Минск 2022

Лицей БНТУ
220012, г. Минск, ул. Кедышко, 4, 8(017) 280-03-05, email: liceum_bntu@tut.by

Numerical spiral

Секция: Математика
Автор: Астахов Александр
Лицей БНТУ, 11 «А» класс
ул. Калиновского 60-11,
+375 29 3083009
Шишко Тимофей
Лицей БНТУ, 11 «А» класс
ул. Тимошенко 10-116,
+375 29 3945499

Научный руководитель:
Очеретняя Ольга Павловна
Лицей БНТУ
учитель математики
+375 29 620 82 58

Содержание

Цель работы

Составление математической модели спиралей, представленных в задаче, и исследование их свойств: находджение расстояния от центра до произвольной вершины спирали, нахождение ответа на вопрос о существовании самопересеченй, нахождение количества возможных полных оборотов вокруг центра спирали, а так же других свойств.

Актуальность

Данная работа применима в теории чисел, так как рассмотренные спирали, визуально иллюстрируют зависимости между натуральными числами. Таким образом данные математические модели могут служить наглядным представлением натуральных чисел. Например, на вершинах спиралей, рассмотренных в работе, можно также строить другие спирали: можно соединить вершины, расстояния до которых от центра — натуральные числа. Их, в свою очередь, можно задать многочленами $9x^2 + 6x + 1,\ 9x^2 + 12x + 4,\ 9x^2 + 18x + 9$. Таким же образом можно построить множество других спиралей, построенных на вершинах, расстояние до которых от центра — кратны некоторому простому числу, равны простым числам и т. д. Таким образом работа имеет приложение в сфере шифрования и дешифрования информации, например система шифрования RSA. Так же, как было показано в работе, число π аппроксимируется разностью радикалов, что, в свою очередь, объясняется тем, что в пределе расстояние между витками стремится к π.

Изучение спиралей в природе имеет долгую историю. Кристофер Рен заметил, что многие оболочки образуют логарифмическую спираль; Ян Сваммердам наблюдал общие математические характеристики широкого диапазона раковин от *Helix* до *Spirula*. Когда сульфат калия нагревают в воде и подвергают завихрению в химическом стакане, кристаллы образуют спиральную структуру с множеством рукавов, когда дают осесть.

Так же работа может применятся в физике так как тело может двигаться по спирали.

Постановка задачи:

В плоскости отмечены точки A_0 и O так, что длина A_0O равна 1. Точка A_1 такова, что длина A_0A_1 равна $d(1)$ и угол OA_0A_1 равен ϕ. A_{k+1}, $k = 2, 3, \dots$, строится по следующему правилу: угол OA_kA_{k+1} равен ϕ, длина A_kA_{k+1} равна $d(k+1)$ и треугольники OA_kA_{k+1} и $OA_{k-1}A_k$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой OA_k. Нас интересуют свойства ломанной $L_n = A_0, A_1, ...A_n$. Через $p(n)$ обозначим число пересечений ломанной L_n с лучом OA_0. Через $s(n)$ обозначим число самопеечений L_n.

I. Решите следующие задачи при $\phi = 90°$ и $d(n) = 1$

1. Найдите длину отрезка OA_k.
2. Для каких целых m уравнение $s(n) = m$ имеет решения?
3. Для каких целых m уравнение $p(n) = m$ имеет решения?
4. Найдите минимальное n для которого $s(n) = 1$ или докажите, что такого числа нет.

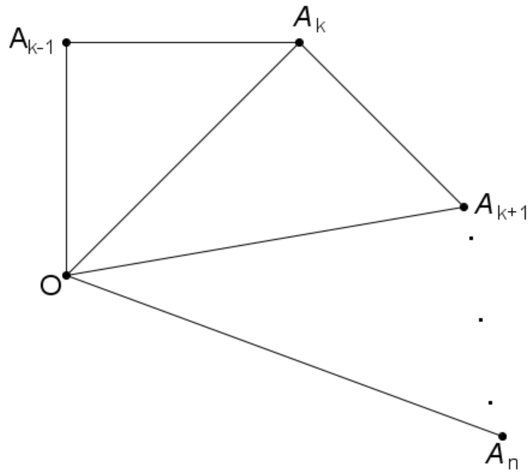
II. Решите предыдущие задачи при $\phi = 90^\circ$ и $d(n) = n$ для всех n.

III. Решите предыдущие задачи при заданном ϕ и $d(n) = 1$ для всех n.

Ход исследования

Замечание: В данной работе доказательство будем выделять с двух сторон следующим образом: ◀▶. Обозначать сравнение выражений будем следующим образом: $a \vee b$.

I. Рассмотрим случай когда $\phi = 90^\circ$ и $d(n) = 1$.



1) Найдите длину отрезка OA_k.
В данном случае длина отрезка $|OA_k| = \sqrt{k+1}$.

◀ Определим множество $E := \{k \mid k \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{k+1} = |OA_k|\}$, такое, что на его элементах имеет место наше утверждение. Докажем, что $E = \mathbb{N}$.
Для этого необходимо показать, что

$$(E \subset \mathbb{N}) \ \wedge (1 \in E) \ \wedge \ (\forall k \in E \ (k \in E \implies (k+1) \in E))$$

Покажем, что $(E \subset \mathbb{N})$: $\quad ((k \in \mathbb{N}) \implies (E \subset \mathbb{N}))$.
Исходя из теоремы Пифагора для треугольника OA_0A_1 имеем: $|OA_1| = \sqrt{1+1} \implies$ $\implies 1 \in E$.
Покажем, что $(\forall k \in E \ (k \in E \implies (k+1) \in E))$.
Рассмотрим произвольное $k \in E$. $k \in E \implies |OA_k| = \sqrt{k+1}$. Исходя из теоремы Пифагора для треугольника OA_kA_{k+1} имеем: $|OA_{k+1}| = \sqrt{|OA_k|^2 + 1} = \sqrt{k+1+1} \implies$ $\implies k+1 \in E \implies E = \mathbb{N}$. ▶

2, 4) Для каких целых m уравнение $s(n) = m$ имеет решения?
Найдите минимальное n для которого $s(n) = 1$ или докажите, что такого числа нет.

Докажем, что L_n не имеет самопересечений.
◀ Рассмотрим точку $X_k \in A_kA_{k+1}$. Исходя из теоремы Пифагора для треугольника

OA_kX_k имеем: $|OX_k| = \sqrt{|OA_k|^2 + |A_kX_k|^2} = \sqrt{k+1+|A_kX_k|^2}$.
Рассмотрим $k_1 < k_2$:
Сравним $|OX_{k_1}|$ и $|OX_{k_2}|$.

$$|OX_{k_1}| = \sqrt{k_1+1+|A_{k_1}X_{k_1}|^2} \ \vee \ \sqrt{k_2+1+|A_{k_2}X_{k_2}|^2} = |OX_{k_2}|$$

$$k_1+1+|A_{k_1}X_{k_1}|^2 \ \vee \ k_2+1+|A_{k_2}X_{k_2}|^2$$

$$k_1+|A_{k_1}X_{k_1}|^2 \ \vee \ k_2+|A_{k_2}X_{k_2}|^2$$

$$|A_{k_1}X_{k_1}|^2 - |A_{k_2}X_{k_2}|^2 \ \vee \ k_2-k_1$$

$((k_2-k_1) \in [1;\ +\infty);\ (|A_{k_1}X_{k_1}|^2-|A_{k_2}X_{k_2}|^2) \in [-1;\ 1]) \implies (k_2-k_1 \ \geq \ |A_{k_1}X_{k_1}|^2-|A_{k_2}X_{k_2}|^2) \implies$
$\implies |OX_{k_2}| \geq |OX_{k_1}|$.
Равенство достигается только когда $k_1+1=k_2,\ |A_{k_1}X_{k_1}|=1,\ |A_{k_2}X_{k_2}|=0$. Исходя из этого, равенство имеет место только, когда $X_{k_1} = X_{k_2} = A_{k_2}$.
Значит, на L_n нет точек, равноудаленных от O. Из этого можно сделать вывод, что $\forall n\ s(n) = 0$. ▶

3) Для каких целых m уравнение $p(n) = m$ имеет решения?
Рассмотрим треугольник $A_{k-1}OA_k$, выразим угол $A_{k-1}OA_k$:

$$\angle A_{k-1}OA_k = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

Отметим, что в данном случае $-\frac{\pi}{2} < \angle A_{k-1}OA_k < \frac{\pi}{2}$. Выразим $p(n)$:

$$\left\lfloor \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} \angle A_{k-1}OA_k \right\rfloor = p(n) = \left\lfloor \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \right\rfloor.$$

Чтобы найти максимальное количество пересечений L_n с OA_0 рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \angle A_{k-1}OA_k = \sum_{k=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

Докажем, что данный ряд расходится:
◀ Пользуясь рядом Маклорена имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(2t)!}{4^t(t!)^2(2t+1)} \frac{1}{(k+1)^{\frac{2t+1}{2}}}\right),$$

Отметим, что гармонический ряд: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty$. Для доказательства данного факта воспользуемся интегральным признаком Коши сходимости ряда:

$$\left(\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{k}\ dk = \lim_{b\to+\infty} \ln k\ \Big|_1^b \longrightarrow +\infty\right) \implies \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty\right)$$

$\left(\frac{1}{k+1} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 1\right)$, исходя из теоремы сравнения, имеем: $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \longrightarrow +\infty\right)$.
Так как каждое слагаемое в разложении положительно, можно сделать вывод, что:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \longrightarrow +\infty\right). \ ▶$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\angle A_{k-1}OA_k \longrightarrow +\infty\right) \implies E(p)=\mathbb{N}_0.$$

Таким образом, $\forall m\in\mathbb{N}_0\ \exists n\in\mathbb{N}: p(n)=m.$

Докажем, что расстояние между последовательными витками спирали стремится к π.

$$\xi(k)=\sum_{q=1}^{k}A_{q-1}OA_q=\sum_{q=1}^{k}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)=\int\limits_0^k\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)dq+c_1(k),\ \lim_{k\to+\infty}c_1(k)=const$$

$$\xi(k)=-\operatorname{arctg}(\sqrt{k})+k\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\sqrt{k}+c_1(k)$$

$$\text{Для } k>0:\ \operatorname{arctg}k=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$$

$$\xi(k)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-\frac{\pi}{2}+k\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\sqrt{k}+c_1(k)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\frac{1}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$\xi(k)=\frac{1}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-\frac{\pi}{2}+\frac{k}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\sqrt{k}+c_1(k)=2\sqrt{k}+c_2(k),\ \lim_{k\to+\infty}c_2(k)=const$$

$$k(\xi)=\frac{1}{4}(\xi-c_3(\xi))^2,\ \lim_{\xi\to+\infty}c_3(\xi)=const$$

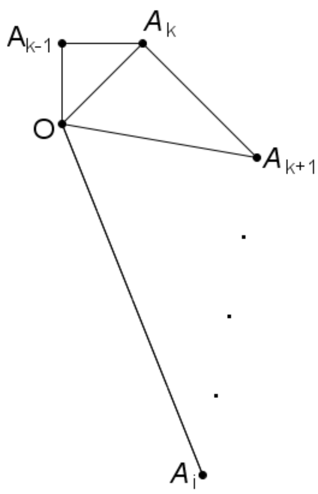
$$OA_{k(\xi)-1}=\sqrt{\frac{1}{4}(\xi-c_3(\xi))^2}=\frac{1}{2}(\xi-c_3(\xi))$$

$$\Delta OA_{k(\xi)-1}=\frac{1}{2}(\xi+2\pi-c_3(\xi+2\pi))-\frac{1}{2}(\xi-c_3(\xi))=\pi+\frac{1}{2}(c_3(\xi)-c_3(\xi+2\pi))$$

$$\lim_{\xi\to+\infty}\Delta OA_{k(\xi)-1}=\lim_{\xi\to+\infty}\left(\pi+\frac{1}{2}(c_3(\xi)-c_3(\xi+2\pi))\right)=\pi$$

Пользуясь тем, что расстояние между последовательными витками стремится к π, мы можем аппроксимировать число π разностью радикалов. Например $\sqrt{228}-\sqrt{143}\approx 3,14141$, что дает число π с точностью $99,994\%$.

II. Рассмотрим случай, когда $\phi=90^\circ$ и $d(n)=n$.



1) Найдите длину отрезка: OA_k.

В данном случае длинна отрезка $|OA_k| = \sqrt{\sum_{t=1}^{k} t^2 + 1} = \sqrt{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + 1}$.

◀ Определим множество: $E := \{k \mid k \in \mathbb{N} \ \wedge \ \sqrt{\sum_{t=1}^{k} t^2 + 1} = |OA_k|\}$, такое, что на его элементах имеет место наше утверждение. Докажем, что $E = \mathbb{N}$.
Для этого необходимо показать, что:

$$(E \subset \mathbb{N}) \ \wedge \ (1 \in E) \ \wedge \ (\forall k \in E \ (k \in E \implies (k+1) \in E)).$$

Покажем, что $E \subset \mathbb{N}$: $\quad (k \in \mathbb{N}) \implies (E \subset \mathbb{N})$.
Исходя из теоремы Пифагора для треугольника OA_0A_1 имеем: $|OA_1| = \sqrt{1+1} =$
$= \sqrt{\sum_{t=1}^{1} t^2 + 1} \implies 1 \in E$.
Покажем, что $(\forall k \in E \ (k \in E \implies (k+1) \in E))$.
Рассмотрим произвольное $k \in E$: $(k \in E) \implies |OA_k| = \sqrt{\sum_{t=1}^{k} t^2 + 1}$. Исходя из теоремы Пифагора для треугольника OA_kA_{k+1} имеем: $|OA_{k+1}| = \sqrt{|OA_k|^2 + |A_kA_{k+1}|^2} =$
$= \sqrt{\sum_{t=1}^{k} t^2 + 1 + (k+1)^2} = \sqrt{\sum_{t=1}^{k+1} t^2 + 1} \implies (k+1 \in E) \implies E = \mathbb{N}$. ▶

2, 4) Для каких целых m уравнение $s(n) = m$ имеет решения?
Найдите минимальное n для которого $s(n) = 1$ или докажите, что такого числа нет.

Ломаная L_n — не имеет самопересечений.
◀ Рассмотрим точку $X_k \in A_kA_{k+1}$. Исходя из теоремы Пифагора для треугольника OA_kX_k имеем: $|OX_k| = \sqrt{|OA_k|^2 + |A_kX_k|^2} = \sqrt{\sum_{t=1}^{k} t^2 + 1 + |A_kX_k|^2}$.
Рассмотрим $k_1 < k_2$:

$$|OX_{k_1}| = \sqrt{\sum_{t=1}^{k_1} t^2 + 1 + |A_{k_1}X_{k_1}|^2} \ \vee \ \sqrt{\sum_{t=1}^{k_2} t^2 + 1 + |A_{k_2}X_{k_2}|^2} = |OX_{k_2}|$$

$$\sum_{t=1}^{k_1} t^2 + 1 + |A_{k_1}X_{k_1}|^2 \ \vee \ \sum_{t=1}^{k_2} t^2 + 1 + |A_{k_2}X_{k_2}|^2$$

$$|A_{k_1}X_{k_1}|^2 - |A_{k_2}X_{k_2}|^2 \ \vee \ \sum_{t=(k_1+1)}^{k_2} t^2$$

$((|A_{k_1}X_{k_1}|^2 - |A_{k_2}X_{k_2}|^2) \in [-(k_2+1)^2; \ (k_1+1)^2], \ (\sum_{t=(k_1+1)}^{k_2} t^2) \in [(k_1+1)^2; \ +\infty)) \implies$
$\implies |OX_{k_1}| \leq |OX_{k_2}|$.
Случай равенства достигается, когда $(k_1 + 1 = k_2, \ |A_{k_1}X_{k_1}|^2 = (k_1+1)^2,$
$|A_{k_2}X_{k_2}|^2 = 0) \implies X_{k_1} = X_{k_2} = A_{k_2}$.
Значит, на L_n нет двух точек, находящихся на одинаковом расстоянии от O. Из этого можно сделать вывод, что $\forall n \ s(n) = 0$. ▶

3) Для каких целых m уравнение $p(n) = m$ имеет решения?
Рассмотрим треугольник $A_{k-1}OA_k$, выразим угол $A_{k-1}OA_k$:

$$\angle A_{k-1}OA_k = \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{1 + \sum_{t=1}^{k} t^2}}\right)$$

Отметим, что в данном случае $-\frac{\pi}{2} < \angle A_{k-1}OA_k < \frac{\pi}{2}$. Выразим $p(n)$:

$$\left\lfloor \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \angle A_{k-1}OA_k \right\rfloor = p(n) = \left\lfloor \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{1+\sum_{t=1}^{k} t^2}} \right) \right\rfloor$$

Для нахождения максимального количества пересечени L_n с OA_0, рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \angle A_{k-1}OA_k = \sum_{k=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{1+\sum_{t=1}^{k} t^2}} \right)$$

Докажем, что данный ряд рассходится:
◀ Пользуясь рядом Маклорена, имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{1+\sum_{t=1}^{k} t^2}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{\sqrt{1+\sum_{t=1}^{k} t^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \frac{k^{2n+1}}{\left(\sqrt{1+\sum_{t=1}^{k} t^2}\right)^{2n+1}} \right)$$

$$\frac{k^2}{1+\sum_{t=1}^{k} t^2} < \frac{k}{\sqrt{1+\sum_{t=1}^{k} t^2}} < 1$$

$$\frac{1}{k} \ \vee \ \frac{k^2}{1+\sum_{t=1}^{k} t^2} \iff 1 \ \vee \ \frac{k^3}{1+\sum_{t=1}^{k} t^2} = \frac{6k^3}{k(k+1)(2k+1)+6} = \frac{6}{2+\frac{3}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{6}{k^3}}$$

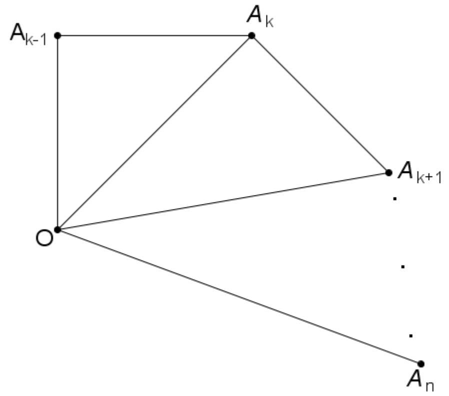
$\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\frac{6}{2+\frac{3}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{6}{k^3}} - 1 \right) = 2 \implies \left(\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\frac{k^2}{1+\sum_{t=1}^{k} t^2} - \frac{1}{k} \right) \longrightarrow +0 \right)$. Таким образом, при достаточно больших k, имеет место неравенство: $\frac{1}{k} < \frac{k^2}{1+\sum_{t=1}^{k} t^2}$.

Исходя из теоремы сравнения: $\left(\left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty \right) \implies \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{k}{1+\sum_{t=1}^{k} t^2} \longrightarrow +\infty \right) \implies \right.$ $\left. \implies \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{1+\sum_{t=1}^{k} t^2}} \longrightarrow +\infty \right) \right)$. Так как каждое слагаемое в разложении положительно, можно сделать вывод, что $\left(\sum_{t=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{1+\sum_{t=1}^{k} t^2}} \right) \longrightarrow +\infty \right)$. ▶

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \angle A_{k-1}OA_k \longrightarrow +\infty \right) \implies E(p) = \mathbb{N}_0.$$

Таким образом, $\forall m \in \mathbb{N}_0 \ \exists n \in \mathbb{N} : p(n) = m$.

III. Рассмотрим случай когда ϕ задан и $d(n) = 1$.



1) Найдите длину отрезка OA_k:

Зададим $|OA_k|$ рекурсивно, пользуясь теоремой косинусов.

$$|OA_k|^2 = \begin{cases} 1 + |OA_{k-1}|^2 - 2|OA_{k-1}|\cos\phi,\ k \in \mathbb{N} \\ |OA_0| = 1,\ k = 0 \end{cases}$$

2, 4) Для каких целых m уравнение $s(n) = m$ имеет решения?
Найдите минимальное n для которого $s(n) = 1$ или докажите, что такого числа нет.

При $\phi \geq 90^\circ$ L_n не имеет самопресечений.
◄ Рассмотрим точку $X_k \in A_kA_{k+1}$. Исходя из теоремы косинусов:

$$|OX_k| = \sqrt{|OA_k|^2 + |A_kX_k|^2 - 2|OA_k||A_kX_k|\cos\phi}.$$

Рассмотрим $k_1,\ k_2$; $k_1 < k_2$.
Сравним $|OX_{k_1}|$ и $|OX_{k_2}|$.

$$|OX_{k_1}| \ \vee\ |OX_{k_2}|$$

$$\sqrt{|OA_{k_1}|^2 + |A_{k_1}X_{k_1}|^2 - 2|OA_{k_1}||A_{k_1}X_{k_1}|\cos\phi} \vee \sqrt{|OA_{k_2}|^2 + |A_{k_2}X_{k_2}|^2 - 2|OA_{k_2}||A_{k_2}X_{k_2}|\cos\phi}$$

$$|OA_{k_1}|^2 + |A_{k_1}X_{k_1}|^2 - 2|OA_{k_1}||A_{k_1}X_{k_1}|\cos\phi \ \vee\ |OA_{k_2}|^2 + |A_{k_2}X_{k_2}|^2 - 2|OA_{k_2}||A_{k_2}X_{k_2}|\cos\phi$$

$$|A_{k_1}X_{k_1}|^2 - |A_{k_2}X_{k_2}|^2 \ \vee\ |OA_{k_2}|^2 - |OA_{k_1}|^2 - 2(|OA_{k_2}||A_{k_2}X_{k_2}| - |OA_{k_1}||A_{k_1}X_{k_1}|)\cos\phi$$

Отметим, что при $\phi \geq 90^\circ$, исходя из рекурсивной зависимости между $|OA_k|$ и $|OA_{k+1}|$, имеет место: $\forall k_1\ (k_2 > k_1) \implies (|OA_{k_2}| > |OA_{k_1}|)$. Таким образом, правая часть неравенства принимает наименьшее значение при: $k_1 + 1 = k_2,\ |A_{k_2}X_{k_2}| = 0,\ |A_{k_1}X_{k_1}| = 1$. Подставим данные значения в правую часть неравенства:

$$|OA_{k_2}|^2 - |OA_{k_1}|^2 - 2(|OA_{k_2}||A_{k_2}X_{k_2}| - |OA_{k_1}||A_{k_1}X_{k_1}|)\cos\phi$$

$$|OA_{k_1}|^2 + 1 - 2|OA_{k_1}|\cos\phi - |OA_{k_1}|^2 + 2|OA_{k_1}|\cos\phi = 1$$

Значит, минимальное значение, которое может принимать правая часть неравенства равна единице. Отметим, что левая часть неравенства может принимать значения от нуля до единицы. Значит, при $\phi \geq 90^\circ$ на L_n нет точек равноудаленных от O. Так как случай равенства достигается при: $k_1+1=k_2$, $|A_{k_2}X_{k_2}|=0$, $|A_{k_1}X_{k_1}|=1$, а из приведенных соотношений следует, что $X_{k_1}=X_{k_2}=A_{k_2}$. Таким образом, $\forall n\ s(n)=0$. ▶

3) Для каких целых m уравнение $p(n)=m$ имеет решения?

Выразим $\angle A_kOA_{k+1}$:

$$S_{A_kOA_{k+1}}=\frac{1}{2}|OA_k||A_kA_{k+1}|\sin\phi=\frac{1}{2}|OA_k||OA_{k+1}|\sin\left(\angle A_kOA_{k+1}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\sin\left(\angle A_kOA_{k+1}\right)=\frac{\sin\phi}{|OA_{k+1}|}.$$

Докажем, что для любого m существует n такое, что $p(n)=m$. Для этого рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\arcsin\left(\frac{\sin\phi}{\sqrt{1+|OA_k|^2-2|OA_k|\cos\phi}}\right)$$

Докажем, что при $\phi<90^\circ$ ряд расходится:

$$◀\ A=\sum_{k=0}^{\infty}\arcsin\left(\frac{\sin\phi}{\sqrt{1+|OA_k|^2-2|OA_k|\cos\phi}}\right)\implies$$

$$\implies\lim_{k\to+\infty}\arcsin\left(\frac{\sin\phi}{\sqrt{1+|OA_k|^2-2|OA_k|\cos\phi}}\right)=0\implies$$

$$\implies\lim_{k\to+\infty}\frac{\sin\phi}{\sqrt{1+|OA_k|^2-2|OA_k|\cos\phi}}=0\implies$$

$$\implies\lim_{k\to+\infty}(1+|OA_k|^2-2|OA_k|\cos\phi)=+\infty\implies\lim_{k\to+\infty}|OA_k|=+\infty$$

Покажем, что утверждение $\phi<90^\circ$ не влечет $\left(\lim\limits_{k\to+\infty}|OA_k|=+\infty\right)$.
Рассмотрим при каких условиях выполняется неравенство:

$$|OA_k|^2+1-2|OA_k|\cos\phi=|OA_{k+1}|^2>|OA_k|^2$$

$$(|OA_k|^2+1-2|OA_k|\cos\phi=|OA_{k+1}|^2>|OA_k|^2)\implies\left(\frac{1}{2\cos\phi}>|OA_k|\right).$$

Таким образом, существуют границы роста $|OA_k|$, что противоречит утверждению $\lim\limits_{k\to+\infty}|OA_k|=+\infty$. Таким образом, можно сделать вывод, что ряд расходится. ▶
Отметим, что в данном случае $\angle A_{k-1}OA_k$ не обязательно принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$, а так как $\angle A_{k-1}OA_k>0$ имеем, что в следствии теоремы сравнения, если расходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\arcsin\left(\frac{\sin\phi}{\sqrt{1+|OA_k|^2-2|OA_k|\cos\phi}}\right)$, то расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\angle A_{k-1}OA_k$.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\angle A_{k-1}OA_k\longrightarrow+\infty\right)\implies E(p)=\mathbb{N}_0.$$

Итоги

1) Найдена длина отрезка OA_k для всех случаев задачи.
2) Для случаев I, II, III($\phi \geq 90°$) доказано, что $\forall n\ s(n) = 0$.
3) Для случаев I, II, III($\phi < 90°$) доказано, что $E(p) = \mathbb{N}_0$.
4) Для случая I доказано, что расстояние между двумя последовательными витками спирали стрепится к π

Список используемой литературы:

Зорич, В. А. Математический анализ I/ В. А. Зорич – Москва: МЦНМО, 2019.
Зорич, В. А. Математический анализ II/ В. А. Зорич – Москва: МЦНМО, 2019.