\angle SBC r_1 r_3 + \sin\angle SBC\ i_1 b - r_1 i_1 - r_3 b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} j_1 = \dfrac{\sin\angle BSC r_2 r_3 + \sin\angle BSC\ k_1 c - r_3 k_1 - r_2 c}{\sin\angle BSC k_1 - r_2} \\ i_1 = \dfrac{\sin\angle SCB r_2 r_1 + \sin\angle SCB\ j_1 e - r_2 j_1 - r_1 e}{\sin\angle SCB\ j_1 - r_1} \\ k_1 = \dfrac{\sin\angle SBC r_1 r_3 + \sin\angle SBC\ i_1 b - r_1 i_1 - r_3 b}{\sin\angle SBC\ i_1 - r_3} \end{cases}$$

Аналогичным образом найдем все остальные $i_n, j_n, k_n,\ n \in \{2, 3, 4\}$.

$$\begin{cases} j_2 = \dfrac{\sin\angle ASC r_4 r_6 + \sin\angle ASC\ k_2 a - r_4 k_2 - r_6 a}{\sin\angle ASC k_2 - r_6} \\ i_2 = \dfrac{\sin\angle SAC r_6 r_5 + \sin\angle SAC\ j_2 f - r_6 j_2 - r_5 f}{\sin\angle SAC\ j_2 - r_5} \\ k_2 = \dfrac{\sin\angle SCA r_5 r_4 + \sin\angle SCA\ i_2 c - r_5 i_2 - r_4 c}{\sin\angle SCA\ i_2 - r_4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_3 = \dfrac{\sin\angle BSA r_8 r_9 + \sin\angle BSA\, k_3 b - r_9 k_3 - r_8 b}{\sin\angle BSA k_3 - r_8} \\ i_3 = \dfrac{\sin\angle SBA r_8 r_7 + \sin\angle SBA\, j_3 d - r_8 j_3 - r_7 d}{\sin\angle SBA\, j_3 - r_7} \\ k_3 = \dfrac{\sin\angle SAB r_7 r_9 + \sin\angle SAB\, i_3 a - r_7 i_3 - r_9 a}{\sin\angle SAB\, i_3 - r_9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_4 = \dfrac{\sin\angle BAC r_{11} r_{12} + \sin\angle BAC\, k_4 f - r_{12} k_4 - r_{11} f}{\sin\angle BAC k_1 - r_2} \\ i_4 = \dfrac{\sin\angle ACB r_{11} r_{10} + \sin\angle ACB\, j_4 e - r_{11} j_4 - r_{10} e}{\sin\angle ACB\, j_4 - r_{10}} \\ k_4 = \dfrac{\sin\angle ABC r_{10} r_{12} + \sin\angle ABC\, i_4 d - r_{10} i_4 - r_{12} d}{\sin\angle ABC\, i_4 - r_{12}} \end{cases}$$

Введем систему координат как это показано на рисунке 14.
На рисунке 16 проведены высоты SH_3, CH_2, SH_1.
Тогда координаты точек A, B, C, S равны:
A = (0, 0, 0) = (x_1, y_1, z_1), B = (d, 0, 0) = (x_2, y_2, z_2), C = $\left(\frac{\frac{d^2+f^2-e^2}{2df}}{\left|\frac{d^2+f^2-e^2}{2df}\right|}\sqrt{f^2 - f^2 sin^2\angle BAC}, 0, f sin\angle BAC\right)$ = (x_3, y_3, z_3), S = $\left(\frac{\frac{a^2+d^2-b^2}{2ad}}{\left|\frac{a^2+d^2-b^2}{2ad}\right|}\sqrt{a^2 - a^2 sin^2\angle SAB}, \frac{3V_{SABC}}{S_{BAC}}, \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\sqrt{a^2 sin^2\angle SAB - (\frac{3V_{SABC}}{S_{BAC}})^2}\right)$ = (x_4, y_4, z_4).
Так как x координата точки C может быть отрицательна, введем выражение $\frac{\frac{d^2+f^2-e^2}{2df}}{\left|\frac{d^2+f^2-e^2}{2df}\right|}$ так как понятно, что если $\cos\angle BAC < 0$, то координата также будет меньше нуля. По аналогичным причинам введены конструкции $\frac{\frac{a^2+d^2-b^2}{2ad}}{\left|\frac{a^2+d^2-b^2}{2ad}\right|}, \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}$.

Пусть точки K, L, N, M – имеют координаты $(u_1,\ v_1,\ w_1)$, $(u_2,\ v_2,\ w_2)$, $(u_3,\ v_3,\ w_3)$, $(u_4,\ v_4,\ w_4)$ соответственно.

Рассмотрим систему $\begin{cases} (u_1 - x_3)^2 + (v_1 - y_3)^2 + (w_1 - z_3)^2 = j_1^2 + r_2^2 \ (1) \\ (u_1 - x_4)^2 + (v_1 - y_4)^2 + (w_1 - z_4)^2 = k_1^2 + r_3^2 \ (2) \\ (u_1 - x_2)^2 + (v_1 - y_2)^2 + (w_1 - z_2)^2 = i_1^2 + r_1^2 \ (3) \end{cases}$

Найдем разность строчек (1) и (2), (1) и (3), (2) и (3).

$$\begin{cases} (x_4 - x_3)(2u_1 - x_4 - x_3) + (y_4 - y_3)(2v_1 - y_4 - y_3) + (z_4 - z_3)(2w_1 - z_4 - z_3) = j_1^2 + r_2^2 - k_1^2 - r_3^2 \\ (x_2 - x_3)(2u_1 - x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)(2v_1 - y_2 - y_3) + (z_2 - z_3)(2w_1 - z_2 - z_3) = j_1^2 + r_2^2 - i_1^2 - r_1^2 \\ (x_2 - x_4)(2u_1 - x_2 - x_4) + (y_2 - y_4)(2v_1 - y_2 - y_4) + (z_2 - z_4)(2w_1 - z_2 - z_4) = k_1^2 + r_3^2 - i_1^2 - r_1^2 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
u_1 = \dfrac{\dfrac{j_1^2 + r_2^2 - k_1^2 - r_3^2 - (z_4 - z_3)(2w_1 - z_4 - z_3) - (y_4 - y_3)(2v_1 - y_4 - y_3)}{(x_4 - x_3)} + x_4 + x_3}{2} \\
v_1 = \dfrac{\dfrac{j_1^2 + r_2^2 - i_1^2 - r_1^2 - (x_2 - x_3)(2u_1 - x_2 - x_3) - (z_2 - z_3)(2w_1 - z_2 - z_3)}{y_2 - y_3} + y_2 + y_3}{2} \\
w_1 = \dfrac{\dfrac{k_1^2 + r_3^2 - i_1^2 - r_1^2 - (y_2 - y_4)(2v_1 - y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(2u_1 - x_2 - x_4)}{(z_2 - z_4)} + z_2 + z_4}{2}
\end{cases}
$$

Аналогично находим координаты других точек касания.

$$
\begin{cases}
u_2 = \dfrac{\dfrac{j_2^2 + r_6^2 - k_2^2 - r_4^2 - (z_4 - z_1)(2w_2 - z_4 - z_1) - (y_4 - y_1)(2v_1 - y_4 - y_1)}{(x_4 - x_1)} + x_4 + x_1}{2} \\
v_2 = \dfrac{\dfrac{j_2^2 + r_6^2 - i_2^2 - r_5^2 - (x_3 - x_1)(2u_2 - x_3 - x_1) - (z_3 - z_1)(2w_2 - z_3 - z_1)}{y_3 - y_1} + y_3 + y_1}{2} \\
w_2 = \dfrac{\dfrac{k_2^2 + r_4^2 - i_2^2 - r_5^2 - (y_3 - y_4)(2v_2 - y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(2u_2 - x_3 - x_4)}{(z_3 - z_4)} + z_3 + z_4}{2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
u_3 = \dfrac{\dfrac{j_3^2 + r_8^2 - k_3^2 - r_9^2 - (z_4 - z_2)(2w_3 - z_4 - z_2) - (y_4 - y_2)(2v_1 - y_4 - y_2)}{(x_4 - x_2)} + x_4 + x_2}{2} \\
v_3 = \dfrac{\dfrac{j_3^2 + r_8^2 - i_3^2 - r_7^2 - (x_1 - x_2)(2u_3 - x_1 - x_2) - (z_1 - z_2)(2w_3 - z_1 - z_2)}{y_1 - y_2} + y_1 + y_2}{2} \\
w_3 = \dfrac{\dfrac{k_3^2 + r_9^2 - i_3^2 - r_7^2 - (y_1 - y_4)(2v_3 - y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(2u_3 - x_1 - x_4)}{(z_1 - z_4)} + z_1 + z_4}{2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
u_4 = \dfrac{\dfrac{j_4^2 + r_{11}^2 - k_4^2 - r_{12}^2 - (z_1 - z_3)(2w_4 - z_1 - z_3) - (y_1 - y_3)(2v_4 - y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)} + x_1 + x_3}{2} \\
v_4 = \dfrac{\dfrac{j_4^2 + r_{11}^2 - i_4^2 - r_{10}^2 - (x_2 - x_3)(2u_4 - x_2 - x_3) - (z_2 - z_3)(2w_4 - z_2 - z_3)}{y_2 - y_3} + y_2 + y_3}{2} \\
w_4 = \dfrac{\dfrac{k_4^2 + r_{12}^2 - i_4^2 - r_{10}^2 - (y_2 - y_1)(2v_4 - y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(2u_4 - x_2 - x_1)}{(z_2 - z_1)} + z_2 + z_1}{2}
\end{cases}
$$

Зная координаты точек касания, найдем стороны внутреннего тетраэдра.
Пусть MK = a_1, ML = b_1, MN = c_1, KL = d_1, KN = f_1, LN = e_1

$$a_1^2 = (u_1 - u_4)^2 + (v_1 - v_4)^2 + (w_1 - w_4)^2$$
$$b_1^2 = (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_4)^2 + (w_2 - w_4)^2$$
$$c_1^2 = (u_3 - u_4)^2 + (v_3 - v_4)^2 + (w_3 - w_4)^2$$
$$d_1^2 = (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2$$
$$f_1^2 = (u_3 - u_1)^2 + (v_3 - v_1)^2 + (w_3 - w_1)^2$$
$$e_1^2 = (u_3 - u_2)^2 + (v_3 - v_2)^2 + (w_3 - w_2)^2$$

$$\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}} = \\ = \frac{\sqrt{\begin{array}{l} c_1^2 d_1^2(a_1^2+b_1^2+e_1^2+f_1^2-c_1^2-d_1^2)+a_1^2e_1^2(c_1^2+b_1^2+d_1^2+f_1^2-a_1^2-e_1^2)+ \\ +b_1^2f_1^2(a_1^2+c_1^2+e_1^2+d_1^2-b_1^2-f_1^2)-a_1^2c_1^2f_1^2-c_1^2b_1^2e_1^2-a_1^2b_1^2d_1^2-e_1^2f_1^2d_1^2 \end{array}}}{\sqrt{\begin{array}{l} c^2d^2(a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-d^2)+a^2e^2(c^2+b^2+d^2+f^2-e^2-a^2)+ \\ +b^2f^2(a^2+d^2+e^2+c^2-f^2-b^2)-a^2c^2f^2-c^2b^2e^2-a^2b^2d^2-e^2f^2d^2 \end{array}}}$$

Для случая, когда один из двугранных углов больше 90° (∡(ABC);(SBC)).

$\cos\alpha = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle ASB})^2}$ $\cos\beta = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASB\sin\angle BSC})^2}$

$\cos\gamma = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle BSC})^2}$ $\cos\theta = \sqrt{1-(\frac{6V}{adf\sin\angle SAB\sin\angle BAC})^2}$

$\cos\tau = \sqrt{1-(\frac{6V}{adf\sin\angle SAC\sin\angle BAC})^2}$ $\cos\varphi = -\sqrt{1-(\frac{6V}{bde\sin\angle SBC\sin\angle ABC})^2}$

Для случая, когда 2 двугранных угла больше 90° (∡(ABC);(SBC), ∡(SAC);(ABC)).

$\cos\alpha = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle ASB})^2}$ $\cos\beta = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASB\sin\angle BSC})^2}$

$\cos\gamma = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle BSC})^2}$ $\cos\theta = \sqrt{1-(\frac{6V}{adf\sin\angle SAB\sin\angle BAC})^2}$

$\cos\tau = -\sqrt{1-(\frac{6V}{adf\sin\angle SAC\sin\angle BAC})^2}$ $\cos\varphi = -\sqrt{1-(\frac{6V}{bde\sin\angle SBC\sin\angle ABC})^2}$

Для случая, когда 2 двугранных угла больше 90° (∡(ABC);(SBC), ∡(BSA);(CSA)).

$\cos\alpha = -\sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle ASB})^2}$ $\cos\beta = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASB\sin\angle BSC})^2}$

$\cos\gamma = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle BSC})^2}$ $\cos\theta = \sqrt{1-(\frac{6V}{adf\sin\angle SAB\sin\angle BAC})^2}$

$\cos\tau = \sqrt{1-(\frac{6V}{adf\sin\angle SAC\sin\angle BAC})^2}$ $\cos\varphi = -\sqrt{1-(\frac{6V}{bde\sin\angle SBC\sin\angle ABC})^2}$

Для случая, когда 3 двугранных угла больше 90° ∡((SAC);(ABC), ∡(ABC);(SBC), ∡(ASC);(BSC)).

$\cos\alpha = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle ASB})^2}$ $\cos\beta = \sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASB\sin\angle BSC})^2}$

$$\cos\gamma = -\sqrt{1-(\frac{6V}{abc\sin\angle ASC\sin\angle BSC})^2} \qquad \cos\theta = \sqrt{1-(\frac{6V}{adf\sin\angle SAB\sin\angle BAC})^2}$$

$$\cos\tau = -\sqrt{1-(\frac{6V}{adf\sin\angle SAC\sin\angle BAC})^2} \qquad \cos\varphi = -\sqrt{1-(\frac{6V}{bde\sin\angle SBC\sin\angle ABC})^2}$$

Пункт 5b) является частным случаем пункта 5d), где $\boldsymbol{e = d = f,\ a = b = c}$.
Подставив эти значения в конечную формулу из пункта 7d) получим следующий результат:

$$\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}} = \frac{f_1^2\sqrt{3a_1^2 - f_1^2}}{f^2\sqrt{3a^2 - f^2}}$$

Пункт 5c) является частным случаем пункта 5d), где $\boldsymbol{d = c, a = e, b = f}$.
Подставив эти значения в конечную формулу из пункта 7d) получим следующий результат:

$$\frac{V_{MNKL}}{V_{SABC}} = \frac{\sqrt{\begin{matrix} c_1^4(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2) + a_1^4(c_1^2 + b_1^2 - a_1^2) + \\ +b_1^4(a_1^2 + c_1^2 - b_1^2) - 2a_1^2c_1^2b_1^2 \end{matrix}}}{\sqrt{\begin{matrix} c^4(a^2 + b^2 - c^2) + a^4(c^2 + b^2 - a^2) + \\ +b^4(a^2 + c^2 - b^2) - 2a^2b^2c^2 \end{matrix}}}$$

Итоги:

Найдено отношение площадей исходного треугольника и треугольника, образованного точками касания вписанной окружности исходного треугольника, в зависимости от сторон треугольника. Найдено отношение площадей исходного треугольника и треугольника, образованного точками касания вневписанных окружностей, исходного треугольника, со сторонами, в зависимости от сторон треугольника. Предъявлена оценка отношения площадей исходного треугольника и треугольника, образованного основаниями чевиан, пересекающихся в одной точке. Найдено отношение площадей исходной трапеции и четырехугольника, образованного точками касания вписанной окружности исходной трапеции, в зависимости от сторон трапеции. Найдено отношение объёмов исходного тетраэдра и тетраэдра, образованного точками касания сферы, вписанной в исходный тетраэдр, для случаев, когда тетраэдр правильный, является правильной пирамидой, равногранным и произвольным тетраэдро, в зависимости от ребер тетраэдра. Найдено отношение объёмов исходного тетраэдра и тетраэдра, образованного точками касания вневписанных сфер с гранями исходного тетраэдра, для случаев, когда тетраэдр правильный, является правильной пирамидой, равногранным и произвольным тетраэдро, в зависимости от ребер тетраэдра.

Список использованной литературы:

1. Прокофьев А. А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов (стереометрия). М. МИЭТ, 2004
2. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Том 2. Стереометрия, преобразования пространства М. МЦНМО, 2006
3. Сабитов И. Х. Объёмы многогранников М. МЦНМО, 2002
4. Готовимся к олимпиадам по математике 10-11 классы ЧАСТЬ 2. (Выснова)