

Снижение размерности латентного пространства в задачах управления

Автор

Аннотация

Задача восстановления фазового аттрактора динамической системы по наблюдаемым временным рядам является фундаментальной в анализе нелинейных систем, поскольку структура аттрактора определяет ключевые свойства динамики и позволяет строить предсказательные модели. В данной работе рассматривается задача реконструкции аттрактора с использованием вложения задержек в смысле теоремы Такенса. Построенное таким образом пространство состояний, как правило, имеет избыточную размерность, существенно превосходящую истинную размерность динамической системы. Целью работы является понижение размерности реконструированного аттрактора при сохранении всей информации о динамике системы. Предлагаемый подход позволяет получить компактное представление фазового пространства, сохраняющее его топологическую структуру и пригодное для последующего анализа, моделирования и предсказания поведения динамической системы.

Введение

Восстановление фазового пространства динамической системы по наблюдаемым временным рядам является ключевой задачей анализа нелинейных систем. Знание структуры аттрактора позволяет исследовать динамику системы, выявлять скрытые закономерности и строить предсказательные модели. Классический подход к реконструкции фазового пространства основан на теореме Такенса [13], которая утверждает, что аттрактор системы можно корректно восстановить с помощью вложения задержек одного скалярного временного ряда, и реконструированное вложение сохраняет топологическую структуру оригинального фазового пространства — имеется дифференцируемое вложение, эквивалентное аттрактору системы [1, 5, 13].

На практике построение вложения задержек приводит к пространству, размерность которого значительно превышает истинную размерность динамической системы ввиду необходимости удовлетворения условиям теоремы Такенса (например, $p \geq 2d + 1$) [6]. Это порождает необходимость понижения размерности реконструированного аттрактора при сохранении всей информации о динамике. Адекватное снижение размерности позволяет не только уменьшить вычислительные затраты и шумовые искажения, но и выявить скрытую структуру фазового пространства, что важно для последующего анализа, предсказания и управления системой. В задачах понижения размерности часто используются методы нелинейного manifold learning, такие как Diffusion Maps, Isomap, UMAP и другие, которые стремятся сохранить геометрию и локальную структуру данных при отображении в пространство более низкой размерности [2–4].

В данной работе рассматривается задача понижения размерности вложения Такенса. Цель состоит в том, чтобы получить компактное латентное представление

реконструированного аттрактора, которое сохраняет всю информацию о динамике системы и может быть использовано для анализа поведения, моделирования и предсказания состояния системы.

Постановка задачи

Рассмотрим гладкую динамическую систему, задаваемую потоком $\varphi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ на многообразии состояний \mathcal{M} размерности n , и её фазовый аттрактор $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Предположим, что динамика наблюдается через функции наблюдения

$$h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Тогда при дискретизации времени наблюдения имеют вид

$$s_t = h(\varphi_{t\Delta t}(x_0)) + \eta_t$$

где η_t обозначает шум измерений.

Для каждого временного ряда строится вложения задержек. При фиксированных задержках τ и размерностях вложения m :

$$X_t = (s_t, s_{t-\tau_k}, \dots, s_{t-(m_k-1)\tau_k}) \in \mathbb{R}^{m_k d_k}$$

Это позволяет получить реконструированное пространство состояний системы:

$$\hat{\mathcal{A}} = \{X_t\} = X$$

Согласно теореме Такенса и её обобщениям [9], при типичных наблюдениях и достаточно большой размерности вложения реконструированный аттрактор являются гомеоморфным фазовому аттрактору \mathcal{A} .

$$\Phi : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A},$$

Таким образом, восстановленное пространство состояний содержит в себе всю информацию о динамике, однако его размерность значительно превосходит истинную размерность системы, согласно теореме Такенса [14]. Мы ставим целью понизить размерность реконструированной системы при сохранении всей информации о её динамике.

Методология

Существует множество методов понижения размерности, направленных на построение низкоразмерного латентного представления динамической системы. В данной работе нас интересуют методы, реализующие принцип автокодировщика, то есть обучение отображений

$$\mathcal{E} : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{Z}, \quad \mathcal{D} : \mathcal{Z} \rightarrow \hat{\mathcal{A}},$$

где латентное пространство \mathcal{Z} имеет существенно меньшую размерность, а композиция $\mathcal{D} \circ \mathcal{E}$ приближает тождественное отображение на реконструированном аттракторе.

Линейные автокодировщики: SVD и PCA

Классическим примером автокодировщика является сингулярное разложение (SVD), эквивалентное методу главных компонент (PCA) для центрированных данных. Пусть $X \in \mathbb{R}^{N \times D}$ — матрица задержечных векторов. Тогда

$$X = U \Sigma V^\top,$$

и усечение разложения по первым r сингулярным значениям задаёт оптимальное в смысле наименьших квадратов линейное вложение

$$\mathcal{E}(X) = X V_r, \quad \mathcal{D}(Z) = Z V_r^\top.$$

Линейные методы широко применяются для анализа динамических систем (например, Dynamic Mode Decomposition) и служат базовой моделью автокодировщика [12].

Нелинейные автокодировщики и глубокие нейронные сети

Для сложных нелинейных аттракторов линейные методы оказываются недостаточными. Нелинейные автокодировщики используют параметризованные нейронные сети для задания отображений \mathcal{E} и \mathcal{D} , обучаемых минимизацией ошибки реконструкции:

$$\min_{\theta, \phi} \sum_t \|X_t - \mathcal{D}_\phi(\mathcal{E}_\theta(X_t))\|^2.$$

Такие модели успешно применяются для понижения размерности вложений Такенса и восстановления латентных динамических координат [7, 10].

Автокодировщики на основе Transformer-архитектур

Transformer-модели используют механизм самовнимания для кодирования долгосрочных временных зависимостей в задержечных векторах. В контексте динамических систем такие архитектуры позволяют строить латентные состояния, инвариантные к выбору задержек и устойчивые к шуму наблюдений. Transformer-автокодировщики особенно эффективны при анализе высокомерных временных рядов и мультисенсорных наблюдений.

В данной работе используется архитектура автокодировщика на основе Transformer, реализующая encoder–decoder модель. На вход encoder подаётся фиксированное временное окно исходного сигнала, представляющее собой последовательность наблюдений. Encoder отображает входную последовательность в низкоразмерное латентное представление, после чего decoder восстанавливает исходное временное окно по соответствующему латентному коду.

Понижение размерности с помощью Graph Neural Diffusion

Модель Graph Neural Diffusion (GRAND) [8] моделирует поток диффузии на графе, тем самым сглаживая данные и упрощая их внутреннюю геометрию, что можно рассматривать как этап понижения эффективной размерности.

В данной работе граф строится между каналами сигнала. Пусть имеется m каналов наблюдений, каждый из которых представлен временным рядом $X_i \in \mathbb{R}^T$, $i = 1, \dots, m$.

Для построения графа рассмотрим матрицу близости $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$, элементы которой задаются через коэффициент корреляции Пирсона:

$$W_{ij} = \text{corr}(X_i, X_j), \quad (1)$$

где $\text{corr}(\cdot, \cdot)$ — коэффициент линейной корреляции Пирсона.

Таким образом, определяется полный граф $G = (V, E)$, где множество вершин V соответствует каналам сигнала, а веса рёбер отражают степень их статистической зависимости.

Для предотвращения диффузии между слабо связанными каналами производится разреживание графа. Рассмотрим граф $G' = (V, E')$, где

$$E' = \{(i, j) \mid |W_{ij}| > \rho\}, \quad (2)$$

а ρ — порог корреляционной близости. В результате получаем граф с m вершинами и e рёбрами.

Диффузия на графе каналов. На построенном графе рассматривается дискретное уравнение диффузии:

$$\frac{\partial X_i(t)}{\partial t} = \sum_{j: (i,j) \in E'} a(X_i(t), X_j(t)) (X_j(t) - X_i(t)), \quad (3)$$

где коэффициенты диффузии определяются механизмом внимания:

$$a(X_i, X_j) = \text{softmax} \left(\frac{(W_K X_i)^\top W_Q X_j}{d_k} \right). \quad (4)$$

Можно заметить, что производная состояния канала по времени представляет собой взвешенную сумму разностей с соседними каналами, что позволяет модели адаптивно определять направления сглаживания.

Интегрирование диффузионного потока. Итоговое представление канала задаётся интегрированием диффузионного потока:

$$X_i(T) = X_i(0) + \int_0^T \frac{\partial X_i(t)}{\partial t} dt, \quad X_i(0) = X_i. \quad (5)$$

Данная постановка удовлетворяет условиям теоремы Пикара–Линделёфа [8], что гарантирует существование обратного диффузионного потока, который может быть интерпретирован как декодер автокодировщика.

Отметим, что данный этап не осуществляет явного понижения размерности, а лишь упрощает внутреннюю геометрию, сглаживая шум. Для финального понижения размерности может быть использован линейный метод, например сингулярное разложение (SVD).

Эксперимент

Возьмем данный из [11]. Для начала сгладим сигнал при помощи гаусовского фильтра, после, построим вложение Такенса с параметрами $\tau = 4$, $m = 15$ и применим модели SVD, GRAND.

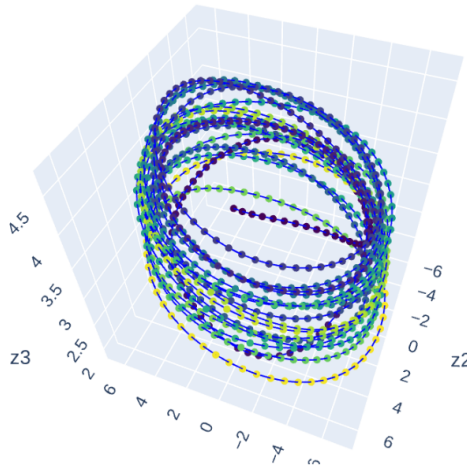


Рис. 1: SVD

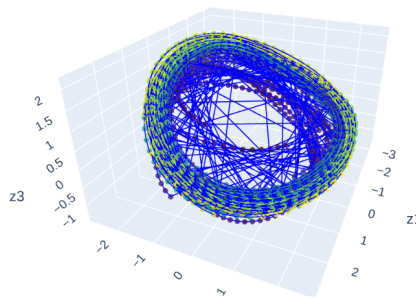


Рис. 2: GRAND

Список литературы

- [1] Takens's theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/Takens%27s_theorem, 2024. Wikipedia article, overview of Takens embedding theorem.
- [2] Algorithms for manifold learning comparison. <https://labex.io/ru/tutorials/ml-manifold-learning-comparison-49091>, 2025. Comparison of manifold learning dimensionality reduction techniques.
- [3] Diffusion map. https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_map, 2025. Nonlinear dimensionality reduction algorithm based on diffusion geometry.
- [4] Manifold learning and dimensionality reduction. <https://labex.io/ru/tutorials/ml-manifold-learning-on-spherical-data-49208>, 2025. Tutorial on manifold learning methods (Isomap, UMAP, etc.).
- [5] Phase space reconstruction. <https://complexity-methods.github.io/book/psr.html>, 2025. Overview of phase space reconstruction methods and delay embedding.
- [6] Selection of embedding dimension and delay time in phase space reconstruction. <https://www.mdpi.com/1099-4300/23/2/221>, 2025. Delay coordinate embedding and parameter selection method.

- [7] S. L. Brunton B. Lusch, J. N. Kutz. Deep learning for universal linear embeddings of nonlinear dynamics. *Nature Communications*, 9:4950, 2018.
- [8] Benjamin Paul Chamberlain, James Rowbottom, Maria Gorinova, Stefan Webb, Emanuele Rossi, and Michael M. Bronstein. Grand: Graph neural diffusion, 2021.
- [9] Ethan R. Deyle and George Sugihara. Generalized theorems for nonlinear state space reconstruction. *PLoS ONE*, 6(3):e18295, March 2011.
- [10] J. N. Kutz S. L. Brunton K. Champion, B. Lusch. Data-driven discovery of coordinates and dynamics. *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*, 2019. Deep autoencoders for nonlinear dynamics.
- [11] M. Malekzadeh, Richard G. Clegg, Andrea Cavallaro, and Hamed Haddadi. Protecting sensory data against sensitive inferences. *Proceedings of the 1st Workshop on Privacy by Design in Distributed Systems*, 2018.
- [12] C. W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter, and D. S. Henningson. Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 641:115–127, 2009.
- [13] Floris Takens. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 898:366–381, 1981.
- [14] Floris Takens. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 1981.